[лабелстылеı]

Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Значај факултетског образовања математичара за избор поступака решавања и излагање решења математичких проблема

Аутор:
Иван Лазаревић

Ментор:
др Милан Божић

Садржај

Предговор

Овај рад је мали покушај да се анализира стање у настави математике у Србији и да се уоче проблеми и недостаци. Такође, да се дају неке сугестије у правцу могућег побољшања. Нисам имао намеру да дам комплетан увид у ову проблематику, већ да на неколико конкретних примера, који су ми лично познати, покушам да конструишем општу слику изучавања математике у средњим школама.

Велику захвалност дугујем свом ментору, професору Милану Божићу као и професорки Весни Јевремовић и професору Ивану Анићу, који су ме подржали и усмерили у креирању овог рада. Такође, велику захвалност дугујем Стручном већу математике гимназије ,,Милош Савковић"у Аранђеловцу као и професорима математике Гордани Баук и Науму Недићу, из Земунске гимназије. Професорка српског језика и књижевности исте гимназије, Милана Сувачаров извршила је лектуру овог рада, на чему јој срдачно захваљујем.

Надам се да ће овај рад покренути ширу стручну расправу о утицају студија математике на развој способности за решавање елементарних (и других) математичких проблема.

1 Увод

1.1 Математичка писменост

Математичка писменост је капацитет појединца да идентификује и разуме улогу коју математика игра у савременом свету, да изведе добро засноване математичке процене и да се ангажује у математици тако да задовољи своје садашње и будуће потребе као конструктивног, заинтересованог и рефлексивног грађанина.

(OECD-Organisation for Economic Co-operation and Development, 1999)

У свакодневном животу, на радном месту, када се образујемо или усавршавамо, математичка писменост представља једну од кључних компетенција за успешно суочавање са различитим изазовима. Математичка писменост се односи на коришћење математичких знања, формула и процедура, како би се описао и објаснио неки феномен или да би се предвидели будући догађаји. Особе које су математички писмене могу да препознају како се неки феномен или догађај може превести у математичку форму која би омогућила да се он боље разуме и да се донесу квалитетније одлуке.

Математички садржаји смештени су у четири теме које покривају велики распон математичких концепата који се појављују у оним ситуацијама са којима се ученици вероватно сусрећу изван школе. То су следеће области:

- Простор и облик. Садржај ове области одговара градиву геометрије у школи. Од ученика се тражи да уочавају сличности и разлике између фигура и њихових елемената. Треба да препознају фигуре у различитим облицима репрезентације и различитим димензијама.

- Трансформације и релације. Ова област је најближа алгебри, укључује функционалне односе као и односе зависности између променљивих. Релације су представљене различитим репрезентацијама симболички, рачунски, графички, табеларно, геометријски. Један од кључних захтева је да ученици преводе релације из једног у други облик.

- Бројеви и мере. Овде се од ученика тражи разумевање нумеричких и квантитативних феномена. Захтева се коришћење бројева да би се представиле мерљиве карактеристике реалних објеката, тражи се и да ученици напамет рачунају, али и процењују.

- Неизвесност. Овом облашћу је покривено градиво из теорије вероватноће и математичке статистике.

Постигнућа ученика саопштавају се на скали која је конструисана тако да је аритметичка средина 500, а стандардна девијација 100. Додатно, скала постигнућа је издељена на шест нивоа, а сваки ниво је описан преко вештина и знања која су ученику потребна да би решио задатке тог нивоа тежине. Један ниво постигнућа покрива око 70 поена на скали, што је релативно висок распон, тако да ученици који се налазе на различитим нивоима показују квалитативно различите вештине и знања.

Сваки од нивоа постигнућа математичке писмености описан је математичким компетенцијама на следећој скали постигнућа.

Ниво 1 (358 - 420): Ученици могу да одговоре на једноставна питања у познатом контексту где су све релевантне информације дате, а питања јасно формулисана. Могу да лоцирају информацију и да изводе рутинске операције када су дате прецизне инструкције у једноставној ситуацији.

Ниво 2 (421 - 482): На овом нивоу ученици могу да интерпретирају и препознају ситуације у контексту које не захтевају више од директног закључивања. Могу да извуку релевантне информације из једног извора. Умеју да примене основне алгоритме, формуле, процедуре или конвенције. Добијене резултате интерпретирају дословно.

Ниво 3 (483 - 544): На овом нивоу ученици могу да примене јасно описане процедуре, укључујући и оне које подразумевају доношење одлука кроз неколико корака. Умеју да изаберу и примене једноставне стратегије решавања проблема. Могу да интерпретирају податке из различитих извора и начина репрезентације, као и да резонују директно на основу њих. Могу да развију кратак извештај, користећи интерпретације, резултате и сопствена размишљања.

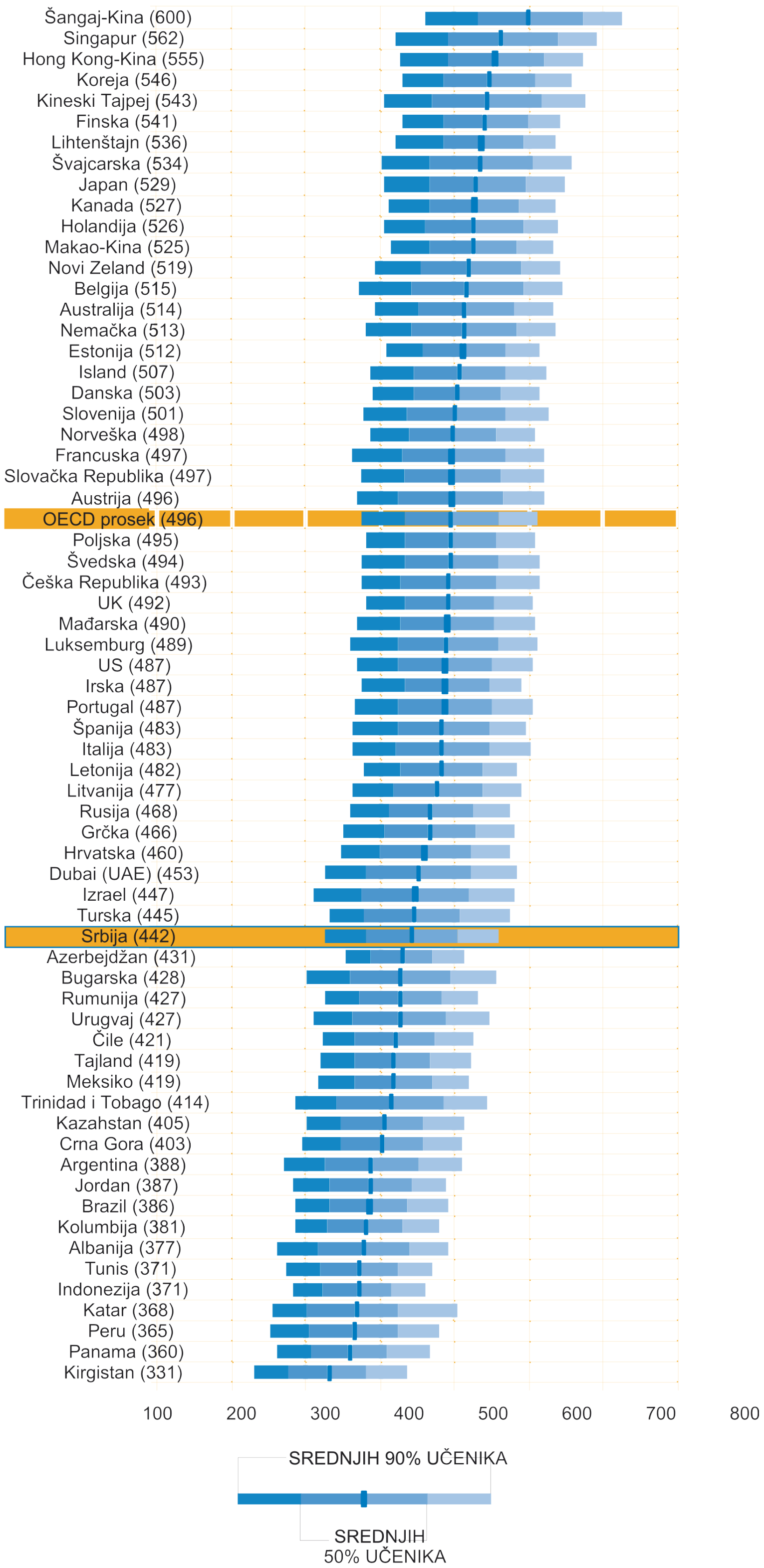
Ниво 4 (545 - 606): На овом нивоу ученици могу да, користећи експлицитне моделе, решавају комплексне, конкретне ситуације које могу да укључују ограничења или да захтевају спецификовање претпоставки. Могу да селектују и повезују податке дате на различите начине, укључујући симболичке, и повезујући их директно са аспектима ситуација из реалног живота. Умеју да конструишу и дискутују објашњења и аргументацију засновану на сопственим интерпретацијама и поступцима.

Ниво 5 (607-668): На нивоу 5 ученици могу да развијају и раде са моделима комплексних ситуација, идентификујући ограничења и специфицирајући претпоставке. Умеју да одаберу, упореде и вреднују различите стратегије решавања проблема. Могу да развијају стратегије рада, користећи добро развијене способности резоновања, одговарајуће репрезентације, симболичке и формалне дескрипције, као и увиде у вези са ситуацијом. Разматрају поступке, формулишу и дискутују о својим интерпретацијама и начинима расуђивања.

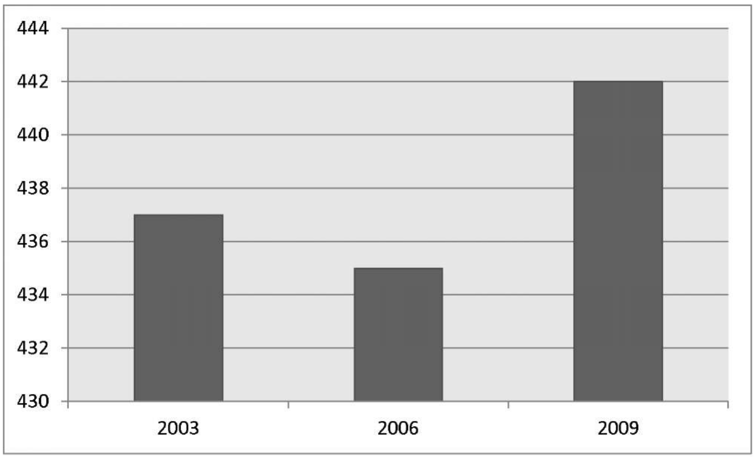
Ниво 6 (више од 668): На овом нивоу ученици могу да концептуализују, генерализују и користе информације засноване на сопственом испитивању и моделовању комплексних проблемских ситуација. Могу да повезују информације из различитих извора и начина репрезентовања, као и да праве флексибилне преводе с једне форме на другу. Способни су за напредно математичко мишљење и резоновање. Могу да примене увиде и разумевања до којих су дошли, заједно.

Читање и анализа података о дистрибуцији постигнућа по нивоима указују на важне аспекте квалитета образовања и веома су драгоцени у формулисању образовних политика. Прво, важна информација је колико ученика има постигнућа која су на нивоу просека (III ниво) или виша од тога, јер то указује на способност образовног система да генерише знања која не остају на нивоу репродукције и која имају вишу трансферну вредност, што је значајно са становишта академских аспирација и наставка школовања. Друго, посебно осетљиву групу чине ученици чија су постигнућа испод другог нивоа. Ниска постигнућа у погледу математичке писмености која, по правилу, иду у комбинацији са ниским постигнућима и у осталим областима, чине реалним постојање ризика у погледу успешности у наставку школовања и последично, избору професије. Резултати лонгитудиналних истраживања која се реализују нпр. у Канади, Швајцарској и Аустралији показују да овако ниска постигнућа на скали математичке писмености драматично умањују шансе за наставак школовања тако да две трећине ученика из ове групе не наставља школовање, рано улазе на тржиште рада, имају проблеме при запошљавању и чешће добијају лоше плаћене послове. Такође Лисабонска агенда којом су дефинисани заједнички циљеви земаља чланица ЕУ чија се реализација планира до 2020. године указују да ова група ученика заслужује посебну пажњу. Циљ је да у најнижем нивоу не буде више од 15% ученика. Треће важно питање је на ком је нивоу највећа концентрација ученичких постигнућа, јер то говори о самом образовном систему, о томе на ком нивоу се претежно одвија наставни процес. Ако је реч о концентрацији постигнућа на првом и другом нивоу, што је случај са Србијом, можемо да кажемо да је систем оријентисан ка успостављању и вредновању знања на нивоу репродукције. Ученици чија су постигнућа на највишим нивоима (V и VI) такође представљају осетљиву категорију. То су ученици са високим академским потенцијалима којима је потребна пажња. Не треба ни посебно наглашавати колико је за развој друштва битно да се омасове постигнућа на овом нивоу. То би требало да буде један од примарних циљева образовног система земље. Најзад, треба имати на уму и трендове, односно промене у дистрибуцији постигнућа из циклуса у циклус. Из овога можемо закључити да циљ наставе математике није више у меморисању и репродуковању, већ у суштинском разумевању појава и процеса уз активно и свесно учешће ученика. У настави математике треба користити решавање проблема, као облик стваралачког рада у настави, коришћење проблемске ситуације односно учења путем решавања проблема. Без обзира да ли се ради о обради, понављању, вежбању или примени знања у пракси, стално треба тежити откривању чињеница, одређених дефиниција и формулација правила, закључивању, расуђивању и тражењу нових идеја у решавању неког математичког проблема.

Највиши ниво математичке писмености су убедљиво показали млади петнаестогодишњаци из Шангаја (Кина) чије је просечно постигнуће (600 поена на PISA скали) више за око 100 поена од OECD просека, што представља велику разлику. Значајно иза младих из Шангаја налазе се млади из Сингапура (562) и Хонг Конга (555) који имају за око 40-50 поена ниже просечно постигнуће од ученика из Шангаја. И млади из Кореје, Кинеског Тајпеја, Финске, Лихтенштајна, Швајцарске, Јапана, Канаде, Холандије, Макао (Кина), Новог Зеланда, Белгије, Аустралије, Немачке, Естоније, Исланда, Данске и Словеније имају, такође, просечна постигнућа која су виша од OECD просека.Прилажем слику која приказује просечна постигнућа ученика на скали математичке писмености.


Šangaj-Kina (600)
Singapur (562)
Hong Kong-Kina (555)
Koreja (546)
Kineski Tajpej (543)
Finska (541)
Lihtenštajn (536)
Švajcarska (534)
Japan (529)
Kanada (527)
Holandija (526)
Makao-Kina (525)
Novi Zeland (519)
Belgija (515)
Australija (514)
Nemačka (513)
Estonija (512)
Island (507)
Danska (503)
Slovenija (501)
Norveška (498)
Francuska (497)
Slovačka Republika (497)
Austrija (496)
OECD prosek (496)
Poljska (495)
Švedska (494)
Češka Republika (493)
UK (492)
Mađarska (490)
Luksemburg (489)
US (487)
Irska (487)
Portugal (487)
Španija (483)
Italija (483)
Letonija (482)
Litvanija (477)
Rusija (468)
Grčka (466)
Hrvatska (460)
Dubai (UAE) (453)
Izrael (447)
Turska (445)
Srbija (442)
Azerbejdžan (431)
Bugarska (428)
Rumunija (427)
Urugvaj (427)
Čile (421)
Tajland (419)
Meksiko (419)
Trinidad i Tobago (414)
Kazahstan (405)
Crna Gora (403)
Argentina (388)
Jordan (387)
Brazil (386)
Kolumbija (381)
Albanija (377)
Tunis (371)
Indonezija (371)
Katar (368)
Peru (365)
Panama (360)
Kirgistan (331)
100
200
300
400
500
600
700
800
SREDNJIH 90% UČENIKA
SREDNJIH
50% UČENIKA

Просечни ниво математичке писмености младих петанестогодишњака из Србије на PISA 2009 скали износи 442 поена. Ипак, млади у Србији се значајно разликују по својој математичкој писмености - четвртина ученика у Србији, која има најнижи ниво математичке писмености, налази се испод 380 поена, што спада у веома ниска постигнућа, док се четвртина најуспешнијих ученика налази изнад 504 поена. Разлике које постоје међу ученицима у Србији у погледу развијености математичке писмености су сличне онима које постоје на нивоу OECD земаља. Од европских земаља разлике међу ученицима су најмање у Летонији, Естонији и Финској, док су највеће у Белгији, Француској, Немачкој, Швајцарској и Бугарској. У поређењу са ученицима из других земаља у региону, просечно постигнуће ученика из Србије у домену математичке писмености је више у односу на просечно постигнуће ученика из Бугарске (428), Румуније (427), Црне Горе (403) и Албаније (377), док је ниже у односу на ученике из Словеније (501).Следећом сликом је дат графички приказ постигнућа ученика у Србији на скали математичке писмености.



,, Узалудно је учити без размишљања,
размишљати без учења је сулудо"
Конфучије

1.2 Сингапурска математика

,,Сингапурска математика"наставни је програм који се предаје по моделу подучаваном у основним школама у Сингапуру. Захваљујући њему, ученици у Сингапуру постижу најбоље резултате у свету још од 1990. године. До 1980. године Сингапур је увозио школске књиге из математике за све разреде, али од тада они почињу да стварају свој наставни план и програм. Тај план и програм је имао за циљ да смањи број математичких концепата који се ураде једне наставне године, али да то што се уради буде сасвим темељно. Свакој теми приступа се врло поступно у три различите фазе. У првој фази, ученици покушавају решити задатак који садржи одређене мере. То може бити мерење врата, прозора или слично. Деца могу употребити и нешто попут новца, или праву готовину. Друга је фаза графичке природе: готовину прикажемо, на пример, цртежом кованица. А у последњој фази, деца користе сликовну репрезентацију да би објаснила математичку операцију, попут: сабирања два броја. Дакле овај програм прати одређени процес, корак по корак.Ова метода се ослања више на слике и омогућава ученицима да сами долазе до закључака(самим тим их учи да мисле).

Основно школовање у Сингапуру траје 6 година и бесплатно је. Школе могу за разне трошкове у просеку месечно наплаћивати од ученика 5 до 10 сингапурских долара (2,5 до 5 еура). Ова информација потпуно је доступна свима. Базични ниво траје четири године и на предлог професора после тога се ученик који није добро савладао градиво прва четири разреда шаље на одређени ниво где обнавља то градиво. Генерални циљ основног образовања је што боље разумевање матерњег језика, енглеског језика и математике.

Циљеви наставе математике у Сингапуру су следећи:

- Ученици треба да усвоје вештине и знања о бројевима, мерењу и простору у математичким ситуацијама које ће сретати у животу

- Усвајање математичких појмова и вештина потребних за даље учење математике и осталих предмета

- Треба оспособити ученике за логичку дедукцију и индукцију једнако добро, да покажу своје математичко мишљење и закључивање преко решавања математичких проблема

- Ученици треба да користе математички језик да образложе математичке идеје и аргументе прецизно, концизно и логично

- Створити позитиван став према математици укључујући самопоуздање, радост и истрајност

- Повећати интелектуалну радозналост ученика

- Оспособити ученике да развију своје способности за решавање математичких проблема

- Коришћење математике у решавању проблема стварног живота, ови проблеми покривају широки спектар ситуација и захтевају коришћење примењене математике и процеса мишљења

Појмови који припадају базичним математичким знањима потребним за решавање проблема разврстани су у четири категорије:

1. бројевни појмови
2. геометријски
3. алгебарски
4. статистички

Овде посебно треба обратити пажњу на статистику која се код нас у средњој школи готово и не ради.

Вештине које ученици користе за решавање проблема су:

- процена и апроксимација
- ментална калкулација
- комуникација
- коришћење математичких оруђа
- аритметичке манипулације
- алгебарске манипулације
- коришћење података

У нашој земљи не користе се процена и апроксимација и коришћење података.

Коришћење мишљења и хеуристике у решавању проблема:

- способност мишљења
- класификовање
- упоређивање
- закључивање
- анализа делова и целине
- откривање законитости и релација
- индукција
- дедукција
- просторна визуелизација

Код њих се много пажње посвећује вештинама проналазаштва у решавању проблема а то су:

- израчунати
- користити дијаграм (модел)
- сачинити систематичну листу
- радити унатрашке
- користити погодак и проверити
- направити хипотезу
- поставити проблем на други начин
- поједноставити проблем
- решити део проблема

У Сингапуру се примењује такозвани спирални систем у обради градива или систем концентричних кругова, они не испредају једну област у једној години и завршено је са том облашћу. Код њих се свака област ради постепено и сваке године усложњава.Наредни графички приказ лепо осликава образовни систем Сингапура.

ОКОСНИЦА МАТЕМАТИЧКОГ ПРОГРАМА

Навешћу наставни план и програм за први и други разред њихове ниже средње школе, што би одговарало нашем седмом и осмом разреду, пошто њима основна школа има шест разреда.

I разред

АРИТМЕТИКА
1. Цели бројеви:
- четири операције
- упоређивање
- факторизација
2. Разломци и децимални бројеви:
- појам и нотација
- упоређивање
- четири операције
3. Апроксимација и процена:
- заокругљивање
- процењивање
4. Коришћење научног калкулатора
5. Квадрирање, квадратни и кубни корен
6. Бројевни низови
7. Мерење и новац
8. Размера и пропорција
9. Проценат
10. Једноставније финансијске трансакције
11. Реални бројеви
- цели
- рационални и ирационални

МЕРЕЊЕ
1. Обим и површина (квадрата, правоугаоника, троугла, паралелограма, трапеза, круга)
2. Површина и запремина (коцке, квадра, призме, ваљка)

АЛГЕБРА
1. Алгебарски изрази и формуле
2. Једноставне алгебарске манипулације
3. Једноставне линеарне једначине

ГЕОМЕТРИЈА
1. Једноставни равни ликови
2. Једноставна тела
3. Особине угла (углови са паралелним крацима и углови многоугла)
4. Конструкције једноставнијих геометријских фигура

СТАТИСТИКА
1. Баратање подацима:
- сликовни дијаграми
- табеле
- тачкасти дијаграми
- бар дијаграми
- питице

- линијски и разгранати дијаграми
- хистограми

ХЕУРИСТИКА

1. Хеуристичко решавање проблема
2. Практична примена математике

II разред

АРИТМЕТИКА

1. Аритметички проблеми
2. Стандардне форме
3. Бројевни низови

МЕРЕЊЕ

1. Површина и запремина (лопте, пирамиде, купе)
2. Дужина кружног лука и површина кружног исечка

АЛГЕБРА

1. Алгебарски изрази и формуле
2. Решавање једначина:
- системи линеарних једначина
- једноставније једначине са разломцима
- квадратне једначине

ГРАФОВИ

1. График линеарне и квадратне функције
2. Практични проблеми

ГЕОМЕТРИЈА

1. Геометријске трансформације:
- рефлексија
- транслација
- ротација
- сличност
2. Сличност и подударност фигура
3. Особине углова многоугла
4. Цртање у размери
5. Симетрије (осна и централна)

СТАТИСТИКА

1. Средње вредности (аритметичка средина, мода, медијана)

ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. Питагорина теорема
2. Тригонометријске функције (синус, косинус, тангенс)

У задацима се не тражи да ученици напамет знају вредности тригонометријских функција већ су њихове вредности дате у тексту задатка.

ХЕУРИСТИКА

1. Хеуристичко решавање проблема
2. Практична примена математике

Још једном наглашавам да би ово код нас били седми и осми разред основне школе. Квадратне једначине се овде раде тек у другој години средње школе. Статистика је баш заступљена за разлику од нашег образовног система. Одмах после сличности природно се уводе тригонометријске функције. А свуда се уочава поступност у учењу. У свим уџбеницима су присутна методичка упутства за професора која могу бити веома корисна, а тичу се, на пример, сложености проблема. Навешћу нека од њих за различите области.

- Множење, али без алгоритма нпр. децималног броја целим

- Уочавање оса симетрије, али без броја оса (ученици у почетку треба само да разумеју шта је оса симетрије, а не треба им податак о броју оса симетрије неког многоугла)

- Израчунавање странице квадрата из површине, али без коришћења кавадратног корена (јасно је да је овде циљ развијање интуиције).

Циљ је прво интуитивно решавати проблем, а тек после увести алгоритам. Најбоље је да ученици сами дођу до њега. Савремени живот захтева од сваког грађанина знање елементарних статистичких појмова и баратање подацима. Због тога деца у Сингапуру почињу да уче статистику већ од првог разреда основне школе.

1.3 Математика у Канади

У канадској покрајини Онтарио Министарство просвете одређује наставни план и дефинише шта наставници треба да предају и шта се очекује да ученици науче у сваком разреду из сваког предмета. Спровођење наставе и оцењивање препуштени су стручној процени наставника како би им се омогућило да програм прилагоде индивидуалним потребама ученика и одељења у којима га спроводе.

Да би се стекла диплома средње школе у Онтарију мора се сакупити 30 бодова-кредита (18 обавезних и 12 изборних). Један бод се добија за успешно завршен курс, а законом о средњим школама је прописано да ученици од првог до четвртог разреда морају зарадити бодове из следећих обавезних предмета:

4 бода из енглеског или француског;

3 бода из математике, најмање један мора бити у 3. или 4. разреду;

2 бода из науке, један у 3. и један у 4. разреду;

1 бод из канадске историје;

1 бод из канадске географије;

1 бод из уметности;

1 бод из здравственог и физичког васпитања;

1 бод из страног језика;

0,5 бодова из грађанског васпитања;

1 бод из сваке од следеће три групе;

Група I: 1 бод из странног језика (енглески или француски), или домородачког језика, или класичног или међународног језика, или друштвене науке и хуманистике

Група II: 1 бод из физичког и здравственог образовања, или уметности или менаџмента

Група III: 1 бод из природних наука (физика, хемија, биологија), или техничко образовање

Од 12 изборних 4 бода могу бити зарађена преко двоструко бодованих курсева.

Предвиђено је да ученик у првом и другом разреду изучава 8 предмета, дакле заради 16 бодова у прве две године, а да у наредне две године заради осталих 14 потербних бодова, с тим да број предмета које похађа у току једне године не може бити мањи од 6.

По броју обавезних бодова очигледно је да је математика на другом месту и то говори колики се значај придаје овом предмету у средњошколском образовању, јер је јасно да ће данашње и будуће брзе технолошке промене захтевати од садашњих ученика да се у будућности брзо прилагоде и ефектно користе стечено знање за обраду велике количине информација.

На почетку сваког курса у средњошколском наставном програму су представљени следећи математички принципи:

- решавање проблема
- резоновање и доказивања
- избор алата и рачунарске стратегије
- повезивање
- заступање
- комуницирање

Сваки курс упознаје ученике са богатим искуством у решавању проблема кроз различите приступе, укључујући и истраживања. Ова искуства пружају ученицима могућности да развију и примене математичке процесе.

Математички процеси су међусобно повезани. Процес решавања проблема може да се посматра као 'мотор' који покреће развој других процеса. То омогућава ученицима да праве претпоставке и да размишљајући изводе решења. Решавање проблема пружа ученицима прилику да направе везу њиховог претходног знања са оним што тренутно уче и да доносе одлуке. Наставници треба да подстичу ученике да оправдају своја решења, усмено и писмено. Видевши како други решавају проблем, ученици могу да почну да анализирају сопствено мишљење и мишљање других и да свесно прилагоде своје стратегије како би своја решења учинили што ефикасанијим и што прецизнијим.

Математички процеси не могу се одвојити од знања и вештина које ученици стекну током курса. Ученици који проблем реше, развиће знање, разумевање појмова и вештине потребне за курс.

1.3.1 Преглед средњошколског програма

Програм математике за први и други разред се надовезује на математику из основне школе и ослања се на исти принцип на коме је тај програм заснован, а тај принцип је да ученици најефикасније уче математику када имају темељно разумевање математичких појмова и процедура и кад они то разумевање стичу кроз истраживачки приступ.

За сваки од средњошколских курсева математике постоји дефинисан скуп очекиваних знања које ученик треба да стекне по завршетку курса.

Курсеви математике за први и други разред постоје у две варијанте: академски и примењени.

Академски курсеви развијају знање ученика и вештине кроз проучавање теорије и апстрактних проблема. Ови курсеви се фокусирају на основним појмовима изучаване теме као и на истраживању повезаних појмова.

Примењени курсеви фокусирају се на основне концепте теме и развијају знања и вештине ученика кроз практичне примене и на конкретним примерима. Познате ситуације се користе за илустрацију идеје.

У програм математике за први разред, академски ниво укључене су следеће наставне јединице:

1. Појам броја и алгебра:
- операције са експонентима
- манипулисање изразима и решавање линеарне једначине
- разумевање карактеристика линеарне једначине
- повезивање различитих представа о линеарној једначини

2. Аналитичка геометрија:
- истраживање односа између једначина
- истраживање својстава нагиба
- решавање проблема применом линеарне једначине

3. Мерење и геометрија:
- истраживање оптималне вредности мерења
- решавање проблема у вези обима, површине и запремине тела
- истраживање и примена геометријскких односа

У аналитичкој геометрији ученици проширују почетна искустава линеарних односа у апстрактне области једначина у формули $y = kx + n$.

У програм математике за други разред академски ниво укључене су следеће наставне јединице:

1. Квадратни односи у обрасцу $y = ax^2 + bx + c$

- испитивање основних особина квадратне функције

- веза графика $y = x^2$ и његових трансформације

- решавање квадратне једначине

- решавање проблема у вези квадратних односа

2. Аналитичка геометрија

- Коришћење линеарних система за решавање проблема

- коришћење аналитичке геометрије за испитивање геометријских особина

3. Тригонометрија

- истраживање сличности и решавање проблема коришћењем сличности троуглова

- решавање проблема употребом тригонометрије правоуглог троугла

- решавање проблема коришћењем тригонометрије оштроуглог троугла

У трећем и четвртом разреду средње школе понуђене су следеће четири врсте курсева:

1. универзитетска припрема,
2. универзитет-колеџ припрема,
3. колеџ припрема,
4. припрема за рад.

Универзитетски припремни курсеви су организовани тако да оспособе ученике знањем и вештином који су им потребни да задовоље захтеве за пријем на универзитет.

Универзитет-колеџ припремни курсеви су дизајнирани да припреме ученике да се упишу на специфичан програм понуђен на универзитету и колеџу.

Колеџ припремни курсеви су дизајнирани да оспособе ученика знањима која су им потребна да испуне услове за улазак у већину студентских програма.

Припрема за рад курсеви су дизајнирани да опреме ученике вештинама које су им потребне да испуне очекивања послодаваца, уколико планирају да се запосле непосредно после матурирања.

Универзитетски припремни курс за трећи разред укључује следеће области:

А) Карактеристике функције

Б) Експоненцијална функција

В) Дискретне функције

Г) Тригонометријске функције

По заршетку овог курса од ученика се очекује да:

А)

1. Покажу разумевање функција, њихове репрезентације, њихових инверзних функција, да разумеју везу између алгебарских и графичких представа функција помоћу трансформација;

2. Знају да одреде нуле и максималну или минималну вредност једне квадратне функције и реше проблеме који се односе на квадратне функције, укључујући проблеме који проистичу из стварног света (можмо приметити да се и у Канади инсистира на решавању проблема у реалном контексту);

Б)

1. Знају да процене степен са рационалним експонентима и опишу својства експоненцијалне функције представљене на различите начине;

2. Направе везу између нумеричких, графичких и алгебарских представљања експоненцијалне функције;

3. Идентификују и представљају експоненцијалне функције и решавају проблеме који се односе на њих, укључујући проблеме који проистичу из реалних апликација.

В)

1. Покажу разумевање рекурентних низова, представљају их на различите начине и да их повежу са Паскаловим троуглом;

2. Покажу разумевање односа који су укључени у аритметичким и геометријским низовима и редовима;

3. Направе везу између низова, редова и финансијских апликација.

Г)

1. Одређују вредности тригонометријских функција за углове мање од 360 степени; доказују једноставне тригонометријске идентитете и решавају проблеме користећи основне тригонометријске идентитете, синусну и косинусну теорему;

2. Покажу разумевање периодичних синусоидних функција;

3. Идентификују и представљају синусоидне функције.

Важно је напоменути да овај курс у трећој години могу пратити само ученици који су у претходној години успешно завршили академски ниво.

У четвртом разреду су понуђена три припремна курса:

I Функције

А) Експоненцијалне и логаритамске функције

Б) Тригонометријске функције

В) Полиномијалне и рационалне функције

Г) Карактеристике функција

II Анализа и вектори

А) Изводи и њихова примена

Б) Геометрија и алгебра вектора

III Управљање подацима

А) Вероватноћа

Б) Расподела вероватноћа

В) Оранизација података за анализу

Г) Статистичка анализа

Предуслов за сваки од ових курсева је успешно завршен универзитетски припремни курс за трећи разред, а додатни услов за курс Анализа и вектори је претходно завршен курс Функције за четврти разред или похађање оба курса истовремено.

1.3.2 Оцењивање

У Канади је оцењивање врло специфично. Оцењују се следеће категорије:

1. Знање и разумевање (познавање чињеница и термина);

2. Разумевање математичких појмова;

3. Мишљење (критичко и креативно мишљење);

4. Способности (моделовања, прикупљања података, извођења формула, формирања закључка);

5. Примена знања у реалном контексту;

6. Способност преношења знања (овде је важно како би ученици нешто испредавали својим вршњацима или наставницима и које аргументе би употребили да оправдају своје решење неког проблема);

За сваку од ових категорија постоје четири нивоа изражена преко процента успешности ученика. Ученик чије је остварење мање од 50% на крају курса неће добити кредит за тај курс. Поменути нивои су распоређени на следећи начин:

Ниво 1 (50-59%): ученик примењује знања и вештине са ограниченом ефикасносшћу.

Ниво 2 (60-69%): ученик примењује знања и вештине у познатим контекстима са ниском ефикасносшћу.

Ниво 3 (70-79%): ученик примењује знања и вештине са знатним нивоом ефикасности.

Ниво 4 (80-100%): ученик примењује знања и вештине са високим степеном ефикасности.

Приметимо, да се као и у Сингапуру велики значај у Канади даје решавању реалних проблема у којима се примењује математика.

2 Успех ученика средњих школа у Србији на елементарним математичким задацима

Основно истраживачко питање којим се овде бавим је успех ученика средњих чкола у Србији при решавању математичких задатака основног нивоа и разматрање грешака које ученици средњих школа најчешће праве, с циљем да се учесталост грешака смањи, побољша настава математике као и успех ученика. Оправданост овог истраживања садржана је у чињеници да је добро имати доказ неефикасности традиционалног приступа настави математике. Најзанимљивија категорија ученика су матуранти зато што нам је циљ и да проверимо колико ,,траје"оно што су научили у претходним разредима. Наравно познавање основних појмова им је неопходно за праћење градива четврте године, пошто је главна тема: ,,Особине и испитивање тока функције". Истраживање је спроведено у раду са ученицима друштвено-језичког смера пошто се у последње време све већи број њих опредељује за факултете где се тражи знање математике на пријемном испиту. Овим истраживањем обухваћене су гимназије ,,Милош Савковић"из Аранђеловца и Земунска гимназија.

2.1 Гимназија Милош Савковић у Аранђеловцу

Гимназија Милош Савковић у Аранђеловцу основана је давне 1920. године. Школу похађа 600 ученика у 4 разреда. У једном разреду има 5 одељења; два одељења друштвено-језичког смера и 3 природно-математичког смера. Ова школа је важила за једну од „јачих"гимназија у нашој земљи због чега сам и одлучио да испитам успех ученика који је похађају у решавању елементарних математичких задатака. Иначе, последњих година за упис у ову школу је било потребно понети око 60 поена са пријемног испита што је много мање него у београдским гимназијама. Чак се дешавало да граница буде и испод 50 поена.

2.1.1 Поступак истраживања

У истраживању су учествовали ученици оба одељења четврте године гимназије друштвено-језичког смера. Ученици су радили писмену вежбу на којој је било 5 задатака различите тежине. Сваки задатак носи 20 поена. Постојале су две групе врло сличних задатака исте тежине. Ученици су задатке решавали самостално, под надзором професора и истраживача. У првом одељењу, писмену вежбу је радило 28 ученика, а у другом 27. Вежбу на којој ће бити извод и монотоност функције професорка им је најавила 10 дана раније, а три дана пред вежбу отишао сам ја да им одржим један час и најавим своје истраживање. Тада сам им најавио могућност да један од 5 задатака буде сасвим елементаран али из основне школе и често примењиван у животу. Прилажем обе групе са те вежбе.

I група

1. Наћи 20% од 100
2. Наћи извод функције $f(x) = e^x(\sin x + 4x - 2)$

3. Наћи извод функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 17}{x - 2}$$

4. Наћи извод функције $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
5. Решити неједначину

$$\frac{-5x + 6 + x^2}{1 - x^2} < 0$$

II група

1. Наћи 15% од 60
2. Наћи извод функције $f(x) = \ln x(\cos x + 2x - 5)$
3. Наћи извод функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$$

4. Наћи извод функције $f(x) = \sin(x^3 + x + 1)$
5. Решити неједначину

$$\frac{-x^2}{x^2 - 6x + 9} < -1$$

Први задатак одговара нивоу 1 на скали постигнућа математичке писмености. Други, трећи и четврти спадају у групу елементарних задатака. Потребно је применити готове формуле које су рађене на часу. Пети задатак је мало сложенији; у првој групи намерно није дат полином у канонском облику у бројиоцу. То је проузроковало много грешака о којима ће бити речи касније.

2.1.2 Резултати

Резултати су лошији од очекиваног. Нарочито је забрињавајућа ситуација била код првог задатка. Први задатак за прву групу тачно је урадило 17 ученика, док остали нису успешно решили задатак. Просечан број поена је 12,14 од 20. Код друге групе, резултати су били знатно лошији. Само је 6 ученика од 27, колико их је радило писмену вежбу, тачно решило задатак. Просечан број поена је неочекивано низак само 4,4. Процентни рачун се ради још у основној школи и веома им је потребан на сваком кораку. Кад сам саопштавао резултате помињао сам поскупљења и појефтињења (ове теме их и те како занимају). Резултати осталих задатака (у процентима ученика који су потпуно урадили, делимично урадили и уопште нису урадили задатак) дати су наредном табелом. Дат је и просечан број бодова који су освојили по задатку.

група	задатак	потпуно решило	делимично решило	није решило	просечан бр. бодова
I	2.	50%	21%	39%	$14,48$
II	2.	79%	14%	7%	$17,5$
I	3.	25%	54%	21%	$10,179$
II	3.	53%	11%	36%	$10,04$
I	4.	25%	54%	21%	$10,179$
II	4.	53%	11%	36%	$10,04$
I	5.	11%	14%	75%	$3,6$
II	5.	0%	25%	75%	$2,5$

Први и пети задатак ученици нису вежбали час раније на припреми за писмену вежбу, али вежбали су да испитају монотоност функције код које се за први извод добије нека рационална функција чији су полиноми у бројиоцу и имениоцу највише другог степена. Неједначине за обе групе представљају готово исти захтев. Када су им саопштавани резултати најбољи ученици су се жалили како су неједначину добили ненајављено. Чак је једна ученица поставила питање: ,,Какве овај 5. задатак има везе са овим сто ми радимо?".

2.1.3 Карактеристичне грешке

Најлошије је урађен пети задатак за обе групе. Просечан број поена у обе групе је мањи од 4, а сваки задатак носи по 20 поена. Повезивање знања је лоше. Ученици су навикнути да на припреми за контролну вежбу или писмени задатак добију истоветне задатке као што ће бити на вежби само са другим бројевима. У групи II огроман проблем за ученике је представљало то што се са десне стране неједнакости налази -1. Они који су се сетили да је пребаце на другу страну нису успели да реше до краја задатак. Полином у имениоцу је квадрат бинома и увек је ненегативан. Тога се нико није сетио. У групи I, пак, проблем је био већ поменути полином у бројиоцу који намерно није дат у канонском облику, тако да када су они тражили знак бројиоца решавајући квадратну једначину, за чије решавање сви знају формулу:
$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
проблем је настао јер су помешали коефицијенте. Једном броју ученика у познатој формули је: $a=-5, b=6, c=1$. Претпоставио сам када сам задавао задатак да ће неко погрешити, али број ученика коме је ово представљало проблем је премашио очекивања. Код обе групе испоставило се да су ученици потпуно заборавили да решавају квадратне неједначине. Најбољи ученици знају да реше неједначину код које је $a>0$ и $D>0$, али овде је требало применити случај када је $D=0$. Нико то није урадио. Задаци са налажењем извода били су им знатно лакши. Ту су се јављале грешке једино у непознавању формула за извод производа и количника тј. у замењивању ове две формуле. Код извода сложене функције једина грешка била је неразумевање формуле. Ево једне специфичне грешке: ради се о 3. задатку у првој групи

$$y'=\frac{(x^2)'-(8x)'+17'}{x'-2'}=\frac{2x-8}{1}=2x-8$$

Код извода сложене функције било је оваквих грешака у првој групи:

$$y' = (ln(x^2 + 2x))' = \frac{1}{x^2 + 2x}$$

аналогно овоме у другој групи су писали:
$y' = (sin(x^3 + x + 1))' = cos(x^3 + x + 1)$

Све у свему, јако лош резултат ученика у решавању елементарних задатака.

2.2 Земунска гимназија

Земунска гимназија је основана 23. септембра 1858. године, као тек трећа гимназија у Србији, после гимназија у Сремским Карловцима (1792) и Новом Саду (1810). Прве године рада имала је 21 ученика у само једном разреду. У то време Земун је припадао Аустријском царству, тако да је званични језик школе био немачки. Од 1872. године Земунска гимназија има сва четири разреда. Током Првог светског рата Земунска гимназија је имала проблема са нормалним радом. То је потрајало до 1925. када је рад школе доведен у ред. Те године је Земунска гимназија по први пут отворена и за девојке. Гимназија, какву је данас знамо, ради од 1958. године и настала је спајањем две мање школе које су формиране 1946. године. Своју 150. годишњицу гимназија је прославила 2008. године. Школа се налази у Градском парку у Земуну, између зграда основне школе и Пољопривредног факултета. Данашња зграда саграђена је 1879. у ренесансном стилу, а изградио ју је Никола Колар. Проширење зграде је настало као потреба услед повећаног броја ученика и трајало је од 1912. до 1916. године. Намера је била да се и дограђени део изгради у ренесансном стилу, али је то урађено у пост-сецесионистичком. Од тада, зграду сачињавају две грађевине које формирају атријум. Такође, зграда је под заштитом Државе и споменик културе. Гимназију похађа око 1 400 ученика у четири разреда. Колектив броји око осамдесет професора, а школа је једна од еминентних образовних установа Београда. За упис је последњих година потребно више од 90 поена на пријемном испиту. Ђаци ове школе су веома истакнути на државним такмичењима.

2.2.1 Поступак истраживања

У истраживању су учествовали ученици два одељења четврте године гимназије друштвено-језичког смера. Ради поређења са гимназијом ,, Милош Савковић"из Аранђеловца узета су одељења са лошијим успехом из математике. Ученици су решавали задатке за први и други писмени задатак. У наставку рада навешћемо задатке, као и успех који су ученици постигли приликом решавања одређеног задатка.

Први писмени задатак

I група

1. Наћи област дефинисаности, нуле, знак и парност функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1}$$

2. Наћи домен функције $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 4x - 5)$
3. а) Наћи асимптоте функције

$$f(x) = \frac{3x^2}{1 - 2x}$$

б) Ако је

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$$

одредити$f(f(x))$ и $f(5)$

4. Нађи:

а)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} \ ;$$

б)

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 2x} \ ;$$

ц)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x+\frac{1}{4x}\right)^x \ ;$$

II група

1. Нађи област дефинисаности, нуле, знак и парност функције

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x-7}$$

2. Нађи домен функције $f(x)=\log_{x-2}(x^2-4x+4)$
3. а) Нађи асимптоте функције

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2-x}$$

б) Ако је

$$f(x)=\frac{x-3}{2x+1}$$

одредити $f(f(x))$ и $f(5)$

4. Нађи : а)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-x} \ ;$$

б)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{2x} \ ;$$

ц)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x \ ;$$

Други писмени задатак

I група

1. Одредити домен, нуле, знак и парност функције:

$$f(x)=\frac{-x^2+5x-6}{x^2-10x+25}$$

2. а) Одредити асимптоте функције:

$$f(x)=\frac{x^3-5}{3-x^2}$$

б) израчунати:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{3-x^2} \ ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 2x} \ ;$$

3. Наћи извод функције:
а)

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1-\ln x}$$

б)

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$$

4.
а) Наћи извод функције по дефиницији $y = 3x + 11$ у $x_0 = 1$;
б) Наћи извод функције $y = \sin(x^4+1)$;
ц) Наћи извод функције $y = 5x^6 + 6\sqrt{x} - 11e^x$;

II група

1. Одредити домен, нуле, знак и парност функције:

$$f(x) = \frac{-x^2-x+6}{x^2-8x+16}$$

2. а) Одредити асимптоте функције:

$$f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2+x-2}$$

б) израчунати:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16} \ ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 3x} \ ;$$

3. Наћи извод функције:
а)

$$f(x) = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$$

б)

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x + x^3 \sin x$$

4.
а) Наћи извод функције по дефиницији $y = 7x + 1$ у $x_0 = 1$;
б) Наћи извод функције $y = e^{x^2+1}$;
ц) Наћи извод функције $y = -x^3 + 3\sqrt{x} + 17 \ln x$;

2.2.2 Резултати

Као и за гимназију ,,Милош Савковић”резултати су дати табеларно. Највећи проблем за ученике на првом писменом задатку био је 4. задатак нарочито под ц) иако је тај тип задатака рађен на часу. На другом писменом су намерно дати готово исти типови лимеса зато што је то најлошије урађено на првом писменом.

I писмени задатак

група	задатак	потпуно решило	делимично решило	није решило
I	1.	48%	37%	15%
II	1.	45%	41%	14%
I	2.	33%	30%	37%
II	2.	46%	36%	18%
I	3.	63%	22%	15
II	3.	46%	45%	9%
I	4.	11%	30%	59%
II	4.	14%	32%	54%

II писмени задатак

група	задатак	потпуно решило	делимично решило	није решило
I	1.	23%	72%	5%
II	1.	14%	66%	20%
I	2.	20%	50%	30%
II	2.	32%	68%	0%
I	3.	33%	62%	5%
II	3.	20%	65%	15%
I	4.	11%	45%	44%
II	4.	0%	42%	58%

Наредна табела приказује оцене ученика одељења IV_2 и IV_3 Земунске гимназије школске 2011/2012. године на првом и другом писменом задатку.

Оцене

одељење	писмени	одличних	вр. добрих	добрих	довољних	недовољних
IV_2	I	6	4	3	9	2
IV_2	II	4	6	4	1	6
IV_3	I	4	7	7	6	4
IV_3	II	4	6	8	6	2

2.2.3 Карактеристичне грешке

Навешћу грешке које су се најчешће јављале али и грешке које су мени биле занимљиве. Неке од њих илуструју тотално непознавање особина елементарних функција и граничне вредности функције. Интересантно је да су неке од ових грешака правили ђаци који имају високу оцену и амбицију да упишу факултет на коме се полаже математика на пријемном испиту.

I писмени задатак

- Следећи задатак је радила ученица која има петицу

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})}=\frac{1-2+1}{1-1}=\frac{0}{0}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}6x}{2x}=\frac{\sin x\cdot 6x\cdot 3}{\cos x\cdot 2x\cdot 3}=\frac{\sin 6x\cdot 3}{\cos x\cdot 6x}=\frac{3}{\cos x}=\frac{3}{1}=3$$

Овде је неколико кардиналних грешака направљено. Прво тотално непознавање тригонометријских функција (као и у следећем примеру) а онда и граничне вредности.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot 2}{5\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{\sin 10x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 0}{1}=\frac{0}{1}=+\infty$$

Ова ученица је у том тренутку била веома озбиљан кандидат за Вукову диплому. Интересантноје да је она прва три задатка потпуно тачно урадила, а успела је да направи овакву грешку коју ни ђаци у најнижим разредима не би смели да праве.

Следећи ђак је исти задатак урадио укратко:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}=\frac{0}{1}=+\infty$$

Код првог задатка, прва група није имала неки карактеристичан проблем, али у другој групи им је било тешко да одреде нуле и знак функције (пошто је изразу у бројиоцу негативна дискриминанта). Ретко ко се сетио да је тај израз увек позитиван и да нема реалне нуле, што би требало да је елементарна ствар. Када су одређивали област дефинисаности функције, неки су писали:

$$x^2+4\neq 0$$
$$x^2\neq -4$$
$$x\neq -2$$

$$x\neq 2$$

А неки овако:

$$x^2+4\neq 0$$
$$x^2\neq -4$$
$$x\neq -2i$$

$$x\neq 2i$$

У другом задатку највећи проблем је била непозната основа логаритма. Већина ученика је знала да нумерус мора бити позитиван, али сви су заборавили (или нису научили) да основа мора бити већа од нуле и различита од 1. Трћи задатак је, испоставило се, најједноставнији за израду.

II писмени задатак

Поново су лимеси били проблем.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(1-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2})}{x^2(x^2-8+\frac{16}{x^2})}=\frac{1-\frac{4\cdot 2}{4}+\frac{4}{4}}{4-8+\frac{16}{4}}=\frac{1-2+1}{4-8+4}=\frac{0}{0}=0;$$

Исти задатак је рађен и овако:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}=\frac{(x-2)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{(x-2)^2}{(x-4)^4}=\frac{1}{(x-2)^2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}6x}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}6x}{\operatorname{tg}2x\cdot\frac{3}{3}}=3\frac{\operatorname{tg}6x}{\operatorname{tg}6x}=3;$$

Један вуковац је ово написао:

$$\frac{0}{27}=+\infty$$

Ретко који ученик је у стању да разуме дефиницију извода у тачки и да је примени. Огромна већина ученика је имала великих проблема са следећим задатком: Одредити извод функције $y=7x+1$ у тачки $x_0=1$.

Издвајам два решења: Прво

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=1$$

$y=7\cdot 1+1$

Друго

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7(1+\Delta x)-7}{\Delta x}=\frac{7+7\Delta x-7}{\Delta x}=7$$

Наведене грешке и њима сличне јављале су се јако често у радовима тестираних ученика иако су задаци били прилично једноставни.

2.3 Неки узроци грешака

Све узроке неуспеха ученика можемо поделити у три велике групе:

- Породица: образовни статус родитеља, породични односи, запосленост родитеља, очекивања родитеља

- Школа: утицај наставника, односно његове припремљености за час, савремене наставне методе, однос ученик - наставник, очекивања наставника, атмосфера у одељењу. Ова група ће нас највише занимати у оквиру овог рада.

-Особине ученика: интелигенција, однос према раду, интересовања, очекивања

Очекивања професора могу значајно да утичу на успех ученика. Научници су идентификовали два типа ефеката наставникових очекивања: ефекат ,,самоиспуњавајућег пророчанства"и ефекат ,,подржаног очекивања". Први тип показује како под утицајем првобитно донетих погрешних закључака или пристрасних очекивања, долази до понашања које узрокује да очекивања постану тачна. Други тип ефекта наставникових очекивања показује како наставник очекује од ученика да понови претходно развијене форме понашања и потврди његова негативна очекивања као готову чињеницу, не успевајући да види учеников напредак у знању. Наставников различит третман успешних и неуспешних ученика је одличан пример ефекта подржаних очекивања.

Један од узрока грешки је и наставни план и програм који је по мом мишљењу за друштвени смер јако лош. Врло често деца имају проблема у школи због рупа у знању, односно морају надокнадити одређене делове градива како би могла усвајати нова. Проблем се јавља и због слабог планирања времена за учење. Многи ученици који нису развили успешне начине учења имају тешкоћа у памћењу градива, зато што се често захтева и повезивање различитих делова градива. У друштвеном смеру од треће године ученици имају само два часа недељно математике, а један од проблема је све веће изостајање ученика са наставе. Ако прескоче два узастопна часа јако тешко се укључују у рад и не могу да прате наставу. Све више малолетних деликвената иде у редовне школе, мале су казне за преступе па ово представља додатни проблем. Предзнање им је лоше још из основне школе иако је пријемним испитом покривено цело градиво. То не надокнаде него наставе да уче средњешколско градиво и ту настаје проблем. Код ученика друштвеног смера сам приметио да неки уче задатке напамет и да буквално мрзе математику, неки од њих кажу: ,,једва чекам само да се отарасим математике". Тако да су потпуно незаинтересовани.

Можда је проблем и у томе што је јако честа појава међу ученицима да се плаше професора и не смеју да поставе питање на часу. Али кад поменух професоре покушаћу један од узрока грешки ученика да пронађем на месту где се њихови будући професори школују. Нека ово буде најава наредног поглавља.

,, *Најважније у математици,*
то је начин предавања"
Николај Лобачевски

3 Математички факултет

Године 1853. основано је Природно-техничко одељење Лицеја, као једно од три његова одељења. У десетогодишњем раздобљу (1863-1873. године) природне науке и математика изучавају се у оквиру Техничког факултета Велике школе.

На Великој школи основана је 20. децембра 1873. године прва Катедра за математику на тадашњем природно-математичком одсеку Филозофског факулета. Овај датум Математички факултет обележава као Дан Факулета.

Наредних седамдесетак година природне науке и математика развијају се у оквиру Филозофског факултета све до 1947. године када је Природно-математички одсек Филозофског факултета прерастао у самосталан Природно-математички факултет.

Године 1990, реорганизацијом Природно-математичког факултета, тадашњи Одсек за математику стиче пословну и организациону самосталност, а статус самосталне установе у саставу Универзитета у Београду Математички факултет добио је 1995. године конституисањем сопствених органа управљања и доношењем Статута Факултета.

Преко 6000 дипломираних математичара, преко 700 магистара, бројни специјализанти и преко 400 доктора наука, који заузимају значајна места у бројним институцијама, државним службама, научноистраживачким институцијама, компанијама и школама како у земљи, тако и у иностранству.

Математички факултет је једна од најеминентнијих образовних установа у земљи. Има три студијска програма: Математика, Информатика и Астрофизика. Студијски програм математика има следеће смерове:

1. Теоријска математика и примене
2. Рачунарство и информатика
3. Примењена математика
4. Статистика, актуарска и финансијска математика
5. Професор математике и рачунарства
6. Астрономија

Факултет уписује око 300 студената годишње, а обично је и 65 бодова довољно за упис.

3.1 Поступак истраживања

На смеру Професор математике и рачунарства на 4. години студија студенти полажу предмет који се зове Пракса наставе математике. Они одрже одређен број часова у основним и средњим школама. Да би уопште ишли да држе часове асистент од њих захтева да положе тест елемантарних задатака који би требало да буде само формалност. Тестови обухватају 27 елементарних математичких задатака, а услов да се положи тест је 24 и више тачно урађених. Први и трећи тест трајали су по 90 минута, а други и четврти по 120 минута. Студенти су имали право на 4 покушаја да положе тест и уколико не би положили ни из четвртог покушаја, нису били у могућности да полажу испит Пракса наставе математике и рачунарства текуће године. Резултати су изненађујући. Очекивано је да овакав тест буде обична формалност за студенте, али неки од њих нису успели да положе тест ни из четвртог покушаја. Студенти који нису успели да положе први и други тест добили су олакшицу за трећи и четврти покушај, односно потребан број бодова да се тест положи смањен је на 22. Иначе, било је више група задатака приближно исте тежине. Навешћу по једну произвољну групу задатака са сваког од тестова.

I тест

1. Упростити израз($\mathrm{a}^4)^2 \cdot (a^2)^2, a \neq 0$
2. Упростити израз $\sqrt{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}, x \geq 0$.
3. Израчунати $(3-4i)(3+4i)$.
4. Раставити на чиниоце $5x^2 - 5$.
5. Решити једначину $x^2 - 9x + 14 = 0$.
6. Решити неједначину

$$\frac{3}{x^2-1} < 1$$

.

7. Решити једначину $\log_2 x = 4$.
8. Израчунати вредност осталих тригонометријских функција $(\cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg})$ ако је $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

9. Одредити област дефинисаности функције:

$$y = \frac{x}{x^2+4}$$

10. Одредити $f \circ g$ ако је

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = (2x-1)^2$$

.

11. Наћи први извод функције $f(x) = \ln x$.
12. Површина правилне тростране призме је $P = 20\sqrt{3}cm^2$ а дужина ивице основе једнака је $4cm$. Наћи висину призме.
13. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$
14. Одредити координате вектора $\overrightarrow{AB}$ ако је A(2, 3, 4) и $B(3, 0, -1)$.
15. Наћи девети члан аритметичког низа

$$\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \ldots\ldots$$

16. Наћи количник и остатак при дељењу полинома $a(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ полиномом

$b(x) = x^2 + x = 1$.

17. Израчунати

$$1\frac{2}{7} + \frac{1}{2}$$

18. Израчунати 0,015:0,01

19. Наћи све унутрашње (α, β, γ) и све спољашње $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ углове троугла ако је $\gamma = 45°$ и $\beta = 100°$.

20. Решити једначину $15 : (2 - x) = 4$.

21. Израчунати НЗД(144, 192, 352).

22. Решити неједначину $|x - 1| > 1$.

23. Израчунати површину правоуглог троугла ако је дужина хипотенузе $15cm$ а дужина једне катете $0,9dm$.

24. Написати једначину праве кроз две тачке $P(0, -2)$ и $Q(3, -2)$

25. Шта је ортоцентар троугла?

26. Шта је пречник круга?

27. Које услове треба да задовољавају a и b да би постојало $\log_a b$?

II тест

1. Израчунати

$$\frac{16^2 \cdot 32^2}{2^4 \cdot 8^2 \cdot 4}$$

2. Израчунати

$$\binom{8}{5}$$

3. Основа праве тростране призме је правоугли троугао чије су катете $12cm$ и $5cm$ а висина призме је $4cm$. Израчунати површину призме.

4. Решити једначину $2\sqrt{x+5} = x - 2$.

5. Израчунати

$$(4\frac{1}{3} - 2,2) \cdot (1 - \frac{13}{16})$$

6. Решити неједначину

$$2,25 : x > \frac{3}{4}$$

7. Фармерке су коштале 4500 динара. Прво им је цена снижена за 20% а затим још за 10%. Колика им је сада цена?

8. Ако је збир унутрашњих углова простог многоугла 1620°, колико тај многоугао има дијагонала?

9. Израчунати $\log_2 16$.

10. Ако је$f(x) = 3x - 2$ одредити инверзну функцију функције f .

11. Одредити површину круга описаног око квадрата странице $6cm$.

12. Израчунати површину трапеза коме су основице $0,3dm$ и$5,5cm$ а висина $1,5cm$.

13. Решити систем једначина

$$2x - y + 3z = 9$$

$$3x - 5y + z = -4$$

$$4x - 7y + z = 5$$

14. Наћи $\mathrm{ctg}(\frac{5\pi}{3})$ и $\mathrm{tg}\, 300^\circ$

15. Одредити површину троугла ABC, ако је A(-3,3), $B(7,3)$ и $C(2,8)$

16. Ако је у геометријском низу$a_1 = 15$ и $q = 3$ одредити збир прва четири члана тог низа.

17. Ако за $3kg$ меса треба издвојити 1000 динара, колико динара треба издвојити за $16kg$ меса?

18. Књига има 120 страна. Ученик је првог дана прочитао $\frac{2}{3}$ књиге, другог дана $\frac{1}{15}$, а трећег дана оно што му је остало. Колико је ученик прочитао трећег дана?

19. Ако је $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$, а $C = \{1, 3, 4, 9\}$, одредити $C \setminus (A \cap B)$

20. Решити неједначину $|x + 1| < 4$.

21. Наћи НЗД и НЗС полинома $P(x) = x^2 - 4x + 4$ и $Q(x) = x^2 - 4$.

22. У скупу реалних бројева решити једначину $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

23. Угао између странице и дијагонале правоугаоника је 40°. Колики је угао између његових дијагонала?

24. Израчунати

$$\int (x-1)^2 dx.$$

25. Колико оса симетрија има правоугаоник?

26. Када кажемо да су два угла суплементна?

27. Навести критеријум дељивости природног броја са 6.

IIIтест

1. Нека је

$$a = -\frac{17.170 : 1.7}{10}$$

и $b = \sqrt{1,21}$, одредити $a + b$ и ab.

2. У скупу целих бројева решити неједначину

$$-\frac{2}{x} > 1$$

3. Ако је

$$z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$$

одредити $|z|$, Rez и Imz.

4. Ако је унутрашњи угао правилног многоугла једнак 140°, израчунати број дијагонала које полазе из једног темена тог многоугла.

5. Један трактор узоре њиву за $4h$. За које време би исту њиву узорала три трактора?

6. Ако је A (2, -1) и $B(0, 6)$ одредити растојање између тачака A и B и $\overrightarrow{AB}$.

7. Дужина полупречника кружнице уписане у квадрат је $6cm$. Колика је површина тог квадрата и круга описаног око тог квадрата?

8. Раставити на чиниоце $9x^2 + 12x + 4$.

9. Одредити област дефинисаности функције:

$$y = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$$

.

10. Одредити НЗД(392, 112, 308).

11. Решити неједначину $\log_4(x-1) < 0$.

12. Ако је $\alpha = 300°$, одредити α у радијанима и израчунати $\operatorname{tg}\alpha$.

13. У скупу реалних бројева решити једначину: $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

14. Ако је $A = \{x : x \in N, 1 < x < 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 9\}$ и $C = \{x : x \in N, 16|x\}$, одредити $(A \cap B) \cup C$.

15. Израчунати полупречник круга, ако централном углу од $360°$, одговара кружни лук од дужине $45cm$.

16. Израчунати запремину лопте полупречника $6cm$.

17. Ако је $A = 2x - 3$,и $B = x + 1$, написати у сређеном облику $A^2 - 3B$.

18. Одредити скуп система једначина $2x^2 + 2x - y - 1 = 0$, $y - 2x - 1 = 0$.

19. Површина правилне тростране призме је $20\sqrt{3}cm^2$, а основна ивица је $4cm$. Израчунати висину призме.

20. Катете правоуглог троугла су $6cm$ и $8cm$. Одредити висину која одговара хипотенузи.

21. Изтачунати

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{3x^2+1} \ ;$$

22. Разлика два броја је 11 а производ -24. Који су то бројеви?

23. Странице троугла ABC су $AB = 12cm$, $BC = 4cm$ и $CA = 10cm$. Ако је троугао $A_1B_1C_1$, сличан са троуглом ABC и ако је $A_1B_1 = 3cm$, одредити остале странице троугла $A_1B_1C_1$.

24. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$

25. Када кажемо да је неки четвороугао тангентни?

26. За које вредности $x \in [0, 2\pi]$ није дефинисано $\operatorname{tg} x$?

27. Које услове треба да задовољавају a и b да би постојало $\log_a b$?

IV тест

1. Свакој величини из прве групе: $1.5m$, $1.5h$, $1.5t$, $1.5km^2$ и $1.5d$ доделити одговарајућу величину из друге групе: $90min$, 1 500 000м^2 , $150cm$, $15cl$ и $1500kg$.

2. Дати су разломци $\frac{29}{50}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{49}{100}$; у неједнакости $0,54 < \qquad < 0,56$; уписати један од датих разломака тако да она постане тачна.

3. Одредити сва решења једначине $\cos\frac{x}{8} = \sqrt{2}$, у интервалу $[0,2\pi]$.

4. Површина мањег круга кружног прстена је $9\pi cm^2$, док је површина прстена $16\pi cm^2$. Израчунати полупречник већег круга.

5. На празна места уписату знакове $<, >$ и $=$ тако да се добију тачне (не)једнакости: $2.5dm \qquad 2m5dm$; $2m \qquad 22dm$; $3kg \qquad 300g$; $2t \qquad 200kg$.

6. Одредити највећи четвороцифрен број дељив са 18.

7. Израчунати вредност израза $3\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{(-6)^2} \cdot \sqrt{0,36} - 2$

8. Израчунати и написати одговарајући резултат за разлику квадрата бројева 7 и 3; квадрат разлике бројева 7 и 3; збир квадрата бројева 7 и 3 и квадрат збира бројева 7 и 3.

9. Решити неједначину

$$\log_2(\frac{x}{2}+1)<1$$

10. Реља је уложио 30 000 динара у банку. Годишња камата је 10% и рачуна се на крају године. Колико динара Реља има на рачуну после две године, под условом да није подизао новац са рачуна за то време.

11. Ако је $A=(\frac{1}{4}\ -1):(\frac{1}{8}-1)$, и $B=(\frac{1}{3}\ +1):(\frac{1}{8}+1)$, израчунати $A:B$.

12. Пре десет година Ђорђе је био пет пута старији од Лазара. Колико година има Ђорђе ако је сада три пута старији од Лазара?

13. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $5x^2-7x+3=0$, саставити квадратну једначину чија су решења $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

14. Колико постоји целобројних вредности параметра k таквих да је $(k-1)x^2-2(k+5)x-(k+5)<0$ за све x.

15. Одредити реалне бројеве x и y такве да важи $(2+i)(x+yi)=5-5i$.

16. Колики је унутрашњи угао правилног многоугла који има 6 пута више дијагонала него страница?

17. Ако је $z=2i$ одредити вредност израза $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$.

18. Решити једначину $2|x+1|+x-3=0$.

19. Нека је $|a|\neq|b|$. Упростити израз$(a+b-\frac{4ab}{a+b}):(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2})$.

20. Одредити скуп A ако знамо да важи$A\cap\{3,5,8,11\}=\{5,8\}$, A$\cup\{4,5,11,13\}=\{4,5,7,8,11,13\}$, $\{8,13\}\subset A$ и $A\subset\{5,7,8,9,11,13\}$.

21. График функције $y=\frac{1}{x^2-ax+2}$ садржи тачку $M(-3,\frac{1}{19})$. Колико је a?

22. Израчунати растојање тачке O (0, 0) од праве $y=3x+5$.

23. Решити једначину $\log_2(1-x)=\ log_2(x-3)$.

24. Основна ивица правилне шестостране призме је $a=3m$ а дијагонала бочне стране $d=6m$. Израчунати запремину призме.

25. Шта треба да испуњавају реални бројеви a, b и c да би постојало $\frac{\log_c b}{\log_c a}$? Написати овај израз у облику логаритма у ком не фигурише c .

26. Колико оса симетрије има квадрат?

27. У ком односу су централни и периферијски угао круга над истом тетивом?

Јасно је да се ради о потпуно једноставним и елементарним задацима, много лакшим од оних на пријемном испиту за било који факултет.Чак постоје задаци који су једноставни и за ученика који је пети разред основне школе. Сваки студент би требало, самим тим што је уписао овај факултет, да олако положи овакав тест из првог пута.

3.2 Резултати

Резултати су много лошији од очекиваних, забрињавајуће је то што 12 студената и после 4 покушаја нису успели да положе овај тест, а самим тим ни испит Пракса наставе математике и рачунарства текуће школске године. На овом месту наглашавам да овим истраживањем нисам имао намеру никога да омаловажавам већ да једноставно имам увид у наш образовни систем, тј. бар онај део који се тиче наставе математике. Резултати пролазности студената бројчано и у процентима дати су следећом табелом за сва четири теста.

Тест	радило	положило	пало
I	62	38(61%)	24(39%)
II	26	5(19%)	21(81%)
III	22	7(32%)	15(68%)
IV	15	3(20%)	12(80%)

3.3 Карактеристичне грешке

Као и за ученике навешћу и неке од грешака које су правили студенти четврте године Математичког факулетета смера Професор математике и рачунарства тј. они који треба да предају тим истим ученицима.

-Решити неједначину

$$\log_2(\frac{x}{2}+1) < 1$$

-Први студент

$$\frac{x}{2}+1 < 2x < \frac{-1}{4}$$

$$\frac{x}{2}+1 > 0$$

$$x > -2$$

решење је:

$$-2 < x < \frac{-1}{4}$$

Други студент је исти задатак радио овако:

$$(\frac{1}{2})^1 > 2x+1$$

$$2x+1 > \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{-1}{4}$$

Мислим да је овде сваки коментар сувишан. Ово је тотално непознавање логаритамске и степене функције.

- Када кажемо да је неки четвороугао тангентни? Четвороугао је тангентни ако има бар 1 пар паралелних страница

- Одредити сва решења једначине $\cos\frac{x}{8} = \sqrt{2}$, у интервалу $[0{,}2\pi]$

$$\cos t = \sqrt{2}$$

$$t_1 = \arccos\sqrt{2}$$

$$x_1 = 8\arccos\sqrt{2}$$

Мали број студената је приметио да ову једначину нема потребе решавати пошто је $\sqrt{2} > 1$, па самим тим једначина нема решење.

- За које вредности x из интервала $[0{,}2\pi]$, није дефинисано $\operatorname{tg} x$? Одговор је: Није дефинисано у 0 и π.

Овај студент очигледно не зна дефиницију функције $\operatorname{tg} x$.

- У ком односу су централни и периферијски угао круга над истом тетивом? Периферијски угао круга је два пута већи од централног угла круга над истом тетивом.

- Реља је уложио 30 000 динара у банку. Годишња камата је 10% и рачуна се на крају године. Колико динара Реља има на рачуну после две године, под условом да није подизао новац са рачуна за то време. Ево на који начин је задатак решио један студент: 30 000 динара, 10% је 3 000 динара.

$$30000 - 6000 = 24000$$

Има још 24 000 динара у банци на рачуну.

- За које вредности реалних бројева a и b постоји $\log_a b$? За $b > 0$ постоји.

Задржао бих се овде. Студент је непознату основу оставио да буде било који реалан број. Сетимо се да је то исто представљало проблем ученицима средњих школа. Могло би се закључити да је овој теми посвећено мало пажње или да се не испредаје како треба.

- Неки студенти су исти задатак урадили овако: Тражени логаритам постоји када је $b > 0$ и $a > 0$

- Један је написао и ово: $a > 2$, $b > 1$.

Око 70% студената није урадило тачно овај задатак иако је ово најелемантарнији могући пример.

- 0.015 : 0.01 = 0.015 : 0.01 = 15 : 1 = 15.

- Одредити област дефинисаности функције

$$y = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$x^2 + 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq -4$$

$$x \neq -2i$$

$$x \neq 2i$$

Веома слична грешка већ наведеној једног ученика Земунске гимназије који је све три претходне године имао 1 из математике и полагао поправни испит у августу.

- Неко је написао: ,,Центар уписане кружнице троугла добија се у пресеку тежишних линија троугла".

- Израчунати вредност осталих тригонометријских функција ($\cos$, sin, ctg) ако је $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$,

и $0 < \alpha < \pi$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$,

$\sin \alpha = -2$,

$\cos \alpha = 3$,

И ово је написао студент 4. године. Такође елементарна ствар коју ни један ученик који заврши другу годину (или чује било шта из тригонометрије) ма које школе не би смео да уради.

- Ако је збир свих унутрашњих углова неког правилног многоугла једнак $1620°$, колики је један унутрашњи угао тог многоугла? $(n-2) \cdot 180° = 1620°$,

$$n - 2 = 9$$

$$n = 11$$

- Одредити растојање између тачака A(0, 3) и M(1, -4).
$\sqrt{(0+1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- Израчунати

$$\left(\begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) = 1$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) = \frac{n \cdot (n-1)!}{2}$$

$$\left(\begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array}\right) = \frac{8 \cdot 7!}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

- Израчунати

$$(4\frac{1}{3} \ -2,2) + (1 - \frac{13}{16})$$

$$(4\frac{1}{3} \ -2,2) \cdot (1 - \frac{13}{16}) = (\frac{13}{3} - \frac{11}{5}) \cdot (1 - \frac{13}{16}) = \frac{65-33}{15} \cdot \frac{3}{13} = \frac{32}{65}$$

- Када кажемо да су два угла суплементна?
Два угла су суплементна када је њихов збир једнак 360°.
- У ком односу тежиште троугла дели тежишну дуж?
Тежиште троугла дели тежишну дуж у односу 2:3.
-У пресеку којих правих се добија центар уписане кружнице троугла?

Центар уписане кружнице троугла добија се у пресеку тежишних линија троугла.

- Навести критеријум дељивости природног броја са 18. Природан број је дељив са 18 ако испуњава услове дељивости и са 3 и са 6, при чему је са 3 дељив ако му је збир цифара дељив са 3, док је са 6 дељив уколико је дељив са 2 и 3.

- У ком односу су централни и периферијски угао круга над истом тетивом? Централни угао је 2 пута мањи.

- Израчунати вредност израза:

$$(1\frac{1}{2})^7 \cdot (1\frac{1}{3})^7 : 2^7 - (\sqrt{80} - 2 - 4\sqrt{5})$$

$$(1\frac{1}{2})^7 \cdot (1\frac{1}{3})^7 : 2^7 - (\sqrt{80} - 2 - 4\sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^7 \cdot (\frac{4}{3})^7 : 2^7 - (4\sqrt{5} - 2 - 4\sqrt{5}) = \frac{3^7}{2^7} \cdot \frac{4^7}{3^7} \cdot \frac{1}{2^7} - 2 = 2$$

- Ако је $z = 2i$, одредити вредност израза:
$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$
$z = 2i$, $z = x + iy \Rightarrow x = 0, y = 2$,
$\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \left|\frac{1-x-yi}{1+x-yi}\right| = \left|\frac{1-2i}{1-2i}\right| = |1| = 1$
- Други студент је тај задатак радио овако:

$\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \left|\frac{1-2i}{1+2i}\right| = \left|\frac{1-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}\right| = \left|\frac{(1-2i)^2}{1^2-(2i)^2}\right| = \left|\frac{1-4i+(2i)^2}{1+4}\right| = \left|\frac{1-4i-4}{5}\right| = \left|\frac{-4i-3}{5}\right| = \left|-\frac{4i+3}{5}\right| = \frac{4i+3}{5}$

- Израчунати вредност осталих тригонометријских функција $(\cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg})$ ако је $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1(\frac{12}{13})^2 \cdot \cos^2\alpha = 1 \cdot \frac{144}{169} \cdot \cos^2\alpha = 1$$

$\cos^2\alpha = \frac{169}{144}$ $\cos\alpha = \frac{13}{12}$

- Бојана је до сада положила 23 испита и просек оцена јој је 6,83, ако из предмета Пракса наставе математике добије 10 колики ће јој бити просек?

Ево како је студенткиња то радила:

$$\frac{6,83+10}{2} = 8,42$$

Просек ће јој бити 8,42.

,, *Незнање је неисписан папир на којем можемо писати,*
а погрешно знање је исписан папир који се прво мора брисати"
Charles Caleb Colton

4 Шта би требало променити на боље и како у настави математике

4.1 Коментар резултата

Дакле, након четвртог покушаја, 12 студената није успело да положи тест, а самим тим ни испит Пракса наставе математике и рачунарства текуће године. То није занемарљив број ако се има у виду да су тестови састављени од нејелементарнијих математичких задатака. Чињеница је да је свим студентима било неопходно знање оваквих и сличних задатака како би положили пријемни испит и стигли до треће и четврте године студија. Питање је само како се то знање 'изгубило' на путу од пријемног испита до треће или четврте године студија. Примена раније стечених знања је камен спотицања великог броја ученика и студената, а веома је важна за образовање, као и свакодневни живот. Због тога би било корисно свако истраживање тог проблема, као и налажење могућих решења. Замислите какву би и колику штету овакви 'професори' нанели будућим генерацијама. Да ли бисте волели да они предају Вашој деци? Илустрације ради, да ли бисте волели да Ваше дете и Вас лечи лекар који не разликује лекове или да живите у кући коју је пројектовао грађевински инжењер који не зна да одреди статику зграде? Принцип је исти само код оваквих професора нико неће остати без главе. Како неко ко ни сам не зна оно што треба да предаје може томе да подучава друге? Једино је могуће да их подучава погрешним стварима што је горе од незнања. Да ли су раније рађена слична истраживања? Колико оваквих професора сада предаје у основним и средњим школама и колика је штета због тога? Посебан проблем представља тотална нестручност професора математике тако да у мањим местима често предају људи који су стигли до четврте године факултета, завршили Електротехнички, Машински, Економски факултет и слично. Да бисмо нешто некога научили употребићу овде математичке изразе потребан, али не и довољан услов је да перфектно познајемо оно што треба да предајемо. Овим будућим професорима ће бити јако тешко да предају.

Резултати истраживања су јако лоши нарочито је лоша ситуација на факултету. Дефинитивно нешто у нашем образовном систему не функционише добро. Потребне су квалитетне промене што пре. Не бисмо смели да дозволимо да нам школство овим темпом тоне.

Један од проблема је што планове и програме пишу људи који су нестручни за тај посао. У великом броју случајева планове и програме састављају људи који никада нису имали прилике да предају градиво ученицима. Због тога програм обухвата превише обимно градиво, а наставници су приморани да испредају све што је предвиђено планом и програмом. При том, наставник нема времена да обрати пажњу на то да ли је ученик разумео предавање и у којој мери. Такође, наставник нема времена да провери да ли је ученик у стању да примени своје знање, што би требало да буде основни циљ једног часа. То је отежавајућа околност за наставнике.

Сетимо се на овом месту PISA тестирања са почетка овог рада. Финска је једна од Европских земаља чији су ученици добро прошли на PISA тестирању и што је још важније нема велике разлике међу њима. Код њих будући наставници током школовања морају да имају праксу и у школама за одрасле, да раде у мултикултуралним срединама, да науче да се добро служе савременом технологијом као и да прођу тренинг за рад са децом са специјалним потребама. ,,Можете да будете јако добри у свом предмету, да одлично познајете материју којом се бавите. Али бити добар наставник подразумева још нешто. Зато имамо пуно предмета који треба то да их науче. Такође, битно је да буду обучени у спровођењу истраживања и писању радова. То ће да олакша промене у методу, да побољша и рад са ђацима", објашњава Patrik Scheinin, декан Факултета бихевиоралних наука (Faculty of Behavioural Sciences) на ком се, између осталог, школују и наставници, како они који предају у нижој основној школи (првих шест разреда) тако и они који се специјализују за одређени предмет. Још једна важна ствар издваја образовање у Финској. После сваких седам недеља сви ђаци пишу шта је било добро, шта сматрају да је губљење времена, шта би требало да се побољша у наставном програму, што је нека врста самооцењивања школског система. Код нас би било пожељно овако нешто на предмету математика. Осим тога у Финској однос професор - ученик није толико формалан као код нас и не постоји тако велика дистанца, чак некада и не персирају професорима.

Можда после неких корисних промена не бисмо били у 8 земаља у свету у којима (према последњим истраживањима) деца мрзе математику и плаше се математике. Можда би било лепо дати понекад ученицима анкете које ћу навести, а које сам ја давао ученицима гимназије ,,Милош Савковић"приликом истраживања.

Анкета

Анкета је анонимна, а у сврху израде истраживачког рада из Методике наставе математике. Одговарајте искрено, ваш предметни професор неће имати увид у ову анкету! Унапред хвала на пажњи!

Да ли идеш на приватне часове? ДА НЕ

Да ли си задовољан оценом? ДА НЕ

Коју оцену имаш?

Заслужујеш: ту оцену, мању, већу (подвуци тачан од понуђених одговора)

Да ли би посећивао допунску наставу ако ниси задовољан? ДА НЕ

Кога кривиш ако си незадовољан?

Сматраш ли престрогом казну да за незнање градива основне школе добијеш 1?ДА НЕ

Сматраш ли да је домаћи битан? ДА НЕ

Колико времена недељно вежбаш математику?

Шта је добро, а шта лоше код твог професора?

Шта бисте додали:

Било би добро омогућити ученицима да оцене своје професоре. У нашој земљи се то практикује у неким школама , али те оцене не служе буквално ничему. Било би лепо најбоље оцењене наградити, а најлошије оцењене казнити. Следећу анкету су попуњавали ђаци поменуте гимназије пошто сам им одржао пар часова допунске наставе у оквиру истраживања које сам радио.

Анкета

Сматраш ли да је добро да некад ученици оцене професоре? ДА НЕ
За следећа тврђења заокружи оцену :
Иван је предавао јасно. 1 2 3 4 5
Трудио се да нас мотивише: 1 2 3 4 5
Одговарао је на наша питања: 1 2 3 4 5
Брзина рада је била одговарајућа: 1 2 3 4 5
Истицао је оно што је битно: 1 2 3 4 5
Овде бих додао:

Било је веома занимљивих одговора. Сматрам да би било корисно дати свим ђацима средњих школа, али и студентима сличну анкету. Врло је важно какви су нам предавачи на факултету. Они дају пример будућим професорима. Мишљења сам да је ту лоша ситуација пошто је једини критеријум за посао асистента висок просек, а то није довољно да би неко био добар предавач.

4.2 Аксиоми и постулати дидактике математичког образовања

Први аксиом:*Интересовање за математику се не стиче рођењем, већ га треба развити.* Овај аксиом се може дефинисати и на следећи начин: интелигенција се не стиче рођењем. Урођен је само њен развојни пут.

Други аксиом: *У сваком психички здравом детету постоји снажна урођена заинтересованост за стваралаштво, истраживање и разумевање света који га окружује.* Ако уопште постоје особине које се код људи могу прецизно предвидети, онда је ово једна од њих. Свако дете је у стању да родитељу поставља непрекидан низ питања и не зауставља се када на њих добије одговор. Таква врста интересовања представља основу за истраживачки научни рад, а задатак је наставе математике да је развије и појача.

Трећи аксиом: *Не постоји универзални таленат за математику, као ни његово потпуно универзално одсуство, већ су код људи математичке способности мање или више изражене.* Иако сва деца имају урођену способност за истраживање, не одушевљавају се сви математиком. Ипак, улога математике у формализацији научног мишљења се никако не сме занемаривати. Зато је задатак дидактике наставе математике да пружи постепен увод у математички и логички начин размишљања у нижим разредима, а касније да што више развије логичко мишљење код ученика. На основу ових аксиома можемо да закључимо следеће:

Први постулат: Школа треба да сачува урођену заинтересованост деце за истраживање и да је поступно и систематски развија. У наставном и испитном процесу се јавља дилема да ли ученицима постављати лакше или теже задатке. Као и у већини ствари у животу, и овде треба пронаћи златну средину. У пракси наставници обично са ученицима вежбају лакше задатке, а на тесту им задају теже задатке, што смањује мотивисаност ученика. Истовремено, не би требало превише нагло оптеретити ученике тешким задацима, већ брзину учења треба прилагодити реалном нивоу знања ученика.

Други постулат: Евентуалне грешке и њихово исправљање треба да представљају саставни део учења. Неадекватно третирање грешака у току наставе доводи до смањења креативности, мотивације и заинтересованости ученика. Наставник треба да у наставном процесу открије шта ученици не знају, а приликом процене знања (нпр. на испиту, тесту...) треба да открије шта ученици знају, односно шта су научили. Зато сам наставни процес треба да представља активну размену информација (дијалог) између наставника и ученика. У току самог предавања треба открити које појединости су ученицима нејасне и где се најчешће греши. Овде би наставнику било много лакше ако успе у томе да га ученици поштују, а да га се не плаше тј. да нема превише формалан однос. Ученици углавном нису мотивисани да одговоре на питање „шта вам није јасно”, па зато то треба учинити кроз разговор, ако је потребно и директним прозивањем ученика укључити у дијалог. Све недоумице и грешке треба детаљно прокоментарисати, притом пазећи на то да се ученик не дестимулише. Овим би ученици највећи део градива учили у школи. У пракси постоје наставници који замерају ученицима да „ништа не знају”и да су „глупи”. То је погрешно, јер процес учења почиње управо сазнањем да се тема која се обрађује не познаје („*Ја знам* *да ништа не знам*", Сократ). Наставник мора да прихвати почетно незнање ученика, које у зависности од личне обавештености ученика може бити потпуно или делимично и да према њему осмисли наставни процес. Ученик је по дефиницији онај ко је свестан свог незнања и ко жели да сазна. Жељу за знањем треба да подстакне наставник атрактивношћу наставног процеса. Ученике треба мотивисати примерима из свакодневног живота, најбоље онима који су им блиски. Основни дидактички принцип кога би наставник требало да се придржава јесте да на своје предавање гледа очима слушалаца. Наставник мора да замисли како би њему изгледало да појмове о којима прича треба да разуме из свог предавања. Тада ће му бити лакше да предавање учини што занимљивијим слушаоцима. Значајан неуспех ученика (нпр. уколико је више од 50% ученика лоше урадило тест) у ствари представља неуспех наставника, наставничку 'јединицу' и углавном значи да наставник није способан да мотивише ученике. Да ли је уреду да просек неког одељења из математике (или било ког другог предмета) буде 2.2?! И у коме је ту проблем?

Трећи постулат. Настава математике не сме бити искључиво апстрактна и вербална. Треба развијати интуицију, креативност и досетљивост ученика, и приближити математику ученицима кроз примере и примене у свакодневним ситуацијама. Најбољи су примери где се помиње новац. Такве примере ученици највише воле. Ученици треба да развијају математички истраживачки начин мишљења и да чак развијају сопствене начине за решавање задатака. За ово је пожељно повремено организовати часове групног рада. Такви часови захтевају велику припремљеност наставника, али су веома корисни пошто развијају колективни дух, али и такмичарски (ако се направи такмичење између група).

Једна математичка изрека каже: ,,Математичар не сме да буде конвергентан: монотон и ограничен". Основни задатак наставе математике је да подстакне интелектуални развој, самостално закључивање и истраживање. Због тога наставник математике не треба да се ограничава на теоријску страну градива. Не само да су математичкој теорији неопходни примери, већ примери и примене морају да представљају основу на којој се гради теорија математике. То је, уосталом и модел са којим ће се ученици срести у реалном свету.

Ученици треба да усвоје математички начин мишљења, односно да апстрахују и математизују реалне појаве и уочавају аналогије и између наизглед сасвим различитих ствари, без обзира на то којој научној дисциплине оне припадају.

4.3 Настава на Математичком факултету

Данас је мало пажње усмерено на наставу математике на факултетима и вишим школама. На Математичком факултету би веома корисно било увести на првој години предмет ,,Елементарна математика", који би садржао гардиво средње школе. Увођењем оваквог предмета бруцоши, који упишу факултет са мање од 90 поена на пријемном испиту, надокнадили би пропуштено знање. Када упишу факултет подразумева се да већ то знају, али ово је у контрадикцији са тим да са 65 поена они постају студенти Математичког факултета. Онда стигну до четврте године и не знају основне ствари из елементарне математике. Стручни тим људи требао би да направи предмет из два дела који садржи све градиво средње школе. Одабрати врхунске професоре и асистенте који би то предавали и пружили пример будућим предавачима. На овом испиту требали би да буду јако ригорозни у процени пролазности. ,,Елементарна математика"би значајно олакшала савлађивање градива предмета Анализа 1 који је најчешћи ,,камен спотицања"већини студената.

Требало би да Методика наставе математике буде на свим смеровима обавезан предмет пошто је опште познато да највише људи који заврше Математички факултет назависно од смера постану предавачи. Пожељно је увести практични део испита који би се састојао у томе да кандидат предаје неку наставну јединицу у учионици ђацима или студентима и добије оцену (или не положи испит) у зависности како је то испредавао.

4.4 Особине доброг наставника

У великом проценту свих анализа слабог успеха у школи, а често и у настави математике , обично се кривица сваљује на ученике. Међутим, проблеми су најчешће у личности наставника. Нарочито ако велики проценат ученика није задовољан његовим радом. Зато ћу навести нека свосјства доброг наставника. Он:

- разуме ученика, добар је сарадник (труди се да та сарадња достигне висок ниво, излази у сусрет ученицима)
- спретан је у настави и предаје јасно и разговетно (тако да ученици могу да га прате, бар већи део њих)
- познаје струку
- ствара пријатну атмосферу и стрпљив је (што смиренији)
- има широко интересовање
- пријатне је спољашности и по опхођењу је благ
- има смисла за хумор
- сталожен је и доследан
- интересује се за проблеме ученика (ово њима веома значи)
- има способност прилагођавања
- праведно и непристрасно додељује похвале
- савестан је и одговоран (не касни на час и не пушта ученике раније)
- коректан и предусретљив
- комуникативан и отворен
- толерантан и самокритичан
- припремљен је за сваки час (има писане припреме часа)
- истраживачког је духа

- поуздано преноси знање ученицима

Од личности наставника у великој мери зависе квалитативни и квантитативни аспекти учења, итерперсонални односи и клима у разреду, васпитни и наставни поступци, методе и резултати руковођења. Добра комуникација је чинилац ваљане климе у разреду:

- хуман однос наставника према уечницима (срдачан тон)
- питања поставља јасно и недвосмислено
- не згражава се над незнањем ученика
- ословљава ученика именом
- не жури се за давањем слабе оцене (у случају да се двоуми око две оцене увек је боље да се одлучи за вишу то је добар мотив за ученике)

Аналогно и за факултет; јако је лоше то што студенти сазнају да се понекад поједини асистенти такмиче ко ће да зада тежи задатак и чији задатак ће мање студената да реши. Ово може имати за последицу да ти студенти кад заврше факултет и оду да предају у школу размишљају на следећи начин: ,,Ја сам се намучио на факултету, нек се муче и они". Сигуран сам да смо се сви бар једном срели са особом која овако размишља, а то је веома лоше.

Наставник оцењује резултате рада ученика:

- похваљује их (труди се тиме да их што више заинтересује, да им развије истраживачки и такмичарски дух)
- награђује
- сарађује са родитељима
- успоставља међусобне односе поверења
- развија појмове о истини, праведности, солидарности

Зато је наставник математике у прилици у школи да ученицима служи као узор, али и као повод за разочарање. Ученици су најбоље, најискреније мерило вредности наставника математике у школи. Деца не умеју да буду покварена и веома лако препознају ко се заиста труди, а ко отаљава посао. Нажалост њихово мишљење се данас јако мало цени, као и мишљење студената на факултету. Наставник никада не може бити успешан ако не воли своје ученике и ако се потпуно не посвети за време часа њима. Наставник тада даје знање и циљ му је да што више ученика прими то знање. Наставников стални циљ треба да буде развијање способности посматрања, опажања, логичког, стваралачког и апстракног мишљења; развијање математичке радозналости у посматрању и изучавању појава и изграђивање позитивних особина ученикове личности, као што су: упорност, систематичност, смисао за самосталан рад и решавање проблема. Било би добро да наставник има посебну бележницу где ће записивати карактеристичне грешке ученика како оне на часу, тако и оне са контролних вежби и писмених задатака.

У нашој земљи постоји још један проблем који никако не смемо занемарити, а то је јако лоша мотивација наставника. Сви имају једнако малу плату без обзира колико квалитетно обављају свој посао. Професорске плате у Србији су веома лоше. Професори чији ученици добију награде на такмичењима, не добијају никакву новчану нити награду другог типа. Припреме за такмичење из математике у гимназијама се своди на једноставно давање материјала и ђаци су препуштени сами себи. Ретки су професори који буквално волонтирају припремајући децу за такмичење и тако проводе много више сати у школи. Тако да многи гледају баш због тога да избегну рад у школи нарочито они најуспешнији. Најбољи системи гледају на најбоље студенте и међу њима траже своје наставнике. Финска је побољшала статус наставника у основним школама повећавајући плату за само 100 евра месечно. У цео процес укључена је и моћ маркетинга, а технике припреме кадра преузете су из бизниса. Али од свега се издвајају две важне ствари које ове школе раде:

- развили су ефикасне механизме за селекцију професора за обуку наставника

- дају добре почетне плате.

Ове две ствари имају велики утицај на људе који желе да постану наставници и обично су одсутне у лошим системима образовања. У успешним системима занимање наставника је међу три најпожељније каријере.

Успешни образовни системи нам показују да пут ка успеху представља велике изазове али и да је могуће да се он пређе. Први резултати могу бити видљиви и након 5 година. Колико год путеви ка овом циљу били различити и условљени културом и политичким контекстом једне земље ништа није тако важно него да сваки ђак успе. Не заборавимо да је образовање грађана једне државе у снажној вези са њеним економским успехом.

4.5 Предлог оцењивања

Подразумевам да ученик поседује вештине, знања и умења неопходне за упис у средњу школу који одговарају стандардима завршеног осмогодишњег обавезног образовања и прописаног пријемног испита за средње школе.

Први ниво (одговара оцени довољан 2) је постигао ученик који:

-је усвојио терминологију, влада дефиницијама, појмовима и ознакама, интуитивно разуме везу између појмова;

- је усвојио основна знања и умења на нивоу репродукције уз помоћ професора (потпитања) без анализе чињеница и података, без уопштавања и самосталног доношења закључака;

- може да реши задатак са једним захтевом (дескриптором) самостално или уз минималну помоћ професора;

- репродукује у изворном облику (може да: понови, напише, опише, исприча, препозна..);

- зна самостално да уради елементарне геометријске конструкције (градиво основне школе);

Други ниво (одговара оцени добар 3) је постигао ученик који:

- је у потпуности усвојио основна знања (претходни ниво);

- самостално репродукује;

- самостално решава задатке са не више од два захтева (дескриптора);

- разуме значење наученог садржаја, објашњава и повезује али није самосталан у доношењу закључака;

- уочава и повезује главне идеје, може да сажме, преобликује и објасни;

- има тешкоће у изражавању (писменом или усменом);

- зна да тумачи графике функције;

Трећи ниво (одговара оцени врло добар 4) је постигао ученик који:

- је савладао претходне нивое;

- у потпуности савладао технику решавања типских задатака;

- самостално интерпретира, разуме и може да примени стечена знања;

- лако се усмено и писмено изражава;

- исправно користи термине и симболе;

- зна да усвојена знања пренесе на сличне ситуације и примени их;

- лако уочава битно, марљив је, вредан и упоран у раду али му је потребна помоћ професора у сложенијим задацима;

- раздваја узроке од последица;

- примењује, изводи, приказује графички или моделом;

- лако емпиријски индуктивно закључује;

четврти ниво (одговара оцени одличан 5) је постигао ученик који:

- је у потпуности савладао претходне нивое;

- самостално примењује стечена знања у сродним и новим ситуацијама;

- критички расуђује;

- показује изражену креативност;

- је заинтересован и самостално проширује своја знања;

- комбинује методе при решавању проблема и проналази нове начине;

- уме да генерализује, вреднује и процењује, брани свој став аргументовано;

- је на основу дефиниција и теорема способан је да изведе формалне закључке;

Смањиле би се жалбе ученика, ако би они овакав предлог оцењивања видели на почетку школске године.

4.6 Допунска настава

Велики број ученика, независно од оцене коју има, нема задовољавајуће математичко знање за свој узраст. Због тога се јавља све већа потреба за допунском наставом. Допунска настава се организује уз редовну наставу у другим терминима. Циљ оваквог вида наставе је надокнада пропуштеног градива и напредовање ученика у вештинама за израду задатака и повећање нивоа постигнућа ученика на елементарним задацима. На допунску наставу се најчешће позивају ученици који нису у могућности да испрате редовну наставу као и ученици који су дуже време одсуствовали са часова. Психичка припрема тих ученика за рад у допунској настави је врло значајна. Да би наставник утицао на развој мотива за учење математике, мора добро да упозна личност ученика. Због тога треба да обави разговоре са учеником, родитељем, разредним старешином и школским психологом или педагогом. То ће помоћи наставнику да открије неке од узрока неуспеха ученика и да предузме мере да се они отклоне, а уједно да развија мотиве и интересовање за учење математике.

Некада су часови само инструктивне природе, па се одређени задаци решавају за домаћи из одређеног наставног садржаја, тада се часови допунске наставе своде на консултације у току седмице један пут или два пута. Такав рад треба да одговара педагошким захтевима за успешно учење, а треба водити рачуна да такви часови не буду одржавани после часова редовне наставе због замора ученика.

Припрему допунске наставе поделио бих у четири корака. Прво уочавање ученика којима је потребна допунска и постављање ,,дијагниозе" тј. налажење главног проблема због ког ученик треба да посећује допунску. У току школске године идентификовање ученика за допунску наставу треба вршити на основу ангажовања и резултата које ученици показују на часовима редовне наставе, резултата писмених задатака , контролних вежби које се организују ради проверавања знања из садржаја одређене наставне теме, или пак на основу резултата тестирања тестовима знања. Наставник не треба да чека да ученик добије негативну оцену па да са њим држи час допунске наставе. Напротив, чим се примети да ученик заостаје у учењу онда се организује таква врста часа. Тако се ученици оспособљавају да садржаје који следе боље и лакше разумеју. Код ученика се зачну интересовања одмах после усвајања и разумевања појединих математичких садржаја на часовима допунске наставе. Друго: налажење математичких садржаја које ученик није усвојио, а неопхдни су му. Поред прегледа садржаја које ученик (група ученика) треба да усвоји на часовима допунске наставе из математике, у програму треба назначити одговарајуће методе и наставна средства којима се ученик може највише мисаоно активирати, оријентационо време за сваког ученика и начин праћења постигнућа. Треће: идеално би било саставити програм за сваког понаособ ученика или бар за мање групе. И четврто је праћење напретка. То се остварује путем евидентирања неопходних података усмених и писмених проверавања. На часовима допунске наставе, ефикасност учења може се проверити и помоћу тзв. контролног наставног листића који садржи избор важнијих задатака из једне наставне јединице или теме, односно уобичајеном контролном писменом вежбом. Ученик треба да буде редовно информисан о свом раду. Неопходно је да се индивидуализацијом захтева створе такви услови да сваки ученик постигне макар и мали успех и да о томе добије повратну информацију (па и похвалу, после које му се може поставити и нешто тежи захтев). Уколико ученик није савладао градиво, у разговору са њим треба му указати на то у чему је напредовао, у чему није и да је потребно да се с њим ради још извесно време.

Наставник треба да даје јасна, приступачна и коректна објашњења. Радна атмосфера мора бити прожета пуним поверењам и поштовањем, јер је то полазна основа мотивисаности ученика за рад. Садржаји којима ће се надокнадити празнине у знању ученика, без којих се не може „ићи даље“ морају се давати постепено и у малим количинама ослобођени свега сувишног, с тим да се нарочито у решавању задатака захтева првенствено ангажовање мишљења и самосталност рада, а мање памћење и репродуковање. Примена наставних листића и других дидактичких материјала у допунској настави је неопходна. Наставник мора познавати индивидуалне способности и пропусте у знањима сваког ученика и у складу са тим припремати наставне листиће за сваког ученика, односно групу ученика.

Колико ће допунска настава бити ефикасна, понајвише зависи од наставника, његовог става и заинтересованости за сваког ученика, од припремања, планирања и успешне реализације сваког часа ове наставе. Наставници и професори, па и директори у школама недовољно или никако не прате периодику која се односи на организацију допунске наставе из математике. Постоји велика „празнина“ у погледу дидактичко методске оспособљености за ово. Највећи проблем је што се у већини средњих школа допунска настава готово и не одржава.

,, Научи се од мудријег - то ти је велика корист.
И научи другог - то ти је велика задужбина"
Доситеј Обрадовић

5 Закључак

С обзиром на приказано истраживање, можемо закључити да тренутно стање у настави математике у Србији није на високом нивоу. Примећујемо да је много боља ситуација у једној Београдској гимназији него у гимназији у унутрашњости. На Математичком факултету би такође настава могла бити много боља. Ту би требало правити бољи избор наставног особља. То се може постићи увођењем додатног критеријума на конкурсу за пријем асистената, а то је начин предавања. Било би добро да одговорно лице ненајављено присуствује часовима вежби сарадника у настави, па да и квалитет тог часа буде један од критеријума за реизбор асистената. Будући наставници и професори би тако на факултету имали узоре на сваком предавању. Не би смело да се деси да студенти завршне године праве грешке какве смо видели у овом раду, самим тим основне и средње школе у Србији би добиле бољи професорски кадар. Тај кадар је тренутно под знаком питања, с обзиром на ово истраживање код студената са смера Професор математике и Рачунарства. Раније генерације нису имале овакав тест, а ни предмат Пракса наставе математике и рачунарства. Не заборавимо да је истраживање рађено на Математичком факултету, Универзитета у Београду, а да је опште познато да студенти којима овде лоше иду студије прелазе на факултете универзитета у Нишу, Новом Саду, Крагујевцу и Новом Пазару.

Наставници и професори треба да посећују што више семинара везаних за стручно усавршавање, како како из своје струке, тако и за наставу уопште. Требало би више да слушају семинаре на тему психологије и комуникације са ученицима.Тако би наставници могли боље да мотивишу ученике, а мотивација за учење математике значајно би поправила успех ученика на елементарним задацима. Увођење разних иновација у наставу било би лепо освежење за ђаке.

Показало се да је 'трајање' знања веома лоше, вероватно би неке промене у плану и програму побољшале ово. Било би добро да се једна наставна тема ради у више разреда из делова, по угледу на наставу математике у Сингапуру. Тако би ђаци били приморани да стално обнављају већ научено градиво. Наставни план и програм за сваки разред требало би да садржи ,,улазни тест"који ученици раде првог часа. Тај тест треба да буде састављен тако да од ђака захтева неопходна елементарна знања из претходних разреда која су им потребна за разумевање градива које следи. Професор би требало да смисли, у зависности од наставне јединице што више реалних проблема и зада их ученицима, тиме би их убедио у значај математике и математичког начина мишљења.

Уз наведене и можда још неке промене у образовном систему утицај студија математике на развој способности за решавање елементарних математичких проблема би се значајно побољшао, што је и циљ овог рада.

Литература

1. Пинтер, J., Петровић Н., Сотировић, В., Липовац, Д.:*Општа методика наставе математике*, Универзитет у Новом Саду, Учитељски факултет Сомбор, 1996.
2. Кука, М.: *Методологија педагошких истраживања*
3. Анић,И., Павловић-Бабић, Д., Радак, В.: *Формула живота*
4. httpx//www.moe.gov.sg
5. httpx//www.seab.gov.sg
6. http//www.edu.gov.on.ca