MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U BEOGRADU

MASTER RAD

# *Puasonov proces*

Mentor:
dr Jovan Vukmirović, profesor

Kandidat:
dipl. matematičar Jelena Jakovljević

Beograd, 2013.

# Sadržaj

# Uvod

U ovom radu proučavan je jedan od važnijih slučajnih procesa, Puasonov proces. Motivacija za izbor ove teme proistekla je iz toga što ovaj proces ima značajnu ulogu u modeliranju mnogih pojava koje su slučajnog karaktera, a deo su prirode koja nas okružuje ili su deo čovekove delatnosti. U radu je najpre definisan slučajni proces kao i neke klase slučajnih procesa. Potom je detaljno proučavan homogeni Puasonov proces čija je primena i ilustrovana kroz primere. Osim homogenog Puasonovog procesa u radu su proučavani i nehomogeni Puasonov proces, složeni Puasonov proces, kao i takozvani procesi obnavljanja.

# 1. Osnovne teorije slučajnih procesa

Osnovni koncept teorije verovatnoće je slučajan eksperiment. Slučajan eksperiment je eksperiment čiji ishod ne može biti određen unapred. Skup svih mogućih ishoda slučajnog eksperimenta se naziva prostor elementarnih ishoda tog eksperimenta i označavamo ga sa $S$.

**Definicija 1.1.** Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par čije su komponente skup realnih brojeva i Borelova $\sigma -$ algebra podskupova skupa realnih brojeva. Funkcija $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zove se slučajna veličina, ako je merljiva u odnosu na $\sigma -$ algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tj. ako za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}$ važi

$$X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Zamislimo da se u svakom momentu $t$ nekog vremenskog intervala $T$ posmatra jedna karakteristika $X$ fizičkog sistema. I neka je ta karakteristika slučajnog karaktera, preciznije, neka vrednost veličine $X$ u momentu $t$ nije unapred određena, već je slučajna veličina. Dakle, $X(t)$ je neka slučajna veličina za svako $t$ iz $T$. Zato na skup svih slučajnih veličina $\{X(t), t \in T\}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, odnosno dobijamo jednu slučajnu funkciju vremena. U tom slučaju, kažemo da je $\{X(t), t \in T\}$ slučajni proces.

Postoje mnogi primeri procesa ili pojava u prirodi i čovekovoj delatnosti, gde se slučajni procesi mogu uzeti kao matematički modeli. Braunovo kretanje čestica, brzina aviona, zemljotresi, temperatura vazduha na određenom mestu, razni sistemi praćenja nekog objekta ili sistemi opsluživanja klijenata u vremenu su neki od primera. Svim ovim primerima je zajedničko to da je vrednost slučajnog procesa pri datoj vrednosti argumenta (ili argumenata ako ih ima više) realna slučajna funkcija.

Slučajni proces ili slučajna funkcija $\{X(t), t \in T\}$ je familija ralnih slučajnih veličina definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Za svako $t \in T$ prostor vrednosti je $\mathbb{R}$, pa je $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ prostor vrednosti svake slučajne veličine $X(t)$ ili fazni prostor. Skup $T$ nazivamo parametarski ili indeksni skup.

**Definicija 1.2.** Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoća i $T$ indeksni skup. Realan slučajni proces $X$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa faznim prostorom $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom $T$ je familija

$$X = \{X(t), t \in T\} \tag{1.1}$$

merljivih funkcija

$$X(t): (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (1.2).$$

Ovo znači da je slučajni proces jedna familija slučajnih veličina koje zavise od parametra $t$ i sve su definisane na istom prostoru verovatnoća. Parametar $t$ može biti realan, kompleksan ili, još opštije, $n-$ dimenzionalan. Takođe on može biti diskretan i neprekidan.

Ako za indeksni skup $T$ važi da je $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty), T = [0, +\infty)$ ili $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, onda se parametar $t \in T$ najčešće interpretira kao vreme, a slučajna funkcija $\{X(t), t \in T\}$ zove se slučajan proces sa neprekidnim vremenom. Ako je $T \subset \mathbb{Z}$, gde je $\mathbb{Z}$ skup celih brojeva, onda se slučajna funkcija $\{X(t), t \in T\}$ zove slučajan proces sa diskretnim vremenom ili slučajni niz. Ako je $T \subset \mathbb{R}^d$, gde je $d \geq 2$, onda se slučajna funkcija $\{X(t), t \in T\}$ zove slučajno polje.

Slučajni proces $\{X(t), t \in T\} = \{X(t, \omega), t \in T\}$ je, zapravo, funkcija dva parametra, $t$ i $\omega$. Koristićemo kraći zapis $\{X(t), t \in T\}$.

Ukoliko fiksiramo $t \in T$ dobijamo jednu slučajnu veličinu koju zovemo zasek ili sečenje procesa $X$ u trenutku $t$. Ta slučajna promenljiva ima svoju funkciju raspodele

$$F_1(t, x) = P\{X(t) < x\} \qquad (1.3).$$

Ovi jednodimenzionalni zakoni raspodele nisu dovoljni za karakterizaciju slučajnog procesa, osim u slučaju kada se vrednosti slučajnog procesa u raznim momentima vremena posmatraju izolovano. Zato je, u opštem slučaju, neophodno znati višedimenzionalne zakone raspodela, odnosno konačno – dimenzionalne raspodele procesa.

Neka je fiksirano n vremenskih trenutaka $t_1, \dots, t_n$. Svakom od njih odgovara po jedna slučajna veličina. Dobijamo $n$ slučajnih veličina $X(t_1), \dots, X(t_n)$, koje možemo posmatrati kao koordinate $n-$dimenzionalnog slučajnog vektora $\left(X(t_1), \dots, X(t_n)\right)$. To je jedan $n-$ dimenzionalni zasek slučajnog procesa $X$.

**Definicija 1.3.** Konačno – dimenzionalne raspodele slučajnog procesa $\{X(t), t \in T\}$ date su sa:

$$F_t(x) = F_1(t\,; x) = P(X(t) < x)$$

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = F_2(t_1, t_2\,; x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ . \end{array} \tag{1.4}$$

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_n(t_1, \dots, t_n;\, x_1, \dots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\}$$

gde su $t_1, \dots, t_n \in T$, $i$ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Familija svih $n -$ dimenzionalnih funkcija raspodele $F_n(t_1, \dots, t_n;\, x_1, \dots, x_n), n = 1, 2, \dots$ je familija konačnodimenzionalnih funkcija raspodele slučajnog procesa $X$ .

Konačnodimenzionalne raspodele slučajnog procesa zadovoljavaju, između ostalog, uslov simetrije i uslov saglasnosti.

Uslov simetrije znači da je funkcija $F_n$ invarijantna u odnosu na permutacije svih $n$ parova $(t_j, x_j)$, tj. za svaku permutaciju $(j_1, \dots, j_n)$ skupa $(1, \dots, n)$

$$F_n\left(t_{j_1}, \dots, t_{j_n};\, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\right) = F_n(t_1, \dots, t_n;\, x_1, \dots, x_n)\,. \tag{1.5}$$

Uslov saglasnosti znači da za svaku $n$ – torku $(t_1, \dots, t_n)$ i svako $k < n$ važi jednakost

$$F_k(t_1, \dots, t_k\,; x_1, \dots, x_k) = F_n(t_1, \dots, t_n\,; x_1, \dots, x_k, +\infty, \dots, +\infty).$$

Iz uslova saglasnosti sledi da zadavanje $F_n, n \geq 2$ istovremeno određuje $F_k, 1 \leq k \leq n - 1$ .

Neka je $\{X(t), t \in T\}$ realan slučajan proces definisan na nekom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sa indeksnim skupom $T$ i faznim prostorom $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Napomenuli smo da je $X(t, \omega)$ funkcija dva argumenta, $t \in T$ i $\in \Omega$ . Kada smo fiksirali vremenski trenutak $t$ dobili smo funkciju $X(t,\circ)$ merljivu u odnosu na $\mathcal{A}$, tj. dobili smo slučajnu veličinu. Obrnuto, kada fiksiramo $\omega$ dobijamo funkciju $(\circ, \omega): T \to \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.4.** Pri fiksiranom $\omega \in \Omega$ realna neslučajna funkcija $X(\circ, \omega)$, argumenta $t \in T$ zove se realizacija ili trajektorija slučajnog procesa $\{X(t), t \in T\}$.

Skup $\mathbb{R}^T$ je prostor realizacija ili prostor trajektorija slučajnog procesa.

# 2. Neke klase slučajnih procesa

**Definicija 2.1.** Slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ je proces sa nezavisnim vrednostima ako su slučajne veličine $X(t_1), \dots, X(t_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$ nezavisne. Važi:

$$F_n(t_1, \dots, t_n\,;\, x_1, \dots, x_n) = F_1(t_1\,;\, x_1) \dots F_1(t_n\,;\, x_n). \tag{2.1}$$

Ovo znači da se kod ovih procesa sve $n-$dimenzionalne raspodele izučavaju preko jednodimenzionalnih.

**Definicija 2.2.** Proces $\{X(t), t \in T\}$ je proces sa nekoreliranim vrednostima ako za svako $t \neq s$ slučajne veličine $X(t)$ i $X(s)$ su nekorelirane. Tada, znači,

$$Cov\big(X(t), X(s)\big) = E[X(t) - EX(t)] \cdot \big[\overline{X(s) - EX(s)}\big] = 0, \tag{2.2}$$

odnosno,

$$E\big[X(t)\overline{X(s)}\big] = EX(t) \cdot \overline{EX(s)}\,. \tag{2.3}$$

**Definicija 2.3.** Slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ je proces sa ortogonalnim vrednostima ako za svako $t \neq s$ slučajne veličine $X(t)$ i $X(s)$ su ortogonalne, što se zadaje uslovom

$$E\big[X(t)\overline{X(s)}\big] = 0\,. \tag{2.4}$$

**Napomena:** Klasa procesa sa ortogonalnim vrednostima je podklasa klase procesa sa nekoreliranim vrednostima. Ovo sledi iz toga što iz nezavisnosti sledi nekoreliranost, dok obrnuto ne važi.

**Definicija 2.4.** Za proces $\{X(t), t \in T\}$ za koji važi da su slučajne promenljive (tzv. priraštaji) $X(t_0),\ X(t_1) - X(t_0),\ X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}), \dots$ nezavisni za bilo koji izbor $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq \cdots,$ kažemo da je slučajni proces sa nezavisnim priraštajima.

Za poznavanje procesa $\{X(t), t \in T\}$ sa nezavisnim priraštajima dovoljno je da znamo funkcije raspodela slučajnih veličina $X(t)$ i $X(t) - X(s)$, dakle dovoljno je znati funkcije

$$F_1(t\,; x) = P[X(t) < x]\,,$$

$$G(t, s\,; x) = P\big[X(t) - X(s) < x\big]. \qquad (2.5)$$

**Definicija 2.5.** Procesi sa konačnim momentima drugog reda ili $L^2 -$procesi su kompleksni procesi $X(t) = \xi(t) + i\eta(t), t \in T$, kod kojih su procesi $\xi$ i $\eta$ realni i važi da su drugi momenti konačni, tj. $E|X(t)|^2 = E\big[X(t)\overline{X(t)}\big] = E\xi^2(t) + E\eta^2(t)$ za svako $t \in T$ .

Funkcija matematičkog očekivanja $L^2 -$ procesa je kompleksna funkcija

$$EX(t) = m(t) = E\xi(t) + iE\eta(t). \qquad (2.6)$$

Korelaciona funkcija $L^2 -$ procesa je kompleksna funkcija

$$K(s,t) = E[X(s) - m(s)] \cdot E\big[\overline{X(t) - m(t)}\big] = EX(s)\overline{X(t)} - m(s)\overline{m(t)}. \qquad (2.7)$$

Disperzija $L^2 -$ procesa je funkcija

$$DX(t) = K(t,t) = E|X(t) - m(t)|^2 = E|X(t)|^2 - |m(t)|^2\,. \qquad (2.8)$$

**Definicija 2.6.** Ako slučajne promenljive $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ imaju istu funkciju raspodele, za svako $h$ i $t_1 < t_2$, tada je slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ proces sa stacionarnim priraštajima.

**Definicija 2.7.** Slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ je strogo stacionaran ako su sve njegove konačnodimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena, tj. ako važi

$$F_n(t_1 + h, \dots, t_n + h\,; x_1, \dots, x_n) = F_n(t_1, \dots, t_n\,; x_1, \dots, x_n) \qquad (2.9)$$

za svako $h, t_1, \dots, t_n \in T$ i $n$ .

Za strogo stacionarne procese važe osobine:

$$EX(t) = EX(t+h) = m = const, \qquad (2.10)$$

$$K(s,t) = E[X(s) - m]\big[\overline{X(t) - m}\big] = E[X(s-t) - m]\big[\overline{X(t-t) - m}\big] =$$

$$= E[X(s-t) - m] \cdot [X(0) - m] = B(s-t). \qquad (2.11)$$

**Definicija 2.8.** Slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ je slabo stacionaran ako su svi njegovi momenti drugog reda konačni, matematičko očekivanje konstantno i korelaciona funkcija je funkcija razlike argumenata, tj. ako važi

$$E|X(t)|^2 < \infty, EX(t) = m = const, K(s,t) = B(s-t). \qquad (2.12)$$

**Napomena.** Slabo stacionarni procesi nazivaju se još i stacionarni u širem smislu kao i stacionarni u smislu Hinčina, dok se umesto naziva strogo stacionarni procesi koristi i process stacionaran u užem smislu.

**Definicija 2.9.** Za slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ kažemo da je proces Markova ukoliko važi:

$$P\{X(t_n) < x_n \,/\, X(t_1) < x_1, \dots, X(t_{n-1}) < x_{n-1}\} = P\{X(t_n) < x_n \,/\, X(t_{n-1}) < x_{n-1}\} \quad (2.13)$$

za svaku neopadajuću kolekciju vremenskih trenutaka $t_1, \dots, t_n \in T$ .

Drugim rečima ako su poznate "prošlosti" $(X(t_1), \dots, X(t_{n-2}))$ i "sadašnjost" $X(t_{n-1})$, onda "budućnost" $X(t_n)$ zavisi samo od "sadašnjosti", a ne i od "prošlosti". Dakle, ako je poznato $X(t)$, tada $X(s)$ za sve $s > t$ ne zavisi od $X(u)$ za $u < t$.

## 2.1 Markovski procesi

Ovi procesi kao što smo već rekli u definiciji imaju osobinu da pod uslovom da je poznata predistorija procesa, zaključno sa sadašnjim trenutkom, verovatnosna struktura procesa u budućnosti ne zavisi od cele predistorije procesa već samo od sadašnjeg trenutka. Dakle, budućnost zavisi samo od sadašnjosti i ona je uslovno nezavisna od prošlosti.

Slučajni proces sa diskretnim vremenom $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ je niz slučajnih promenljivih $X(0), X(1), X(2), \dots$ i označavamo ga sa $X = \{X(n), n \in \mathbb{N}_0\}$.

Početno stanje procesa je $X(0)$, a S je prostor stanja, tj. skup svih vrednosti koje proces $X$ može da uzme.

Lanac Markova je Markovski proces kod kojeg je skup indeksa koji predstavlja vreme diskretan, a prostor stanja je konačan ili prebrojiv.

**Definicija 2.1.1.** Diskretan slučajni proces $\{X(n), n \geq 0\}$ je lanac Markova ako za svaki trenutak $n \geq 0$ i sva stanja $i_0, i_1, \dots \in S$ i $i, j \in S$ važi:

$$\begin{aligned} P\{X(n+1) = j \,/\, X(n) = i, X(n-1) = i_{n-1}, \dots, X(0) = i_0\} = \\ = P\{X(n+1) = j \,/\, X(n) = i\} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

tj. ne zavisi od cele prošlosti, već verovatnoća prelaska u sledeće stanje zavisi samo od trenutnog stanja.

**Definicija 2.1.2.** Verovatnoća prelaza iz $i -$ tog u $j -$ to stanje (u jednom koraku) je

$$p_{i,j}^{n,n+1} := P\{X_{n+1} = j / X_n = i\}\,. \quad (2.2.2)$$

Ukoliko verovatnoća $p_{i,j}^{n,n+1}$ ne zavisi od $n$ (tj. $p_{i,j}^{n,n+1} = p_{i,j}$), onda je lanac homogen.

Matrica $P = [p_{i,j}] = \begin{bmatrix} p_{00} \; p_{01} \; p_{02} \cdots \\ p_{10} \; p_{11} \; p_{12} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$ je matrica verovatnoća prelaza za jedan korak homogenog lanca Markova. Matrica $P$ je kvadratna, ako skup stanja $S$ ima $m$ elemenata, onda je P formata $m \times m$ .

**Definicija 2.1.3.** Matrica $P = \left[p_{i,j}\right]$ je stohastička matrica jer zadovoljava sledeća dva uslova:

1) $p_{i,j} \geq 0, \forall\, i, j \in S$ (jer su ovo verovatnoće)
2) $\sum_{j\in S} p_{i,j} = 1, \forall\, i \in S$ (jer će sa verovatnoćom 1 sistem preći u neko od stanja iz skupa $S$).

Slično, možemo da govorimo o verovatnoći prelaza iz i − tog u j − to stanje i kroz n koraka.

**Definicija 2.1.4.** Verovatnoća prelaza iz $i -$ tog u $j -$ to stanje u n koraka je

$$p_{i,j}^{n} \coloneqq P\{X(n) = j / X(0) = i\} \tag{2.2.3}$$

za svako $n \geq 0$ i svako $i, j \in S$ .

Matrica prelaza za $n$ koraka je $(n) = P_n = [p_{i,j}(n)]$ .

Metod za izračunavanje verovatnoće prelaza iz $i -$ tog u $j -$ to stanje kroz $n$ koraka obezbeđuju nam jednačine Čepmen – Kolmogorova.

***Teorema 2.1.1.*** *Za proizvoljne prirodne brojeve $m$ i $n$ važe sledeće jednačine Čepmen – Kolmogorova:*

$$p_{i,j}(m, n) = \sum_k p_{i,k}(m) p_{k,j}(n) . \tag{2.2.4}$$

*Važe i jednakosti $\boldsymbol{P}_{m+n} = \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{P}_n$ i $\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}^n$, gde je $\boldsymbol{P}^n$ oznaka za $n -$ ti stepen matrice $\boldsymbol{P}$ .*

***Dokaz.*** Za proizvoljne događaja *A*, *B* i *C* važi jednakost:

$$P(AB/C) = P(A/BC)P(B/C) . \tag{2.2.5}$$

Koristeći jednakost (2.2.5) i Markovljevo svojstvo dobijamo da za verovatnoću $p_{i,j}(m+n)$ važi

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(m+n) &= P\{X(m+n) = j \,/\, X(0) = i\} \\
&= \sum_k P\{X(m+n) = j, X(m) = k \,/\, X(0) = i\} \\
&= \sum_k P\{X(m+n) = j \,/\, X(m) = k, X(0) = i\} P\{X(m) = k \,/\, X(0) = i\} \\
&= \sum_k P\{X(m+n) = j \,/\, X(m) = k\} P\{X(m) = k \,/\, X(0) = i\} \\
&= \sum_k p_{i,k}(m) p_{k,j}(n).
\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali jednakost (2.2.4). ■

Kod diskretnog slučaja lanca Markova, vreme koje sistem provede u datom stanju je deterministički određeno. Kod neprekidnog slučaja lanca Markova, za razliku od diskretnog, vreme koje sistem provede u datom stanju je slučajna promenljiva koja ima eksponencijalnu raspodelu.

Neka je $\{X(t), t \geq 0\}$ slučajni proces sa prebrojivim skupom stanja $S$.

**Definicija 2.1.5**. Slučajni proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ima Markovljevo svojstvo, ako za sve prirodne brojeve $n$, proizvoljne $i_1, \dots, i_{n-1}, j \in S$ i sve trenutke $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ važi jednakost:

$$P\{X(t_n) = j \,/\, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = P\{X(t_n) = j \,/\, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}. \qquad (2.2.6)$$

U ovom slučaju $\{X(t), t \geq 0\}$ zove se Markovljev lanac u neprekidnom vremenu i sa prebrojivim skupom stanja $S$.

**Definicija 2.1.6.** Verovatnoća prelaza iz $i -$ tog u $j -$ to stanje u toku vremenskog intervala $t$ je

$$\mathrm{p_{i,j}(t) = P\{X(t+s) = j \,/\, X(s) = i\} = P\{X(t) = j \,/\, X(0) = i\}}. \qquad (2.2.7)$$

***Teorema 2.1.2.*** *Za homogeni lanac Markova se neprekidnim vremenom važe sledeće jednačine Čepmen – Kolmogorova:*

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_k p_{i,k}(s) p_{k,j}(t) = \sum_k p_{i,k}(t) p_{k,j}(s) \qquad (2.2.8)$$

*za svako $s, t > 0$ i stanja $i, j \in S$.*

# 3. Puasonovi procesi

Puasonov proces nosi naziv po francuskom matematičaru Simeo – Deni Puasonu[1], i predstavlja slučajni proces u kojem se događaji dešavaju neprekidno i nezavisno jedan od drugog. Puasonov proces je neprekidan slučaj lanaca Markova. Ima primenu u modelovanju tzv. retkih događaja, odnosno, događaja koji su takvi da se u kratkim vremenskim intervalima može dogoditi najviše jedan takav događaj. U realne događaje koji se mogu opisati kao Puasonovi procesi su broj telefonskih poziva u centrali, radioaktivno raspadanje atoma, difuzija gasova, posete nekom web sajtu, broj zahteva koje korisnik uputi nekom sistemu, itd ...

Pre svega, definisaćemo proces prebrajanja.

**Definicija 3.1.** Slučajni proces $\{N(t), t \geq 0\}$ je proces prebrajanja ako $N(t)$ predstavlja ukupan broj događaja koji se dese u intervalu $[0, t]$. Slučajni proces $\{N(t), t \geq 0\}$ naziva se još i proces brojanja događaja.

Svojstva procesa prebrajanja:

1) $N(t) \geq 0$.
2) Za fiksirano $t$, slučajna promenljiva $N(t)$ uzima vrednosti iz skupa $\mathbb{N}_0$.
3) Ako je $s < t$, onda je $N(s) \leq N(t)$, dakle funkcija $N(t)$ je neopadajuća.
4) Za $s < t$, $N(t) - N(s)$ predstavlja broj događaja koje se realizuju u $(s, t]$.

Iz definicije 3.1 sledi da proces prebrajanja ima nezavisne priraštaje ako je broj događaja koji se dese u disjunktnim vemenskim intervalima nezavisan. S druge strane, proces prebrajanja ima stacionarne priraštaje ako raspodela broja događaja koji se dese u proizvoljnom vremenskom

[1] Simeon – Denis Poisson (1781 - 1840)

intervalu zavisi samo od dužine vremenskog interval a ne i od pozicije tog intervala na vremenskoj osi.

Sada možemo da definišemo Puasonov proces.

**Definicija 3.2.** Proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ naziva se Puasonov proces sa stopom rasta $\lambda > 0$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

*1)* $N(0) = 0$.
2) Proces $N(t)$ ima nezavisne priraštaje.
3) Broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine $t$ ima Puasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda t$, tj. za svako $s, t \geq 0$ i $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{3.1}$$

Primećujemo da definicija 3.1 znači da je broj događaja u nekom vremenskom intervalu dužine $t$ Puasonova slučajna promenljiva sa srednjom vrednošću $\lambda t$.

Iz uslova 3) možemo zaključiti da Puasonov proces ima stacionarne priraštaje jer raspodela događaja $N(t+s) - N(s)$ ne zavisi od $s$, odnosno, zavisi samo od dužine interval $t$, a ne zavisi od njegovog položaja na vremenskoj osi.

Pošto slučajna promenljiva $N(t)$ ima Puasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda t, t \geq 0$ možemo odrediti očekivanje i disperziju ovog procesa.

$$E\big(N(t)\big) = \lambda t,$$

$$D\big(N(t)\big) = \lambda t,$$

$$E\big(N^2(t)\big) = D\big(N(t)\big) + \Big(E\big(N(t)\big)\Big)^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2 .$$

Koristeći osobine Puasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ da su priraštaji nezavisni i stacionarni, sledi korelaciona funkcija Puasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$, za $0 < s < t$ je:

$$\begin{aligned} K(s,t) &= EN(s)N(t) - EN(s)EN(t) = EN(s)\big(N(t) - N(s) + N(s)\big) - \lambda s \lambda t \\ &= E\Big(N(s)\big(N(t) - N(s)\big)\Big) + E\big(N^2(s)\big) - \lambda s \lambda t \\ &= \lambda s\big(\lambda(t-s)\big) + \lambda s + (\lambda s)^2 - \lambda s \lambda t = \lambda s. \end{aligned}$$

Uopšte za proizvoljne $s, t \geq 0$ korelaciona funkcija Puasonovog procesa sa parametrom (stopom) rasta $\lambda > 0$ je:

$$K(s,t) = \lambda \cdot min\{s,t\}.$$

**Definicija 3.3.** Proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ je Puasonov proces sa stopom rasta $\lambda > 0$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1) $N(0) = 0$,
2) Proces prebrajanja $N(t)$ ima stacionarne i nezavisne priraštaje, (3.2)
3) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + \sigma(h)$,
4) $P\{X(t+h) - X(t) \geq 2\} = \sigma(h)$,

pri čemu važi $lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0$.

***Teorema 3.1.*** *Definicije 3.2 i 3.3 su ekvivalentne.*

***Dokaz.***

Pokažimo da definicija 3.3 implicira definiciju 3.2. Pretpostavimo da je

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\}. \tag{3.3}$$

Klasičnom analizom verovatnoće, $p_n(t)$ će zadovoljiti sledeću diferencijalnu jednačinu

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \tag{3.4}$$

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

sa početnim uslovom

$$p_n(0) = \begin{cases} 1, ako\ je\ n = 0, \\ 0, ako\ je\ n \neq 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Zapravo, za $n > 0$,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) = P\{N(t+h) = n\} \\ &= P\{N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &+ P\{N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1\} \\ &+ \sum_{k=2}^{n} \{N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k\} \\ &= p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + \sigma(h) && (3.7) \\ &= (1 - \lambda h)p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + \sigma(h), && (3.8) \end{aligned}$$

gde (3.7) sledi iz uslova (2) i (4), dok (3.8) zavisi od uslova (3) i (4) iz definicije 3.3 respektivno, tako da je

$$p_0(h) = 1 - P\{N(h) = 1\} - P\{N(h) \geq 2\} = 1 - \lambda h + \sigma(h).$$

Prema tome je

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Ako $h \to 0$, daje 3.5. Dokaz za 3.4 je sličan tome. Sada možemo rešiti diferencijalne jednačine sa početnim uslovima. Zapravo, iz 3.4 i 3.6 lako je uočiti da je

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Zatim pretpostavimo da je

$$p_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Iz 3.5 uz pomoć 3.6, dolazimo do

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \tag{3.9}$$

Na ovaj način zaključujemo da 3.9 sadrži celobrojne vrednosti za svako $\mathrm{n} = 0, 1, \dots$ . Ovo dokazuje da definicija 3.3 implicira definiciju 3.2. ■

*Primer*. Kvarovi na kablu pod morem prestavljaju Puasonov proces sa intezitetom $\lambda = 0.1$ po kilometru.

a) Koja je verovatnoća da neće biti kvarova u prva dva kilometra kabla?
b) Ako je poznato da nema kvarova u prva dva kilometra kabla, koja je uslovna verovatnoća da ih neće biti ni u sledeći kilometer kabla?

*Rešenje.*

a) $\lambda = 0.1, t = 2,$ pa na osnovu osobine Puasonovog procesa da broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine $t$ ima Puasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda t$

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \Rightarrow P\{N(t) = 0\} = \frac{(0.2)^0}{0!} e^{-0.2} = 0.8187.$$

b) $P\{N(3) - N(2) = 0 \,|N(2) - N(0) = 0\} = (zbog. osobine\ nezavisnosti) =$
$P\{N(3) - N(2) = 0\} = P\{N(1) = 0\} = e^{-0.1} = 0.9048.$

*Primer*. Pretpostavimo da se neka mašina kvari nedeljno u skladu sa Puasonovim procesom sa parametrom rasta $\lambda = 2$ i da se na intervalu $[0, 1]$ koji predstavlja nedelju jave tačno dva kvara. Neka je $t_0 > 3$ proizvoljna vrednost za $t$.

a) Koja je verovatnoća da će u trenutku $t_0$ proći bar dve nedelje od:
   i. poslednjeg kvara?
   ii. pretposlednjeg kvara?

b) Koja je verovatnoća da se počev od trenutka $t_0$ neće pojaviti nijedan kvar u naredna tri dana, ako se zna da se u protekle dve nedelje pojavio tačno jedan kvar?

*Rešenje.*

Neka je $N(t)$ broj kvarova koji se dese na interval $[0, t]$, gde se vreme $t$ meri nedeljama. Kako je prosečna stopa javljanja kvara 2 nedeljno, slučajna promenljiva $N(t)$ imaće Puasonovu raspodelu sa parametrom $2t$.

a) i. Dakle, interesuje nas broj kvarova tokom perioda od dve nedelje. Kako Puasonov proces ima stacionarne priraštaje, računamo verovatnoću uzimajući u obzir slučajnu promenljivu $N(2) \sim \mathcal{P}(4)$.

Sledi,

$$P\{N(2) = 0\} = e^{-\lambda t} = e^{-4} \cong 0.0183.$$

ii. Od pretposlednjeg kvara prošlo je dve nedelje ako i samo ako je broj kvarova na intervalu $[t_0 - 2, t_0]$ ili 0 ili 1. Pa računamo:

$$P\{N(2) \leq 1\} = P\{N(2) = 0\} + P\{N(2) = 1\} = e^{-4}(1 + 4) = 0.0183 \cdot 5 = 0.0915.$$

b) Kako Puasonov proces ima nezavisne priraštaje, podatak da se u poslednje dve nedelje desio jedan kvar nije bitan za ovaj slučaj. Ono što nas zanima jeste

$$N\left(t_0 + \frac{3}{7}\right) - N(t_0) = N\left(\frac{3}{7}\right) \sim \mathcal{P}\left(\frac{6}{7}\right),$$

što je, kad izračunamo,

$$P\left\{N\left(\frac{3}{7}\right) = 0\right\} = e^{-\frac{6}{7}} = 0.4244.$$

U prikazanom primeru pretpostavili smo da je intezitet rasta Puasonovog procesa isti za svaki dan u nedelji. Naravno, u praksi, ova pretpostavka nije realna, jer je intezitet rasta po danima verovatno različit u zavisnosti od opterećenja mašine. Na primer, realno je pretpostaviti da je stopa kvara mašine različita radnim danima u odnosu na neradne, kada se mašina ne koristi. Dakle, ukoliko želimo realnije da razmatramo ovaj problem, moramo koristiti parametar $\lambda$ koji nije konstantan, već je promenljiv u odnosu na vreme, odnosno, $\lambda$ bi trebalo da bude funkcija od $t$, o čemu će biti reči kasnije.

*Primer.* Neka je $X(t) = min\{2, N(t)\}, t \geq 0$ i $Y(n) = min\{n, N(n)\}, n \in \mathbb{N}_0$, gde je $\{N(t), t \geq 0\}$ Puasonov proces. Ispitati da li

*a)* proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ima svojstvo Markova *b)* proces $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ nema svojstvo Markova.

*Rešenje.*

*a)* Prvo ispitujemo da li proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ima markovsko svojstvo, tj. da li važi

$$P\{X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_n) = a_n, \dots, X(t_1) = a_1\} = P\{X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_n) = a_n\}.$$

Označimo

$$u_n = P\{X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_n) = a_n, \dots, X(t_1) = a_1\}$$

$v_n = P\{X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_n) = a_n\}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1};\ a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ i $a_i \in \{0, 1, 2\}$, jer $X(t): \Omega \to \{0, 1, 2\}$ zato što $X(t) = min\{2, N(t)\}$ i važi $X(t_1) \leq X(t_2)$ kada je $0 \leq t_1 < t_2$, jer su sve trajektorije Puasonovog procesa monotono neopadajuće funkcije.

Sada,

$i$) ako je $a_n = 2$, onda je $a_{n+1} = 2, u_n = 1, v_n = 1$ pa sledi $u_n = v_n$,

$ii$) ako je $a_n \leq 1$, $a_{n+1} = 2$, onda je

$$u_n = P\{N(t_{n+1}) \geq 2 \mid X(t_n) = a_n, \dots, X(t_1) = a_1\} = P\{N(t_{n+1}) \geq 2 \mid N(t_n) = a_n, \dots, N(t_1) = a_1\} = P\{N(t_{n+1}) \geq 2 \mid N(t_n) = a_n\}$$

jer je $\{N(t), t \geq 0\}$ Puasonov proces pa ima svojstvo Markova.

Sledi $u_n = v_n$.

*b)* Kontraprimerom ćemo pokazati da proces $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ nije Markovski

$$\begin{aligned}
P\{Y(4) = 3 \mid X(2) = 2, X(1) = 0\} &= P\{N(4) = 3 \mid N(2) \geq 2, N(1) = 0\} \\
&= \frac{P\{N(4) = 3, N(2) \geq 2, N(1) = 0\}}{P\{N(2) \geq 2, N(1) = 0\}} \\
&= \frac{P\{N(4) = 3, N(2) = 3, N(1) = 0\} + P\{N(4) = 3, N(2) = 2, N(1) = 0\}}{P\{N(2) - N(1) \geq 2, N(1) - N(0) = 0\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{6} \cdot e^{-2\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2} \cdot \frac{2\lambda e^{-2\lambda}}{1}}{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})} = \frac{\frac{\lambda^3 \cdot e^{-4\lambda}}{6} + \frac{\lambda^3 \cdot e^{-4\lambda}}{1}}{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})} \\
&= \frac{7}{6} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-3\lambda}}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

$$P\{Y(4) = 3\,|X(2) = 2\} = P\{N(4) = 3\,|N(2) \geq 2\} = \frac{P\{N(2) \geq 2, N(4) = 3\}}{P\{N(2) \geq 2\}}$$
$$= \frac{P\{N(2) = 2, N(4) = 3\} + P\{N(2) = 3, N(4) = 3\}}{P\{N(2) \geq 2\}}$$
$$= \frac{P\{N(2) = 2, N(4) - N(2) = 1\} + P\{N(2) = 3, N(4) - N(2) = 0\}}{P\{N(2) \geq 2\}}$$
$$= \frac{\frac{(2\lambda)^2 e^{-2\lambda}}{2} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda} + \frac{(2\lambda)^3 e^{-2\lambda}}{6} \cdot e^{-2\lambda}}{1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda}} = \frac{4\lambda^3 e^{-4\lambda} + \frac{4}{3}\lambda^3 e^{-4\lambda}}{1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda}}$$
$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-4\lambda}}{1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-2\lambda}}{e^{2\lambda} - 1 - 2\lambda}.$$

Kako je

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-2\lambda}}{e^{2\lambda} - 1 - 2\lambda} \neq \frac{7}{6} \cdot \frac{\lambda^3 e^{-3\lambda}}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}},$$

sledi da proces $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ nije markovski

***Teorema 3.2.*** *Neka su* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *i* $\{N_2(t), t \geq 0\}$ *dva nezavisna Puasonova procesa sa stopama rasta* $\lambda_1$ *i* $\lambda_2$*, respektivno. Proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *definisan kao* $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ *je takođe Puasonov proces sa stopom rasta* $\lambda \coloneqq \lambda_1 + \lambda_2$.

***Dokaz***. Da bismo dokazali teoremu pokazaćemo da i za zbir Puasonovih procesa važe osobine iz definicije Pasonovog procesa. Najpre pokazujemo prvu osobinu

$$N(0) \coloneqq N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0,$$

što važi.

Pokazujemo drugu osobinu, pošto su priraštaji procesa $\{N_1(t), t \geq 0\}$ i $\{N_2(t), t \geq 0\}$ nezavisni, pokazaćemo da su nezavisni i priraštaji procesa $\{N(t), t \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} N(t_k) - N(t_{k-1}) &= \big(N_1(t_k) - N_1(t_{k-1})\big) + \big(N_2(t_k) - N_2(t_{k-1})\big) \\ &= \big(N_1(t_k) + N_2(t_k)\big) - \big(N_1(t_{k-1}) + N_2(t_{k-1})\big), \end{aligned}$$

što takođe važi.

Pokazaćemo da važi i treća osobina iz definicije, da suma nezavisnih Puasonovih slučajnih promenljivih sa stopama rasta $\lambda_1$ i $\lambda_2$ takođe ima Puasonovu raspodelu sa stopom rasta $\lambda \coloneqq \lambda_1 + \lambda_2$. Zaista, ako $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, tada je njegova generatorna funkcija momenata data sa

$$\Gamma_{X_i}(t) = e^{-\lambda_i} \cdot \exp\{e^t \lambda_i\}.$$

Dalje, koristeći nezavisnost, sledi da je

$$\Gamma_{X_1+X_2}(t) = \Gamma_{X_1}(t) \cdot \Gamma_{X_2}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \exp\{e^t(\lambda_1 + \lambda_2)\}.$$

Dakle, možemo pokazati da je

$$N(s+t) - N(s) = \big(N_1(s+t) - N_1(s)\big) + \big(N_2(s+t) - N_2(s)\big) \sim \mathcal{P}\big((\lambda_1 + \lambda_2)t\big),$$

za svako $s, t \geq 0$.

Prethodna teorema se može uopštiti i na više nezavisnih Puasonovih procesa.

*Primer*. Neka su $\{N_1(t), t \geq 0\}$ i $\{N_2(t), t \geq 0\}$ dva nezavisna Puasonova procesa, prvi sa parametrom $\lambda_1$, drugi sa parametrom $\lambda_2$ i $X(t) = N_1\big(2N_2(t)\big)$. Odrediti generatornu funkciju slučajne veličine $X(t)$ i $\sigma^2 X(t)$.

*Rešenje.*

Slučajan proces $X(t)$ ćemo predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned} X(t) &= \big(N_1(2) - N_1(0)\big) + \big(N_1(4) - N_1(2)\big) + \dots + \Big(N_1\big(2N_2(t)\big) - N_1(2N_2(t) - 2)\Big) \\ &= X_1 + X_2 + \dots + X_{N_2(t)}, \end{aligned}$$

gde je

$$X_i = N_1(2i) - N_1(2i-2).$$

Dalje,

$$P\{X_i = k\} = \frac{(2\lambda_1)^k e^{-2\lambda_1}}{k!}, (k = 0, 1, \dots)$$

dakle

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ e^{-2\lambda_1} & \frac{2\lambda_1 e^{-2\lambda_1}}{1!} & \frac{(2\lambda_1)^2 e^{-2\lambda_1}}{2!} & \dots \end{pmatrix}.$$

Raspodela za $N_2(t)$ je

$$N_2(t) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ e^{-\lambda_2 t} & \frac{\lambda_2 t e^{-\lambda_2 t}}{1!} & \frac{\lambda_2^2 t\, e^{-\lambda_2 t}}{2!} & \dots \end{pmatrix}.$$

Sada računamo generatorne funkcije

$$G_{X_i}(s) = Es^{X_i} = e^{-2\lambda_1}\left(1 + 2\lambda_1 s + \frac{(2\lambda_1 s)^2}{2} + \dots\right) = e^{-2\lambda_1} \cdot e^{2\lambda_1 s} = e^{-2\lambda_1(1-s)}$$
$$= e^{2\lambda_1(s-1)}, \big(i = 1, 2, \dots, N_2(t)\big),$$

$$G_{N_2(t)}(s) = Es^{N_2(t)} = e^{-\lambda_2 t}\left(1 + 2\lambda_2 st + \frac{(2\lambda_2 st)^2}{2} + \dots\right) = e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{\lambda_2 st} = e^{-\lambda_2 t(1-s)}$$
$$= e^{\lambda_2 t(s-1)},$$

pa sledi,

$$G_{X(t)}(s) = G_{N_2(t)}\left(G_{X_i}(s)\right) = e^{\lambda_2 t\left(e^{2\lambda_1(s-1)} - 1\right)}.$$

$$G'_{X(t)}(s) = \left(e^{\lambda_2 t\left(e^{2\lambda_1(s-1)} - 1\right)}\right)'_s = \left(e^{\lambda_2 t\left(e^{2\lambda_1(s-1)}\right)} \cdot e^{-\lambda_2 t}\right)'_s$$
$$= e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{\lambda_2 t\left(e^{2\lambda_1(s-1)}\right)} \cdot \left(\lambda_2 t \cdot e^{2\lambda_1(s-1)}\right)'$$
$$= e^{\lambda_2 t\left(e^{2\lambda_1(s-1)} - 1\right)} \cdot \lambda_2 t \cdot 2\lambda_1 \cdot e^{-2\lambda_1} \cdot e^{2\lambda_1 s}$$
$$= 2\lambda_1\lambda_2 t \cdot e^{\lambda_2 t\left(e^{2\lambda_1(s-1)} - 1\right)} \cdot e^{2\lambda_1(s-1)}.$$

Kako važi da je $G'_{X(t)}(s)|_{s=1} = EX(t)$, sledi

$$G'_{X(t)}(s)|_{s=1} = EX(t) = 2\lambda_1\lambda_2 t$$

$$G''_{X(t)}(s)|_{s=1} = EX(X-1) = 4\lambda_1^2\lambda_2^2 t^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2 t,$$

pa je

$$\sigma^2 X(t) = 4\lambda_1^2\lambda_2^2 t^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2 t - 4\lambda_1^2\lambda_2^2 t^2 + 2\lambda_1\lambda_2 t = 4\lambda_1^2\lambda_2 t + 2\lambda_1\lambda_2 t.$$

**Definicija 3.4.** Za kontinuiranu slučajnu promenljivu $X$ kaže se da ima eksponencijalnu raspodelu verovatnoće $Exp(\lambda)$, ako je njena gustina određena sa

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, ako\ je\ x > 0, \\ 0, ako\ je\ x \le 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Odgovarajuća funkcija raspodele ima sledeći oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, ako\ je\ x \ge 0, \\ 0, ako\ je\ x < 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Matematičko očekivanje i disperzija eksponencijalne raspodele su:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.12}$$

Važne osobine eksponencijalne raspodele su:

1) Svojstvo odsustva sećanja: za $s, t > 0$

$$P\{X > t + s/X > s\} = P\{X > t\} = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}.$$

***Dokaz.*** Na osnovu formule za uslovnu verovatnoću, sledi

$$P\{X > t + s/X > s\} = \frac{P\{X > t + s, X > s\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > t + s\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$
$$= P\{X > t\}. \blacksquare$$

To znači da je uslovna verovatnoća da sistem radi najmanje $s + t$ sati, u slučaju da je radio $s$ sati, ista kao i bezuslovna verovatnoća da radi najmanje $t$ sati, $t > 0$. Drugim rečima, sistem ne može da zapamti koliko dugo je radio. Može se reći da je kontinuirana raspodela bez sećanja ako i samo ako je to eksponencijalna raspodela.

2) Neka su $X_1$ i $X_2$ dve nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom $Exp(\lambda)$ i $Exp(\mu)$ respektivno. Tada $min\{X_1, X_2\}$ ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda + \mu$.

***Dokaz.***

$$P\{min\{X_1, X_2\} > x\} = P\{X_1 > x, X_2 > x\} = P\{X_1 > x\} \cdot P\{X_2 > x\} = e^{-\lambda x} \cdot e^{-\mu x}$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)x}. \blacksquare$$

3) Neka su $X_1$ i $X_2$ dve nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom $Exp(\lambda)$ i $Exp(\mu)$ respektivno. Tada je $\{X_1 > X_2\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

***Dokaz.***

$$P\{X_1 > X_2\} = \iint\limits_{\{(u,v):u>v>0\}}^{+\infty} f_1(u) f_2(v) du dv = \int_0^{+\infty} \int_v^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu v} du dv$$
$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu v} dv \int_v^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu v} \lambda (-\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda u}|_v^{+\infty})) \, dv$$
$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu v} (+(e^{-\infty} + e^{-\lambda v})) \, dv$$
$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu v - \lambda v} dv = -\mu \cdot \frac{1}{\mu + \lambda} e^{-v(\lambda+\mu)}|_0^{+\infty} = +\frac{\mu}{\mu + \lambda}(e^{-\infty} + e^{0})$$
$$= \frac{\mu}{\mu + \lambda}. \blacksquare$$

**Definicija 3.5.** Diskretna slučajna veličina X ima geometrijsku raspodelu G(p) sa parametrom p, ako je funkcija verovatnoće određena sa

$$p(x) = P\{X = x\} = pq^{x-1},\ x = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

gde je $q = 1 - p, 0 < p < 1$.

Tada je $E(X) = \frac{1}{p}$.

Slučajna promenljiva celobrojne vrednosti $X$ ima odsustvo memorije ako je

$$P\{X > m + n \,/\, X > n\} = P\{X > m\},\ m, n = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

Raspodela celobrojne vrednosti ima odsustvo memorije ako i samo ako je to geometrijska raspodela.

U određenom (datom) Puasonovom procesu sa stopom rasta $\lambda$, neka je $\tau_1$ vreme prvog događaja. Uopšte, za $n \geq 1$, neka je $\tau_n$ vreme između $(n-1)$ - tog i $n$ - tog događaja. Uzimajući ovo u obzir imamo narednu teoremu.

***Teorema 3.3.*** *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Puasonov proces sa stopom rasta* $\lambda$, *a* $\tau_i$ *vreme koje proces provede u stanju* $i$, *gde je* $= 0, 1, \dots$ . *Slučajne promenljive* $\tau_i$ *su nezavisne i sa istom raspodelom (n. i. r.) slučajne promenljive, i svaka ima eksponencijalnu raspodelu* $Exp$ $(\lambda)$.

***Dokaz.***

Jasno je da je $P\{\tau_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$. Tada $\tau_1$ ima eksponencijalnu raspodelu $Exp(\lambda)$. Sada razmatramo

$$P\{\tau_1 > s, \tau_2 > t\} = \int_0^\infty P\{\tau_1 > s, \tau_2 > t \,/\, \tau_1 = x\}\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

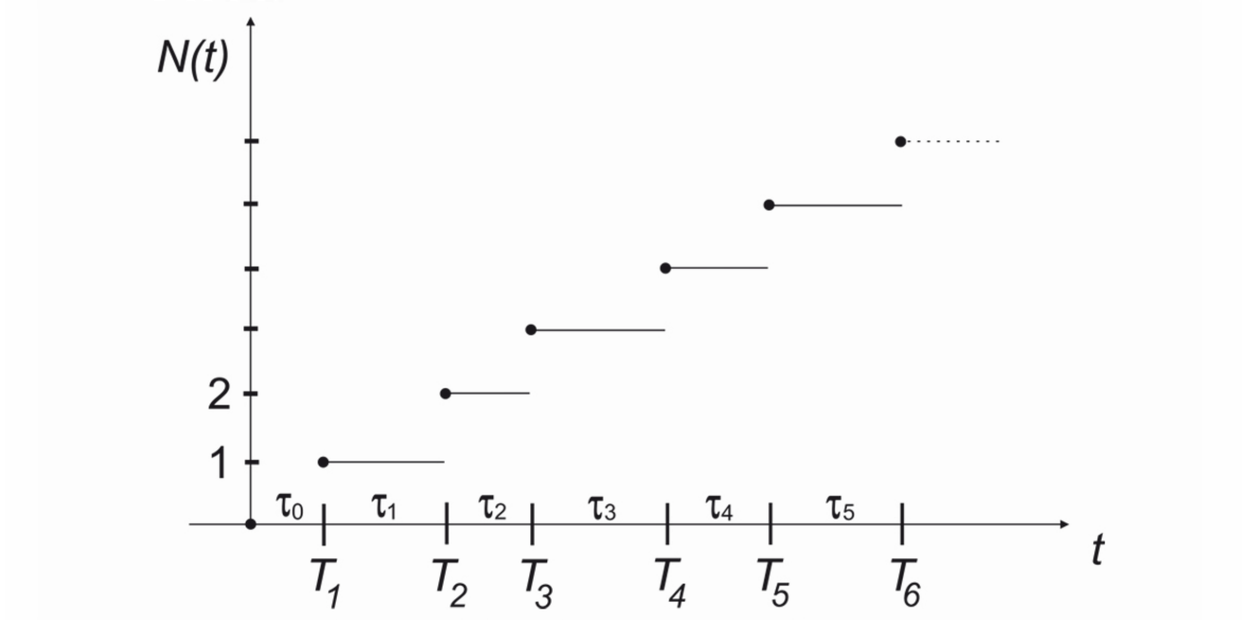
$$= \int_s^\infty P\{bez\ događaja\ u\ (x, t + x] / \tau_1 = x\}\, \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_s^\infty P\{bez\ događaja\ u\ (x, t + x]\} \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (3.15)$$

$$= e^{-\lambda t} \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx \quad (3.16)$$

$$= e^{-\lambda s} e^{-\lambda t},$$

gde je (3.15) prouzrokovan nezavisnim priraštajima, i (3.16) zavisi od (3.1). Stoga su $\tau_1$ i $\tau_2$ nezavisne i svaka ima $Exp\ (\lambda)$ raspodelu.




*Slika 3.1. Trajektorije Puasonovog procesa*

***Lema.*** *Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda$, za svako i. Tada slučajna promenljiva $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ima gama raspodelu sa parametrima $n$ i $\lambda$.*

***Posledica.*** *U Puasonovom procesu sa stopom rasta $\lambda$, vreme potrebno da se desi svih $n$ događaja, počev od ma kog vremenskog trenutka, ima gama raspodelu sa parametrima $n$ i $\lambda$.*

***Dokaz.*** Vreme pojavljivanja $n$ - tog događaja $T_n$ možemo definisati kao

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \, , n = 1, 2, \dots ,$$

jer je $\{N(t), t\ \geq 0\}$ neprekidan stohastički proces. S obzirom da su $\tau_i$, gde je $i = 1, 2, \dots, n$, nezavisne i sa istom raspodelom slučajne promenljive, svaka ima eksponencijalnu raspodelu $Exp(\lambda)$, na osnovu leme tvrdimo da

$$T_n \sim \Gamma(\mathrm{n}, \lambda).$$

Štaviše, na osnovu toga što Puasonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje, zaključujemo da

$$P\{T_{n+k} \le t + t_k \,|N(t_k) = k\} = P\{T_n \le t\}, \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Ovo znači da ako znamo da se do trenutka $t_k$ desilo tačno $k$ događaja (od nekog početnog trenutka), onda vreme potrebno da se desi $n$ dodatnih događaja od trenutka $t_k$ ima istu raspodelu kao i $T_n$.

Prethodno tvrđenje i relacija

$$N(t) \ge n \Leftrightarrow T_n \le t \tag{3.17}$$

omogućavaju da na još jedan način definišemo Puasonov proces. Ova alternativna definicija u nekim slučajevima je jednostavnija za pokazivanje.

Kako su $\tau_i$, gde je $i = 1, 2, \ldots, n$, nezavisne i sa istom raspodelom slučajne promenljive, $\tau_i \sim Exp(\lambda)$, tada (3.17) daje

$$P\{S_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \tag{3.18}$$

Prema tome naći izvod funkcije a uzimajući u obzir $t$, $T_n$ će imati gama raspodelu $\Gamma(n, \lambda)$ sa funkcijom gustine

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , inače \end{cases} \tag{3.19}$$

*Primer*. Neka je $\{N(t), t \ge 0\}$ Puasonov proces sa parametrom $\lambda > 0$. Dokazati da je $\sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n < y\} = \lambda y$, za $y > 0$. $T_n$ je trenutak ostvarivanja $n$ - tog događaja.

*Rešenje.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \le y\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P\{N(y) = k\} =$$
$$= P\{N(y) = 1\} + P\{N(y) = 2\} + P\{N(y) = 3\} + \ldots (za\ n = 1)$$
$$+ P\{N(y) = 2\} + P\{N(y) = 3\} + P\{N(y) = 4\} + \ldots (za\ n = 2)$$
$$+ P\{N(y) = 3\} + P\{N(y) = 4\} + P\{N(y) = 5\} + \ldots (za\ n = 3) + \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(y) = n\} = E\big(\mathcal{P}(\lambda y)\big) = \lambda y.$$

***Teorema 3.4***. *Neka su $X_i \sim Exp(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$, nezavisne slučajne promenljive i neka je $T_0 := 0$ i $T_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, za $n \in \mathbb{N}$. Ako definišemo $N(t) = max\{T_n \le t, n \ge 0\}$, onda je $\{N(t), t \ge 0\}$ Puasonov proces sa parametrom $\lambda$.*

***Teorema 3.5.*** *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Puasonov proces sa stopom rasta* $\lambda$*. Tada uslovna slučajna promenljiva* $T_1 \mid N(t) = 1$ *ima uniformnu raspodelu na interval* $(0, t]$*, gde je* $T_1$ *vreme pojavljivanja prvog događaja u ovom procesu.*

***Dokaz***. Za $0 < s \leq t$, koristeći Bajesovu teoremu za verovatnoću, dobijamo da važi

$$P\{T_1 \leq s | N(t) = 1\} = \frac{P\{T_1 \leq s \cap N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} = \frac{P\{N(s) = 1 \cap N(t) - N(s) = 0\}}{P\{N(t) = 1\}}$$
$$= \frac{\left(\lambda s e^{-\lambda s}\right) e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.$$

***Napomena***. Ova teorema sledi direktno iz osobine da su priraštaji Puasonovog procesa nezavisni i stacionarni. Važi da verovatnoća da se događaj pojavi u proizvoljnom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine tog interval. Još opštije, ako $T^*$ predstavlja vreme pojavljivanja jedinog događaja na intervalu $(t_1, t_2]$, gde je $0 \leq t_1 < t_2$, tada $T^*$ ima uniformnu raspodelu na datom intervalu.

Uopštićemo prethodnu teoremu tako što ćemo računati raspodelu verovatnoće za $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, kada se na intervalu $(0, a]$ pojavi tačno $n$ događaja.

***Teorema 3.6***. *Ako je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Puasonov proces,* $a > 0$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ *trenuci ostvarivanja događaja u procesu* $\{N(t), t \geq 0\}$, *onda* $\{(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) / N(a) = n\}$ *ima gustinu* $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{n!}{a^n}$ $(0 \leq X_1 \leq \cdots \leq X_n \leq a)$; $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ *za ostale* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

***Dokaz***. Najpre razmatramo slučaj kada je $n = 3$.

Neka je $0 < t_1 < t_2 < t_3 < a$. Računamo

$$F(t_1, t_2, t_3) = P\{\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2, \tau_3 \leq t_3 / N(a) = 3\} = P\{N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2, N(t_3) \geq 3, N(a) - N(t_3) = 0\} \cdot \frac{1}{P\{N(a) = 3\}},$$

pa sledi da je

$$\begin{aligned}
P\{N(a) = 3\} \cdot F(t_1, t_2, t_3) & \\
&= P\{N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) = 1, N(t_3) - N(t_2) = 1, N(a) - N(t_3) = 0\} \\
&+ P\{N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) = 2, N(a) - N(t_2) = 0\} \\
&+ P\{N(t_1) = 2, N(t_3) - N(t_1) = 1, N(a) - N(t_3) = 0\} \\
&+ P\{N(t_1) = 3, N(a) - N(t_1) = 0\}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Sada diferenciranjem izraza (3.20) dobijamo

$$
\begin{aligned}
P\{N(a)=3\}\cdot \frac{\partial^3 F(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3}
&= \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} P\{N(t_1)=1, N(t_2)-N(t_1)=1, N(t_3)-N(t_2)\\
&= 1, N(a)-N(t_3)=0\} + 0+0+0\\
&= \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3}\left(\lambda t_1 e^{-\lambda t_1}\cdot \lambda(t_2-t_1)e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot \lambda(t_3-t_2)e^{-\lambda(t_3-t_2)}\cdot e^{-\lambda(a-t_3)}\right)\\
&= \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3}\left(e^{-\lambda a}\cdot \lambda^3 \cdot (t_1)(t_2-t_1)(t_3-t_2)\right). \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

I na kraju sledi da je

$$
\begin{aligned}
f(t_1,t_2,t_3) = \frac{\partial^3 F(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} &= \frac{3!}{a^3}\frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3}\left(t_1(t_2-t_1)(t_3-t_2)\right)\\
&= \frac{3!}{a^3}\frac{\partial^3\left(t_1(t_2-t_1)(t_3-t_2)\right)}{\partial t_3 \partial t_2 \partial t_1} = \frac{3!}{a^3}. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Znači, na skupu$0 < t_1 < t_2 < t_3 < a$ je $f(t_1,t_2,t_3) = \frac{3!}{a^3}$, a kako skup $\Delta = \{(t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{R}^3 \,|0 < t_1 < t_2 < t_3 < a\}$ ima meru (zapreminu) jednaku $\frac{a^3}{3!}$, jer skup $\Delta_1 = \{(t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{R}^3 \,|0 < t_1 < a, 0 < t_2 < a, 0 < t_3 < a\}$ ima zapreminu $a^3$, a jedna od 3! mogućnosti je da bude $t_1 < t_2 < t_3$ , pa sledi da je je van skupa $\Delta$, $f(t_1,t_2,t_3) = 0$.

Da bismo razmotrili jednakost iz teoreme u opštem obliku, a ne samo za slučaj $n = 2$, neophodno je da uzmemo u obzir sve moguće vrednosti slučajnih promenljivih $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$, gde je $\tau_1 \le t_1, \tau_2 \le t_2, \dots, \tau_n \le t_n, N(t) = n$. Ukupan broj slučajeva da se smesti $n$ događaja u $n$ intervala $(0,t_1], (t_1,t_2], \dots, (t_{n-1},t_n]$ dat je multinomijalnim koeficijentom (daje reči dužine $k$ od $n$ slova, bez ponavljanja). Štaviše, $N(t_1)$ mora biti veći ili jednak 1, $N(t_2)$ mora biti veći ili jednak 2, itd. Međutim primećujemo da će jedini uslov različit od nule, posle diferenciranja funkcije uslovne verovatnoće po svakoj promenljivoj $t_1, t_2, \dots, t_n$ biti onaj za koji se desi događaj

$$D = \{N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) = 1, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = 1\}.$$

Neka je

$$G = \{N(t_1) > 1, N(t_2) \ge 2, \dots, N(t_n) \ge n\}.$$

Tada je

$F(t_1,t_2,\dots,t_n) = P\{\tau_1 \le t_1, \tau_2 \le t_2, \dots, \tau_n \le t_n, N(a) = n\} = P\{D, N(a) = n\} + P\{G, N(a) = n\} = P\{D, N(a) - N(t_n) = 0\} + P\{G, N(a) = n\} = \lambda t_1 \cdot e^{-\lambda a} \cdot \prod_{k=2}^{n} \lambda(t_k - t_{k-1}) \cdot e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \cdot e^{-\lambda(a - t_n)} + P\{G, N(a) = n\}$.

Sada iskoristimo Bajesovu teoremu za uslovnu verovatnoću i dobijamo

$$P\{\tau_1 \le t_1, \tau_2 \le t_2, \dots, \tau_n \le t_n / N(a) = n\} = \frac{P\{\tau_1 \le t_1, \tau_2 \le t_2, \dots, \tau_n \le t_n, N(a) = n\}}{P\{N(a) = n\}}$$

$$= \frac{\lambda^n t_1 e^{-\lambda a} \prod_{k=2}^{n}(t_k - t_{k-1})}{\frac{(\lambda a)^n e^{-\lambda t}}{n!}} + P\{G|N(a) = n\}.$$

Pošto bar jedno $t_i$ nije prisutno u $P\{G|N(a) = n\}$, funkcija gustine je

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \frac{t_1 \prod_{k=2}^{n}(t_k - t_{k-1})}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{n!}{a^n},$$

za $0 < t_1 < \dots < t_n \le a$. Ovim smo dokazali teoremu.■

***Teorema 3.7.*** *Neka su $\{N_1(t), t \ge 0\}$ i $\{N_2(t), t \ge 0\}$ dva nezavisna Puasonova procesa sa stopama rasta $\lambda_1$ i $\lambda_2$, respektivno. Događaj $D_{n_1,n_2}$ je definisan na sledeći način: $n_1$ događaja procesa $\{N_1(t), t \ge 0\}$ se desi pre nego što se dogodi $n_2$ događaja procesa $\{N_2(t), t \ge 0\}$. Tada je verovatnoća događaja $D_{n_1,n_2}$ oblika*

$$P\{D_{n_1,n_2}\} = P\{X \ge n_1\},$$

*gde je $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n = n_1 + n_2 - 1$, $p \coloneqq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Odnosno,*

$$P\{D_{n_1,n_2}\} = \sum_{i=n_1}^{n_1+n_2-1} \binom{n_1 + n_2 - 1}{i} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n_1+n_2-1-i}.$$

***Dokaz***. Neka je $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ i neka je $E_j$ neki slučajni eksperiment koji se sastoji u posmatranju da li je $j -$ti događaj procesa $\{N(t), t \ge 0\}$ ujedno i događaj procesa $\{N_1(t), t \ge 0\}$, ili nije. Pošto Puasonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje, eksperimenti $E_j$ zapravo predstavljaju nezavisna ispitivanja za koje je verovatnoća da je $j -$to ispitivanje uspešno, jednaka za svako $j$. Tada slučajna promenljiva $X$ koja broji uspehe u $n$ ispitivanja, po definiciji, ima binomnu raspodelu sa parametrom $n$, i važi

$$p \coloneqq P\{Y_{1,1} < Y_{2,1}\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

gde su $Y_{1,1} \sim Exp(\lambda_1)$ i $Y_{2,1} \sim Exp(\lambda_2)$ nezavisne slučajne promenljive. Kako se događaj $\{D_{n_1,n_2}\}$ desi ako i samo ako postoji najmanje $n_1$ događaja procesa $\{N_1(t), t \ge 0\}$ u prvih $n_1 + n_2 - 1$ događaja procesa $\{N(t), t \ge 0\}$, sledi jednakost za $P\{D_{n_1,n_2}\}$.■

*Primer*. Neka je broj kupaca koji dolaze u neku prodavnicu u intervalu $[0, t]$ Puasonov proces $\{N(t), t \ge 0\}$ sa stopom rasta $\lambda = 4$ po satu. Ako se prodavnica otvara u 09.00h, koja je verovatnoća da će do 9.30h doći tačno jedan kupac, a da će ih do 11.30h doći 5?

*Rešenje.*

Potrebno je da nađemo $P\{N\left(\frac{1}{2}\right) = 1, N\left(\frac{5}{2}\right) = 5\}$ (jer vreme merimo u satima). Koristimo nezavisnost $N\left(\frac{5}{2}\right) - N\left(\frac{1}{2}\right)$ i $N\left(\frac{1}{2}\right) - N(0)$, pa dobijamo

$$\begin{aligned} P\left\{N\left(\frac{1}{2}\right) = 1, N\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right\} &= P\left\{N\left(\frac{1}{2}\right) - N(0) = 1, N\left(\frac{5}{2}\right) - N\left(\frac{1}{2}\right) = 4\right\} \\ &= P\left\{N\left(\frac{1}{2}\right) = 1\right\} \cdot P\{N(2) = 4\} = \frac{(4 \cdot 0.5)^1}{1!} e^{-4 \cdot 0.5} \cdot \frac{(4 \cdot 2)^4}{4!} e^{-4 \cdot 2} \\ &= \frac{8192}{24} e^{-10} \cong 341.33 \cdot 0.000045 \cong 0.0154. \end{aligned}$$

## 3.1 Nehomogen Puasonov proces

U definiciji 3.2. ili 3.3. parametar $\lambda$ Puasonovog procesa je stalan, zbog čega se takav Puasonov proces naziva homogen Puasonov proces. U mnogim primenama Puasonovog procesa nije realno pretpostaviti da je prosečna stopa pojavljivanja događaja tog procesa konstantna. Na primer, prosečna stopa ulaska klijenata u banku nije ista u toku dana. Takođe, prosečan broj automobila u saobraćaju različit je u toku saobraćajnog špica i van njega. U skladu sa ovim zaključcima, uopštićemo definiciju Puasonovog procesa i sada ćemo razmotriti slučaj kada je parametar funkcija vremena $t$. Ovo je nehomogen Puasonov proces.

**Definicija 3.1.1.** Proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ se naziva nehomogen Puasonov proces sa intezitetom funkcije $\lambda(t)$, gde je $t \geq 0$ ako je

1) $N(0) = 0$.
2) Proces prebrajanja ima nezavisne priraštaje.
3) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + \sigma(h)$.
4) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = \sigma(h)$.

***Napomena.*** Iz uslova 3) ove definicije sledi da proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nema stacionarne priraštaje, osim ako je $\lambda(t) \equiv \lambda$. Ako proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima stacionarne priraštaje, onda zaključujemo da je u pitanju homogen Puasonov proces sa stopom rasta $\lambda$.

Takođe, kao i u slučaju homogenog Puasonovog procesa kada je stopa pojavljivanja događaja konstantna, i kod nehomogenog procesa važi da broj događaja koji se javi u datom intervalu ima Puasonovu raspodelu.

***Teorema 3.1.1.*** *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ nehomogen Puasonov proces sa funkcijom inteziteta $\lambda(t)$. Tada važi:*

$$N(s+t) - N(s) : \mathcal{P}\big(m(s+t) - m(s)\big), za\ svako\ s, t \geq 0,$$

*gde je $m(s)$ funkcija srednje vrednosti nehomogenog Puasonovog procesa. Dakle,*

$$m(s) \coloneqq \int_0^s \lambda(y)dy.$$

***Dokaz.*** Neka je $p_n(s,t) \coloneqq P\{N(s+t) - N(s) = n\}, za\ n = 0, 1, 2, \dots$. Koristeći uslove iz definicije nehomogenog Puasonovog procesa, za $= 1, 2, \dots$, određujemo

$$
\begin{aligned}
p_n(s, t+h) = {} & P\{N(s+t) - N(s) = n \cap N(s+t+h) - N(s+t) = 0\} \\
& + P\{N(s+t) - N(s) = n-1 \cap P(s+t+h) = 1\} + \sigma(h) \\
& = p_n(s,t)\big(1 - \lambda(s+t)h + \sigma(h)\big) + p_{n-1}(s,t)\big(\lambda(s+t)h + \sigma(h)\big) + \sigma(h),
\end{aligned}
$$

odakle sledi da je

$$p_n(s, t+h) - p_n(s,t) = \lambda(s+t)h \cdot \big(p_{n-1}(s,t) - p_n(s,t)\big) + \sigma(h).$$

Sada obe strane prethodne jednakosti podelimo sa $h$ i pustimo da $h \to 0$, pa dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(s,t) = \lambda(s+t) \cdot \big(p_{n-1}(s,t) - p_n(s,t)\big). \tag{3.1.1}$$

Za $n = 0$ prethodna jednakost postaje

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(s,t) = -\lambda(s+t) p_0(s+t).$$

Promenljivu $s$ možemo posmatrati kao konstantu, pa ova jednakost postaje homogena diferencijalna jednačina prvog reda, čije je opšte rešenje oblika

$$p_0(s,t) = c_0 \exp\left\{- \int_s^{s+t} \lambda(y)dy\right\},$$

gde je $c_0$ konstanta.

Kada iskoristimo granični uslova da je $p_0(s,0) = 1$, zaključujemo da je $c_0 = 1$, pa je prethodna jednakost oblika

$$p_0(s,t) = \exp\left\{- \int_s^{s+t} \lambda(y)dy\right\} = e^{m(s) - m(s+t)}, za\ s,t \geq 0.$$

Zamenom ovog rešenja u jednakost (3.1.1), dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1(s,t) = \lambda(s+t)\left(e^{m(s) - m(s+t)} - p_1(s,t)\right).$$

Ako drugačije zapišemo, prethodna jednakost postaje

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1(s,t) = (e^{m(s) - m(s+t)} - p_1(s,t)) \frac{\partial}{\partial t}\big(m(s+t) - m(s)\big).$$

Rešenje ove nehomogene diferencijalne jednačine koje zadovoljava granični uslov $p_1(s,0) = 0$ je oblika

$$p_1(s,t) = \big(m(s,t) - m(s)\big)e^{m(s)- m(s+t)}, za\ svako\ s,t \ \geq 0.$$

Na kraju, koristeći matematičku indukciju, sledi da je

$$p_n(s,t) = \frac{\big(m(s+t) - m(s)\big)^n}{n!} e^{m(s)- m(s+t)}, za\ svako\ s,t \ \geq 0, n \ \in \ \mathbb{N}_0 . \blacksquare$$

Neka je $\tau_1$ slučajna promenljiva koja označava vreme pojavljivanja prvog događaja procesa $\{N(t), t \ \geq 0\}$. Sada ćemo odrediti raspodelu za slučajnu promenljivu $\tau_1$, ako je $N(t) = 1$.

***Teorema 3.1.2.*** *Neka je $\{N(t), t \ \geq 0\}$ nehomogen Puasonov proces sa funkcijom inteziteta $\lambda(t)$. Funkcija gustine za slučajnu promenljivu*

$$S \coloneqq \ \tau_1 | N(t) = \ 1,$$

*je oblika*

$$f(s) = \ \frac{\lambda(s)}{m(t)}, za\ s \ \in (0,t].$$

***Dokaz***. Ako je $s \ \in (0,t]$ funkciju raspodele određujemo na sledeći način

$$P\{\tau_1 \ \leq s | N(t) = 1\} = \ \frac{P\{N(s) = 1 \ \cap N(t) - \ N(s) = 0\}}{P\{N(t) = 1\}} = (nez.)$$
$$= \ \frac{(m(s) \cdot e^{- \ m(s)}) \cdot e^{- \ m(t) + \ m(s)}}{m(t)e^{- \ m(t)}} = \ \frac{m(s)}{m(t)}.$$

Kako je

$$\frac{d}{ds} m(s) = \ \frac{d}{ds} \int_0^s \lambda(u) du = \ \lambda(s),$$

jednakost je dokazana. ■

U praksi su bitna dva posebna nehomogena Puasonova procesa.

1) Koks – Luisov model
   Funkcija inteziteta je
   $$\lambda(\mathrm{t}) = \exp(\alpha_0 + \ \alpha_1 \mathrm{t}) , - \infty < \ \alpha_0, \alpha_1 < \ \infty, t > 0.$$
2) Model Vejbulovog procesa.
   Funkcija inteziteta je
   $$\lambda(\mathrm{t}) = \ \alpha\theta \mathrm{t}^{\theta - 1}, \alpha, \theta > 0, t > 0.$$

## 3.2 Složeni Puasonov proces

Pretpostavimo da je $N$ Puasonova slučajna promenljiva sa parametrom $\lambda$, a $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ su nezavisne i sa istom raspodelom slučajne promenljive gde svaka ima raspodelu $F$. Dalje pretpostavimo da su $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ nezavisne od $N$. Stoga se slučajna promenljiva $S_N = X_1 + ... + X_N$ naziva složena Puasonova slučajna promenljiva sa Puasonovim parametrom $\lambda$ i raspodelom komponenata $F$.

***Teorema 3.2.1.*** *Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive $S_N$ su oblika:*

$$E(S_N) = E(N) \cdot E(X_1)$$

$$D(S_N) = E(N) \cdot D(X_1) + D(N) \cdot \left(E(X_1)\right)^2.$$

***Napomena.*** Umesto $X_1$ može se uzeti bilo koje $X_k$ jer su ove slučajne promenljive nezavisne i imaju istu raspodelu.

***Dokaz***. Pokazaćemo prvu jednakost za matematičko očekivanje

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n \cdot E(X_1).$$

Pošto je $N$ nezavisno od $X_k$ – ova, možemo zapisati kao

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| N = n\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = n \cdot E(X_1),$$

pa dolazimo do jednakosti

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| N\right) = N \cdot E(X_1).$$

Sledi da je

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| N\right)\right) = E\big(N \cdot E(X_1)\big) = E(N) \cdot E(X_1).$$

Sada dokazujemo jednakost za disperziju.

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \middle| N = n\right) = n \cdot D(X_1),$$

što implicira

$$D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| N\right) = N \cdot D(X_1).$$

Na osnovu jednakosti za uslovno očekivanje

$$D(X) = E(D(X \mid Y)) + D(E(X \mid Y)),$$

dobijamo

$$D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = E\left(D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| N\right)\right) + D\left(E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| N\right)\right),$$

pa sada možemo pisati

$$D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = E\big(N \cdot D(X_1)\big) + D\big(N \cdot E(X_1)\big) = E(N) \cdot D(X_1) + D(N) \cdot \big(E(X_1)\big)^2. \blacksquare$$

**Definicija 3.2.1** Pretpostavimo da je $\{N(t), t \geq 0\}$ Puasonov proces, i da su $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ n.i.r. slučajne promenljive i da su nezavisne od procesa $\{N(t), t \geq 0\}$. Neka je $Y(t) = X_1 + \ldots + X_{N(t)}$, tada se stohastički proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, gde važi da je $Y(t) = 0$ ako je $N(t) = 0$, naziva složeni Puasonov proces.

Ako je $\{Y(t), t \geq 0\}$ složeni Puasonov proces, onda je $Y(t)$ složena Puasonova slučajna promenljiva sa Puasonovim parametrom $\lambda t$.

Prethodna definicija nam daje još jedan način uopštavanja Puasonovog procesa. Ak bi važilo da su slučajne promenljive $X_k$ konstantne i jednake 1, tada bi procesi $\{Y(t), t \geq 0\}$ i $\{N(t), t \geq 0\}$ bili identični, tj. i $\{Y(t), t \geq 0\}$ bi bio homogeni Puasonov proces.

Sada ćemo definisati matematičko očekivanje i disperziju složenog Puasonovog procesa koristeći se prethodno dokazanom teoremom.

Zamenom oznaka, $S_N = Y(t)$ i $N = N(t)$, dobijamo

$$E\big(Y(t)\big) = E\big(N(t)\big) \cdot E(X_1) = \lambda t \cdot E(X_1),$$

$$D\big(Y(t)\big) = E\big(N(t)\big) \cdot D(X_1) + D\big(N(t)\big) \cdot \big(E(X_1)\big)^2 = \lambda t \cdot \Big(D(X_1) + \big(E(X_1)\big)^2\Big)$$
$$= \lambda t \cdot E(X_1^2).$$

Odredićemo i genaratornu funkciju momenata slučajne promenljive $Y(t)$.

Neka je

$$\Gamma_1(s) \equiv \Gamma_{X_1}(s) = E(e^{sX_1}).$$

Sledi

$$\Gamma_{Y(t)}(s) = E\big(e^{sY(t)}\big) = E\Big(e^{s\left(X_1 + \ldots + X_{N(t)}\right)}\Big) = E\left(E\left(e^{s\left(X_1 + \ldots + X_{N(t)}\right)}\middle| N(t)\right)\right) = (nez.)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\big(e^{s(X_1 + \ldots + X_n)}\big) \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = (n.i.r) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\Gamma_1(s)\big)^n \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\Gamma_1(s)\lambda t} = \exp\{\lambda t(\Gamma_1(s) - 1)\}.$$

## 3.3 Procesi obnavljanja

Procesima obnavljanja modeliraju se događaji koji se dešavaju u trenucima koji su slučajni, ali takvi da se vremena između uzastopnih događaja mogu aproksimirati nezavisnim i jednako raspodeljenim slučajnim promenljivim.

**Definicija 3.3.1.** Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces prebrajanja i $\tau_i$ slučajna promenljiva koja označava vreme koje proces provede u stanju $i$, za $i \geq 0$. Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nazivamo proces obnavljanja ako su nenegativne slučajne promenljive $\tau_i$ nezavisne i sa istom raspodelom, za $i \geq 0$. Kažemo da se proces obnavljanja javi svaki put kada se javi i proces prebrajanja.

Ukoliko slučajna promenljiva $\tau_0$ ima istu raspodelu $F$ kao i ostale slučajne promenljive $\tau_1, \tau_2, \ldots$, onda je $\{N(t), t \geq 0\}$ čist proces obnavljanja, a ukoliko nema istu raspodelu $F$ onda je $\{N(t), t \geq 0\}$ modifikovan ili proces obnavljanja sa kašnjenjem.

*Primer.* Osnovni primer za ove procese jeste proces zamene nekog elementa koji se kvari, na primer sijalice. Uzastopni trenuci kvarova su $\{S_n, n \geq 0\}$. Ako je prva sijalica bila nova u trenutku kad smo počeli da posmatramo proces, to je čist proces obnavljanja, a ukoliko nije, onda je to proces obnavljnja sa kašnjenjem. Smisao slučajne promenljive $\tau_0$ je nešto drugačiji od ostalih i označava preostalu dužinu trajanja onog elementa koji je bio korišćen u trenutku $t = 0$.

*Primer.* Mašina koja radi i popravlja se (takozvani „on - off“ proces). U početnom trenutku nova mašina počinje da radi. Periodi rada mašine se smenjuju sa periodima popravke mašine, za vreme kojih mašina ne radi. Pretpostavimo da su periodi rada $\{X_n, n \geq 0\}$ i $\{Y_n, n \geq 0\}$ periodi popravke nezavisne i jednako raspodeljene slučajne promenljive sa funkcijama raspodele, redom, $X_1 \sim F_1(x), Y_1 \sim F_2(x)$. U ovom modelu imamo dva procesa obnavljanja:

1) trenuci kada se mašina pokvari – proces sa kašnjenjem;
2) trenuci kada mašina počinje sa radom – čist proces obnavljanja.

Vreme $T_n$ $n$ - tog ponavljanja neprekidnog slučajnog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ definisanog kao

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \,, n = 1, 2, \ldots,$$

zadovoljava relaciju

$$T_n \leq t \Leftrightarrow N(t) = n.$$

Ukoliko je $T(0) = 0$, onda, možemo pisati

$$N(t) = \max\{T_n \le t, n \ge 0\}. \tag{3.3.1}$$

U opštem slučaju, teško je naći tačnu funkciju raspodele za promenljivu $T_n$. Slučajevi kada je poznata raspodela su:

- ako $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda) \Longrightarrow T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$,
- ako $\tau_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \Longrightarrow T_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

Takođe ukoliko je $n$ dovoljno veliko, na osnovu centralne granične teoreme dolazimo do zaključka da

$$T_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2),$$

gde je $\mu_i = E(\tau_i)$, $\sigma^2 = D(\tau_i)$, $\forall i$.

Kada je $\tau_i$ diskretna slučajna promenljiva, verovatnoća $P\{\tau_i = 0\}$ može biti strogo pozitivna. To znači da vreme koje je potrebno da se neka pojava dogodi može biti jednako nuli. Na primer, ako je $\tau_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$, tada je $P\{\tau_i = 0\} = e^{-\lambda} > 0$. Međutim, ako nenegativna slučajna promenljiva $\tau_i$ nije stalno jednaka nula, možemo pisati da je $\mu > 0$. Ako pretpostavimo da je $\mu < \infty$ i $\sigma^2 < \infty$, na osnovu jakog zakona velikih brojeva, imamo

$$1 = P\left\{\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_i}{n} = \mu\right\} = P\left\{\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{n} = \mu\right\},$$

na osnovu čega sledi da je

$$P\left\{\lim_{n \to \infty} T_n = \infty\right\} = 1,$$

odakle zaključujemo na osnovu jednakosti (3.3.1), da je

$$P\{N(t) = \infty\} = 0, \qquad \forall t < \infty,$$

jer će slučajna promenljiva $T_n$ na kraju biti veća od bilo kog konačnog $t$. To znači da ne postoji beskonačan broj ponavljanja nekog procesa u konačnom vremenskom intervalu. Obzirom da je $P\{T_n = \infty\} = 0$, možemo zaključiti da je

$$P\left\{\lim_{n \to \infty} N(t) = \infty\right\} = 1.$$

Kako je u većini slučajeva teško odrediti verovatnoću događaja $\{N(t), t \ge 0\}$, u opštem slučaju se bavimo nalaženjem očekivanja slučajne promenljive $N(t)$.

**Definicija 3.3.2.** Funkcija $m_N(t) = E(N(t))$ zove se funkcija obnavljanja ili funkcija srednje vrednosti procesa obnavljanja $\{N(t), t \ge 0\}$.

***Teorema 3.3.1.*** *Funkcija obnavljanja* $m_N(t)$ *može se definisati na sledeći način*

$$m_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \leq t\}.$$

***Dokaz.*** Pošto je $N(t)$ slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1, \dots\}$, koristeći relaciju

$$T_n \leq t \Leftrightarrow N(t) = n,$$

sledi

$$E(N(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{i} P\{N(t) = i\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} P\{N(t) = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \leq t\}. \blacksquare$$

*Primer*. Posmatramo slučaj kada slučajna promenljiva $\tau_i$ ima Bernulijevu raspodelu sa parametrom $p \in (0, 1)$. Tada važi

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \sim \mathcal{B}(n, p),$$

tako da

$$P\{T_n \leq t\} = \sum_{k=0}^{[t]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gde je $[t]$ najveći ceo deo broja $t$. Možemo odrediti vrednost sume

$$S(n, p) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[t]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gde važi da je $\binom{n}{k} = 0$, ako je $k > n$.

Ako uzmemo poseban slučaj, kada je $p = \frac{1}{2}$, tada je

$$S\left(t, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{[t]} \binom{n}{k}\right].$$

Računanjem dobijamo sledeće rezultate:

$$S\left(0,\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$S\left(1,\frac{1}{2}\right) = 3,$$

$$S\left(2,\frac{1}{2}\right) = 5,$$

$$S\left(3,\frac{1}{2}\right) = 7, itd.,$$

odakle sledi jednakost

$$S\left(t,\frac{1}{2}\right) = 2[t] + 1, \forall t \geq 0.$$

Ako definišemo slučajnu promenljivu $X \coloneqq N(r) + 1$, gde je $r \in \{0, 1, 2, ...\}$, tada slučajna promenljiva $X$ ima negativnu binomnu raspodelu sa parametrima $r + 1$ i $p$. Pa je očekivanje slučajne promenljive $X$ oblika

$$E(X) = \frac{r+1}{p},$$

odakle sledi da je

$$E\big(N(r)\big) = \frac{r+1}{p} - 1 \Rightarrow E\big(N(t)\big) = \frac{[t] + 1}{p} - 1.$$

Pa za $p = \frac{1}{2}$, ponovo dobijamo jednakost kao i u prethodnom primeru

$$S\left(t,\frac{1}{2}\right) = 2[t] + 1, \forall t \geq 0.$$

Kada su slučajne promenljive $\tau_i$ apsolutno neprekidne, važi sledeća jednakost:

$$m_N(t) = E\big(N(t)\big) = E\big(E(N(t)|\tau_0)\big) = \int_0^\infty E(N(t)|\tau_0 = \tau)\, f_{\tau_0}(\tau) d\tau.$$

Na osnovu relacije $\tau_0 > t \Leftrightarrow N(t) = 0$, sledi da je

$$m_N(t) = \int_0^t E(N(t)|\tau_0 = \tau)\, f_{\tau_0}(\tau) d\tau.$$

Slučajne promenljive $\tau_i$ su nezavisne i sa istom raspodelom, pa možemo pisati da je

$$E(N(t)|\tau_0 = \tau) = 1 + E\big(N(t - \tau)\big) = 1 + m_N(t - \tau), za\, \tau \in [0, t].$$

Uzimajući ovo u obzir, sledi da je

$$m_N(t) = \int_0^t \big(1 + m_N(t - \tau)\big) f_{\tau_0}(\tau) d\tau,$$

tj.

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N\,(t - \tau) f_{\tau_0}(\tau) d\tau, za\, t \geq 0.$$

**Definicija 3.3.3**. Jednakost

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N\,(t - \tau) f_{\tau_0}(\tau) d\tau, za\, t \geq 0$$

naziva se jednačina obnavljanja procesa $\{N(t), t \geq 0\}$.

Da bismo izračunali funkciju obnavljanja, neretko je lakše rešiti integralnu jednačinu

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N\,(t - \tau) f_{\tau_0}(\tau) d\tau, za\, t \geq 0,$$

koju kada uvedemo smenu $s = t - \tau$, možemo zapisati kao

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N\,(s) f_{\tau_0}(t - s) ds, za\, t \geq 0.$$

Diferenciranjem, ona postaje,

$$m_N'(t) = f_{\tau_0}(t) + m_N(t) f_{\tau_0}(0) + \int_0^t m_N\,(s) f_{\tau_0}'(t - s) ds.$$

Kada je $f_{\tau_0}(t - s)$ polinom, možemo je diferencirati po svim promenljivim dok ne dobijemo diferencijalnu jednačinu za funkciju $m_N(t)$. U tom slučaju granični uslov je $m_N(0) = 0$.

Drugi način rešavanja jednačine obnavljanja jeste pomoću Laplasove transformacije.

Označimo sada sa $T_{N(t)}$ vreme proteklo od poslednjeg ponavljanja događaja koji se dogodio pre ili u trenutku $t$. Analogno, $T_{N(t)+1}$ predstavlja vreme koje je prošlo od prvog ponavljanja događaja nakon trenutka $t$.

***Teorema 3.3.2.*** *Prosečan broj ponavljanja događaja po jedinici vremena,* $\frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu}$*, kada* $t \longrightarrow \infty$*, a* $E(\tau_i) = \mu < \infty, \forall i$*. Odnosno, drugačije zapisano*

$$P\left\{\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\right\} = 1,$$

*gde je konstanta* $\lambda = \frac{1}{\mu}$ *i naziva se stopa procesa.*

***Dokaz***. Važi da je

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t+1)},$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t+1)}}{N(t)}.$$

Na osnovu jakog zakona velikih brojeva, pošto je $E(\tau_i) < \infty$, za $N(t) > 0$ imamo

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \sum_{i=0}^{N(t)-1} \frac{\tau_i}{N(t)} \longrightarrow \mu,$$

kada $N(t) \longrightarrow \infty$, sa verovatnoćom 1, što će biti samo u slučaju kada $t \longrightarrow \infty$.

Odnosno važi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \mu.$$

$\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ možemo drugačije zapisati kao $\frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \frac{T_{N(t+1)}}{N(t)+1}\left(1 + \frac{1}{N(t)}\right)$,

pa zaključujemo da je

$$\mu \leq \lim_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} \leq \mu,$$

odnosno,

$$\frac{1}{\mu} \leq \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow P\left\{\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1. \blacksquare$$

***Teorema 3.3.3.*** *(Osnovna teorema obnavljanja) Ako je očekivanje* $E(\tau_i)$ *konačno, tada važi*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

***Napomena***. Ova teorema važi i kada je $E(\tau_i) = \mu = \infty$, jer je onda $\frac{1}{\mu} = 0$.

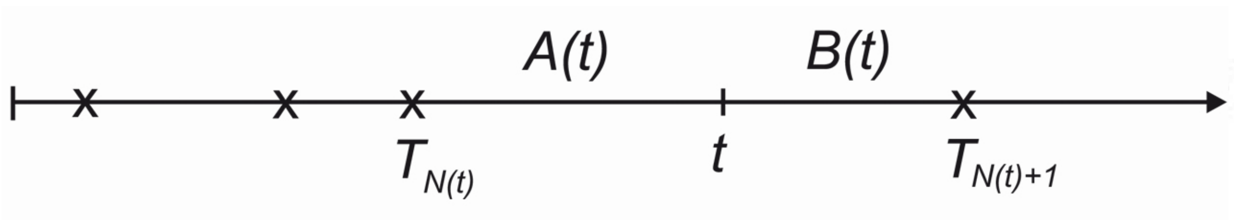
**Definicija 3.3.4.** Neka je $t$ fiksiran vremenski trenutak. Slučajna promenljiva

$$A(t) \coloneqq t - T_{N(t)}$$

zove se starost procesa obnavljanja u trenutku $t$, dok je

$$B(t) \coloneqq T_{N(t)+1} - t$$

preostali vek trajanja procesa u trenutku $t$.




Slika. Starost i preostali vek trajanja procesa obnavljanja

Pretpostavimo sada da u momentu $n$ - tog ponavljanja procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ primimo nagradu $R_n$. Pretpostavimo još i da su nagrade $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezavisne slučajne promenljive koje imaju istu raspodelu. U opštem slučaju, $R_n$ zavisi od $\tau_{n-1}$, odnosno od dužine perioda $n-$tog ponavljanja koji se zove ciklus. Neka je $R(t)$ ukupna nagrada primljena na intervalu $[0, \tau]$. To znači da je

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n,$$

i važi da je $R(t) = 0$ ako je $N(t) = 0$.

***Napomena***. $R_n$ može biti i trošak.

Važi da je prosečna nagrada primljena po jedinici vremena, u graničnom smislu, jednaka prosečnoj nagradi primljenoj tokom ciklusa podeljenoj sa prosečnom dužinom trajanja ciklusa. Ovo ćemo pokazati narednom teoremom.

***Teorema 3.3.4.*** *Ako je* $E(R_1) < \infty$ *i* $E(\tau_0) < \infty$*, važi da je*

$$P\left\{\lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R_1)}{E(\tau_0)}\right\} = 1.$$

***Dokaz.*** Koristimo zakon velikih brojeva i teoremu 3.3.2. Pošto $N(t) \longrightarrow \infty$ kada $t \longrightarrow \infty$, možemo pisati

$$P\left\{\lim_{t \to \infty} \sum_{n=1}^{N(t)} \frac{R_n}{N(t)} = E(R_1)\right\} = 1,$$

odakle je

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N(t)} R_n = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)}\right) \cdot \lim_{t \to \infty} \left(\frac{N(t)}{t}\right) = E(R_1) \cdot \frac{1}{E(\tau_0)},$$

sa verovatnoćom 1, čime je tvrđenje dokazano. ■

***Napomena.*** Pošto vrednost nagrade može biti i pozitivna i negativna, treba pretpostaviti da je $E(|R_1|) < \infty$.

# Zaključak

Cilj ovog rada je bio da se prikažu i objasne važne osobine slučajnih procesa kao i da se opišu neke od klasa. Posebna pažnja je posvećena jednom od najbitnijih slučajnih procesa, Puasonovom procesu koji ima široku primenu i upotrebu u mnogim oblastima nauke. Kao što smo rekli Puasonovi procesi se primenjuju za modelovanje broja tzv. retkih događaja, tj. događaja gde se u kratkom vremenskom intervalu može odigrati najviše jedan takav događaj. Realni događaji koji se mogu modelovati Puasonovim procesom su npr. broj telefonskih razgovora sa neke telefonske govornice do nekog trenutka $t$, broj autobusa koji prođu pored nekog mesta, broj zahteva koje korisnik uputi nekom računarskom sistemu, broj mušterija koji dolaze u neku radnju, broj mašina koje čekaju na popravku. Neki od pomenutih relanih primera predstavljeni su u radu.

# Literatura


[1] Pavle Mladenović, Verovatnoća i statistika, Matematički fakultet Beograd, 2008.

[2] Jovan Mališić, Slučajni procesi teorija i primene, Građevinska knjiga Beograd, 1989.

[3] Yeh Lam, The Geometric Process and Its Applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224, 2007.

[4] Sheldon M. Ross, Stochastic processes Second Ediction, University of California, Berkeley, John Wiley & Sons, Inc., 1996.

[5] Jovan Vukmirović, Slučajni procesi, beleške sa predavanja i vežbi, 2010.

[6] Slobodanka Janković, Stohastički modeli u operacionim istraživanjima, beleške sa predavanja i vežbi, 2011.