Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

ГЕОДЕЗИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА

студент:
Рада Мутавџић

ментор:
проф. др Мирјана Ђорић

Београд
2013.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:
проф. др Мирјана Ђорић
др Срђан Вукмировић
др Мирослава Антић

Садржај

1 Површи у $\mathbb{E}^3$ 6
1.1 Основни појмови и дефиниције . . . 6
1.2 Геодезијске линије . . . 8
1.2.1 Општа једначина геодезијских линија . . . 11
1.3 Годезијска кривина . . . 11
1.3.1 Геодезијске кривине параметарских кривих . . . 12
1.3.2 Лиувилова формула за k_g . . . 12
1.4 Геодезијски координатни систем . . . 13
1.5 Асимптотске линије и конјуговани правци . . . 14
1.6 Гаусова кривина . . . 15

2 Картографске пројекције и конформна пресликавања површи 17
2.1 Дифеоморфне површи . . . 17
2.2 Картографске пројекције . . . 17
2.3 Изометрије . . . 18
2.4 Конформна пресликавања . . . 18
2.4.1 Стереографска пројекција . . . 20

3 Геодезијска пресликавања површи 22
3.1 Основне особине геодезијских пресликавања . . . 22
3.2 Белтрамијева теорема . . . 23
3.3 Динијева теорема . . . 26
3.4 Примери геодезијских пресликавања . . . 29
3.5 Пример изометрије површи у $\mathbb{E}^3$ . . . 29
3.6 Гномонска пројекција . . . 30
3.7 Белтрамијев пример . . . 32

4 Диференцијабилне многострукости 33
4.1 Тополошке и диференцијабилне многострукости . . . 33
4.2 Диференцијабилна пресликавања многострукости . . . 33
4.3 Тангентни простор . . . 34
4.3.1 Дефиниција тангентног простора . . . 34
4.3.2 Тангентни вектор као извод у правцу . . . 35
4.4 Диференцијал глатког пресликавања . . . 35
4.5 Тензори на многострукости . . . 36
4.6 Векторско поље . . . 36
4.6.1 Линеарна повезаност . . . 37
4.6.2 Риманове многострукости . . . 37
4.7 Паралелно померање . . . 38
4.8 Геодезијске линије . . . 38
4.9 Примедбе на дефиниције геодезијских линија . . . 39

5 Геодезијска пресликавања диференцијабилних многострукости 40
5.1 Афина пресликавања . . . 40
5.2 Геодезијска пресликавања многострукости са линеарном повезаношћу . . . 40
5.3 Леви-Чивита једначине геодезијских пресликавања . . . 41

5.4 Геодезијска пресликавања еквидистантних многострукости 43

Индекс појмова **47**

Индекс имена **48**

Литература **51**

Увод

Први који је размишљао о проблему геодезијског пресликавања био је Белтрами и то 1865. посматрајући случај геодезијског пресликавања површи (Риманове дводимензионе многострукости) на Еуклидску раван $\mathbb{E}^2$. Касније, 1869. године, У. Дини је решио овај проблем за ширу класу простора посматрајући геодезијска пресликавања две површи. Затим, 1896. године, Леви-Чивита је нашао основну једначину за решавање геодезијског пресликавања између две n-димензионе Риманове многострукости. Он је дошао до проблема геодезијског пресликавања између Риманових многострукости при проучавању једначина динамике. Свој допринос теорији геодезијских пресликавања дали су Т. Томас и Х. Вејл који су нашли неке геометријске инваријанте геодезијског пресликавања.

Теорија геодезијских пресликавања Риманових и простора линеарне повезаности је од великог интереса, како са теоријске, тако и са тачке гледишта примена. Кретање многих типова механичких система, а такође тела и честица у гравитационим и електромагнетним пољима, у непрекидној средини, се често врши по путањама које се могу посматрати као геодезијске линије. Тако, на пример, два Риманова простора, која допуштају узајамно геодезијско пресликавање, описују процесе који се одвијају, при еквивалентним спољним оптерећењима, по истим путањама, али при различитим енергетским режимима.

У новије време геодезијска пресликавања Риманових простора и њихова уопштења су посматрали Н. С. Сињуков, Ј. Микеш, И. Хинтерлеитнер, В. Киосак, М. Првановић, М. Станковић.

Фундаменталне једначине геодезијских пресликавања су пронађене у неколико облика. Међу њима је посебно важан систем диференцијалних једначина Кошијевог типа. За те линеарне облике, проблем егзистенције и јединствености решења може се решити алгебарским методама. Очигледно, егзистенција решења тих фундаменталних једначина повлачи егзистенцију поменутих пресликавања, тј. на основу њих се класификују простори између којих се може успоставити геодезијско пресликавање.

Овај рад се бави геодезијским пресликавањима површи у $\mathbb{E}^3$, везом између геодезијских и конформних пресликавања површи у $\mathbb{E}^3$, као и геодезијским пресликавањима многострукости са линеарном повезаношћу.

У првом поглављу дати су основни појмови и дефиниције за површи у $\mathbb{E}^3$ и изведене формуле које се користе у раду. Посебно су посматране једначине геодезијских линија на површи и формула за геодезијску кривину, асимптотски и конјуговани правци и Гаусова кривина.

У другом поглављу описан је проблем математичке картографије, тј. представљања дела глобуса на равној површини. Затим су посматрана конформна пресликавања, тј. дифеоморфизми који чувају углове. Установљена је веза између метрика површи између којих постоји конформна коресподенција и у одређеној параметризацији прецтављена стереографска пројекција као пример конформног пресликавања.

У трећем поглављу су приказане неке чињенице о геодезијским и конформним пресликавањима површи. Установљено је да се геодезијским пресликавањима чувају коњуговани правци. Показано је да пресликавање површи које је конформно и геодезијско мора бити изометрија или сличност. Наведене су Белтрамијева и Динијева теорема, као и неки примери који су илустровани помоћу пакета Mathematica.

У четвртом поглављу су посматране диференцијабилне многострукости. Наведену су основне дефиниције за многострукости, диференцијабилна пресликавања између њих, тангентне векторе и просторе, векторска поља и тангентне векторе на криве на многострукости. Природно су уведени Кристофелови симболи друге врсте помоћу линеарне повезаности, за које у случају Риманових многострукости важе формуле којима су Кристофелови симболи дефинисани на површи у $\mathbb{E}^3$. Посматрани су паралелно померање и геодезијске линије на многострукости.

У петом поглављу су изведене Леви-Чивита једначине геодезијских пресликавања многострукости, које успостављају везу између компонената повезаности многострукости које се геодезијски могу пресликати једна на другу. У секцији 5.4 је уочена веза метрика еквидистантних многострукости између којих је уочено геодезијско пресликавање у канонском координатном систему, што је део рада I. Hinterleitner, *Special mappings of equidistant spaces*.

1 Површи у $\mathbb{E}^3$

1.1 Основни појмови и дефиниције

Дефиниција 1. *Параметризована елементарна површ класе C^k, $k \geqslant 1$ је $1-1$ пресликавање $x : U \to \mathbb{E}^3$ класе C^k, где је $U = U(u,v)$ отворен подскуп од $\mathbb{E}^2$, а $\partial x/\partial u$ и $\partial x/\partial v$ су линеарно независни вектори на U.*

Дефиниција 2. *Координатна трансформација (класе C^k) је C^k дифеоморфизам $\phi : V \to U$, где су V и U отворени скупови у $\mathbb{E}^2$.*

Убудуће ће се претпостављати да су параметризације и координатне трансформације класе C^∞, ако се не истакне другачије.

Ако је $x : U \to \mathbb{E}^3$ елементарна површ и $\phi : V \to U$ координатна трансформација, тада је $\bar{x} = x \circ \phi : V \to \mathbb{E}^3$ елементарна површ и има исту слику као x. Тада кажемо да је површ $\bar{x}$ еквивалентна са x у односу на координатну трансформацију ϕ. Класа еквиваленције параметризоване елементарне површи је *(непараметризована) елементарна површ.*

Параметарске (координатне) криве на елементарној површи $x : U \to \mathbb{E}^3$ у тачки $p = x(a,b)$ су криве одређене условима $x(u,b)$ и $x(a,v)$. Њихови векори брзина у тачки p су редом

$$x_1(a,b) = \frac{\partial x}{\partial u}\bigg|_{(a,b)}, \quad x_2(a,b) = \frac{\partial x}{\partial v}\bigg|_{(a,b)}.$$

Дефиниција 3. *Тангентна раван на елементарну површ $x : U \to \mathbb{E}^3$ у тачки $p = x(a,b)$ је раван која садржи тачку p и паралелна је векторима $x_1(a,b)$ и $x_2(a,b)$. Јединична нормала на површ у тачки $p = x(a,b)$ је*

$$n(a,b) = \frac{x_1(a,b) \times x_2(a,b)}{||x_1(a,b) \times x_2(a,b)||}.$$

Вектор X је *тангентни вектор* на елементарну површ x у тачки $p = x(a,b)$, ако је X вектор брзине у тачки p за неку криву која припада површи и садржи тачку p, тј. ако за неко $\varepsilon > 0$ постоји крива $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U) \subset \mathbb{E}^3$, тако да је $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X$ и $c(t) = x(u(t), v(t))$, где су $u(t)$ и $v(t)$ класе C^1.

Скуп тангентних вектора у тачки p на елементарну површ $x : U \to \mathbb{E}^3$ је векторски простор са базом $\{x_1(a,b), x_2(a,b)\}$ и означава се са $T_p x$. *Тангентно раслојење* на U се означава са TU и представља дисјунктну унију тангентних простора $T_p x$, $p \in U$.

Дефиниција 4. *Над елементарном површи $x : U \to \mathbb{E}^3$ векторско поље је диференцијабилно пресликавање $X : U \to \mathbb{E}^3$, тако да је за сваку тачку $p \in U$, $X(p) \in T_{x(p)}\mathbb{E}^3$.*

Може се показати да се делови сфере S^2 могу параметризовати, али не постоји параметризација целе сфере. Зато је у складу са интуицијом потребно увести површи на сложенији начин. Наиме, површ ће бити фамилија елементарних површи које се преклапају, а на преклопу се захтева да су параметризације повезане координатним трансформацијама.

Означимо са $x_{11}(a,b) = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $x_{12}(a,b) = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $x_{21}(a,b) = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ и $x_{22}(a,b) = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ парцијалне изводе другог реда на површи x.

Коефицијенти прве и друге основне форме површи x су функције g_{ij} и L_{ij} редом, дефинисане на U са

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle, \qquad \mathrm{L}_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle.$$

Негде ћемо користити ознаке $E := \langle x_1, x_1 \rangle$, $F := \langle x_1, x_2 \rangle$, $G := \langle x_2, x_2 \rangle$ и
$e := \langle x_{11}, n \rangle$, $f := \langle x_{12}, n \rangle$, $g := \langle x_{22}, n \rangle$.

Прва основна форма I на елементарној површи $x : U \to \mathbb{E}^3$ је рестрикција скаларног производа на $\mathbb{E}^3$ на векторски простор $T_p x$, $p = x(a,b)$.
За произвољне векторе $X, Y \in T_p x$ $(X = X^i x_i,\ Y = Y^j x_j)$, $\mathrm{I}(X,Y) = \sum g_{ij} X^i Y^j$.

Друга основна форма II на елементарној површи $x : U \to \mathbb{E}^3$ је билинеарна форма на $T_p x$, $p = x(a,b)$, дата са $\mathrm{II}(X,Y) = \sum L_{ij} X^i Y^j$. Функције g_{ij} и L_{ij} дефинишу симетричне матрице у свакој тачки слике површи x.

Кристофелови симболи прве и друге врсте су редом функције

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{jk;i} + g_{ik;j} - g_{ij;k}) \quad \text{и} \quad \Gamma^k_{ij} = g^{k\alpha}\Gamma_{ij\alpha}, \tag{1}$$

где је $g_{ij;1} = \partial g_{ij}/\partial u$, $g_{ij;2} = \partial g_{ij}/\partial v$ и g^{ij} инверзна матрица матрице g_{ij}, тј. матрица дефинисана са $g_{ij}g^{ij} = \delta^j_i$. У развијеном облику, Кристофелови симболи друге врсте су дефинисани са

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{GE_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)},
\end{aligned} \tag{2}$$

$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^i_{jk}$.

Вектори x_1, x_2 и n су линеарно независни и чине базу простора $\mathbb{E}^3$. Имају сличну улогу као покретни репер у случају криве, али нису међусобно нормални. Сваки вектор из $\mathbb{E}^3$ може бити представљен као линеарна комбинација тих вектора. Посебно, за векторе x_{11}, x_{12} и x_{22} важи

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \Gamma^1_{11}x_1 + \Gamma^1_{12}x_2 + en, \\
x_{12} &= \Gamma^1_{12}x_1 + \Gamma^2_{12}x_2 + fn, \\
x_{22} &= \Gamma^1_{22}x_1 + \Gamma^2_{22}x_2 + gn.
\end{aligned} \tag{3}$$

Да би комплетирали претходне једначине, изразимо векторе n_1 и n_2 у истој бази. Они леже у тангентној равни, па се изражавају са

$$\begin{aligned}
n_1 &= p_1 x_1 + p_2 x_2, \\
n_2 &= q_1 x_1 + q_2 x_2.
\end{aligned}$$

Из

$$-e = \langle x_1, n_1 \rangle = p_1 E + p_2 F, \quad -f = \langle x_1, n_2 \rangle = q_1 E + q_2 F,$$

$$-f = \langle x_2, n_1 \rangle = p_1 F + p_2 G, \quad -g = \langle x_2, n_2 \rangle = q_1 F + q_2 G,$$

следи

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} x_1 + \frac{eF - fE}{EG - F^2} x_2 \text{ и} \\ n_2 &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} x_1 + \frac{fF - gE}{EG - F^2} x_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Једначине (4) називају се једначинама Вајнгартена.

Услов интеграбилности $(x_{ij})_k = (x_{ik})_j$ се на основу једначина (3) може написати као

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^1 x_1 + \Gamma_{12}^1 x_2 + en) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + fn),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + fn) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{22}^1 x_1 + \Gamma_{22}^2 x_2 + gn).$$

Ако у претходним једначинама x_{ij} изразимо преко x_i и n_j (једначине (3)), а n_i преко x_i (једначине (4)), поређењем коефицијената уз x_1 и x_2 добијамо следеће једначине

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 &= E\frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 &= F\frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 &= G\frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 &= F\frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Приметимо да се у овим једначинама коефицијенти друге фундаменталне форме појављују само у комбинацији $(eg - f^2)/(EG - F^2)$, што ће бити од значаја у даљем извођењу.

1.2 Геодезијске линије

Дефиниција 5. *Нека је $x : U \to \mathbb{E}^3$ елементарна површ. Крива на површи је крива $c : I \to \mathbb{E}^3$ облика $x \circ \gamma$, где је $\gamma : I \to U$ крива у U.*

За криву $c(t) = x(\gamma(t))$ на x, дужина лука $s(t)$ је једнозначно одређена релацијама

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = ||\dot{c}(t)||^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Ако је параметар криве c дужина лука s, та параметризација је *природна*.

Нека је $c(s)$ глатка крива параметризована дужином лука на елементарној површи $x : U \to \mathbb{E}^3$. Крива c има покретни репер $\{T(s), N(s), B(s)\}$, при чему је $T(s) = \dot{c}(s)$ тангентно векторско поље, $N(s) = \dot{T}(s)/||\dot{T}(s)||$ векторско поље главних нормала и $B(s) = T(s) \times N(s)$ векторско поље бинормала. Кривина криве $c(s)$ је функција $k(s) = ||\dot{T}(s)||$.

Будући да вектори $\{T, n, n \times T = S\}$ (S је унутрашња нормала), чине орто-нормирану базу у $\mathbb{R}^3$, вектор $\ddot{c}(s)$, s је природни параметар криве c, можемо написати као

$$\ddot{c} = k \cdot N = 0 \cdot T + k_n n + k_g S, \tag{6}$$

k_n и k_g су нормална и геодезијска кривина криве $c(s)$.

Посматрајмо проблем налажења кривих на површи у $\mathbb{E}^3$ које су аналогне правама у равни. Решење тог проблема су геодезијске линије. Интерпретирајући својство да праве линије имају (у равни) кривину нула, имамо следећу дефиницију:

Дефиниција 6. *Геодезијска линија на елементарној површи је крива параметризована дужином лука, чија је геодезијска кривина свугде једнака нули.*

Једноставан пример геодезијске линије је (део) праве $c(t) = a + bt,\ a, b \in \mathbb{R}$ на површи, будући да је $\ddot{c} = 0$.

Теорема 1. *Нека је $x : U \to \mathbb{E}^3$ елементарна површ, $U = U(u^1, u^2)$. Тада за произвољну криву $c = x(u^1(s), u^2(s))$ на површи параметризовану дужином лука важи:*

$$k_g S = \sum_k [\ddot{u}^k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j] x_k, \quad k = 1, 2.$$

Доказ. Заменом формуле

$$x_{ij} = L_{ij} n + \sum_k \Gamma^k_{ij} x_k$$

у једначини

$$\frac{d^2 c}{ds^2} = \ddot{c} = \sum_{ij} x_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i x_i \ddot{u}^i$$

добијамо

$$\ddot{c} = \sum_k [\ddot{u}^k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j] x_k + (\sum_{ij} L_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j) n. \tag{7}$$

Поређење ове једначине са једначином (6) комплетира доказ. □

На основу претходне теореме видимо да је крива $c = x(u^1, u^2)$ геодезијска ако и само ако важи

$$\ddot{u}^k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \qquad k = 1, 2. \tag{8}$$

Пример 1. *[8] Наћи геодезијске линије на цилиндру $x^2 + y^2 = 1$ решавањем одговарајућег система диференцијалних једначина.*

Параметризујмо цилиндар са $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Тада, $E = G = 1, F = 0$, па су једначине геодезијских линија $\ddot{u} = \ddot{v} = 0$. Зато, $u = a + bt$, $v = c + dt$, где су a, b, c, d константе. Ако је $b = 0$, геодезијска линија на цилиндру је права паралелна z-оси. Ако је $d = 0$, то је кружница паралелна xy-оси. Иначе, геодезијска линија је кружни хеликс.

Теорема 2. *Крива $c(s)$ јединичне брзине на површи M је геодезијска крива ако и само ако је $\ddot{c}$ нормалан на површ у свакој тачки (тангентни вектор $\dot{c}$ је паралелан дуж γ).*

Доказ. $\ddot{c} = kN = k_g S + k_n n$. $\ddot{c}$ је нормалан на површ ако и само ако је $k_g = 0$. □

Пример 2. *Посматрајмо велики круг $c(s) = (\sin s, 0, \cos s)$ на S^2. $\dot{c}(s) = (\cos s, 0, -\sin s)$, $\ddot{c}(s) = (-\sin s, 0, -\cos s)$. Нормала на S^2 у тачки $c(s)$ је $\pm c(s)$, па је на основу претходне теореме c геодезијска крива. Важи и обрат: ако је c геодезијска крива на S^2, тада је c лук великог круга.*

Пример 3. *Нека је $r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ ротациона површ генерисана кривом јединичне брзине $(f(u), 0, g(u))$, $f > 0$. Тада важи*
а) Сваки меридијан је геодезијска линија;
б) Паралела је геодезијска линија ако и само ако је тангента меридијана паралелна оси ротације у свим тачкама паралеле.

Пошто је u природни параметар за генераторну криву, прва форма површи је

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \dot{f}^2 + \dot{g}^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix},$$

а Кристофелови симболи су нула осим $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{\dot{f}}{f}$ и $\Gamma^1_{22} = -f\dot{f}$.

Геодезијске линије $c(s) = r(u(s), v(s))$ задовољавају систем једначина (8)

$$\ddot{u} - f\dot{f}(\dot{v})^2 = 0, \tag{9а}$$

$$\ddot{v} + 2\frac{\dot{f}}{f}\dot{u}\dot{v} = 0. \tag{9б}$$

а) Меридијани су одређени са $v = const$. Тада су $\dot{v}$ и $\ddot{v}$ нула, па је једначина (9б) задовољена. Дуж меридијана $u = s$, па је $\dot{u} = 1$ и $\ddot{u} = 0$ и задовољена је (9а).
б) Паралеле су одређене са $u = const$. Тада је $\dot{u} = \ddot{u} = 0$. Пошто геодезијска линија $c(s) = r(u(s), v(s))$ има јединичну брзину,

$$1 = |\dot{c(s)}|^2 = |\frac{\partial r}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\dot{v}|^2 = g_{22}(\dot{v})^2 = f^2(\dot{v})^2.$$

Следи да је $\dot{v} = \pm\dfrac{1}{f} = const$, јер је $f = f(u)$, $u = const$ и задовољена је једначина (9б). Једначина (9а) је због $f > 0$ и $\dot{v}^2 = \dfrac{1}{f^2} \neq 0$ еквивалентна са $\dot{f} = 0$. Ово важи ако и само ако је тангента меридијана $(\dot{f}\cos v, \dot{f}\sin v, \dot{g})$ паралелна оси ротације $(0,0,1)$ у свакој тачки паралеле.

У равни, права је одређена тачком која јој припада и правцем те праве. Следећа теорема показује да је ово тврђење тачно за произвољну геодезијску линију.

Теорема 3. *Нека је p тачка на површи M, $x : U \to M$ и нека је X јединични вектор тангентан на M у тачки p. Тада постоји јединствена геодезијска линија $c : \mathbb{R} \to M$, таква да је неко за $s_0 \in \mathbb{R}$, $c(s_0) = p$ и $\dot{c}(s_0) = X$.*

Теорема 4. *Нека је c крива јединичне брзине на површи M, између тачака $p = c(a)$ и $q = c(b)$. Ако је c најкраћа крива између тачака p и q, тада је c геодезијска линија.*

Обрнуто тврђење није тачно. Геодезијске линије не морају минимизирати растојање. Нека су p и q различите тачке на сфери S^2, које нису дијаметрално супротне. Постоје две геодезијске линије различитих дужина које спајају p и q, а одговарају луковима великог круга, кроз тачке p и q. Приметимо и да најкраћи пут између супротних полова није јединствен, као и да ако из сфере одстранимо једну тачку, најкраћи пут између две тачке не мора увек да постоји, чак и ако постоји геодезијска између њих.

Теорема 5. *Нека је p тачка на површи M. Тада постоји околина O тачке p таква да произвољне две тачке из околине O могу бити спојене јединственом најкраћом геодезијском линијом, при чему је та геодезијска линија садржана у околини O.*

Још једно еквивалентно тврђење да је крива c јединичне брзине на површи M геодезијска је да је она потпуно права, што значи да је векторско поље dc/ds паралелно дуж криве c.

Докази наведених теорема могу се наћи у [1], [7].

1.2.1 Општа једначина геодезијских линија

Посматрајмо систем једначина геодезијских линија (8)

$$-\frac{d^2u}{ds^2} = \Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$-\frac{d^2v}{ds^2} = \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Помножимо прву једначину претходног система са dv/ds и од ње одузмимо другу помножену са du/ds

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\frac{d^2u}{ds^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3 &+ (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ &+ (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds} - \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3.\end{aligned} \tag{10}$$

Пошто је $\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{ds}$, лева страна претходне једначине је

$$\frac{du}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{du}\frac{du}{ds}\right) - \frac{du}{ds}\frac{dv}{du}\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{du}{ds}\left(\frac{d^2v}{du^2}\frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{dv}{du}\frac{d^2u}{ds^2}\right) - \frac{du}{ds}\frac{dv}{du}\frac{d^2u}{ds^2} = \left(\frac{du}{ds}\right)^3\frac{d^2v}{du^2}.$$

Множењем једначине (10) са $\left(\dfrac{ds}{du}\right)^3$ добијамо *општу једначину геодезијских линија*

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du} - \Gamma^2_{11}. \tag{11}$$

Једначина (11) је еквивалентна систему једначина (8), што значи да је крива на површи геодезијска крива ако и само ако задовољава једначину (11).

1.3 Годезијска кривина

Нека је $c(s)$ крива на елементарној површи $x : U \to \mathbb{E}^3$ параметризована дужином лука. На основу једначине (6) важи

$k_g = (kN)\cdot S = \dot{T}\cdot S = \dot{T}\cdot(n\times T) = [n, T, \dot{T}] = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[(x_u\times x_v)\cdot\left(\dfrac{dx}{ds}\times\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)\right].$

Са друге стране је

$\dfrac{dx}{ds} = x_u\dfrac{du}{ds} + x_v\dfrac{dv}{ds}$ и

$\dfrac{d^2x}{ds^2} = x_u\dfrac{d^2u}{ds^2} + x_v\dfrac{d^2v}{ds^2} + x_{uu}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2x_{uv}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + x_{vv}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2,$

што са претходном формулом уз идентитет

$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) - (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)$ даје

$$k_g = \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \frac{dv}{ds} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^3 + \frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right]\sqrt{EG - F^2}. \tag{12}$$

1.3.1 Геодезијске кривине параметарских кривих

Означимо са s_1 и s_2 природне параметре за параметарске криве $x(u, v_0)$ и $x(u_0, v)$ редом на елементарној површи x. Тада је из прве основне форме:

- дуж u-координатних кривих: $\dfrac{dv}{ds_1} = 0,\ \dfrac{du}{ds_1} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}$;
- дуж v-координатних кривих: $\dfrac{du}{ds_2} = 0,\ \dfrac{dv}{ds_2} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}$.

Дакле, на основу формуле (12)

$$(k_g)_{v=v_0} = \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds_1}\right)^3 \sqrt{EG - F^2} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}};$$

$$(k_g)_{u=u_0} = -\Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds_2}\right)^3 \sqrt{EG - F^2} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}.$$

Следи да су u-координатне криве на површи геодезијске криве ако и само ако је $\Gamma_{11}^2 = 0$, а v-координатне криве геодезијске ако и само ако је $\Gamma_{22}^1 = 0$.

Ако су параметарске криве ортогоналне, $F = 0$, $\Gamma_{11}^2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{E_v}{G}$, $\Gamma_{22}^1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{G_u}{E}$, важи

$$(k_g)_{v=v_0} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}; \tag{13}$$

$$(k_g)_{u=u_0} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}. \tag{14}$$

1.3.2 Лиувилова формула за k_g

Означимо са i_1 и i_2 јединичне векторе дуж ортогоналних параметарских кривих $x(u, v_0)$ и $x(u_0, v)$ редом, а са s_1 и s_2 природне параметре дуж тих кривих редом. Тада је

$$i_1 = \frac{dx(u, v_0)}{ds_1}, \quad i_2 = \frac{dx(u_0, v)}{ds_2}.$$

Дуж u-координатних кривих је $S = n \times T = (i_1 \times i_2) \times i_1 = i_2$, а дуж v-координатних кривих $S = (i_1 \times i_2) \times i_2 = -i_1$, па су геодезијске кривине дуж параметарских кривих према једначини (6)

$$(k_g)_{v=v_0} = i_2 \frac{di_1}{ds_1}, \quad (k_g)_{u=u_0} = -i_1 \frac{di_2}{ds_2}. \tag{15}$$

Посматрајмо криву c кроз тачку p на површи x, $c(s) = x(u(s), v(s))$, која са кривом $v = v_0$ заклапа угао θ. Тада њен јединични вектор T задовољава једначину

$$\begin{aligned} T &= i_1 \cos\theta + i_2 \sin\theta \\ &= \frac{dx(u, v_0)}{ds_1} \cos\theta + \frac{dx(u_0, v)}{ds_2} \sin\theta \\ &= \frac{\partial x(u, v_0)}{\partial u} \frac{du}{ds_1} \cos\theta + \frac{\partial x(u_0, v)}{\partial v} \frac{dv}{ds_2} \sin\theta. \end{aligned}$$

Са друге стране је

$$T = \frac{dx(u, v)}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{ds},$$

па је

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{ds_1} \cos\theta, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{ds_2} \sin\theta.$$

На основу претходног важи формула

$$\frac{di_\alpha}{ds} = \frac{\partial i_\alpha}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial i_\alpha}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{di_\alpha}{ds_1} \cos\theta + \frac{di_\alpha}{ds_2} \sin\theta, \quad (i = 1, 2),$$

па диференцирањем T дуж c уз добијамо

$$\frac{dT}{ds} = \frac{di_1}{ds_1} \cos^2\theta + \frac{di_1}{ds_2} \cos\theta \sin\theta + \frac{di_2}{ds_1} \cos\theta \sin\theta + \frac{di_2}{ds_2} \sin^2\theta + S \frac{d\theta}{ds},$$

где је S унутрашња нормала на површ

$$S = -i_1 \sin\theta + i_2 \cos\theta.$$

Тада на основу једначине $k_g = \dot{T} \cdot S$ и формуле (15) важи

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + (k_g)_{v=v_0} \cos\theta + (k_g)_{u=u_0} \sin\theta. \tag{16}$$

Формула (16) је позната као Лиувилова формула за k_g.

1.4 Геодезијски координатни систем

Претпоставимо да за криве $v = const$ изабрана фамилија геодезијских кривих на површи, а њихове ортогоналне трајекторије са $u = const$. На основу услова да су криве $v = const$ геодезијке криве је $E_v = 0$, тј. $E = E(u)$. Метричка форма тада има облик:

$$ds^2 = E(u)du^2 + G(u, v)dv^2.$$

Нека су $u = a$ и $v = b$ две координатне криве из ортогоналне фамилије. Нека су A и B пресечне тачке тих кривих редом са геодезијском кривом $v = c$. Тада је растојање од A до B

$$\int\limits_A^B ds = \int\limits_a^b \frac{ds}{du} du = \int\limits_a^b \sqrt{E} du,$$

јер се дуж криве $v = c$ као параметар може узети u и $ds^2 = E(u)du^2$.

Важно је приметити да је иста дужина AB дуж свих геодезијских линија $v = const$. Ово је аналогно случају паралелних правих у равни, па се ортогоналне трајекторије називају *геодезијске паралеле.*

Фиксирајмо једну геодезијску паралелу и одредимо другу $u = const$ са $u = s$, где је s растојање ове паралеле од фиксиране паралеле мерено дуж произвољне геодезијске линије $v = const$. Зато је параметер u геодезијске линије $v = const$ природан, $du = ds$, па је $E = 1$. Ово показује да се за дату фамилију геодезијских линија параметри могу изабрати тако да метрика има облик

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2.$$

Параметри u и v се називају *геодезијске координате.*

1.5 Асимптотске линије и конјуговани правци

Дефиниција 7. *Асимптотска линија на елементарној површи је крива параметризована дужином лука, чија је нормална кривина свугде једнака нули.*

Нека је $c(s)$ крива на површи $x = x(u, v)$. Тада се на основу једначине (6) нормална кривина криве c рачуна по формули

$$k_n = \dot{T} \cdot n.$$

Диференцирањем једначине $T \cdot n = 0$ дуж c добијамо

$$\dot{T} \cdot n = -T \cdot \dot{n} = -\dot{x} \cdot \dot{n} = -\frac{dx}{ds}\frac{dn}{ds} = -\frac{dx \cdot dn}{ds^2} = -\frac{dx \cdot dn}{dx \cdot dx},$$

где је $dn = n_u du + n_v dv$ и $dx = x_u du + x_v dv$. Нормална кривина криве c дата је једначином

$$\begin{aligned} k_n &= -\frac{(x_u \cdot n_u)du^2 + (x_u \cdot n_v + x_v \cdot n_u)dudv + (x_v \cdot n_v)dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \\ &= \frac{e\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2f\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + g\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}{E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2} = \frac{\mathrm{II}(T,T)}{\mathrm{I}(T,T)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Дакле, криве c за које важи $\mathrm{II}(T,T) = 0$, $T = \dot{c}$ су асимптотске криве, а одговарајући правци су *асимптотски правци.*

Нека је $x(u, v)$ елементарна површ и $p = x(a, b)$. Правци $X, Y \in T_p x$ су *конјуговани*, ако важи $\mathrm{II}(X, Y) = 0$.

X и Y су тангентни вектори у тачки p, па је $X = \dot{\alpha}(0)$ и $Y = \dot{\beta}(0)$ за неке криве α и β на површи $x(u, v)$, при чему је $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Криве α и β се могу представити у облику

$$\alpha(t) = x(\alpha^1(t), \alpha^2(t)) \quad \text{и} \quad \beta(t) = x(\beta^1(t), \beta^2(t)),$$

па је

$$X = x_u\frac{d\alpha^1}{dt}(0) + x_v\frac{d\alpha^2}{dt}(0) \quad \text{и} \quad Y = x_u\frac{d\beta^1}{dt}(0) + x_v\frac{d\beta^2}{dt}(0).$$

Правци X и Y су конјуговани ако важи

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{II}(X,Y) &= \left(d\alpha^1/dt, d\alpha^2/dt\right)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\beta^1/dt \\ d\beta^2/dt \end{pmatrix} \\ &= e\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\beta^1}{dt} + f\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\beta^2}{dt} + \frac{d\alpha^2}{dt}\frac{d\beta^1}{dt}\right) + g\frac{d\beta^1}{dt}\frac{d\beta^2}{dt}. \end{aligned} \tag{18}$$

Једначина (18) има једноставну геометријску интерпретацију. Тангентне равни дуж криве $c = x(u(s), v(s))$ на површи $x(u, v)$ са јединичном нормалом n образују развојну површ D. Нека једначине

$$X(s, a) = x(u(s), v(s)) + aY(s)$$

одређују генераторе те површи (за фиксирано s). Дуж генератора, јединична нормала на ту површ је n, па је

$$n \cdot dX = 0,$$

где је $dX = dx + da \cdot Y + a \cdot dY$ диференцијал пресликавања X, $dX : T\mathbb{E}^2 \to TD$. Пошто је $n \cdot dx = 0$ и $n \cdot Y = 0$, важи

$$n \cdot dY = 0, \text{ одакле је и}$$

$$dn \cdot Y = 0,$$

где је $dn = n_u du + n_v dv$. Ако је $Y = x_u \dfrac{dy^1}{ds} + x_v \dfrac{dy^2}{ds}$, из претходне једначне следи

$$e\frac{dy^1}{ds}\frac{du}{ds} + f\left(\frac{dy^1}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{dy^2}{ds}\frac{du}{ds}\right) + g\frac{dy^2}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$$

што значи да су правци $\dot{c}$ и Y конјуговани. Другим речима:
Генераторне линије на развојној површи чије тангентно раслојење чине тангентне равни дуж криве c на површи имају дуж c правац конјугован са правцем криве c.

1.6 Гаусова кривина

Ако у једначини (17) означимо $dv/du = \lambda$, тада је

$$k_n = k_n(\lambda) = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}.$$

Екстремне вредности нормалне кривине су *главне кривине* и могу се описати са $\dfrac{dk_n}{d\lambda} = 0$, односно

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(f + g\lambda) - (e + 2f\lambda + g\lambda^2)(F + G\lambda) = 0.$$

Пошто важи

$$E + 2F\lambda + G\lambda^2 = (E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda) \quad \text{и} \quad e + 2f\lambda + g\lambda^2 = (e + f\lambda) + \lambda(f + g\lambda)$$

формула за главне кривине је

$$k = \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda} = \frac{e + f\lambda}{E + F\lambda}.$$

Зато k задовољава једначине

$$(e - kE)du + (f - kF)dv = 0 \quad \text{и} \quad (f - kF)du + (g - kG)dv = 0$$

које су истовремено задовољене ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} Ek - e & Fk - f \\ Fk - f & Gk - g \end{vmatrix} = 0.$$

Из ове једначине изводимо Гаусову кривину

$$K = k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

На основу једначина (5), видимо да Гаусову кривина може изразити преко коефицијената прве фундаменталне форме и њених првих и других парцијалних извода (**Теорема Egregium**).

Површи код којих је Гаусова кривина иста у свакој тачки називају се *површи константне Гаусове кривине.* На пример, површи чија је Гаусова кривина у свакој тачки нула су *развојне* површи. Ту спадају површи генерисане тангентама на просторну криву, конус и цилиндар. Њихова заједничка особина је да имају константну тангентну раван дуж генератриса. Све развојне површи у $\mathbb{R}^3$ су праволинијске површи, али обрат не важи. Пример је једнограни хиперболоид, јер се тангентна раван на хиперболоид мења дуж генератрисе.

2 Картографске пројекције и конформна пресликавања површи

2.1 Дифеоморфне површи

Дефиниција 8. *Функција $f : S \to \bar{S}$ између површи S и $\bar{S}$ је диференцијабилна у тачки $p \in S$ ако постоје параметризације $x : (U \subset \mathbb{E}^2) \to S$ и $\bar{x} : (V \subset \mathbb{E}^2) \to \bar{S}$, $p \in x(U)$, $f(p) \in \bar{x}(V)$ такве да је композиција $\bar{x}^{-1} \circ f \circ x : U \to V$ диференцијабилно пресликавање у свакој тачки из S. Функција $f : S \to \bar{S}$ је дифеоморфизам, ако је диференцијабилна, бијекција и њен изверз је диференцијабилна функција. Две површи су дифеоморфне, ако постоји дифеоморфизам између њих.*

Пример 4. *Елипсоид $E^2 = \{(x,y,z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ и сфера S^2 су дифеоморфни. Одговарајући дифеоморфизам $f : S^2 \to E^2$ је*

$$f(x,y,z) = (ax, by, cz).$$

На скупу свих површи у $\mathbb{E}^3$ дифеоморфизам је релација еквиваленције. Дифеоморфне површи су еквивалентне у смислу да деле еквивалентан скуп диференцијабилних функција. Ова релација еквиваленције је основа за диференцијалну топологију површи, али се на основу ње не могу разликовати битна геометријска својства површи.

2.2 Картографске пројекције

У математичкој картографији проучава се специјалан случај пресликавања површи, пројекције сфере на раван, које имају улогу картографске пројекције (мапе). Координатне карте за површи су добиле назив после картографских мапа. Основни проблем је представљање области R глобуса (идеализованог као јединична сфера S^2) на равној површи, тј. наћи пресликавање $\gamma : (R \subset S^2) \to \mathbb{R}^2$ које је инјективно, диференцијабилно и има диференцијабилан инверз. Такво пресликавање γ се зове картографска пројекција. Координатна карта сфере $x : (U \subset \mathbb{R}^2) \to S^2$ одређује картографску пројекцију са $\gamma = x^{-1}$ и последично, картографска пројекција одређује координатну карту.

Према потребама картографије, одређене су важне особине картографске пројекције. *Идеална картографска пројекција* је она код које су дужина, углови и површина на S^2 пројектују у индентичне дужине, углове и површине за одговарајући избор јединице. Општије, таква пресликавања између површи се зову *изометрије.* На идеалној картографској пројекцији, могле би се видети неке важне географске особине - најкраће растојање између тачака било би представљено сегментом праве.

Један од првих резултата у математичкој картографији дао је Ојлер у свом раду из 1778:

Теорема 6. *Не постоји идеална картографска пројекција.*

Доказ. Ојлеров доказ се заснивао на диференцијалним једначинама које описују "инфинитезималну сличност". Овде је довољан синтетички аргумент. Нека је $\triangle ABC$ троугао на S^2 формиран од сегмената великих кругова. Како су велики кругови геодезијске линије на сфери, при идеалној картографској пројекцији AB, BC и AC би се пројектовали у сегменте правих у равни. Ипак, збир углова у сферном троуглу је већи од π, док је збир углова троугла у равни π. Зато идеална картографска пројекција не може да чува углове, што је у контрадикцији са претпоставком. □

На основу претходне теореме, не може се изабрати картографска пројекција код које су све наведене метричке особине сачуване, већ се по потреби бирају појединачне мапе код којих су сачуване неке од особина.

2.3 Изометрије

Дефиниција 9. *Дифеоморфизам $f : S \to \bar{S}$ је је изометрија, ако за све $p \in S$ и $\vec{v}, \vec{w} \in T_pS$ важи*

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) = I_{f(p)}(f_{*p}(\vec{v}), f_{*p}(\vec{w}))$$

Две површи су изометричне ако постоји изометрија између њих.

Особине површи које се чувају изометријама су *унутрашње особине површи.*

Дефиниција 10. *Пресликавање $f : (U \subset S) \to \bar{S}$ околине U тачке p из S је локална изометрија у тачки p, ако постоје околине $W \subset V$ од p и $\bar{W}$ од $f(p)$ такве да је $f|_W : W \to \bar{W}$ изометрија. Две површи су локално изометричне ако постоји локална изометрија у свакој тачки за обе површи.*

2.4 Конформна пресликавања

Дефиниција 11. *Дифеоморфизам $f : S \to \bar{S}$ је конформно пресликавање ако чува углове, тј. за дате две криве $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ и $\beta : (-\eta, \eta) \to S$, $\alpha(0) = p = \beta(0)$, угао између $\alpha'(0)$ и $\beta'(0)$ у T_pS је исти као угао између $f_{*p}(\alpha'(0))$ и $f_{*p}(\beta'(0))$ у $T_{f(p)}\bar{S}$.*

Теорема 7. *Дифеоморфизам $f : S \to \bar{S}$ је конформно пресликавање ако и само ако постоји функција $\rho : S \to \mathbb{R}$ различита од нуле таква да за све $p \in S$ и $\vec{v}, \vec{w} \in T_pS$*

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \rho^2(p) I_{f(p)}(f_{*p}(\vec{v}), f_{*p}(\vec{w})).$$

Доказ. Претпоставимо да је $f : S \to \bar{S}$ дифеоморфизам и да постоји не-нула функција $\rho : S \to \mathbb{R}$ која задовољава предходну једначину. Упоредимо угао θ између две криве на S и угао $\bar{\theta}$ између одговарајућих кривих на $\bar{S}$:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{I_p(\vec{v}, \vec{w})}{\sqrt{I_p(\vec{v}, \vec{v}) \cdot I_p(\vec{w}, \vec{w})}} \\ &= \frac{\rho^2(p) I_{f(p)}(f_{*p}(\vec{v}), f_{*p}(\vec{w}))}{\sqrt{\rho^2(p) I_{f(p)}(f_{*p}(\vec{v}), f_{*p}(\vec{v})) \cdot \rho^2(p) I_{f(p)}(f_{*p}(\vec{w}), f_{*p}(\vec{w}))}} = \cos\bar{\theta}. \end{aligned}$$

Претпоставимо сада да је $f : S \to \bar{S}$ конформно пресликавање. f је дифеоморфизам, па карта $x : (U \subset \mathbb{R}^2) \to S$ одређује карту на $\bar{S}$, наиме $f \circ x : (U \subset \mathbb{R}^2) \to \bar{S}$. Зато можемо претпоставити да обе површи имају исте локалне координате. Крива $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ на S се слика у криву $f \circ \alpha(t) = y(u(t), v(t))$ на $\bar{S}$. Због тога је

$$f_{*p}(x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt}) = y_u \frac{du}{dt} + y_v \frac{dv}{dt}.$$

Компоненте прве форме у тачкама $p = x(u, v)$ и $f(p) = y(u, v)$ означимо редом са $E(u, v),\ F(u, v)$, $G(u, v)$ и $\bar{E}(u, v),\ \bar{F}(u, v),\ \bar{G}(u, v)$.

Претпоставимо да су $\vec{v}$ и $\vec{w}$ јединични ортогонални вектори у T_pS. Тада из $I_p(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ следи $I_{f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)) = 0$. Нека је $\vec{V} = f_{*p}(\vec{v})$, $\vec{W} = f_{*p}(\vec{w})$ и $||\vec{V}|| = c_1,\ ||\vec{W}|| = c_2$.

По линеарности метричке форме добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{I_p(\vec{v}, \vec{v} + \vec{w})}{\sqrt{I_p(\vec{v}, \vec{v}) \cdot I_p(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})}} \\ &= \frac{I_{f(p)}(\vec{V}, \vec{V} + \vec{W})}{\sqrt{I_{f(p)}(\vec{V}, \vec{V}) \cdot I_{f(p)}(\vec{V} + \vec{W}, \vec{V} + \vec{W})}} = \frac{c_1^2}{c_1\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \end{aligned}$$

одакле следи $c_1 = c_2$.

Дефинишимо функцију $\rho : S \to \mathbb{R}$ са $\rho(p) = c_1$. Нека је $x_u = a\vec{v} + b\vec{w}$ у тачки $p \in S$; тада је $f_{*p}(x_u) = a\vec{V} + b\vec{W}$ и

$$\begin{aligned} \bar{E} &= I_{f(p)}(f_{*p}(x_u), f_{*p}(x_u)) = a^2\vec{V} \cdot \vec{V} + 2ab\vec{V} \cdot \vec{W} + b^2\vec{W} \cdot \vec{W} \\ &= \rho^2(p)(a^2 + b^2) = \rho^2(p)E. \end{aligned}$$

Слично је $\bar{F} = \rho^2(p)F$ и $\bar{G} = \rho^2(p)G$. Глатким померањем ортонормиране базе у околини тачке p добијамо ову везу компонената функције за све тачке у околини p. □

Дефиниција 12. *Пресликавање $f : (U \subset S) \to \bar{S}$ околине U тачке p из S на $\bar{S}$ је локално конформно пресликавање у тачки p, ако постоје околине $W \subset U$ од p и $\bar{W}$ од $f(p)$ такве да је $f|_W : W \to \bar{W}$ конформно пресликавање. Две површи су локално конформне, ако постоји локално конформно пресликавање у свакој тачки обе за обе површи.*

Најважнија особина конформних пресликавања дата је следећом теоремом:

Теорема 8. *Сваке две регуларне површи су локално конформне.*

Доказ се заснива на могућности параметризације околине произвољне тачке регуларне површи тако да су коефицијенти прве основне форме

$$E = \lambda^2(u, v), \quad F = 0, \quad G = \lambda^2(u, v).$$

Такве координате су *изотермалне.* Када се претпостави егзистенција изотермалних координата регуларне површи S, S је локално конформна равни и композицијом локално конформна било којој другој регуларној површи.

Посматрајмо следећу параметризацију дела сфере S^2

$$x : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2, \quad x(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta),$$

где је φ географска дужина (лонгитуда) и мери се од Гриничког меридијана, а θ географска ширина (латитуда) и мери се од екваторијалне равни. Елемент дужине лука је $ds^2 = (\cos^2\theta)d\varphi^2 + d\theta^2$.

Нека је $Y : (R \subset S^2) \to \mathbb{R}^2$ дифеоморфизам и $d\bar{s}^2 = \bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2$ елемент дужине лука параметризације

$$Y \circ x : (U \subset (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \to \mathbb{R}^2.$$

Тада је на основу претходне теореме Y конформно пресликавање сфере S^2 без једног меридијана на раван ако је $\bar{F} = 0,\ \bar{E} = \rho^2(\varphi,\theta)\cos^2\theta$ и $\bar{G} = \rho^2(\varphi,\theta)$, за неку функцију ρ на U различиту од нуле.

2.4.1 Стереографска пројекција

Пресликавање сфере S^2 без северног пола на раван индуковано трансформацијом

$$u = \ln r_1,\ \varphi = \varphi_1,$$

где су (r_1, φ_1) поларне координате у равни, је конформно пресликавање. Веза између метричких форми равни ds^2 и сфере $d\bar{s}^2$ је

$$ds^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2 = r_1^2(du^2 + d\varphi^2) = e^{2u}d\bar{s}^2.$$

Координате на сфери су

$$u = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c,$$

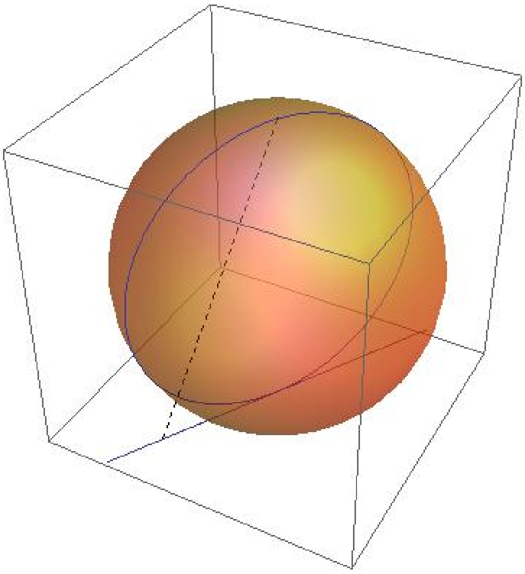
φ и θ су географска дужина и ширина редом, па је за $c = \ln 2a$ пресликавање дато са

$$r_1 = 2a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),\ \varphi_1 = \varphi.$$

Ово пресликавање је стереографска пројекција - пројекција тачака сфере без северног пола из северног пола на раван тангентну на јужни пол. Кругови на сфери који садрже северни пол се стереографском пројекцијом сликају у праве у равни, а кругови који не садрже северни пол се сликају у кругове у равни.

Следећи график у програмском пакету Mathematica демонстрира како се меридијан на сфери претходним пресликавањем слика у праву линију у равни.

Стереографска пројекција



```
Manipulate[
Show[
Module[{φ, θ}, ParametricPlot3D[{Cos[φ]Cos[θ], Sin[φ]Cos[θ], Sin[θ]},
{φ, −π, π}, {θ, −π/2, π/2},
PlotStyle → Directive[Orange, Opacity[0.5], Specularity[White, 10]],
Mesh → None, Axes → False, PlotPoints → 30]],
ParametricPlot3D[{{Cos[φ]Cos[θ], Sin[φ]Cos[θ], Sin[θ]}}, {θ, 0, 2Pi}],
ParametricPlot3D[{{r1[θ]Cos[φ1], r1[θ]Sin[φ1], −1}}, {θ, 0, 2Pi}],
Graphics3D[{Point[{0, 0, 1}], Dashed,
Line[{{0, 0, 1}, {r1[5π/4]Cos[φ1], r1[5π/4]Sin[φ1], −1}}]}]],
Initialization :→ (
φ1 = φ = π/3;
a = 1;
r1[θ_]:=2aTan[θ/2 + π/4]; )]
```

3 Геодезијска пресликавања површи

3.1 Основне особине геодезијских пресликавања

Дефиниција 13. *За дате површи S и $\bar{S}$, дифеоморфизам $f : S \to \bar{S}$ се назива геодезијско пресликавање површи S на површ $\bar{S}$ ако f слика било коју геодезијску криву у S на геодезијску криву у $\bar{S}$.*

Ако је $\bar{S}$ добијена применом неке изометрије на S, унутрашња геометрија површи није промењена. Тада се геодезијске линије на S сликају на геодезијске линије на $\bar{S}$ и пресликавање је геодезијско.

Теорема 9. *[8] Свака локална изометрија између две површи слика геодезијске линије на једној површи на геодезијске линије на другој површи.*

Доказ. Нека су S и $\bar{S}$ две површи, $f : S \to \bar{S}$ локална изометрија између њих и c геодезијска линија на S. Нека је p тачка на c и $x(u,v)$ параметризација од S са тачком p у слици. Тада, део c који лежи у параметризацији x има облик $c(t) = x(u(t), v(t))$ са $a \leqslant t \leqslant b$, где глатке функције u и v задовољавају једначине

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0,$$

$$\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0.$$

Функције Γ^k_{ij} зависе само од прве фундаменталне форме параметризације x, која је иста као прва фундаментална форма параметризације $f \circ x$ на $\bar{S}$. Тада је $\bar{c}(t) = f(x(u(t), v(t)))$, $a \leqslant t \leqslant b$ геодезијска линија на $\bar{S}$, јер задовољава систем једначина геодезијских линија. Значи да је $\ddot{\bar{c}}$ нормално на $\bar{S}$ у $f(p)$. Како је ово тачно за све тачке p, $\bar{c}$ је геодезијска линија на $\bar{S}$. □

Сада претпоставимо да је $\bar{S}$ слика од S при хомотетији простора и нека је k коефицијент хомотетије. Тада су метрички тензори површи повезани са $\bar{g}_{ij} = k^2 g_{ij}$
($\bar{g}^{kl} = 1/k^2 g_{ij}$, $\bar{g}_{ij;k} = k^2 g_{ij;k}$), па су зато *Christoffel*-ови симболи коинцидентни, $\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ ($\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{lj}(g_{ij;k} + g_{jk;i} - g_{ki;j})$). Последично, геодезијске γ на S се сликају на геодезијске $\bar{\gamma}$ на $\bar{S}$, где су параметри дужине лука s на γ и $\bar{s}$ на $\bar{\gamma}$ повезани са $\bar{s} = ks + const$.

Заједничко својство за претходне примере је да при услову одговарајуће координатизације површи имају исте Кристофелове симболе друге врсте у одговарајућим тачкама. Таква геодезијска пресликавања се називају *тривијална геодезијска пресликавања*. Природно, нетривијална геодезијска пресликавања су од већег интереса.

Теорема 10. *[14] Ако је пресликавање f између површи S и $\bar{S}$ геодезијско и конформно, онда је то пресликавање изометрија или сличност.*

Доказ. Посматрајмо систем геодезијских координата на S тако да су параметарске криве $v = const$ геодезијске криве на S. Тада је метричка форма на S

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2.$$

Пресликавање f конформно, па је метричка форма на $\bar{S}$

$$d\bar{s} = \lambda(u,v)[du^2 + Gdv^2].$$

Пошто је f геодезијско пресликавање, слика геодезијских линија $v = const$ на S мора бити геодезијска линија на $\bar{S}$. Услов за ово је на основу (13)

$$\bar{E}_v = \frac{\partial \lambda(u,v)}{\partial v} = 0, \text{ тј. } \lambda = \lambda(u).$$

Нека је γ геодезијска линија на S која сече $v = const$ под углом θ. Тада је њена геодезијске кривина по Лиувиловој формули

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + (k_g)_{v=const} \cos\theta + (k_g)_{u=const} \sin\theta,$$

где су $(k_g)_{v=const}$ и $(k_g)_{u=const}$ геодезијске кривине параметарских кривих $v = const$ и $u = const$ редом. Пошто је $E = 1$ и $F = 0$ следи да је $(k_g)_{v=const} = 0$ и $(k_g)_{u=const} = \frac{G_u}{2G}$. За геодезијске линије је $k_g = 0$, па Лиувилова формула постаје

$$0 = \frac{d\theta}{ds} + \frac{G_u}{2G}\frac{dv}{ds},$$

односно

$$d\theta + \frac{G_u}{2G}dv = 0.$$

Пресликавање f је геодезијско и конформно, па је одговарајућа једначина на $\bar{S}$

$$0 = d\theta + \frac{\bar{G}_u}{2\bar{G}}dv.$$

Дакле, важи

$$\frac{G_u}{G} = \frac{\bar{G}_u}{\bar{G}} = \frac{(\lambda G)_u}{\lambda G} = \frac{\lambda_u G + \lambda G_u}{\lambda G} = \frac{G_u}{G} + \frac{\lambda_u}{\lambda},$$

одакле је $\lambda_u = 0$, тј. $\lambda = const$. Зато је пресликавање сличност, које постаје изометрија за $\lambda = 1$. $\square$

Теорема 11. *При геодезијском пресликавању површи чувају се конјуговани и асимптотски правци.*

Доказ. Доказаћемо ову теорему геометријски. Посматрајмо криву c на површи S и развојну површ D која ограничава S дуж c. Геодезијско пресликавање површи S на површ $\bar{S}$, криву c слика на криву $\bar{c}$ и развојну површ D на развојну површ $\bar{D}$ која ограничава S дуж $\bar{c}$. Тангенте на C и $\bar{c}$ одговарају једна другој при пресликавању, као и генераторне линије на D и $\bar{D}$. Пошто генераторне линије површи D и $\bar{D}$ имају правце конјуговане са правцима c и $\bar{c}$ дуж тих кривих редом, теорема је доказана. $\square$

3.2 Белтрамијева теорема

Посматрајмо проблем који је Белтрами поставио и делимично решио: наћи локални услов на пару површи S и $\bar{S}$ који гарантује да постоји локални дифеоморфизам $S \to \bar{S}$ који геодезијске на S слика на геодезијске на $\bar{S}$. Белтрами је решио проблем када је једна од њих еуклидска раван.

Теорема 12. ***(Белтрами,*** 1865.*) Ако постоји геодезијско пресликавање са површи S на еуклидску раван, тада је Гаусова кривина површи S константна.*

Доказ. Претпоставимо да је $f : (W \subset S) \to \mathbb{E}^2$ геодезијско пресликавање. Нека је $U \subset \mathbb{E}^2$ отворен скуп који лежи у слици f и нека је $x : U \subset \mathbb{E}^2 \to W$ карта дата са $x = f^{-1}$. Пошто је f геодезијско, праве линије у U се сликају у геодезијске линије на S. Нека је $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ метрика на S. Претпоставимо да се $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ слика у геодезијску линију $x \circ \gamma(t)$ на S. По претпоставци, $\gamma(t)$ је део еуклидске праве, тј.

$$au(t) + bv(t) + c = 0,$$

за a и b који нису истовремено нула. Пошто је $au'(t)+bv'(t)=0$ и $au''(t)+bv''(t)=0$, важи:

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} = 0, \quad \text{па је} \quad u'v''-v'u''=0.$$

Општи услов да крива буде геодезијска је на основу (12)

$$\Gamma_{11}^2(u')^3+(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)(u')^2v'+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2-\Gamma_{22}^1(v')^3=0.$$

Бирањем појединачних правих различитих нагиба у U за $\gamma(t)$ добијамо релације:

$$\Gamma_{11}^2=0=\Gamma_{22}^1, \quad 2\Gamma_{12}^2=\Gamma_{11}^1, \quad 2\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2.$$

Једначине (5) које повезују Кристофелове симболе и Гаусову кривину се у овом случају могу поједноставити:

(а) $EK=\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-(\Gamma_{12}^2)_u$, (б) $FK=(\Gamma_{12}^1)_u-(2\Gamma_{12}^2)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2$,
(в) $GK=\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1-(\Gamma_{12}^1)_v$, (г) $FK=(\Gamma_{12}^2)_v-(2\Gamma_{12}^1)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2$.

Одузимањме (г) од (б) имамо

$$(\Gamma_{12}^1)_u=(\Gamma_{12}^2)_v.$$

Зато можемо (б) и (г) написати као

$$\text{(б) } FK=\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-(\Gamma_{12}^2)_v, \qquad \text{(г) } FK=\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-(\Gamma_{12}^1)_u.$$

Сада користимо једначине

$$(\Gamma_{12}^1)_{uv}=(\Gamma_{12}^1)_{vu}, \quad \text{и} \quad (\Gamma_{12}^2)_{uv}=(\Gamma_{12}^2)_{vu}.$$

Узимањем парцијалних извода по v у једначини (а) и по u у једначини (б) имамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial(EK)}{\partial v}&=E_vK+EK_v=2\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_{uv},\\ \frac{\partial(FK)}{\partial u}&=F_uK+FK_u=\Gamma_{12}^1(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1)_u-(\Gamma_{12}^2)_{uv},\end{aligned}$$

па је $EK_v-FK_u+K(E_v-F_u)=2\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^2)_v-\Gamma_{12}^1(\Gamma_{12}^2)_u-\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1)_u$.
Заменом (а), (б) и (г) у претходној једначини следи

$$\begin{aligned}EK_v-FK_u &= -K(E_v-F_u)+2\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-FK)\\ &\quad -\Gamma_{12}^1(\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-EK)-\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-FK)\\ &= -K(E_v-F_u)+K(\Gamma_{12}^1E-\Gamma_{12}^2F).\end{aligned}$$

Пошто је $\Gamma_{11}^2=0$ и $\Gamma_{11}^1=2\Gamma_{12}^2$, можемо написати

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1E-\Gamma_{12}^2F &= \Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F-2\Gamma_{12}^2F-\Gamma_{11}^2G\\ &= \Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F-(\Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G)\\ &= \tfrac{1}{2}E_v-(F_u-\tfrac{1}{2}E_v)=E_v-F_u,\end{aligned}$$

где смо из једначина (2) изразили $\Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F=E_v$ и $\Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G=2F_u-E_v$.
Зато је $EK_v-FK_u=0$.

Рачунањем $\dfrac{\partial(FK)}{\partial v}-\dfrac{\partial(GK)}{\partial u}$ изводимо сличан рачун и добијамо $FK_v-GK_u=0$. У матричном облику:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_v \\ -K_u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пошто је $EG-F^2\neq 0$, следи да је $K_u=K_v=0$, па је K константно. □

Важи и обрат претходне теореме: ако је S површ константне Гаусове кривине, тада за сваку тачку $p \in S$ постоји параметризација $\sigma : U \to S$, таква да је за сваку тачку $p \in \sigma(U)$, $\sigma^{-1} : \sigma(U) \to U$ геодезијско пресликавање.

Да би то доказали, потребна је следећа теорема:

Теорема 13. ***(Миндинг)*** *Површи исте константне Гаусове кривине су локално изометричне.*

Претпоставимо да је S површ константне Гаусове кривине. Изометрије и хомотетије су геодезијска пресликавања, а при хомотетији просора са коефицијентом k, Гаусове кривине површи S и њене слике $\bar{S}$ су повезане са $\bar{K} = \frac{1}{k^2}K$. На основу ових чињеница и претходне теореме, довољно је показати да постоји геодезијско пресликавање са површи S на раван у три случаја:

(i) S је раван;

(ii) S је јединична сфера;

(iii) S је псеудосфера.

Случај (i) је тривијалан.

Посматрајмо случај (ii). Инверз централне пројекције f са центром у координатном почетку доње хемисфере јединичне сфере S^2 на раван $z = -1$ је параметризација отвореног подскупа S^2 са особином да геодезијске линије на S^2 одговарају правама у карти. Случај (iii) је сложенији и као и доказ теореме 13, може се наћи у [8].

3.3 Динијева теорема

За доказ Динијеве теореме, потребна нам је следећа теорема:

Теорема 14. *[14] (Тисо) За сваки дифеоморфизам $f : S \to \bar{S}$ који није конформно пресликавање у свакој тачки p површи S постоји јединствено одређен пар ортогоналних праваца тако да су одговарајући правци на $\bar{S}$ такође ортогонални.*

Доказ. Нека је $x : U \to \mathbb{E}^3$ параметризација површи S у околини тачке p и нека површи S и $\bar{S}$ имају исте локалне координате (u, v) у тој околини, тј. $y = x \circ f$ је одговарајућа параметризација површи $\bar{S}$. Претпоставимо да вектори $X = \sum X^i x_i$ и $Y = \sum Y^i x_i$ из TpS одређују два ортогонална правца у тачки $p \in S$, а вектори $\bar{X} = \sum \bar{X}^i y_i$ и $\bar{Y} = \sum \bar{Y}^i y_i$ одговарајуће ортогоналне правце у $\bar{p}$ на $\bar{S}$. Тада је

$$EX^1Y^1 + F(X^1Y^2 + X^2Y^1) + GX^2Y^2 = 0,$$

односно

$$(EY^1 + FY^2)X^1 + (FY^1 + GY^2)X^2 = 0. \tag{19}$$

Одговарајући правци на $\bar{S}$ су такође ортогонални, дакле

$$\bar{E}\bar{X}^1\bar{Y}^1 + \bar{F}(\bar{X}^1\bar{Y}^2 + \bar{Y}^1\bar{X}^2) + \bar{G}\bar{X}^2\bar{Y}^2 = 0.$$

Пошто површи имају исте кординате, важи $\bar{X}^1 = \dfrac{du}{d\bar{s}} = \dfrac{du}{ds} \cdot \rho,\ \rho = \dfrac{ds}{d\bar{s}}$ и слично за $\bar{X}^2,\ \bar{Y}^1$ и $\bar{Y}^2$. Због тога последња једначина постаје

$$(\bar{E}Y^1 + \bar{F}Y^2)X^1 + (\bar{F}Y^1 + \bar{G}Y^2)X^2 = 0. \tag{20}$$

Елиминацијом X^1 и X^2 из једначина (19) и (20) следи

$$(E\bar{F} - \bar{E}F)\left(\frac{Y^1}{Y^2}\right)^2 + (E\bar{G} - \bar{E}G)\left(\frac{Y^1}{Y^2}\right) + (F\bar{G} - \bar{F}G) = 0. \tag{21}$$

Ова квадратна једначина одређује два ортогонална правца (X^1, X^2) и (Y^1, Y^2) у свакој тачки. Ако означимо са $P = E\bar{F} - \bar{E}F$, $2Q = E\bar{G} - \bar{E}G$ и $R = F\bar{G} - \bar{F}G$, онда важи

$$\frac{X^1}{X^2} + \frac{Y^1}{Y^2} = \frac{-2Q}{P} \text{ и } \frac{X^1Y^1}{X^2Y^2} = \frac{R}{P},$$

односно

$$\frac{X^1Y^1}{R} = \frac{X^2Y^2}{P} = \frac{X^1Y^2 + Y^1X^2}{-2Q}.$$

Зато услов ортогоналности $EX^1Y^1 + F(X^1Y^2 + Y^1X^2) + GX^2Y^2 = 0$ добија облик $ER - 2FQ + QP = 0$, који је у овом случају задовољен.

Дискриминанта једначине (21) је

$$\begin{aligned} & (E\bar{G} - \bar{E}G)^2 - 4(E\bar{F} - \bar{E}F)(F\bar{G} - \bar{E}G) \\ = \ & (E\bar{G} - \bar{E}G)^2 - 4(E\bar{F} - \bar{E}F)\frac{1}{E}(F(E\bar{G} - \bar{E}G) - G(E\bar{F} - \bar{E}F)) \\ = \ & \left[(E\bar{G} - \bar{E}G) - \frac{2F}{E}(E\bar{F} - \bar{E}F)\right]^2 + 4\frac{EG - F^2}{E^2}(E\bar{F} - \bar{E}F)^2. \end{aligned}$$

Пресликавање није конформно, па не важи $E/\bar{E} = F/\bar{F} = G/\bar{G}$. Дакле, $E\bar{G} - \bar{E}G$ и $E\bar{F} - \bar{E}F$ нису истовремено нула. Пошто је и $E \neq 0$ и $EG - F^2 > 0$, дискриминанта је увек позитивна и корени једначине су реални и различити. Дакле, у свакој тачки P површи S постоје тачно два ортогонална правца таква да су одговарајући правци на $\bar{S}$ такође ортогонални. □

У. Дини је 1869. доказао:

Теорема 15. *Постоји геодезијско пресликавање између површи S и $\bar{S}$ које није изометрија или сличност ако и само ако њихове метрике имају Лиувилов облик:*

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2) \quad u \quad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right), \tag{22}$$

где је U функција која зависи само од u и V функција која зависи само од v.

Доказ. Нека је $f : S \to \bar{S}$ нетривијално геодезијско пресликавање. Тада по теореми Тисоа за сваку тачку P из S постоји јединствено одређен пар ортогоналних праваца таквих да су одговарајући правци на $\bar{S}$ такође ортогонални. Ако су параметарске криве изабране дуж тих праваца, тада су метрике на S и $\bar{S}$ редом

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2, \quad \text{и} \quad d\bar{s}^2 = \bar{E}du^2 + \bar{G}dv^2.$$

Општа једначина геодезијских линија на првој површи је према (11)

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{-G_u}{2E}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + \left(\frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{2G}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(\frac{E_u}{2E} - \frac{G_u}{G}\right)\frac{dv}{du} + \frac{E_v}{2G}.$$

Општа једначина геодезијских линија на другој површи има аналоган облик. Ако је пресликавање између површи геодезијско, опште једначине геодезијских линија морају бити исте, па је потребан и довољан услов да пресликавање буде геодезијско

$$\frac{G_u}{E} = \frac{\bar{G}_u}{\bar{E}},$$

$$\frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{2G} = \frac{\bar{E}_v}{\bar{E}} - \frac{\bar{G}_v}{2\bar{G}},$$

$$\frac{E_u}{2E} - \frac{G_u}{2G} = \frac{\bar{E}_u}{2\bar{E}} - \frac{\bar{G}_u}{\bar{G}},$$

$$\frac{E_v}{G} = \frac{\bar{E}_v}{\bar{G}}.$$

Из друге од претходних једначина добијамо

$$\frac{E^2}{G} = \frac{\bar{E}^2}{\bar{G}} \cdot U(u),$$

а из треће

$$\frac{G^2}{E} = \frac{\bar{G}^2}{\bar{G}} \cdot V(v),$$

где је U фунција која зависи само од u и V функција која зависи само од v, одакле следи да је $E = \bar{E}U^2V$ и $G = \bar{G}UV^2$. Када те вредности за $\bar{E}$ и $\bar{G}$ заменимо у прву једначину, добијамо

$$G_u(U - V) = GU_u,$$

одакле је

$$G = (U - V)V'^2(v),$$

где је V' функција која зависи само од v. Када вредности за $\bar{E}$ и $\bar{G}$ заменимо у последњу једначину, добијамо

$$E_v(V-U) = EV_v,$$

одакле је

$$E = (V-U){U'}^2(u),$$

где је U' функција која зависи само од u. Зато су метрике површи S и $\bar{S}$ редом

$$ds^2 = (U-V)({U'}^2du^2 + {V'}^2dv^2), \quad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{{U'}^2}{U}du^2 + \frac{{V'}^2}{V}dv^2\right),$$

или после одговарајуће трансформације координата

$$ds^2 = (U-V)(du^2 + dv^2), \quad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{1}{U}du^2 + \frac{1}{V}dv^2\right),$$

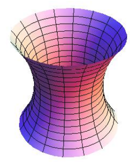
па су површи S и $\bar{S}$ *Лиувилове*. $\square$

3.4 Примери геодезијских пресликавања

3.5 Пример изометрије површи у $\mathbb{E}^3$

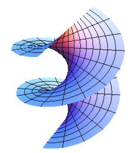
Пример 5. *Нека је M ротациона површ*

$$f(u,\theta) = (ch u \cos\theta, ch u \sin\theta, u),$$
$$\text{за } -sh^{-1}(1) < u < sh^{-1}(1) \text{ и } 0 < \theta < 2\pi.$$



Нека је N кружна завојница

$$g(v,\phi) = (v\cos\phi, v\sin\phi, \phi),$$
$$\text{за } -1 < v < 1 \text{ и } 0 < \phi < 2\pi.$$



Пресликавање $(g^{-1} \circ F \circ f)(u,\theta) = (shu, \theta)$ је диференцијабилно и одређује диференцијабилну функцију

$$F : M \to N, \quad F(f(u,\theta)) = g(shu, \theta).$$

Примећујемо да је F бијекција и има диференцијабилан инверз, дакле дифеоморфизам.

Метричка форма за површ M у односу на координате (u,θ) је

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} ch^2 u & 0 \\ 0 & ch^2 u \end{pmatrix},$$

а за површ N у односу на координате (v,ϕ) је

$$(\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+v^2 \end{pmatrix}.$$

Нека је крива $\gamma : [c,d] \to M$ задата формулом $\gamma(t) = f(u(t), \theta(t))$. Тада је дужина вектора $d\gamma/dt$ једнака $ch(u(t))(\dot{u}^2 + \dot{\theta}^2)^{1/2}$.

С друге стране је $(F\circ\gamma)(t) = g(sh(u(t)), \theta(t))$. Дужина вектора $d(F\circ\gamma)/dt$ једнака је такође $(ch^2(u(t))\dot{u}^2 + (1+sh^2u(t))\dot{\theta}^2)^{1/2} = ch(u(t))(\dot{u}^2+\dot{\theta}^2)^{1/2}$.

Криве γ и $F\circ\gamma$ су исте дужине. Дужина криве γ је једнака $\int_c^d ||d\gamma/dt||dt$, а дужина криве $F\circ\gamma$ је $\int_c^d ||d(F\circ\gamma)/dt||dt$. Како су подинтегралне функције једнаке криве γ и $F\circ\gamma$ су истих дужина. F је дифеоморфизам, па је изометрија.

На пример, меридијани на катеноиду $f(u,\theta_0) = (ch u\cos\theta_0, ch u \sin\theta_0, u)$ се сликају у $(F\circ f)(u,\theta_0) = g(shu,\theta_0) = (shu\cos\theta_0, shu\sin\theta_0, \theta_0)$, што су сегменти правих на хеликоиду. Паралела $f(0,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ на катеноиду се слика у $(F\circ f)(0,\theta) = (0,0,\theta)$, што је сегмент вертикалне праве на хеликоиду. Претходно извођење даје да се произвољне геодезијске линије површи M сликају у геодезијске линије површи N.

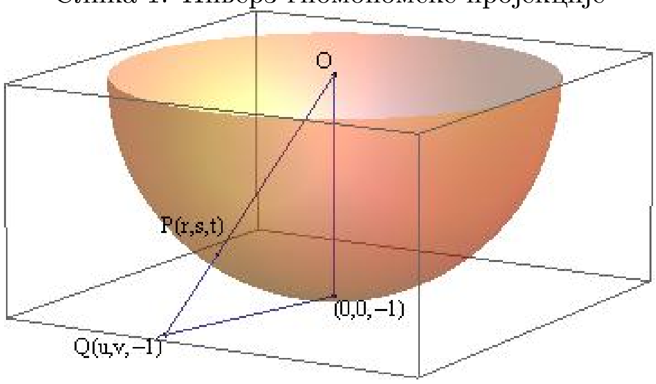
3.6 Гномонска пројекција

Први нетривијални пример геодезијски еквивалентних метрика дао је Лагранж. Он је посматрао централну пројекцију из центра сфере S^2 доње полу-сфере на раван тангентну на јужни пол. При тој пројекцији геодезијске линије на сфери се сликају у праве у равни, будући да су геодезијске линије у обе метрике пресеци равни које садрже координатни почетак са површи. Ова пројекција се зове *гномонска пројекција.*

Инверз гномонске пројекције има облик $x : \mathbb{R}^2 \to S^2$,

$$x(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(u,v,-1). \tag{23}$$

Слика 1: Инверз гномономске пројекције



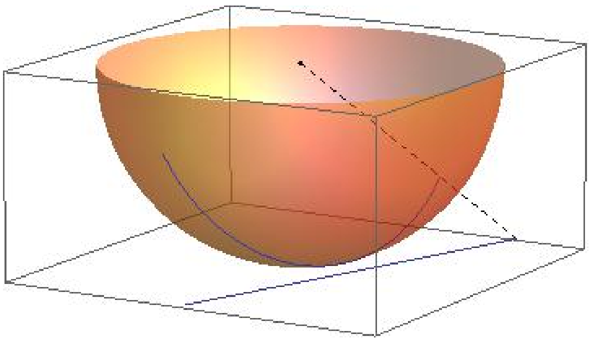
Означимо са $Q(u,v,-1)$ тачку у равни тангентној на јужни пол и посматрајмо сегмент у $\mathbb{R}^3$ који спаја Q и координатни почетак (Слика 1). Он пролази кроз тачку P на сфери, чије су координате $x(u,v) = P(r,s,t)$. Из линеарне зависности вектора $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ је

$$(0,0,0) = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = (-s-tv, r+tu, rv-su).$$

Следи да је $r = -tu$ и $s = -tv$. Из услова $r^2+s^2+t^2 = 1$ и $t < 0$ добијамо $t = -1/\sqrt{1+u^2+v^2}$.

На основу једначине (23), праве у равни тангентној на јужни пол $c(t) = (t, kt+n, -1)$ се сликају у велике кругове на S^2, $\bar{c}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{kt+n}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right)$.

Инверз гномономске пројекције-кореспоaccess



```
Manipulate[
Show[
Module[{φ, θ}, ParametricPlot3D[{Cos[φ]Cos[θ], Sin[φ]Cos[θ], Sin[θ]},
{φ, −π, π}, {θ, −π/2, 0},
PlotStyle → Directive[Orange, Opacity[0.5], Specularity[White, 10]],
Mesh → None, Axes → False,
PlotPoints → 30, ViewPoint → {6, −10, 2.5}]],
ParametricPlot3D[{{t, kt + n, −1}}, {t, −2/3, 2/3}],
ParametricPlot3D[{t/Sqrt[t^2 + (kt + n)^2 + 1], (kt + n)/Sqrt[t^2 + (kt + n)^2 + 
−1/Sqrt[t^2 + (kt + n)^2 + 1]}, {t, −2/3, 2/3}],
Graphics3D[{Point[{0, 0, 0}], Dashed, Line[{{0, 0, 0}, {2/3, 1, −1}}]}]],
Initialization :→ (
k = 3;
n = −1; )]
```

3.7 Белтрамијев пример

Посматрајмо стандардну сферу

$$S^n = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

са метриком g која је рестрикција еуклидске метрике на сфери. Геодезијске линије на сфери су велики кругови који су пресеци сфере са равнима које садрже центар сфере. Доказ ове чињенице може се извести посматрањем рефлексије у односу на одговарајуће равни. То је изометрија сфере чији је скуп фиксних тачака велики круг. Када геодезијска линија не би била велики круг већ тангента на њега (различита од великог круга), тада би слика те геодезијске линије при рефлексији била геодезијска линија, што је у контрадикцији са теоремом о њиховој јединствености.

За свако $A \in Sl(n+1)$ конструишимо пресликавање

$$a : S^n \to S^n, \quad a(v) = \frac{A(v)}{||A(v)||},$$

где је $A(v)$ производ матрице A и $v \in S^n$ посматран као вектор из $\mathbb{R}^{n+1}$ и $||\cdot||$ означава стандардну норму на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Дифеоморфизам a је геодезијско пресликавање. Геодезијске линије у g су велики кругови (пресеци сфере са равнима кроз координатни почетак). Пошто је множење са A линеарно пресликавање, равни се сликају у равни. Нормализација $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{||\omega||}$ слика пробушене равни у њихов пресек са сфером, па a слика велике кругове у велике кругове.

Може се показати ([4]) да се сва геодезијска пресликавања сфере S^n могу конструисати на овај начин. Очигледно, a је изометрија ако и само ако је A сличност.

4 Диференцијабилне многострукости

4.1 Тополошке и диференцијабилне многострукости

Многострукост се може схватити као n-димензионо уопштење кривих и површи.

Дефиниција 14. *Ако је M Хауздорфов тополошки простор са пребројивом базом, такав да за сваку тачку $p \in M$ постоји отворен скуп $U \subset M$ који садржи тачку p и хомеоморфизам φ којим се U пресликава у неки отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, онда је M n-димензиона тополошка многострукост.*

Уређен пар (U, φ) називамо *локалном картом* или *локалним координатним системом* многострукости M, а пресликавање φ^{-1} локалном параметризацијом. Скуп локалних координатних система $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ таквих да је $\bigcup U_\alpha = M$ зовемо *атлас.*

Нека је (U, φ) једна карта многострукости M. U је отворен подскуп од M и $\varphi : U \to \varphi(U)$ хомеоморфизам на отворен подскуп $\varphi(U)$ у $\mathbb{R}^n$. $x^i : U \to \mathbb{R}$ су координатне функције у карти, $x^i(p) = \pi_i(\varphi(p))$, $p \in M$, где је $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ канонска пројекција на i-ту компоненту. Ради краћег записа, често ћемо идентификовати $(x^i) \equiv (U, \varphi)$.

Две карте у тополошкој многосрукости M

$$(x^i) = (U, \varphi),\ \varphi : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad (y^i) = (V, \psi),\ \psi : V \to \mathbb{R}^n$$

индукују пресликавања $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ са доменом $\psi(U \cap V)$ и $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ са доменом $\varphi(U \cap V)$ која се називају *променом локалних координата* (x^i) и (y^i) редом.
ресликавању $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ одговара промена локалних координата

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Дефиниција 15. *Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ атлас n-димензионе тополошке многострукости M такав да су промене координата између било које две карте дифеоморфизми класе C^r. Тада је $\mathcal{A}$ диференцијабилни атлас класе C^r.*

Уколико је атлас класе C^∞, једноставно ћемо га звати диференцијабилним атласом. Избор атласа није јединствен. Унија два атласа је такође (тополошки) атлас, али диференцијабилност се не мора очувати. Уколико је унија два диференцијабилна атласа $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ такође диференцијабилни атлас, онда кажемо да су атласи $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ еквивалентни (ова релација је релација еквиваленције).

Дефиниција 16. *Тополошка многострукост заједно са класом еквиваленције диференцијабилних атласа је диференцијабилна многострукост.*

Пример 6. *Јединична сфера S^2 је диференцијабилна многострукост.*
Диференцијабилни атлас на S^2 је скуп

$$\{(S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N), (S^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)\}$$

где су N и S северни и јужни пол редом, а φ_N и φ_S стереографске пројекције из тих полова.

4.2 Диференцијабилна пресликавања многострукости

Нека су M и N две диференцијабилне многострукости димензија m и n и $f : M \to N$ непрекидно пресликавање. Нека су, редом, (U, φ) и (V, ψ) произвољне локалне карте многострукости M и N. Тада је $U \cap f^{-1}(V)$ отворен скуп у M, $\varphi(U \cup f^{-1}(V))$ отворен скуп у $\mathbb{R}^m$, који се композицијом $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ слика у подскуп од $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 17. *Нека су M и N диференцијабилне многострукости и $f : M \to N$ непрекидно пресликавање. Ако постоје диференцијабилни атласи $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B\}$ многострукости M и N редом такви да је пресликавање*

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cup f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

диференцијабилно за све $\alpha \in A$, $\beta \in B$, онда је f диференцијабилно пресликавање.

Очигледно је композиција диференцијабилних пресликавања опет диференцијабилно пресликавање.

Диференцијабилно пресликавање $f : M_n \to \mathbb{R}$ се назива (диференцијабилна реална) функција. Скуп свих глатких фукција на M се обично означава са $\mathcal{F}(M)$.

Дефиниција 18. *Диференцијабилно пресликавање $f : M \to N$ је дифеоморфизам ако је хомеоморфизам и ако је f^{-1} такође глатко пресликавање.*

Дефиниција 19. *Пресликавање $f : M \to N$ се назива локални дифеоморфизам, ако за сваку тачку $p \in M$ постоји околина U таква да је $f(U)$ отворен у N и $f|_U : U \to f(U)$ дифеоморфизам.*

4.3 Тангентни простор

4.3.1 Дефиниција тангентног простора

Слично као за криве и површи у $\mathbb{E}^3$, можемо увести и појам тангентног простора диференцијабилне многострукости у некој њеној тачки.

Околина тачке p диференцијабилне многострукости M је репрезентована неком картом $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, па тангентни простор можемо идентификовати са векторским простором $\mathbb{R}^n$, а тангентни вектор многострукости M можемо репрезентовати неким тангентним вектором $X_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Нека је (U_β, φ_β) нека друга карта која прекрива околину тачке p еквивалента карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Питање је који вектор из $\mathbb{R}^n$ је представник тангентног вектора путем друге карте.

Дефиниција 20. *Нека је M n-димензиона многострукост са диференцијабилним атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$. Нека су $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) две карте које прекривају отворену околину тачке p. Два представника X_α и X_β која одговарају овим картама су еквивалентна $X_\alpha \sim X_\beta$, уколико је*

$$X_\beta = d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(X_\alpha).$$

Релација $\sim$ је релација еквиваленције.

Дефиниција 21. *Класа еквиваленције релације $\sim$ је тангентни вектор у тачки p на M. Тангентни простор у тачки p, у ознаци T_pM је скуп свих тангентних вектора у тачки p на M, односно репрезентован је векторским простором $\mathbb{R}^n$.*

С обзиром да је тангентни простор многострукости M репрезентован векторским простором $\mathbb{R}^n$, он наслеђује и структуру векторског простора са $\mathbb{R}^n$ и та наслеђена структура не зависи од избора карте, односно представника. Свака два представника се пресликавају један у други диференцијалом пресликавања $d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$, које је линеарно, па је у сагласности са операцијама сабирања вектора и множења вектора скаларом.

4.3.2 Тангентни вектор као извод у правцу

Тангентни вектор на многострукости се може дефинисати и као уопштење "извода у правцу" у $\mathbb{R}^n$. Ако је X_p вектор у тачки p из $\mathbb{R}^n$ и f глатка функција у околини p дефинишемо извод функције f у правцу вектора X, $X_p f = X_p \cdot (grad(f))_p$, где је $grad(f)$ градијентно векторско поље од f. Из особина скаларног производа и градијента следи

- $\mathbf{X_p}(af + bg) = a\mathbf{X_p}(f) + b\mathbf{X_p}(g)$ ($\mathbb{R}$-линеарност) и
- $\mathbf{X_p}(fg) = \mathbf{X_p}(f)g(p) + f(p)\mathbf{X_p}(g)$ (Лајбницово правило),

где је g глатка функција у околини p и a и b реални бројеви.

Нека је M C^r-диференцијабилна многострукост димензије n.

Дефиниција 22. *Тангентни вектор у тачки $p \in M$ је реално-вредносно пресликавање $\mathbf{v} : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ такво да важи*

- $\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g)$ *и*
- $\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f)g(p) + f(p)\mathbf{v}(g)$.

за све $a, b \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

На скупу T_pM свих тангентних вектора на M у p уведена је линеарна структура која чини T_pM реалним векторским простором димензије n.

Специјална база тангентног простора T_pM састављена је од n тангентних вектора координатних линија у тачки p. Ови вектори су означени са $\frac{\partial}{\partial x^i}$, или са ∂_i, а база формирана помоћу њих се зове *координатна база* или *природна база*.

Нека је $TM = \{(p, \mathbf{v}) : p \in M, \mathbf{v} \in T_pM\}$. Можемо посматрати TM као диференцијабилну многострукост димензије $2n$. TM заједно са диференцијабилном структуром се назива тангентно раслојење на M.

Дефиниција 23. *Коваријантни вектор (ковектор) или 1-форма $\omega(x)$ у тачки p је линеарно пресликавање*

$$\omega : T_pM \to \mathbb{R}.$$

4.4 Диференцијал глатког пресликавања

Дефиниција 24. *Нека је $\Phi : M \to N$ глатко пресликавање између диференцијабилних многострукости.. За $p \in M$*

$$\Phi_{*p} : T_pM \to T_{\Phi(p)}N, \quad \mathrm{v}(f \circ \Phi) \mapsto \Phi_{*p}(.v)(f)$$

(означава се и са $d\Phi_p$) је диференцијал пресликавања Φ у тачки p.

У локалним координатама $\varphi = (x^i)$ у околини p и $\psi = (y^i)$ у околини $\Phi(p)$

$$\Phi_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j} \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\Phi(p)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Да би смо увели тангентни вектор криве $l : I \to M,\ I \subset \mathbb{R}$, може се искористити диференцијал пресликавања $l_* : T\mathbb{R} \to TM$

$$\lambda(t) = l'(t) = l_* \left(\frac{d}{du}\bigg|_t \right) = \frac{d(x^i \circ l)}{du}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{l(t)}.$$

Диференцијали координатних функција dx^i у тачки p формирају скуп од n линеарно независних ковектора, који обухватају дуални простор од T_pM - котангентни простор T_p^*M. База $\{dx^i\}$ је дуална природној бази $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, тј.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(dx^i) = \delta^i_j.$$

4.5 Тензори на многострукости

Декартов производ

$$\Pi^r_s = \underbrace{T_p^*M \times T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_{r} \times \underbrace{T_pM \times T_pM \times \cdots \times T_pM}_{s}$$

простора ковектора и простора вектора у тачки p је уређен скуп ковектора и вектора $(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s)$.

Тензор типа (r, s) у тачки p је пресликавање T^r_s које је линеарно по сваком аргументу и пресликава $(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s)$ на број $T(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s)$.

Дефиниција 25. *Систем $T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ је тензор типа (r, s), ако при промени координата (24) важи закон трансформације*

$$T^{i'_1,\ldots,i'_r}_{j'_1,\ldots,j'_s} = \frac{\partial y^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{j'_s}} T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}.$$

4.6 Векторско поље

Векторско поље X на M се може дефинисати као гладак избор тангентних вектора $X_p \in T_pM$ за свако $p \in M$. Услов глаткости значи да је функција $p \mapsto X_p(f)$ глатка функција на M за произвољну глатку функцију f на M. Ако уведемо сабирање векторских поља у тачки и множење векторског поља глатком функцијом, скуп $\mathfrak{X}(M)$ свих векторских поља на M је модул над прстеном $\mathcal{F}(M)$.

У локалним координатама (x^i) на $U \subset M$, координатна векторска поља $\frac{\partial}{\partial x^i}$ на U су глатка, независна и формирају координатну базу у свакој тачки. Свако векторско поље X на M може се на U написати као $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, X^i су компоненте векторског поља X.

Векторско поље на многострукости се претставља диференцијалном једначином. Кажемо да је крива $l : I \to M$ интегрална крива векторског поља $X \in \mathfrak{X}(M)$ ако је $l' = X$. У локалним координатама, када са X^i означимо компоненте од X, претходни услов се може написати као систем обичних диференцијалних једначина првог реда $dx^i/dt = X^i(x^1 \circ l, \cdots, x^n \circ l), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$.

За C^r-диференцијабилно векторско поље и фиксирану тачку p увек постоји интегрална крива l_p дефинисана у околини $0 \in \mathbb{R}$ за коју је $l(0) = p$.

4.6.1 Линеарна повезаност

Дефиниција 26. *Линеарна повезаност на многострукости M је пресликавање* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *тако да за све* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, $r \in \mathbb{R}$ *и* $f \in C^\infty(M)$ *важи*

(i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(ii) $\nabla_{X+W} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$,

(iii) $\nabla_{f(p)X} Y = f(p)\nabla_X Y$ *и*

(iv) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ *(Лајбницова формула).*

Оператор $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ назива се *коваријантни извод* у правцу векторског поља X.
У локалним координатама у односу на карту (U, φ), $\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$,

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{25}$$

где су функције $\Gamma^k_{ij} \in C^\infty(M)$ које карактеришу линеарну повезаност Кристофелови симболи друге врсте или компоненте повезаности ∇ у односу на посматрану карту.

Линеарна повезаност ∇ индукује коваријантно диференцирање тензорских поља у односу на векторско поље. Ако је T тензор типа (p, q), тада је његов коваријантни извод ∇T тензор типа $(p, q + 1)$:

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,k} = \nabla_{\partial/\partial x^k} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \frac{\partial}{\partial x^k} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + \sum_{s=1}^{p} \Gamma^{i_s}_{\alpha k} T^{i_1\cdots i_{s-1}\alpha i_{s+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} - \sum_{s=1}^{q} \Gamma^{\alpha}_{j_s k} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{s-1}\alpha j_{s+1}\cdots j_q},$$

где ”,”означава коваријантно диференцирање у односу на повезаност ∇.

4.6.2 Риманове многострукости

Риманова многострукост је диференцијабилна многострукост таква да је за $p \in M$ на тангентном простору T_pM дефинисан позитивно дефинитан скаларни производ g који је диференцијабилна функција тачке $p \in M$. То значи да су испуњени следећи услови:

(i) $g(V, W) = g(W, V)$, за $V, W \in T_pM$,

(ii) g је билинеарна функција по V и W,

(iii) $g(V, V) > 0$ за све $V \neq 0 \in T_pM$,

(iv) $g(X, Y)$ је глатка функција на M за произвољна глатка векторска поља $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

У локалним координатама (x^i), метрика g је дата својим компонентама $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, или у класичним ознакама:

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j.$$

На Римановој многострукости Кристофелови симболи уведени са (25) имају исту улогу као Кристофелови симболи уведени у поглављу 1 за површи смештене у $\mathbb{E}^3$.

4.7 Паралелно померање

Нека је $c : I \to M,\ t \mapsto (t) = (x^1 \circ c(t), \cdots, x^n \circ c(t))$ $((U, \varphi) = (x^i)$ локална карта) диференцијабилна крива на многострукости M са линеарном повезаношћу ∇ и нека λ означава тангентно векторско поље дуж c.

Коваријантно диференцирање векторског поља X дуж криве $c(t)$ је дато са
$\nabla_t X := \nabla_\lambda X$.

За векторско поље X дуж c кажемо да је *паралелно дуж* l ако важи $\nabla_t X = 0$ за свако t.

Концепт паралелног векторског поља дуж криве не зависи од параметризације појединачне криве.

Теорема 16. *Нека је $c : [a, b] \to M$ крива на M, $p = c(a)$ и $\tilde{Y}_p \in T_p M$. Тада постоји јединствено векторско поље Y паралелно дуж криве c, тако да је $Y_{c(a)} = \tilde{Y}_p$. Пресликавање $P_{a,t} : T_{c(a)}M \to T_{c(t)}M$, $P_{a,t}(\tilde{Y}_a) = Y_{c(t)}$ је линеарни изоморфизам који се назива паралелно померање дуж криве c од $c(a)$ до $c(t)$.*

4.8 Геодезијске линије

Геодезијске линије, објекти аналогни правама у еуклидској равни, могу бити карактерисане на различите начине: користећи варијациони рачун као криве најмање дужине које повезују две (блиске) тачке или као криве чија су тангентна векторска поља паралелни дуж њих у свакој тачки. Овде користимо другу дефиницију:

Дефиниција 27. *Крива $c(t)$ на многострукости M са линеарном повезано71у је геодезијска крива, ако је коваријантни извод њеног тангентног вектора $\lambda(t) = \dot{c}(t)$ пропорционалан самом тангентном вектору*

$$\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = \rho(t)\lambda(t), \tag{26}$$

где је ρ нека функција параметра t криве c.

У локолним координатама, користећи исту ознаку за координате криве c као за координатне функције површи $(x^i \circ c \equiv x^i)$, ове једначине имају облик

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = \rho(t)\frac{dx^k}{dt}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Ако је параметар t изабран тако да је $\rho(t) \equiv 0$ тада тај параметар називамо *природни.* Природни параметар обично означавамо са s.

У локалним координатама, геодезијске линије су у случају природног параметра одређене једначинама:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Пошто је $\dfrac{dx^i}{ds} = \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{1}{\dot{s}}$ и $\dfrac{d^2x^i}{ds^2} = \dfrac{d^2x^i}{dt^2}\dfrac{1}{\dot{s}^2} - \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{\ddot{s}}{\dot{s}^3}$, важи $\rho(t) = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{s}}$, $\dot{s} = \dfrac{ds}{dt}$.

Из једначина (28) следи једна од најважнијих особина геодезијских: да кроз дату тачку x_0 на многострукости у датом правцу (одређеним фиксираним тангентним вектором λ_0) пролази јединствена геодезијска. Ова особина је последица јединствености Cauchy-јевог проблема за те једначне, који може бити представљен у следећој форми:

$$\frac{dx^k}{ds} = \lambda^k(s),$$

$$\frac{d\lambda^k(s)}{ds} = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \lambda^i(s)\lambda^j(s),$$

$$\gamma^k(s_0) = \dot{\gamma}^k, \quad \lambda^k(s_0) = \dot{\lambda}^k.$$

Ако је $\Gamma_{ij}^k \in C^0$, тада је егзистенција решења гарантована.
Ако је $\Gamma_{ij}^k \in C^1$, тада постоји јединствено решење.

4.9 Примедбе на дефиниције геодезијских линија

Јохан Бернули је у писму Лајбницу из 1679, поставио проблем: *наћи криву на датој површи која пролази кроз пар различитих тачака и има особину да је њен сегмент који повезује дате две тачке најкраћи (или исти) међу свим другим сегментима кривих које их повезују.* Следеће године послао је решење овог проблема, опет Лајбницу, као и доказ варијационог проблема геодезијских линија. Зато 1679. можемо сматрати за годину настанка концепта геодезијских линија, иако је први рад на ову тему објавио Ојлер 1728. године.

Напоменимо да се у литератури поред наведене дифиниције геодезијских линија појављује и друга дефиниција:

Дефиниција 28. *Крива $c(t)$ на многострукости са линеарном повезаношћу је геодезијска крива ако је њено тангентно векторско поље $\lambda(t)$ паралелно дуж c, тј. важи формула:*

$$\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = 0. \tag{29}$$

У класичним изворима (Белтрами, Лагранж, Ајзенхарт) коришћена је дефиниција (26). Усвајајући тезу да је циљ диференцијалне геометрије изучавање геометријских објеката, тада је она ближа таквом приступу. Данас, када уводе геодезијске линије, многи аутори користе дефиницију (29), обично због техничких разлога.

У неким радовима и књигама, геодезијске линије које су решења једначине (26) се зову *непараметризоване геодезијске* или *прегеодезијске линије*, док под геодезијским линијама аутори подразумевају само оне које имају канонски параметар s (тј. оне криве које су карактерисане једначином (29)).

Дефиниција 29. *Многострукост $\mathbb{A}_n = (M, \nabla)$ са линеарном повезаношћу је геодезијски комплетна ако је свака геодезијска линија $l(s)$ дефинисана на M за све вредности природног параметра $s \in \mathbb{R}$.*

Позната теорема Хопфа и Ринова тврди да је M геодезијски комплетна површ ако и само ако је комплетна као метрички простор.

5 Геодезијска пресликавања диференцијабилних многострукости

5.1 Афина пресликавања

Нека су (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ две многострукости димензије n са линеарним повезаностима ∇ и $\bar{\nabla}$, респективно.

Дефиниција 30. *Дифеоморфизам $f : M \to \bar{M}$ се назива афино пресликавање ако слика било које паралелно векторско поље дуж $c \subset M$ у паралелно векторско поље дуж $f(c) \subset \bar{M}$.*

Теорема 17. *Дифеоморфизам $f : M \to \bar{M}$ је афино пресликавање ако и само ако је $f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_* X}(f_* Y)$ за произвољна векторска поља X и Y (f чува повезаност), тј. у локалним координатама,*

$$\bar{\Gamma}^k_{ij}(x) = \Gamma^k_{ij}(x). \tag{30}$$

Доказ. Нека је $f : M \to \bar{M}$ афино пресликавање. Изаберимо околину $U \subset M$ са заједничким координатним системом (x^i) у односу на пресликавање f. Нека је $\lambda(t) = \lambda^i(t)$ паралелно векторско поље дуж криве $c : x = x^i(t),\ t \in I$, што значи да важи $\nabla_t \lambda = 0$, или у локалним координатама

$$\frac{\lambda^k(t)}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\lambda^j(t)\frac{dx^i(t)}{dt} = 0. \tag{31}$$

Према претоставци, векторско поље $\lambda(t)$ је паралелно и у $\bar{M}$, што значи да је $\bar{\nabla}_t \lambda = 0$, или у локалним координатама

$$\frac{\lambda^k(t)}{dt} + \bar{\Gamma}^k_{ij}(x(t))\lambda^j(t)\frac{dx^i(t)}{dt} = 0. \tag{32}$$

Одузимањем (31) од (32) добија се

$$(\bar{\Gamma}^k_{ij}(x(t)) - \Gamma^k_{ij}(x(t)))\lambda^j(t)\frac{dx^i(t)}{dt} = 0. \tag{33}$$

Формула (33) важи за произвољну криву $c \subset M$ и произвољно векторско поље λ паралелно дуж ње. То значи да мора бити задовољена формула (30).

Са друге стране, ако важи (30), тада (32) следи из (31). □

Теорема 18. *[12] Нека је $f : M \to \bar{M}$ дифеоморфизам и $\bar{\nabla}$ повезаност на $\bar{M}$. Тада постоји јединствена повезаност ∇ на M таква да f чува повезаност.*

Доказ. Нека је $X \in T_p M$ и Y векторско поље у околини p из M. f је дифеоморфизам, па је $f_* Y$ векторско поље у околини $f(p)$. Дефинишимо

$$\nabla_X Y = f_*^{-1}(\bar{\nabla}_{f_* X}(f_* Y)).$$

Доказ да је ∇ повезаност следи из линеарности оператора f_*^{-1}. □

5.2 Геодезијска пресликавања многострукости са линеарном повезаношћу

Дефиниција 31. *Нека су M и $\bar{M}$ многострукости са линеарним повезаностима димензије n. Дифеоморфизам $f : M \to \bar{M}$ се назива геодезијско пресликавање M на $\bar{M}$ ако f слика било коју геодезијску криву на M на геодезијску криву на $\bar{M}$.*

Историјски гледано, први је Белтрами 1865. поставио питање постојања геодезијских пресликавања у случају пресликавања површи S на еуклидску раван $\mathbb{E}^2$.

1779. Лагранж је открио прве нетривијалне примере геодезијских пресликавања.

1869. У. Дини је поставио општије питање егзистенције геодезијских пресликавања $\mathbb{V}_2$ на $\bar{\mathbb{V}}_2$ и дао, у начелу, његово комплетно решење. Његово решење, које је било веома компликовано, је више пута поједностављено и модификовано.

Коначно је 1896. Леви-Чивита у свом раду на трансформацији једначина динамике испитао питање са општијим претпоставкама и добио основне једначине за геодезијска пресликавања између Риманових многострукости.

5.3 Леви-Чивита једначине геодезијских пресликавања

Посматрајмо многострукости са линеарним повезаностима (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ димензије n. Нека је $f : M \to \bar{M}$ геодезијско пресликавање. Пошто је f дифеоморфизам, можемо претпоставити да M и $\bar{M}$ имају исте локалне координате $(x^1, \cdots x^n)$.

За векторска поља $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ дефинишемо *тензор деформације* P повезаности ∇ и $\bar{\nabla}$ у односу на f:

$$P(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

или у компонентама $P^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$.

Нека је $c : I \to M,\ c(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ геодезијска линија на M и $\lambda(t) = \dot{c}(t)$ њен тангентни вектор. Тада слика криве c на $\bar{M}$ има исту параметризацију и зато мора бити задовољен систем једначина

$$\bar{\nabla}_{\lambda(t)}\lambda(t) = \bar{\rho}(t)\lambda(t). \tag{34}$$

Ако у једначинама (27) компоненте тангентног вектора λ означимо са $\lambda^i(t) = \dfrac{dx^i}{dt}$, важи

$$\frac{d\lambda^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\lambda^i(t)\lambda^j(t) = \rho(t)\lambda^k(t). \tag{35}$$

На исти начин добијамо једначине геодезијских линија на другој површи:

$$\frac{d\lambda^k}{dt} + \bar{\Gamma}^k_{ij}\lambda^i(t)\lambda^j(t) = \bar{\rho}(t)\lambda^k(t). \tag{36}$$

Одузимањем (35) од (36) следи

$$P^k_{ij}(x)\lambda^i(t)\lambda^j(t) = 2\psi(t)\lambda^k(t), \tag{37}$$

за неку функцију $\psi(t)$ на M која има облик $\psi(t) = \psi_i(x)\lambda^i(t)$, па важи

$$P^k_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^k_j + \psi_j(x)\delta^k_i, \tag{38}$$

где су ψ_i неки ковектори.

Контраховањем претходне једначине за $j = k$ добијамо

$$\psi_i(x) = \frac{1}{n+1}P^k_{ik},$$

што се може написати у облику

$$P(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{39}$$

Из (38) следи

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \psi_i \delta^k_j + \psi_j \delta^k_i, \tag{40}$$

или

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi(X)Y + \psi(Y)X \tag{41}$$

Једначине (40) називамо једначинама Леви-Чивита. Дакле, важи

Теорема 19. *Пресликавање f многострукости (M, ∇) са линеарном повезаношћу на многострукост $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ линеарном повезаношћу је геодезијско ако и само ако је тензор деформације P пресликавања f облика (38),тј. важе Леви-Чивита једначине (40).*

Ако између компонената повезаности многострукости M и $\bar{M}$ постоји веза (40), кажемо да пресликавању f одговарају ковектори ψ_i. Инверзно пресликавање f^{-1} пресликавања f је такође геодезијско пресликавање многострукости $\bar{M}$ на M коме одговарају ковектори $-\psi_i$.

Нека је $\tilde{f}$ геодезијско пресликавање многострукости $\bar{M}$ на могострукост $\tilde{M}$ коме одговарају ковектори $\tilde{\psi}_i$, тада је према (40)

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ij} + \tilde{\psi}_i \delta^k_j + \tilde{\psi}_j \delta^k_i,$$

где су $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ компоненте повезаности на многострукости $\tilde{M}$. Дакле,

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + (\psi_i + \tilde{\psi}_i)\delta^k_j + (\psi_j + \tilde{\psi}_j)\delta^k_i,$$

па је композиција преликавање f и $\tilde{f}$ геодезијско пресликавање M на $\tilde{M}$ коме одговарају ковектори $\psi_i + \tilde{\psi}_i$. Скуп свих геодезијских пресликавања дате многострукости M чини групу у односу на композицију пресликавања, па је скуп свих многострукости $\bar{M}$ за које постоји геодезијко пресликавање на дату многострукост M је затворен у односу на геодезијска пресликавања.

Када је на многострукости M изабран координатни систем $(x^1, \ldots, x^n)$ са компонентама повезаности $\Gamma^k_{ij}(x)$, на основу једначина (40) конкретним избором ковектора $\psi_i(x)$ рачинамо компоненте повезаности многострукости $\bar{M}$ за коју постоји геодезијско пресликавање на многострукост M. Ако се у (40) ковектори ψ_i сматрају произвољним, формулом су дате компоненте повезаности свих многострукости $\bar{M}$ које се геодезијски пресликавају на M.

5.4 Геодезијска пресликавања еквидистантних многострукости

Риманова многострукост M димензије n одређена координатним системом $x = (x^1, \dots, x^n)$ и метриком g је *еквидистантна многострукост* ако у њој постоји векторско поље Φ за које важи

$$\nabla_X \Phi = \rho X, \quad (\forall X \in TM), \tag{42}$$

где је $\rho : M \to \mathbb{R}$ функција и ∇ повезаност на многострукости M. Векторско поље које задовољава услов (42) се назива *конциркуларно вектроско поље.* У компонентама овај услов се записује као

$$\varphi^h_{,i} = \rho \delta^h_i. \tag{43}$$

На еквидистантној многострукости се може увести такозвани канонски систем координата x у коме метрика има облик

$$ds^2 = a(x^1)(dx^1)^2 + b(x^1)d\tilde{s}^2, \tag{44}$$

$a, b \in C^1$ су не-нула функције, $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij}(x^2, \dots, x^n)dx^i dx^j$ је метрика Риманове многострукости $\tilde{M}$ димензије $n-1$ (видети [9]). У овој секцији се подразумева да индекси i, j, k узимају вредности од 2 до n. При регуларној трансформацији $\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1)$, $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^2, \dots, x^n)$ облик метрике (44) се не мења.

Из метричке форме (44) рачунамо Кристофелове симболе прве и друге врсте (различите од нуле)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= \frac{1}{2}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}a' \\
\Gamma_{1ij} &= \frac{1}{2}(\partial_1 g_{ij} + \partial_i g_{1j} - \partial_j g_{1i}) = \frac{1}{2}b'\tilde{g}_{ij} = \Gamma_{i1j} \\
\Gamma_{ij1} &= \frac{1}{2}(\partial_i g_{j1} + \partial_j g_{i1} - \partial_1 g_{ij}) = -\frac{1}{2}b'\tilde{g}_{ij} \\
\Gamma_{ijk} &= \tilde{\Gamma}_{ijk} \\
\Gamma^1_{11} &= g^{1\alpha}\Gamma_{11\alpha} = g^{11}\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{a'}{a} \\
\Gamma^j_{1i} &= g^{j\alpha}\Gamma_{1i\alpha} = g^{jk}\Gamma_{1ik} = \frac{1}{b}\tilde{g}^{jk} \cdot \frac{1}{2}b'\tilde{g}_{ik} = \frac{1}{2}\frac{b'}{b}\delta^j_i = \Gamma^j_{i1} \\
\Gamma^1_{ij} &= g^{1\alpha}\Gamma_{ij\alpha} = g^{11}\Gamma_{ij1} = -\frac{1}{2}\frac{b'}{a}\tilde{g}_{ij} \\
\Gamma^k_{ij} &= \tilde{\Gamma}^k_{ij},
\end{aligned}$$

где су $\tilde{\Gamma}_{ijk}$ и $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ Кристофелови симболи прве и друге врсте редом на $\tilde{M}_{n-1}$.

Уочимо пресликавање f између еквидистантних многострукости M и $\bar{M}$ у заједничком координатном систему, тј. тачке $p \in M$ и њена слика $f(p) \in \bar{M}$ имају исте координате $x = (x^1, \dots, x^n)$. Претпоставимо да метрика на M облика (44), а метрика на $\bar{M}$ има аналоган облик

$$d\bar{s}^2 = A(x^1)(dx^1)^2 + B(x^1)d\hat{s}^2,$$

где су $A, B \in C^1$ не-нула функције, $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}(x^2, \dots, x^n)dx^i dx^j$, $(i, j = 2, \dots, n)$ је метрика Римановe многострукости $\hat{M}$ димензије $n-1$.

Ако је f геодезијско пресликавање, компоненте тензора деформације $P^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ij}(x) - \Gamma^k_{ij}(x)$ пресликавања f су

$$P^1_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A} - \frac{a'}{a}\right); \quad P^1_{1i} = P^1_{i1} = P^i_{11} = 0; \quad P^j_{1i} = P^j_{i1} = \frac{1}{2}\left(\frac{B'}{B} - \frac{b'}{b}\right)\delta^j_i;$$

$$P^1_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{B'}{A}\hat{g}_{ij} - \frac{b}{a}\tilde{g}_{ij}\right); \quad P^k_{ij} = \hat{\Gamma}^k_{ij} - \tilde{\Gamma}^k_{ij}.$$

На основу потребног и довољног услова (40) да пресликавање буде геодезијско у зависности од тензора деформације $P^k_{ij} = \psi_i\delta^k_j + \psi_j\delta^k_i$ добијамо

$$\begin{aligned}
P^1_{11} = \frac{1}{2}(\frac{A'}{A} - \frac{a'}{a}) &= \psi_1\delta^1_1 + \psi_1\delta^1_1 = 2\psi_1; &\Rightarrow \quad \frac{A'}{A} - \frac{a'}{a} = 4\psi_1 \\
P^j_{1i} = \frac{1}{2}\left(\frac{B'}{B} - \frac{b'}{b}\right)\delta^j_i &= \psi_i\delta^j_1 + \psi_1\delta^j_i = \psi_1\delta^1_i; &\Rightarrow \quad \frac{B'}{B} - \frac{b'}{b} = 2\psi_1 \\
P^1_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{B'}{A}\hat{g}_{ij} - \frac{b'}{a}\tilde{g}_{ij}\right) &= \psi_i\delta^1_j + \psi_j\delta^j_i = 0, &\Rightarrow \quad \frac{B'}{A} - \frac{b'}{a} = 0 \\
P^k_{ij} = \hat{\Gamma}^k_{ij} - \tilde{\Gamma}^k_{ij} &= \psi_i\delta^k_j + \psi_j\delta^k_i = 0; &\Rightarrow \quad \psi_i = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Из прве и друге једначине система (45) следи

$$\frac{A'}{A} - \frac{a'}{a} = 2\left(\frac{B'}{B} - \frac{b'}{b}\right).$$

Интеграљењем ове једначине по x^1 добијамо

$$\int\left(\frac{A'}{A} - \frac{a'}{a}\right)dx^1 = \int 2\left(\frac{B'}{B} - \frac{b'}{b}\right)dx^1,$$

односно

$$\ln|A| - \ln|a| = 2(\ln|B| - \ln|b|) + c_1 \tag{46}$$

где је c_1 константа. Сређивањем једначине (46) добијамо

$$\ln\left|\frac{A}{a}\right| = \ln\left|\frac{B}{b}\right|^2 + c_1,$$

односно,

$$\frac{A}{a} = \left(\frac{B}{b}\right)^2 c_2, \qquad c_2 = \pm e^{c_1}.$$

и коначно

$$A = \frac{c_2 a B^2}{b^2}. \tag{47}$$

Заменом (47) у трећу једначину система (45) добијамо

$$\frac{b^2 B'}{c_2 a B^2} - \frac{b'}{a} = 0,$$

односно,

$$\frac{B'}{c_2 B^2} - \frac{b'}{b^2} = 0. \tag{48}$$

Интеграљењем једнакости (48) по x^1 добијамо

$$\int \frac{B'}{c_2 B^2} dx^1 = \int \frac{b'}{b^2} dx^1,$$

односно,

$$-\frac{1}{c_2 B} = -\frac{1}{b} + c_3, \tag{49}$$

при чему је c_3 константа. Даље, сређивањем једнакости (49) добијамо

$$B = \frac{(1/c_2) b}{1 - c_3 b}.$$

И коначно, ако је $p = 1/c_2$ и $q = -c_3$ добијамо

$$B = \frac{pb}{1 + qb},$$

а користећи (47) и

$$A = \frac{pa}{(1 + qb)^2}.$$

Дакле, важи следећа теорема:

Теорема 20. *Пресликавање f између еквидистантних многострукости M и $\bar{M}$ је нетривијално геодезијско ако и само ако је $\hat{M}$ хомотетично $\tilde{M}$ и метрика на $\bar{M}$ је облика*

$$d\bar{s}^2 = \frac{pa(x^1)}{(1 + qb(x^1))^2} (dx^1)^2 + \frac{pb(x^1)}{1 + qb(x^1)} d\tilde{s}^2,$$

где су p и q константе такве да је $p \neq 0,\ 1 + qb(x^1) \neq 0$ и $qb'(x^1) \neq 0$.

Индекс појмова

атлас, 33

форма
- друга основна, 7
- прва основна, 7

формула
- Лиувилова за k_g, 12

градијент, 35

извод
- коваријантни, 37

извод у правцу, 35

карта
- локална, 33

координатна трансформација, 6
Кристофелови симболи, 7, 22, 24
крива
- дужина лука, 8
- геодезијска, 9
- на површи, 8
- параметарска, 6, 12
- природна параметризација, 8

кривина, 8
- Гаусова, 16
- геодезијска, 9
- главна, 15
- нормална, 9

линија
- асимптотска, 14
- геодезијска, 9
  - непараметризована, 39

многострукост
- еквидистантна, 43
- Риманова, 37
- тополошка, 33

нормала, 6

покретни репер, 8
повезаност
- линеарна, 37

површ
- елементарна непараметризована, 6
- елементарна, параметризована, 6
- Лиувилова, 28

пресликавања
- афина, 40
- геодезијска, 40
- конформна, 18

пројекција
- гномонска, 30
- картографска, 17
- стереографска, 20

тангента раван, 6
тангентни вектор, 6, 35
тангентно раслојење, 6
тензор
- деформације, 41

теорема
- Egregium, 16
- Белтрами, 23
- Динијева, 26
- Миндинга, 25
- Тисоова, 26

векторско поље, 6, 8, 36

Индекс имена

Christoffel Elwin Bruno, (1829 – 1900), 7, 22, 24
Eugenio Beltrami, (1835 – 1899), 3, 23
Ferdinand Minding, (1806 – 1885), 25
Gauss Carl Friedrich, (1777 – 1855), 15, 25
Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646 – 1716), 39
Hausdorf, 33
Hopf Heinz, (1894 – 1971), 39
Johann I. Bernoulli (1667 – 1748), 39
Joseph Liouville, (1809 – 1882), 12, 27
Lagrange Joseph Louis, (1736 – 1813), 30, 39, 41
Leonhard Euler, (1707 – 1783), 39
Levi-Civita Tulio, (1873 – 1941), 4
Luther Pfahler Eisenhart, (1876 – 1965), 39
Rinow, 39
Tissot M. A., (18241897), 26
Tullio Levi-Civita, (1875 – 1941), 41
Ulisse Dini, (1845 – 1918), 3, 26, 41
Weingarten J., 8

Литература

[1] Н. Блажић, Н. Бокан, *Увод у диференцијалну геометрију*, Београд, 1998.

[2] L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry Curves and Surfaces*, New York: Dover, 1960.

[3] V. F. Kagan, *Foundations of theory of surfaces* (Russian) Moscow, Part 1, 1947, Part 2, 1948.

[4] V. Matveev, *On the Dimension of the Group of Projective Transformations of Closed Randers and Riemannian Manifolds*, SIGMA, 8 (2012), 007, 4 p.

[5] J. McCleary, *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambrige University Press, 1994.

[6] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner *Geodesic mappings and their generalizations*, Olomouc, 2009.

[7] R. Milman, G. Parker, *Elements of Differential geometry*, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1977.

[8] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry* (Springer, 2010.)

[9] N. S. Sinyukov, *Geodesic mappings of Riemannian spaces*, (Russian) Moscow, Nauka, 1979.

[10] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry* , New York, 1961.

[11] A. R. Forsyth, *Lectures on the differential geometry of curves and surfaces*,Cambridge, University press, 1912.

[12] N. J. Hicks, *Notes of Differential geometry* Princeton, New Jersey, 1965.

[13] I. Hinterleitner, *Special mappings of equidistant spaces*, Journal of Applied Mathematics, Vol. 1, No. 2 (2008),31-37

[14] http://www.scribd.com/doc/19827455/74/GEODESIC-MAPPING#page=137

[15] http://www.wolfram.com