UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet

MASTER RAD

Diferencijalne jednačine razlomljenog reda njihovo numeričko rešavanje

Srđan N. Budimir

Beograd, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Diferencijalne jednačine razlomljenog reda su matematički modeli kojima se bliže mogu opisati mnoge pojave u prirodi i inženjerskoj tehnici.

Rad se sastoji iz pet odeljaka. Ima za cilj da upozna i približi čitaocu jedan veoma moćan instrument u modelovanju i rešavanju praktičnih problema.

U prvom odeljku dat je istorijski pregled razvoja razlomljenog računa, osvrt na doprinos pojedinih matematičara u ovoj oblasti.
U drugom odeljku predstavljena je gama funkcija njene osobine i svojstva.
U trećem odeljku razmatraju se različite definicije razlomljenih integrala i izvoda, njihova međusobna povezanost.
Četvrti odeljak se odnosi na numeričku aproksimaciju razlomljenih izvoda, izveden je red aproksimacije kao i metod izračunavanja koeficijenata.
U poslednjem, petom odeljku dato je par primera numeričkih rešenja razlomljenih diferencijalnih jednačina različitog tipa.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru Prof. Dr Bošku S. Jovanoviću na strpljenju, razumevanju i korisnim sugestijama prilikom izrade ovog rada.

Matematički fakultet
Beograd, 2013. **Srđan N. Budimir**

1 Istorijski pregled

1.1 Počeci razlomljenog računa

Orginalno pitanje koje je dovelo do naziva *razlomljeni račun* bilo je: **Može li se značenje izvoda reda $d^n y/dx^n$ proširiti kada je n razlomak?** Kasnije pitanje je preraslo u sledeće: **Može li n biti: razlomak, iracionalan ili kompleksan broj?** Kako su na poslednja pitanja dobijeni potvrdni odgovori, naziv *razlomljeni račun* je postao pogrešan tako da je adekvatniji naziv *integracija i diferencijacija do na proizvoljan red.*

Lajbnic je uveo notaciju $d^n y/dx^n$. Možda je bilo naivno igrati se sa simbolima koji su naveli Lopitala (L'Hopital) da 1695 godine upita Lajbnica: "Šta ako za n uzmemo $\frac{1}{2}$?" Lajbnic [Leibniz 1965a] je odgovorio: " Možete videti po tome, gospodine, veličine kao što su $d^{1/2}\overline{xy}$ ili $d^{1:2}\overline{xy}$ mogu se predstaviti pomoću beskonačnih nizova. Iako su beskonačni nizovi i geometrija u daljoj relaciji, beskonačni nizovi prihvataju samo upotrebu eksponenata koji su pozitivni ili negativni celi brojevi, još uvek se ne poznaje upotreba razlomljenih eksponenata." Kasnije u istom pismu, Leibniz nastavlja proročki: "Stoga sledi da $d^{\frac{1}{2}}x$ će biti jednako $x\sqrt[2]{dx : x}$ To je očigledan paradoks iz kojega će se korisne posledice izvući jednog dana."

U svojoj korespondenciji sa Johanom Bernulijem (Johann Bernoulli), Lajbnic [Leibniz 1695b] pominje izvode "opšteg reda". Dok u korespodenciji sa Džon Valisom (John Waillis), u kojoj je diskutovano o Valisovom beskonačnom proizvodu za $\frac{1}{2}\pi$ Lajbnic [Leibniz 1697] navodi da diferencijalni račun može biti upotrebljen da bi se postigao taj rezultat. On koristi notaciju $d^{1/2}y$ da označi izvode reda $\frac{1}{2}$.

Problematika razlomljenog računa nije zobišla Ojlerovo (Leonhard Paul Euler) interesovanje. On je 1730 zapisao " Kada je n pozitivan ceo broj i ako je p funkcija po x, odnos $d^n p$ prema dx^n uvek se može izraziti algebarski, tako da ako je n=2 i $p = x^3$, onda je d^2x^3 prema dx^2 je $6x$ prema 1. Sad je pitanje koji tip odnosa može se napraviti ako je n razlomak. Teškoće u tom slučaju se mogu lako razumeti. Uzmimo ako je n pozitivan ceo broj d^n može se dobiti uzastopnom diferencijacijom. Takav način, međutim nije poznat kada je n razlomak. Ali uz pomoć interpolacije koju sam prethodno objasnio u ovoj disertaciji, mogao bi neko ubrzati stvar" [Euler, 1738].

Žozef-Luj Lagranž (J.L.Lagrange [1849]) je doprineo indirektno razlomljenom računu. On je 1772 razvio zakon donjih eksponenata (indeksa) za diferencijalne operatore celog reda i uveo zapis:

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y.$$

U modernom zapisu tačka je izbačena jer nije množenje. Kasnije, kada je teorija razlomljenog računa razvijena, matematičari su bili više zainteresovani za uslove koji moraju biti nametnuti funkciji $y(x)$ da bi isto pravilo važilo za proizvoljno m i n.

U 1812, Pjer-Simon Laplas (P. S. Laplace 1820, vol.3, pp.85 and 186) definiše razlomljeni izvod korišćenjem integrala i 1819 pojavljuje se prvo pominjanje izvoda proizvoljnog reda u tekstu Lakroa (S. F. Lacroix 1819, pp.409-410) gde je posvetio baš ovoj temi manje od dve strane, od ukupno 700 strana svog rada. On je razvio puku matematičku vezbu generalizujući, pošavši od celobrojnog slučaja. Polazeći od $y = x^m$, gde je m pozitivan ceo broj, Lakro lako razvija n-ti izvod

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \qquad m \geq n.$$

Koristeći Ležandrov (Legendre) simbol za opšti faktorijel (gama funkciju), on dobija

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}.$$

On onda daje primer za $y = x$ i $n = \frac{1}{2}$, i postiže

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Interesantno je primetiti rezultat dobijen od strane Silvestera Lakroa, u maniru klasičnih formalista tog perioda, ima potpuno isti značaj kao što je sadašnja Riman-Lujvilova (Riemann-Liouville) definicija razlomljenog izvoda. Lakrov metod ne daje nikakav nagoveštaj o mogućim primenama izvoda razlomljenog reda.

Žozef Furije (Joseph B. J. Fourier 1822) je bio sledeći koji je pominjao izvode proizvoljnog reda. Njegova definicija razlomljenih operacija je izvedena iz njegove integralne reprezentacije za $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha)\, dp.$$

Sada

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos p(x-\alpha) = p^n \cos[p(x-\alpha) + \frac{1}{2}n\pi]$$

za ceo broj n. Formalno zamenjujući n sa u (u proizvoljno) dobija generalizaciju

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos[p(x-\alpha) + \frac{1}{2}u\pi]\, dp.$$

Furije navodi: "Broj u što se pojavljuje u gornjoj jednačini će se odnositi na bilo koju veličinu bilo da je pozitivna ili negativna."

1.2 Doprinos Abela i Liuvila

Lajbnic, Ojler, Laplas, Lakro i Furije su pominjali u svojim radovima izvode promenljivog reda ali prvu pravu upotrebu razlomljenih operacija izveo je Nils Henrik Abel u 1823 [Abel,1881]. Abel je primenio razlomljeni račun u rešenju integralne jednačine koja je ponikla iz formulacije tautohronog problema (problema određivanja oblika krive tako da je vreme silaženja materijalne tačke klizeći niz krivu pod dejstvom sile gravitacije nezavisno od početne tačke). Ako je vreme klizanja poznata konstanta onda je Abelova integralna jednačina

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)\,dt.$$

[Abel je više proučavao opšte integralne jednačine sa jezgrima forme $(x-t)^{\alpha}$.] Gornji integral osim multiplikativnog faktora $1/\Gamma(\frac{1}{2})$ je poseban slučaj konačnog integrala koji definiše razlomljenu integraciju reda $\frac{1}{2}$. U integralnoj jednačini kao što je ova gore, funkcija f pod integralom je nepoznata i biće utvrđena. Abel je napisao desnu stranu prethodne jednačine kao $\sqrt{\pi}[d^{-1/2}/dx^{-1/2}]f(x)$. Zatim je pomnožio obe strane jednačine sa $d^{1/2}/dx^{1/2}$ da bi dobio

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x)$$

jer ovaj razlomljeni operator (sa odgovarajućim uslovima za f) ima svojstvo da $D^{1/2}D^{-1/2}f = D^0 f = f$. Prema tome razlomljeni izvod reda $\frac{1}{2}$ konstante k u prethodnoj jednačini je izračunat, $f(x)$ je određeno. Ovo je izuzetno dostignuče Abela u razlomljenom računu. Važno je primetiti da razlomljeni izvod konstante nije uvek jednak nuli. Ta zanimljiva činjenica leži u centru svih matematičkih kontraverzi o kojima će ubrzo biti reči.
Tema razlomljenog računa je ležala uspavana skoro deceniju sve do pojave radova Liuvila (Joseph Liouville). P. Keland je kasnije primetio:
"Naše divljenje je veliko, kada razmišljamo o prvom objavljivanju [Liouvill] primena." Ali tek je 1974 objavljena je prva knjiga [Oldham-Spaner] posvećena ovoj temi i iste godine održava se prva konferencija [Ross 1975].
Matematičari su opisali Abelovo rešenje kao "elegantno". Možda su Furijeova integralna formula i Abelovo rešenje privukli Liuvila, koji je uradio prvu veliku studiju razlomljenog računa. On je objavio tri duga memoara u 1832 godini i više publikacija, ubrzo jednu za drugom. Liuvil je bio uspešan u primenjivanju svojih definicija na probleme u potencijalnoj teoriji.
Početna tačka za njegov teorijski razvoj bio je poznat rezultat za izvode celobrojnog reda.

$$D^m e^{ax},$$

što je on proširio na prirodan način na izvode proizvoljnog reda

$$D^{\nu} a^{ax} = a^{\nu} e^{ax}.$$

On je pretpostavio da se funkcija $f(x)$ može predstaviti redom:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \qquad Re\, a_n > 0 \quad (*)$$

odakle se dobija

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}.$$

Ova formula je poznata kao Liuvilova prva formula za razlomljeni izvod. Ona uopštava na prirodan način izvod proizvoljnog reda ν , gde je ν bilo kakav broj: racionalan, iracionalan ili kompleksan. Očigledana mana ove formule je da je samo primenljiva na funkcije oblika $(*)$. Možda je Liuvil bio svestan ovog ograničenja pa je zbog toga formulisao drugu definiciju.
Da bi dobio drugu definiciju on je pošao od određenog integrala koji se odnosi na gama funkciju:

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu}\, du, \qquad a > 0, \quad x > 0.$$

Smena $xu = t$ donosi

$$\begin{aligned} I &= x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt \\ &= x^{-a}\Gamma(a) \end{aligned}$$

ili

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I.$$

Zatim Liuvil koristi D^ν sa obe strane, jednačine iznad, da bi koristeći pretpostavku $[D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}]$ dobio

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu}\, du.$$

Tako Liuvil dobija svoju drugu definiciju razlomljenog izvoda:

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \qquad a > 0.$$

Ali Liuvilova definicija je bila previše "uska" da bi se duže održala. Prva definicija je bila ograničena na funkcije klase $(*)$ a druga definicija je upotrebljiva samo za funkcije tipa x^{-a} (za $a > 0$). Nijedna nije odgovarajuća da bi se primenila na širu klasu funkcija.
Liuvil je bio prvi koji je pokušao da reši diferencijalne jednačine pomoću razlomljenih operatora. Dopunske funkcije su bile jedan od predmeta njegovog proučavanja. U jednom od svojih mnogih radova [1834], da bi opravdao postojanje dopunske funkcije napisao je:"Obična diferencijalna jednačina $d^n y/dx^n = 0$ ima dopunsko rešenje $y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$. Zbog toga $d^u y/dx^u = 0$ (u promenljiva) bi trebala da ima odgovarajuće dopunsko rešenje." Liuvil je objavio svoju verziju dopunskog rešenja. Dalje njeno pominjanje je odigralo bitnu ulogu u unošenju nepoverenja u opštu teoriju razlomljenih operatora. Džordž Pikok (George Peacock 1833) i S.S.Greatheed [1839] su objavili

radove koji između ostalog bave dopunskim funkcijama. Greatheed je prvi koji je skrenuo pažnju na dvosmislenu prirodu dopunskih funkcija.

1.3 Dugotrajna kontraverza

Na kraju su date različite definicije razlomljenih operacija koje imaju i različite domene upotrebljivosti. Jedna definicija je bila generalizacija slučaja celog reda korištena od strane Lakroua i Abela za funkcije tipa x^a za $a > 0$. Druga je bila Liuvilova definicija korisna za funkcije tipa x^{-a} kada je $a > 0$. Pikok je podržavao Lakrouvu verziju definicije i smatrao da je Liuvilova definicija pogrešna u više tačaka.
Keland (P.Kelland), koji je objavio dva rada na ovu temu u 1839 i 1846 podržavao je korisnost Liuvilove definicije za funkcije tipa x^{-a} $(a > 0)$.
Vilijam Center (William Center 1848) je primetio da je razlomljeni izvod konstante, prema Lakrou-Pikok metodi, različit od nule. Koristi x^0 da označi jedinicu, Center pronalazi da je razlomljeni izvod jedinica reda $\frac{1}{2}$,
dozvoljavajući da je $m = 0$ i $n = \frac{1}{2}$ u

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{n-n}.$$

(mada je Lakrou pretpostavio da je $m \geq n$) dobio

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Ali Center ističe, prema Liuvilovom sistemu [odnoseći se na Liuvilovu drugu definiciju] puštajući da je $a = 0$ (čak je i Liuvil pretpostavio da je $a > 0$), razlomljeni izvod jedinica jednak je nuli jer $\Gamma(0) = \infty$. On nastavlja: "Čitavo pitanje je jednostavno svedeno na to šta je $d^u x^0/dx^u$. Kada ovo odredimo mi ćemo odrediti u isto vreme koji je korektan sistem."
Augustus De Morgan [1840] je posvetio tri strane razlomljenom računu: "Oba ova sistema vrlo verovatno mogu biti delovi mnogo opštijeg sistema, ali trenutno ja naginjem (u suprotno pristalicama oba sistema) ka zaključku da nijedan sistem nema nikakva prava da bude smatran da daje formu $D^n x^m$."
De Morganov sud se ispostavio da je tačan, za oba sistema za koje je Center mislio da su nepomirljivi, krajnji rezultat je bio da su deo opštijeg sistema. Pošteno je reći da su matematičari u to vreme težili ka verodostojnoj definiciji opšte integracije i diferencijacije.

1.4 Rimanov doprinos

Georg Fridrih Bernhard Riman(G. F. Bernhard Riemann) je razvio svoju teoriju razlomljene integracije u svojim studentskim danima ali je nije objavio. Objavljena je posthumno u njegovom *Gesammelte Werke* [1892]. On je pronašao generalizaciju Tejlorovog (Taylor) reda i izvoda

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt + \Psi(x). \qquad (**)$$

Zbog dvoznačnosti u donjoj granici integracije c, Riman je primetio u svojoj definiciji potrebu za dopunskom funkcijom $\Psi(x)$. Ova dopunska funkcija je neophodna kao pokušaj da se obezbedi mera devijacije, odstupanja od zakona o eksponentima. Ovaj zakon, kao što je pomenuto ranije je

$$_cD_x^{-\mu}\, {}_cD_x^{-\nu} f(x) =_c D_x^{-\mu-\nu} f(x)$$

[gde podindeksi c i x uz D se odnose na granice integracije u $(**)$] važi kada su donje granice c jednake. Riman je bio zabrinut za stepen odstupanja u slučaju $_cD_x^{\mu}\, {}_{c'}D_x^{-\nu} f(x)$ kada je $c \neq c'$.

A. Cayley [1880] je primetio: "Najveća poteškoća u Rimanovoj teoriji, čini mi se, je pitanje značenja dopunske funkcije koja sadrži beskonačnost proizvoljnih konstanti." Bilo koja zadovoljavajuća definicija razlomljene operacije zahtevaće da ta poteškoća bude uklonjena. Stvarno današnja definicija razlomljene integracije je bez dopunske funkcije. Pitanje egzistencije komplementarne funkcije prouzrokovalo je značajne nedoumice. Liuvil je napravio grešku kada je dao eksplicitnu ocenu svoje iterpretacije dopunske funkcije. On nije uzeo u obzir specijalan slučaj za $x = 0$ što je dovelo do kontradiktornosti [Davis, 1936]. Pikok je napravio dve greške u predmetu razlomljenog računa. Ove greške su uključivale zloupotrebu koju je on nazivao princip permanentnosti ekvivalentnih formi. Iako je ovaj princip naveden za algebru, Pikok je pretpostavio da ovaj princip važi za sve simboličke operacije. On je razmatrao egzistenciju dopunske funkcije i razvio proširenje na izvode celog reda $D^m(ax+b)^n$ a zatim težio da produži taj rezultat na opšti slučaj [Davis, 1936].
U vezisa greškama Liuvila i Pikoka postojala je duga rasprava da li je Lakro-Pikokova ili Liuvilova definicija razomljenog izvoda korektna. Kasnije, Cayley je primetio, kao što je pomenuto, da se Riman bio beznadežno upetljao u svoju verziju komplementarne funkcije. Kada je Oliver Hevisajd (Heaviside) objavio svoj rad u poslednjoj deceniji devetnaestog veka, dočekan je sa omalovažavanjem i nadmenošću pogoršanu ne samo sa njegovom smešnim slaganjem sa matematičarima već i zato što su matematičari tada imali generalno nepoverenje i otpor prema teoriji razlomljnih operatora.

1.5 Razvoj od polovine XIX veka do danas

Liuvil [1832a] a kasnije Hargrejv (C.J.Hargreave 1848) je predložio generalizaciju Lajbnicovog n-tog izvoda proizvoda, kada n nije pozitivan broj. U modernom obliku

$$D^{\nu} f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} D^n f(x) D^{\nu-n} g(x),$$

Gde je D^n običan diferencijalni operator reda n, $D^{\nu-n}$ razlomljeni operator i $\binom{\nu}{n}$ uopšteni binomni koeficijent $\Gamma(\nu+1)/n!\Gamma(\nu-n+1)$.Opšte Lajbnicovo pravilo

može se naći u danas u mnogim primenama. Grir (H.R.Greer 1858) je pisao o konačnim razlikama razlomljenog reda. Valjalo bi pomenuti i rad Mihai Egorov Vaščen(W. Zachartcheno 1861) koji je dopunio rad Grira.
Najraniji rad koji je doveo do definicije danas poznate kao Riman-Liuvilova definicija je rad N.Ya.Soni [1869] pod nazivom "*On differentiation with arbitrary index*".Njegova polazna tačka bila je Košijeva integralna formula.
A.V.Letnikov je napisao četiri članka na ovu temu od 1868 do 1872. Njegov rad "*An explanation of the main concepts of the theory of differentiation of arbitrary index*"[1872] koji je proširenje Soninovog rada.
n-ti izvod Košijeve integralne formule dat je sa

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Nije problem uopštiti $n!$ na promenljivu vrednost, kako je $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$. Kada n nije ceo broj integrand u jednačini ne sadrži više pol već tačku grananja koja treba da bude izostavljena u odgovarajućoj konturi. Izostavljanje te tačke rad Sonina i Letnikova nije obuhvatao. Takva situacija je ostala sve do 1884. i objave članka H. Laurenta, kada je teorija oštih operatora dostigla nivo u svom razvoju da može da bude polazna osnova modernim matematičarima. Teorija razlomljenog računa je blisko povezana sa teorijom operatora.

Oliver Hevisajd [1892] je objavio veći broj članaka u kojima je pokazao kako neke linearne diferencijalne jednačine mogu biti rešene upotrebom opštih operatora. Hevisajd nije bio formalno školovan naučnik, ta činjenica može objasniti njegov nedostatak strogosti u radovima. Njegovi metodi, koji su se pokazali korisnim, inženjerima u teoriji provođenja električne struje u kablovima, sakupljeni su pod nazivom "*Heaviside operational calculus*". Taj rad se odnosio na linearne funkcionalne operatore. On je označio operator diferenciranja slovom p i tretirao ga kao da je konstanta u rešavanju diferencijalnih jednačina. Na primer, jednačina toplote po jednoj dimenziji je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1)$$

gde je a^2 konstanta a u temperatura. Ako stavimo da je $\frac{\partial}{\partial t} = p$, tada (1) postaje

$$D^2 u = a^2 p. \qquad (2)$$

Dankan Gregori (Duncan Farquharson Gregory [1841]), za koga se kaže da je tvorac, kako je tada nazivan, računa operacija dodelio rešenju jednačine (1) simboličku formu:

$$u(x,t) = Ae^{xap^{1/2}} + Be^{-xap^{1/2}}.$$

To je upravo ono što bismo dobili ako rešimo jednačinu (2) pretpostavljajući da je p konstanta. Hevisajdove sjajne primene su ubrzale razvoj teorije ovih opštih operatora. On je postigao tačne rezultate proširujući eksponent na stepen $p^{1/2}$, gde je $p^{1/2} = d^{1/2}/dx^{1/2} = D^{1/2}$. U teoriji električnih kola, Hevisajd

je pronašao učestalu primenu za operator $p^{1/2}$. On je predstavio $p^{1/2} \to 1$, tako da je $D^{1/2}(1)$ namenio $(\pi t)^{-1/2}$. Kako $f(t) = 1$ funkcija Rimanove klase to je jasno da Hevisajdov operator mora biti interpretiran u kontekstu Rimanovih operatora ${}_0D_x^{\nu}$. [U modernom operacionom računu $pF(p)$ je zamenjeno sa $F(s)$, gde je s Laplasova transformaciona promenljiva. Zbog toga je $p^{1/2}$ zamenjeno sa $s^{-1/2}$ i inverz Laplasove transformacije $s^{-1/2}$ je $(\pi t)^{-1/2}$, što je $D^{1/2}(1)$.]
Njegovi rezultati su bili tačni ali on nije uspeo da opravda svoje procedure. Kelland je ranije ukazao na interval od deset godina između Furijeovih publikacija i Liuvilovih primena. Slična situacija je zadesila i Hevisajdove publikacije osim što je u ovome slučaju vremenski interval mnogo duži. Mnogo vremena je prošlo pre nego što su njegove procedure opravdane od strane Tomasa Bromviča (T. John I'Anson Bromwich 1919).

U periodu od 1900-1970 skroman broj radova je objavljen na temu razlomljenog računa, među kojima su radovi autora: M. Al-Bassam, H. T. Davis, A. Erdélyi, G. H. Hardy, H. Kober, J. E. Littlewood, E. R. Love, T. Osler, M. Riesz, Samako,I.Sneddon, H. Weyl, A. Zygmund.
Godine 1974 na univerzitetu u Nju Hejvenu (New Haven), Konektikat, održana je prva internacionalna konferencija o razlomljenom računu na kojoj su prisustvovali mnogi uvaženi matematičari. Teme su bile prilično različite, uključujući radove o razlomljenom računu i opštim funkcijama, nejednakostima dobijenim upotrebom razlomljenog računa i primenama na teoriju verovatnoće. Moguće je da je konferencija stimulisala poplavu radova na ovu temu, od 1975 više stotina radova je objavljeno na ovu temu. Druga konferencija je održana 1984 u Škotskoj. Na primer jedno od pitanja koje je razmatrano je: Da li je moguće naći geometrijsku interpretaciju za razlomljeni izvod necelobrojnog reda?
Značajna matematička aktivnost na polju razlomljnog računa se osamdesetih odvijala u Japanu sa publikacijama S. Owa [1990], M. Siago[1980] i K. Nishimoto. Poslednji pomenuti autor je objavio radu u četiri toma [1984, 1987, 1989, 1991] posvećen najviše primenama razlomljenog računa na obične i parcijalne diferencijalne jednačine. Ne iznenađuje podatak da je treća konferencija održana baš u Japanu, Tokiju 1989. Treba pomenuti da su u bivšem Sovjetskom Savezu tri matematičara, S. Samko, O. Marichev i A. Kilbas napisali enciklopedijski tekst o razlomljenom računu i njegovim primenama.
Razlomljen račun nalazi primenu u mnogim oblastima nauke i inženjerstva uključujući primenu u fluidima, reologiji, difuziji, električnim mrežama, elektromagnetnoj teoriji, verovatnoći, statistici, viskoelastičnosti. Retko da postoji neko polje nauke ili inženjeringa a da nije dotaknuto ovom temom. Ipak i ako je ovo stara tema retko je uključena u današnje nastavne planove tako da je to možda glavni razlog što mnogi matematičari nisu upoznati sa njome.

2 Gama funkcija

Nesumnjivo jedna od osnovnih funkcija razomljenog računa je Ojlerova gama funkcija $\Gamma(z)$, koja generalizuje faktorijal $n!$ i dozvoljava takođe za n ne celobrojne pa i čak kompleksne vrednosti.

2.1 Definicija gama funkcije

Gama funkcija $\Gamma(z)$ je definisana pomoću integrala

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{1}$$

koji konvergira u desnoj polovini kopleksne ravni $Re(z) > 0$. Tako da imamo

$$\begin{aligned}\Gamma(x+iy) &= \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy}\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\log(t)}\, dt \\ &= \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))]\, dt. \end{aligned}\tag{2}$$

Izraz u pravougaonim zagradama je ograničen za sve vrednosti t; konvergencija ka beskonačnosti je obezbeđena sa funkcijom e^{-t}, a za konvergenciju u $t = 0$ mora $x = Re(z) > 1$.

2.2 Prikaz osobina gama funkcije

Jedna od osnovnih osobina gama funkcije je da zadovoljava sledeću jednakost:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{3}$$

što se jednostavno može pokazati parcijalnom integracijom:

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z}\, dt = \Big[-e^{-t} t^{z}\Big]_{t=0}^{t=\infty} + z\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = z\Gamma(z),$$

Očigledno je da je $\Gamma(1) = 1$, a koristeći jednačinu (3) dobijamo za $z = 1, 2, 3...$:

$$\begin{gathered}\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\ \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \end{gathered}$$

Druga bitna osobina gama funkcije je da ima proste polove u tačkama $z = -n$, (n=0,1,2,...). Da bi smo pokažali to, napišimo definiciju (1) u obliku:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt + \int\limits_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{4}$$

Prvi integral u (4) može biti ocenjen korišćenjem razvoja reda za eksponencijalnu funkciju. Ako je $Re(z) = x > 0$(tj. z je u desnoj polovini ravni), onda $Re(z+k) = x+n > 0$ i $t^{z+k}\big|_{t=0} = 0$. Tako je,

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}.$$

Drugi integral definiše potpuno novu funkciju kompleksne promenljive z. Ako označimo

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt = \int_1^{\infty} e^{(z-1)\log(t)-t}\,dt. \tag{5}$$

Funkcija $e^{(z-1)\log(t)-t}$ je neprekidna funkcija po z i t za proizvoljno z i $t \geq 1$. Štaviše, ako je $t \geq 1$ (tada je $\log(t) \geq 0$), tada je i čitava funkcija po z. Razmotrimo promenljiv ograničeni zatvoreni domen D u kompleksnoj ravni ($z = x+iy$) i označimo $x_0 = \max_{z\epsilon D} Re(z)$.
Onda imamo:

$$\left| e^{-t}t^{z-1} \right| = \left| e^{(z-1)\log(t)-t} \right| = \left| e^{(z-1)\log(t)-t} \right| \cdot \left| e^{iylog(t)} \right|$$

$$= \left| e^{(x-1)\log(t)-t} \right| \leq e^{(x_0-1)\log(t)-t} = e^{-t}t^{x_0-1}.$$

Ovo znači da integral (5) ravnomerno konvergira u D i zbog toga je funkcija $\varphi(z)$ regularna u D i diferenciranje pod integralom je dozvoljeno. Kako je domen D izabran proizvoljno, možemo zaključiti da funkcija $\varphi(z)$ ima gornje osobine u čitavoj kompleksnoj ravni. Zbog toga je $\varphi(z)$ cela funkcija koja dozvoljava diferenciranje pod integralom. Uzimajući u obzir navedeno, može se primetiti

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \text{cela fnkcija}, \tag{6}$$

$\Gamma(z)$ ima samo proste polove u tačkama $z = -n$, $n = 0, 1, 2....$

2.3 Limes reprezentacija gama funkcije

Gama funkcija se takođe može predstaviti pomoću limesa

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}. \tag{7}$$

gde početno pretpostavljamo da je $Re(z) > 0$.
Da dokažemo jednačinu (7) uvedimo pomoćnu funkciju

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt. \tag{8}$$

Nakon zamene $\tau = \frac{t}{n}$ i primene parcijalne integracije dobijamo

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\, d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z\, d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}\, d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)(z+n)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Uzimajući u obzir dobro poznati limes

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

možemo očekivati da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{10}$$

što zaključuje dokaz limes reprezentacije gama funkcije, ako je zamena mesta limesa i integrala u jednačini (10) opravdana. Da bismo to uradili ocenimo razliku

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt - f_n(z) \\ &= \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Recimo da uzmemo proizvoljno $\epsilon > 0$. Zbog konvergencije integrala (1) to postoji neko N takvo da za $n \geq N$ imamo

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (x = Re(z)). \tag{12}$$

Fiksirajuči sada N i posmatrajuči kada je $n > N$ možemo zapisati Δ kao sumu tri integrala:

$$\Delta = \left(\int_0^N + \int_N^n \right) \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1}\, dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{13}$$

Poslednji izraz je manji od $\frac{\epsilon}{3}$. Za drugi integral imamo:

$$\left| \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1}\, dt \right| \leq \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1}\, dt$$

$$< \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt < \frac{\epsilon}{3}, \tag{14}$$

gde je $x = Re(z)$
Za procenu prvog integrala u jednačini (13) potrebna nam je sledeća pomoćna nejednakost:

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \quad (0 < t < n). \tag{15}$$

Što sledi iz relacije

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n}\, d\tau \tag{16}$$

i

$$0 < \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n}\, d\tau < \int_0^t e^\tau \frac{\tau}{n}\, d\tau = e^\tau \frac{t^2}{2n}. \tag{17}$$

(Jednakost (16) se može proveriti diferenciranjem obe strane jednakosti.)
Koristeći pomoćnu nejednakost (15) za dovoljno veliko n i fiksno N:

$$\left| \int_0^N \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1}\, dt \right| < \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1}\, dt < \frac{\epsilon}{3}. \tag{18}$$

Uzimajući u razmatranje nejednakosti (12), (14) i (18) i posredovanjem ϵ pokazali smo da je zamena mesta limesa i integrala u jednačini (10) dozvoljena. Time što smo pokazali da je dozvoljeno limesu da uđe pod integral smo završili i dokaz formule (7), limes reprezentacije gama funkcije kada je $Re(z) > 0$.

Uz pomoć (3) uslov $Re(z) > 0$ može biti oslabljen za $z \neq 0, -1. -2, ...$ na sledeći način.

Ako je $-m < Re(z) \leq -m + 1$ gde je m pozitivan ceo broj onda

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)...(z+m-1)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+m} n!}{(z+m)...(z+m+n)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)^{z+m}(n-m)!}{(z+m)(z+m+1)...(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Zbog toga granična reprezentacija gama funkcije (7) važi za svako $z \neq 0, -1, -2, \dots$.

2.4 Beta funkcija

U mnogim slučajevima je umesto određene kombinacije vrednosti gama funkcije jednostavnije koristiti takozvanu beta funkciju.

Beta funkcija je obično definisana sa

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\, d\tau, \quad (Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0). \tag{20}$$

Da bismo ustanovili relaciju između gama funkcije definisane formulom (1) i beta funkcije (20) korističemo Laplasovu transformaciju.

Razmotrimo sledeći integral

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\, d\tau. \tag{21}$$

Očigledno da je $h_{z,\omega}(t)$ konvolucija[1] funkcija t^{z-1} i $t^{\omega-1}$ i da je $h_{z,\omega}(1) = B(z, \omega)$. Kako je Laplasova transformacija konvolucije dve funkcije jednaka proizvodu njihovih Laplasovih transformacija dobijamo:

$$H_{z,\omega}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(\omega)}{s^\omega} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{s^{z+\omega}}, \tag{22}$$

[1] Konvolucija je matematički operator koji od dve funkcije f i g proizvodi treću i možemo je predstaviti sledećim izrazom:$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$ ili kraće $k(t) = f(t) * g(t)$

gde je $H_{z,\omega}(s)$ Laplasova transformacija funkcije $h_{z,\omega}(t)$. Na drugoj strani kako je $\Gamma(z)\Gamma(\omega)$ je konstantna, moguće je dobiti orginalnu funkciju $h_{z,\omega}(t)$ inverznom Laplasovom transfrmacijom desne strane jednačine (22). Zahvaljujući jedinstvenosti Laplasove transformacije imamo da je:

$$h_{z,\omega}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} t^{z+\omega-1}, \tag{23}$$

i uzimajući $t = 1$ dobijamo sledeći izraz za beta funkciju:

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \tag{24}$$

odakle sledi

$$B(z,\omega) = B(\omega, z) \tag{25}$$

Definicija beta funkcije (20) važi samo kada je $Re(z) > 0$, $Re(\omega) > 0$. Relacija (24) obezbeđuje analitičku neprekidnost beta funkcije na čitavoj kompleksnoj ravani, ako imamo analitički neprekidnu gama funkciju.
Uz pomoć beta funkcije možemo ustanoviti sledeće dve važne relacije za gama funkciju.Prva je

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{26}$$

Izvešćemo formulu (26) pod uslovim da je $0 < Re(z) < 1$ i pokazati da važi za $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Koristeći (24) i (20) možemo zapisati

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}, \tag{27}$$

gde integral konvergira ako je $0 < Re(z) < 1$. Primenom zamene promenljivih $\tau = t/(1-t)$ dobijamo

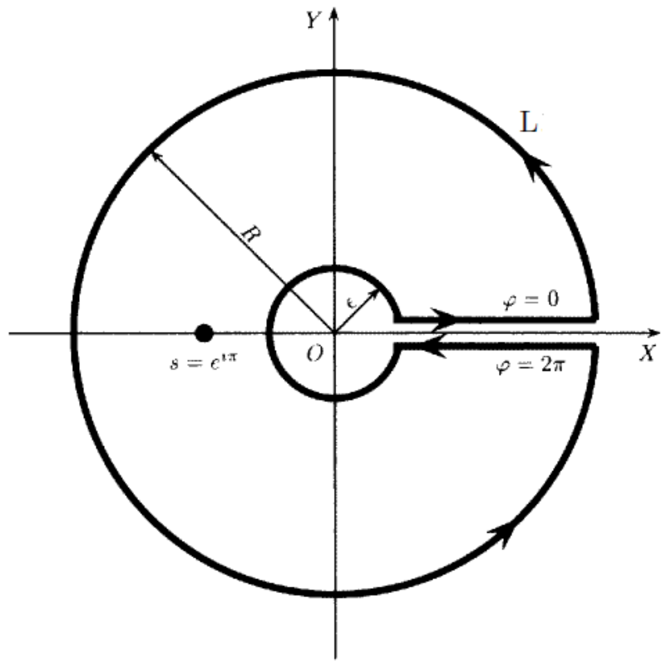
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{\tau^{z-1}}{1+\tau}\, d\tau. \tag{28}$$

Posmatrajmo sada integral

$$\int_L f(s)\, ds, \qquad f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s}, \tag{29}$$

duž konture prikazane na slici 1. Kompleksna ravan je presečena duž realne pozitivne polu ose. Funkcija $f(\tau)$ ima prost pol u $s = e^{\pi i}$. Odatle za $R > 1$ imamo

$$\int\limits_L f(s)\, ds = 2\pi i \left[Res f(s)\right]_{s=e^{\pi i}} = -2\pi i e^{i\pi z}. \tag{30}$$



Slika 1: Kontura L.

Sa druge strane, integrali po kružnicama poluprečnika $|s| = \epsilon$ i $|s| = R$ nestaju kad $\epsilon \to 0$ i $R \to \infty$, i integral uz donju horizontalnu ivicu odesčka se razlikuje od integrala po gornjoj ivici odsečka za faktor $-e^{2\pi i z}$.Tako da kada $\epsilon \to 0$ and $\epsilon \to \infty$ dobijamo:

$$\int\limits_L f(s)\, ds = 2\pi i \left[Res f(s)\right]_{s=e^{\pi i}} = -2\pi i e^{i\pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)(1-e^{2\pi i z}), \tag{31}$$

i

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{2\pi i e^{i\pi z}}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (0 < Re(z) < 1). \tag{32}$$

Ako je $m < Re(z) < m + 1$ tada možemo staviti da je $z = \alpha + m$, gde je $0 < Re(\alpha) < 1$.Koristeći (3) dobijamo

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (-1)^m \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

$$= \frac{(-1)^m \pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha+m))} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{33}$$

što pokazuje da relacija (26) važi za $z \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Uzevši da je $z = 1/2$ dobijamo iz jednakosti (26) posebno korisnu vrednost gama funkcije:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{34}$$

Druga veoma bitna osobina gama funkcije, koja se lako pokazuje pomoću beta funkcije, je Ležandrova formula

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z), \qquad (2z \neq 0, -1, -2, \ldots). \tag{35}$$

Da bismo dokazali relaciju (35) razmotrimo

$$B(z,z) = \int\limits_0^1 [\tau(1-\tau)]^{z-1}\, d\tau, \qquad (Re(z) > 0). \tag{36}$$

Uzmimo u obzir simetriju funkcije $y(\tau) = \tau(1-\tau)$ i uvođenjem zamene $s = 4\tau(1-\tau)$ dobijamo

$$B(z,z) = 2\int\limits_0^{1/2} [\tau(1-\tau)]^{z-1}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\int\limits_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-1/2}\, ds = 2^{1-2z}B(z,\frac{1}{2}), \tag{37}$$

i koristeći (24) dobijamo iz (37) Ležandrovu formulu (35).

Uzimajući $z = n + \frac{1}{2}$ u (35) dobijamo set određenih vrednosti gama funkcije

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \tag{38}$$

koji takođe sadrži (34).

3 Definicije razlomljenih integrala i izvoda

Razlomljeni račun je naziv za teoriju integrala i izvoda proizvoljnog reda, što objedinjuje i generalizuje pojmove celobrojnog diferenciranja i višestruke integracije. Posmatrajmo beskonačan niz n-višestrukih integrala i izvoda:

$$\ldots \int\limits_a^t d\tau_2 \int\limits_a^{\tau_2} f(\tau_1)\, d\tau_1, \;\; \int\limits_a^t f(\tau_1)\, d\tau_1, \;\; f(t), \;\; \frac{df(t)}{dt}, \;\; \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad \ldots$$

Izvod proizvoljnog reda realnog stepena α može se razmatrati kao interpolacija ovog niza operatora. Koristićemo notaciju predloženu i korišćenu od strane Dejvisa [1],

$${}_aD_t^{\alpha} f(t).$$

Koristićemo istu notaciju za razlomljene integrale gde će se red odnositi na negativne vrednosti α.Označićemo razlomljeni integral stepena $\beta > 0$ sa

$${}_aD_t^{-\beta} f(t).$$

Razlomljena diferencijalna jednačina je jednačina koja sadrži razlomljene izvode dok je razlomljena integralna jednačina integralna jednačina sačinjena od razlomljenih integrala. Sistem razlomljenog reda se odnosi na sistem opisan razlomljenom diferencijalnom ili razlomljenom integralnom jednačinom ili sistemom takvih jednačina.

3.1 Grunvald-Letnikov

3.1.1 Objedinjavanje zapisa

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $y = f(x)$. Prema dobro poznatoj definiciji, prvi izvod funkcije $f(x)$ je definisan sa

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1}$$

Primenjujući ovu definiciju dva puta dobijamo izvod drugog reda:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Koristeći (1) i (2) imamo

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{3}$$

i indukcijom dalje dobijamo

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \tag{4}$$

gde je uobičajena notacija za binomne koeficijente:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \tag{5}$$

Razmotrimo sada sledeći izraz generalizujući razlomke u (1) i (4):

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{r} f(t - rh), \tag{6}$$

gde je p proizvoljan ceo broj; n je kao i gore takođe ceo broj.
Očigledno da za $p \leq n$ imamo

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}. \tag{7}$$

jer u tom slučaju, kako sledi iz formule (5), svi koeficijenti u brojiocu posle $\binom{p}{p}$ su jednaki 0. Razmotrimo negativne vrednosti za p.
Zbog jednostavnosti obeležimo

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!}. \tag{8}$$

Onda imamo

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{9}$$

i zamenjujući p u (6) sa $-p$ možemo zapisati kao

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh), \tag{10}$$

gde je p pozitivan ceo broj. Ako je n fiksno, tada $f_h^{(-p)}(t)$ teži ka ne tako interesantnoj granici 0 kada $h \to 0$. Da bismo dostigli granicu različitu od nule, moramo pretpostaviti da $n \to \infty$ kada $h \to 0$. Možemo uzeti $h = \frac{t-a}{n}$, gde je a realna konstanta, i razmotriti graničnu vrednost za $f_h^{(-p)}(t)$ bilo konačnu ili beskonačnu, koju ćemo označiti sa:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{-p} f(t). \tag{11}$$

Ovde ${}_aD_t^{-p} f(t)$ označava u suštini određenu operaciju izvedenu na funkciji $f(t)$; a i t su krajevi, granice koje se odnose na tu operaciju.
Sada razmotrimo par određenih slučajeva. Za $p = 1$ imamo:

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} f(t - rh). \tag{12}$$

Uzimajući u obzir da $t - nh = a$ i da je pretpostavljeno za funkciju $f(t)$ da je neprekidna, zaključuemo da

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{(-1)} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau. \tag{13}$$

Uzmimo sada da je $p = 2$. U ovom slučaju

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2 + r - 1)}{r!} = r + 1,$$

i tada imamo:

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (rh) f(t - rh). \tag{14}$$

Označavajući sa $t + h = y$ možemo prethodni izraz napisati kao

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh). \tag{15}$$

i puštajući da $h \to 0$ dobijamo

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{(-2)} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz = \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \tag{16}$$

zbog toga što $y \to t$ kada $h \to 0$.
Za $p = 3$, dobićemo opšti izraz za ${}_aD_t^{-p}$.
Uzimajući u obzir da je

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (3 + r - 1)}{r!} = \frac{(r + 1)(r + 2)}{1 \cdot 2},$$

imamo jednčinu

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=0}^{n} (r + 1)(r + 2) h^2 f(t - rh). \tag{17}$$

Označavajući kao gore $t + h = y$ možemo zapisati kao

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r + 1) h^2 f(y - rh). \tag{18}$$

Izraz (18) se može zapisati kao

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y - rh) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y - rh). \tag{19}$$

Uzimajući da $h \to 0$ dobijamo sledeću formulu

$${}_aD_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t - z)\, dz = \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau)\, d\tau, \tag{20}$$

jer $y \to t$ kako $h \to 0$ i

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y - rh) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h \int_a^t (t - \tau) f(\tau)\, d\tau = 0.$$

Relacije (13)-(20) ukazuju na sledeći opšti izraz:

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\, d\tau. \quad (21) $$

Za dokaz formule (21) koristićemo indukciju, ako važi za neko p onda važi i za $p+1$

Uvedimo sada funkciju

$$ f_1(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau \quad (22) $$

koja ima očiglednu osobinu da je $f_1(a) = 0$, i posmatrajmo

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h) \end{aligned} \quad (23) $$

Koristeći (8) lako se proverava da je

$$ \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix}, \quad (24) $$

gde moramo staviti da je

$$ \begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0. $$

Relacija (24) primenjena na prvu sumu u (23) i zamena r sa $r-1$ u drugoj sumi daje:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad + \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &= {}_aD_t^{-p} f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h) \\ &= {}_aD_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1(a - \frac{t-a}{n}). \end{aligned} $$

Iz definicije (22) funkcije $f_1(t)$ sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} f_1(a - \frac{t-a}{n}) = 0.$$

Uzimajući u obzir poznatu granicu (7)

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)},$$

izvodimo

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1} f(t) &= {}_aD_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau)\, d\tau \\ &= -\left.\frac{(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!}\right|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{25}$$

što okončava dokaz formule (21) indukcijom.

Sada pokažimo da je formula (21) reprezentacija p-tostrukog integrala. Integraljenjem relacije

$$\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau)\, d\tau = {}_aD_t^{-p+1} f(t)$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} f(t) &= \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+1} f(t)\right) dt, \\ {}_aD_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right) dt \quad \text{,itd.,} \end{aligned}$$

i zbog toga

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+3} f(t)\right) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t dt}_{p \text{ puta}}\, f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{26}$$

Vidimo da su izvod celobrojnog reda n (4) i p-tostruki integral (21) neprekidne funkcije $f(x)$ poseban slučaj opšteg izraza

$$ {}_aD_t^p f(t) \;=\; \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh), \tag{27} $$

što predstavlja izvod reda m ako je $m=p$ i m puta ponovljeni integral ako je $p=-m$.

Ovo razmatranje prirodno navodi na ideju generalizacije zapisa diferenciranja i integraljenja ako za p u (27) dozvolimo da ima proizvoljne realne pa čak i kompleksne vrednosti. Ograničićemo našu pažnju na realne vrednosti za p.

3.1.2 Integrali razlomljenog reda

Posmatrajmo slučaj kada je $p<0$. Zbog jednostavnosti dozvolimo zamenu p sa $-p$ u izrazu (27). Tada (27) ima formu

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) \;=\; \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}f(t-rh), \tag{28} $$

gde su kao i gore, vrednosti h i n u odnosu $nh=t-a$.

Da bismo dokazali postojanje limesa u (28) i ocenili taj limes potrebna nam je sledeća teorema (A.V.Letnikov, *Theory of differentiation of an arbitrary order*) [2]:

Teorema 3.1 *Uzmimo niz β_k,(k=1,2,...) i pretpostavimo da*

$$ \lim_{k\to\infty}\beta_k = 1, \tag{29} $$

$$ \lim_{n\to\infty}\alpha_{n,k} = 0 \textit{ za svako } k, \tag{30} $$

$$ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k} = A \textit{za svako } k, \tag{31} $$

$$ \sum_{k=1}^{n}\mid \alpha_{n,k}\mid < K \textit{ za svako } n. \tag{32} $$

Tada je

$$ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k = A. \tag{33} $$

Dokaz. Uslov (29) dozvoljava nam da stavimo

$$ \beta_k = 1-\sigma_k, \text{ gde je } \lim_{k\to\infty}\sigma_k = 0. \tag{34} $$

iz uslova (30) sledi da za svako fiksirano r

$$ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r-1}\alpha_{n,k}\beta_k = 0 \tag{35} $$

i

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r-1}\alpha_{n,k}=0. \tag{36}$$

Koristeći zatim (35), (34), (31) i (36) dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\sigma_k \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\sigma_k \\
&= A - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}\alpha_{n,k}\sigma_k.
\end{aligned}$$

Sada koristeći (36) i (32), možemo izvesti sledeću ocenu:

$$\begin{aligned}
\left|A-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k\right| &< \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}|\alpha_{n,k}|\cdot|\sigma_k| \\
&< \sigma^*\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}|\alpha_{n,k}| = \sigma^*\lim_{n\to\infty}\sum_{k=r}^{n}|\alpha_{n,k}| \\
&< \sigma^* K
\end{aligned}$$

gde je $\sigma^*=\max_{k\geq r}\mid\sigma_k\mid$. To sledi iz (34) da za svako proizvoljno malo $\epsilon>0$ postoji r takvo da $\sigma^*<\epsilon/K$ tako da je

$$\left|A-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k\right|<\epsilon,$$

i (33) teoreme važi.

Teorema 3.1 daje jednostavne posledice. Naime ako uzmemo

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k=B,$$

onda

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k=AB. \tag{37}$$

uvodeći niz

$$\tilde{\beta}_k=\frac{\beta_k}{B},\qquad \lim_{k\to\infty}\tilde{\beta}_k=1,$$

možemo primeniti Teoremu 3.1 da bismo dobili

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\tilde{\beta_k} = \lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\frac{\beta_k}{B} = A,$$

odakle izraz (37) proizilazi.

Da bismo primenili Teoremu 3.1 za ocenu(28), zapišimo

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}f(t-rh)\\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r^{p-1}}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}h(rh)^{p-1}f(t-rh)\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}h(rh)^{p-1}f(t-rh)\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}\frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1}f\left(t-r\frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

i uzmimo

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix},$$

$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1}f\left(t-r\frac{t-a}{n}\right).$$

Koristeći (7) imamo

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = \lim_{r\to\infty}\frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix} = 1. \tag{38}$$

Očigledno ako je funkcija $f(t)$ neprekidna u zatvorenom intervalu $[a,b]$, onda

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\alpha_{n,r} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1}f\left(t-r\frac{t-a}{n}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{r=0}^{n}h(rh)^{p-1}f(t-rh)\\
&= \int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)\,d\tau. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir (38) i (39) i primenjujući Teoremu 3.1 zaključujemo da

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\ r\end{bmatrix}f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)\,d\tau \tag{40}$$

Izvod $f'(t)$ je neprekidan na $[a,b]$, tada parcijalnom integracijom možemo zapisati (40) u obliku

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p-1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau)\,d\tau, \tag{41} $$

i ako funkcija $f(t)$ ima $m+1$ neprekidan izvod, onda

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau)\,d\tau. \tag{42} $$

3.1.3 Izvodi razlomljenog reda

Razmotrimo sada slučaj da je $p > 0$. Kao i prethodno ocenimo limes

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}\binom{p}{r} f(t-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \tag{43} $$

gde

$$ f_h^{(p)}(t) = h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r} f(t-rh). \tag{44} $$

Da bismo ocenili (43), prvo transformišimo izraz za $f_h^{(p)}(t)$ na sledeći način. Koristeći poznatu osobinu binomnih koeficijenata

$$ \binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1} \tag{45} $$

možemo zapisati

$$ \begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r} f(t-rh) \\ &\quad + h^{-p}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \\ &= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r} f(t-rh) \\ &\quad + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\binom{p-1}{r} f(t-(r+1)h) \\ &= (-1)^n\binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) \end{aligned} $$

$$+h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-1}{r}\Delta f(t-rh), \tag{46}$$

gde je

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h).$$

Očigledno da je $\Delta f(t-rh)$ konačna razlika unazad prvog reda funkcije $f(\tau)$ u tački $\tau = t - rh$. Primenjujući osobinu (45) binomnih koeficijenata uzastopno m puta, dobijamo polazeći od (46):

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) + (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}\Delta f(a+h) \\
&\quad +h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) + (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}\Delta f(a+h) \\
&\quad +(-1)^{n-2}\binom{p-3}{n-3}h^{-p}\Delta^2 f(a+2h) \qquad (47) \\
&\quad +h^{-p}\sum_{r=0}^{n-3}(-1)^r\binom{p-3}{r}\Delta^3 f(t-rh) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh) \\
&\quad +h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{p-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(t-rh). \qquad (48)
\end{aligned}$$

Krenimo sada da ocenimo granicu k-tog člana u prvoj sumi u (48):

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}h^p\Delta^k f(a+kh) \\
&\quad = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k} \\
&\qquad \times\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}(nh)^{-p+k}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&\quad = (t-a)^{p+k}\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k} \\
&\qquad \times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}\times\lim_{n\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}
\end{aligned}$$

$$= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \tag{49}$$

što koristimo (7) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2)\dots(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a).$$

Znajući limes (49) lako možemo zapisati limes prve sume u (48).
Da bismo ocenili limes druge sume u (48) napišimo je u obliku

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}$$

$$\times h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}. \tag{50}$$

Da bismo primenili Teoremu 3.1 uzimamo

$$\beta_r = (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}.$$

$$\alpha_{n,r} = h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}, \quad h = \frac{t-a}{n}.$$

Koristeći (7) potvrđujemo da

$$\lim_{r\to\infty} \beta_r = \lim_{r\to\infty} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} = 1. \tag{51}$$

Ako je $m - p > -1$, tada

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}$$

$$= \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau. \tag{52}$$

Uzimajući u obzir (51) i (52) i primenjujući Teoremu 3.1 zaključujemo da je

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \qquad (53)$$

Koristeći (49) i (53) konačno dobijamo limes za (43):

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^p(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \qquad (54)$$

Formula (54) je izvedena pod pretpostavkom da su izvodi $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, \ldots, m+1)$ neprekidni u zatvorenom intervalu $[a, b]$ i da je m ceo broj koji zadovoljava uslov $m > p - 1$.
Najmanja moguća vrednost za m je određena nejednakošću

$$m < p < m + 1.$$

3.2 Riman-Liuvil

Grunvald-Letnikovljeva definicija razlomljenih izvoda, definisana kao limes razlomljenog reda konačnih razlika unazad, nije praktična za upotrebu. Dobijeni izraz (54) izgleda bolje zbog prisustva integrala u njemu; ali šta je sa delom koji nije pod integralom? Odgovor je jednostavan i elegantan: razmatrajmo izraz (54) kao poseban slučaj za integro-diferencijalni izraz

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m+1-a)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)\, d\tau, \qquad (m \le p < m+1). \qquad (55)$$

Izraz (55) je opšte poznata definicija razlomljenog izvoda, zvana Riman-Liuvilova definicija. Očigledno je da se izraz (54), koji je izveden iz Grunwald-Letnikovljevog razlomljenog izvoda pod pretpostavkom da funkcija $f(t)$ mora biti $m + 1$ puta neprekidno diferencijabilna, može izvesti iz (55) pod istom pretpostavkom uzastopno ponavljajući parcijalnu integraciju i diferenciranje.
To daje

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m+1-a)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

$$=_a D_t^p f(t), \qquad (m \leq p < m+1). \tag{56}$$

Zbog toga ako posmatramo klasu funkcija $f(t)$ koje imaju $m+1$ neprekidni izvod za $t \geq 0$, onda Grunvald-Letnikovljeva definicija (43) (ili što je u ovome slučaju isto, njena integralna forma (54) je ekvivalent Riemann-Liuvilovoj definiciji (55).
Sa čisto matematičkog stanovišta gledano takva klasa funkcija je uzana, mada sa praktičnog aspekta veoma bitna u primenama, većina dinamičkih procesa je dovoljno glatka i ne dozvoljava prekidnost.
Razumevanje ove činjenice veoma je važno za korektnu upotrebu ovih meoda razlomljenog računa u primenama, posebno zbog činjenice da Riman-Liuvilova definicija (55) obezbeđuje odličnu priliku da se ti uslovi oslabe za funkciju $f(t)$. Naime dovoljno je da zahtevamo integrabilnost $f(t)$; tada integral (79) postoji za $t > a$ i može biti diferenciran $m+1$ puta. Slabi uslovi za funkciju $f(t)$ u (55) su neophodni, npr. da bismo dobili rešenje Abelove integralne jednačine.
Pogledajmo sada kako se Riman-Liuvilova definicija (55) pojavljuje kao rezultat spajanja notacija integracije i diferenciranja celobrojnog reda.

3.2.1 Objedinjavanje zapisa

Pretpostavimo da je funkcija $f(\tau)$ neprekidna i integrabilna u konačnom (a, b); funkcija $f(t)$ može imati integrabilni singularitet reda $0 < r < 1$ u tački $\tau = a$:

$$\lim_{r \to a} (\tau - a)^r f(t) = const (\neq 0).$$

Onda integral

$$f^{-1}(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau \tag{57}$$

postoji i ima konačnu vrednost, naime jednak je 0 kad $t \to a$. Ako izvršimo zamenu $\tau = a + y(t-a)$ i označimo $\epsilon = t - a$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to a} f^{(-1)}(t) &= \lim_{t \to a} \int_a^t f(\tau)\, d\tau \\
&= \lim_{t \to a} (t-a) \int_0^1 f(a + y(t-a))\, dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{1-r} \int_0^1 (\epsilon y)^r f(a + y\epsilon) y^{-r}\, dy = 0,
\end{aligned} \tag{58}$$

jer je $r < 1$. Zbog toga možemo razmatrati dvostruki integral

$$\begin{aligned}
f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau = \int_a^t f(\tau)\, d\tau \int_\tau^t d\tau_1 \\
&= \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{59}$$

Integracijom (59) dobijamo trostruki integral funkcije $f(\tau)$:

$$\begin{aligned}
f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3)\, d\tau_3 \\
&= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)\, d\tau, \qquad (60)
\end{aligned}$$

i indukcijom u opštem slučaju imamo Košijevu (Cauchy) formulu

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau. \qquad (61)$$

Neka je sada $n \geq 1$ fiksirano i uzmimo ceo broj $k \geq 0$.
Postići ćemo

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau. \qquad (62)$$

gde oznaka $D^{-k}(k \geq 0)$ predstavlja k iteracija integracije.
Sa druge strane, za fiksno $n \geq 1$ i ceo broj $k \geq n$ $(k-n)$-ti izvod funkcije $f(t)$ može biti zapisan kao

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau, \qquad (63)$$

gde oznaka $D^{k}(k \geq 0)$ predstavlja k iteracija diferenciranja. Vidimo da formule (62) i (63) mogu biti razmatrane kao poseban slučaj jedne od njih, na primer (63) u kojoj je n $(n \geq 1)$ fiksno i D^k označava k integracija ako je $k \leq 0$ i k diferenciranja ako je $k \geq 0$. Ako je $k = n-1, n-2, \dots$, tada formula (63) daje iterativno integrale funkcije $f(t)$; za $k = n$ dobijamo funkciju $f(t)$; za $k = n+1, n+2, n+3, \dots$ dobijamo izvode reda $k - n = 1, 2, 3 \dots$ funkcije $f(t)$.

3.2.2 Integrali razlomljenog reda

Da bismo proširili notaciju n-tog integrala na necelobrojne vrednosti za n, možemo krenuti od Košijeve formule (61) i zameniti ceo broj n u njoj sa realnim $p > 0$:

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\, d\tau. \qquad (64)$$

U (61) ceo broj n mora zadovoljiti uslov da je $n \geq 1$; odgovarajući uslov za p je slabiji: za egzistenciju integrala (64) mora biti $p > 0$.
Šta više pod razumnom pretpostavkom

$$\lim_{p\to 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = f(t), \tag{65}$$

pa možemo staviti

$$ {}_aD_t^{0} f(t) = f(t). \tag{66}$$

Dokaz jednačine (65) je veoma jednostavan ako $f(t)$ ima neprekidne izvode za $t \geq 0$. U tom slučaju parcijalna integracija i korišcenje osnovne osobine gama funkcije ($\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$) daju

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{(t-a)^p f(a)}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau)\, d\tau,$$

i dobijamo da je

$$\lim_{p\to 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau)\, d\tau = f(a) + (f(t) - f(a)) = f(t).$$

Ako je $f(t)$ neprekidna samo za $t \geq a$ tada je dokaz (65) nešto duži. U tom slučaju napišimo ${}_aD_t^{-p} f(t)$ u obliku:

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} (f(\tau) - f(t))\, d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1} (f(\tau) - f(t))\, d\tau && (67) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1} (f(\tau) - f(t))\, d\tau && (68) \\
&\quad + \frac{f(t)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)}. && (69)
\end{aligned}$$

Posmatrajmo integral (68). Kako je $f(t)$ neprekidna , za svako $\delta > 0$ postoji $\epsilon > 0$ takvo da

$$\mid f(\tau) - f(t) \mid < \epsilon.$$

Onda imamo sledeću ocenu integrala (68):

$$|I_2| < \frac{\epsilon}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1}\, d\tau < \frac{\epsilon \delta^p}{\Gamma(p+1)}, \tag{70}$$

i uzimajući u obzir da $\epsilon \to 0$ kad $\delta \to 0$ dobijamo da za svako $p \geq 0$

$$\lim_{\delta \to 0} |I_2| = 0. \tag{71}$$

Sada uzmimo proizvoljno $\epsilon > 0$ i izaberimo δ tako da je

$$|I_2| < \epsilon \tag{72}$$

za svako $p \geq 0$. Za fiksirano δ dobijamo sledeću ocenu integrala (67):

$$|I_1| \leq \frac{M}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1}\, d\tau \leq \frac{M}{\Gamma(p+1)} \left(\delta^p - (t-a)^p\right), \tag{73}$$

odakle sledi za fiksirano $\delta > 0$

$$\lim_{p \to 0} |I_1| = 0. \tag{74}$$

Razmatrajući

$$\left|{}_aD_t^{-p} f(t) - f(t)\right| \leq |I_1| + |I_2| + |f(t)| \cdot \left| \frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} - 1 \right|$$

i uzimajući u obzir granice (74) i (71) i ocenu (72) dobijamo

$$\lim_{p \to 0} \sup \left|{}_aD_t^{-p} f(t) - f(t)\right| \leq \epsilon,$$

gde ϵ možemo izabrati malo koliko god želimo. Zbog toga,

$$\lim_{p \to 0} \sup \left|{}_aD_t^{-p} f(t) - f(t)\right| = 0,$$

i (65) važi ako je $f(t)$ neprekidna za $f \geq a$.

Ako je $f(t)$ neprekidna funkcija za $t \geq a$, onda integracijom razlomljenog realnog reda definisanog (64) imamo sledeću važnu osobinu:

$${}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^{-q} f(t)\right) = {}_aD_t^{-p-q} f(t). \tag{75}$$

Stvarno, imamo

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^{-q} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1}\, {}_aD_r^{-p} f(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1}\, d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{p-1} f(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{q-1} (\tau-\xi)^{p-1}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t f(t-\xi)^{p+q-1} f(\xi)\, d\xi \\
&= {}_aD_t^{-p-q} f(t).
\end{aligned}$$

(Za ocenu integrala od ξ do t koristili smo smenu $\tau = \xi + \zeta(t-\xi)$ što nam je omogućilo da ga izrazimo pomoću beta funkcije (1.20).)
Očigledno je da možemo zameniti mesta p i q pa imamo

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) = {}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) = {}_aD_t^{-p-q}f(t). \qquad (76) $$

Može se primetiti da je pravilo (76) slično dobro poznatoj osobini izvoda celobrojnog reda:

$$ \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^{m+n}f(t)}{dt^{m+n}}. \qquad (77) $$

3.2.3 Izvodi razlomljenog reda

Reprezentacija (63) izvoda celobrojnog reda $k-n$ omogućava proširenje, da se isti zapis odnosi i na necelobrojne redove. Možemo ostaviti ceo broj k i zameniti ceo broj n sa realnim, recimo α, tako da je $k-\alpha>0$. To nam daje

$$ {}_aD_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau, \qquad (0<\alpha\leq 1). \qquad (78) $$

gde je jedina značajno ograničenje za α, da je $\alpha>0$, što je neophodno zbog konvergencije integrala u (78). Ova restrikcija se može zameniti bez gubitka opštosti sa užim uslovom $0<\alpha\leq 1$; ovo se lako može pokazati uz pomoć osobine

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) ={}_a D_t^{-q}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) ={}_a D_t^{-p-q}f(t) $$

proizvoljnog realnog reda i definicije (78). Označavajući sa $p=k-\alpha$ možemo zapisati (64) kao

$$ {}_aD_t^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}f(\tau)\,d\tau, \qquad (k-1\leq p<k) \qquad (79) $$

ili

$$ {}_aD_t^{p}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-(k-p)}f(t)\right), \qquad (k-1\leq p<k) \qquad (80) $$

Ako je $p=k-1$ tada imamo konvencionalan izvod celobrojnog reda $k-1$:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{k-1}f(t) &= \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-(k-(k-1))}f(t)\right) \\ &= \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-1}f(t)\right) = f^{(k-1)}(t). \end{aligned} $$

Šta više koristeći (66) vidimo da za $p=k\geq 1$ i $t>a$

$$ {}_aD_t^{p}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{0}f(t)\right) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t), \qquad (81) $$

što znači da se za $t>a$ Riman-Liuvilov razlomljeni integral (79) reda $p=k>1$ podudara sa konvencionalnim izvodom reda k.

Razmotrimo sada neke osobine za Riman-Liuvilov razlomljeni integral.

Prvo a mžda i najvažnije svojstvo Riman-Liuvilovog razlomljenog integrala je da za $p > 0$ i $t > a$

$$ {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) = f(t), \tag{82} $$

što znači da Riman-Liuvilov razlomljeni diferencijalni operator je levi inverz Riman-Liuvilovog razlomljenog integralnog operatora istog reda p.
Da bismo dokazali svojstvo (82) posmatrajmo slučaj gde je ceo broj $p = n \geq 1$:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^n \left({}_aD_t^{-n} f(t) \right) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau)\, d\tau = f(t). \end{aligned} $$

Uzimajući sada $k - 1 \leq p < k$ i upotrebom pravila kompozicije (76) za Riman-Liuvilove razlomljene integrale, možemo zapisati

$$ {}_aD_t^{-k} f(t) = {}_aD_t^{-(k-p)} \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right), \tag{83} $$

i zbog toga

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) &= \frac{d^k}{dt^k} \left\{ {}_aD_t^{-(k-p)} \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) \right\} \\ &= \frac{d^k}{dt^k} \left\{ {}_aD_t^{-p} f(t) \right\} = f(t), \end{aligned} $$

što okončava dokaz svojstva (82).

Kao i kod konvencionalnog diferenciranja i integraljenja celog reda tako i kod razlomljenog diferenciranje i integraljenje ne komutiraju.
Ako je razlomljeni izvod ${}_aD_t^p f(t)$, $(k - 1 \leq p < k)$ funkcije $f(t)$ integrabilan, onda

$$ {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \tag{84} $$

Svakako sa druge strane imamo

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^p f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} \, {}_aD_\tau^p f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \, {}_aD_\tau^p f(\tau)\, d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{85} $$

Sa druge strane, ponovljenim integracijama deo po deo i zatim korišćenjem (76) dobijamo

$$ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \, {}_aD_\tau^p f(\tau)\, d\tau $$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \, \frac{d^k}{d\tau^k} \left\{ {}_aD_\tau^{-(k-p)} f(\tau) \right\} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \left\{ {}_aD_\tau^{-(k-p)} f(\tau) \right\} d\tau \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} \left({}_aD_t^{-(k-p)} f(t) \right) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \left\{ {}_aD_\tau^{-(k-p)} f(\tau) \right\} d\tau \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \qquad (86) \\
&= {}_aD_t^{-(p-k+1)} \left({}_aD_t^{-(k-p)} f(t) \right) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \qquad (87) \\
&= {}_aD_t^{-1} f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}. \qquad (88)
\end{aligned}
$$

Egzistencija svih uslova u (86) proizilazi iz integrabilnosti ${}_aD_t^p f(t)$ jer prema ovom uslovu razlomljeni integrali ${}_aD_t^{p-j} f(t)$, $(j = 1, 2, \ldots k)$ su svi jednaki nuli za $t = a$.

Kombinujući (85) i (88) zaključujemo dokaz relacije (84).

Važan je poseban slučaj kada je $0 < p < 1$, onda

$$
{}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^p f(t) \right) = f(t) - \left[{}_aD_t^{p-1} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}. \qquad (89)
$$

Svojsvo (82) je poseban slučaj opšteg svojstva

$$
{}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) = {}_aD_t^{p-q} f(t), \qquad (90)
$$

gde pretpostavljamo da je $f(t)$ neprekidna i ako je $p \geq q \geq 0$ da izvod ${}_aD_t^{p-q} f(t)$ postoji.

Dva slučaja moraju biti razmatrana: $q \geq p \geq 0$ i $p > q \geq 0$.

Ako je $q \geq p \geq 0$, onda koristeći svojstva (76) i (82) dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) &= {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-p} \, {}_aD_t^{-(q-p)} \right) \\
&= {}_aD_t^{-(q-p)} = {}_aD_t^{p-q} f(t).
\end{aligned}
$$

Sada posmatrajmo slučaj kada je $p > q \geq 0$. Označimo sa m i n cele brojeve takve da $0 \leq m-1 \leq p < m$ i $0 \leq n \leq p-q < n$. Očigledno $n \leq m$. Tada, koristeći definiciju (89) i svojstvo (86) dobijamo

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right)\right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p-q-m}f(t)\right\} \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_aD_t^{p-q-n}f(t)\right\} = {}_aD_t^{p-q}f(t). \end{aligned}$$

Gore pomenuta osobina (84) je poseban slučaj uopštene osobine

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{q}f(t)\right) = {}_aD_t^{q-p}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}, \tag{91}$$

$$(0 \leq k-1 \leq q < k).$$

Da bismo dokazali formulu (91) moramo prvo upotrebiti osobinu (86) (ako je $q \leq p$) ili osobinu (90) (ako je $q \geq p$) pa zatim (84). To daje:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{q}f(t)\right) &= {}_aD_t^{q-p}\left\{{}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{q}f(t)\right)\right\} \\ &= {}_aD_t^{q-p}\left\{f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(p-j+1)}\right\} \\ &= {}_aD_t^{q-p}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}, \end{aligned}$$

gde smo upotrebili poznati izvod stepene funkcije
${}_aD_t^p\left((t-a)^\nu\right) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)}(t-a)^{\nu-p}$:

$$ {}_aD_t^{q-p}\left\{\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)}\right\} = \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}.$$

3.2.4 Povezanost sa Grunvald-Letnikovljevim pristupom

Postoji veza između Riman-Liuvilovog i Grunvald-Letnikovljevog pristupa diferenciranju razlomljenog reda.
Pretpostavimo da funkcija $f(t)$ je $(n-1)$ puta neprekidno diferencijabilna na intervalu $[a, T]$ i da je $f^{(n)}(t)$ integrabilna na $[a, T]$.
Tada za svako p $(0 < p < n)$ Riman-Liuvilov izvod ${}_aD_t^p f(t)$ postoji i podudara sa Grunvald-Letnikovljevim izvodom ${}_aD_t^p f(t)$ i ako je $0 \leq m-1 \leq p < m \leq n$ tada za $a < t < T$ sledeće važi:

$$ {}_aD_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. \tag{92}$$

Sa jedne strane desni deo formule (92) je jednaka Grunvald-Letnikovljevom izvodu ${}_aD_t^p f(t)$ dok na drugoj strani može biti zapisana kao

$$\frac{d^m}{dt^m}\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)}+\frac{1}{\Gamma(2m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1}f^{(m)}(\tau)\,d\tau\right\}$$

što nakon m parcijalnih integracija dobija oblik Riman-Liuvilovog izvoda

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dt^m}\left\{\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)\,d\tau\right\} &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}f(t)\right\}\\ &= {}_aD_t^p f(t).\end{aligned}$$

Sledeći poseban slučaj relacije (92) je važan sa aspekta mnogobrojnih primenjenih problema. Ako je $f(t)$ neprekidna i $f'(t)$ integrabilna u intervalu $[a, T]$ tada za svako p $(0 < p < 1)$ oba Riman-Liuvilov i Grunvald-Letnikovljev izvod postoje i mogu biti zapisani u obliku

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau)\,d\tau. \tag{93}$$

Očigledno izvod dat izrazom (93) je integrabilan. Druga važna posledica koja sledi iz (92) je da egzistencija izvoda reda $p > 0$ implicira postojanje izvoda reda q za sve q takve da $0 < q < p$.

Preciznije, ako data neprekidna funkcija $f(t)$ ima integrabilan izvod Riman-Liuvila (Grunvald-Letnikovljev), izvod ${}_aD_t^p f(t)$ postoji i integrabilan je, tada za svako q takvo da $(0 < q < p)$ izvod ${}_aD_t^q f(t)$ takođe postoji i integrabilan je.

Ako označimo sa $g(t) = {}_aD_t^{-(1-p)}f(t)$, tada možemo zapisati

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-(1-p)}f(t)\right) = g'(t).$$

$g'(t)$ je integrabilna i ako se posmatrama formulu (93) i nejednakost $0 < 1+q-p < 1$ može se zaključiti da izvod ${}_aD_t^{1+q-p}g(t)$ postoji i da je integrabilan. Zatim koristeći (90) dobijamo:

$$ {}_aD_t^{1+q-p}g(t) = {}_aD_t^{1+q-p}\left({}_aD_t^{-(1-p)}f(t)\right) = {}_aD_t^q f(t).$$

Relacija (92) između Grunvald-Letnikovljeve i Riman-Liuvilove definicije takođe ima druge posledice koje su veoma važne za formulaciju problema u primenama, u radu sa razlomljenim izvodima i formulaciji, značajnih sa stanovišta fizike, problema sa početnim uslovima za diferencijalne jednačine razlomljenog reda.

Pod istom pretpostavkom za funkciju $f(t)$ ($f(t)$ je $(m-1)$-puta neprekidno diferencijabilna i njen m-ti izvod je itegrabilan u $[a, T]$) i za p $(m - 1 \leq p < m)$ uslov

$$[{}_aD_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \tag{94}$$

je ekvivalent uslovima

$$f^{(j)}(a) = 0, \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, m-1). \tag{95}$$

Ako je uslov (95) ispunjen tada stavljajući $t \to a$ u (92) odmah dobijamo (94).

Sa druge strane, ako je uslov (94) ispunjen tada množeći obe strane (92) zatim sa $(t-a)^{p-j}$, $(j = m-1, m-2, m-3, \dots, 2, 1, 0)$ i uzimajući limes kad $t \to a$ dobijamo $f^{(m-1)}(a) = 0$,$f^{(m-2)}(a) = 0, \dots, f''(a) = 0, f'(a) = 0$ uslove (95)

Stoga, (94) važi ako i samo ako važi i (95).
Iz ekvivalencije uslova (94) i (95) automatski sledi da ako je za neko $p > 0$ p-ti izvod funkcije $f(t)$ jednak nuli u $t = a$ onda su svi izvodi reda q $(0 < q < p)$ takođe jednaki nuli u $t = a$:

$$[{}_aD_t^q f(t)]_{t=a} = 0.$$

3.3 Kaputo

Praktični problemi iziskuju potrebu za definicijom razlomljenog izvoda koja omogućuje upotrebu početnih uslova koji su fizički interpretabilni a sadrže $f(a)$,$f'(a)$, itd.
Nažalost Riman-Liuvilov pristup vodi ka početnim uslovima koji sadrže granične vrednosti Riman-Liuvilovog razlomljenog izvoda po donjoj granici $t = a$, na primer:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t\to a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\dots, \\ \lim_{t\to a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n, \end{aligned} \tag{96}$$

gde su b_k, $k = 1, 2, \dots, n$ date konstante. Uprkos činjenici da se problemi sa takvim početnim vrednostima uspešno rešavaju matematički (videti na primer rešenje dato u [S.G.Samko, A.A.Kilbas, O.I.Martchev] [3]), njihova rešenja su praktično bezvredna jer ne postoji poznata fizička interpretacija za takav tip početnih uslova. Ovde razmatramo konflikt između matematičke teorije i praktičnih potreba.
Određeno rešenje za ovaj problem predložio je Kaputo (M.Caputo) prvo u svom

radu [4] a dve godine kasnije u svojoj knjizi [5] i poslednje (u Banahovim prostorima) El-Sayed [6, 7].
Kaputovu definiciju možemo zapisati kao

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \qquad (n-1 < \alpha < n), \tag{97} $$

Pod prirodnom pretpostavkom da za funkciju $f(t)$, za $\alpha \to n$ Caputo izvod postaje konvencionalan n-ti izvod funkcije $f(t)$. Svakako, pretpostavimo da $0 \leq n-1 < \alpha < n$ i da funkcija $f(t)$ ima $n+1$ neprekidni ograničeni izvod u $[a, T]$ za svako $T > a$. Tada

$$ \begin{aligned} \lim_{\alpha \to n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \to n} \Bigg(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \Bigg) \\ &= f^n(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau = f^{(n)}(t), \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} $$

Ovo pokazuje da slično Grunvald-Letnikovljevom i Riman-Liuvilovom pistupu, Kaputov pristup takođe obezbeđuje interpolaciju između izvoda celog reda.
Glavna prednost Kaputove definicije je da početni uslovi za razlomljene diferencijalne jednačine sa Kaputo izvodima imaju isti oblik kao za diferenijalne jednačine celog reda, npr. graničnu vrednost izvoda celobrojog reda nepoznate funkcije u $t = a$.
Da naznačili razlike u formi početnih vrednosti koje prate razlomljene diferencijalne jednačine u uslovima Riman-Liuvilovih i Kaputo izvoda, podsetimo se odgovarajuće formule za Laplasovu (Laplace) transformaciju za slučaj kada je $a = 0$.
Formula za Laplasovu transformaciju Riman-Liuvilovog razlomljenog izvoda je

$$ \int_0^\infty e^{-pt} \left\{ {}_0\mathbf{D}_t^\alpha f(t) \right\} dt = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \, {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0}, \tag{98} $$

$$ (n-1 \leq \alpha < n). $$

Kaputova formula, prvo izvedena 1967 u pomenutom radu, za Laplasovu transformaciju Kaputovog izvoda je oblika

$$ \int_0^\infty e^{-pt} \left\{ {}_a^C D_t^\alpha f(t) \right\} dt = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \tag{99} $$

$$ (n-1 < \alpha \leq n). $$

Vidimo da Laplasova transformacija Riman-Liuvilovog razlomljenog izvoda zahteva korišćenje početnih vrednosti tipa (96) čija fizička interpretacija može predstavljati problem.
Suprotno tome Laplasova transformacija Kaputovog izvoda dozvoljava korišćenje početnih vrednosti klasičnog izvoda celog reda koji imaju poznate fizičke interpretacije.

Laplasov metod se često koristi za rešavanje praktičnih problema.
Da bismo izabrali odgovarajuću Laplasovu transformacionu formulu veoma je važno razumeti koji tip definicije razlomljenih izvoda (drugim rečima koji tip početnih uslova) mora biti upotrebljen.
Druga razlika između Riman-Liuvilove definicije (79) i Kaputo definicije (97) je da Kaputov izvod konstante a je 0 za razliku od Riman-Liuvilovog gde je u slučaju konačne vrednosti za donju granicu a razlomljeni izvod od konstante C različit od 0

$${}_0\mathbf{D}_t^{\alpha} C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{100}$$

Ova činjenica je navela, npr.Ohma i Makaroa [8] da koriste Riman-Liuvilovu definiciju za $a = -\infty$ jer sa fizičkog aspekta potreban im je razlomljeni izvod konstante da je jednak nuli a (100) daje 0 ako $a \to -\infty$. Fizičko značenje ovog koraka je da startno vreme fizičkog procesa je podešeno na $-\infty$. U takvim slučajevima prolazni efekat ne može biti proučavan. Uzimanje da je $a = -\infty$ je neophodna apstrakcija radi razmatranja procesa u stabilnom stanju, na primer proučavanje odziva dinamičkog sistema razlomljenog reda na periodično ulazni signal, prostiranje talasa u viskoelastičnim materijalima, itd.

Stavljajući da je $a = -\infty$ u obe definicije i zahtevajući razumno ponašanje za funkciju $f(t)$ i njene izvode kad $t \to \infty$, stižemo do iste formule

$${}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\alpha} f(t) = {}_{-\infty}^{\;\;C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \tag{101}$$
$$(n-1 < \alpha < n),$$

što pokazuje da za proučavanje dinamičkih procesa sa stabilnim stanjem Riman-Liuvilova i Kaputova definicija moraju dati iste rezultate.

$${}_a^C D_t^{\alpha} \left({}_a^C D_t^{m} f(t)\right) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n-1 < \alpha < n) \tag{102}$$

$${}_a\mathbf{D}_t^{m} \left({}_a\mathbf{D}_t^{\alpha} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha+m} f(t), \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n-1 < \alpha < n) \tag{103}$$

Komutacija diferencijalnih operatora u formulama (102) i (103) je dozvoljena pod različitim uslovima:

$${}_a^C D_t^{\alpha} \left({}_a^C D_t^{m} f(t)\right) = {}_a^C D_t^{m} \left({}_a^C D_t^{\alpha} f(t)\right) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t). \tag{104}$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = n, n+1, \ldots, m$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots; n-1 < \alpha < n)$$

$$_a\mathbf{D}_t^m \left(_a\mathbf{D}_t^\alpha f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^\alpha \left(_a\mathbf{D}_t^m f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha+m} f(t), \tag{105}$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, m$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots; n-1 < \alpha < n).$$

Vidimo da suprotno Riman-Liuvilovom pristupu u slučaju Kaputo izvoda nema restrikcija za vrednosti $f^{(s)}(0)$, $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$.

3.3.1 Generalizovani funkcijski pristup

Ovaj pristup je zasnovan na zapažanju da Košijeva formula (85),

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau,$$

koja dozvoljava zamenu n-tog integrala funkcije $f(t)$ sa jednom integracijom, može biti zapisana kao konvolucija funkcije $f(t)$ i stepene funkcije t^{n-1}:

$$f^{(-n)}(t) = f(t) * \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, \tag{106}$$

gde su obe funkcije, $f(t)$ i t^{n-1} zamenjene sa nulom za $t < a$ i $t < 0$; asteriks označava konvoluciju:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Posmatrajmo sada funkciju $\Phi_p(t)$ definisanu (I. M. Gelfand, G. E. Shilov - *Generalized Functions*, Moscow, 1959) za $p > 0$ sledećom formulom:

$$\Phi_p(t) = \begin{cases} \frac{t^{p-1}}{\Gamma(\gamma)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{107}$$

Koristeći funkciju $\Phi_p(t)$ formula (106) može biti razmatrana kao poseban slučaj uopštene konvolucije funkcije $f(t)$ i funkcije $\Phi_p(t)$:

$$f^{(-p)}(t) = f(t) * \Phi_p(t). \tag{108}$$

Da bismo koristili i negativne i pozitivne vrednosti p na isti način, zgodno je razmatrati funkciju $\Phi_p(t)$ kao generalisanu funkciju. Te osobine su navedene u prethodno pomenutom radu; za naš slučaj je neophodno da

$$\lim_{p \to -k} \Phi_p(t) = \Phi_{-k}(t) \delta^{(k)}(t), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{109}$$

gde je $\delta(t)$ Dirakova (Dirac) delta funkcija. Dirakova delta funkcija je često korišćena u primenjenim problemima za opis koncentrisanih veličina. Konvolucija k-tog izvoda delta funkcije i $f(t)$ je data sa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta^{(k)}(t-\tau)\,d\tau = f^{(k)}(t). \tag{110}$$

Očigledno ako je p pozitivan ceo broj ($p = n$), tada formula (108) svodi se na (106). Sa druge strane iz (109) i osobine delta funkcije da za $p = -n, n > 0$

$$\begin{gathered}
f^{(0)}(t) = f(t) * \Phi_0(t) = f(t) * \delta(t) = f(t), \\
f^{(1)}(t) = f(t) * \Phi_{-1}(t) = f(t) * \delta'(t) = f'(t), \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \\
f^{(k)}(t) = f(t) * \Phi_{-k}(t) = f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t).
\end{gathered}$$

Zbog toga se integrali i izvodi celog reda funkcije $f(t)$ mogu predstaviti kao poseban slučaj konvolucije (108), što je takođe moguće za necelobrojne vrednosti p. Ovo znači da formula (108) omogućava objedinjavanje n-tih integrala i izvoda n-tog reda funkcije i proširenje njihovog reda p tako da možemo definisati izvod realnog reda p opšte funkcije $f(t)$ da je nula za $t < a$, kako

$${}_a\tilde{D}_t^p f(t) = f(t) * \Phi_p(t). \tag{111}$$

Druga osobina funkcije $\Phi_p(t)$ koja dovodi do važne posledice je

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \Phi_{p+q}(t-a). \tag{112}$$

Da bismo dokazali (112) prvo pretpostavimo da je $p > 0$ i $q > 0$. Tada koristeći zamenu $\tau = a + \zeta(t-a)$ i definiciju beta funkcije (1.20) dobijamo

$$\begin{aligned}
\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) &= \int_a^t \frac{(\tau-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^t (\tau-a)^{p-1}(t-\tau)^{q-1}\,d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^t \zeta^{p-1}(1-\zeta)^{q-1}\,d\zeta \\
&= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)},
\end{aligned} \tag{113}$$

i analitičko produžavanje uz poštovanje p i q daje nam (112).
Iz (112) sledi da funkcija $f(t)$ je jednaka nuli za $t < a$,

$$\Big(f(t) * \Phi_p(t)\Big) * \Phi_q(t) = f(t) * \Big(\Phi_p(t) * \Phi_q(t)\Big) = f(t) * \Phi_{p+q}(t). \tag{114}$$

iz koje odmah sledi zakon kompozicije

$$ {}_a\tilde{D}_t^p \left({}_a\tilde{D}_t^q f(t) \right) \;=\; {}_a\tilde{D}_t^q \left({}_a\tilde{D}_t^p f(t) \right) \;=\; {}_a\tilde{D}_t^{p+q} f(t). \tag{115} $$

za svako p i q. Jednostavnost zakona kompozicije (115) je naravno velika prednost za upotrebu generalisanih funkcija.

Iz formule (112) direktno dobijamo izvode realnog reda p generalisane funkcije

$$ \Phi_{q+1}(t) = \frac{t_+^q}{\Gamma(q+1)} \begin{cases} \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}, & (t > 0) \\ 0, & (t \le 0). \end{cases} $$

u formi

$$ {}_a\tilde{D}_t^p \left(\frac{(t-a)^q}{\Gamma(q+1)} \right) = \frac{(t-a)^{p-q}}{\Gamma(1+q-p)}. \qquad (t > a). \tag{116} $$

U specijalnom slučaju kada je $q = 0$ dobijamo da razlomljeni izvod Hevisajdove (Heaviside) funkcije $H(t)$:
$\big($*Hevisajdova funkcija je integral Dirakove delta funkcije* $H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt$ $\big)$

$$ {}_a\tilde{D}_t^p H(t-a) = \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}, \qquad (t > a). \tag{117} $$

i uopšte, za svako $b < a$

$$ {}_b\tilde{D}_t^p H(t-a) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} & (t > a) \\ 0, & (b \le t \le a). \end{cases} \tag{118} $$

Stavljajući $q = -n - 1$ $(n \ge 0)$ u (115) dobijamo razlomljeni izvod reda p od n-tog izvoda Dirakove delta funkcije:

$$ {}_a\tilde{D}_t^p \delta^{(n)}(t-a) = \frac{(t-a)^{-n-p-1}}{\Gamma(-n-p)}, \qquad (t > a). \tag{119} $$

i uopšte za $b < a$ imamo

$$ {}_b\tilde{D}_t^p \delta^{(n)}(t-a) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{-n-p-1}}{\Gamma(-n-p)} & (t > a) \\ 0, & (b \le t \le a). \end{cases} \tag{120} $$

Konačno ako je $q - p + 1 = -n$ $(n \ge 0)$ tada iz (115) sledi

$$ {}_a\tilde{D}_t^p \left(\frac{(t-a)^{p-n-1}}{\Gamma(p-n)} \right) = \delta^{(n)}(t-a), \qquad (t > a). \tag{121} $$

Relacije (117), (118) i (121) predstavljaju interesantnu i korisnu vezu između stepene funkcije, Hevisajdove funkcije i Dirakove delta funkcije.
Opšti funkcijski pristup dozvoljava uspostavljanje interesantne veze između Riman-Liuvilovog i Kaputo pristupa i njihove relacije ka konvencionalnom i opštem izvodu celog reda.

Koristeći funkciju $\Phi_p(t)$, Riman-Liuvilova definicija (79) može biti zapisana kao

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(f(t) * \Phi_{n-p}(t)\right), \tag{122}$$

a Kaputo definicija kao

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} * \Phi_{n-p}(t)\right) \tag{123}$$

i relacija (92) uzima formu

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = {}_a^C D_t^p f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{k-p+1}(t-a) f^{(k)}(a). \tag{124}$$

Uzmimo $p \to n$ gde je n pozitivan ceo broj i iskoristimo (109), onda dobijamo iz (123) sledeću relaciju:

$$ {}_a^L D_t^n f(t) = {}_a^C D_t^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^{(n-k-1)}(t-a) f^{(k)}(a). \tag{125}$$

Poredeći relacije (125) sa dobro poznatom relacijom između klasičnog izvoda $f_C^{(n)}(t)$ i generalizovanog izvoda $\tilde{f}^{(n)}(t)$

$$ \tilde{f}^{(n)}(t) = f_C^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^{(n-k-1)}(t-a) f^{(k)}(a), \tag{126}$$

gde $\tilde{f}(t) = f(t)$ za $t \geq a$ i $\tilde{f}(t) \equiv 0$ za $t < a$ zaključujemo da Riman-Liuvilova definicija (79) predstavlja generalizaciju zapisa u smislu opštih funkcija dok Kaputo izvod (97) je generalizacija diferencijacije u klasičnom smislu.

3.4 Sekvencijalni razlomljeni izvodi

U svim ovim pristupima glavni cilj je isti: "zameniti" celobrojnu vrednost parametra n operacije označene na primer sa $\frac{d^n}{dt^n}$ necelobrojnim parametrom p. Ostali detalji vrairaju (klasa funkcija, metodi "zamene" n sa p, neke od osobina za necelobrojnu vrednost p), ali jasno je da su svi napori uloženi u pravcu zamene celog broja n sa p koji nije ceo broj. Drugi pristup, manje poznat ali od velike važnosti u mnogim primenama, bazira se na zapažanju da je n-ti red diferenciranja prosto niz diferencijacija prvog reda:

$$ \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}}_{n \text{ puta}} f(t). \tag{127}$$

Ako je odgovarajući metod za "zamenu" izvoda prvog reda $\frac{d}{dt}$ sa izvodom necelobrojnog reda D^α, gde $0 \leq \alpha \leq 1$, tako da je moguće razmatrati sledeću analogiju prethodne jednakosti:

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha\, D^\alpha \ldots D^\alpha}_{n}. \tag{128}$$

Miler (K. S. Miller) i Ros (B. Ross) nazivaju uopšteno diferenciranje definisano formulom (128), gde je D^α Riman-Liuvilov razlomljeni izvod, *sekvencijalnom diferencijacijom* i razmatraju diferencijalnu jednačinu sa sekvencijalnim izvodima tipa (128) u svojoj knjizi [9].
Različiti oblici sekvencijalnih razlomljnih izvoda se mogu dobiti ako D^α interpretiramo kao Grunvald-Letnikovljev, Kaputov ili neki drugi tip razlomljenog izvoda koji ovde nije razmatran.
Umesto (128) moguće je zameniti prvi red izvoda (127) sa razlomljenim izvodima redova koji ne moraju striktno biti isti i posmatrati još uopšteniji izraz:

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \ldots D^{\alpha_n} f(t), \tag{129}$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

koji ćemo takođe zvati *sekvencijalan razlomljeni izvod.* U zavisnosti od problema, simbol D^α u (129) može značiti Riman-Liuvilov, Grunvald-Letnikovljev, Kaputov ili bilo koju mutaciju operatora opšteg diferenciranja. Sa ovog gledišta Riman-Liuvilov razlomljeni izvod i Kaputov razlomljeni izvod su samo posebni slučajevi sekvencijalnog izvoda (129).
Riman-Liuvilov razlomljeni izvod može biti zapisan kao

$${}_aD_t^p f(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} \ldots \frac{d}{dt}}_{n}\, {}_aD_t^{-(n-p)} f(t), \qquad (n-1 \leq p < n). \tag{130}$$

dok Kaputo razlomljeni diferencijalni operator može biti zapisan kao

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a D_t^{-(n-p)} \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} \ldots \frac{d}{dt}}_{n} f(t), \qquad (n-1 < p \leq n). \tag{131}$$

Osobine Riman-Liuvilovog izvoda i Kaputo izvoda istog kumulativnog reda p su drugačije gledano prema različitim sekvencama diferencijalnih operatora $\frac{d}{dt}$ i ${}_aD_t^{-(n-p)}$.
U slučaju Grunvald-Letnikovljevog i Riman-Liuvilovog pristupa videli smo da za razlomljene integrale uvek važi da je

$$D^p D^q f(t) = D^q D^p f(t) = D^{p+q} f(t), \qquad (p < 0, \quad q < 0). \tag{132}$$

U opštem slučaju osobina (132) ne važi za $p > 0$ i/ili $q > 0$ (to objašnjava razliku između Riman-Liuvilovog i Kaputovog razlomljenog izvoda). Zbog toga

samo razmatranje sekvencijalnih razlomljenih izvoda može biti od interesa i dati nove rezultate.
Sa druge strane sekvencijalni razlomjeni izvodi mogu se primeniti na prirodan način u formulaciji različitih praktičnih problema u fizici i primenjenim naukama.
Vredno je pomenuti da se sekvencijalni razlomljeni integro-diferencijalni operatori oblika (129), sa eksponentima $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$, prvi put pominju i upotrebljavaju u različite svrhe od strane M. M. Dzhrbashya i A. B. Nersesya još od 1958.

3.5 Levi i desni razlomljeni izvodi

Do sada smo razmatrali razlomljene izvode ${}_aD_t^p f(t)$ sa fiksnom donjom granicom a i pokretnom gornjom granicom t. Šta više, pretpostavili smo da je $a < t$. Moguće je razmatrati razlomljene izvode sa pokretnom donjom granicom t i fiksnom gornjom granicom b.

Pretpostavimo da je funkcija $f(t)$ definisana na intervalu $[a, b]$, gde a i b mogu uzimati beskonačne vrednosti.

Razlomljen izvod sa donjom granicom u levom kraju intervala $[a, b]$, ${}_aD_t^p f(t)$, nazivamo levi razlomljeni izvod. Razlomljen izvod sa gornjom granicom u desnom kraju intervala $[a, b]$, ${}_tD_b^p f(t)$, nazivamo desni razlomljeni izvod.

${}_aD_t^p f(t)$ ${}_tD_b^p f(t)$

Očigledno zapis levog i desnog razlomljenog izvoda može se uvesti za svaku od prethodno navedenih definicija. Na primer, ako je $k - 1 \le p < k$ tada levi Riman-Liuvilov razlomljeni izvod je, kao što znamo, definisan sa

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau)\, d\tau. \tag{133} $$

Odgovarajući desni Riman-Liuvilov izvod je definisan sa

$$ {}_tD_b^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^k \int_t^b (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau)\, d\tau. \tag{134} $$

Desni Kaputo i Grunvald-Letnikovljev izvod mogu se definisati na sličan način.
Zapis levog i desnog razlomljenog izvoda može se razmatrati sa fizičkog i matematičkog aspekta. Nekada sledeća fizička interpretacija levog i desnog razlomljenog izvoda može biti od koristi.

Pretpostavimo da t označava vreme i da funkcija $f(t)$ opisuje neki određeni dinamički proces koji se odvija u vremenu. Ako uzmemo da je $\tau < t$ gde je t trenutni momenat, onda stanje $f(\tau)$ procesa f pripada njegovoj prošlosti; ako je $\tau > t$ onda $f(\tau)$ opisuje buduće stanje procesa f.
Sa te tačke gledišta levi izvod (127) je operacija izvršena na prošlo stanje procesa

f a desni izvod operacija izvedena na buduće stanje procesa f.
Fizički uzročni princip označava da sadašnje stanje procesa započetog u trenutku $\tau = a$, npr. tekuća vrednost $f(t)$ zavisi od svih prethodnih, prošlih, stanja $f(\tau)$ $(a \leq \tau < t)$. Kako ne znamo zavisnost između trenutnog, sadašnjeg stanja nekog procesa sa rezultatima njegovog razvoja u budućnosti razmatraćemo samo levi izvod. Možda će jednom desni izvod takođe dobiti fizičku interpretaciju u okvirima dinamičkih procesa.
Sa matematičkog stanovišta desni izvod nas podseća na operatore srodne operatorima leve diferencijacije. Ovo znači da kompletna teorija razlomljenih diferencijalnih jednačina, posebno teorija problema graničnih vrednosti za razlomljene diferencijalne jednačine, može biti razvijana samo uz pomoć oba, levog i desnog, izvoda. Trenutno interpretacija razlomljenih izvod i integrala, je možda najtransparentnija i najupotrebljivija.
Nigmatulin je pokušao u svom radu [10] da izvede relaciju između statičke razlomljene strukture i razlomljene integracije ali odgovarajuća relacija nije uspešno uspostavljena, pogledati kritiku Rutmana [11].

4 Numerička aproksimacija razlomljenih izvoda

U ovom poglavlju biće opisan jednostavan ali efikasan metod za aproksimaciju izvoda razlomljenog reda. Pristup je baziran na činjenici da su Riman-Liuvilova i Grunvald-Letnikovljeva definicija ekvivalentne na širokoj klasi funkcija. Zbog toga za ocenu razlomljenih izvoda oba tipa koristimo aproksimaciju izvedenu iz Grunvald-Letnikovljeve definicije.

Riman-Liuvilova definicija

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \qquad (n-1 < \alpha < n). \tag{1} $$

Grunvald-Letnikovljeva definicija

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{{}_a\Delta_a^\alpha f(t)}{h^\alpha}, \qquad {}_a\Delta_h^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \tag{2} $$

gde je $[x]$ ceo deo od x.
Ekvivalencija između ove dve definicije na širokoj klasi funkcija nam omogućava da sa jedne strane koristimo Riman-Liuvilovu definiciju za formulaciju problema a sa druge strane, prilikom numeričkog rešavanja, da koristimo Grunvald-Letnikovljevu definiciju.

4.1 Aproksimacija razlomljenih izvoda

Koristimo aproksimaciju razlomljenim konačnim razlikama izvedenu iz Grunvald-Letnikovljeve definicije:

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) \approx {}_a\Delta_h^\alpha f(t). \tag{3} $$

Upotreba kvadraturnih formula

Drugi tip aproksimacije može se izvesti iz Riman-Liuvilove definicije uz pomoć n parcijalnih integracija i aproksimacije dobijenog integrala koji sadrži $f^{(n)}(\tau)$ kvadraturnom formulom.

4.2 Princip "kratkog-pamćenja"

Kada je $t \gg a$ broj sabiraka u aproksimaciji (3) razlomljenog izvoda postaje previše veliki. Iz izraza za koeficijente u Grunvald-Letnikovljevoj definiciji (2) sledi da za dovoljno veliko t uticaj istorije prethodnog ponašanja funkcije $f(t)$ blizu donje granice (početne tačke) $t = a$ može biti zanemaren pod određenim uslovima. Ovo zapažanje nas navodi na formulaciju principa "kratkog-pamćenja", što znači da možemo uzeti u obzir samo ponašanje funkcije $f(t)$ u "skorijoj prošlosti", na primer u intervalu $[t - L, t]$ gde je L "dužina memorije":

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) \approx {}_{t-L}D_t^{\alpha} f(t), \qquad (t > a + L). \tag{4} $$

Drugim rečima, prema principu kratkog pamćenja (4) razlomljeni izvod sa donjom granicom a je aproksimiran razlomljenim izvodom sa klizećom donjom granicom $t - L$. Prema ovoj oceni, broj sabiraka u aproksimaciji (3) nikad nije veći od [L/h].

Naravno svako uprošćavanje ima svoju cenu u smislu preciznosti.

Ako je $f(t) \le M$ za $a \le t \le b$ što se obično desi u primenama tada koristeći

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, \qquad (\alpha \ne 0, 1, 2, \ldots). $$

lako dobijamo sledeću ocenu greške:

$$ \Delta(t) = \left| {}_aD_t^{\alpha} f(t) - {}_{t-L}D_t^{\alpha} f(t) \right| \le \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|}, \qquad (a + L \le t \le b) \tag{5} $$

Ovu nejednakost koristimo za određivanje "dužine memorije" L pri tome da određena tačnost ϵ bude postignuta:

$$ \Delta(t) \le \epsilon, \quad (a + L \le t \le b), \qquad \text{ako} \quad L \ge \left(\frac{M}{\epsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha}. \tag{6} $$

4.3 Red aproksimacije

Dobro je poznato da se konačne razlike unazad mogu koristiti za aproksimaciju izvoda celobrojnog reda. Na primer za fiksirano t i malo h možemo aproksimirati prvi izvod sa:

$$ y'(t) \approx \widetilde{y'(t)} = \frac{y(t) - y(t-h)}{h}, \tag{7} $$

što se dobija iz klasične definicije prvog izvoda izostavljanjem $\lim_{h\to 0}$. Usled toga postoji određena greška u preciznosti relacije (7) koja zavisi od h i može se oceniti pod pretpostavkom da imamo tačne vrednosti za $y(t)$ i $y(t-h)$. Zapisujući $y(t-h)$ u formi Tejlorovog reda, dobijamo:

$$\widetilde{y'(t)} = \frac{y(t)-y(t-h)}{h} = y'(t) - \frac{y''(t)}{2}h + \ldots = y'(t) + O(h),$$

što znači da je

$$y(t) - \widetilde{y'(t)} = O(h); \tag{8}$$

drugim rečima konačna razlika unazad u dve tačke daje aproksimaciju prvog reda funkcije $f'(t)$.

Pokažimo da formula (3) daje aproksimaciju prvog reda za izvod reda α. Radi jednostavnosti zgodnije je pretpostaviti da je $a=0$ i da korak diskretizacije h kao i broj čvorova n budu u relaciji $t = nh$ gde t je tačka u kojoj je izvod ocenjen. U tom slučaju možemo zapisati aproksimaciju α izvoda sa

$$\widetilde{{}_0D_t^\alpha} f(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \tag{9}$$

$$= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} f(t-jh) \tag{10}$$

U razmatranju koje sledi uzmimo jednostavnu funkciju $f_0(t) \equiv 1(t \geq 0)$. Znamo da je

$${}_0D_t^\alpha f_0(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Na drugoj strani, (10) daje vrednost aproksimacije

$$\widetilde{{}_0D_t^\alpha} f_0(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j}.$$

Koristeći poznatu formulu za sumu binomnih koeficijenata

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} = \binom{n-\alpha}{n}, \tag{11}$$

i

$$z^{b-a} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = 1 + O(z^{-1}), \tag{12}$$

imamo za fiksno t

$$\widetilde{{}_0D_t^\alpha} f_0(t) = h^{-\alpha} \binom{n-\alpha}{n}$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{n^\alpha \Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(1+O(h)\right), \tag{13}$$

i kako je $f_0(t) \equiv 1 \quad (t \geq 0)$

$${}_0D_t^\alpha f_0(t) - {}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_0(t) = O(h),$$

što je slično relaciji (8).

Razmotrimo sada funkcije $f_m(t) = t^m, \quad m = 1, 2, \ldots$.
U ovom slučaju izvod reda α funkcije je

$${}_0D_t^\alpha f_m(t) = \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-\alpha)} t^{m-\alpha},$$

dok je aproksimacija (10) samog izvoda

$${}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_m(t) = t^{m-\alpha} n^\alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} \left(1-\frac{j}{n}\right)^m, \tag{14}$$

ili nakon razvijanja binomnog člana,

$${}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_m(t) = t^{m-\alpha} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} n^{\alpha-r} \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} j^r. \tag{15}$$

Suma

$$S = \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} j^r \tag{16}$$

može se transformisati u konvencijalniju formu pomoću Stirlingovih brojeva druge vrste $\sigma_n^{(m)}$, definisanih kao koeficijenti razvoja x^n u sumu faktorijel polinoma $x^{[i]}$:

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \sigma_n^{(i)} x^{[i]}, \tag{17}$$

$$x^{[i]} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-i+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-i+1)}. \tag{18}$$

Koristeći (17) i (18) i zamenjujući $x = j$ dobijamo:

$$j^r = \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-i+1)}, \tag{19}$$

zbog toga je

$$S = \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \sum_{j=i}^{n} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j-i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\Gamma(k+i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{k+i-\alpha-1}{k}.$$

Sada koristeći formulu (11) dobijamo

$$S = \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \binom{n-\alpha}{n-i},$$

ili konačno

$$S = \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\alpha-1}{j} j^r = \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{(i-\alpha)\Gamma(-\alpha)\Gamma(n-i+1)}. \tag{20}$$

Zamenjujući (20) u (15) dobija se

$${}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_m(t) = \frac{t^{m-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{n^{\alpha-r}\Gamma(n-\alpha+1)}{(i-\alpha)\Gamma(n-i+1)}. \tag{21}$$

Koristeći osobine gama funkcije (12) možemo zapisati

$$\frac{n^{\alpha-r}\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-i+1)} = n^{i-r} \left(n^{\alpha-i} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-i+1)} \right) = n^{i-r} \left(1 + O(n^{-1})\right)$$

Tada

$$\begin{aligned} {}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_m(t) &= \frac{t^{m-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{i=1}^{r} \sigma_r^{(i)} \frac{1}{(i-\alpha)} n^{i-r} \left(1 + O(n^{-1})\right) \\ &= \frac{t^{m-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \sigma_r^{(r)} \frac{1}{(r-\alpha)} \left(1 + O(n^{-1})\right). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je $\sigma_r^{(r)} = 1$ za svako r i koristeći formulu za sumiranje

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^m k^m}{a+k} \binom{n}{k} = (-1)^m a^{m-1} \binom{n+a}{n}^{-1}, \quad (m \leq n),$$

lako dobijamo

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \frac{\sigma_r^{(r)}}{(r-\alpha)} = B(-\alpha, m+1),$$

kako za svako fiksirano t imamo $O(n^{-1}) = O(h)$,

$$ {}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_m(t) = \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-\alpha)} t^{m-\alpha} + O(h), $$

i

$$ {}_0D_t^\alpha f_m(t) - {}_0\widetilde{D_t^\alpha} f_m(t) = O(h). $$

To znači da se funkcija $f(t)$ može zapisati u formi stepenog reda

$$ f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m, $$

tada aproksimacija razlomljenim konačnim razlikama razlomljenog izvoda reda α daje aproksimaciju prvog stepena u bilo kojoj tački intervala konvergencije tog reda.

4.4 Izračunavanje koeficijenata

Za implementiranje metoda razlomljenih razlika računanja razlomljenih izvoda neophodno je izračunati koeficijente

$$ w_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{22} $$

gde je α red razlomljenog diferenciranja.

Jedan od mogućih pristupa je upotreba rekurentne relacije

$$ w_0^{(\alpha)} = 1; \quad w_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) w_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{23} $$

Ovaj pristup je adekvatan za fiksne vrednosti α. Omogućava kreiranje niza koeficijenata koji se mogu koristiti pri razlomljenom diferenciranju različitih funkcija. Sa druge strane u nekim problemima (na primer u sistemu indentifikacija) potrebno je naći odgovarajuću vrednost za α, razmatrati različite vrednosti i za svaku pojedinačnu vrednost α odvojeno računati koeficijente $w_k^{(\alpha)}$. U takvom slučaju rekurentna relacija (8) nije praktična. Koristimo umesto nje metod brze Furijeove transformacije.

Koeficijenti $w_k^{(\alpha)}$ mogu se razmatrati kao koeficijenti stepenog niza za funkciju $(1-z)^\alpha$:

$$ (1-z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(\alpha)} z^k. \tag{24} $$

Zamenjujući $z = e^{-i\varphi}$ imamo

$$ (1 - e^{-i\varphi})^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(\alpha)} e^{-ik\varphi}, \tag{25} $$

i koeficijenti $w_k^{(\alpha)}$ su izraženi u smislu Furijeove transformacije:

$$w_k^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f_\alpha(\varphi) e^{ik\varphi}\, d\varphi, \qquad f_a(\varphi) = (1 - e^{-i\varphi})^\alpha. \tag{26}$$

Kako je slučaj da uvek dobijemo konačan broj koeficijenata $w_k^{(\alpha)}$ metod brze Furijeove transformacije uvek treba kombinovati sa principom "kratkog pamćenja".

5 Numeričko rešavanje razlomljenih diferencijanih jednačina

U ovom poglavlju biće opisan metod koji je u praksi potvrđen rešavanjem različitih konkretnih problema.

5.1 Početni uslovi: koji problem rešavati?

Ovde razmatramo probleme početnih vrednosti samo za homogene početne uslove koji odgovaraju stanju ekvilibrijuma na početku dinamičkog procesa:

$$f^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1}$$

gde je $n - 1 < \alpha < n$, i α je red diferencijalne jednačine.

Postoje dva glavna razloga za razmatranje homogenih početnih uslova. Prvi je ekvivalentnost rešenja problema početnih vrednosti za sekvencijalne diferencijalne jednačine razlomljeng tipa [9] i za odgovarajuće standardne diferencijalne jednačine razlomljenog reda čak i kad je broj početnih uslova različit (Laplasov transformacioni metod za linearne diferencijalne jednačine razlomljenog reda). Drugo, nije mi poznata zadovoljavajuća aproksimacija razlomljenog izvoda u njegovoj donjoj granici.

5.2 Numeričko rešenje

Koncentrisaćemo se na opisivanje metoda, bez proučavanja konvergencije sa čisto teorijskog stanovišta.

Predložena numerička shema je eksplicitna. Eksperimentalno je potvrđena na većem broju primera, od kojih su neki navedeni u nastavku. Uporedićemo ih sa analitičkim rešenjem. Kao što uvodni primeri pokazuju, data metoda radi za različite važne slučajeve kao što su jednačine sa konstantnim koeficijentima, jednačine sa nekonstantnim koeficijentima i nelinearne jednačine sa različitim brojem početnih uslova. To govori u prilog o širokoj upotrebi ove metode. Iz [12] sledi da je aproksimacija jednačina u navedenim primerima reda $O(h)$.

5.3 Primer numeričkih rešenja

U ovom delu dajem par primera numeričkih rešenja razlomljenih diferencijalnih jednačina različitog tipa. Uporedićemo ih sa nekim poznatim eksplicitnim asimptotskim rešenjima što će, nadam se, pokazati korisnost predloženog numeričkog pristupa.

5.3.1 Relaksaciono-oscilatorna jednačina

Razmotrimo problem početnih vrednosti za jednu od najjednostavnijih razlomljenih diferencijalnih jednačina koja se pojavljuju u primenama [15]:

$$
\begin{aligned}
{}_0D_t^{\alpha} y(t) + Ay(t) &= f(t), \qquad (t > 0), \qquad\qquad (2)\\
y^{(k)}(0) &= 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)
\end{aligned}
$$

gde je $n - 1 < \alpha \leq n$. Za $0 < \alpha \leq 2$ ova jednačina je nazivana relaksaciono-oscilatorna jednačina.

Aproksimacija prvog reda problema (2) je

$$
h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(\alpha)} y_{m-j} + Ay_m = f_m, \quad (m = 1, 2, \ldots); \quad y_0 = 0, \qquad (3)
$$

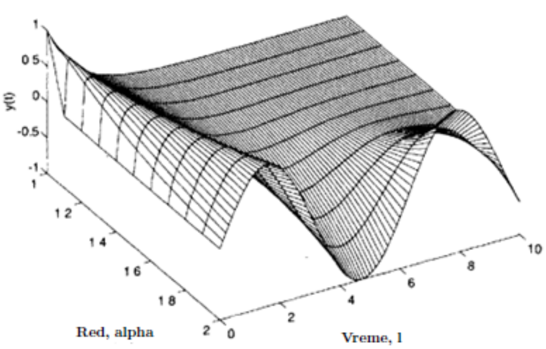
$$
t_m = mh, \quad y_m = y(t_m), \quad f_m = f(t_m), \quad (m = 0, 1, 2, \ldots);
$$

$$
w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).
$$

Koristeći aproksimaciju (3) izvodimo sledeći algoritam za pronalaženje numeričkog rešenja:

$$
y_k = 0, \; (k = 1, 2, \ldots, n-1)
$$

$$
y_m = -Ah^{\alpha} y_{m-1} - \sum_{j=1}^{m} w_j^{(\alpha)} y_{m-1} + h^{\alpha} f_m, \quad (m = n, n+1, \ldots). \qquad (4)
$$



Slika 2: Rešenja relaksaciono-oscilatorne jednačine za $1 \leq \alpha \leq 2$.

Rezultati izračunavanja za različite vrednosti α $(1 \leq \alpha \leq 2)$ i $f(t) \equiv H(t)$, gde je H(t) Hevisajdova funkcija, su prikazani na slici 2.

Hevisajdova funkcija (jedinična odskočna funkcija) je integral Dirakove delta funkcije $H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt$.

Oni su u perfektno usklađeni sa analitičkim rešenjem, dobijenim uz pomoć razlomljene Grinove funkcije sa dva člana i konstantnim koeficijentima.
Analitičko rešenje početnog problema (2) je

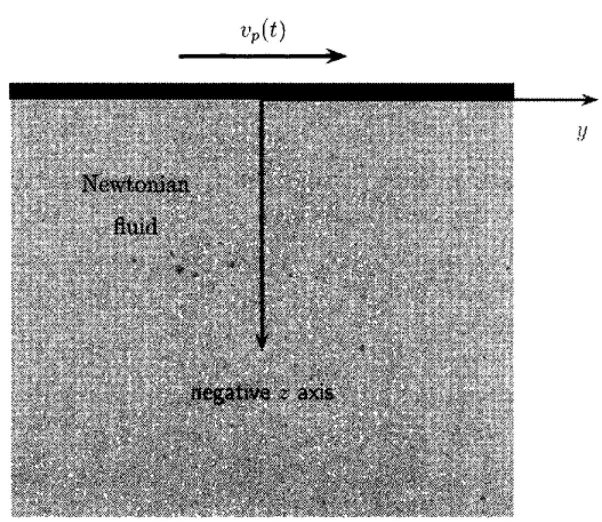
$$y(t) = \int_0^t G_2(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad G_2(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-At^{\alpha}). \tag{5}$$

5.3.2 Jednačina sa konstantnim koeficijentima: kretanja uronjene ploče

U ovoj sekciji razmatraćemo početni problem za razlomljenu diferencijalnu jednačinu koji je orginalno bio formulisan od strane Bagleja (R.L. Bagley) i Torvika (P.J. Torvik) [13]

Matematički model kretanja velike tanke ploče u Njutnovoj tečnosti

Prvo ćemo uvesti osnovnu relaciju u terminima razlomljenih izvoda za Njutnov viskozan fluid. Razmatrajmo kretanje poluprostora Njutnovog viskoznog fluida indukovanog unapred određenim poprečnim kretanjima na površi krute ploče (Slika 3). Naš cilj je da pokažemo da se rezultujući napon smicanja u bilo kojoj tački fluida može predstaviti pomoću razlomljenog izvoda po vremenu.



Slika 3: Kruta ploča u Njutnovom fluidu

Jednačina kretanja fluida je

$$\rho \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}, \qquad (0 < t < \infty, \ -\infty < z < 0) \tag{6}$$

gde ρ je gustina fluida, μ je viskoznost i $\upsilon(t,z)$ je poprečno ubrzanje koje je funkcija vremena t i distance z između kontaktnih granica ploče i fluida.
Pretpostavimo da je početno fluid u ekvilibrijumu,

$$\upsilon(0,z) = 0, \qquad (-\infty < z < 0) \tag{7}$$

i da uticaj kretanja ploče nestaje kada $z \to \infty$:

$$\upsilon(t, -\infty) = 0, \qquad (0 < t < \infty). \tag{8}$$

Brzina fluida za $z = 0$ je jednaka datoj brzini ploče:

$$\upsilon(t,0) = \upsilon_p(t) \tag{9}$$

Primenjujuči Laplasovu transformaciju dobijamo sledeći granični problem za običnu diferencijalnu jednačinu

$$\rho s V(s,z) = \mu \frac{d^2 V(s,z)}{dz^2} \tag{10}$$

$$V(s,0) = V_p(s), \tag{11}$$

$$V(s,-\infty) = 0, \tag{12}$$

gde s je Laplasov transformacioni parametar, $V_p(s)$ je Laplasova transformacija brzine ploče a $V(s,z)$ transformacija brzine fluida.
Rešenje problema (10)-(12) može se lako odrediti da je

$$V(s,z) = V_p(s) exp(z\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}}). \tag{13}$$

Diferenciranjem (13) dobijamo

$$\frac{dV(s,z)}{dz} = \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} V_p(s) exp(z\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}}) = \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} V(s,z). \tag{14}$$

Znajući profil brzine $\upsilon(t,z)$ u fluidu možemo dobiti napon smicanja

$$\sigma(t,z) = \mu \frac{\partial \upsilon(t,z)}{\partial z}. \tag{15}$$

U uslovima Laplasove transformacije, relacija (15) uzima oblik:

$$\bar{\sigma}(s,z) = \mu \frac{dV(s,z)}{dz} = \sqrt{\mu \rho s} V(s,z), \tag{16}$$

gde $\bar{\sigma}(s,z)$ označava Laplasovu transformaciju za $\sigma(t,z)$.

Poredeći (16) i

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)dt = \frac{k!p^{\alpha-\beta}}{(p^\alpha \mp a)^{k+1}}, \qquad (Re(p) >| a |^{1/\alpha}),$$

prepoznajemo Laplasovu transformaciju razlomljenog izvoda ${}_0D_t^{1/2}\upsilon(s,z)$ pomnoženu sa $\sqrt{\mu\rho}$ u desnoj strani jednačine (16). Zbog toga, nakon vraćanja na vremenski domen relacija (16) daje

$$\sigma(t,z) = \sqrt{\mu\rho}\,{}_0D_t^{1/2}\upsilon(s,z). \tag{17}$$

Moramo pomenuti da jednačina (17) nije osnovna relacija za Njutnov fluid; standardna je relacija (15). U svakom slučaju relacija (17) opisuje odnos između napona i brzine za razmatranu određenu geometriju (polubeskonačan domen fluida) i unosa (unapred određene brzine na graničnoj površi). Važno je u ovom slučaju da je razlomljeni izvod upotrebljen da opiše realan fizički sistem koji je formulisan u konvencionalnom maniru.
Fizička interpretacija relacije (17) predstavlja napon u datoj tački u datom vremenskom trenutku, koji zavisi od vremenske istorije profila brzine u toj tački.
Razmotrimo sada tanku krutu ploču mase M i površi S potopljenu u Njutnovu tečnost beskonačnog opsega, povezanu oprugom bez mase sa čvrstinom K, za fiksnu tačku (Slika 4). Sila $f(t)$ je primenjena na ploču. Pretpostavljamo da opruga ne remeti tečnost i da je površina ploče prilično velika da izazove u tečnosti okoline ploče polje brzine i napona koji se odnose na (17).
Štaviše, da bi dozvolili primenu relacije (17), sistem tečnosti - ploče mora biti početno u stanju ekvilibrijuma - izmeštanje i brzina moraju biti početno nula.
Sumirajući sile na ploči nalazimo da je izmeštanje y ploče opisano sa

$$My''(t) = f(t) - Ky(t) - 2S\sigma(t,0). \tag{18}$$

Zamenjujući napon dat sa relacijom (17) i uzimajući u obzir da je

$$\upsilon_p(t,0) = y'(t)$$

dolazimo do sledeće diferencijalne jednačine razlomljenog reda:

$$Ay''(t) + B_0D_t^{3/2}y(t) + Cy(t) = f(t) \qquad (t>0), \tag{19}$$

$$A = M, \quad B = 2S\sqrt{\mu\rho}, \quad C = K,$$

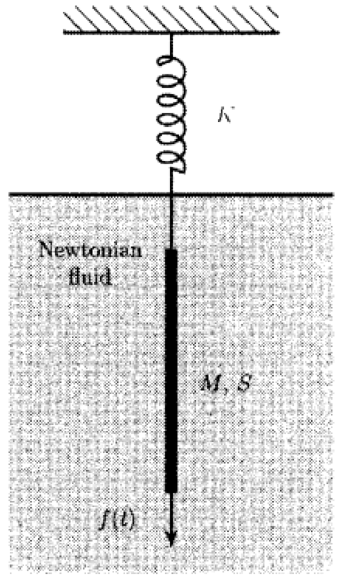
za koju moraju biti pridodati početni uslovi koji opisuju ekvilibrijum početnog stanja sistema:

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{20}$$

Numeričko rešenje Baglej-Torvikove jednačine

Razmatrajmo sledeći problem početnih vrednosti za nehomogenu Baglej-Torvik jednačinu [13]:

$$Ay''(t) + B_0D_t^{3/2}y(t) + Cy(t) = f(t), \quad (t>0); \tag{21}$$



Slika 4: Potopljena ploča u Njutnovom fluidu

$$y(0) = 0, \qquad y\prime(0) = 0. \tag{22}$$

Uzmimo da je vremenski korak h. Aproksimacija prvog reda problema (21)-(22) je

$$Ah^{-2}(y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}) + Bh^{-3/2}\sum_{j=0}^{m} w_j^{(3/2)} y_{m-j} + Cy_m = f_m, \tag{23}$$

$$(m = 2, 3, \ldots),$$

$$y_0 = 0, \qquad \frac{y_1 - y_0}{h} = 0, \tag{24}$$

gde je $y_m = y(mh)$, $f_m = f(mh)$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Koristeći aproksimacije (23)-(24) izvodimo sledeći algoritam za dobijanje numeričkog rešenja:

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = 0,$$

$$y_m = \frac{h^2(f_m - Cy_{m-1}) + A(2y_{m-1} - y_{m-2}) - B\sqrt{h}\sum_{j=1}^{m} w_j^{(3/2)} y_{m-j}}{A + B\sqrt{h}} \tag{25}$$

$$(m = 2, 3, \ldots).$$

Rezultati našeg računanja prema algoritmu (25) su u saglasnosti sa analitičkim rešenjem dobijenim pomoću Grinovih funkcija za tročlane razlomljene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Grinova funkcija $G_3(t)$ za tročlanu diferencijalnu jednačinu razlomljeng reda sa konstantnim koeficijentima

$$a\,{}_0D_t^{\beta}y(t)+b\,{}_0D_t^{\alpha}y(t)+c\,y(t)=f(t),$$

gde izvodi mogu biti "klasični"(razmatrani u knjizi Oldhama i Spanera) ili "sekvencijalni"(Milera i Rosa), je dobijena inverznom Laplasovom transformacijom sledećeg izraza:

$$g_3(p)=\frac{1}{ap^{\beta}+bp^{\alpha}+c}$$

Pretpostavljajući da je $\beta>\alpha$ možemo napisati $g_3(p)$ u obliku

$$\begin{aligned} g_3(p) &= \frac{1}{c}\,\frac{cp^{-\alpha}}{ap^{\beta-\alpha}+b}\,\frac{1}{1+\frac{cp^{-\alpha}}{ap^{\beta-\alpha}+b}} \\ &= \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{c}{a}\right)^{k+1}\frac{p^{-\alpha k-\alpha}}{\left(p^{\beta-\alpha}+\frac{b}{a}\right)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Član po član inverzija bazirana na opštoj teoremi proširenja za Laplasovu transformaciju i relacija

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^{\alpha})\,dt=\frac{k!p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}\mp a)^{k+1}},\qquad (Re>|a|^{1/\alpha}).$$

(gornji integral se dobija zamenom Mitag-Leflerove funkcije

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad (\alpha>0,\beta>0)$$

u integral

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})\,dt=\frac{1}{1-z},\qquad (|z|<1).$$

i dobijamo Laplasovu transformaciju funkcije $t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm zt^{\alpha})$ *)*
proizvode

$$G_3(t)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{c}{a}\right)^k t^{\beta(k+1)-1}E_{\beta-\alpha,\beta+\alpha k}^{(k)}(-\frac{b}{a}t^{\beta-\alpha}),$$

gde je $E_{\lambda,\mu}(z)$ Mitag-Leflerova funkcija sa dva parametra,

$$E_{\lambda,\mu}^{(k)}\equiv\frac{d^k}{dy^k}E_{\lambda,\mu}(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!y^j}{j!\Gamma(\lambda j+\lambda k+\mu)},\qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Pretpostavljamo da je u rešenju $a \neq 0$ inače bismo mogli da ga zapišemo kao dvočlanu jednačinu

$$a\,{}_0D_t^{\alpha}y(t) + by(t) = f(t)$$

Analitičko rešenje za početni problem (21)-(22) je

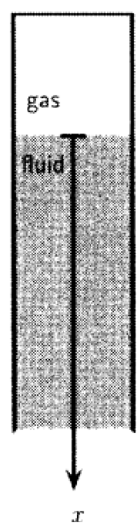
$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{26}$$

$$G_3(t) = \frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2k+1}E^{(k)}_{\frac{1}{2},2+\frac{3k}{2}}(-\frac{B}{A}\sqrt{t}), \tag{27}$$

$$E^{(k)}_{\lambda,\mu}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k}E_{\lambda,\mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!y^j}{j!\Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

5.3.3 Jednačina sa nekonstantnim koeficijentima: rastvor gasa u tecnosti

Naredni primer ilustruje predložen metod za diferencijalne jednačine razlomljenog reda sa nekonstantnim koeficijentima.



Slika 5: Rastvor gasa u tečnosti: formulacija problema

Matematički model rastvora gasa u tečnosti

Babenko u svojoj knjizi [14] daje sledeći matematički model, procesa rastvaranja gasa u tečnosti (slika 5):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(V_0 f(\tau/\theta)\cdot P(\tau,0)\frac{M}{RT}\right) = F\mathcal{D}\frac{\partial C}{dx}\bigg|_{x=0} \tag{28}$$

$$-\sqrt{\mathcal{D}}\frac{\partial C}{dx}\bigg|_{x=0} =_0 D_\tau^{1/2}(C_s(\tau)-C_0), \qquad (0<\tau<\theta) \tag{29}$$

$$C(0,x)=C_0, \quad P(0,x)=P_0=C_0/\kappa, \quad (0<x<\infty); \tag{30}$$

gde V_0 je početna zapremina gasa; θ je vreme sažimanja gasa na nultu zapreminu; $f(t/\theta)$ je funkcija koja opisuje promenu zapremine gasa, kao što je $f(0)=1$ i $f(1)=0$; M je težina molekula gasa; R je univerzalna konstanta za gasove; $\mathcal{D}$ je koeficijent difuzije gasa u tečnosti; F je kontaktna površina između gasa i tečnosti; $C(t,x)$ je koncentracija gasa i $P(t,x)$ je nepoznati pritisak gasa. Naći ćemo $P(t,0)$ pritisak gasa blizu kontaktne površi. Osa Ox ide ispod kontaktne površi, za koju je $x=0$. Pretpostavljamo da je temperatura gasa T konstanta. Drugim rečima kompresija gasa je dovoljno mala. Dubina tečnosti je neograničena.
Jednačina (28) opisuje promenu mase zapremine gasa nastalu usled difuzije kroz dodirnu površinu. Masa se menja u zavisnosti od promene koncentracije gasa pri dodirnoj površini, koja je data jednačinom (29). To zapravo čini razmatranje transfera mase za $x>0$ nepotrebnim.

Problem može biti zapisan u bezdimenzionoj formi kao

$$\frac{\partial}{\partial t}(c(t,0)f(t)) = \lambda\frac{\partial c}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}, \qquad (0<t<1) \tag{31}$$

$$-\frac{\partial c}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} = {}_0D_t^{1/2}(c(t,0)-1) \tag{32}$$

$$c(0,\xi)=1 \tag{33}$$

gde

$$p=c=\frac{C}{C_0}=\frac{P}{P_0}, \quad \xi=x\sqrt{\mathcal{D}\theta}; \quad t=\tau/\theta; \quad \lambda=\kappa RT\sqrt{\mathcal{D}\theta}/(MV_0).$$

Ubacujući (32) u (31) dobijamo sledeći početni problem za određivanje bezdimenzionog pritiska gasa $p(t)\equiv p(t,0)$ blizu dodirne površine:

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)p(t)\big)+\lambda_0D_t^{1/2}(p(t)-1)=0, \quad (0<t<1) \tag{34}$$

$$p(0)=1. \tag{35}$$

Zgodno je uvesti funkciju

$$y(t)=p(t)-1,$$

koja omogućava razmatranje problema (34)-(35) u obliku

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)(y(t)+1)\big)+\lambda_0 D_t^{1/2}y(t)=0, \qquad (0<t<1) \tag{36}$$

$$y(0)=0. \tag{37}$$

Došli smo do nehomogene (usled prisustva $f(t)$) linearne razlomljene diferencijalne jednačine sa nultim početnim uslovom. To nam daje mogućnost da razvijemo proceduru za numeričko rešenje slično prethodnom primeru. U svakom slučaju ovaj problem nam dozvoljava da dobijemo analitičko rešenje za pojedine slučajeve.

Analitička rešenja za pojedine slučajeve Ako je promena zapremine gasa opisana funkcijom razvijenom u razlomljeni stepeni red

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n/2}, \quad b_0=1, \tag{38}$$

onda rešenje problema (36)-(37) može biti nađeno u obliku razlomljenog stepenog reda:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n/2} \tag{39}$$

gde koeficijenti a_n, zadovoljavaju sledeće rekurentne relacije:

$$a_1=-b_1, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k}b_k+\lambda a_n\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+3}{2})}=-b_{n+1}. \tag{40}$$

Zbog same konstrukcije rešenja (39) početni uslovi (37) su automatski zadovoljeni. Ako na primer uzmemo

$$f(t)=1-\sqrt{t}, \tag{41}$$

i

$$\lambda=\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

tada je rešenje $y(t)$ dato konačnom sumom.

$$\lambda=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \qquad y(t)=\sqrt{t} \tag{42}$$

$$\lambda=\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \qquad y(t)=\sqrt{t}+\left(1-\frac{3\pi}{8}\right)t. \tag{43}$$

Numeričko rešenje
Razmotrimo sada početni problem (36)-(37).
Da bismo konstruisali numerički algoritam moramo napisati problem u obliku

$$F(t)y'(t) + G(t)_0D_t^{1/2}y(t) + y(t) = -1, \qquad (0 < t < 1); \tag{44}$$

$$y(0) = 0,$$

gde je $F(t) = f(t)/f'(t)$, $G(t) = \lambda/f'(t)$. Aproksimacija prvog reda problema (44) je

$$(y_m - y_{m-1})F_m h^{-1} + G_m h^{-1/2} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(1/2)} y_{m-j} + y_m = -1, \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{45}$$

$$y_0 = 0.$$

Koristeći aproksimaciju (45) izvodimo sledeći algoritam za numeričko rešenje problema (44):

$$y_m = -F_m^{-1}\left(G_m\sqrt{h} + h\right) y_{m-1} - F_m^{-1}h + y_{m-1} - F_m^{-1}G_m\sqrt{h}\sum_{j=1}^{m} w_j^{(1/2)} y_{m-j}, \tag{46}$$

$$(m = 1, 2, \ldots); \qquad y_0 = 0.$$

Rezultati naših izračunavanja su u saglasnosti sa analitičkim rešenjem dobijenim u prethodnom delu. Na primer ako je $f(t) = 1 - \sqrt{t}$ i $\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ tada analitičko rešenje problema (44) je $y(t) = \sqrt{t}$.

Literatura

[1] H.D.Davis, *The Theory of Linear Operators*, Principia Press, Bloomington, Indiana, 1936.

[2] A.V.Letnikov, *Theory of differentiation of an arbitrary order*, 1868.

[3] S.G.Samko, A.A.Kilbas, O.I.Martchev, *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications*, Minsk, 1987.

[4] M.Caputo, *Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent*, Geophys, 1967.

[5] M.Caputo, *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.

[6] A.M.A. El-Sayed, *Multivalued fractional differential equations*, *Apll. Math. and Comput.*, vol.80, 1994 pp.1-11.

[7] A.M.A. El-Sayed, *Fractional order evolution equations*, Journal of Fractional Calculus, May 1995.

[8] M.Ochmann, S.Makarov, *Representation of the absorption of nonlinear waves by fractional derivatives*, *Journal of the Acoustical Society of America*,vol.94, no.6, 1993.

[9] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.

[10] R.R.Nigmatullin, *Fractional integral and its physical interpretation*, Soviet J. Theor. and Math. Physics. vol.90, no.3, 1992, pp.354-367.

[11] R.S.Rutman, *On the paper by R.R.Nigmatullin "Fractional integral and its physical interpretation"*, Theor. Math. Phys. vol. 100, no.3, 1994, pp.154-156.

[12] Ch. Lubich, *Discretized fractional calculus*, SIAM J.Math. Anal., vol.17, no.3, May 1986, pp.704-719.

[13] R. L. Bagley and P. J. Torvik, *On the appearence of the fractional derivative in the behavior of real materials*, Journal Applied Mechanic, vol.51, 1984, pp.294-298.

[14] Yu. I. Babenko, *Heat and Mass Transfer*, Khimiya, Leningrad, 1986 (in Russian)

[15] A.Oustaloup, From fractality to non integer derivation through recursivity, a property common to these two concepts: a fundamental idea for a new process control strategy, *Proceedings of the 12th IMACS World Congress*, Paris, July 18-22, 1988,vol.3.pp.203-208.