МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Оцена параметра вредности при ризику

-Мастер рад-

Ментор: др Павле Младеновић

Студент: Невена Ћирић

Бр. индекса: 1029/2011

Београд, 2013. године

Садржај

Увод.

На финансијским тржиштима финансијске организације су изложене бројним ризицима. Ризик је неизвесност будућег исхода, па је појавом глобалних криза створена потреба да се са још већом пажњом приступи моделирању, управљању и контроли ризика. Али адекватне приносе није могуће остварити без излагања портфеља ризичном пословању. Свака промена цене хартије од вредности, било она позитивна или негативна, приказује се као ризик.

Како би успешно управљале ризицима, банке и друге финансијске организације морају бити способне и измерити их, што је у прошлости био проблем, услед недовољно развијене технологије потребне за прикупљање и обраду података. Током 1973. године постављена је Black-Scholes формула вредновања опција, која је дала основни концептуални оквир и основне алате мерења ризика, а временом довела до ширења примене статистичких метода у анализирању финансијских тржишта. Напредак финансијске технологије доноси новине у управљању ризицима, посебно на моделирању тржишног ризика. Главна методологија је вредност при ризику (Value at Risk, VaR), којом се настоји повећати сигурност улагања и која представља методолошки оквир за оцену степена изложености ризику учесника на финансијским тржиштима. Циљ овог рада је оцена параметра вредности при ризику, који представља максимални губитак финансијске позиције у одређеном периоду времена за дату вероватноћу.

Постоје различити приступи за оцену параметра вредности при ризику. Најпознатије су оцена по теорији екстремних вредности, економетријска оцена и параметарски метод. Код оцене по теорији екстремних вредности моделира се реп емпиријске расподеле, чиме се априори не намеће често нереална претпоставка о нормалној расподељености приноса. Економетријска оцена изводи се из GARCH модела, који се користе да би се описала временски промењива условна варијанса приноса. GARCH (p,q) модели се заснивају на претпоставци да се на бази приноса и волатилности из претходних раздобља може прогнозирати будућа волатилност. При томе је посматрано p претходних приноса и q претходних волатилности. Код параметарског метода, основна претпоставка је да приноси имају одређену расподелу: нормалну, Студентову, хиперболичку, нормалну инверзну Гаусову, стабилну расподелу, па се затим оцењује квантил одговарајуће расподеле. Овај метод можемо назвати методом оцене квантила.

У раду су разматране две методе оцене параметра вредности при ризику: параметарски метод и метода примене теорије екстремних вредности. Код параметарског метода претпоставили смо да приноси имају неку од горе наведених расподела, затим смо оценили квантил одговарајућег реда задате расподеле. Код примене теорије екстремних вредности разматран је метод максимум блока и метод прекорачења прага, при чему је највећи значај придат методу прекорачења прага у оквиру којег су развијени семи-параметарски и параметарски приступ. Семи-параметарски приступ је заснован на Хиловој оцени параметра облика, параметарски приступ користи генерализовану Паретову расподелу и другу фундаменталну теорему теорије екстремних вредности. Посматрано је кретање приноса тржишног индекса BELEX 15, који је водећи индекс београдске берзе и представља кретање цена најликвиднијих хартија од вредости којима се тргује методом континуираног трговања. Улагачима може служити као репер за упоређивање потенцијалних инвестиционих стратегија према индексу.

Глава 1.

1.1. Уводни појмови о случајним процесима

Постоје многи примери процеса или појава у природи где се случајни процеси могу узети као математички модели, нпр. као што је кретање цена акција, Брауново кретање честица, температура ваздуха на одређеном месту.

Посматрајмо карактеристику X у сваком тренутку t неког временског интервала T. Вредност величине X у тренутку t није унапред одређена, већ је случајна величина. Како је X_t случајна величина, за свако t из T тада можемо сматрати да је X_t једна случајна функција времена. Кажемо и да је $X_t,\ t \in T$ случајни процес.

Посматрајмо простор вероватноћа (Ω, A, P) и фамилију случајних величина $\{X_t,\ t \in T\}$, где је T бесконачан скуп. Тада имамо следеће:

$X_t : \Omega \to R$ је случајна величина,

$X_t : \Omega \to R^n$ је случајни вектор,

$X_t : \Omega \to M$ је случајни елемент, где је M нпр. метрички простор.

Дефиниција 1.1.1. Фамилија случајних величина $\{X_t, t \in T\}$ дефинисаних на неком простору вероватноћа (Ω, A, P), где је T бесконачан скуп, назива се *случајна функција* или *случајни процес*.

Ако је $T = R,\ T = [0, \infty),\ T = [a, b]$ онда је $\{X_t, t \in T\}$ случајни процес са непрекидним параметром (временом). Ако је $T = N,\ T = Z$ онда је $\{X_t, t \in T\}$ случајни процес са дискретним временом (случајни низ). Ако је

$T \subset R^d$, $d \geq 2$, онда је $\{X_t,\, t \in T\}$ случајно поље. Ако је (R, B), где је B Борелова σ-алгебра, простор вредности случајног процеса $\{X_t, t \in T\}$, онда се тај процес зове *реалан случајни процес*.

Нека је $\{X_t, t \in T\}$ реалан случајни процес. За свако фиксирано t из T, X_t је случајна величина и она има одговарајућу функцију расподеле $F_t(x) = P\{X_t \leq x\}$. Фамилија ових функција у односу на $t \in T$ је фамилија једнодимензионих функција расподеле. Једнодимензионе функције расподеле нису довољне за карактеризацију случајног процеса, осим у случају када се вредности случајног процеса у разним тренуцима времена посматрају изоловано. Због тога је неопходно знати вишедимензионе функције расподеле.

Посматрајмо n-димензиони случајни вектор $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Функција расподеле овог случајног вектора одређена је са

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\}.$$

Ако пустимо да $(t_1, \ldots, t_n)$ прође кроз скуп T^n онда добијамо фамилију n-димензионих функција расподеле. Фамилија свих n-димензионих функција расподеле $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ $n = 1, 2, \ldots$ је *фамилија коначнодимензионих функција расподеле* случајног процеса X.

Коначнодимензионе расподеле случајног процеса задовољавају услов симетрије и услов сагласности.

Како је случајни процес X одређен на простору вероватноћа (Ω, A, P), где је T индексни скуп и (R, B) простор вредности случајног процеса, онда је X

функција двају аргумената $X(t,\omega)$, $t \in T, \omega \in \Omega$. Када фиксирамо временски тренутак t добијамо функцију $X(t,\cdot)$ мерљиву у односу на A, тј. добијамо случајну величину. Када фиксирамо ω добијамо функцију $X(\cdot,\omega): T \to R$ коју називамо *реализацијом* или *трајекторијом случајног процеса*.

Један од важнијих случајних процеса је Брауново кретање (или Винеров процес) које дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 1.1.2. Случајни процес $(W_t)_{t\geq 0}$, дефинисан на простору вероватноће (Ω, F, P) је *Брауново кретање* ако:

(1) $W_0 = 0$ скоро свуда

(2) W има независне прираштаје, тј. за $n = 1,2,\ldots$ и $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случајне променљиве $W_0, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ су независне

(3) За $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \in N(0, t-s)$, што значи да $W_t - W_s$ има нормалну расподелу са математичким очекивањем 0 и дисперзијом $t-s$, која је једнака приращтају између t и s

(4) Са вероватноћом 1 процес W има непрекидне трајекторије, односно W је непрекидан као функција од t, т.ј.

$$P\{W \in C[0,+\infty)\} = 1,$$

где смо са $C[0,+\infty)$ означили колекцију реалних и непрекидних функција дефинисаних на $[0,+\infty)$.

Својство Брауновог кретања које следи из дефиниције представићемо у облику тврђења.

Тврђење 1.1.1. Нека је $(W_t)_{t\geq 0}$ Брауново кретање са параметром дрифта μ и дисперзијом σ^2, т.ј. $W_t \in N(\mu t, \sigma^2 t)$. Тада је коваријација

$$\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \sigma^2 \min\{s,t\}.$$

Трајекторије Брауновог кретања, иако непрекидне, имају интересантну особину.

Теорема 1.1.1. Скоро све трајекторије Брауновог кретања су нигде диференцијабилне, тј.

$$P\left((\forall t > 0) : \limsup_{h \to 0} \left| \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right| = +\infty \right) = 1.$$

Из ове теореме следи једно друго веома важно својство трајекторија Брауновог кретања, а то је да трајекторије Брауновог кретања немају ограничену варијацију, тј. важи да је варијација једнака

$$V(t) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \right| \right\} = +\infty,$$

где је супремум узет по свим поделама $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ и $n \in N$. Како за Брауново кретање важи да су са вероватноћом један његове трајекторије нигде диференцијабилне, а функција ограничене варијације је скоро свуда диференцијабилна, то следи да су те трајекторије неограничене варијације.

Луис Башеље је у својој тези Theorie de la Speculation, коју је одбранио 1900. године на Сорбони посматрао кретање цене меница на берзи током година- посматрао их је као трајекторије случајног процеса. Башеље је моделирао процес кретања цена вредносних папира на берзи помоћу Брауновог кретања, са параметром дрифта μ и дисперзијом σ^2, тако што је претпостављао да за све ненегативне вредности y и t, колекција цена $S(y)$, $0 \le y < +\infty$, задовољава услов да случајна променљива $S(t+y) - S(y)$ не зависи од тога какве су биле цене вредносних папира до тренутка времена

y, као и услов да $S(t+y)-S(y)$ има нормалну расподелу $N(\mu t, \sigma^2 t)$. Мана модела је што претпоставља да цена вредносног папира има нормалну расподелу и тиме допушта могућност да цена буде негативна. Takoђе, промена у цени вредносног папира на интервалу исте дужине има исту расподелу, без обзира на то колика је та цена била на почетку интервала, а то није оправдано. Постоји модел који нема поменутих мана. Претпоставка овог модела је да разлика логаритама цена представља процес Брауновог кретања. Тиме цене никад нису негативне. Нека је садашње време 0, а $S(y)$ је цена акције после интервала времена дужине y.

Дефиниција 1.1.3. Кажемо да колекција цена $S(y),\ 0 \le y < +\infty$, представља процес *геометријског Брауновог кретања* са параметром дрифта μ и параметром волатилности σ ако за свако y, $t \ge 0$ важи:

1. случајна промењива $\dfrac{S(t+y)}{S(y)}$ не зависи од цена које су биле до тренутка y
2. $\ln\left(\dfrac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ је случајна промењива која има расподелу $N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Дефинишимо геометријско Брауново кретање:

Дефиниција 1.1.4. Ако је случајни процес $(W_t)_{t\ge 0}$ Брауново кретање, тада се процес $(Y_t)_{t\ge 0}$ дефинисан као

$$Y_t = e^{W_t}$$

назива *геометријско Брауново кретање*.

1.2. Дефиниција вредности при ризику

Почетком 90-их година прошлог века велики број финансијских институција као J.P. Morgan, Banker Trust предложио је имплементацију нове мере ризика како би се утврдила висина потребног капитала за покриће губитака насталих услед изложености компаније тржишном ризику. Тржишни ризик је ризик због нестабилности тржишних цена финансијских инструмената и овде се убрајају ризик промене цена хартија од вредности, каматни ризик, валутни ризик, као и ризик промене цена робе.

Ова мера ризика, позната као вредност при ризику (*Value at Risk – VaR*), се сада користи и код неких других облика ризика којима компанија може бити изложена, као што је нпр. кредитни ризик. Кредитни ризик се јавља услед неизвесности да ће кредитни дужник испунити своју финансијску обавезу, тј. отплатити главницу кредита, камате. Поред тржишних ризика и кредитног ризика постоје и оперативни, правни ризик и ризик ликвидности. Оперативни ризик се јавља услед грешака или непредвиђених догађаја у току извршавања пословних активности чији узрок могу бити људски или технички фактори. Правни ризик настаје услед неодговарајућих закона за решавање правних питања који се односе на пословање финансијске институције. Ризик ликвидности је ризик да финансијска организација не послује са довољно ликвидних средстава за измирење доспелих обавеза.

VaR се дефинише као губитак на финансијској позицији током временског хоризонта τ који може бити прекорачен са јако малом вероватноћом $1-\alpha$, што записујемо на следећи начин

$$P\{Губитак > VaR\} \leq 1-\alpha$$

Вероватноћа α је обично број између 0,95 и 1.

Ако је израчунати *VaR* 1000 евра, изабрана вероватноћа 0,99 и временски хоризонт 1 дан, то значи да ће губитак на задатој финансијској позицији бити већи од 1000 евра у једном дану, посматраном од 100 дана.

VaR можемо дефинисати и прецизније. Нека је X случајна променљива и F_X њена функција расподеле. F_X је сада функција расподеле добитака и губитака једне ризичне финансијске позиције у временском хоризонту τ. Негативне вредности случајне променљиве X одговарају добицима а позитивне вредности променљиве X губицима. Ова конвенција је погодна када говоримо о великим губицима (нпр. губитак је већи од израчунатог *VaR*-а).

Дакле, *VaR* је квантил функције расподеле F_X, тј. то је вредност x за коју важи $0 < \alpha = F_X(x) < 1$.

Дефиниција 1.2.1. Нека је X случајна променљива са функцијом расподеле, F_X, добитака и губитака једне ризичне финансијске позиције, где су губици позитивне вредности. За временски хоризонт τ и задату вероватноћу $0 < \alpha < 1$ важи,

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}$$

Можемо писати и $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$ где је F_X^{-1} инверз функције F_X. Зато ћемо претпоставити да је F_X строго растућа и непрекидна.

Временски хоризонт и вероватноћа су фактори који утичу на *VaR* као меру ризика. Ако постоји већа аверзија према ризику бираћемо већу вероватноћу (ниво поверења). Bank America и J.P. Morgan користе $\alpha = 0.95$ за ниво поверења (можемо рећи 95%-тни ниво поверења), Bankers Trust користи 99%-тни ниво поверења. Избор временског хоризонта је субјективан и зависи од ризичне финансијске позиције. Најчешће се поклапа са потребним периодом ликвидације ризичне финансијске позиције (нпр. портфолиа).

1.3. Историјски преглед

Нека је са S_t означена цена неког финансијског иснтрумента, нпр. акције. Величина S_t је дата у дискретним тренуцима, $t = 0,1,2...$ где временски распон између два мерења цене акције, у овом случају, може бити дан, недеља итд. S_0 је цена у почетном тренутку.

Са $R = \dfrac{S_T - S_0}{S_0}$ означимо принос у тренутку T у односу на почетни тренутак *0*. Принос можемо представити као дискретну стопу раста са $\tilde{R}_t = \dfrac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$ или апроксимирати непрекидном стопом раста. Имамо да је

$$\Delta \ln(S_t) = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \ln\left(1 + \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}.$$

Сада је $R_t = \Delta \ln(S_t) = \ln S_t - \ln S_{t-1}$, принос, представљен као непрекидна стопа раста и представља прву диференцу логаритмованих података. Ово је и начин трансформације временске серије. Логаритмовањем података се смањује њихов распон и постиже правилнија расподела око средње вредности, а диференцирањем података се добија временска серија са стабилним нивоом.

Већ на самом почетку примене *VaR*-а као мере ризика јасно су се издвојиле неке методе за његово израчунавање. Метод историјске симулације је најлакши за имплементацију јер не претпоставља да приноси имају одређену теоријску расподелу већ се *VaR* чита из узорка користећи статистике поретка. Нека је дат узорак обима 1000 кога чине приноси једне акције мерени на дневном нивоу. Губици су представљени као позитивне вредности. Када формирамо статистике поретка $X^{(1)} \geq X^{(2)} \geq \ldots \geq X^{(1000)}$, где $X^{(1)}$ представља највећи забележени губитак, можемо израчунати *VaR* за задати ниво вероватноће. На пример за $\alpha = 0.95$ $VaR_{\alpha=0.95}(X) = X^{(50)}$.

Проблем који се јавља код овог метода је обим узорка. Уколико имамо податке о дневним приносима једне акције током годину дана тада нам је на располагању 252 податка о приносима, јер година има 252 радна дана. Али ако желимо да израчунамо *VaR* на недељном нивоу имамо само 50 података о приносима акције, а потребно нам је бар два пута више да бисмо израчунали *VaR*. Тада можемо користити непараметарски или параметарски *Bootstrap метод*. Непараметарски метод нам омогућава добијање узорка путем „извлачења са враћањем" из оригиналног скупа опажања док параметарски метод подразумева одређивање вредности непознатих параметара расподеле унапред задатог облика на основу расположивих података и, затим, генерисање нових узорака из дате расподеле окарактерисане добијеним параметрима. При коришћењу метода историјске симулације увек треба имати на уму претпоставку да ће се будућност понашати као прошлост. Што значи да ако у прошлости нису забележени екстремни догађаји, значи да их неће бити ни у будућности, а то је мало вероватно.

Параметарски метод за израчунавање *VaR*-а користи претпоставку да расподела приноса одговара некој од теоријских расподела као што су нормална, Студентова, хиперболичка, нормална инверзна Гаусова расподела, стабилна расподела.

Врло често се користи апроксимација *нормалном расподелом*. Нека је са X означен принос и нека је F_X његова функција расподеле. F_X је заправо нормална расподела са параметрима μ_t и σ_t^2, где је t временски хоризонт. Са α означимо ниво вероватноће.

Сада је $VaR_\alpha(X) = \inf\{x | F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) = \mu_t + \sigma_t \Phi^{-1}(\alpha)$.

Овде $\Phi^{-1}(\alpha)$ представља квантил реда α стандардне нормалне расподеле. Параметри нормалне расподеле се оцењују на следећи начин $\mu_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_t)^2}$, где је n обим узорка у серији приноса.

Расподелу приноса можемо апроксимирати *Студентовом расподелом*. Користимо је у апроксимацији јер има теже репове од репова нормалне расподеле. Функција густине Студентове расподеле, чије је очекивање нула, дата је са

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi \nu b}}\left(1 + \frac{x^2}{b\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

, где је $\nu > 2$ број степени слободе, а $b > 0$ параметар размере. За $\nu > 2$ имамо да је варијанса $Var(X) = \frac{b\nu}{\nu - 2}$. За $\nu = 1$ функција густина Студентове расподеле постаје функција густине Кошијеве расподеле, а када $\nu \to \infty$ Студентова расподела конвергира ка нормалној расподели. Оцене за ν и b добијамо методом максималне веродостојности из узорка $x = r_t - \hat{\mu}$, где су са r_t означени приноси, а $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$.

Расподелу приноса можемо априксимирати *нормалном инверзном Гаусовом* (NIG) расподелом. Ову расподелу карактеришу четири параметра α, β, δ и μ .

Функција густине је дата са

$$f_{NIG}(x) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x-\mu)\right),$$

где K_1 означава модификовану Беселову функцију треће врсте реда 1. Важи да је $|\beta| \leq \alpha$ и $\delta > 0$. α је параметар облика, β параметар асиметрије, δ параметар размере, а μ параметар положаја.

Расподелу приноса можемо апроксимирати *хиперболичком расподелом*. Ова расподела има теже репове него нормална расподела јер је њена лог-функција густине хипербола, а не парабола као што је то случај код нормалне расподеле. Њена функција густине дефинисана је са

$$f_H = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)}\exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\right)$$

Овде су α, β, δ и μ параметри, K_1 је модификована Беселова функција треће врсте реда 1. α и β су параметри облика и асиметрије, док δ и μ представљају параметре размере и положаја. Постоји и други облик параметризације ове функције густине, нпр.

$$f_H(x) = \frac{\sqrt{\varphi\gamma}}{\delta(\varphi+\gamma)K_1\left(\delta\sqrt{\varphi\gamma}\right)}\exp\left(-\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} - (x-\mu)\right) - \frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + (x-\mu)\right)\right)$$

При чему је $\varphi = \alpha + \beta,\ \gamma = \alpha - \beta$.

Расподелу приноса можемо апроксимирати *стабилном расподелом*. Mandelbrot[1] и Fama[2] су први предложили стабилну расподелу за апроксимацију расподеле приноса на акције. Стабилна случајна величина X и њена расподела имају карактеристичну функцију облика

$$E\left(e^{i\theta x}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\left(1 - i\beta \tan\frac{\pi\alpha}{2} sign\theta\right) + i\mu\theta,\ \alpha \neq 1\right\} \\ \exp\left\{-\sigma|\theta|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}\ln|\theta| sign\theta\right) + i\mu\theta, \qquad \alpha = 1\right\} \end{cases}$$

Класа стабилних расподела зависи од параметра α, β, σ и μ, где је α индекс стабилности и важи да је $\alpha \in (0,2]$. Параметар асиметрије је β, $\beta \in [-1,1]$, μ је параметар положаја, $\sigma \geq 0$ је параметар размере. Ако је $\beta = 0$ расподела је симетрична, за $\beta < 0$ расподела је асиметрична улево, а за $\beta > 0$ расподела је асиметрична удесно. Класу стабилних расподела записујемо на следећи начин $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$.

Ако је $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ стабилна расподела је Кошијева расподела. Ако је $\alpha = 2$ и $\beta = 0$ стабилна расподела је нормална расподела. Ако је $1 < \alpha < 2$ што је и најчешћи случај неке финансијске серије приноса, репови стабилне расподеле су знатно тежи од репова нормалне расподеле и варијанса је бесконачна. Класа стабилних расподела има и важно својство. Расподела суме случајних променљивих, које су из стабилне расподеле са параметрима α, β, σ и μ задржаће исте вредности α и β. Параметри σ и μ, као

[1] Mandelbrot, B. (1963). The variations of certain speculative prices. Journal of Business, 36, 394-419

[2] Fama, E. (1965). The behaviour of stock prices. Journal of business, 47, 244-280

параметри размере и положаја ће се променити. *VaR* се рачуна на стандардан начин ако су приноси из стабилне расподеле.

Често се у литератури наводи метод Монте Карло симулације за израчунавање *VaR*-а. Он подразумева избор случајног процеса који би пратио понашање промене цене акције S_t. Обично се користи геометријско Брауново кретање. Претпоставља се да кретања цена могу бити описана на следећи начин

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

где је μ_t очекивана стопа приноса, σ_t волатилност у тренутку t, а W_t је Брауново кретање са очекивањем 0 и варијансом dt. У пракси, модел са бесконачно малим прираштајем dt може се апроксимирати помоћу дискретних промена у величини Δt, на следећи начин

$$\Delta S_t = S_{t-1}\left(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right)$$

Овде ε представља променљиву из стандардне нормалне расподеле. Овако дефинисан процес има очекивање $\mu\Delta t$ и варијансу $\sigma^2\Delta t$. ΔS_t је промена цене током интервала Δt, а $\Delta S_t / S_{t-1}$ је дискретна стопа раста. Ако уместо дискретне стопе раста користимо непрекидну, добијамо

$$\Delta \ln S_t = \ln\left(S_t / S_{t-1}\right) = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\ .$$

Ово нам говори да приноси имају нормалну расподелу са параметрима $\mu\Delta t$ и $\sigma^2\Delta t$.

1.4.Дефинисање променљиве која представља добитке/губитке

Означимо са V_0 и V_T тржишне вредности акције или портфолиа у тренуцима $t=0$, односно $t=T$. Посматрани временски хоризонт може бити дан, месец итд. Са L_T означимо променљиву која представља добитке односно губитке за период од T дана и одређујемо је на следећи начин $L_T = -(V_T - V_0)$. Када је $L_T < 0$ значи да је дошло до добитка, а када је $L_T > 0$ дошло је до губитка. Ово нам казује да су губици позитивне вредности.

Нека је S_t цена једне акције компаније којом се тргује на тржишту у тренутку t. Са h означимо број акција које корисник има у поседу. Онда ће $V_t = hS_t$ представљати укупну вредност акција.

Како је $\sum_{t\le T} R_t = \ln S_T - \ln S_0 = \ln\frac{V_T}{h} - \ln\frac{V_0}{h} = \ln\frac{V_T}{V_0}$, из $\sum_{t\le T} R_t = \ln\frac{V_T}{V_0}$ следи да је $\exp\left(\sum_{t\le T} R_t\right) = \frac{V_T}{V_0}$. Одавде добијамо да је $V_T = V_0 \exp\left(\sum_{t\le T} R_t\right)$.

Губитак у тренутку T, у ознаци L_T, израчунавамо на следећи начин

$$L_T = -(V_T - V_0) = V_0 - V_T = V_0 - V_0 \exp\left(\sum_{t\le T} R_t\right) = V_0\left(1 - \exp\left(\sum_{t\le T} R_t\right)\right) =$$
$$V_0\left(1 - \exp\left(-R_{(T)}\right)\right) \approx V_0\left(1 - \left(1 - R_{(T)}\right)\right) = V_0 R_{(T)}.$$

Овде смо са $R_{(T)}$ означили $R_{(T)} = -\sum_{t\le T} R_t$.

VaR за временски период T и вероватноћу q, у ознаци $VaR(T,q)$, је квантил реда q функције расподеле губитака (енгл. profit/loss distribution function). Тиме VaR за задату вероватноћу q задовољава следећу једнакост,

$$P\{L_T \le VaR(T,q)\} = q$$

где је L_T губитак у тренутку T. Нека је F_T функција расподеле приноса, таква да важи

$$F_T(x) = P\{R_{(T)} \le x\} \qquad (1.4.1.)$$

За задату вероватноћу q, важи да је $F_T(x_q) = P\{R_{(T)} \le x_q\} = q$. Из $F_T(x_q) = q$ добијамо да је $x_q = F_T^{-1}(q)$, где је x_q квантил реда q. Заменом у (1.4.1.) добијамо

$$P\{R_{(T)} \le F_T^{-1}(q)\} = q$$

Применимо следеће трансформације,

$$P\{-R_{(T)} \ge -F_T^{-1}(q)\} = q$$

$$P\{\exp(-R_{(T)}) \ge \exp(-F_T^{-1}(q))\} = q$$

$$P\{1-\exp(-R_{(T)}) \le 1-\exp(-F_T^{-1}(q))\} = q$$

$$P\{V_0(1-\exp(-R_{(T)})) \le V_0(1-\exp(-F_T^{-1}(q)))\} = q \qquad (1.4.2.)$$

Како је $L_T = V_0(1-\exp(-R_{(T)}))$, то из (1.4.2.) следи

$$P\{L_T \le V_0(1-\exp(-F_T^{-1}(q)))\} = q,$$

а како важи да је $P\{L_T \le VaR(T,q)\} = q$, то значи да је

$$VaR(T,q) = V_0(1-\exp(-F_T^{-1}(q))) \approx V_0(1-(1-F_T^{-1}(q))) = V_0 F_T^{-1}(q).$$

1.5. Теорија екстремних вредности

Нека је $X_1, X_2, ..., X_n$ низ независних случајних величина са заједничком функцијом расподеле F и нека је $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Тада је

$$F_{M_n(x)} = P\{M_n \le x\} = (F(x))^n.$$

Тражимо асимптотску расподелу максимума M_n кад $n \to \infty$.

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right\} \to G(x), \quad n \to \infty,\ x > 0,$$

$a_n > 0$ и $b_n \in R$ су низови константи. $G(x)$ је недегенерисана гранична функција расподеле. Дефинишимо Гумбелову, Фрешеову и Вејбулову функцију расподеле.

Гумбелова функција расподеле је дата са

$$G_0 = \exp\left(-e^{-x}\right), \quad x \in R$$

Фрешеова функција расподеле је дата са

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & x \ge 0 \end{cases}, \quad \text{где је } \alpha > 0$$

Вејбулова функција расподеле је дата са

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^{\alpha}\right), & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}, \text{ где је } \alpha > 0$$

α представља параметар облика.

Претходне функције расподела можемо представити помоћу γ параметра, тј. извршити γ-параметризацију. На тај начин добијамо расподеле генерализованих екстремних вредности (GEV) облика

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1+\gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}}\right), & \gamma \ne 0,\ 1+\gamma x > 0 \\ \exp\left(-e^{-x}\right), & \gamma = 0 \end{cases}$$

За $\gamma = 0$, заменом, добијамо из претходног записа Гумбелову функцију расподеле,

$$H_\gamma = H_0(x) = \exp\left(-e^{-x}\right) = G_0(x).$$

За $\gamma = \dfrac{1}{\alpha} > 0$ добијамо Фрешеову функцију расподеле

$$H_\gamma(x) = H_{\frac{1}{\alpha}}(x) = \exp\left(-\left(1+\frac{1}{\alpha}x\right)^{-\alpha}\right) = G_{1,\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}x\right), \quad 1+\frac{1}{\alpha}x > 0.$$

За $\gamma = -\frac{1}{\alpha} < 0$ добијамо Вејбулову функцију расподеле

$$H_\gamma(x) = H_{-\frac{1}{\alpha}}(x) = \exp\left(-\left(1-\frac{1}{\alpha}x\right)^{\alpha}\right) = \exp\left(-\left(-\left(\frac{1}{\alpha}x-1\right)\right)^{\alpha}\right) = G_{2,\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}x-1\right),$$

где је $\frac{1}{\alpha}x-1<0$.

Ако претходној параметризацији додамо параметре σ и μ добијамо нов запис расподеле генерализованих екстремних вредности

$$H_{\gamma,\mu,\sigma}(x) = H_\gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Дефиниција 1.5.1. Функција G је максимум стабилна (M - стабилна) ако је недегенерисана и за сваки природан број $n \geq 2$ постоје константе $a_n > 0$ и $b_n \in R$ такве да за сваки реалан број x важи

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x).$$

Ако су $X_1, X_2, \ldots$ независне случајне величине са заједничком функцијом расподеле G, онда је

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\} = P\{M_n \leq a_n x + b_n\} = G^n(a_n x + b_n).$$

Дефиниција 1.5.2. Функција расподеле F припада максимум области привлачења недегенерисане функције расподеле G, у запису $F \in MDA(G)$, ако постоје низови $a_n > 0$ и $b_n \in R$ такви да је

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x).$$

Дефиниција 1.5.3. Функције расподеле G_1 и G_2 су истог типа ако постоје бројеви $a > 0$ и b тако да

$$(\forall\ x \in R)\ G_2(x) = G_1(ax + b).$$

Теорема 1.5.1.(Гнеденко, 1943). Нека је (X_n) низ независних случајних величина са заједничком функцијом расподеле F и $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Ако постоје низови константи $a_n > 0$ и $b_n \in R$, $n \in N$, такви да је

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right\} = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

за сваку тачку непрекидности неке недегенерисане функције расподеле G. Тада је G истог типа као и нека од три поменуте функције расподеле Гумбелова, Фрешеова, Вејбулова. Ове три расподеле су расподеле екстремних вредности.

За случајну величину X са расподелом F реп расподеле дефинише се на следећи начин,

$$1 - F(x) = P\{X > x\}.$$

Кажемо да је позитивна, мерљива функција L споро-променљива у бесконачности ако $\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1,\ \forall t > 0.$

Дефиниција 1.5.4. Нека је F функција расподеле $F(0) = 0$ и $x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty$. Ако је $\limsup_{x\to\infty} \frac{1 - F(x)}{e^{-\lambda x}} < +\infty$ за неко $\lambda > 0$, онда функција расподеле F има лак реп. Ако је $\liminf_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{e^{-\lambda x}} > 0$ за свако $\lambda > 0$ онда функција расподеле има тежак реп.

Ако $F \in MDA(H_\gamma)$ за $\gamma = 0$ или $\gamma < 0$, онда кажемо да је F расподела са лаким репом (нпр. такве су експоненцијална, нормална, гама, логнормална расподела). Ако $F \in MDA(H_\gamma)$ за $\gamma > 0$ онда кажемо да расподела F има тежак реп. Таква расподела F припада максимум области привлачења Фрешеове расподеле, и од посебног је значаја у финансијама.

Теорема 1.5.2. (Гнеденко, 1943). Функција расподеле F припада максимум области привлачења Фрешеове расподеле, у ознаци $F \in MDA(H_\gamma)$, $\gamma > 0$, ако и само ако

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\gamma}} L(x)$$

за неку споро-променљиву функцију L.

Глава 2. Методе оцене *VaR* параметра применом теорије екстремних вредности

2.1. Метод максимум блока

Претпоставља се да максимум блока има $H_{\gamma,\mu,\sigma}$ расподелу. За имплементацију овог метода потребан је велики број података. $X_1, X_2, ..., X_{mn}$ су дневни приноси које делимо на m блокова величине n. Овде говоримо о негативним приносима, губицима. Блокови се формирају тако што нпр. све дневне приносе групишемо по години, $n = 252$, или полугодишње, квартално. Број n треба да буде довољно велики како бисмо применили граничну теорему на максимуме сваког блока $M_n^{(j)} = \max\left(X_{(j-1)n+1},\ldots,X_{(j-1)n+n}\right), j = 1,\ldots,m.$ Параметре γ,μ,σ оцењујемо применом методе максималне веродостојности. Због тога је потребно да број чланова у сваком блоку буде довољно велики. $H_{\gamma,\mu,\sigma}$ је функција расподеле максимума сваког блока, а $h_{\gamma,\mu,\sigma} = \left(H_{\gamma,\mu,\sigma}\right)'$ је функција густине. Тиме је функција максималне веродостојности дата са

$$L\left(\gamma,\mu,\sigma;M_n^1,\ldots,M_n^m\right) = \sum_{i=1}^{m} \ln h_{\gamma,\mu,\sigma}\left(M_n^i\right) =$$

$$-m\ln\sigma - \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+\gamma\frac{M_n^i-\mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(1+\gamma\frac{M_n^i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Затим за $\sigma > 0$, $1+\gamma\dfrac{M_n^i-\mu}{\sigma} > 0, \ \forall i$ нађемо оцене $\hat{\gamma},\ \hat{\mu},\ \hat{\sigma}$.

Већа вредност n води ка бољој апроксимацији максимума блокова и мањој пристрасности у оцени параметра. Веће m даје већи број максимума M_n^i, $i = 1,\ldots,m$ за оцењивање функције максималне веродостојности што води ка мањој варијанси оцењених параметара.

2.2. Метод прекорачења прага

Овај метод је модернији од метода максимума блока јер се не фокусира само на највећем догађају већ на свим догађајима који су већи од задате вредности – прага. Јављају се два приступа, семи - параметарски и параметарски приступ.

(a) семи – параметарски приступ

Због једноставности претпоставимо да је расподела великих губитака Паретовог типа , тј. да је

$$P\{X > x\} = Cx^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, x > x_0 .$$

Нека су $X^{(1)} \geq X^{(2)} \geq ... \geq X^{(n)}$ статистике поретка губитака из узорка величине n, где је функција расподеле узорка F_X. Важи да је

$$\overline{F}_X(x) = x^{-\alpha} L(x), \tag{2.2.1}$$

где је $L(x)$ споро – променљива функција,

Ако је случајна променљива X Паретовог типа и $X^{(k+1)}$ статистика поретка тако да $x > X^{(k+1)}$, онда је

$$\frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_X\left(X^{(k+1)}\right)} = \frac{x^{-\alpha} L(x)}{\left(X^{(k+1)}\right)^{-\alpha} L(x)} = \left(\frac{x}{X^{(k+1)}}\right)^{-\alpha}. \tag{2.2.2}$$

Оцена за $\overline{F}_X\left(X^{(k+1)}\right)$ је $\hat{\overline{F}}_X\left(X^{(k+1)}\right) = \dfrac{k}{n}$, јер је тачно k статистика поретка веће од статистике реда $(k+1)$ од n укупно, па оцена за $\overline{F}_X(x)$ следи из (2.2.2), те се добија да је $\dfrac{\hat{\overline{F}}_X(x)}{\frac{k}{n}} = \left(\dfrac{x}{X^{(k+1)}}\right)^{-\hat{\alpha}}$. Одакле је $\hat{\overline{F}}_X(x) = \dfrac{k}{n}\left(\dfrac{x}{X^{(k+1)}}\right)^{-\hat{\alpha}}$,

тј.

$$\hat{F}_X(x) = 1 - \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X^{(k+1)}}\right)^{-\hat{\alpha}} \quad \text{за } x > X^{(k+1)},$$

где је α оцењено према Хилу (Hill, 1975) на следећи начин,

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(Hill)} = \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln X^{i} - \ln X^{(k+1)}\right)^{-1}.$$

Овде k бирамо са Хиловог графика, који представља скуп уређених парова $\left\{\left(\kappa, \hat{\alpha}_{k,n}^{Hill}\right) : k = 1,...,n-1\right\}$. На графику посматрамо од које вредности k се јавља стабилност.

VaR одређујемо као квантил реда q, $\hat{VaR}_q(X) = x_q$. Користимо ознаку VaR_q уместо VaR_α јер индекс α стоји у ознаци (2.2.1) и представља индекс правилне промењљивости.

$\hat{F}_X(x_q) = 1 - \frac{k}{n}\left(\frac{x_q}{X^{(k+1)}}\right)^{-\hat{\alpha}}$, како је $q = \hat{F}_X(x_q)$, то је $q = 1 - \frac{k}{n}\left(\frac{x_q}{X^{(k+1)}}\right)^{-\hat{\alpha}}$. Даље је $\frac{n}{k}(1-q) = \left(\frac{x_q}{X^{(k+1)}}\right)^{-\hat{\alpha}}$, одакле добијамо

$$x_q = X^{(k+1)}\left(\frac{n}{k}(1-q)\right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}}}.$$

Како је $\hat{VaR}_q(X) = x_q$ то је

$$\hat{VaR}_q(X) = X^{(k+1)}\left(\frac{n}{k}(1-q)\right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}}}.$$

(б) параметарски приступ

У овом приступу користи се генерализована Паретова расподела (GPD) и друга фундаментална теорема теорије екстремних вредности (Pickands, Balkema, de Haan).

Генерализована Паретова расподела (GPD) има облик:

$$G_{\gamma,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}, \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), \quad \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{, где је } \gamma = \frac{1}{\alpha}$$

$\beta > 0$ је параметар размере. Носач расподеле $G_{\gamma,\beta}(x)$ је $x \geq 0$ ако је $\gamma \geq 0$, односно $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\gamma}$ уколико је $\gamma < 0$.

Дефиниција 2.2.1. Нека случајна величина X има функцију расподеле F и $x_F = \sup\{x \in R | F(x) < 1\} \leq \infty$. За сваки праг u, $u \leq x_F$ дефинишимо функцију прекорачења са

$$F_u(x) = P\{X - u \leq x | X > u\} \text{ за } 0 \leq x < x_F - u.$$

Одавде видимо да ако је X веће од задатог прага u онда $F_u(x)$ мери вероватноћу да то прекорачење није веће од x.

Функција средњег прекорачења за величину X се дефинише на следећи начин

$$e_X(u) = E(X - u | X > u).$$

$e_X(u)$ можемо написати као $e_X(u) = \int_0^{x_F - u} x dF_u(x)$.

За $0 \leq x < x_F - u$ функцију F_u можемо изразити преко F на следећи начин

$$F_u(x) = \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Ову једнакост можемо лако проверити,

$$\frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{P\{X \leq u + x\} - P\{X \leq u\}}{P\{X > u\}} = \frac{P\{u \leq X \leq u + x\}}{P\{X > u\}} =$$
$$P\{u \leq X \leq u + x | X > u\} = P\{X - u \leq x | X > u\} = F_u(x)$$

Теорема 2.2.1. (Pickands, 1975, Balkema и de Haan, 1974)[3]. Нека случајна величина X има функцију расподеле F. Онда за свако $\gamma \in R$, функција расподеле F припада области привлачења расподела екстремних вредности, $F \in MDA(H_\gamma)$, ако и само ако

[3] детаљније у [6], [7]

$$\lim_{u\to x_F-}\ \sup_{o<x<x_F-u}\left|F_u(x)-G_{\gamma,\beta(u)}(x)\right|=0$$

за неку позитивну функцију β.

Ова теорема говори да функцију прекорачења F_u можемо заменити са генерализованом Паретовом расподелом када је u довољно велико.

Можемо писати $\overline{F}(x)=\overline{F}(u)\overline{F}_u(x-u)$ за $x>u$. Ово важи из следећег $\overline{F_u}(x-u)=P\{X-u\geq x-u|\ X>u\}=P\{X\geq x|\ X>u\}=\dfrac{P\{X\geq x, X>u\}}{P\{X>u\}}$, како је $x>u$, то имамо да је $\overline{F}_u(x-u)=\dfrac{P\{X\geq x\}}{P\{X>u\}}=\dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(u)}$. Одавде добијамо да је

$$\overline{F}(x)=\overline{F}(u)\overline{F}_u(x-u). \tag{2.2.3}$$

Под претпоставком да је u довољно велико можемо апроксимирати F_u са $G_{\gamma,\beta(u)}$. $\overline{F}(u)$ оцењујемо из узорка. $\hat{\overline{F}}(u)=\dfrac{N_u}{n}$, где је n обим узорка а $N_u=\sum_{i=1}^{n}I\{X_i>u\}$ и представља број елемената узорка који су већи од прага u. Онда $F(x)$ оцењујемо са $\hat{F}(x)=1-\hat{\overline{F}}(x)$, а користећи (2.2.3) добијамо да је $\hat{\overline{F}}(x)=\hat{\overline{F}}(u)\overline{G}_{\hat{\gamma},\hat{\beta}}(x-u)=\dfrac{N_u}{n}\left(1+\dfrac{\hat{\gamma}(x-u)}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}$, $x>u$. Одавде је

$$\hat{F}(x)=1-\frac{N_u}{n}\left(1+\frac{\hat{\gamma}(x-u)}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}} \text{ за } x>u.$$

Праг u бирамо уз помоћ графика на којем се налазе уређени парови $(u,e_X(u))$, и назива се график средњег прекорачења. Треба уочити линеарни тренд почев од неке вредности. Ова вредност је тражено u. Ако линеарни тренд „иде на горе“ онда је $\gamma > 0$, ако „иде на доле“ онда је $\gamma < 0$, ако „иде право“ онда је $\gamma \approx 0$.

Теорема 2.2.2. (Embrechts, Kluppelberg, Mikosh, 1997). Претпоставимо да X има генерализовану Паретову расподелу са параметрима $\gamma < 1$ и β. Онда, за $u < x_F$ важи

$$e_X(u) = \frac{\beta + \gamma u}{1-\gamma}, \ \beta + \gamma u > 0.$$

Из теореме видимо да је $e_X(u)$ линеарно по u. Како је $\gamma < 1$ следи да расподела са тешким репом мора имати коначно очекивање.

У пракси се уместо $e_X(u)$ користи функција средњег прекорачења добијена из узорка,

$$\hat{e}_X(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - u) I\{X_i > u\}}{\sum_{i=1}^{n} I\{X_i > u\}}.$$

Тиме график средњег прекорачења добијамо исцртавањем парова тачака $(u, \hat{e}_X(u))$.

Треба оценити $VaR_\alpha(X)$ где је $VaR_\alpha(X) > u$. $VaR_\alpha(X) = x_\alpha$ а $\hat{F}(x_\alpha) = \alpha$.

$$\alpha = \hat{F}(x_\alpha) = 1 - \frac{N_u}{n}\left(1 + \hat{\gamma}\frac{x_\alpha - u}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}$$

$$\frac{n}{N_u}(1-\alpha) = \left(1 + \hat{\gamma}\frac{x_\alpha - u}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}$$

$$\hat{\gamma}\frac{x_\alpha - u}{\hat{\beta}} = \left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\gamma}} - 1$$

$$x_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\gamma}} - 1\right)$$

Како је $\widehat{VaR}_\alpha(X) = x_\alpha$ то је

$$\widehat{VaR}_\alpha(X) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\gamma}} - 1\right).$$

Подаци који се налазе изнад прага u називамо прекорачењима и за сваки од њих рачунамо величину прекорачења $X_1 - u, ..., X_{N_u} - u$, тј. $Y_1 = X_1 - u, ..., Y_{N_u} = X_{N_u} - u$.

Користићемо метод максималне вреодостојности како бисмо оценили параметре γ и β генерализоване Паретове расподеле. Претпоставићемо да су $Y_1, ..., Y_{N_u}$ независни. $g_{\gamma,\beta}$ је функција густине генерализоване Паретове расподеле $G_{\gamma,\beta}$.

$$G_{\gamma,\beta}(Y_j) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma Y_j}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$g_{\gamma,\beta}(Y_j) = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma Y_j}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}Y_j\right)^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$\ln g_{\gamma,\beta}(Y_j) = \ln\left(\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}Y_j\right)^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}\right) = \ln\frac{1}{\beta} + \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}Y_j\right)^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} =$$

$$-\ln\beta - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\ln\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}Y_j\right).$$

Имамо да је

$$\ln L\left(\gamma,\beta;Y_1,\ldots,Y_{N_u}\right)=\sum_{j=1}^{N_u}\ln g_{\gamma,\beta}\left(Y_j\right)=\sum_{j=1}^{N_u}\left(-\ln\beta-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\ln\left(1+\frac{\gamma}{\beta}Y_j\right)\right)$$

$$=-N_u\ln\beta-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\sum_{j=1}^{N_u}\ln\left(1+\frac{\gamma}{\beta}Y_j\right)\qquad(2.2.4)$$

Када максимизујемо (2.2.4) тако да $\beta>0$ и $1+\frac{\gamma}{\beta}Y_j>0,\ \forall j$, онда добијамо оцене $\hat{\gamma},\ \hat{\beta}$ а тиме и $G_{\hat{\gamma},\hat{\beta}}$ за апроксимацију F_u.

Ако случајна величина X има генерализовану Паретову расподелу онда је $EX=\frac{\beta}{1-\gamma}$ за $\gamma<1$.

Ако случајна величина X има експоненцијалну расподелу онда је $F_u(x)=F(x),\ \forall x$ због својства одсуства памћења експоненцијалне расподеле. Нпр. време које честица проведе у интервалу $[u,u+x)$ је независно од претходно проживљеног времена које се не узима у обзир.

Ако случајна величина X има расподелу $G_{\gamma,\beta}$ онда је за довољно велики праг u, $F_u(x)=G_{\gamma,\beta(u)}(x)$, где је $\beta(u)=\beta+\gamma u$ нови параметар размере који је линеаран по u. Овде је $0\le x<\infty$ за $\gamma\ge 0$ и $0\le x\le-\frac{\beta}{\gamma}-u$ за $\gamma<0$. Како је $EX=\frac{\beta}{1-\gamma}$ за случајну величину X која има $G_{\gamma,\beta}$ расподелу, онда је $e(u)=\frac{\beta(u)}{1-\gamma}=\frac{\beta+\gamma u}{1-\gamma}$, где је $0\le u<\infty$ за $0\le\gamma<1$ и $0\le u\le-\frac{\beta}{\gamma}$ за $\gamma<0$.

2.3. *Backtesting* и тест области привлачења екстремних вредности

Помоћу Kupiec[4]-овог теста количника веродостојности можемо измерити који од изабраних *VaR* модела нам највише одговара. Посматра се број дана када је губитак на финансијској позицији био већи од израчунатог *VaR*-а и представља број изузетака који би требао да буде близу очекиваног броја према задатом нивоу поверења. Тако је нпр. за очекивати 10 изузетака од 1000 дана при задатом нивоу поверења од 99% за дати модел *VaR*-а.

Расподела очекиваног броја изузетака за наведени модел *VaR*-а је биномна. Нека се у n од T случајева догодило прекорачење израчунатог VaR-a, $n \in B(T, p)$. Нулта и алтернативна хипотеза имају следеће облике

$$H_0 : \frac{n}{T} = p \qquad\qquad H_1 : \frac{n}{T} \neq p$$

где је $p = P\{r_t < VaR_p | F_{t-1}\}$ за свако t.

Онда је одговарајућа статистика количника веродостојности дата са

$$LR = 2\left[\ln\left(q^n (1-q)^{T-n}\right) - \ln\left(p^n (1-p)^{T-n}\right)\right], \text{ где је } q = \frac{n}{T}.$$

Ова статистика при тачној хипотези H_0 има χ_1^2 расподелу.

Последњих година област истраживања оцене квантила расподела са тешким реповима као и апроксимација репова емпиријских расподела одговарајућим, теоријским расподелама постала је веома важна и популарна. Знатно мање радова је било на тему тестирања да ли узорак долази из расподеле која припада области привлачења Гумбелове расподеле. Hasofer и Wang [4] су се бавили једноставном тест статистиком која је предложена у тестирању хипотезе да узорак долази из расподеле која припада области

[4] Kupiec, (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, Journal of Derivatives, 2, 73-84

привлачења Гумбелове расподеле. Заснована је на највећих k статистика поретка и представља уопштење Shapiro-Wilk тест статистике (Shapiro, Wilk 1965). Дата је следећом формулом,

$$W = \frac{k\left(\overline{X} - X_k\right)^2}{(k-1)\left[\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right]},$$

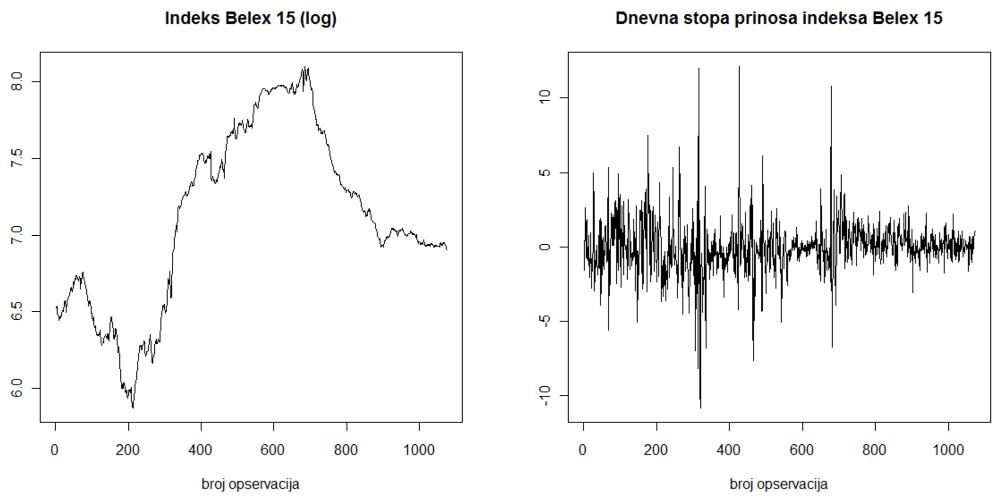
где су $X_k \leq X_{k-1} \leq \ldots \leq X_1$ првих k највећих статистика поретка из узорка обима n и $\overline{X} = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\Big/ k$. Када n тежи бесконачности, асимптотска расподела статистике W под нултом хипотезом се може апроксимирати Greenwood-овом статистиком (Stephens, 1981).

Глава 3. Примери оцена *VaR* – параметра

У уводном делу смо навели да је посматрано је кретање приноса тржишног индекса BELEX 15[5], који представља кретање цена 15 најликвиднијих хартија од вредости којима се тргује методом континуираног трговања. Кретање овог индекса улагачима може служити као репер за упоређивање потенцијалних инвестиционих стратегија. Посматрали смо вредности индекса у периоду од 4.10.2005. године до 10.01.2011. године, што укупно представља 1326 података, при чему је, од тог броја, у оцени параметра вредности при ризику коришћено првих 1074, док су остали подаци предвиђени за backtesting.

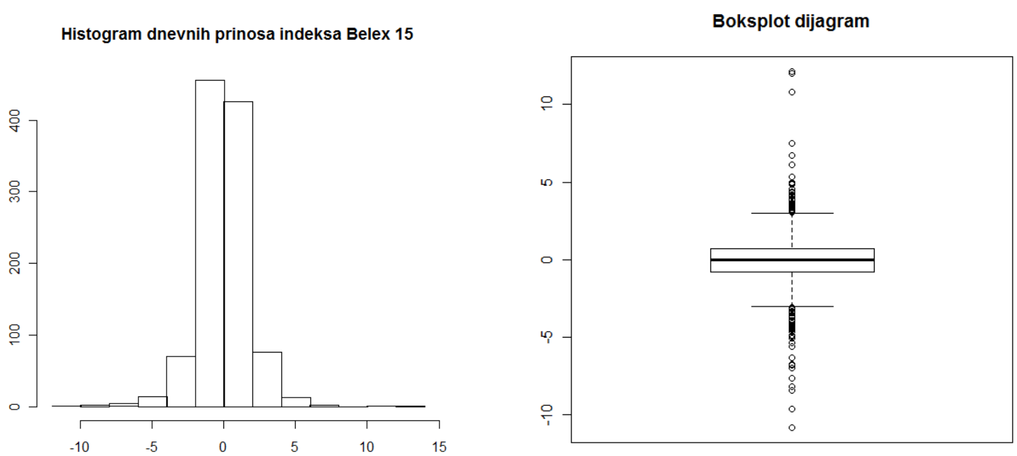
На следећим сликама приказано је кретање индекса BELEX 15 током времена, као и дневне стопе приноса овог индекса[6].

[5] Извор података: Београдска берза, а.д. www.belex.rs
[6] Програмски кодови помоћу којих су добијене ове слике налазе се у Додатку



Дневне стопе приноса су прве диференце логаритмованих података вредности индекса. Са друге слике видимо да су присутне нестандардне опсервације.

На наредним сликама приказан је хистограм дневних стопа приноса индекса као и бокс-плот дијаграм на којем је приметно да постоји велики број нестандардних опсервација.



Потребно је израчунати и коефицијенте асиметрије и спљоштености. Коефицијент асиметрије показује у којој мери постоји концентрација података временске серије око тачке која је већа или мања од средње вредности. Ако је десни реп расподеле дужи од левог репа тада је расподела асиметрична у десно, ако је леви реп расподеле дужи од десног тада је расподела асиметрична у лево. При чему је средња вредност већа од медијане код расподеле која је асиметрична у десно. Обратно, средња вредност је мања од медијане уколико је расподела асиметрична у лево. Коефицијент спљоштености описује репове емпиријске расподеле.

Спљоштеност се изражава у односу на спљоштеност нормалне расподеле. Вредност овог коефицијента код нормалне расподеле је 3. Ако је коефицијент спљоштености већи од три, тада су репови дате расподеле тежи од репова нормалне расподеле. Термин тешки реп сугерише да се на репу емпиријске расподеле налази већи део јединичне вероватноће него што је то случај код репова нормалне расподеле. Тешки репови настају као последица постојања екстремних догађаја у кретању временске серије. Са хистограма дневних приноса индекса видимо да постоје тешки репови, а са бокс-плот дијаграма да су присутни екстремни догађаји у кретању временске серије.

У наредној табели приказане су средња вредност серије података, минимална, максимална вредност, стандардна девијација, коефицијент асиметрије и спљоштености, Жарк-Бера тест статистика[7].

Средња вредност	-0.04%
Минимум	-10.86%

[7] Сви програмски кодови који су коришћени у одређивању ових вредности налазе се у Додатку

Максимум	12.16%
Стандардна девијација	1.82
Коефицијент асиметрије	0.168
Коефицијент спљоштености	8.260
Жарк-Бера тест статистика	3058 (р-вредност је 0.00)

Из добијених резултата у табели, видимо да је емпиријска расподела приноса мало асиметрична у десно јер је коефицијент асиметрије већи од нуле и карактерише је велика спљоштеност. Жарк-Бера тест статистика (ознака JB) користи се да би се направила дискриминација између следећих хипотеза:

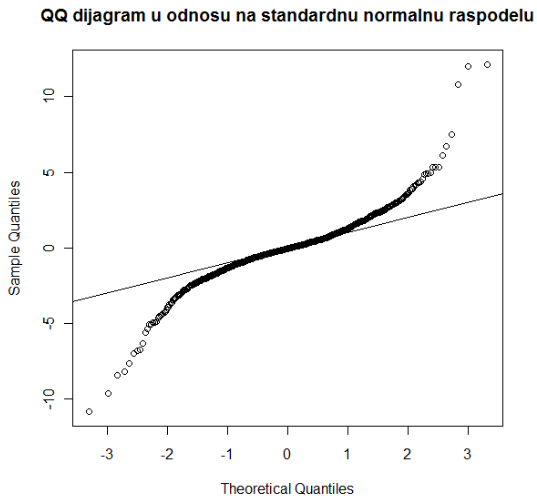
H_0 : серија има нормалну расподелу $\left(\alpha_3 = 0 \wedge \alpha_4 = 3\right)$

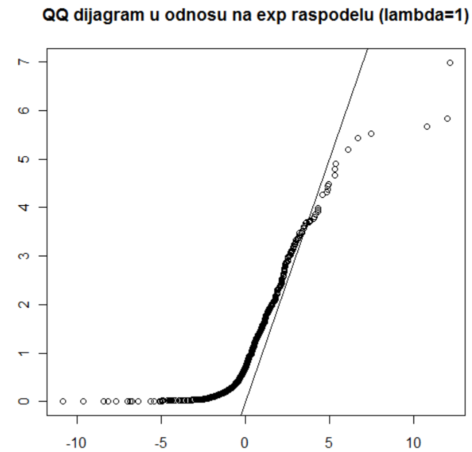
H_1 : серија није нормално расподељена $\left(\alpha_3 \neq 0 \vee \alpha_4 \neq 3\right)$

Тест статистика има облик, $JB = \frac{T}{6}\left(\hat{\alpha}_3^2 + \frac{\left(\hat{\alpha}_4 - 3\right)^2}{4}\right) : \chi_2^2$, где је T обим узорка, $\hat{\alpha}_3 = \frac{\hat{m}_3}{\hat{\sigma}^3}$ је оцена коефицијента асиметрије, $\hat{\alpha}_4 = \frac{\hat{m}_4}{\hat{\sigma}^4}$ је оцена коефицијента спљоштености, $m_3 = E\left(X - \mu\right)^3$ је трећи централни моменат, $m_4 = E\left(X - \mu\right)^4$ је четврти централни моменат.

На наредним сликама налазе се парови квантила емпиријске расподеле и задате теоријске расподеле[8]. На првој слици у питању је стандардна нормална расподела, док је на другој експоненцијална расподела са параметром $\lambda = 1$.

[8] Програмски код на основу функција помоћу којих су нацртане слике налази се у Додатку





Са оба квантил-квантил (QQ) дијаграма видимо да постоје велика одступања од ових теоријских расподела, нарочито у реповима расподеле, што указује на тешке репове емпиријске расподеле приноса. Да су подаци из задатих расподела пратили би праву линију која је приказана.

У наредним корацима оценићемо параметре одговарајућих теоријских расподела, нормалне, Студентове, хиперболичке, нормалне инверзне Гаусове, стабилне расподеле и затим одредити вредност при ризику применом параметарског метода који можемо назвати још методом оцене квантила, а о којем је било речи у одељку 1.3.

Пример 1.

Претпоставимо да узорак приноса индекса има нормалну расподелу. Методом максималне веродостојности оценимо параметре нормалне расподеле. Функција *norm.fit()* у R-у оцењује параметре нормалне расподеле μ, σ. *mle2()* је функција максималне веродостојности и позивом *summary(mle.results)* добијамо оцене за μ, σ, и то $\hat{\mu} = -0.035$, $\hat{\sigma} = 1.819$ са стандардним грешкама оцена 0.055 и 0.039, редом.

```
norm.fit<-function(mu,sigma) {
-sum(dnorm(b15p_uz,mu,sigma,log=T)) }

mle.results<-mle2(norm.fit,start=list(mu=1,sigma=1),data=list(b15p_uz))

summary(mle.results)
```

Резултат је следећи:

```
Maximum likelihood estimation

Call:
mle2(minuslogl = norm.fit, start = list(mu = 1, sigma = 1), data = list(b15p_uz))

Coefficients:
       Estimate    Std. Error   z value   Pr(z)
mu    -0.035186   0.055521  -0.6337   0.5262
sigma  1.819361   0.039256  46.3465  <2e-16 ***
```

Сада можемо да одредимо вредност при ризику за различите нивое вероватноће. Већ смо у одељку 1.3. показали на који начин одређујемо *VaR* при претпоставци да приноси прате нормалну расподелу. α је задата вероватноћа, а t је временски хоризонт, у нашем случају, један дан. Φ је стандардна нормална расподела. Тада је,

$$VaR_\alpha(X) = \mu_t + \sigma_t \Phi^{-1}(\alpha).$$

Резултати су следећи[9]:

$\alpha,\ \hat{\mu},\ \hat{\sigma}$	*VaR*
$\alpha = 0.9,\ \hat{\mu} = -0.035,\ \hat{\sigma} = 1.819$	2.29%
$\alpha = 0.95,\ \hat{\mu} = -0.035,\ \hat{\sigma} = 1.819$	2.95%
$\alpha = 0.99,\ \hat{\mu} = -0.035,\ \hat{\sigma} = 1.819$	4.19%

[9] Програмски код на основу којег је извршен обрачун у овом примеру као и у наредним примерима налази се у Додатку

Пример 2.

Вредност при ризику можемо одредити применом историјске методе, из узорка. Потребно је оценити квантил емпиријске расподеле. Бирамо поново три различита нивоа вероватноће (0.9, 0.95 и 0.99). Функција коју користимо у оцени квантила је *quantile()* и она за аргументе узима узорак дневних приноса индекса и ниво вероватноће, као што је приказано,

quantile(b15p_uz(-1),0.9).*

Важно је напоменути да је почетни узорак приноса помножен са -1. На тај начин оцењујемо квантил реда 0.9 (или 0.95, 0.99) те су губици позитивне вредности. Резултате прикажимо у табели:

α	*VaR*
0.9	1.857%
0.95	2.544%
0.99	5.166%

У одељку 2.3. било је речи о *backtesting методи* и Kupiec-овом тесту количника веродостојности. Посматраћемо број дана када је губитак на финансијској позицији био већи од израчунатог *VaR*-а. Ако имамо 200 дана и задату вероватноћу 0.99, очекујемо да ће у 2 дана од 200, губитак бити већи од израчунатог *VaR*-а. У првом кораку, помоћу функције *fja2()* оцењујемо квантиле емпиријске расподеле приноса. На основу првих 1074 података оцењујемо квантил одговарајућег реда, затим додајемо један по један податак „из будућности“ и из тако сваког новодобијеног, проширеног узорка оцењујемо квантил одговарајућег реда. Добијамо за сваки од 100 (252) дана оцењени *VaR* и испитујемо да ли су забележени стварни приноси током ових 100 (252) дана прекорачили оцењени *VaR* или не. Рецимо, за 100 података о дневним приносима индекса и задату вероватноћу 0.95 очекујемо да неће бити више од 5 прекорачења. Помоћу функције *fja3()* испитујемо да ли су стварни забележени губици већи од оцењеног *VaR-a.* У даљем тексту је програмски код који је предвиђен за *backtesting* при изабраној вероватноћи 0.05 и обиму од 100 оцењених вредности *VaR-a*[10].

```
fja2<-function{
VaRe<-c(quantile(b15p_uz,0.05))
        for(i in 1:100){
        b15p_uz<-c(b15p_uz,b15p_boot[i])
        VaRe<-c(VaRe,quantile(b15p_uz,0.05))
        i<-i+1}
return(VaRe)}
fja3<-function{
        j<-0
        for(i in 1:100){
        if (VaRe[[i]]>b15p_boot[i])
        j<-j+1
        i<-i+1}
return (j)}
 j
[1] 3

n<-3
T<-100
p<-n/T
pt<-0.05
LR2<--2*(log((pt^n)*((1-pt)^(T-n)))-log((p^n)*((1-p)^(T-n))))
p.value1<-1-pchisq(LR2,df=1)
```

[10] Објашњење програмског кода за backtesting налази се у Додатку

LR2

[1]0.977

p.value1

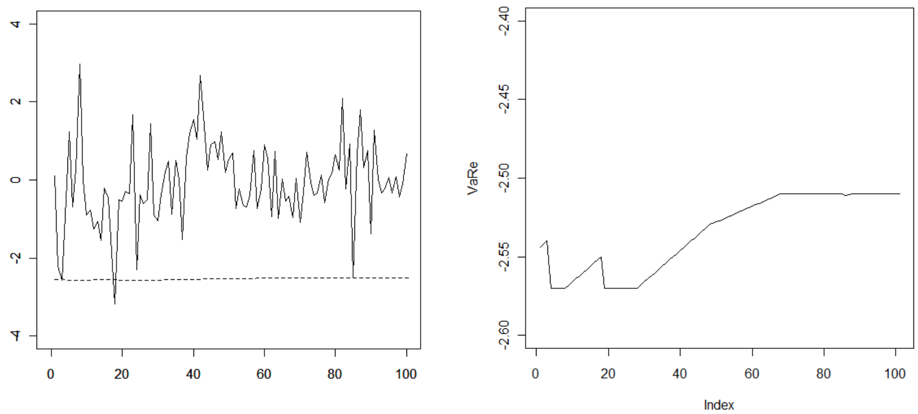
[1] 0.3223

Приказаћемо у табели резултате *backtesting*-а за различите нивое вероватноће и два различита обима оцене *VaR-a*, од 100 и 252 податка. Са *j* означен је број опсервација које су веће од оцењеног *VaR-a*. Одговарајућа тест статистика Kupiec-овог теста количника веродостојности при тачној хипотези H_0 има χ_1^2 расподелу. Критична вредност тест статистике је 3.84. Нулту хипотезу одбацујемо када је израчуната вредност тест статистике већа од критичне вредности.

Вероватноћа	j	*Количник веродостојности* (р-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (р-вредност), 252
0.1	6	2.01 (0.153)	8	17.314 (0.000)
0.05	3	0.977 (0.323)	3	10.969 (0.001)
0.01	0	2.01 (0.153)	0	5.065 (0.024)

Видимо да је Kupiec-ов тест прошао за све нивое вероватноће у случају поређења 100 прогнозираних будућих оцена *VaR* параметра и 100 остварених будућих приноса, док је такво поређење на већем обиму, од 252 дневна приноса, резултирало великим вредностима тест статистике, па Kupiec-ов тест није прошао.

На левој слици приказана је серија дневних приноса (пуна линија) и оцењеног *VaR-a* (испрекидана линија), као и графички приказ 100 вредности оцењених вредности при ризику, при вероватноћи 0.95 (десна слика).



Пример 3.

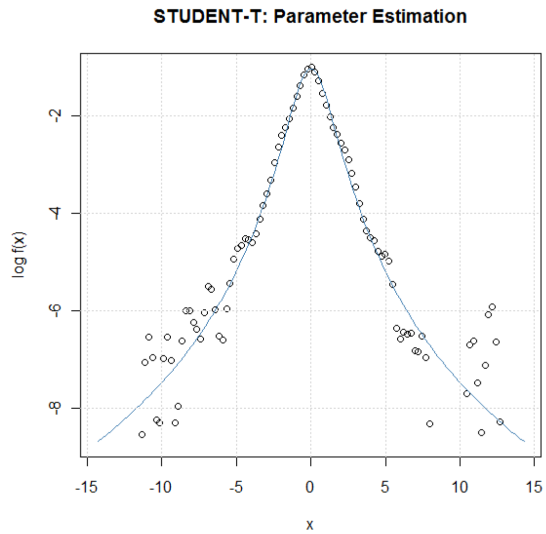
У овом примеру користићемо Студентову расподелу за апроксимацију приноса индекса. Оценићемо број степени слободе ове расподеле, из узорка, користећи функцију *tFit()*[11].

tFit(b15p_uz,3,doplot=TRUE)

Title:
Student-t Parameter Estimation
Call:
tFit(x = b15p_uz, df = 3, doplot = TRUE)
Model:
Student-t Distribution
Estimated Parameter(s):
    df
2.584673

Као резултат добијамо да је оцењени број степени слободе 2.58. Позивом ове функције добијамо и слику на којој је приказана апроксимација функцијом густине Студентове расподеле.

[11] Ова функција се налази у пакету fBasics



Даље, можемо одредити *VaR* пошто смо оценили број степени слободе Студентове расподеле. Потребно је одредити квантил одговарајућег реда ове расподеле. Резултате прикажимо у табели.

$\alpha,\ df = \text{број степени слободе}$	*VaR*
$\alpha = 0.9,\ df = 2.58$	1.71%
$\alpha = 0.95,\ df = 2.58$	2.51%
$\alpha = 0.99,\ df = 2.58$	5.18%

Такође, примењујемо *backtesting* методу. Резултати су дати у табели.

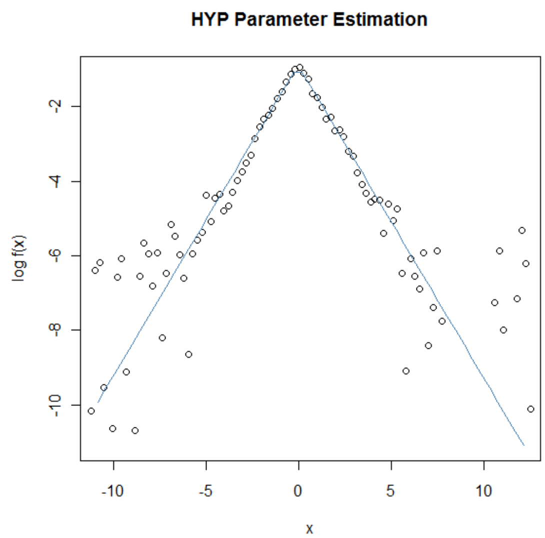
Вероватноћа	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 252
0.1	6	2.045 (0.153)	9	14.997 (0.0001)
0.05	1	4.947 (0.026)	3	10.969 (0.001)
0.01	0	2.01 (0.156)	0	5.065 (0.024)

Тест количника веродостојности је прошао само у случају када је задата вероватноћа 0.01 при упоређивању 100 оцењених вредности при ризику са 100 стварних приноса индекса.

Пример 4.

Претпоставићемо да дневни приноси индекса имају хиперболичку расподелу. Стога је потребно оценити параметре хиперболичке расподеле, α, β, δ и μ. Користићемо функцију *hypFit()*. Добили смо следеће оцене параметара методом максималне веродостојности:

$$\hat{\alpha} = 0.837,\ \hat{\beta} = -0.0004,\ \delta = 0.0457, \hat{\mu} = -0.0338\ .$$



Можемо израчунати и *VaR* за различите нивое вероватноће. Резултате прикажимо у табели[12].

$\alpha - вероватноћа; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\mu}$	*VaR*
$\alpha = 0.1;\ \hat{\alpha} = 0.837,\ \hat{\beta} = -0.0004,\ \hat{\delta} = 0.0457, \hat{\mu} = -0.0338$	-1.960%
$\alpha = 0.05;\ \hat{\alpha} = 0.837,\ \hat{\beta} = -0.0004,\ \hat{\delta} = 0.0457, \hat{\mu} = -0.0338$	-2.788%
$\alpha = 0.01;\ \hat{\alpha} = 0.837,\ \hat{\beta} = -0.0004,\ \hat{\delta} = 0.0457, \hat{\mu} = -0.0338$	-4.712%

У овом случају посматрали смо губитке као негативне вредности, те смо оцењивали одговарајуће квантиле у левом репу расподеле. Резултате

[12] У Додатку се налази програмски код на основу којег су оцењени параметри хиперболичке расподеле и израчунат *VaR*

backtesting методе прикажимо у наредној табели. Са *j* означен је број опсервација које су мање од оцењеног *VaR-a* јер се ради о левом репу расподеле.

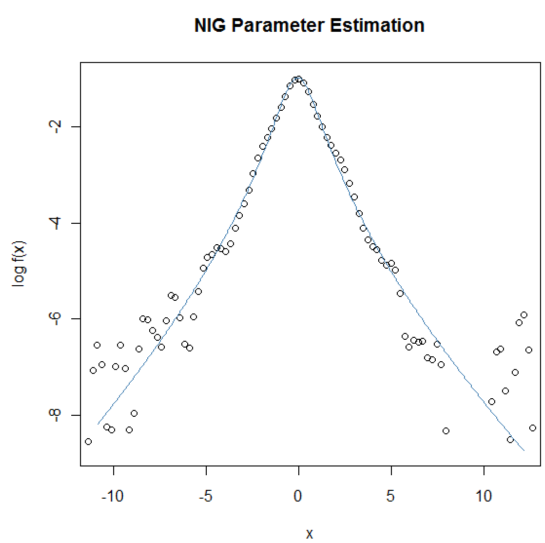
Вероватноћа	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 252
0.1	5	3.3413 (0.0675)	0	53.1017 (0.0000)
0.05	1	4.9472 (0.0261)	0	25.8518 (0.0000)
0.01	0	2.0100 (0.1561)	0	5.0653 (0.0244)

Тест количника веродостојности је прошао само при вероватноћи 0.1 и 0.01 и поређењу 100 оцењених вредности *VaR-a* са 100 стварних приноса.

Пример 5.

Претпоставимо да дневни приноси имају нормалну инверзну Гаусову расподелу (NIG). Помоћу функције *nigFit()* оценимо параметре ове расподеле.

Добијене су следеће оцене, $\hat{\alpha} = 0.3339, \hat{\beta} = 0.0047, \hat{\delta} = 1.0934, \hat{\mu} = -0.0506$.



За различите нивое вероватноће можемо одредити вредност при ризику, након што су оцењени параметри NIG расподеле. Резултате прикажимо у табели.

$\alpha - вероватноћа\,; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\mu}$	*VaR*
$\alpha = 0.1;\ \hat{\alpha} = 0.3339, \hat{\beta} = 0.0047,\ \hat{\delta} = 1.0934, \hat{\mu} = -0.0506$	-1.843%
$\alpha = 0.05;\ \hat{\alpha} = 0.3339, \hat{\beta} = 0.0047,\ \hat{\delta} = 1.0934, \hat{\mu} = -0.0506$	-2.741%
$\alpha = 0.01;\ \hat{\alpha} = 0.3339, \hat{\beta} = 0.0047,\ \hat{\delta} = 1.0934, \hat{\mu} = -0.0506$	-5.290%

У *backtesting* методи, применом различитих нивоа вероватноће 0.1, 0.05 и 0.01 као и различитих обима оцењених будућих вредности *VaR*-а (обима 100 и 252), добијени су следећи резултати:

Вероватноћа	j	*Количник вероդостојности* (p-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 252
0.1	6	2.0452 (0.1526)	10	12.9114 (0.0003)
0.05	1	4.9472 (0.0261)	3	10.9694 (0.0009)
0.01	0	0.0000 (2.0100)	0	5.0653 (0.0244)

Тест количника веродостојности је прошао само при вероватноћи 0.1 и 0.01 и то при упоређивању 100 оцењених вредности *VaR*-а са 100 стварних вредности приноса.

Пример 6.

У овом примеру претпоставићемо да дневни приноси индекса имају стабилну расподелу. Помоћу функције *stableFit()* оценићемо параметре стабилне расподеле. Резултати оцене применом метода максималне веродостојности су следеће, $\hat{\alpha} = 1.401,\ \hat{\beta} = 0.02,\ \hat{\gamma} = 0,7815,\ \hat{\delta} = -0.0346$.

Одређујемо *VaR*, за различите нивое вероватноће, који представља оцену квантила стабилне расподеле. У табели су приказани резултати.

$\alpha - вероватнoћa\,;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\delta},\hat{\mu}$	*VaR*
$\alpha = 0.1;\hat{\alpha} = 1.401,\ \hat{\beta} = 0.02,\ \hat{\gamma} = 0{,}7815,\ \hat{\delta} = -0.0346$	-1.704%
$\alpha = 0.05;\hat{\alpha} = 1.401,\ \hat{\beta} = 0.02,\ \hat{\gamma} = 0{,}7815,\ \hat{\delta} = -0.0346$	-2.629%
$\alpha = 0.01;\hat{\alpha} = 1.401,\ \hat{\beta} = 0.02,\ \hat{\gamma} = 0{,}7815,\ \hat{\delta} = -0.0346$	-7.452%

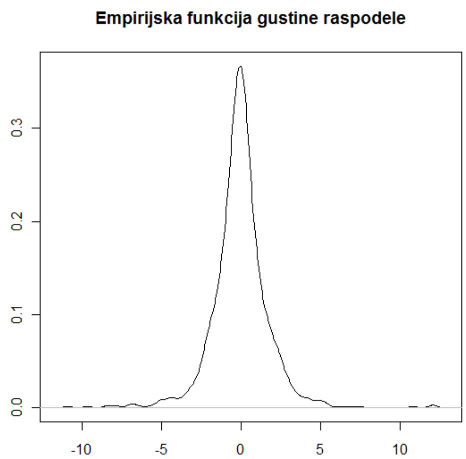
Резултате *backtesting*-а прикажимо у табели.

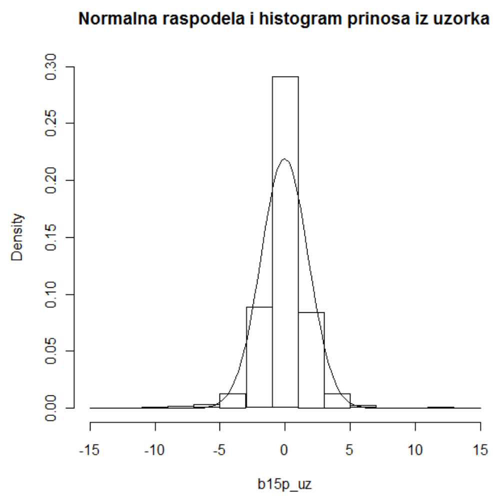
Вероватноћа	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 252
0.1	6	2.0452 (0.1526)	10	12.9114 (0.0003)
0.05	1	4.9472 (0.0261)	3	10.9694 (0.0009)
0.01	0	2.0100 (0.1562)	0	5.0653 (0.0244)

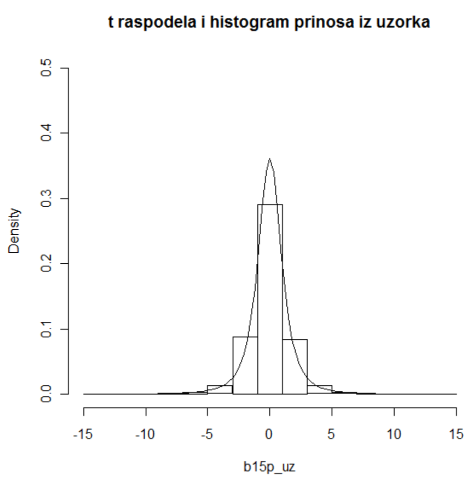
Тест количника веродостојности је прошао само при вероватноћи 0.1 и 0.01 и то код поређења 100 оцењених вредности *VaR*-а и 100 стварних вредности приноса.

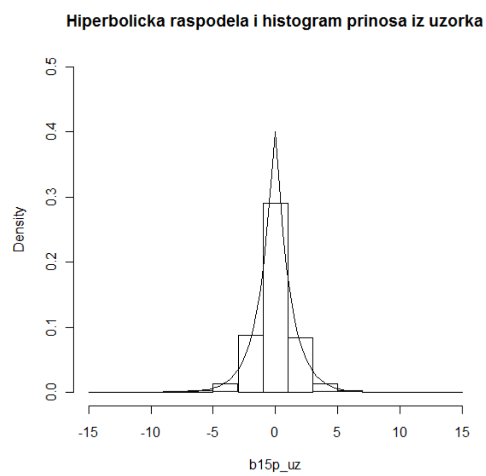
На наредним сликама можемо видети како изгледа густина емпиријске расподеле дневних приноса, као и неке апроксимације теоријским расподелама: нормалном, Студентовом, хиперболичком, нормалном инверзном Гаусовом расподелом, стабилном расподелом[13].

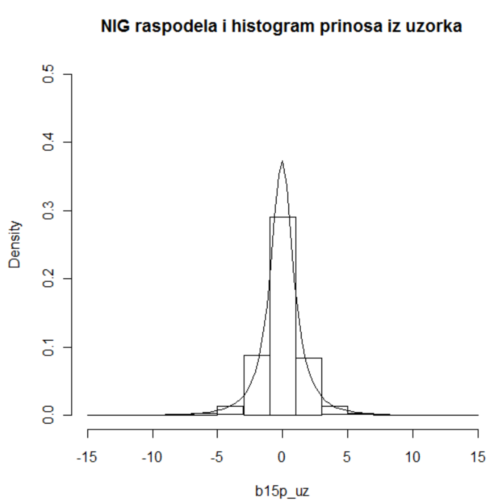
[13] Програмски код којим је ово описано налази се у Додатку. Потребно је учитати пакет fBasics

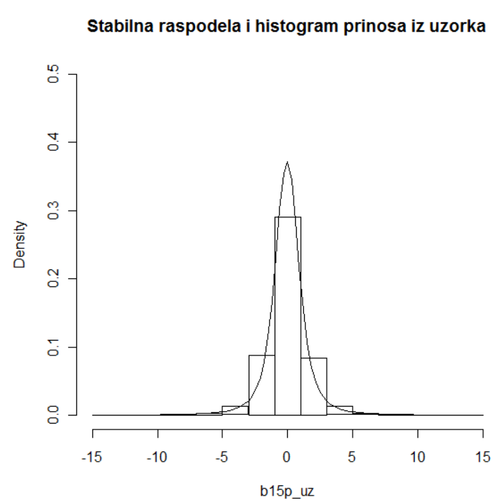

Empirijska funkcija gustine raspodele


Normalna raspodela i histogram prinosa iz uzorka
Density
b15p_uz


t raspodela i histogram prinosa iz uzorka
Density
b15p_uz

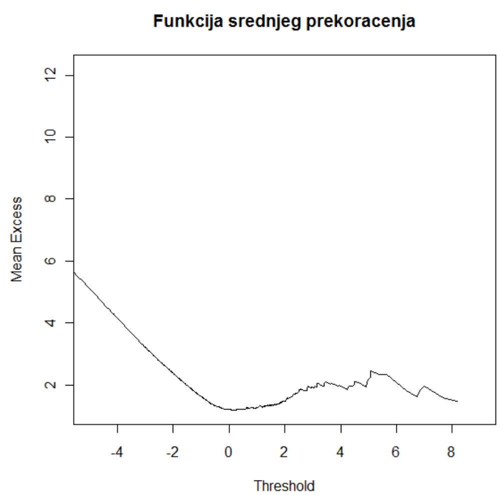

Hiperbolicka raspodela i histogram prinosa iz uzorka
Density
b15p_uz


NIG raspodela i histogram prinosa iz uzorka
Density
b15p_uz


Stabilna raspodela i histogram prinosa iz uzorka
Density
b15p_uz

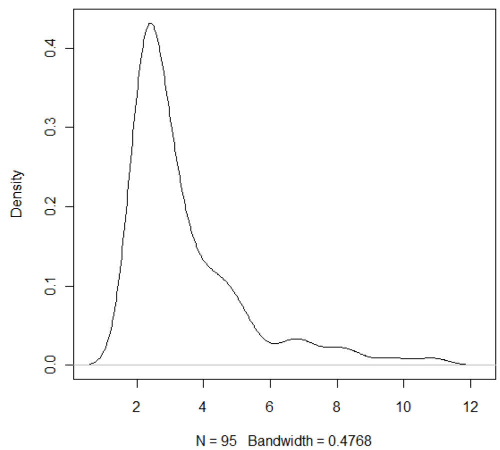
Пример 7.

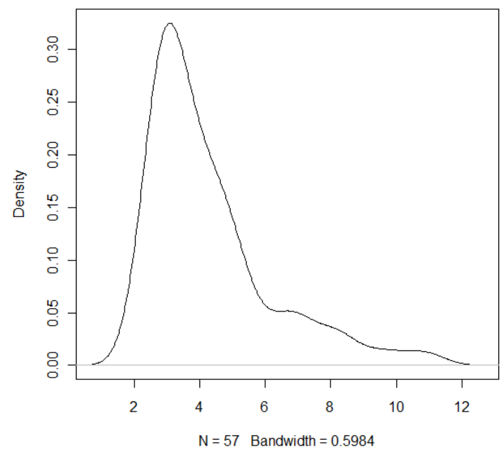
У овом примеру користићемо теорију екстремних вредности да бисмо оценили параметар вредности при ризику. Прво је потребно дефинисати скуп екстремних података. Изабран је метод прекорачења прага и то семи-параметарски приступ описан у одељку 2.2. Овај приступ користи генерализовану Паретову расподелу и другу фундаменталну теорему теорије екстремних вредности. Све дневне стопе приноса су помножене са -1, на тај начин можемо говорити о губицима као позитивним величинама, те има смисла рећи да је губитак већи од оцењеног VaR-а.



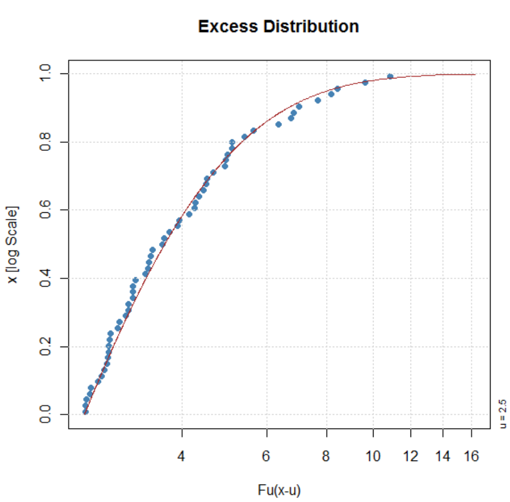
Извршићемо и анализу графичког приказа функције средњег прекорачења[14]. Са графика можемо закључити да функција линеарно расте од вредности које се налазе у интервалу [2, 2.5]. Зато ћемо посматрати два прага, $u = 2, u = 2.5$. Утврђено је да је 95 вредности веће од прага $u = 2$, а 57 вредности је веће од прага $u = 2.5$. На сликама су приказане емпиријске густине у случају када је обим скупа 95 и 57.

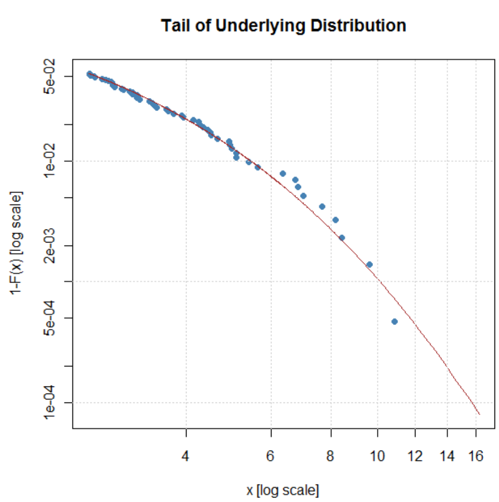
[14] Да бисмо користили ову функцију R-у потребно је учитати пакет evir

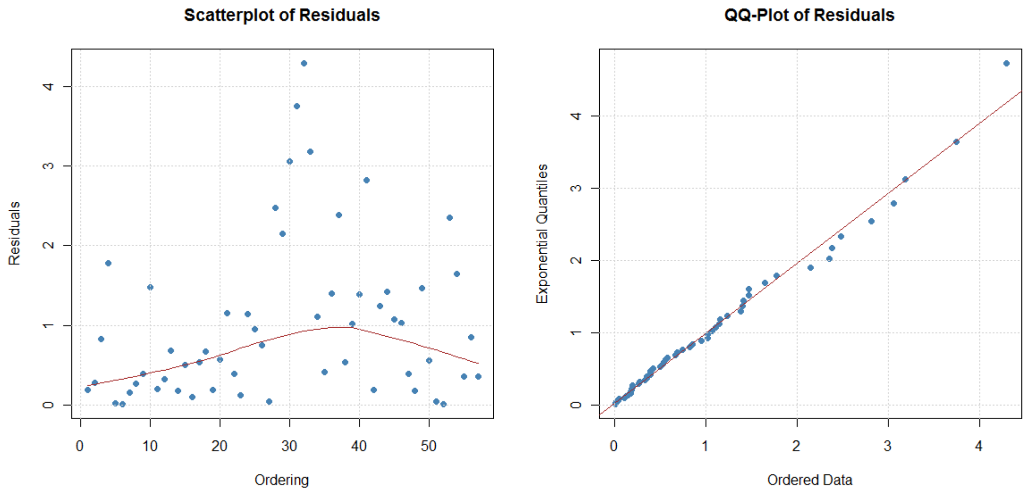




За ова два скупа прекорачења високог прага методом максималне веродостојности добијене су оцене генерализоване Паретове расподеле. За праг $u = 2$ и скуп обима 95, оцене су $\hat{\gamma} = 0.312,\ \hat{\beta} = 1.035$, а за праг $u = 2.5$ и скуп обима 57, оцене су $\hat{\gamma} = 0.073,\ \hat{\beta} = 1.656$. На наредним графицима приказани су резултати добијени приликом оцене параметара генерализоване Паретове расподеле на скупу обима 57. Приказана је расподела прекорачења, график резидуала. Видимо да је расподела прекорачења високог прага добро апроксимирана Фрешеовом расподелом, како је $\gamma > 0$.







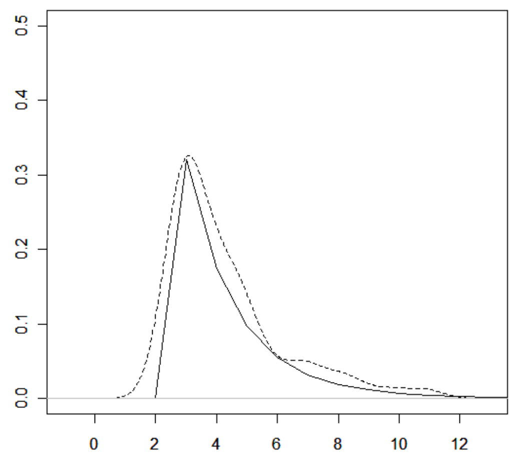
Вредност при ризику се за задату вероватноћу α добија по формули:

$$\hat{VaR}_{\alpha}(X) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\gamma}} - 1\right)$$

Где је u високи праг, n обим узорка, N_u број опсервација које су веће од изабраног прага u. Прикажимо резултате оцене VaR параметра у табели.

Број прекорачења високог прага	95 (за праг $u = 2$)	57 (за праг u=2.5)
Оцене параметара генерализоване Паретове расподеле	$\hat{\gamma} = 0.312,\ \hat{\beta} = 1.035$	$\hat{\gamma} = 0.073,\ \hat{\beta} = 1.656$
$VaR,\ \alpha = 0.95$	2.65%	2.59%
$VaR,\ \alpha = 0.99$	5.23%	5.44%

На слици је приказана апроксимација функције густине емпиријске расподеле скупа обима 57, густином Фрешеове расподеле.



Примењујемо *backtesting* метод. Посматраћемо два случаја. Први, када је изабрани праг u=2.5, и други, када је праг u=2. Резултате приказујемо у две табеле. За изабрани праг u=2.5, различите нивое вероватноће 0.1, 0.05 и 0.01 као и различите обиме прогнозираних будућих вредности *VaR*-а, 100 и 252, резултати су следећи:

Вероватноћа	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 252
0.1	8	0.4738 (0.4912)	11	11.0342 (0.0008)
0.05	1	4.9472 (0.0261)	3	10.9694 (0.0009)
0.01	0	2.01 (0.1562)	0	5.0653 (0.0244)

За изабрани праг u=2, различите нивое вероватноће 0.1, 0.05 и 0.01 као и различите обиме прогнозираних будућих вредности *VaR*-а, 100 и 252, добијамо следеће резултате:

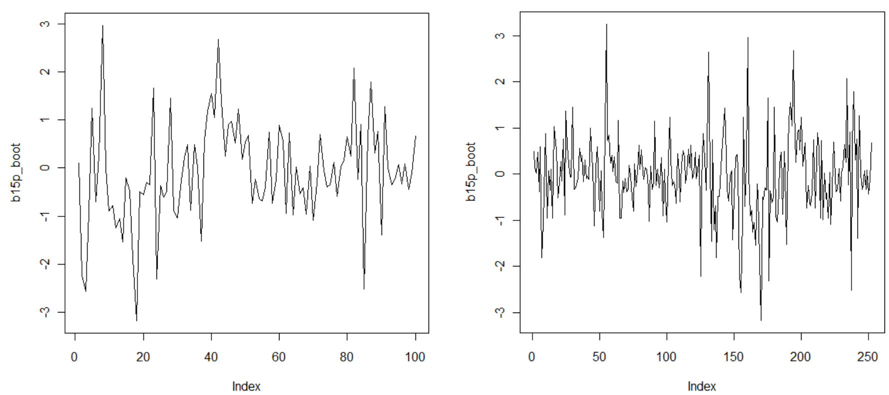
Вероватноћа	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 100	j	*Количник веродостојности* (p-вредност), 252
0.1	17	4.6004 (0.0319)	34	3.1130 (0.0776)
0.05	5	0.0000 (1.0000)	6	4.4770 (0.0343)
0.01	0	2.0100 (0.1562)	0	5.0653 (0.0244)

На основу горе наведених примера закључујемо да је највећа оцењена вредност при ризику у случајевима апроксимације дневних приноса индекса стабилном расподелом, нормалном инверзном Гаусовом расподелом као и применом теорије екстремних вредности. Најмања оцена вредности при ризику је добијена користећи се претпоставком да приноси имају нормалну расподелу, као што је и очекивано.

Кроз ове примере, на основу теста количника веродостојности закључујемо да упоређивањем 252 оцењене вредности вредности при ризику и исто толико стварних приноса, ниједна од апроксимација се није показала добром. Упоређивањем 100 оцењених вредности при ризику и 100 стварних дневних приноса многе од апроксимација су се показале као добре за различите нивое вероватноће (апроксимација Студентовом расподелом, хиперболичком, нормалном инверзном Гаусовом, стабилном расподелом). Примена теорије екстремних вредности се такође показала добром јер смо дневне приносе успели да апроксимирамо Фрешеовом расподелом.

На слици лево приказано је кретање дневних приноса индекса, укупно њих 100. Ово су стварни подаци са којима је поређено 100 оцењених вредности при ризику. Минимална вредност међу ових 100 стварних дневних приноса је -3,18%. На слици десно је график кретања 252 дневна приноса, тј.

забележено кретање приноса током годину дана. Са овим вредностима су такође поређене оцењене вредности при ризику, њих укупно 252. Највећи остварени губитак током 252 дана је такође -3,18%.



Закључујемо да су у прошлости забележени већи губици него у будућности, која је мање волатилна. Треба узети у обзир и сам обим узорка на основу којег је вршена оцена вредности при ризику, као и то да екстремне вредности, којих је било више, из самог узорка нису елиминисане. Све ово као и чињеница да је наше финансијско тржиште у развоју има утицаја на коначне оцене вредности при ризику, као и саме резултате *backtesting* методе.

Додатак

Програм који је коришћен у обради података је статистички софтвер R 2.13.1.
Наредним поступком учитавамо базу података о кретању вредности индекса BELEX 15 у периоду од 4.10.2005. до 10.01.2011.

```
b15c<-read.table("D:/matematika/VaR_mle/folder sa kodovima i
bazama/belex15c.txt",header=T)
```

Са b15p означили смо базу која садржи приносе кретања вредности индекса, b15p_uz представља базу података о приносима кретања индекса која има 1074 података, јер 100 (252) података о приносима користимо за backtesting.

```
b15p<-read.table("D:/matematika/VaR_mle/folder sa kodovima i
bazama/belex15p.txt",header=T)
b15p_uz<-b15p$Prinosi[501:length(b15p$Prinosi)]
b15p_boot<-b15p$Prinosi[401:500]
length(b15p_uz)
[1] 1074
 length(b15p_boot)
[1] 100
```

Помоћу функција *skewness()* и *kurtosis()* одређујемо коефицијенте асиметрије и спљоштености. Позивањем ових функција уз одговарајуће аргументе добијамо тражене коефицијенте

```
skewness<-function(n,a){
```

```
sr_vr<-sum(a)/n
suma1<-sum((a-sr_vr)^3)
suma2<-sum((a-sr_vr)^2)
kolicnik<-((1/n)*suma1)/(((1/n)*suma2)^(3/2))
return(kolicnik)}
S<-skewness(1074,b15p_uz)
S
[1] 0.1677763

kurtosis<-function(n,a){
sr_vr<-sum(a)/n
suma1<-sum((a-sr_vr)^4)
suma2<-sum((a-sr_vr)^2)
kolicnik<-((1/n)*suma1)/(((1/n)*suma2)^2)
return(kolicnik-3)}
K<-kurtosis(1074,b15p_uz)
K
[1] 8.260994
```

У пакету tseries, програма R 2.13.1 , налази се уграђена функција за Жарк-Бера тест нормалности. Позивом ове функције чији је аргумент база података о приносима (њих 1074) као резултат даје, између осталог, p-вредност теста.

```
jarque.bera.test(b15p_uz)
  Jarque Bera Test
data:  b15p_uz
X-squared = 3058.958, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

У наредним корацима одредићемо средњу вредност, стандардну девијацију, минималну и максималну вредност узорка приноса.

```
round(mean(b15p_uz),2)
[1] -0.04
round(sqrt(var((b15p_uz))),2)
[1] 1.82
min(b15p_uz)
[1] -10.86
max(b15p_uz)
[1] 12.16
```

Функцију plot() користимо за цртање, помоћу ње можемо приказати кретање индекса током временена као и кретање приноса на индекс током времена.

```
plot(log(b15c_uz),type="l",main="Indeks Belex 15 (log)",xlab="broj opservacija",ylab="")
plot(b15p_uz,type="l",main="Dnevna stopa prinosa indeksa Belex 15",xlab="broj opservacija",ylab="")
```

Функција hist() црта хистограм дневних приноса индекса.

```
hist(b15p_uz,main="Histogram dnevnih prinosa indeksa Belex 15",xlab="",ylab="")
```

Функција boxplot() црта боксплот, а qqnorm() уређене парове квантила емпиријске и стандардне нормалне расподеле.

```
boxplot(b15p_uz,main="Boksplot dijagram",xlab="",ylab="")
qqnorm(b15p_uz,main="QQ dijagram u odnosu na standardnu normalnu raspodelu")
abline(0,1)
```

Функција qqplot() црта уређене парове квантила емпиријске и задате теоријске расподеле, у овом случају експоненцијалне расподеле.

qqplot(b15p_uz,exp,main="QQ dijagram u odnosu na exp raspodelu
(lambda=1)",xlab="",ylab="")
abline(0,1)

Када се оцене параметри нормалне расподеле методом максималне веродостојности може се прећи на одређивање *VaR* за различите нивое вероватноће, 0.9, 0.95 и 0.99. Функција qnorm() за задати аргумент, вероватноћу, враћа одговарајући квантил стандардне нормалне расподеле.

-0.04+qnorm(0.9)*1.82
[1] 2.292424
-0.04+qnorm(0.95)*1.82
[1] 2.953634
-0.04+qnorm(0.99)*1.82
[1] 4.193953

Када се оцени број степени слободе Студентове расподеле, прелазимо на одређивање *VaR*-а за различите вероватноће, 0.9, 0.95 и 0.99.

qt(0.9,2.584673)
[1] 1.711405

qt(0.95,2.584673)
[1] 2.51583

qt(0.99,2.584673)
[1] 5.178952

У наредним корацима обављен је backtesting поступак Оцењујемо 100 вредности при ризику при вероватноћи 0.05. Слично и за остале нивое вероватноће и други обим предвиђања, обим 252.

```
fja<-function{
        ss<-c()
        ss<-c(ss,2.454515)# вредност 2.45 одговара броју степени слободе
         for(i in 1:100){ #оцењује се број степени слободе сваки пут када се
        #узорак прошири за 1
        #b15p_uz је нови узорак који проширујемо за по један члан
        b15p_uz<-c(b15p_uz,b15p_boot[i])
        t=tFit(b15p_uz,doplot=FALSE)
        ssl=t@fit$estimate
        #ssl узима нумеричку вредност, оцењен број степени слободе, јер ф-ја
        #tFit враћа и друге вредности поред ове
        ss<-c(ss,ssl[[1]])
        i<-i+1}
        #ss је низ оцењених степени слободе
return(ss)}

VaRt<-c()
for(i in 1:100){
VaRt<-c(VaRt,qt(0.05,ss[i]))}#израчунава се VaR 100 пута на основу узорка
#обима 1074, 1074+1,…

fja2<-function{ #ф-ја која испитује колико пута је дошло до прекорачења
#оцењеног VaR-a
        j<-0
        for(i in 1:100){
        if (VaRt[i]>b15p_boot[i])
        j<-j+1
        i<-i+1}
```

```
return (j)}

 j #број прекорачења
#[1] 1

n<-1
 T<-100
 p<-n/T
 pu<-0.05
#примењујемо Kupiec-ов тест количника веродостојности
 LR1<--2*(log((pu^n)*((1-pu)^(T-n)))-log((p^n)*((1-p)^(T-n))))
 p.value1<-1-pchisq(LR1,df=1)

 p.value1 #p-вредност теста
[1] 0.02613251
 LR1
[1] 4.94723
```

У наредном кораку оцењујемо параметре хиперболичке расподеле. Кориситмо функцију *hypFit().*

```
bp<-b15p_uz
# ф-ја hypFit захтева унос почетних параметара, по default-у су то alpha = 1,
#beta = 0, delta = 1
hypFit(bp, alpha = 1, beta = 0, delta = 1, mu = mean(bp), doplot = TRUE, width =
0.5)

Title:
Hyperbolic Parameter Estimation
Call:
```

```
hypFit(x = bp, alpha = 1, beta = 0, delta = 1, mu = mean(bp),
   doplot = TRUE, width = 0.5)
Model:
Hyperbolic Distribution
Estimated Parameter(s):
      alpha            beta             delta               mu
 0.8374543445 -0.0004606578  0.0457223706 -0.0338694386
```

Помоћу функције *qhyp()* одређујемо квантил хиперболичке расподеле за задату вероватноћу, 0.1, 0.05 и 0.01.

```
qhyp(p=0.1,alpha=0.8374543445,beta=-0.0004606578,delta=0.0457223706,mu=-0.0338694386)
[1] -1.960438

qhyp(p=0.05,alpha=0.8374543445,beta=-0.0004606578,delta=0.0457223706,mu=-0.0338694386)
[1] -2.788665

qhyp(p=0.01,alpha=0.8374543445,beta=-0.0004606578,delta=0.0457223706,mu=-0.0338694386)
[1] -4.71164
```

Наредни програмски код коришћен је за backtesting и при претпоставци да приноси имају хиперболичку расподелу.

```
 fja<-function{
          x<-c()
```

```
#у низове a, b, d и m смештамо оцењене вредности за alpha, beta, delta, mu
#које сваки пут оцењујемо. Прво из узорка обима 1074, па 1074+1,
#1074+2,…1074+100 (или 1074+252)
        a<-c()
        a<-c(a,0.83745)
        b<-c()
        b<-c(b,-0.00046)
        d<-c()
        d<-c(d,0.04572)
        m<-c()
        m<-c(m,-0.033869)
        for(i in 1:100){
        b15p_uz<-c(b15p_uz,b15p_boot[i])
        hip=hypFit(b15p_uz,alpha=1,beta=0,delta=1,mu=mean(b15p_uz),doplot=
FALSE)
# ss узима вредност за оцене сва четири параметра, посебно се ознакама
#[[1]], [[2]], [[3]], [[4]] издвајају оцене
        ss=hip@fit$estimate
        a<-c(a,ss[[1]])
        b<-c(b,ss[[2]])
        d<-c(d,ss[[3]])
        m<-c(m,ss[[4]])
        i<-i+1}
x<-c(a,b,d,m)
 return(x)}

length(x)
#[1] 404
```

```
VaRh<-c()
for(i in 1:100){
#у низу VaRh су оцењене вредности квантила хиперболичке расподеле реда
#0.1, укупно њих 100
VaRh<-
c(VaRh,qhyp(0.1,alpha=x[i],beta=x[i+101],delta=x[i+202],mu=x[i+303]))}

fja2<-function{
#ова ф-ја испитује колико је стварних приноса прекорачило оцењени VaR
        j<-0
        for(i in 1:100){
        if (VaRh[i]>b15p_boot[i])
        j<-j+1
        i<-i+1}
return (j)}

 j #број прекорачења
#[1] 5

 n<-5
 T<-100
 p<-n/T
 pu<-0.1
#примењујемо Kupiec-ов тест количника веродостојности
 LR1<--2*(log((pu^n)*((1-pu)^(T-n)))-log((p^n)*((1-p)^(T-n))))
#одређујемо p-вредност теста
 p.value1<-1-pchisq(LR1,df=1)

 LR1
```

```
[1] 3.3413
  p.value1
[1] 0.0675612
```

Функција *nigFit()* се користи за оцену параметара нормалне инверзне Гаусове расподеле.

```
bp<-b15p_uz
#ф-ја nigFit захтева да се унесу почетне вредности за параметре alpha, beta,
#delta и то су по default-у alpha = 1, beta = 0, delta = 1
nigFit(bp, alpha = 1, beta = 0, delta = 1, mu = mean(bp), doplot = TRUE)

Title:
Normal Inverse Gaussian Parameter Estimation
Call:
.nigFit.mle(x = x, alpha = alpha, beta = beta, delta = delta,
    mu = mu, scale = scale, doplot = doplot, span = span, trace = trace,
    title = title, description = description)
Model:
 Normal Inverse Gaussian Distribution
Estimated Parameter(s):
      alpha         beta        delta          mu
 0.333909472  0.004725413  1.093469360 -0.050662372
```

Помоћу функције *qnig()* оцењујемо квантил нормалне инверзне Гаусове расподеле за задати ниво вероватноће, 0.1, 0.05 и 0.01.

```
qnig(p=0.1,alpha=0.333909472,beta=0.004725413,delta=1.093469360,mu=-
0.050662372)
[1] -1.843438
```

```
qnig(p=0.05,alpha=0.333909472,beta=0.004725413,delta=1.093469360,mu=-
0.050662372)
[1] -2.741748

qnig(p=0.01,alpha=0.333909472,beta=0.004725413,delta=1.093469360,mu=-
0.050662372)
[1] -5.29052
```

Наредни програмски код се односи на backtesting метод, при чему је претпоставка да дневни приноси имају нормалну инверзну Гаусову расподелу.

```
fja<-function{
#у низове a, b, d и m смештамо оцењене вредности за alpha, beta, delta, mu
#које сваки пут оцењујемо. Прво из узорка обима 1074, па 1074+1,
#1074+2,…1074+100 (или 1074+252)
        x<-c()
        a<-c()
        a<-c(a,0.3339)
        b<-c()
        b<-c(b,0.0047)
        d<-c()
        d<-c(d,1.0934)
        m<-c()
        m<-c(m,-0.0506)
        for(i in 1:100){
        b15p_uz<-c(b15p_uz,b15p_boot[i])
        nig=nigFit(b15p_uz,alpha=1,beta=0,delta=1,mu=mean(b15p_uz),doplot=F
ALSE)
```

```
        ss=nig@fit$estimate
# ss узима вредност за оцене сва четири параметра, посебно се ознакама
#[[1]], [[2]], [[3]], [[4]] издвајају оцене
        a<-c(a,ss[[1]])
        b<-c(b,ss[[2]])
        d<-c(d,ss[[3]])
        m<-c(m,ss[[4]])
        i<-i+1}
x<-c(a,b,d,m)
 return(x)}

length(x)
#у низу x се налазе оцене параметара alpha, beta, delta, mu
#[1] 404

VaRn<-c()
for(i in 1:100){
#у низу VaRn су оцењене вредности квантила нормалне инверзне Гаусове
#расподеле реда 0.1, укупно њих 100
VaRn<-
c(VaRn,qnig(0.1,alpha=x[i],beta=x[i+101],delta=x[i+202],mu=x[i+303]))}

fja2<-function{
#ова ф-ја испитује колико пута су стварни приноси прекорачили оцењени
#VaR
        j<-0
        for(i in 1:100){
        if (VaRn[i]>b15p_boot[i])
        j<-j+1
```

```
    i<-i+1}
return (j)}

 j #број прекорачења
#[1] 6

 n<-6
 T<-100
 p<-n/T
 pu<-0.1
#за задату вероватноћу, број прекорачења, примењујемо Kupiec-ов тест
#количника веродостојности
 LR1<--2*(log((pu^n)*((1-pu)^(T-n)))-log((p^n)*((1-p)^(T-n))))
 p.value1<-1-pchisq(LR1,df=1)

 LR1
[1] 2.045294
#p-вредност теста
 p.value1
[1] 0.1526775
```

Функција *stableFit()* оцењује параметре стабилне расподеле за дати узорак дневних приноса индекса.

```
#ф-ја stableFit захтева да се унесу почетни параметри за alpha, beta, gamma,
#delta како би могли бити оцењени. По default-у ове вредности су alpha =
#1.75, beta = 0, gamma = 1, delta = 0
stableFit(bp, alpha = 1.75, beta = 0, gamma = 1, delta = 0, doplot = TRUE, title =
NULL, description = NULL)
Title:
```

```
 Stable Parameter Estimation
Call:
 .qStableFit(x = x, doplot = doplot, title = title, description = description)
Model:
 Stable Distribution
Estimated Parameter(s):
      alpha        beta       gamma       delta
 1.40100000  0.02000000  0.78157428 -0.03464869
```

Функција qstable() оцењује квантил стабилне расподеле за задату вероватноћу и вредност параметара стабилне расподеле. Изабране вероватноће су 0.1, 0.05 и 0.01.

```
qstable(p=0.1,alpha=1.401,beta=0.02,gamma=0.78157428,delta=-0.03464869)
[1] -1.703778
attr(,"control")
   dist  alpha beta     gamma       delta pm
 stable 1.401 0.02 0.7815743 -0.03464869  0

qstable(p=0.05,alpha=1.401,beta=0.02,gamma=0.78157428,delta=-0.03464869)
[1] -2.629584
attr(,"control")
   dist  alpha beta     gamma       delta pm
 stable 1.401 0.02 0.7815743 -0.03464869  0

qstable(p=0.01,alpha=1.401,beta=0.02,gamma=0.78157428,delta=-0.03464869)
[1] -7.451873
attr(,"control")
   dist  alpha beta     gamma       delta pm
 stable 1.401 0.02 0.7815743 -0.03464869  0
```

Наредни програмски код односи се на backtesting метод, уз претпоставку да дневни приноси прате стабилну расподелу.

```
fja<-function{
#у низове a, b, d и m смештамо оцењене вредности за alpha, beta, gamma,
#delta које сваки пут оцењујемо. Прво из узорка обима 1074, па 1074+1,
#1074+2,…1074+100 (или 1074+252)
	x<-c()
	a<-c()
	a<-c(a,1.401)
	b<-c()
	b<-c(b,0.02)
	d<-c()
	d<-c(d,0.7815)
	m<-c()
	m<-c(m,-0.0346)
	for(i in 1:100){
	b15p_uz<-c(b15p_uz,b15p_boot[i])
	st=stableFit(b15p_uz,alpha=1.75,beta=0,gamma=1,delta=0,doplot=FALS
E)
	ste=st@fit$estimate
# ste узима вредност за оцене сва четири параметра стабилне расподеле,
#посебно се ознакама [[1]], [[2]], [[3]], [[4]] издвајају оцене
	a<-c(a,ste[[1]])
	b<-c(b,ste[[2]])
	d<-c(d,ste[[3]])
	m<-c(m,ste[[4]])
	i<-i+1}
x<-c(a,b,d,m)
```

```
 return(x)}

length(x)
#у низу x се налазе оцене параметара alpha, beta, gamma, delta
[1] 404

VaRs<-c()
for(i in 1:100){
#у низу VaRs су оцењене вредности квантила стабилне расподеле реда 0.1,
#укупно њих 100
VaRs<-
c(VaRs,qstable(0.1,alpha=x[i],beta=x[i+101],gamma=x[i+202],delta=x[i+303]))}

fja2<-function{
#ова ф-ја испитује колико пута су стварни приноси прекорачили оцењени
#VaR
	j<-0
	for(i in 1:100){
	if (VaRs[i]>b15p_boot[i])
	j<-j+1
	i<-i+1}
return (j)}
 j  #број прекорачења
[1] 6

n<-6
T<-100
p<-n/T
pu<-0.1
```

```
#за задату вероватноћу, број прекорачења, примењујемо Kupiec-ов тест
#количника веродостојности
LR1<--2*(log((pu^n)*((1-pu)^(T-n)))-log((p^n)*((1-p)^(T-n))))
p.value1<-1-pchisq(LR1,df=1)

 LR1
[1] 2.045294
 p.value1
[1] 0.1526775
```

Наредни програмски кодови се односе на цртање емпиријских и теоријских функција густине (нормалне, Студентове, хиперболичке, нормалне инверзне Гаусове, стабилне расподеле), као и хистограма емпиријских података-дневних приноса индекса.

```
d<-density(b15p_uz)
plot(d,main="Empirijska funkcija gustine raspodele",xlab="",ylab="")

x=seq(-15,15,2)
hist(b15p_uz,probability=TRUE,breaks=c(-15,-13,-11,-9,-7,-5,-3,-
1,1,3,5,7,9,11,13,15),ylim=c(0,0.5),main="t raspodela i histogram prinosa iz
uzorka")
curve(dt(x,df=2.454517),add=TRUE)

x=seq(-15,15,2)
hist(b15p_uz,probability=TRUE,breaks=c(-15,-13,-11,-9,-7,-5,-3,-
1,1,3,5,7,9,11,13,15),ylim=c(0,0.5),main="Hiperbolicka raspodela i histogram
prinosa iz uzorka")
curve(dhyp(x,alpha=0.8374543445,beta=-
0.0004606578,delta=0.0457223706,mu=-0.0338694386),add=TRUE)
```

```
x=seq(-15,15,2)
hist(b15p_uz,probability=TRUE,breaks=c(-15,-13,-11,-9,-7,-5,-3,-
1,1,3,5,7,9,11,13,15),ylim=c(0,0.5),main="NIG raspodela i histogram prinosa iz
uzorka")
curve(dnig(x,alpha=0.333909472,beta=0.004725413,delta=1.093469360,mu=-
0.050662372),add=TRUE)
x=seq(-15,15,2)
hist(b15p_uz,probability=TRUE,breaks=c(-15,-13,-11,-9,-7,-5,-3,-
1,1,3,5,7,9,11,13,15),ylim=c(0,0.5),main="Stabilna raspodela i histogram prinosa
iz uzorka")
curve(dstable(x,alpha=1.401,beta=0.02,gamma=0.78157428,delta=-
0.03464869),add=TRUE)
```

Функција средњег прекорачења је *meplot()*.

```
meplot(b15p_negat,type="l",main="Funkcija srednjeg prekoracenja",xlim=c(-
5,9))
```

За изабране прагове 2 и 2.5 одређујемо која су настала прекорачења.

```
prag_indeksi<-c(which(b15p_negat>2))
prekoracenja<-c(b15p_negat[prag_indeksi])
```

Утврђујемо колико има таквих прекорачења високог прага.

```
prag_indeksi<-c(which(b15p_negat>2.5))
prekoracenja1<-c(b15p_negat[prag_indeksi])
```

Наредне функције цртају емпиријске густине за два скупа обима 95 и 57.

```
plot(density(prekoracenja),main="")
plot(density(prekoracenja1),main="")
```

Оцењујемо параметре генерализоване Паретове расподеле методом максималне веродостојности када је изабрани праг 2.

```
fit2=gpdFit(b15p_negat,u=2,method="mle")
print(fit2)
Title:
  GPD Parameter Estimation

Call:
 gpdFit(x = b15p_negat, u = 2, method = "mle")
Estimation Method:
  gpd mle
Estimated Parameters:
       xi      beta
0.3124462 1.0354672
```

Оцењујемо параметре генерализоване Паретове расподеле методом максималне веродостојности помоћу ф-је gpdFit када је изабрани праг 2.5.

```
fit25=gpdFit(b15p_negat,u=2.5,method="mle")
print(fit25)

Title:
  GPD Parameter Estimation
Call:
 gpdFit(x = b15p_negat, u = 2.5, method = "mle")
Estimation Method:
  gpd mle
Estimated Parameters:
        xi       beta
0.07334495 1.65591694
```

Креирамо функцију која одређује вредност при ризику за задате параметре: вероватноћу, праг, обим узорка, обим прекорачења високог прага, параметре генерализоване Паретове расподеле и називамо је VaRf.

```
VaRf<-function(p,u,n,Nu,gama,beta){
u+(beta/gama)*(((n/Nu)*(1-p))^(-gama)-1)}

#позивамо ф-ју VaRf  за различите вероватноће, праг u=2.5, обим узорка,
#број прекорачења и параметре расподеле гама и бета
VaRf(0.95,2.5,length(b15p_negat),length(prekoracenja1),0.07334495,1.65591694
)
[1] 2.598972
VaRf(0.99,2.5,length(b15p_negat),length(prekoracenja1),0.07334495,1.65591694
)
[1] 5.440144
```

Наредни програмски код описује backtesting.

```
fja<-function{
#у низове xi, beta смештамо оцењене параметре генерализоване Паретове
#расподеле
        xi<-c()
        xi<-c(xi,0.07334495)
        beta<-c()
        beta<-c(beta,1.65591694)
        for(i in 1:100){
        #сваки пут када проширујемо узорак за 1, множимо дату вредност са
        #-1 јер нас интересују губици изражени као позитивне вредности
        b15p_negat<-c(b15p_negat,b15p_boot[i]*(-1))
        fit25=gpdFit(b15p_negat,xi=1,mu=0,beta=1)
        xi<-c(xi,fit25@fit[1]$par.ests[[1]])
```

```
        beta<-c(beta,fit25@fit[1]$par.ests[[2]])
        i<-i+1}
x<-c(xi,beta)
 return(x)}
#у низу x се налазе оцењене вредности параметара гама и бета
length(x)
[1] 1002
VaRf<-function(p,u,n,Nu,gama,beta){
u+(beta/gama)*(((n/Nu)*(1-p))^(-gama)-1)}

N_u<-c(57) #број прекорачења високог прага
b15p_negat<-b15p_uz*(-1)
for(i in 1:100){
#за сваки нови додат члан узорка испитујемо да ли је прекорачио изабрани
#високи праг 2.5 и у низу N_u бележимо број прекорачења који се повећава
#или остаје исти након додатка новог члана у узорак
        b15p_negat<-c(b15p_negat,b15p_boot[i]*(-1))
        N_u<-c(N_u,length(which(b15p_negat>2.5)))
        i<-i+1}
VaRgpd25<-c()
for(i in 1:100){
#оцењујемо VaR помоћу ф-је VaRf која као аргументе узима изабрану
#вероватноћу 0.9 и праг, што представљају фиксиране вредности, и обим
#узорка који се повећава у свакој итерацији до стоте за један, број
#прекорачења прага, параметре генерализиване Паретове расподеле.
        VaRgpd25<-c(VaRgpd25,VaRf(0.9,u=2.5, n=1073+i,
        Nu=N_u[i],gama=x[i],beta=x[i+101]))}
fja2<-function{
```

```
#ова ф-ја испитује колико пута је остварени губитак био већи од оцењеног
#VaR-a
        j<-0
        for(i in 1:100){
        if (VaRgpd25[i]<b15p_boot[i]*(-1))
        j<-j+1
        i<-i+1}
        return (j)}
 j #показује колико пута је стварни принос био гори од оцењеног VaR-a
[1] 8
 n<-8
 T<-100
 p<-n/T
 pu<-0.1
#за задату вероватноћу, број прекорачења, примењујемо Kupiec-ов тест
#количника веродостојности
 LR1<--2*(log((pu^n)*((1-pu)^(T-n)))-log((p^n)*((1-p)^(T-n))))
 p.value1<-1-pchisq(LR1,df=1)
 LR1
[1] 0.473822
#p-вредност теста
 p.value1
[1] 0.4912341
```

Литература

[1] R.D.Reiss and M.Thomas (2001): Statistical Analysis of Extreme Values (Second Edition) Birkhouser, Basel-Boston-Berlin (309-339)

[2] S.T.Rachev, (2003): Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Chapter 2-Financial risk and heavy tails

[3] Philippe Jorion, (1955): VALUE AT RISK: The new Benchmark for Controlling Market Risk

[4] A.M. Hasofer, Z. Wang, (1992): A Test for Extreme Value Domain of Attraction, Journal of the American Statistical Association March 1992, Vol. 87, No 417, Theory and Methods (171-177)

[5] Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T. (2008): Modeling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[6] Balkema, A. de Haan L. (1974): Residual life time at great age, 2, 792-804

[7] Pickands, J. (1975), Statistical inference using extreme order statistics, Annals of Statistics, 3, 119-131

[8] Arnold L. M. Dekkers, Laurens de Haan, (1989): On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation, The Annals of Statistics, Vol. 17, No. 4, 1795-1832

[9] Alexander J. Mc.Neil, (1999): Extreme Value Theory for Risk Managers, Departement Matehmatik, ETH Zentrum, Zurich

[10] Јован Малишић, (1989): Случајни процеси теорија и примене, Београд Зорица Младеновић, Александра Нојковић, (2011): Анализа временских серија: примери из српске привреде

[11] Младеновић, П. (2002): Екстремне вредности случајних низова, Математички факултет, Београд

[12] Зорица Младеновић, Павле Младеновић, (2007): Практични проблеми оцене ризика у анализи дневних временских серија, XXXIV Симпозијум о операционим истраживањима (117-120)

[13] Драган Ђорић, Емилија Николић-Ђорић: Return distribution and Value at Risk Estimation for BELEX15

[14] Миливоје Цветиновић, (2008): Управљање ризицима у финансијском пословању, Београд

[15] Živković S. (2007), Measuring market risk in EU new member states. Paper presented at the 13th Dubrovnik Economic Conference , Dubrovnik, Croatia