UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

METODIČKA ANALIZA ISTORIJSKOG RAZVOJA GEOMETRIJSKIH IDEJA, POJMOVA I NJIHOVIH PRIMENA

Autor:
Marina STUBLINČEVIĆ
1078/2011

Mentor:
Dr. Neda BOKAN

Beograd, 2012

Glava 1

ŽIVOT PITAGORE

Ne samo mistični Orijentalci, već i racionalni i smišljeni Grci obavijali su svoje veličine koprenom legendarnih predanja. Oduševljeno su vezivali fantastične priče za stare junake, državnike i pesnike. Ali na tome nisu ostajali, nego su pridavali čudne doživljaje i natprirodne moći čak i predstavnicima svoje mudrosti u svetu.

Sve ove neobične priče o najstarijim grčkim mudracima natkriljuju množinom i poetičnošču legende o Pitagori, osnivaču jednog obimnog saveza, karaktera pre svega etičko-religijskog i političkog, a posle i filozofskog, naučnog, umetničkog i tehničkog, u čijem se okviru razvila originalna filozofska škola, dignuta na temeljima matematike.

Kao Buda, Hristos i Sokrat, Pitagora nije ništa pisao, o njemu su govorili drugi. Dok stariji peripatetičari dosta prosto govore o njegovom životu, kasniji izveštači, pristalice novooživele pitagorejske filozofije (neopitagoreizma), iznose u svoje iskaze sve više neverovatnih i natprirodnih elemenata.

Bog Hermes, želeći da nešto pokloni svome sinu Etalidu, obeća sve što bi mladić zaželeo osim besmrtnosti, i Etalid tada odluči da potraži večnu memoriju, odnosno mogućnost sećanja svih prethodnih života i posle smrti. Zahvaljujući ovoj sposobnosti, Pitagora je tvrdio da je već četiri puta živeo, i to da je bio prvo Etalid, posle Euforb, kada ga je u Trojanskom ratu ranio Menelaj, zatim Hermotim kada je, da bi potkrepio svoje tvrđenje, u jednom hramu prepoznao Menelajev štit, i najposle Pir, siromašni ribar sa ostrva Delos. Između jedne inkarnacije i druge njegova duša se selila u razne životinje, pa čak i u pokoju biljku. Jednom mu se desilo da siđe i u Had, gde je video Homera, obešenog o drvo i Hesioda vezanog lancima za stub, jer obojica behu okrivljeni da nisu poštovali bogove. Serija pojave Pitagore se ne završava ovde. Neki filozofi kasnije navode da se naš filozof inkarnirao u nekog Periandra, a potom u telo jednog po imenu opet Etalid i konačno u jednu lepoticu, Alko, koja je bila bludnica[1]. Posle izvođenja računa izgleda da je period reinkarnacije 216 god, što je zanimljivo jer je to magičan broj Pitagorejaca (kub broja 6).

Pitagora, sin Mnesarha, vodi poreklo sa Samosa[2], ostrva čuvenog po živoj trgovini i razgranatom moreplovstvu. Pretpostavlja se da je rođen oko 580.god p.n.e. Po preporuci svog strica Zoila učio je škole kod velikog Ferekida koji ga je, po pričanju Apolonija, prvo podučavao čudima. Posle smrti Ferekida, posto je hteo da specijalizuje matematičke nauke, obratio se najslavnijim profesorima tog doba, a to su bili egipatski sveštenici. Uzeo je tri srebrna pehara iz očeve radnje, pismo s preporukom tiranina Polikrata za faraona Amasisa i ukrcao se na brod. No, kada je stigao u Egipat, stvari krenuše naopako: heliopolski

[1] Krešenco, Istorija grčke filozofije, 44

[2] Herodot, IV, 95

sveštenici i pored srebrnog pehara i toga da je faraon uputio Pitagoru, licemerno mu rekoše da nisu dostojni tako slavnog učenika i poslaše ga starijim i uvaženijim sveštenicima u Memfis. Ovi opet pod istim izgovorom, uputiše ga sveštenicima iz Tebe, strašnim Diopolitima koji ga, nemajući više kome da pošalju vruć krompir, podvrgnuše najtežim problemima. Pravili su račun bez krčmara: naš filozof je briljantno prebrodio sve prepreke i zadivio svoje mučitelje. Nisu imali više kud nego da ga prijateljski prihvate i upoznaju sa svim tajnama[3]. Ne samo da je upoznao egipatsku geometriju, nego je bio i prvi Grk koji je naučio egipatske hijeroglife, a to što je na kraju postao i egipatski sveštenik, odnosno žrec pomoglo mu je da se uputi u tajne njihovih obreda. Ovo mu je omogućilo pristup svim njihovim misterijama, pa čak i u tajnim prostorijama hramova. Diogen Laertije kaže:

> *Bio je još sasvim mlad, a toliko je voleo nauku da je otišao iz otadžbine i posvetio se u sve misterije i obrede ne samo u Grčkoj nego i u stranim zemljama. Bio je, dakle, u Egiptu, kada ga je Polikrat upoznao preko pisma sa s Amasisom; naučio je jezik Egipćana, a boravio je i među Haldejcima i magima. Ulazio je u egipatska svetilišta i tamo su mu ispričali sve božanske tajne.*

Od Egipćana je primio simboliku brojeva i doktrinu o monadi kao osnovi svih stvari i svih brojeva. Iz Egipta je čak doneo i zabranu da se jedu pasulj i ribe. Herodot smatra da je tu usvojio i verovanje o seobi duša[4]. Ostao je u Egiptu najmanje trinaest godina. Na kraju ga je napustio i to ne svojom voljom. Pao je u zarobljeništvo kada su Persijanci osvojili Egipat. Odveden je u Vavilon, gde je konačno oslobođen i tu je temeljno izučio vavilonsku matematiku. Biografi Pitagoru šalju još i u Fenikiju, Persiju, Indiju, Arabiju i Judeju, zatim u Trakiju i kod galskih druida, da i u tim zemljama skupi znanja. Po njima, od Feničana je naučio aritmetiku, od Haldejaca astronomiju, medicinu i tumačenje snova, a u Persiji je došao u vezu sa Zoroastrom, i tu je proširio svoja astronomska i astrološka znanja. I opštenje sa indijskim mudracima bilo mu je od velike koristi. Proučavanje Mojsijevih knjiga mnogo ga je inspirisalo. Naišao je na učenje o seobi duša i kod Tračana. Podučavali su ga i Kelti i Iberci. Od svih ovih tvrdnji istorijski može da se proveri samo primanje elemenata matematike od egipatskih sveštenika. Međutim, kasnije je Pitagora svoje matematičke postavke veoma usavršio, i uzdigao se daleko nad egipatskim počecima. Biografi su slali Pitagoru, ne zna se koliko osnovano, i u Krit i u Spartu, da prouči zakone tih zemalja, i da uđe u misterije ideiskoga Zevsa[5]. Biografi su verovali da je njihov učitelj posedovao univerzalnu mudrost, pa su ga činili nosiocem iskustava svih naroda.

Ali, izvesno je da se oko 530.god. preselio sa Samosa u Kroton[6], grad na tlu onog dela Italije koji je tada bio grčka kolonija. Nagađaju se razlozi: po jednima on je otišao zbog toga što nije mogao da trpi Polikratovu tiraniju, po drugima iz straha od napada Persijanaca, a po trećima zato što su Samnićani imali suviše malo smisla za filozofiju. Četvrti opet kažu da je hteo da izbegne političku delatnost, koju mu je nametalo divljenje građana. U varošici čuvenoj po blagoj klimi, iskusnim lekarima i atletama, osnovao je savez[7]. Njegove moralne i religijske ideje dobro su primljene, jer su duhovi, utučeni zbog ranijeg poraza u jednoj bici, bili za to predisponirani. Zbog sjajnog rada u Krotonu, nazvan je *italskim filozofom*[8]. Za pitagorejsku školu se kaže da je religiozna, mistična, filozofska sekta. Upravo je ta mističnost i pomalo asketski način života izdvajaju od ostalih škola tog doba, dok sa druge strane, predmet izučavanja u bratstvu, matematika, harmonija i astronomija čine

[3] Krešenco, Istorija grčke filozofije, 46
[4] Herodot, II, 123
[5] Atanasijević, Antička filozofija, 65
[6] Herodot, III, 131
[7] Platon, Država
[8] Aristotel, Metafizika, I,5,987a,9

da je ne možemo nazvati klasičnom sektom. Pitagorejci su uskoro bili među značajnijim, ako ne i prvim, ljudima u skoro svim gradovima Velike Grčke i Sicilije, te je postepeno sva vlast u južnoitalskim gradovima prešla u njihove ruke i trajala duže od jednog stoleća. Sam Pitagora nije učestvovao u vlasti ni u jednom gradu ali je svakako njegova reč bila od presudnog značaja zbog čega ga Platon označava samo kao osnivača jednog naročitog načina privatnog života, oštro ga razdvajajući od državnika i zakonodavca.

Pitagori su pripisivani mnogi čudni događaji. Prema jednoj od neobičnijih priča koje se vezuju za njega, jednom prilikom napao je zmiju otrovnicu i ujeo je, od čega je ova uginula. Prema drugoj priči, u Pitagorin dom je provalio lopov, ali je odatle pobegao glavom bez obzira, praznih šaka, prestrašen onim što je video i o čemu ništa nije želeo da kaže. Postoji još zanimljivih legendi: Razgovarao je mnogo godina sa jednom daunskom medvedicom; nagovorio jednu junicu da ne jede bob; pomilovao belog orla koji je namerno sleteo sa neba da pozdravi Pitagoru; viđen je istovremeno u Krotonu i Metapontu. Idući kraj reke Neso, ova ga je glasno pozdravila, uzviknuvši: „Zdravo, o Pitagora!"[9]. Imao je i čudnu moć predviđanja : prorekao je jedan zemljotres, tri dana ranije, posmatrajući vodu u bunaru.[10]Krešenco navodi:

> *Da bi još više istakli natprirodni karakter njegove ličnosti i sami učenici su ga svrstavali u posebnu grupu ljudi. Imali su običaj da kažu: „postoje tri Prirode Univerzuma: Bogovi, smrtnici i oni kao Pitagora". Njegovo ime nije se u konverzaciji nikada izričito izgovaralo, već se pribegavalo izrazu „onaj Čovek", ili jos dogmatičnije, „autos efe"(on sam, lično on je to rekao), što je docnije tokom vekova, u latinskoj verziji „ipse dixit" značilo kraj svakoj diskusiji.*

Pitagora je imao nevolja pred kraj života. Oko 510. god. p.n.e. neki pitagorejci otputovali su u obližnji grad Sibar, po svoj prilici u potrazi za sledbenicima. Malo je podataka sačuvano o ovom pohodu, osim da su svi bili pobijeni. Kasnije je jedna grupa žitelja Sibara potražila u Krotonu pribežište pred tiraninom Telisom, koji se nedugo pre toga dočepao vlasti u tom gradu. Telis je zahtevao da oni budu vraćeni. Pitagora je tada prekršio jedno od svojih osnovnih pravila–ne mešati se u politiku i ubedio je Krotonjane da ne isporuče izbeglice. Izbio je rat u kojem je Kroton izvojevao pobedu, ali je Pitagora pretrpeo štetu i stekao političke neprijatelje. Formirala se i grupa anti–Pitagora. Na čelu te opozicije bio je izvesni Kilon, mladić iz dobre familije i prekog karaktera. Ovaj, pošto nije bio primljen u klub pitagorejaca nije imao mira dok nije našao način da se osveti[11]. Jedne noći, grupa od njih stotinak, opkolila je kvart pitagorejaca, odnosno vilu atlete Milona i, pozivajući prethodno filozofe da izađu, zapalila je. Među manjinom koja je uspela da pobegne bili su Arhid, Lisip i sam Pitagora. Baš iza Milonove vile prostiralo se polje zasejano bobom i stari učitelj, da ne bi prešao preko njega, odlučio je da se preda zaverenicima[12]. Po Diogenu Laertiju oni su ga zaklali. On navodi sledeće:

> *Jednom je u društvu sa svojim prijateljima bio u Milonovoj kući. Tada se dogodi da jedan od onih koji nisu bili dostojni da budu pušteni pred njega, iz osvete i zavisti zapali kuću. Neki tvrde da je to bilo delo samih stanovnika Krotona koji su hteli da se sačuvaju od uspostavljanja tiranije. Pitagoru su uhvatili pri pokušaju bekstva; on je stigao samo do jednog polja obraslog bobom; tu je stao izjavivši da više voli da bude uhvaćen nego da prede preko njive, i da više voli da bude ubijen nego da priča o svom učenju. Tako su ga njegovi gonioci zaklali.*

[9] Jamblih, Život Pitagore, Elian,Šarene pripovesti II,IV
[10] Apul, De magia, 34
[11] Porfirije, Život Pitagore, 56
[12] Krešenco, Istorija grčke filozofije, 50

No, po Porfiriju, kilonci su bili plemeniti i pustili su Pitagoru , govoreći: „Dragi Pitagora, ti si mudar čovek, ali mi smo zadovoljni našim zakonima i ne želimo da ih menjamo. Idi, i pusti nas na miru!”. Po Dikearhu, Pitagora je prešao u Metaponte, u hram Muza, gde je i umro, posle četrdesetodnevnog gladovanja. Neki, pak, tvrde da je on živeo 80 godina, drugi opet 107, a neki čak i 150 godina[13]. Heraklid kaže da je sahranio na Delosu Ferekida, pa se posle toga vratio u Italiju, i kad je zatekao Krotonjanina Kilona kako je svima priredio jednu raskošnu gozbu, on se povukao u Metapont da tamo gladovanjem završi svoj život, jer više nije osećao želju da živi. Hermip iznosi drugu priču o Pitagori. Naime, kad je došao u Itaku, podigao je jedno malo prebivalište pod zemljom. Svojoj majci je naredio da sve što se desi na zemlji zabeleži i napiše u koje vreme se to desilo, pa da mu zatim te svoje beleške šalje, sve do njegovog povratka. Njegova majka je tako i uradila. Pitagora se posle ponovo pojavio, slab i mršav. Otišao je u Skupštinu i izjavio da dolazi iz Donjeg sveta i pročitao im sve što se dogodilo u međuvremenu na zemlji. A ljudi su bili tako uzbuđeni njegovim pričama da su plakali i poverovali da Pitagora ima nešto božansko u sebi, toliko da su mu čak njihove žene slali da nešto od njega nauče; te žene su dobile nazive pitagorejke.

Pitagorejsko društvo postojalo je još neko vreme posle ovog napada, sve dok, oko 460. god. p.n.e., u novom napadu nisu pobijeni svi sem dvojice Pitagorinih sledbenika. Bratstvo je sa daleko smanjenim uticajem nastavilo da postoji u naredna tri stoleća u različitim grupama širom Grčke, dajući naučnike kao što je bio Filolaj iz Tebe i državnike poput Arhita koji je bio diktator i Platonov prijatelj. U Arhitinoj ličnosti se ispoljila ona harmonija za kojom je težio svaki pitagorejac: bio je filozof, naučnik (matematičar i fizičar), muzičar i sedam puta strateg koji nikada nije izgubio bitku. Svojim državničkim radom on je od Taranta napravio središte helenske odbrambene borbe protiv varvarskih nasrtaja i u svojoj ličnosti ostvario ideal filozofa vladara. Kasnije su pitagorejsko učenje ponovo oživeli Rimljani u prvom stoleću pre nove ere i ono je izraslo u preovlađujuću silu rimskog carstva u procvatu. Pitagorejstvo je postalo uticajno u mnogim religijama iz tog vremena, na primer, aleksandrijskom judaizmu i hrišćanstvu. U drugom veku nove ere pitagorejski matematičari dobili su sa Platonovom Akademijom novi podstrek. Pitagorini intelektualni naslednici ponovo su izloženi progonu u doba Justinijana, poglavara istočnog rimskog carstva, u četvrtom veku nove ere. Rimljani nisu podnosili dugačku kosu i bradu grčkih filozofa, koji su širili Pitagorina učenja, kao ni to što su koristili droge, poput opijuma, a da se i ne pominju njihova nehrišćanska verovanja. Justinijan im je zatvorio Akademiju i zabranio predavanje filozofije. Pitagorejstvo je nakratko zablistalo još u nekoliko navrata, da bi konačno zgasnulo u mračnom dobu, oko 600. god[14].

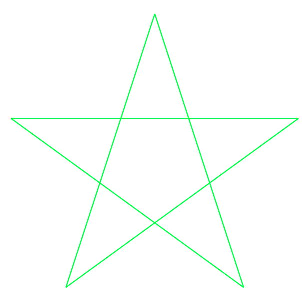
[13] Jamblih, Život Pitagore, 265
[14] Mlodinov, Euklidov prozor, 38

Glava 2

PITAGORA KAO UČITELJ

2.1 PITAGOREJSKA ŠKOLA

Pitagora je u Krotonu bio na čelu moralno–religioznog bratstva koje je imalo svoja pravila i negovalo strog način života. Pitagorejsko bratstvo je imalo svoj amblem tj. kosmički grb (sl 1). Prema svedočenju Lukijana iz Samosate, kao i prema zapisu nepoznatog sholijaste Aristofanovih *Oblakinja* „tri puta prepleteni trougao, petougao”, tj. zvezdoliki petougao čije su ivice dijagonale pravilnog konveksnog petougla, pitagorejci su koristili kao simbol bratstva po kojem su se prepoznavali.[1]



Slika 1

Simbolika brojeva predstavlja srž pitagorejskog učenja, koje valorizuje određene geometrijske figure. Ovde je reč je o pravilnoj petokrakoj zvezdi,koja u svom središtu ima upisan pravilni petougao, a njeni vrhovi polaze iz temena jednog opisanog pravilnog petougla, tj. dijagonale pravilnog petougla daju pravilnu petokraku zvezdu[2]. Činjenici da se ova figura može izvući jednim potezom je pripisivano mistično značenje. Pitagorejci su smatrali da simbolizuje zdravlje.[3] Pentagram je postao znak raspoznavanja Pitagorinih ucenika. Priča se da se jednom jedan pripadnik drustva razboleo dok je bio na putu između dva grčka grada. Zaustavio se u nekoj krčmi u kojoj su ga stigle samrtne muke. Pre nego sto je umro ucrtao je pentagram na pločici koju je dao krčmaru, uveravajuci ga da će neko

[1] Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, 138
[2] Kliford A. Pikover, Strast za matematikom, 251
[3] Heath, A History of Greek Mathematics, I,161

doći da plati njegov račun. Posle nekoliko godina, tuda je naišao pitagorejac koji je, videvši simbol namirio dug svog sabrata.

Pitagora je pripovedao kao filozof i držao lekcije iz morala različitim društvenim grupama: školskoj omladini, mladim ljudima, gradskim ženama i odraslima u senatu. Propovedao je o vrlini kao harmoniji. Aristoksen tvrdi da je Pitagora većinu svojih moralnih doktrina dobio od delfske sveštenice Temistokleje. Učenike je podučavao da „treba poštovati starije, jer ono što je vremenom ranije zaslužuje veće počasti; jer kao što na svetu izlazak sunca dolazi pre zalaska, tako u ljudskom životu početak dolazi pre završetka, i u čitavom životu rođenje prethodi smrti. Zatim je naređivao da treba poštovati bogove pre polubogova, heroje pre ljudi, a među ljudima najpre svoje roditelje. Ljudi treba da se među sobom tako vladaju da ne stvaraju neprijatelje od prijatelja, nego da neprijatelje pretvaraju u prijatelje. Ništa ne treba smatrati svojom svojinom. Zakon treba podržavati, protiv bezakonja se boriti. Treba izbegavati preteranu ugojenost, na putovanju menjati napor i odmor, vežbati pamćenje, u izlivu besa vladati i rukom i jezikom, poštovati svaku vrstu proricanja, pevati uz pratnju lire i pevanjem himni pokazivati zahvalnost bogovima i dobrim ljudima..."[4]. Glavni stavovi i propisi nalaze se popularno izloženi u sačuvanim *Zlatnim stihovima* i *Poukama i simbolima*.

Učitelj je svake noći govorio. Stizali su sa raznih strana sveta da ga slušaju. Ali on se nije pojavljivao već je govorio sakriven iza zavese. Krešenco navodi sledeće:

> *Ko bi ga slučajno i za trenutak ugledao, hvalio se time čitavog života.*[5] *„On je izgledao veličanstveno: lice koje je zračilo, talasaste kovrdže, obavijen belom tunikom i celim svojim bićem odavao je blagu nežnost"*, dok Diogen kaže:

> *Pričaju da je njegova pojava bila veoma dostojanstvena, i njegovi učenici su smatrali da je on Apolon koji je došao iz daleke zemlje Hiperborejaca.*

On ga opisuje na sledeći način:

> *Nosio je belu, dugačku haljinu, čistu; jorgani su mu bili od čiste vune, jer platno još nije bilo stiglo u ona mesta. Nikad ga nisu zatekli pri vršenju nužde, ili obavljanju ljubavnih radnji ili u pijanstvu. Izbegavao je smeh i svaku dopadljivost koju izazivaju šale ili vulgarne priče. Kad je bio besan, nije kažnjavao ni roba ni slobodnog čoveka. Opomenu je zvao „doterivanjem".*

Svaki govor počinjao je rečima: „Uz vazduh koji dišem i vodu koju pijem ne podnosim nikakve primedbe na ono što ću reći", što nam pomaže da shvatimo kako je on, zapravo, razmišljao o demokratiji.

Samo je nekolicini bilo dopušteno njegovo prisustvo. I samim učenicima je to bilo omogućeno tek posle pet godina studiranja. Jednom ga je neki brucoš krišom opazio dok se Pitagora kupao u kadi i pričao drugim studentima da je video nogu od zlata; za Elijana je upravo On bio taj koji je u pozorištu u Olimpiji pokazao svoje zlatno bedro.

Članovi zajednice strogo su se držali prihvaćenih pravila. Pravila kojih su se držali su:

1. da je stvarnost u svom najdubljem nivou matematičke prirode
2. da se filozofija može iskoristiti za duhovno pročišćavanje
3. da se duša može uzdići do jedinstva s bogom
4. da određeni simboli imaju mistični značaj
5. da se sva braća reda moraju pridržavati zaveta odanosti i tajne

[4] Krešenco Istorija grčke filozofije, 48
[5] Laertije, Život i mišljenja istaknutih filozofa, 271

Ko je želeo da bude primljen u bratstvo bio je podvrgavan ispitu u pogledu njegove obrazovanosti i vežbanjima u pogledu njegove poslušnosti. Prikupljana su obaveštenja o njegovom ponašanju, njegovim sklonostima i poslovima. U udruženju bio je zaveden jedan sasvim uređen način života, tako da je za sve bilo određeno: odevanje, hrana, zanimanje, spavanje, ustajanje itd.; svakog sata vršio se naročiti rad.

Pitagora je uobičavao da deli bližnje u dve kategorije: akuzmatike (slušaoce) i matematičare (učenike). Matematičari su najviše upućeni u istine nauke, i pošto su se u bratstvu bavili i politikom, oni su bili i u političkoj delatnosti. Akuzmatičari su imali jedno iskušeništvo od pet godina. Svaki od njih morao je da preda svoju imovinu bratstvu, a pri istupanju iz njega on ju je dobijao natrag. U toku tog vremena učenja svaki se morao obavezati na ćutanje (dužnost da se uzdrži od brbljanja); to je, može se uopšte reći, bitni uslov svakog obrazovanja. Mora se početi time da se bude u stanju da se shvataju misli drugih ljudi; to je odricanje od svojih vlastitih predstava, i to je uopšte uslov za učenje, proučavanje. Čovekova unutrašnjost se u obrazovanju proširuje, zadobija; time što se uzdržava, što ćuti čovek ne postaje siromašniji u mislima, u živahnosti duha. Naprotiv, on time zadobija sposobnost shvatanja i dolazi do saznanja da njegove slučajne dosetke i primedbe ne vrede ništa; sve većim uviđanjem da takve slučajne dosetke ne vrede ništa on se od njih odvikava[6].

Može se primetiti da je Pitagora bio prvi nastavnik u Grčkoj ili da je bio prvi filozof koji je u Grčkoj uveo nastavu iz nauka. Ni Tales koji je živeo pre njega niti njegov savremenik Anaksimandar nisu naučno poučavali, već su samo svoje ideje prijateljima saopštavali. Uopšte nisu postojale niti neka filozofija, niti matematika, niti inače ma koja nauka; ono što je od toga postojalo, to su bili pojedinačni stavovi, pojedinačna znanja, a ono u čemu se poučavalo (kako se rukuje oružjem, filozofemi, muzika, kako se pevaju Homerove ili Heziodove pesme, itd.) podučavalo se na potpuno drugi način. Pitagora se mora smatrati za prvog opšteg nastavnika. Pitagora je držao nastavu iz nauke kod jednog naroda koji je naučno neobrazovan, ali koji inače nije glup, već naprotiv, vrlo bistar, prirodno brbljiv, kao što su bili Grci. Onda je donekle i jasno da je on među onima, koji još ništa nisu znali o tome kako stvari teku pri izvođenju nastave iz jedne nauke, pravio tu razliku što su oni koji su tek počinjali bili odstranjeni od onoga što bi se saopštavalo onima koji su već odmakli i što su se oni odricali da na nenaučan način govore (brbljaju) o takvim predmetima, pa bi prvo morali da shvate nauku. Uglavnom ne postoje pismena svedočanstva o prvim pitagorejskim učenjima. Heath navodi:

> *Odsustvo pismenih svedočanstava o ranom pitagorejskom učenju ne bi trebalo vezivati ni za kakvu obavezu čuvanja tajne u okviru škole, nema indicija da je takva obaveza postojala, sem možda s religijom i ritualom. Navodna tajnost je izgleda izmišljena kako bi se objasnilo to što nema traga bilo kakvim dokumentima pre Filolaja. Razlog najverovatnije leži u činjenici da je usmena komunikacija bila tradicija škole, a blisko druženje njenih pripadnika omogućilo im je da se bez problema drže učenja škole; istovremeno njihovo učenje je svakako bilo teško shvatljivo većini ljudi izvan škole.*

Akuzmatici su slušali predavanja koja je Pitagora izgovarao glasno skriven iza zastora. Akuzmaticima nije bilo dozvoljeno da vide Pitagoru i nisu bili podučavani tajnim znanjima. Umesto toga učili su zakone ponašanja i moralne kodekse iskazane u formi kratkih izreka sa skrivenim značenjem. Ove maksime su bile poznate kao akuzmate ili simbole[7]. U ranim danima Pitagorinog kulta prenosile su se usmeno. Neke od tih zabeleženih maksima glase:

1. Kada odlaziš u hram, skrušeno se pokloni i nemoj se usput baviti, ni rečju ni delom,

[6] Krešenco Istorija grčke filozofije, 49
[7] V. Korać , B. Pavlović, Istorija filozofije

nikakvim svetovnim poslovima...

2. Izbegavaj prometne ulice i hodaj stazama!
3. Ne valja džarati vatru mačem!
4. Čoveku koji podiže na sebe teret pomaži naprtiti, ali mu nemoj pomagati da ga sa sebe skida!
5. Kada ideš na put, nemoj se okretati natrag!
6. Ne smejati se grohotom.
7. Desnicu nemoj olako svakome pružati.
8. Ne proždiri srce.
9. Neka jezičak na vagi ne prevagne.
10. Čaršavi da budu uvek savijeni.
11. Tragove lonca u pepelu izbrisati.
12. Čovek mora obuti prvo desnu cipelu.
13. Naspi kad nazdravljaš bogovima iznad drške krčaga, u znak znamenja, i neka niko ne otpija sa istog mesta.
14. Idi bos na skriveno mesto kad prinosiš žrtvu.
15. Ne govori u tami.
16. Božju sliku na prstenu ne nositi sa sobom.
17. Ne brisati stražnjicu bakljom.
18. Ne mokriti okrenut prema suncu.
19. Ne držati ptice s krivim kandžama.
20. Nikako mokriti na odsečene nokte ili kosu niti ih gaziti.
21. Oštricu mača okrenuti naopako.
22. Kad odlaziš u svet, ne okreći se na granici.
23. Ne lomi hleb.[8]

Diogen nam u *Životu i mišljenjima istaknutih filozofa* tumači šta je naš filozof ovim akuzmama zapravo želeo da kaže i navodi sledeće:

> *Ne valja džarati vatru mačem: ne budi gnev i rastući bes silnika. Neka jezičak na vagi ne prevagne: to jest ne prelaziti ono što je pravo i pravedno. Ne sedeti na merici znači: „brini se i za danas i za sutra, jer je merica (hoinix) tvoj dnevni obrok". „Ne jedi srce"to jest: ne upropašćuj svoj život u mukama i patnjama. „Ne okreći se kad napuštaš zemlju", znači da oni koji odlaze sa ovoga sveta ne treba čežnjivo da se drže života, i neka ih zadovoljstva ovog života ne privlače.*

Slična su i objašnjenja ostalih izreka.

Najmanje jasno pravilo pitagorejskog bratstva ostaje ono sa bobom. Nikako nije jasno zašto je Pitagora mrzeo ovu bezazlenu mahunarku. Po Aristotelu, bilo je to zbog neke sličnosti sa muškim organom, a po drugima, zbog alergije koju je vukao od detinjstva, ali je sigurno da se u njegovom prisutvu nije smela ni pomenuti. Diogen navodi i sledeće:

[8] Laertije, Život i mišljenja istaknutih filozofa, 271

> *Zabranjivao je da se jedu beli petlovi, jer su oni posvećeni Mesecu i nose odeću kao oni što traže zaštitu–a to se smatralo dobrim stvarima. Posvećeni su Mesecu jer oglašavaju vreme dana: zato belo predstavlja prirodu dobra, a crno prirodu zla.*

Sledeći pouke ovih maksima akuzmatici su moralno i estetski uzdizali svoj svakodnevni život.

Akuzmatici su živeli u sopstvenim kućama a dolazili su u zajednicu tokom dana. Nisu bili vegetarijanci.

Matematičari su činili unutrašnji krug reda. Bili su podučavani od strane Pitagore. Prolazili su kroz rigoroznu inicijaciju i visoki obrazovni proces uključujući i obavezu da pet godina ćute. Slušali su Pitagorina predavanja ali ga nisu videli u prvih pet godina, a posle toga su mogli i odlaziti u njegovu kuću . Ako polaznik nije mogao da savlada ove discipline bio bi izbacivan iz zajednice i za nju proglašavan mrtvim. Matematičari su živeli stalno u zajednici i nisu imali privatnu svojinu. Bili su vegetarijanci. Neki kažu da se sam Pitagora zadovoljavao sa malo meda ili komadom saća ili hlebom, da nije nikad uzimao vino preko dana, a jeo je i kuvano ili sirovo povrće[9].

Postoje tačni i iscrpni opisi o spoljašnjem načinu života koji su pitagorejci vodili u svojoj zajednici, o njihovim vežbama itd.; ali mnoge od tih stvari potiču od kasnijih pisaca. Tu se, pre svega, tvrdi da su se odlikovali time što su nosili jednaka odela bela, lanena odela, kakva je nosio sam Pitagora. Oni su imali jedan tačno određeni dnevni red. Ujutro, odmah posle ustajanja morali su da se sete onoga što su radili prethodnog dana, jer ono što imaju da rade toga dana stoji u tesnoj vezi sa onim što su radili prethodnog dana. Prava obrazovanost ne sastoji se u tome da čovek suviše obraća svoju pažnju na sebe, da se bavi sobom kao pojedincem, to je sujeta; već u tome da zaboravi na sebe, da se udubljuje u stvar, u samozaboravu. Takođe su morali da uče napamet odlomke iz Homera i Hezioda. Ujutru, a često i u toku dana, bavili su se muzikom, jednim od glavnih predmeta grčke nastave i obrazovanosti uopšte. Isto su tako kod njih bila zavedena redovna gimnastička vežbanja u rvanju, trčanju, bacanju i sl. Svake večeri morali su da postave sebi tri pitanja: „U čemu sam pogrešio? Šta sam uradio? Šta nisam uradio što je trebalo?", posle čega su bili prinuđeni da izgovore frazu:„Time se zaklinjem Onome koji je otkrio našoj duši božanski tetraktis". [10]

Oni su se zajedno hranili i čak i po tome su bili karakteristični. Med i hleb su bili njihova glavna hrana, a voda kao najbolje, čak kao jedino piće. Isto tako su se potpuno uzdržavali od mesne hrane, sa čim se dovodi u vezu njihovo verovanje o seobi duše. I pasulj je bio zabranjen.

Pitagorejci su prvi u helenskom svetu priznali ženama ravnopravnost. Jamvlih u katalogu Pitagorejske škole nabraja niz imena članica koje su bile ili žene ili ćerke ili sestre članovima bratstva. Među njima su se najviše isticale Timiha, Filtija a naročito Pitagorina učenica i žena Teana i njene ćerke Mija i Dama koje su imale povlasticu da otvaraju religiozne litije žena.

Filozofija Pitagore donela je u antički svet dva potpuno originalna filozofska polazišta: učenje o metempsihozi ili ponovnom rađanju duše i filozofiju broja kao osnove svega. Sve ostale ideje iz oblasti etike, društvenog uređenja, geometrije, muzike i astronomije koje je Pitagora sa bratstvom podučavao i proučavao a naročito religijske postavke nužno su bile vezane za ova dva postulata. Klifer Pikover navodi:

> *Pitagorejci su, kao oni koji se danas bave razlomcima, bili slični muzičarima. Stvarali su obrazac i lepotu dok su otkrivali matematičke istine.*

[9] V. Korać , B. Pavlović, Istorija filozofije

[10] Laertije,Život i mišljenje antičkih filozofa, 272

Glava 3

PITAGORA KAO FILOZOF

3.1 UČENJE O SEOBI DUŠA

Među raznovrsnim i neobično plodnim matematičkim, astronomskim, muzičkim, političkim, medicinskim, moralnim i religijskim učenjima pitagorejske škole koja je bila prvobitno etičko–politički savez, sa tendencijom da uzdiže čistotu svih svojih članova, i karaktera prilično srodnog orfičkim misterijama i koja je kasnije počela da proširuje svoje ciljeve i stavlja ih na naučnu osnovu, najpoznatija i najmarkantnija je doktrina o seobi duša ili metempsihozi.

Teorija o seobi duša vrlo je starog datuma. Izvesno je da je bila rasprostranjena još kod Egipćana i Indijanaca. Ubeđenje da duše posle smrti prelaze u druga tela vodi poreklo od preterano razvijenog socijalnog instikta, od čovekove srodnosti sa svim što ga opkoljava. Po tome se zaključivalo da je duša, pre nego što je oživela telo, postojala u bićima svih organskih, pa čak i neorganskih vrsta, i da će, kada telo umre, prelaziti u nove oblike. Dakle, sadašnjoj egzistenciji prethodile su mnoge ranije, i za njom će doći mnoge buduće. Ideja o reinkarnaciji bila je podloga za verovanje u odmazdu, jer po njoj, dela ovog života određivala su sudbinu u idućem a bol i sreća sadašnjice predstavljali su nagrade i kazne za ono što se nekada učinilo[1].

Neprekidnu migraciju duše, indijsku samsaru, grčki orfičari nazvali su *krugom rođenja*. Kod starih Grka verovanje u seobu duša dobilo je svoju mističnu i pesničku formulu u orfizmu, filozofsku u pitagoreizmu. Nije isključena mogućnost da ga je Pitagora primio od Indijanaca, posredovanjem Persijanaca u Joniji (naime Kir je 540. god. p.n.e. prodro sve do Indije). Ali verovatnije je da ga je uzeo od orfičara, jer pitagorejski nauk o metempsihozi deli sa orfičarima četiri glavna stava:

1. uverenje da je duša božanskog porekla i prirode, i da nadživljuje telo
2. svest o bolovima, nerazdvojnim od postojanja
3. konvikciju da je božansko pravično i dobro i da pomaže ljudima
4. veru da spasenje dolazi kada se čovek pročišćavanjem, saosećanjem, ljubavlju i ekstazom spoji sa božanstvom

Sva fantastična predavanja o Pitagorinim nadzemaljskim moćima, slična legendama o Budi ili Hristu, tesno su vezana za učenje da se duša seli. Kažu da se Pitagora sećao svih svojih inkarnacija, i da je tvrdio kako je već četiri puta živeo kao čovek, o čemu je već

[1] Atanasijevic Antička filozofija, 73

bilo reči na samom početku. Sem toga, pričao je i da je kasnije njegova duša prešla u telo jednog petla. Zbog ovog poslednjeg, Lukian u jednome delu maliciozno izvodi na scenu nekog Mikilosa, a on tog petla, u kome se nalazi Pitagorina duša pita da li su se događaji pred Trojom zaista odigrali onako kako Homer opeva. Na to petao odgovara: „Kako bi mogao Homer to da zna? Ta u ono doba bio je on kamila u Baktriji".

Po Pitagorejcima, kao i po orfičarima, duša je besmrtna, ali zbog grehova, počinjenih u prošlosti, zatvorena je u telo, njen grob; ona treba da prođe kroz čistilišta, bilo na taj način što će se mučiti u tartarasu , bilo što će se seliti iz tela u telo. Kada se sve ovo svrši, duša što se najzad prečistila biće oslobođena, i vraćena u bestelesni život. Platon je čuvene svoje mitove o stanju duše posle smrti napisao po ugledu na pitagorejske. U Gorgiji Sokrat govori sofisti Kaliklesu pitagorejske reči : „Čuo sam od jednog mudraca da je naš sadašnji život smrt, a naše telo grob...". Duše su u telu zakopane, telo je zatvor iz koga se same one mogu osloboditi uzvišenim etičkim stavom[2].

Posle izlaska iz tela, duše lebde u vazduhu, pa otuda pitagorejsko tvrđenje da su one prašina u vazduhu. Iz vazduha duša ulazi u telo novorođenog deteta, a izlazi iz njega sa uzdisanjem samrtnika, pa ako se ne popne u kakvo više mesto boravljenja, ili ne potone u neko niže, ona opet kruži po atmosferi, do ulaza u novi oblik[3].

Zbog ove teorije o metempsihozi Pitagoru su ismevali i savremenici i drugi viđeni dramaturzi. Ksenofan to prikazuje u jednom napisu gde u jednom momentu Pitagora zadrzava ruku nekog čoveka koji pokušava da udari psa:

> *„Molim te", kaže Pitagora, „ne udaraj psa, jer se plašim da se u njemu ne nalazi duša mog prijatelja."*
> *„A kako znaš?", pita čovek.*
> *„Prepoznao sam glas."*[4]

Laetrije navodi:

> *I Kratin mu se narugao u svojoj Pitagoristkinji, gde kaže:*
> *Oni su naučili, ako slučajno naiđu na nekog stranca,*
> *Da ga ispituju o naukama, da ga zbune i smute*
> *Raznim antitezama, zaključcima, jednačinama,*
> *I količinama i veličinama napunivši mu glavu.*

Šekspir ima nešto slično. U *Bogojavljenskoj noći* daje nam ovaj duhoviti dijalog u vezi metempsihoze:

> *Dvorska luda: „Malvolio, zašto si toliko protiv lova?",*
> *Malvolio: „Jer je Pitagora rekao da se u barskoj štuki nastanila duša moje babe."*
> *Dvorska luda: „E, pa onda ostani zatucan, jer ne mogu da te smatram normalnim doklegod ne smogneš hrabrosti da ubiješ bar jednu štuku a da se ne plašiš da ćeš iseliti dušu svoje babe."*[5]

Isticanjem da se u migraciji duše doživljuju zaslužene nagrade i kazne, pitagorejci su postavili široki etički osnov svojoj teoriji metempsihoze. Pitagorejci su smatrali da treba očistiti i dušu i telo, da bi mogli da primaju nagrade i budu srećni u narednom životu. Oni su koristili muziku da očiste dušu, a medicinu da očiste telo. Pitagora je prvi razlikovao „tri života ", teorijski, praktični i apolaustički, koje je Aristotel naveo u svojoj Etici. Učenje se svodi na sledeće: Mi smo stranci u ovom svetu i telo je grobnica duše, a ipak ne smemo

[2] Phodo, 62 B
[3] Atanasijevic Antička filozofija, 74
[4] Digen Laertije, Životi i mišljenja istaknutih filozofa, VIII,36
[5] Krešenco Istorija grčke filozofije, 53

pokušavati da pobegnemo putem samoubistva, jer mi smo imovina Boga, koji je naš pastir i bez njegove zapovesti nemamo prava na bekstvo. U ovom životu postoje tri vrste ljudi, kao što postoje tri vrste ljudi koji dolaze na Olimpijske igre. Najnižu klasu čine oni koji dolaze da kupuju i prodaju, a sledeći, iznad njih, jesu oni koji dolaze da se takmiče. Najbolji od svih su, ipak, oni koji dolaze da posmatraju. Prema tome, najbolje očišćenje je nauka, i čovek koji se njoj posveti, pravi filozof je onaj koji se najviše oslobodio od tzv. točka rađanja. Bilo bi prenagljeno reći da se Pitagora izrazio baš na taj način, ali sve te ideje zaista su pitagorejske i samo na taj način može se premostiti jaz koji razdvaja Pitagoru kao čoveka od nauke od Pitagore kao verskog učitelja. Većina njegovih sledbenika bila je zadovoljna skromnijim oblicima očišćenja i to može da objasni nastanak sekte akizmatičara.

Pitagorejci su, obuzeti težnjom da očuvaju individualnost duše, govorili da će se u budućim periodima vremena javljati ne samo iste ličnosti, nego da će se ponoviti i svi događaji, sve radnje i sva stanja ličnosti. Ne zna se da li je ova misao bila odomaćena kod cele škole ili samo kod jednog dela njenih pristalica. Eudem daje ovakav izveštaj o njoj:

> *Ako treba pokloniti vere pitagorejcima da će se nekad povratiti iste stvari, sasvim ovakve kao što su sad, tada ćete vi jednom opet ovako kraj mene sedeti, a ja ću vam govoriti, i pri tom ću u rukama držati ovaj štapić; isto će važiti i za sve drugo".*[6]

Bila je osporavana veza između misli o večitom povraćaju stvari i veze u metempsihozu. Jer metempsihozom se duše ponovo javljaju u drugim telima, dok se po palingeneziji i isti oblici sa istim dušama vraćaju. Međutim, pitagorejci su širili i jedno i drugo učenje. Piagoreizam je koncepcijom povraćaja svih individua, upravo ujednačenošću prirodnog toka, dao optimistički obrt orfičkom pesimizmu, koji nije mogao da se uteši zbog neminovnosti seljenja i promene. Iako je pošao od orfičkog postulata da je život zasićen bolom, pitagoreizam uči jednom idealnom svetskom redu, gde celina, kosmos, ima potpunu moć nad pojedinačnim. Zato je i pitagorejska filozofija prirode, ponesena jednim širokim elanom, najveću pažnju poklanjala nebu, sa koga duše dolaze, i gde se vraćaju, a zapostavljala je sve niže sfere.

Pitagorejsku polingeneziju zastupali su, kasnije Blanki i Le Bon, a Niče ju je sjajno poetski oživeo svojom zamisli večnog povraćaja stvari.

Posledica pitagorejske polingenesije jeste verovanje u demone. Oni su sredina između bogova i ljudi, a borave ili ispod zemlje, ili u vazduhu, i često se javljaju ljudima. I nekoliko naročitih obreda odnosili su se na demone. Sem demonima, pitagorejci su ih nazivali i herojima duše što lutaju u vazduhu. Verovali su da te duše van tela vode nesvakidašnji život, nalik na san, a sličan životu senki u Hadu[7].

3.2 OSNOVA SVEGA JE BROJ

Za filozofiju pitagorejaca još važnije od metempsihoze je verovanje da je Broj *arche*, odnosno prvobitni element Univerzuma. Aristotel navodi sledeće:

> *Oni koje nazivaju pitagorovcima prvi su se posvetili matematici i unapredili je. Vaspitani u ovoj naučnoj grani, oni su smatrali da su matematička načela u osnovi svih bića. A kako su brojevi, po prirodi, prvi među ovim načelima i kako su pitagorovci verovali da u brojevima zapažaju mnoge sličnosti sa svim onim što postoji i postaje, više nego što su ih primećivali u vatri, zemlji i vodi (s tim što je*

[6] Kod Timpl.Phys., 173
[7] Atanasijevic Antička filozofija, 75

> *jedno određivanje brojeva pravda, drugo duša i inteligencija, treće kritično vreme i slično tome, tako reći za svako drugo određivanje).*

Ono što je za Talesa voda a za Anaksimena vazduh, kod Pitagore je Broj, i iskreno rečeno, ova hipoteza prilično zbunjuje. Ako je i moguće zamisliti jedan sto kao nešto što je sastavljeno od mnoštva molekula vode ili vazduha, nije baš tako lako zamisliti ga kao jedinstvo brojeva zgnječenih jedan preko drugog. Po Pitagori, zapravo, brojevi imaju svoju gustinu. U jednom fragmentu Speusipa *O Pitagorejskim brojevima*, jasno je naznačeno da je broj Jedan tačka (neka vrsta atoma), broj Dva je prava, Tri je ravan a Četiri čvrsto telo. Dalje, kao dokaz, precizira se da dva jedinstva Tačke ustanovljavaju liniju, tri jedinstva Tačke ravan, a četiri jedinstva Tačke geometrijsko (čvrsto) telo. Pošto sve stvari na svetu, zajedno sa nama, imaju svoj oblik, i moguće je rastaviti taj oblik u skup tačaka ili linija i, konačno, brojeva.

Pretpostavlja se da je Pitagora smatrao da su stvari u mnogo čemu slične brojevima i da je sasvim moguće da neki srećni eksperiment otkrije njihovu pravu numeričku prirodu. Neopitagorejski pisci, vraćajući se ovoj tradiciji, na beskrajno raznovrsne načine se prepuštaju svojim fantazijama koje se tiču analogije između stvari i brojeva. Aristotel kaže da su pitagorejci pomoću brojeva objasnili samo nekoliko stvari, što znači da sam Pitagora o tome nije ostavio razvijeno učenje, dok pitagorejci petog veka nisu bili zainteresovani za to da na bilo koji način obogate tradiciju. Ipak, Aristotel navodi da su povoljnu priliku, pravdu i brak definisali brojevima. Tako dobra prilika, prava mera ili pravi trenutak treba da budu identifikovani sa brojem 7, pravda je bila označena brojem 4 a brak je izjednačen sa brojem 3. Dakle, i ovakvoj notaciji, dobra prlilka bi mogla da se protumači kao simbioza pravde i braka ($7=3+4$); a pravda kao savršeni sklad ($4=2+2=2^2$ ili $4=3+1$). Pitagorejci su brojeve od 1 do 4 smatrali svetim, a kako je 3 zbir prvog parnog broja i jedinice, za koju su se pitagorejci teško odlučivali da li da je zovu parnim ili neparnim brojem, prema nekim drugim izvorima brak je ipak bio označavan brojem 5. To bi bio zbir prvog parnog i prvog stvarnog neparnog broja. Novopitagorejci su sa svoje strane značajno proširili broj bića koja su označavali brojevima. Aristotel priča da se Eurit, pitagorejac druge generacije, učenik Filolaja, zainatio da pronađe broj karakterističan za svako živo biće, pa je tako počeo da broji tačke (šljunčiće) potrebne da se stvori obličje čoveka i konja. Tako su stvorili ono što je danas poznato pod nazivom mistika ili veština upućivanja u tajnu brojeva.

Glava 4

PITAGORA KAO MUZIČAR

Apolon je bio glavno božanstvo pitagorejaca. On postaje bog svih disciplina kojima su se bavili pitagorejci: muzike, poezije, filozofije, astronomije, matematike, medicine i fizike. Po starim verovanjima i legendama, božanska muzika je toliko divna da može svakog smrtnika dovesti u zanos. Prema Aristoksenovom svedočanstvu pitagorejci su koristili muziku da bi očistili dušu, a muzika je mogla da vrši takvu funkciju jer se i odnosi direktno na dušu. Muzika je predstavljala melem, očišćenje od svega onoga što je nečisto, nedolično, grešno. Pitagora se nije zadržao samo na ovakvom viđenju muzike, već je eksperimentisao sa muzičkim instrumentima. Prema predanju, Pitagora je jednoga dana prolazio pored kovačnice i do ušiju su mu doprli udarci raznih čekića po nakovanju. Ovo ga je navelo na razmišljanje. Lativši se vršenja ogleda strunama, otkrio je harmonijske ulazne linije, kao i odnos između dužine strune koja vibrira i visine muzičke note koja pri tome nastaje. Dvostruko duža struna proizvodi upola nižu notu[1]. Mlodinov navodi:

> *Posredi je jednostavno uočavanje, ali i dubok, revolucionaran čin koji se uglavnom smatra prvim primerom u istoriji empirijskih otkrića prirodnih zakona.*

Ovo je Pitagori i pitagorejcima pomoglo da odrede odnose među tonovima, odnosno intervale, koje su podelili na konsonantne i disonantne. Prvi su ocenjivani kao prijatni, skladni, kao odnosi tonova koji zajedno rađaju simfoniju. Takvi, saglasni intervali su kvarta, kvinta i oktava. Ostale tonove računali su u disonantne, odnosno nesaglasne, neskladne. Pitagorejci su u tim svojim istraživanjima otkrili da odnosi među intervalima imaju svoju osnovu u odnosima među brojevima. Istraživali su mogućnosti instrumenta monokorda i došli do fantastičnog otkrića da se odnosi tonova mogu numerički izraziti. Kako samo ime kaže, monokord je instrument koji se sastojao od jedne zategnute žice i rezonantne kutije, pri čemu je žica bila oznakama podeljena na dvanaest delova. Kada bi skratili dužinu žice sa 12 na 6 (u odnosu 2:1) ili sa 12 na 8 (u odnosu 3:2) ili sa 12 na 9 (u odnosu 4:3) dobio bi ton viši za oktavu, kvintu ili kvartu, respektivno. Heath navodi:

> *Epohalno otkriće da muzički tonovi zavise od muzičkih proporcija, pri čemu oktava predstavlja proporciju od 2:1, kvinta 3:2, a kvarta 4:3, može se s priličnom sigurnošću pripisati Pitagori[2], kao i prvo izlaganje teorije vrednosti i proporcija uopšte primenjenim na proporcionalne veličine.*

Za pitagorejce je bila od ogromnog značaja činjenica da se osnovni zvučni intervali mogu predstaviti pomoću razmere brojeva 1, 2, 3 i 4, odnosno tetraktisa, što je još jednom

[1] Mlodinov, Euklidov prozor, 28

[2] Burnet, Early greek psilosophy, 118

potvrdilo njihovu teoriju „Sve je broj ".

Brojevi 6, 8, 9 i 12 se sreću kod skoro svih pitagorejaca koji su pisali o muzici. Oni su znali da su 9 i 8 aritmetička i harmonijska sredina brojeva 6 i 12. Obično je broj 12 pripisivan najvišem tonu, a 6 najnižem, pri čemu su ovi brojevi bili obrnuto proporcionalni dužini žice.

Šta je bio stvarni značaj ovih brojeva? Očigledno da pitagorejcima nije bilo važno da li oni predstavljaju dužinu žica, njihovu zategnutost ili brzinu. Najvažnija stvar je da su se javljali tačni odnosi harmonijskih intervala, kao što su 12:9=8:6 za kvartu i 12:8=9:6 za kvintu.

Glava 5

PITAGORA KAO MATEMATIČAR

5.1 TEORIJA PROPORCIJA

Iako su poznavali i koristili sličnost, pitagorejci teoriju proporcija nisu razvili u goemetriji. Naime otkriće numeričke zavisnosti muzičkih intervala je predstavljalo početak razvoja teorije proporcija u muzici i aritmetici.

U Pitagorino vreme razlikovali su aritmetičku, geometrijsku i subkontrarnu sredinu koju je Arhit preimenovao u harmonijsku. U svom delu *O muzici* on ih je definisao na sledeći način :

> ***Aritmetička*** *je sredina kada tri brojna pojma pokazuju uzastopnu razliku: koliko prvi premašuje drugi, toliko drugi premašuje treći. Kod te analogije događa se da je odnos među većim brojnim pojmovima manji, a među manjima veći.* ***Geometrijska*** *sredina je kad se prvi brojni pojam odnosi prema drugom, kao drugi prema trećem. Tu veći brojni pojmovi imaju isti brojni odnos kao manji. Kod* ***subkontrarne****, odnosno* ***harmonijske*** *sredine brojni pojmovi se odnose na sledeći način: za koliki deo vlastite veličine prvi pojam premašuje drugi, za toliki deo trećega, srednji pojam premašuje treći.*

Za brojeve $a > b > c$ ovo možemo zapisati na sledeći način:

Aritmetička sredina: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$, tj. $a + c = 2b$

Geometrijska sredina: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, tj. $ac = b^2$

Harmonijska sredina: $a = b + \frac{a}{n},\ b = c + \frac{b}{n}$, tj. $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$,

što je ekvivalentno sa $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$.[1]

Jamblih navodi i *najsavršeniju* proporciju koju naziva **muzičkom**. Ova proporcija se sastoji od četiri brojna pojma i može se zapisati na sledeći način:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b.$$

[1] T. Heath, A History of Greek Mathematics, 85

Primer za muzičku proporciju je 12:9 = 8:6 odnosno kvarta.

5.2 GEOMETRIJA

Prokolo pominje, posle Talesa i Amerista, Pitagoru, govoreći da je on preobrazio geometrijsko učenje u *oblik slobodnog obrazovanja ispitujući njegove principe od početaka i istražujući teoreme na nematerijalni i intelektualni način.* On je zapravo smatrao da je Pitagora pomerio geometriju iz empirijske ravni u teorijsku.

Diogen Laertije za Pitagoru kaže da je *geometriju doveo do savršenstva.*

Iz Jamblihovog dela *Život pitagorejaca* saznajemo kako su pitagorejci objavili u javnosti svoja otkrića iz geometrije, uprkos strogoj tajnosti njihove škole. Greškom jednog člana bratstva, pitagorejci su ostali bez novca. Zato su rešili da mu dozvole da zaradi novac pomoću geometrije. Tako je geometrija objavljena kao *Pitagorino predanje.* Obzirom da je u to vreme postojala žeđ za znanjem, što saznajemo iz velike popularnosti sofista, vrlo je moguće da ova legenda sadrži deo istine.

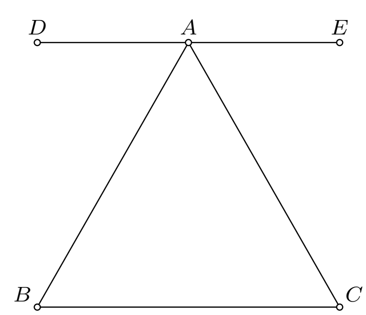
5.2.1 Zbir uglova u trouglu je jednak zbiru dva prava ugla

U *Komentarina prve knjige Euklidovih elemenata* Prokolo Pitagori pripisuje teoremu da je zbir uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla.

Ono što sigurno znamo jeste da je Eudem pripisao Pitagorejcima otkriće ove teoreme. Eudem, govoreći o dokazu ove teoreme kaže da se sam metod malo razlikuje od Euklidovog, ali, baš kao i Euklidov zavisi od osobina paralelnosti i upravo iz tog razloga mogao je nastati u vreme kada se već dosta znalo o tome.

Teorema: Zbir uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla.

Dokaz: Neka je ABC bilo koji trougao.



Slika 2

Kroz A povucimo paralelu DE sa BC, (sl. 2).

Pošto je $BC \parallel DE$ naizmenični uglovi $\angle DAB$ i $\angle ABC$ su jednaki.

Slično, naizmenični uglovi $\angle EAC$ i $\angle ACB$ su jednaki.
Iz ovoga dobijamo da je zbir uglova $\angle ABC$ i $\angle ACB$ jednak zbiru uglova $\angle DAB$ i $\angle EAC$.

Ako svakoj od suma dodamo $\angle BAC$, dobijamo
$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE =$ zbir dva prava ugla.■

Jako je značajna i činjenica da su Pitagorejci razvili celu teoriju poligona. Osim tvrđenja koje smo već upoznali, da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla, pitagorejci su znali da ako je n broj strana poligona, zbir unutrašnjih uglova tog poligona iznosi $(2n - 4)$ pravog ugla, a suma spoljašnjih uglova četvorougla je jednaka četiri prava ugla. Znali su i da postoje samo tri pravilna poligona, takva da kad njihove unutrašnje uglove poređamo oko jedne tačke u ravni, dobijamo četiri prava ugla, odnosno prekrivamo celu ravan. Ta tri pravilna poligona su jednakostraničan trougao, kvadrat i pravilni šestougao.

5.2.2 Pitagorina teorema

Naravno, mi danas pamtimo Pitagoru po poznatoj Pitagorinoj teoremi. Međutim, nigde u Euklidovom delu tvrđenje koje danas nazivamo Pitagorinom teoremom se ne povezuje sa Pitagorinim imenom. Ni u sačuvanoj literaturi koja prethodi Euklidu se nigde ne ističe da je Pitagora utvrdio da važi ova čuvena teorema. Najstarije sačuvano delo u kojem se pominje stav koji je dokazao Pitagora nastalo je više od petsto godina posle vremena u kojem je živeo Pitagora. Iako je nazvana po Pitagori, smatra se da je ova teorema bila poznata još i starim Vaviloncima. Hiljadu godina pre nego što se Pitagora rodio Vavilonjani nisu pisali jednačine. Svi njihovi proračuni bili su iskazani kao verbalni problemi. Na jednoj pločici, na primer, zapisane su sledeća zagonetka i odgonetka: *Četiri je visina, a pet dijagonala. Kolika je osnovica? To je nepoznato. Četiri puta četiri jeste šesnaest. Pet puta pet jeste dvadeset pet. Oduzmite šesnaest od dvadeset pet i dobićete devet. Koji se broj mora pomnožiti samim sobom da bi se dobilo devet? Tri puta tri je devet. To je vrednost osnovice.* Zapis s pomenute pločice pokazuje da su Vavilonjani znali za Pitagorinu teoremu, prema kojoj je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbiru kvadrata nad katetama. Kao što nam to govori dosetka harpedonopte, ovaj odnos bio je poznat i Egipćanima. Za geometarske poslove Egipćani su se oslanjali na čoveka koji se nazivao harpedonopta, što u doslovnom prevodu znači *onaj koji razvlači konopac.* Na konopcu su bili vezani čvorovi na tačno određenim razmacima; kada bi se zategao tako da se čvorovi nađu na temenima, dobio bi se trougao sa stranama željene dužine, odnosno uglovima željene veličine. Primera radi, ako biste rastegli konopac sa čvorovima vezanim na 30, 40 i 50 metara, dobili biste prav ugao između strana od 30 i 40 metara. Reč hipotenuza na grčkom izvorniku znači *rastegnuto spram.* A valjanost Pitagorine teoreme predstavlja potvrdu da je prostor ravan. Ovaj odnos bio je poznat i Egipćanima, ali vavilonjanski pisari ispunili su svoje glinene pločice upečatljivim tabelama tripleta brojeva koji ispoljavaju ovo svojstvo. Zabeležili su trojke kao što su 3, 4, 5 ili 5, 12, 13, ali i visoke kao 3456, 3367, 4825. Pošto su Egipćani znali za trojku, trougao sa tim stranicama se i danas naziva egipatski trougao.

Obe civilizacije su znale za Pitagorinu teoremu, a nijedna nije došla do opšteg pravila koje danas ispisujemo kao $a^2 + b^2 = c^2$ (gde je c hipotenuza pravouglog trougla, a a i b katete). Kako izgleda, nikada se nisu zapitali zašto ovakav odnos postoji niti kako pomoću njega mogu da dođu do dubljih uvida.

Naime, Pitagora nije prvi otkrio Pitagorinu teoremu (kako to mnogi brzopleto govore), već se smatra da je Pitagora bio prvi koji je dokazao tu teoremu i zato se ona zove Pitagorina teorema. Po nekima, kada je Pitagora dokazao tu teoremu, bogovima u čast je žrtvovao vola što su ga prosvetlili. Plutarh kaže da

kada je Pitagora otkrio taj čuveni stav, *zbog toga je ponudio sjajnu žrtvu volova,*

dok Diogen Laertije piše

Kada je Pitagora pronašao crtež,
Prineo je slavnu hekatombu bogovima,

a hekatomba predstavlja žrtvovanje sto volova. Laertije pominje crtež, jer je u to vreme dobro urađen crtež bio dovoljan da se stvori uverenje da tvrđenje zaista važi. Kod složenijih tvrđenja uverenje se sticalo uvidom u niz slika koje su bile dovoljno ubedljive da se stvori uverenje u tačnost tvrđenja. U pitagorejskoj matematici, slike su bile čak i putokaz za dokazivanje stavova aritmetike.

Vratimo se Pitagorinoj teoremi, koja glasi: **Površina kvadrata nad hipotenuzom pravouglog trougla jednaka je zbiru površina kvadrata nad katetama**. Ako su a i b katete, a c hipotenuza pravouglog trougla, Pitagorina teorema se algebarski zapisuje kao formula: $a^2 + b^2 = c^2$. Ona omogućava izračunavanje treće napoznate stranice pravouglog trougla ako su mu zadate proizvoljne dve.

Postavlja se pitanje na koji način su Pitagora i njegovi učenici dokazali teoremu. Jakob Bronovski u *Usponu čoveka* navodi dokaz pretpostavljajući da je i sam Pitagora teoremu dokazao baš na taj način. Dokaz koji sledi je zanimljiv i zbog toga što je prilično jednostavan i pokazuje kako matematičko rasuđivanje može biti zanimljivo iskazano prirodnim jezikom, bez matematičkih simbola i formula.

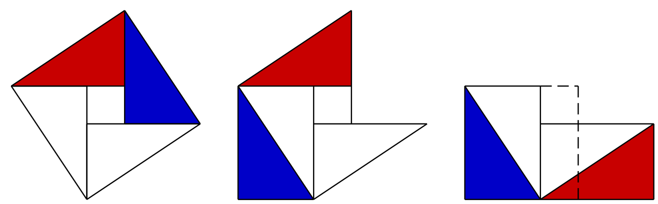
Mislim da je njegov dokaz tekao na sledeći način (iako to nije dokaz koji koristimo u savremenim udžbenicima): četiri glavne tačke – jug, zapad, sever, istok, trouglova koji sačinjavaju krst kompasa, četiri su ugla kvadrata. Pomeram četiri trougla tako da najduža ivica svakoga završava u glavnoj tački susednoga. Sada imamo konstruisan kvadrat nad najdužom ivicom–hipotenuzom svakog pravouglog trougla. Da bismo znali šta je u zatvorenom području ovog mozaika, a šta nije, ispunićemo malu unutrašnju kvadratnu površ koja je dosad bila nepokrivena novom pločicom mozaika (koristim pločicu zato što su mnogi mozaici u Rimu i na Orijentu, proizašli iz ovakvog spoja matematike i razmišljanja o prirodi).

Sada imamo kvadrat nad hipotenuzom koji, naravno, možemo brojno uporediti sa kvadratima nad dvema manjim ivicama. Ali time ne bismo uočili prirodnu strukturu i samu suštinu geometrijske figure. Nije nam potrebno nikakvo računanje. Malom igrom, kakvu igraju deca i matematičari, otkrićemo više nego računanjem. Premestimo dva trougla u nove položaje. Trougao koji pokazuje sever (N) premestimo tako da se njegova najduža ivica priljubi uz najdužu ivicu trougla koji pokazuje jug (S), a trougao koji pokazuje zapad (W) premestimo tako da se njegova najduža ivica priljubi uz najdužu ivicu trougla koji pokazuje istok (E).

Tako smo konstruisali figuru u obliku latiničnog slova L koja ima istu površinu (kao kvadrat nad hipotenuzom), naravno, jer se sastoji iz istih delova, čije su stranice, kako odmah primećujemo, manje ivice pravouglog trougla. Načinimo ovu podelu vidljivom, odvojimo manji od uspravnog dela figure u obliku slova L. Jasno je da je manji deo kvadrat nad manjom, a uspravni deo kvadrat nad većom katetom.[2]

Odgovarajući crtež bi ovako izgledao, (sl. 3).

[2] Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, 94



Slika 3

Šta reći o značaju Pitagorine teoreme?

Prvo, bez njenog poznavanja antičke civilizacije ne bi mogle konstruisati one monumentalne građevine koje su bile njima na korist, a nama za divljenje. Razvoj nauke kroz vekove nezamisliv je bez geometrije, a geometrija je nezamisliva bez Pitagorine teoreme. Sada znamo da postoje i druge geometrije, ali bez njih ne bi bilo ni Euklidske. Rastojanje između dve tačke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ u Euklidskom prostoru računa se pomoću formule $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, koja je posledica Pitagorine teoreme. Isto važi i za osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Možemo reći da Pitagorina teorema predstavlja jezgro velikog broja fundamentalnih tvrđenja u raznim matematičkim disciplinama, a samim tim i u naukama kojima te matematičke discipline daju osnovne metode naučnog istraživanja i zaključivanja.

5.2.3 Geometrijska algebra

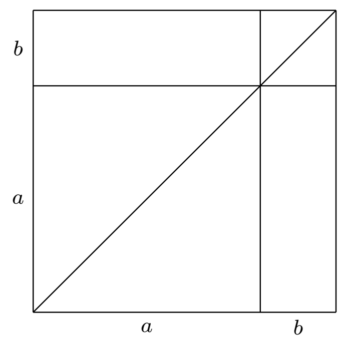
Geometrijska algebra je nastala u pitagorejskoj školi, kao spoj vavilonske aritmetike i egipatske geometrije. Stoga je zanimljiva legenda o susretu Talesa i Pitagore, koju Jamblih prenosi u *Pitagorinom životu*. Prema njoj, Tales je savetovao svog mlađeg sunarodnika da putuje u Egipat ne bi li naučio šta od sveštenika gradova Memfisa i Diospolisa. Posle boravka u Egiptu gde je naučio geometriju i astronomiju, Pitagora je otputovao u Vavilon, gde su ga tamošnji magi uputili u tajne teologije, aritmetike i muzike. Znajući za spoj vavilonske aritmetike i egipatske geometrije, u pitagorejskoj školi je razvio geometrijsku algebru. Geometrijska algebra predstavlja geometrijski pristup algebri, odnosno geometrijsku formalizaciju i rešenje algebarskih problema.

U drugoj knjizi Euklidovih elemenata nailazimo na niz takvih stavova. Najzanimljivije među njima je poznato algebarsko pravilo, kvadrat binoma, ima svoju geometrijsku interpretaciju u navedenoj knjizi: Umesto tvrđenja koje se savremenim matematičkim jezikom iskazuje formulom $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, u Elementima se kaže:

Ako se data duž proizvoljno podeli, kvadrat na celoj duži jednak je zbiru kvadrata na odesčcima i dvostrukog pravougaonika obuhvaćenog odsečcima.[3]

Konstrukcijom odgovarajuće slike tvrđenje postaje očigledno, (sl. 4) .

[3]Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, 114



Slika 4

5.2.4 Pravilna tela

Po svedočenju Prokola pitagorejci su znali za pet pravilnih tela: tetraedar, heksaedar-kocku, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. U to vreme je utvrđeno da nije moguće konstruisati neki novi pravilni poliedar sem otkrivenih. Prvobitno se govorilo samo o tri pravilna poliedra, o tetraedru, kocki i dodekaedru. Ovi poliedri su na prilično komplikovan i nerazumljiv način dovođeni u vezu sa vatrom, vodom, zemljom i vazduhom. Kaže se da je Pitagora verovao da je zemlja napravljena od kocke, vatra od tetraedra, vazduh od oktaedra, voda od ikosaedra, a *nebeski dah* od dodekaedra.

Smatra se da su pitagorejci do ovih tela dolazli empirijski: spajajući tri po tri kvadrata u prostoru dobijali bi osam triedara i na kraju su njih spajali u kocku. Sličan postupak je bio i za tetraedar, oktaedar i ikosaedar s tim što su tu spajali jednakostranične trouglove, tri po tri, četiri po četiri i pet po pet. Konačno, dodekaedar je tražio novi elemenat za konstrukciju, pravilan petougao. Međutim, pitagorejci su znali i da konstruišu pravilan petougao. Diels u *Predsokratovcima* kaže:

> *O Hipasu pripovedaju da je bio pitagorejac i da je zato što je prvi opisao krug sa dvanaest petouglova poginuo u brodolomu kao izdajnik, jer je stekao slavu zbog otkrića, a sve pripada „onom čoveku"; tako naime nazivaju Pitagoru, a da ga ne zovu imenom.*

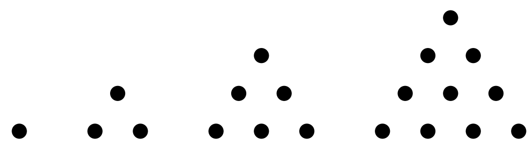
5.3 TEORIJA BROJEVA

Pre više miliona godina neko je nešto izustio, dok je neko drugi na to uzvratio nešto što je trebalo da znači: „Znam šta hoćeš da kažeš!". Toga časa se pojavila zamisao o jeziku. U nauci je Pitagorin zakon o harmoniji ista takva prekretnica, prvi primer iskazivanja sveta matematičkim pojmovima. Ne sme se izgubiti iz vida i to da je u to doba bila nepoznata čak i matematika jednostavnih brojnih odnosa. Primera radi, pitagorejci su doživeli kao otkrovenje činjenicu da se množenjem dužine dve strane pravougaonika dobija njegova površina.

5.3.1 Trougaoni, kvadratni i pravougaoni brojevi

Za Pitagoru je privlačnost matematike proisticala iz mnoštva brojnih odnosa, koje su on i njegovi sledbenici otkrili. Pitagorejci su cele brojeve zamišljali kao kamičke ili tačke koje su raspoređivali u određene geometrijske oblike. Brojeve su predstavljali pomoću tačaka raspoređenih u simetrične i lako prepoznatljive obrasce, čije obeležavanje najviše podseća na domine ili kocke[4]. Alfabetsko beleženje nije bilo pogodno za aritmetičke svrhe zato što još uvek nije bila pronađena nula.

Pitagorejci su ustanovili da neke brojeve mogu dobiti tako što će kamičke postavljati u obliku trougla. Te brojeve su nazvali **trougaonim brojevima**[5], (sl 5).



Slika 5

Pitagorejci su uočili da trougaoni brojevi predstavljaju zbirove svih naizmeničnih brojeva, kako parnih tako i neparnih, tj. da je suma proizvoljnog broja prirodnih brojeva trougaoni broj.

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

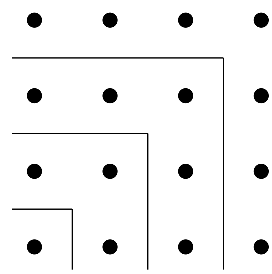
Među ovim brojevima se nalazi i tetraktis . Speusip tvrdi da su se pitagorejci zaklinjali u tetraktis i da je on bio autentično pitagorejski lik. Tetraktis je tako nazvan zato što ima deset tačaka i po tome on pokazuje strukturi dekade, date u obliku jednakostraničnog trougla. Teme tog trougla je jedinica, iz koje neposredno sledi diada (dve tačke u drugom redu), treći red pokazuje triadu (kao i ceo trougao), dok četvrti red pokazuje tetradu. Izvedeni zbir tačaka u sva četiri reda, odnosno svetih brojeva je 10 (1+2+3+4=10) i on čini dekadu (deset), odnosno najsavršeniji broj. Za članove bratstva, magijsko značenje tetraktisa je bilo veće od geometrijskog ili aritmetičkog; čak su i zakletve polagali nad tetraktisom:

Ne, tako mi onoga koji je našoj
glavi predao tetraktis,
koji ima u sebi izvor, koren večne prirode.[6]

Speusip navodi nekoliko osobina dekade koje su otkrili pitagorejci. To je, na primer, prvi broj koji u sebi sadrži jednak broj prostih i složenih brojeva. Ne možemo da kažemo koliko toga pripada samom Pitagori, ali ćemo verovatno biti u pravu ako mu pripišemo zaključak da je „u skladu sa prirodom" to što svi Heleni i varvari broje do deset i onda kreću ispočetka.

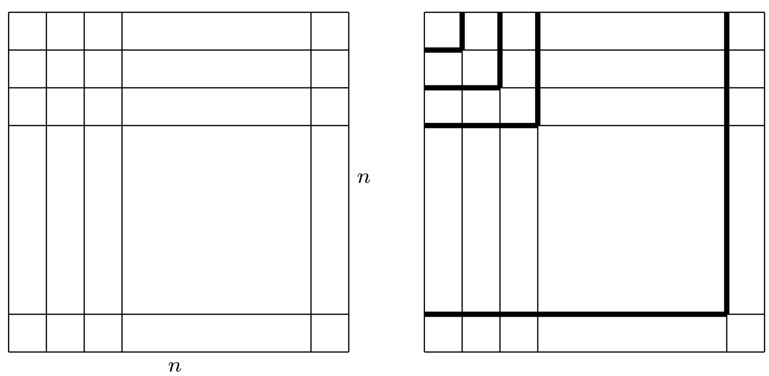
Pitagorejci su takođe uočili da neke brojeve mogu da dobiju tako što će postaviti kamičke u dva reda po dva, tri po tri i tako dalje, pri čemu svaka slika predstavlja kvadrat. Pitagorejci su ove slike sazidane od kamičaka nazivali **kvadratnim brojevima**, odakle potiče naš današnji naziv kvadrati za brojeve 4, 9 , 16 itd., (sl.6)[7].

[4] Mlodinov, Euklidov prozor, 29
[5] T. Heath, A History of Greek Mathematics, 76
[6] H.Diels, Predsokratovci, Pitagorejska škola, 403
[7] T. Heath, A History of Greek Mathematics, 81



Slika 6

Ova konstrukcija se može beskonačno produžavati. Time dobijamo niz kvadratnih brojeva 1, 4, 16, 25,...,n^2; gde n teži beskonačnosti. Mi kvadrat možemo da razdelimo paralelnim pravama na $n \cdot n$ kvadratića, (sl.7).



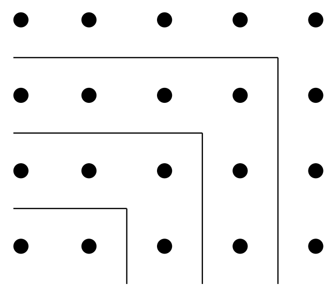
Slika 7

Kada se ti kvadratići razbiju na grupe, dobiće se zbir 1+ 3+ 5+...+ $(2n-1)$. Znači 1+ 3+ 5+...+$(2n-1) = n^2$. Niz [1, 3, 5, 7,$(2n-1)$] je ujedno i niz neparnih brojeva. Zaključujemo da je svaki kvadratni broj jednak zbiru naizmeničnih neparnih brojeva.

Pitagorejci su zaključili i da postoji veza između kvadratnih i trougaonih brojeva: ako saberemo neki trougaoni broj s prethodnim ili narednim trougaonim brojem dobija se kvadratni broj.

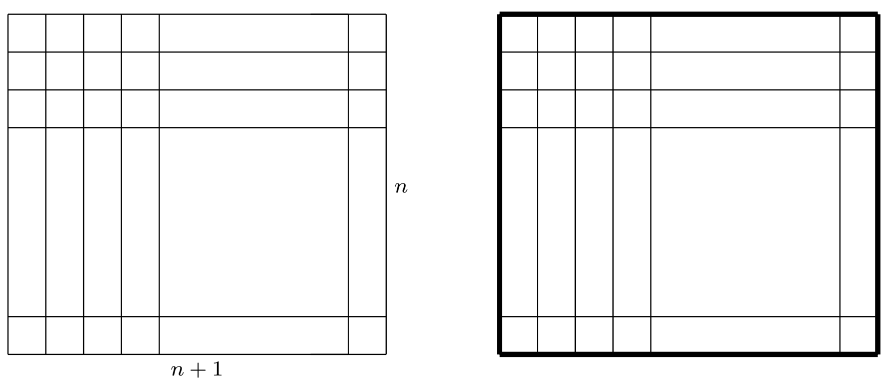
Pitagorejci su znali da ako započnemo ređanje kamenčića dvojkom i dodajemo parne brojeve dobićemo **pravougaone brojeve**, gde se strane pravougaonka razlikuju za jedan, (sl.8)[8].

[8] T. Heath, A History of Greek Mathematics, 82



Slika 8

I ova konstrukcija se može beskonačno produžavati. Tako se dobija niz pravougaonih brojeva , gde je svaki član ovog niza proizvod dužine i širine pravougaonika. Imamo niz: $1\cdot2, 2\cdot3, 3\cdot4, 4\cdot5, ..., n\cdot(n+1)$, gde n teži beskonačnosti. Drugačije rečeno, mi pravougaonik možemo podeliti na $n \cdot (n+1)$ kvadratića, (sl. 9).



Slika 9

Kada se ti kvadratići razbiju na grupe, dobiće se zbir 2+4+6+...+2n. Znači da je 2+4+6+...+2n= n(n+1). Niz [2,4,6,...,2n] je ujedno i niz parnih brojeva.

Način na koji su pitagorejci obeležavali brojeve doveden je u vezu sa geometrijskim slikama. Tako su trougaoni brojevi povezani sa predstavom trougla, kvadratni su lako povezani, kao što je već rečeno, sa predstavom kvadrata, a pravougaoni sa slikom pravougaonika.

5.3.2 Neparni i parni brojevi

Strahopoštovanje koje je Pitagora osećao prema brojnim odnosima navelo ga je na mnoga numerološka praznoverja. On je prvi podelio brojeve u dve kategorije **neparnih** i **parnih**, ali je otišao i korak dalje, personifikujući ih. Naime, neparne je označio kao muške, a parne kao ženske. Posebne brojeve doveo je u vezu sa idejama, pa je tako broj jedan bio povezan sa razumom, dva sa mišljenjem, četiri sa pravdom.

Ipak se za najstariju teoriju brojeva uzima teorija parnih i neparnih. O značaju te teorije govori i činjenica da je ona našla mesto u IX knjizi Euklidovih elemenata. Stavovi te teorije su sledeći:

1. Ako se sabere ma koliko parnih brojeva, biće i zbir paran broj.

2. Ako se sabere ma koliko neparnih brojeva, ali paran broj sabiraka, biće i zbir paran broj.
3. Ako se sabere ma koliko neparnih brojeva, ali neparan broj sabiraka, biće i celo neparan broj.
4. Ako se od parnog broja oduzme paran broj, biće ostatak paran broj.
5. Ako se od parnog broja oduzme neparan broj, biće ostatak neparan broj.
6. Ako se od neparnog broja oduzme neparan, biće ostatak paran broj.
7. Ako se od neparnog broja oduzme paran broj, biće ostatak neparan broj
8. Ako neparan broj pomnožen parnim brojem proizvodi nešto, dobijeni broj je paran.
9. Ako neparan broj pomnožen neparnim brojem proizvodi nešto, dobijeni broj je neparan.
10. Ako neparan broj meri paran, on će meriti i njegovu polovinu.
11. Ako je neparan broj sa nekim brojem uzajamno prost, biće on uzajamno prost i sa dvostrukim tim brojem.
12. Svaki od brojeva koji se dobijaju od dvojke neprekidnim udvostručavanjem, je samo parno–paran broj.
13. Ako broj ima neparnu polovinu, on je samo parno–neparan.
14. Ako broj ne pripada ni brojevima koji se dobijaju od dvojke neprekidnim udvostručavanjem, ni brojevima koji imaju neparnu polovinu, on je ili parno–paran ili parno–neparan.

Za pitagorejce, parno i neparno nisu samo elementi broja, već i osnovni principi prirode. Potvrdu takvog stava nalazimo kod Aristotela, koji kaže:

> *Pitagorejci smatraju da elementi broja jesu parno i neparno, a da je od njih parno neograničeno, a neparno ograničeno; broj jedan proizilazi iz obadva (jer je ono i parno i neparno), a brojevi iz jedinice; a i čitavo nebo kao što je rečeno jeste broj.*

Pripadnici ove škole kažu da postoji deset osnovnih načela koje oni svrstavaju u različite grupe. Aristotel u svojoj Metafizici kaže:

> *Drugi među ovim istim filozofima prihvataju deset pranačela koja u dve uporedne grupe obuhvataju ono što je: ograničeno i neograničeno, parno i neparno, jedno i mnogostruko, desno i levo, muško i žensko, mirno i pokretno, pravolinijsko i krivo, svetlo i tamno, dobro i rđavo, četvorougaono i duguljasto.*

5.3.3 Savršeni brojevi

Iako su otkrića Pitagorejske škole često shvatana kao teorijske, mistične kombinacije sa brojevima, mnoge od njih su ipak našle mesto u Euklidovim elementima. Tako se u trećoj knjizi Elemenata može naći definicija savršenog broja: **Savršen (perfektan) je broj koji je jednak zbiru svih svojih delova (koji se mere)**.

Najjednostavniji primer takvog broja je 6=1+2+3. Osim njega Nikomah navodi još i sledeće savršene brojeve: 28, 496 i 8128, pri čemu navodi i opšte pravilo za nalaženje savršenih brojeva : Kada je zbir $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = p$ (1) prost broj, tada je $2^n p$ savršen broj. Na primer, 1+2+4=7 je prost broj, sledi da je: $2^2 \cdot 7 = 28$ savršen broj.

U dokazu se koristi formula za sumu geometrijske progresije $1+2+...+2^{(n-1)} = 2^n - 1$(2)

Iz (1) i (2) zaključujemo da su savršeni brojevi brojevi oblika $2^n(2^{(n+1)} - 1)$. Koristeći ovu formulu dobijamo da je $2^2(2^3 - 1) = 6$, $2^3(2^4 - 1) = 28$, $2^4(2^5 - 1) = 496$ i $2^5(2^6 - 1) = 8128$ itd[9].

Osim savršenog broja, Teon iz Smirne i Nikomah razlikuju još dve vrste brojeva:

1) Subperfektan (defektan): Za broj ćemo reći da je subperfektan ako je manji od sume svojih delilaca. Primer takvog broja je broj 12, jer je $12 < 1+2+3+4+6$, tj. $12 < 16$.

2) Superperfektan: Za broj ćemo reći da je superperfektan ako je veći od sume svojih delilaca. Primer takvog broja je broj 8, jer je $8 > 1 + 2 + 4$, tj. $8 > 7$.

5.3.4 Prijateljski brojevi

Za dva broja kažemo da su prijateljski, kada je svaki jednak sumi svih delilaca drugog. Primer za to su brojevi 284 i 220. Jamblih pripisuje otkriće ovih brojeva Pitagori, koji je na pitanje „Šta je prijatelj ?"odgovorio „Alter ego"i naveo prijateljske brojeve 284 i 220.

284 = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110

220 = 1+2+4+71+142

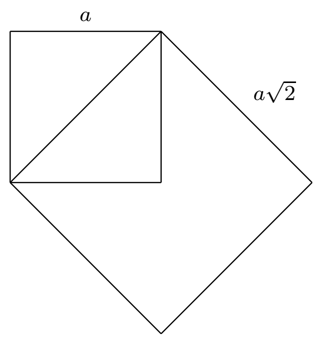
5.3.5 Iracionalni brojevi

Danas nam je poznato da je dužina dijagonale kvadrata sa osnovicom 1 jednaka kvadratnom korenu iz 2, a to je iracionalan broj. Ovo znači da se on ne može zapisati u decimalnom obliku sa konačno mnogo decimala, odnosno da se ne može zapisati u obliku celog broja ili razlomka, što su bili jedini brojevi poznati pitagorejcima.

Vavilonci cu dijagonalu kvadrata čija osnovica iznosi jednu mernu jedinicu računali do šestog decimalnog mesta, a pitagorejci se time nisu zadovoljili. Želeli su da ustanove tačnu vrednost. Jer kako pouzdano moglo znati bilo šta o prostoru unutar kvadrata ako vam nije poznato koliko je dugačka njegova dijagonala? Nevolja se ogledala u tome što, iako su dobijali sve preciznije i preciznije približne rezultate, nijedna od ovih vrednosti nije bila potpuno tačna. Ali pitagorejci se nisu lako predavali. Bili su dovoljno dosetljivi da postave sebi pitanje da li tačan broj uopšte postoji. Zaključili su da ne postoji, i to su domišljato dokazali.

Prema Heath-u dokaz o nesamerljivosti strane i dijagonale kvadrata, odnosno o iracionalnosti broja 2 možemo pripisati nekome od ranih pitagorejaca, i u njemu je primenjena teorija parnih i neparnih brojeva.

[9] T. Heath, A History of Greek Mathematics, 75



Slika 10

Pretpostavimo da je dijagonala kvadrata AC samerljiva sa stranom kvadrata AB i neka $p : q$ predstavlja taj odnos, pri čemu je NZD(p,q)=1, (sl.10).

Očigledno je $AC^2 : AB^2 = p^2 : q^2$, a pošto je $AC^2 = 2AB^2$, sledi $p^2 = 2q^2$.

Odavde je p^2 paran, pa je i p paran (jer ako bi p bio neparan, prema stavu 29 teorije parnih i neparnih, p^2 bi bio neparan).

Pošto je NZD(p,q)=1 znači q je neparan. Neka je $p = 2r$, sledi $4r^2 = 2q^2$ odnosno $2r^2 = q^2$. Očigledno q^2 je paran pa je na osnovu prethodnog razmatranja i q paran.

Zaključujemo da je broj q i paran i neparan, što je nemoguće. Znači pretpostavka da možemo odrediti dužinu dijagonale pomoću strane je netačna.

Pitagora se, očigledno suočio sa ovim problemom. Činjenica da se dužina dijagonale kvadrata nije mogla izraziti kao neki broj nije išla na ruku vizionaru koji je prorokovao da je sve broj. Pitagora je mogao za mnoga stoleća da ubrza otkriće realnih brojeva da je uradio nešto nama naizgled jednostavno: da je dijagonalu nekako označio, i to proglasio novom vrstom brojeva. Umesto toga, Pitagora je ustuknuo od prakse koja bi povezivala geometrijske oblike i brojeve i proglasio da se neke dužine ne mogu izraziti kao brojevi. Pitagorejci su ove dužine nazivali *alogon*, „neracionalan”, te otuda današnji naziv „iracionalan”. Reč alogon, međutim, ima dvostruko značenje. Ona takođe znači „ono o čemu ne treba govoriti”. Pitagora je nedoumicu razrešio učenjem koje se teško moglo odbraniti, pa je stoga, saglasno načelnoj strategiji tajnovitosti, zabranio sledbenicima da obznane ovaj neprijatan paradoks. Danas ljudi ubijaju iz mnogo razloga–zbog ljubavi, politike, religije, novca, ali ne i zato što je neko izbrbljao o kvadratnom korenu iz 2. Za pitagorejce je, međutim, matematika bila religija, pa je Hipas izgubio glavu pošto je pogazio zavet ćutanja.[10]

5.3.6 Ivični i dijagonalni brojevi

Pitagorejski način za nalaženje približnih vrednosti broja 2 je podrazumevao nalaženje svih rešenja jednačine:

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

Rešenja predstavljaju uzastopni parovi brojeva koje zovemo ivični i dijagonalni brojevi. Pravilo po kome se određuju ovi brojevi dao je Teon iz Smirne:

[10] Mlodinov, Euklidov prozor, 36

> *Kao izvor svih brojeva, moguće je da jedinica bude i ivica i dijagonala. Ako uzmemo dve jedinice, jednu kao ivičnu, a drugu kao dijagonalnu, tada se nova ivica formira sabiranjem ivične i dijagonalne jedinice, a nova dijagonala sabiranjem dvostruke ivične jedinice i dijagonalne jedinice.*

Naziv ivični i dijagonalni brojevi potiče otuda što odnos $a_n : d_n$ predstavlja aproksimacija odnosa ivice i dijagonale kvadrata.

Dakle, ako pođemo od ivičnog i dijagonalnog broja koji su oba jednaki 1, dobijamo da je sledeći ivični broj 2 (zbir ivičnog broja 1 i dijagonalnog broja 1) i dijagonalni broj 3 (zbir dvostrukog ivičnog broja 1 i dijagonalnog broja 1). Nastavimo li ovaj postupak sa novodobijenim brojevima dobićemo

$2 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 + 3 = 7$,

tj. sledeći ivični i dijagonalni broj su 5 i 7, pa posle njih slede 12 i 17 itd.

Glava 6

PITAGORA KAO ASTRONOM

Pitagora je među prvima tvrdio da su Zemlja i svemir sferičnog oblika. Ne zna se tačno šta ga je navelo na ovakav stav. Pretpostavlja se da je do zaključka došao posmatranjem okrugle senke u vreme pomračenja Meseca. Jedina održiva pretpostavka je da je Pitagora svoje tvrđenje zasnovao na matematičkoj ili na matematičko–estetičkoj osnovi, tj. po Pitagorinom mišljenju, Zemlja je okrugla zato što je među čvrstim telima najlepša kugla (sfera) a među figurama–krug[1]. Iz tog razloga bi, verovatno, tvrdio da su Sunce, Mesec i ostala nebeska tela verovatno sferična.

Pitagorejci su širili ideju da Zemlja nije centar sveta. Po prvi put u istoriji filozofije napuštamo središno mesto Univerzuma (Vasione) u korist neke **Centralne vatre**, nepodrobno objašnjene. Pitagorejci su je zvali **Majka bogova**. Na prvi pogled ta Centralna vatra bi, u stvari, moglo biti Sunce, što bi značilo uspostavljanje heliocentričnog sistema. Ali za mlađe pitagorejce je Centralna vatra bila nešto drugačije od Sunca, a njenu nevidljivost objašnjavali su na sledeći način: Zemlja je stalno jednom stranom okrenuta prema Suncu i samo je ta strana naseljena, što im je objašnjavalo nevidljivost Centralne vatre sa naseljene Zemljine polovine. Ova ideja je verovatno potekla od položaja Meseca, tj. toga da je sa Zemlje vidljiva uvek samo jedna strana Meseca. Oko te vatre okretalo se deset zvezda: Zemlja, Mesec, Sunce, zatim pet tada poznatih planeta - Mars , Venera, Merkur, Saturn i Jupiter, nebo fiksnih zvezda i, da bi se postigao famozni broj deset koji su pitagorejci uvrteli sebi u glavu, neko nebesko telo, nazvano Protivzemlja[2]. Aristotel u Metafizici kaže:

> *A sva slaganja koja su mogli da zapaze, u brojevima i muzici, sa pojavama na nebu i njegovim delovima i sa svemirskim redom oni su povezivali i unosili u svoj sistem; i, ako bi se negde pokazala neka praznina, oni su hitno vršili potrebna dodavanja kako bi obezbedili potpunu doslednost svoje teorije. Na primer, pošto izgleda da je dekada savršen broj i da obuhvata celokupnu prirodu brojeva, oni kažu da ima deset nebeskih tela koja se kreću; ali budući da ima devet vidljivih tela, iz ovog razloga oni pretpostavljaju deseto, antizemlju.*

Heath navodi:

> *Protivzemlja, koja prati Zemlju i okreće se u kraćoj orbiti, nevidljiva nam je, jer je Zemljina hemisfera na kojoj mi živimo okrenuta na drugu stranu u odnosu na*

[1] Laertije, Život i mišljenja istaknutih filozofa, 276
[2] Hit, Aristarh sa Samosa, Antički Kopernik, 51

protivzemlju.

Deset zvezda, kaže Pitagora, okreću se po kružnoj putanji odašiljući pri pokretu finu muziku, tzv. **harmoniju sfera**. Planete koje se kreću malom brzinom proizvode niske tonove, dok one koje se kreću velikom brzinom proizvode visoke tonove. Visoki i niski tonovi se razlikuju za oktavu. Tada se počelo verovati da u svemiru stalno traje svojevrstan koncert, koji može da čuje samo neki visokouman čovek. Učenje o harmoniji (skladu) sfera u početku Pitagori nije bilo pripisivano. Ali, kako su pitagorejci svom učitelju pripisivali čudotvorne moći, tako je i muziku, harmoniju sfera, mogao da čuje samo Pitagora, dok su se ostali uzaludno naprezali.

Izvan tih deset nebeskih orbita postoji beskonačni prostor. Jednom je Arhita, da bi dokazao postojanje beskonačnosti, izgovorio sledeću frazu:

Ako sednem na krajnju granicu Univerzuma, mogu li ili ne da ispružim ruku? Ako mogu, to znači da izvan te granice postoji još nešto prostora.[3]

Vasionski sklad i ta harmonija sfera kao univerzalni sistem sajedinstva treba da se ostvare i u ljudskom društvu tako da Pitagora svojim učenjem vrši *poporodičavanje i podruštvenjivanje vasione kao i povasionjivanje porodice i društva jer harmonija vasione silazi u domaćinstvo pojedine kuće i u domaćinstvo države.* Iz pitagorejskog shvatanja vasione razvio se heliocentrični sistem u kome se ogleda i njihova socijalno–politička misao. U pitagorejskom heliocentrizmu vidi se mesto u kome se svi konci helenskog shvatanja sveta ovde sastaju: *živa radost što je izaziva postojanje, ljubavlju ispunjeno poštovanje svemira kojim upravljaju božanske sile, veliki smisao za lepotu, meru i sklad i veoma prisno osećana milina zbog spokojstva u državi i porodici.*[4]

[3] Krešenco, Istorija grčke filozofije, 58
[4] Hit, Aristarh sa Samosa, Antički Kopernik, 53

Glava 7

PITAGORA KAO OSOBA KOJA IZJEDNAČAVA MUŠKARCA I ŽENU

Pitagorino učenje i organizacija bratstva karakteristična je i po tome što je u potpunosti izjednačila muškarca i ženu. Time je dokazano ne samo to da se ne radi o onome što je podrazumevala klasična filozofija već o nečem mnogo dubljem kao što je poštovanje ženskog principa pri čemu je učenjem o seobi duše uspostavljena i jednakost polova u najdubljem smislu. Timej u desetoj knjizi svoje Istorije priča da je Pitagora izjavio da žene koje žive sa ljudima nazivaju imenima boginja (vile, nimfe), a potom ih zovu majkama.[1] Pitagora je vezan za ženski princip-delfijska proročica Pitonija proriče njegovo rođenje[2], od delfijske sveštenice Temistokleje-Aristokleje prima znanja[3], Demetra mu preko Herakla daje lek[4], prema Hermipu njegov boravak u Hadu beleži majka[5] a on rukopise zaveštava svojoj supruzi Teano koja ih ostavlja svojoj ćerki Damo[6]. Ženski princip kao noseći, životvorni princip je za pitagorejce svetinja i sa time u skladu treba razumeti savet koji Teano daje nekoj ženi da kada ide mužu zajedno sa haljinom skine i stid a kad odlazi da ga ponovo obuče zajedno s haljinom. Upitana „Koji stid?"ona je odvratila: „Onaj zbog koga me zovu ženom."[7] Dakle, ona koja zatrudni i rađa nosi u sebi svetu prirodu materinstva i onu koja utemeljuje ženski princip; poštovanje fizičkog materinstva kao svetinje uobličava i odnos pitagorejaca prema braku. Prema shvatanju pitagorejaca, rađanje dece je dužnost a sama obljuba se posebno naglašava. Iz Teaninog odgovora povodom jedne druge prilike, jasno je da supruzi ne treba očišćenje pre nego što uđe u Demetrin hram kao što je to zahtevano u egipatskim plemenima. Za neispunjenje dužnosti ispašta se u Demetrinom podzemnom domu jer je to ogrešenje o svetinju žene. Sa druge strane, veliki značaj je imalo odbacivanje orijentalnih običaja kao što je polno opštenje sa majkom, sestrom ili ćerkom.

Povezivanje Pitagore za demetrijski princip produžava se i u drugim pojavama. Svoju pobožnost je obavljao jedino na žrtveniku Apolona životvornog na Delosu stavljajući samo

[1] Laertije, Život i mišljenja istaknutih filozofa, 270
[2] Jamblih, Vita Pyth., 2,2-3
[3] Laertije, Vitae, 8,1, 21
[4] Porphyry, antro nymph., 34
[5] Laertije, Vitae, 8,1, 41
[6] Laertije, Vitae, 8,1, 42
[7] Laertije, Vitae, 8,1, 43

pšenicu, ječam i žrtvene kolače dok je Demetri prineo zahvalnost za spoznaju teoreme u vidu bika načinjenog od pšeničnog brašna čime se jasno stavlja do znanja da je Demetra i izvor darova duha, kreativna snaga. U poštovanju zapovesti da se ne lomi hleb (kao Demetrin plod) nalazi se još jednom princip poštovanja materniteta iz čega sledi da se narodi ujedinjuju oko neizlomljenog hleba. Koliko je poštovanje demetrijskog principa imalo prevagu nad ostalima, vidi se iz činjenice da je na Pitagorinom mestu podignut Demetrin hram. Pored navedenog, pitagorejski spisi nazvani Sveta reč koje je, po tradiciji, zapisala Pitagorina majka za vreme njegovog boravka u Hadu prikazani od strane pojedinih autora kao spisi o Demetrijinim misterijama dok je sam Pitagora doveden u vezu sa Eleusinskim misterijama povezanim sa kultom Demetre i gradom Flijem koji se odlikovao Demetrinim misterijama.

Ženski, stvaralački princip pronalazimo i u podatku da je Pitagora predavanja držao isključivo noću koja je u orfizmu itekako poštovana kao pramajka svega jer hrani i odgaja mudrog Krona, starija je od svetlosti, pominje se pre dana kojim vlada. Otuda je kod pitagorejaca sveti karakter noćnih proročanstava ili proročanstava u snu kao i pojava da se ovakva proročanstva vezuju prvenstveno za žene. Samim tim što je neraskidivo vezana za materinski pricip, noć je pravda; zbog toga se obavljanje sudske službe vrši noću, žene se odevaju u crno, sedaju na zemlju i presuđuju noću.

Osnov idealnog društva pitagorejaca očitava se u njihovoj etici koju nisu odvajali od politike. Pitagora je odbacivao i tiraniju i demokratiju smatrajući da oba oblika, s obzirom da se protive svođenju na matematičke formule, sadrže u sebi nešto neharmonično i sklono samovolji i zato po njegovoj političkoj doktrini samo aristokratija uma i karaktera može upravljati državom. Pitagorina filozofija politike iznosi da nema većeg zla od anarhije kao i da, zbog toga, oni koji upravljaju treba da budu ne samo naučno tj. stručno obrazovani već i da čoveku budu prijatelji, a oni kojima se upravlja treba da budu ne samo poslušni nego i odani onima koji upravljaju. Tek ovim i ovakvim konceptom postignuta je neophodna harmonija među suprotnostima.

Bratstvo je prikupljalo i vaspitavalo najbolje i najsposobnije snage iz mnogih drugih južnoitalskih gradova a kako je glas njegovih pristalica često bio presudan, to je bratstvo vremenom postajalo država u državi.

Glava 8

PITAGORINA TEOREMA

Vratimo se Pitagorinoj teoremi, koja po mišljenju mnogih zauzima najznačajnije mesto u geometriji uopšte.

Kao što je već rečeno, ova teorema kaže da je površina kvadrata nad hipotenuzom pravouglog trougla jednaka je zbiru površina kvadrata nad katetama. Teorema je ponela Pitagorino ime jer ju je on prvi dokazao. Međutim, kako u njegovo vreme nije bilo adekvatnog materijala za zapisivanje, stečena znanja su se kod pitagorejaca prenosila usmenim putem, te ne postoji pouzdan izvor na osnovu koga bi sa sigurnošću moglo da se tvrdi kako je izgledao originalni Pitagorin dokaz. Euklid je u svojim Elementima dao dva dokaza teoreme, najpre u prvoj knjizi, dokaz koji se u potpunosti zasniva na odnosima površina, a zatim i u šestoj knjizi, dokaz koji koristi sličnost i znatno je jednostavniji. S obzirom da geometrija u vreme Pitagore nije bila dovoljno razvijena, malo je verovatno da je on koristio prvi dokaz, a ako je koristio drugi, onda on nije bio kompletan, pošto je potpunu teoriju srazmernosti dao tek Eudoks, koji je živeo dva veka posle Pitagore. Sa druge strane, vrlo je verovatno da je Pitagora najpre dokazao teoremu u slučaju jednakokrakog pravouglog trougla, pošto je taj dokaz bio poznat još Hindusima, te ga je mogao čuti na svojim putovanjima po Mediteranu. Da li je dokazao i opšti slučaj nije poznato, ali se pretpostavlja da ga je razmatrao. Tradicionalno mu se pripisuje dokaz opšteg slučaja koji je bio poznat još u drevnoj Kini.

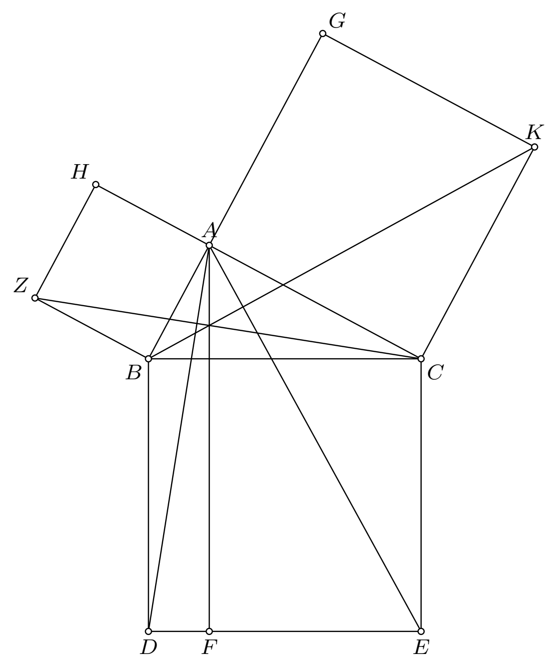
Postoje različita tumačenja zašto je Euklid izabrao da u prvoj knjizi teoremu dokaže na teži način, iako su u njegovo vreme bili poznati jednostavniji dokazi. Sa jedne strane, većina tih dokaza je podrazumevala podelu pravouglog trougla na manje, slične trouglove i korišćenje osobina proporcionalnosti za izvođenje odgovarajuće jednakosti, ali one su izložene tek u petoj knjizi, dok je sličnost obuhvaćena šestom knjigom. Sa druge strane, kako su stari Grci sve aritmetičke operacije interpretirali kroz geometriju, vrlo je verovatno da se Euklidu prvi dokaz prirodno nametnuo jer je posmatrao Pitagorinu teoremu kao odnos između površina. Prema Proklu, drugi dokaz je u potpunosti Euklidov, štaviše, to je jedini originalni Euklidov dokaz u Elementima. Prokolo kaže:

> *Ako saslušamo oni koji žele da nam pripovedaju o drevnoj istoriji, među njima ćemo naći one koji ovu teoremu pripisuju Pitagori kazujući da je on žrtvovao vola u čast svog otkrića. Ali, što se mene tiče, mada veoma cenim one koji su prvi primetili istinitost ove teoreme, još više se divim piscu Elemenata, ne samo zato što ju je načinio izvesnom zahvaljujući najsjajnijem dokazu, već i zbog toga što je nepobitnim argumentima iznudio priznanje još opštije teoreme u šestoj knjizi.*

8.1 DOKAZ IZ PRVE KNJIGE ELEMENATA

Teorema: Kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani spram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama).

Dokaz: Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom BAC. Tvrdim da je kvadrat na BC jednak kvadratima na BA i AC, (sl. 11).



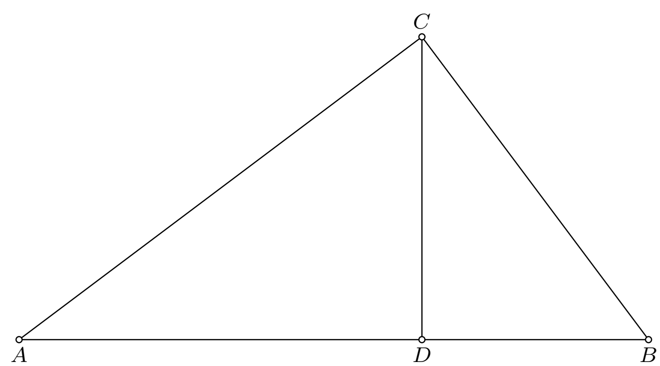
Slika 11

Neka se na BC konstruise kvadrat BDEC, a na BA, AC kvadrati AHZB, AGKC, kroz tačku A povuče se prava AF paralelna svakoj od pravih BD, CE, a zatim povuku prave AD, ZC. Pošto je svaki od uglova BAC, BAH prav, to prave AC, AH povučene nad pravom BA, kroz istu njenu tačku A, a sa raznih strana, čine susedne uglove jednake dvama pravim uglovima, pa su stoga prave CA i AH u istoj pravoj. Iz istog razloga su i prave BA i AG u istoj pravoj. Ugao DBC jednak je uglu ZBA, jer je svaki od njih prav. Pošto je strana DB jednaka strani BC, a ZB strani BA, to su dve strane DB, BA jednake stranama ZB, BC, i to odgovarajućim, i ugao DBA jednak uglu ZBC, a tada je i osnovica AD jednaka osnovici ZC, i trougao ABD jednak trouglu ZBC. A paralelogram BF je dvaput veći od trougla ABD, jer imaju istu osnovicu BD i između ostalih su paralelnih BD, AF. I kvadrat HB je dvaput veći od trougla ZBC, jer i oni imaju osnovicu ZB i između istih su paralela ZB, HG (A dvostruko od jednakog jednako je). Prema tome je paralelogram BD jednak kvadratu u HB. Na sličan način se, pomoću povučenih pravih AE, BK, može dokazati da je paralelogram CF jednak kvadratu GC. Prema tome je ceo kvadrat BDEC jednak dvema kvadratima HB, GC. A kvadrat BDEC je konstruisan na BC, a kvadrati HB, GC na BA, AC. Prema tome je kvadrat na strani BC jednak kvadratima na stranama BA, AC. Dakle, kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani spram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima nad stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama), a to je trebalo dokazati.■

8.2 PITAGORINI DOKAZI

Prema Heath-u Pitagora je dokaz naveo na jedan od tri načina:

1) Primetimo da su u sličnim trouglovima ADC, DBC, ABC, odgovarajuće strane suprotne uglu od 90° redom AC, BC, AB, (sl. 12).



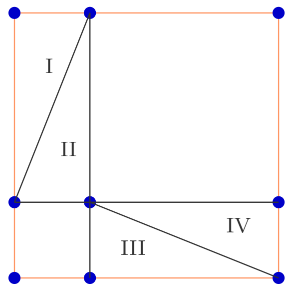
Slika 12

Površine trouglova se odnose kao kvadrati stranica, jer u trouglu ACD $P_1 = \frac{AD \cdot CD}{2}$, a u trouglu ABC je $P_2 = \frac{AC \cdot BC}{2}$. Iz sličnosti troglova ADC i ABC zaključujemo da je $CD : AD = BC : AC$, odnosno da je $AD = \frac{CD \cdot AC}{BC}$. Sada je

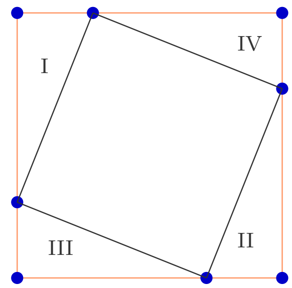
$$\begin{aligned} P_1 : P_2 = (AD \cdot CD) : (AC \cdot BC) &= (\tfrac{CD \cdot AC}{BC} \cdot CD) : (AC \cdot BC) \\ &= (AC \cdot CD^2) : (AC \cdot BC^2) \\ &= CD^2 : BC^2 \end{aligned}$$

Pošto je površina trougla ABC jednaka zbiru površina trouglova ADC i DBC sledi da je $AB^2 = AC^2 + BC^2$, što je i trebalo pokazati.■

2) Sledeći dokaz koji se pripisuje Pitagori spada u klasu geometrijskih dokaza. Uočimo kvadrat kome je stranica jednaka zbiru kateta a i b pravouglog trougla. Razložimo taj kvadrat na dva kvadrata čije su stranice a i b (njihove površine su a^2 i b^2), a preostala dva pravougaonika razložimo na četiri pravougla trougla I, II, III i IV sa katetama a i b, (slika 13a).



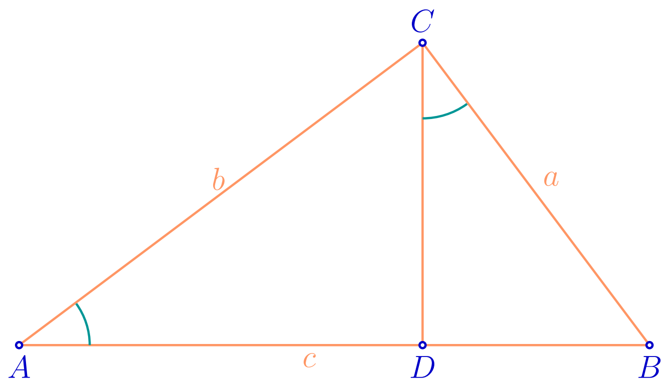
Slika 13a



Slika 13b

Taj isti kvadrat možemo razložiti na kvadrat površine c^2 i podudarne trouglove I, II, III i IV, (slika 13b). Upoređujući te slike zaključujemo da je $a^2 + b^2 = c^2$.■

3) Postoje indicije da i prvi algebarski dokaz potiče iz iste škole. Neka je D podnožje visine iz temena C pravog ugla trougla ABC, (slika 14). Tada iz sličnosti trouglova ABC i CDB sledi da je: $AB : BC = BC : BD$ pa je $BC^2 = AB \cdot BD$.



Slika 14

Takođe je $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ pa iz $AB : AC = AC : AD$ imamo da je $AC^2 = AB \cdot AD$. Sada se sabiranjem jednakosti $BC^2 = AB \cdot BD$ i $AC^2 = AB \cdot AD$ dobija:

$$BC^2 + AC^2 = AB \cdot BD + AB \cdot AD = AB \cdot (BD + AD) = AB^2. \blacksquare$$

Poslednja dva dokaza se veoma često sreću u našoj školskoj literaturi.

8.3 ZANIMLJIVI DOKAZI

Pitagorina teorema je vekovima služila kao inspiracija za nove matematičke dokaze, koje su pronalazili i ljudi koji nisu bili profesionalni matematičari. U knjizi Pitagorino tvrđenje (The Pythagorean Proposition) Iliše Skota Lumisa (engl. Elisha Scott Loomis), izvorno objavljenoj 1927. godine, koja je dopunjena novim dokazima 1940. godine, moguće je naći sve poznate dokaze do njenog objavljivanja, ukupno njih 371. Ti dokazi se dele na geometrijske i algebarske, a kasnije su ponuđeni i dokazi bazirani čak i na integralnom računu i zakonima mehanike. U zadnje vreme ima i dosta tzv. vizuelnih dokaza koji predstavljaju interpretacije geometrijskih dokaza kao niza uzastornih slika kod kojih su odgovarajuće površine obojene istim bojama ili kao kompjuterske animacije.

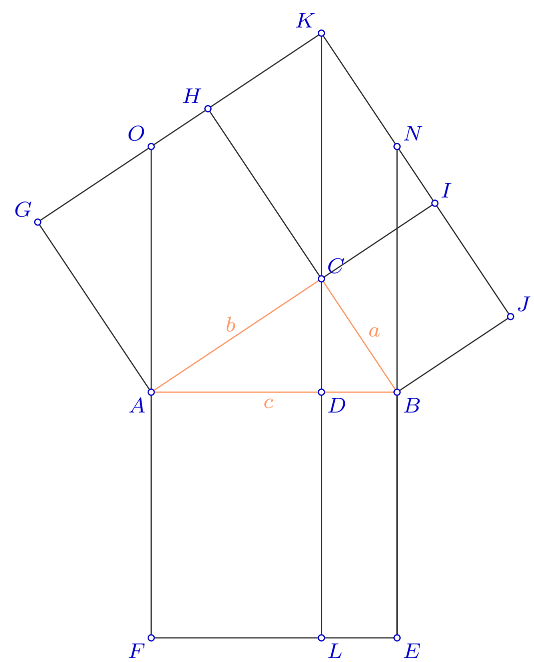
Između ostalih u ovoj knjizi su navedeni Pitagorin i Euklidov dokaz, zatim najkraći i najduži dokaz koji se pripisuju Ležandru, Ptolomejev, Leonardov, Hajgensov i Lajbnicov dokaz kao i dokaz Džejmsa Garfilda, iz vremena pre nego što je postao predsednik SAD.

8.3.1 Geometrijski dokazi

8.3.1.1 Tusijev dokaz

Tusi, rođen u 13. veku, bio je persijski astronom, biolog, hemičar, matematičar, filozof, naučnik i teolog. Bio je prvi koji je pisao rad o trigonometriji nezavisno od astronomije, prvi koji je naveo šest posebnih slučajeva pravog trougla u sfernoj trigonometriji.

Njegov dokaz je objavljen 1594. godine u Rimu, u prevodu Euklidovih Elemenata sa Arapskog jezika.



Slika 15

Neka je dat pravougli trougao ABC, i neka su nad njegovim stranicama konstruisani kvadrati i duži kao na slici 15. Kako je $\triangle KCI \cong \triangle ABC$ imamo da je: $KC = AB$, $\angle KCI = \angle ABC = \angle ACD$, pa zaključujemo da su tačke K, C, D, L kolinearne i važi $B(K, C, D, L)$. Uočavamo jednakosti površina sledećih figura: $P_{FLDA} = P_{ACKO} = P_{ACHG} = b^2$. Analogno je $P_{LEBD} = P_{CBNK} = P_{BJIC} = a^2$.

S obzirom da je:

$$c^2 = P_{FEBA} = P_{FLDA} + P_{LEBD}$$

Dobija se da je:

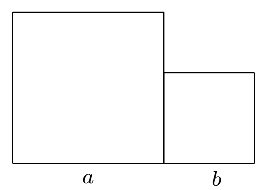
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.1.2 Quarrein dokaz

Quarra je bio matematičar, fizičar, astronom i prevodilac koji je živeo u Bagdadu u drugoj polovini devetog veka. Što se matematike tiče, poznat je po brojim otkrićima iz oblasti algebre i geometrije, vezanim za integralni račun, teoreme u sfernoj, analitičkoj i neeuklidskoj geometriji. U teoriji brojeva bavio se prijateljskim brojevima, tj. nalaženjem opšte jednačine za njihovo određivanje.

Dokaz Thabita ibn Quarre sačuvan je u biblioteci Aya Sofya Musium u Turskoj i izgleda ovako:

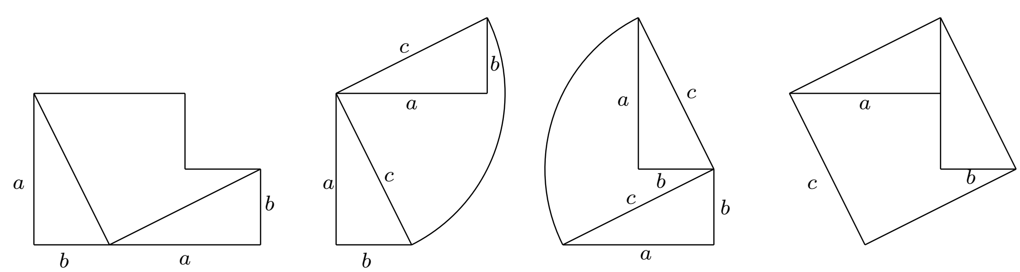
Neka imamo dva kvadrata čije su stranice a i b i neka se nalaze jedan pored drugog, kao na slici 16.



Slika 16

Površina prvog je a^2, drugog b^2, tako da je zbir njihovih površina $a^2 + b^2$.

Na početku nismo imali trougao, ali sada smo docrtali dva, ova sa katetama a i b i hipotenuzom c. Primećuje se da je deo koji je bio zajednički za dva kvadrata uklonjen. Sada postoje dva trougla i površina čudnog oblika.



Slika 17

Kao poslednji korak, rotiraju se trouglovi za 90°, svaki oko svog gornjeg temena. Desni je rotiran u pravcu kretanja kazalje, dok je levi rotiran u suprotnom smeru. Očigledno je da je rezultujuci oblik kvadrat stranice c i povrsine c^2, (slika 17). Dakle, $a^2 + b^2 = c^2$, što je i trebalo dokazati.

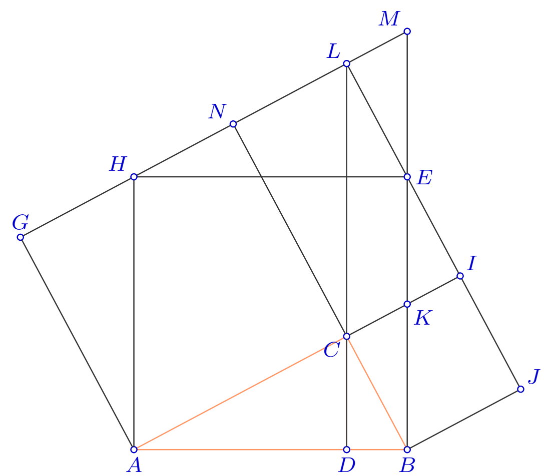
8.3.1.3 Hofmanov dokaz

Alan Hofman, rođen 30.05.1924. u Njujorku, je matematičar i saradnik IBM-a u penziji. Takođe je urednik magazina *Linear Algebra and its Applications (Linearna algebra i njena primena)*, i ima nekoliko patenata. Zajedno sa Robertom Singltonom konstruisao je Hoffman-Singleton grafik koji predstavlja jedinstveni Murov grafik stepena 7 i dijametra 2.

U oblasti Pitagorine teoreme, dao je sledeća dva dokaza:

I dokaz: Neka je nad hipotenuzom AB konstruisan kvadrat ABEH, a nad katetama BC i AC redom kvadrati BCIJ i ACNG, kao na slici 18. Produžimo odsečak BE, do preseka sa pravom GN u tački M. Mogu se uočiti jednakosti površina sledećih figura:

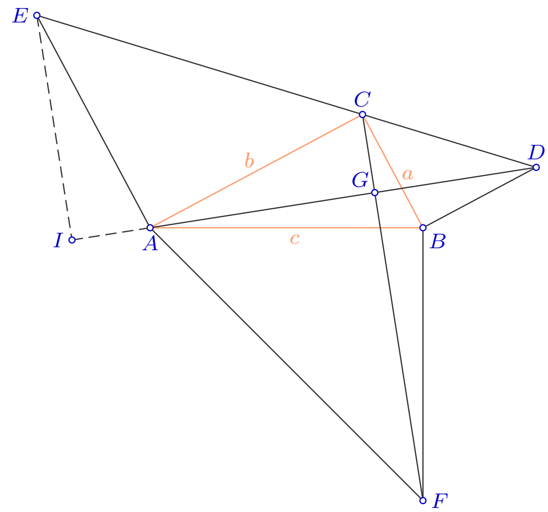
$$P_{CKLM} = P_{CBEL} = P_{CBJI} = a^2$$
$$P_{ACLH} = P_{ACNG} = b^2$$
$$P_{AKMH} = P_{ABEH} = c^2$$



Slika 18

Sada imamo još da je: $P_{AKMH} = P_{ACLH} + P_{CKML}$ tj. $c^2 = a^2 + b^2$.

II dokaz: Neka je $BD \perp BC$ i $BD = BC$, a $AE \perp AC$ i $AE = AC$. Takođe neka je $BF \perp AB$ i $BF = AB$, (sl. 19). Zaključujemo da su tačke E, C i D kolinarne. Rotacijom za 90° $\triangle ABD$ se preslikava u $\triangle FBC$ pa sledi da su duži AD i CF podudarne i međusobno normalne. Posmatrajmo te duži kao osnovice trouglova ADE i CFA. Ta dva trougla imaju jednake i visine EI i AG (zbog $\triangle AEI \cong \triangle CAG$), što navodi na zaključak da je $P_{ADE} = P_{FCG}$. Sparivanjem odgovarajućih po površinama jednakih trouglova dobija se sledeća jednakost: $P_{EABD} = P_{AFBC}$.



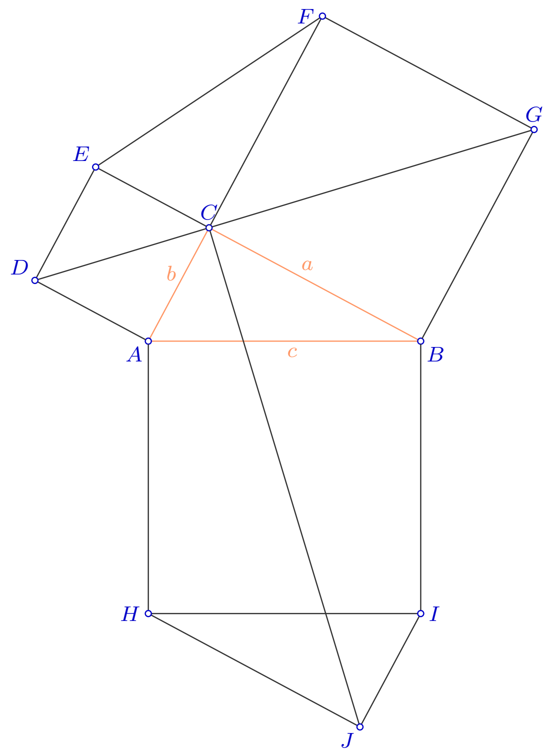
Slika 19

Kako je $\triangle ABC$ zajednički za ova dva trougla, to njegovim odstranjivanjem, možemo zaključiti da je: $P_{BDC} + P_{AEC} = P_{ABF}$ tj. $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$, što na kraju posle množenja sa 2 daje tvrđenje teoreme.

8.3.1.4 Da Vinčijev dokaz

Leonardo da Vinči (1452.–1519.) bio je italijanski renesansni arhitekta, pronalazač, inženjer, vajar i slikar. Ovaj *univerzalni genije* je poznat po svojim remek–delima, kao što su „Tajna večera” i „Mona Liza”, a njegovi izumi se i danas koriste u modernoj tehnologiji, iako se u njegovo doba nisu primenjivali. Radio je kao dizajner i direktor dvorskih festivala, gde i započinje svoje prve sistematske naučne studije bazirane na praktičnim iskustvima iz anatomije, fizike, matematike i botanike. Pomogao je i razvoju anatomije, astronomije i građevinarstva.

U oblasti matematike se bavio i Pitagorinom teoremom, a njegov dokaz je publikovao 1769. godine Tempelhof, pa je ovaj dokaz poznat i kao Tempelhofov.



Slika 20

Nad stranicama pravouglog trougla konstruišemo kvadrate kao na slici 20. Uočimo još i trouglove $\triangle EFC$ i $\triangle HIJ$ podudarne sa $\triangle ABC$ pri čemu je $JH = BC$. Imamo jednakosti sledećih površina:

$$P_{CJHA} = P_{GDAB} = P_{JCBI}.$$

Takođe je:

$$P_{DEFG} = P_{DABG}$$

pa je i:

$$P_{ABGFED} = P_{AHJIBC}.$$

Ako iz prvog šestougla izbacimo trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle FEC$, a iz drugog $\triangle ABC$ i $\triangle IHJ$, dobija se:

$$P_{ACED} + P_{BGFC} = P_{ABIH}$$

to jest

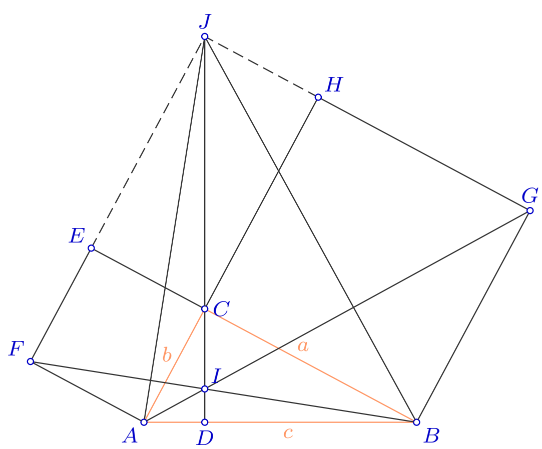
$$b^2 + a^2 = c^2.$$

8.3.1.5 Renanov dokaz

Ernest Renan, rođen u 19. veku, bio je francuski stručnjak za srednjeistočne drevne jezike i civilizacije, filozof i pisac. Sveštenici su ga učili matematiku i latinski jezik. Najpoznatiji je po svojim uticajnim istorijskim radovima o ranom hrišćanstvu i političkim teorijama, koje se posebno tiču nacionalizma i nacionalnog identiteta.

Svoj dokaz teoreme izvodi na sledeći način:

Posmatrajmo kvadrate $ACEF$ i $BGHC$ nad katetama pravouglog trougla ABC. Neka je J presečna tačka pravih EF i GH. Vidimo da je $\triangle CJE \cong \triangle ABC$, a onda je $CJ = AB$. Znači da je $\triangle FAB \cong \triangle ACJ$, a takođe i $\triangle GBA \cong \triangle CBJ$.



Slika 21

Primetimo da su po parovima normalne sledeće duži: $JD \perp AB$, $BF \perp AJ$ i $AG \perp BJ$. Znači prave JD, BF, AG sadrže visine trougla $\triangle ABJ$, pa se prema tome seku u jednoj tački, (sl 21). Možemo izračunati sledeće površine:

$P_{ACJ} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot HJ = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b = \frac{1}{2}b^2$ i $P_{BCJ} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EJ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2}a^2$ pa je

$$P_{ACJ} + P_{BCJ} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Takođe je: $P_{ACJ} = \frac{1}{2} \cdot CJ \cdot AD$ i $P_{BCJ} = \frac{1}{2} \cdot CJ \cdot BD$, a njihov zbir je

$$P_{ACJ} + P_{BCJ} = \frac{1}{2} \cdot CJ \cdot AD + \frac{1}{2} \cdot CJ \cdot BD = \frac{1}{2}CJ(AD + BD) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot c = \frac{1}{2}c^2$$

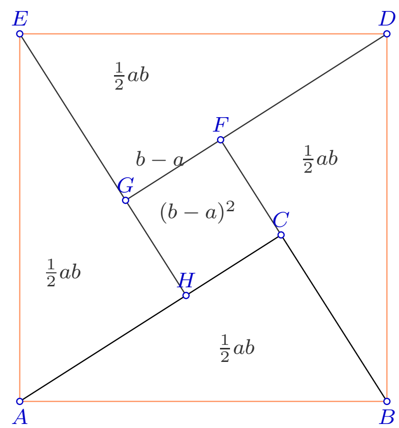
Dakle važi: $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}c^2$ tj.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.1.6 Bhaskarin dokaz

Bhaskara (1114.–1185.) je bio Indijski matematičar i astronom. Navodno je bio vodeći u astronomskoj observatoriji u Ujjain-u, vodećem matematičkom centru antičke Indije. Naročito je poznat po otkriću principa diferencijalnog računa i njegove primene za rešavanje astroloških problema i proračuna. Takođe je dao doprinos kod aritmetike, algebre i trigonometrije.

Jedan od najupečatljivijih dokaza je svakako dokaz ovog velikog indijskog matematičara. On je uz crtež, kao na slici 22, samo napisao *Pogledaj!*



Slika 22

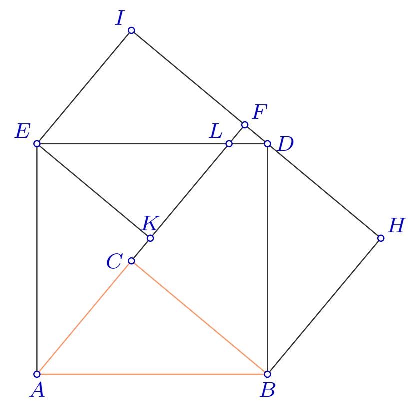
Površina kvadrata je razložena na četiri pravougla trougla i jedan kvadrat. Prema tome je: $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b-a)^2$. Posle sređivanja se dobija:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

8.3.1.7 Maregov dokaz

Marego, matematičar koji je živeo u 19. veku, je 1887. godine dokazao teoremu na sledeći način:

Posmatrajmo kvadrate $ABDE$ i $BHFC$ sa površinama c^2 i a^2, (slika 23). Neka je $EK \parallel FH$ i $EI \parallel CF$, pa je četvorougao $IEKF$ kvadrat površine b^2.



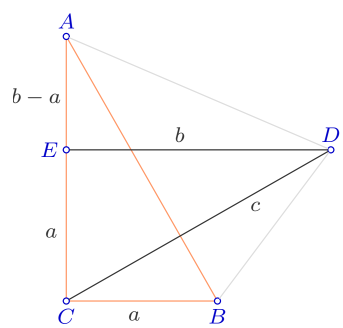
Slika 23

Ako od petougla $AEIHB$ odstranimo prvo trouglove ABC i AEK, ostaju dva kvadrata sa ukupnom površinom $a^2 + b^2$. Ako pak odstranimo trouglove DBH i EDI dobija se kvadrat površine c^2. Kako su sva četiri trougla koja smo odbacili podudarni, sledi da je:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.1.8 Kavamurin dokaz

John Kawamura je student primenjene matematike na Brown Univerzitetu. Sledeći dokaz poslao je profesoru Krisu Dejvisu sa Oklanda. Dokaz je objavljen u časopisu *Mathematics teacher* aprila 2005. godine.



Slika 24

Četvorougao $ACBD$ ima normalne dijagonale, (slika 24.), pa je:

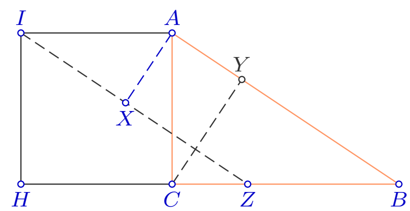
$$\frac{c^2}{2} = P_{ADCB} = P_{CBD} + P_{ACD} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Posle množenja sa 2, dobija se:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

8.3.1.9 Wernerov dokaz

Werner, namački matematičar i filozof, živeo je u devetnaestom veku. U oblasti matematike, teoremu je 1855. dokazao, a dokaz se nalazi u Arhiv. d. Math. u Physics.



Slika 25

Konstruišimo kvadrat $CAHI$ nad AC. Povucimo IZ paralelno sa AB i uzdignimo normale AX i CY na AB, (slika 25). Pošto je $IA \| HB$ zaključujemo da kvadrat IACH i četvorougao IZBA imaju iste površine, jer su nad istom osnovicom IA i imaju istu visinu AC. Dakle, $a^2 = BA \cdot AX$ (jer je to površina paralelograma $IZBA$).

Kako je $IA = AC$ to su podudarni i trouglovi $\triangle IAX$ i $\triangle AYC$ pa sledi $AX = AY$.

Dakle, $a^2 = BA \cdot AY$.

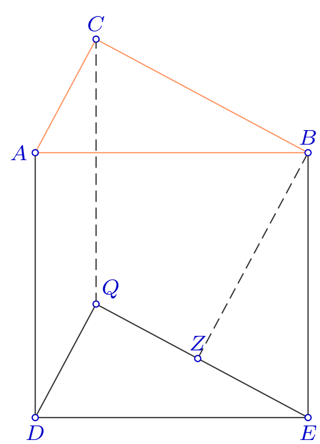
Analogno dobijamo da je $B^2 = BA \cdot BY$.

Iz prethodne dve jednakosti zaključujemo da je

$a^2 + b^2 = BA \cdot AY + BA \cdot BY = BA(AY + BY) = c^2$.

8.3.1.10 Fabreov dokaz

Fabre je rođen u Francuskoj u 19. veku. Bio je nastavnik, fizičar, hemičar i botaničar. Najpoznatiji je po otkrićima iz oblasti entomologije, nauke o insektima, i smatra se ocem ove nauke. U oblasti matematike teoremu je 1888. godine ovako dokazao:



Slika 26

Neka je konstruisan kvadrat nad stranicom AB i neka je to kvadrat $ABED$. Odredimo tačku Q tako da je: $CQ \parallel AD$ i $CQ \cong AD$, (slika 26).

U paralelogramu $BCEQ$ visina $BZ = QE$ jer su podudarna dva pravougla trougla $\triangle QED$ i $\triangle ZBE$.

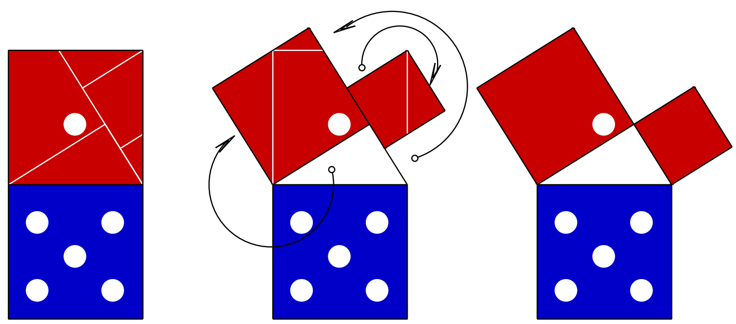
Stoga je površina paralelograma $BCQE$ jednaka a^2, a površina paralelograma $CADQ$ jednaka b^2.

Zato je:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= P_{ABEQD} + P_{ABC} \\ &= P_{ABEQD} + P_{QED} \text{ (jer su } \triangle ABC \cong \triangle QED) \\ &= P_{ABED} \\ &= c^2 \text{ tj. } a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

8.3.1.11 Pacekov dokaz

Dokaz Maria Pacek-a je poznatiji pod imenom Cracked Domino, (slika 27).



Slika 27

Ovaj dokaz poslat e-mailom bio je propraćen sledećom porukom:

Ovaj novi, neverovatni i ekstremno elegantan dokaz verovatno najosnovnije teoreme u matematici je superiorniji u odnosu na sve dosad poznate nauci uključujući Chinese i James A. Garfield-ov zato sto je direktan, ne uključuje formule i čak ga i predškolska deca mogu razumeti. Verovatno je identičan izgubljenom originalnom, ali ko to može dokazati?

8.3.1.12 Ejrijev dokaz

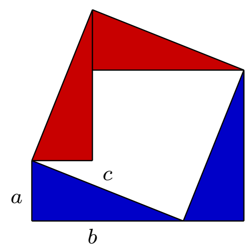
George Biddell Airy, rođen u 19. veku, bio je engleski matematičar i astronom. Njegova mnoga dostignuća uključuju rad na temu planetarnih orbita. Njegova reputacija bila je ukaljana optužbama da je, zbog njegove neaktivnosti, Britanija izgubila priliku da bude prioritetna u otkriću Neptuna.

Svoj dokaz je formulisao na jako zanimljiv način, u stihu koji je bio ispisan na pratećoj slici (sl. 28), i koji u originalu glasi:

I am, as you can see,
$a^2 + b^2 - ab$
When two triangles on me stand,
Square of hypothenuse is plann'd
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read.

što bi se moglo prevesti na srpski jezik sa:

Ja sam, kao što se vidi, a^2+b^2-ab. Kada na meni stoje dva trougla, dobija se kvadrat nad hipotenuzom. Ali, ako ja stojim na njima dobijaju se kvadrati nad katetama.



Slika 28

Ideja dokaza je da se uoči beli petougao koji je zajednički element za obe strane jednakosti. Na priloženoj slici on je dobijen tako što su kvadrat stranice a i kvadrat stranice b postavljeni na istu pravu i naslonjeni jedan na drugi, a zatim su im oduzeta dva plava pravougla trougla čije su katete dužina a i b. Površina tog petougla je upravo a^2+b^2-ab. Ukoliko se na njega nadovežu dva crvena trougla podudarna sa plavim trouglovima, površina tog drugog lika će biti c^2 čime je teorema dokazana.

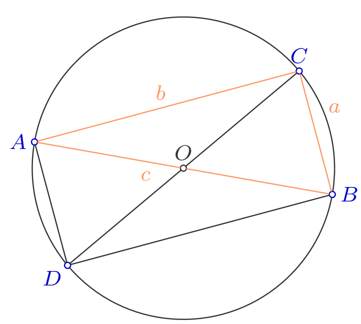
8.3.2 Algebarski dokazi

8.3.2.1 Dokaz primene Ptolomejeve teoreme

Ptolomejeva teorema za tetivni četvorougao glasi:

Zbir proizvoda naspramnih stranica tetivnog četvorougla jednak je proizvodu njegovih dijagonala.

Neka je oko pravouglog trougla opisana kružnica. Na toj kružnici odredimo tačku D simetričnu tački C u odnosu na centar opisane kružnice O, (slika 29). Centralnom simetrijom sa centrom u tački O trougao ABC se preslikava u trougao BAD pa su ta dva trougla podudarni.



Slika 29

Na četvorougao $ADBC$ primenimo Ptolomejevu teoremu:

$$AD \cdot BC + AC \cdot BD = AB \cdot CD$$

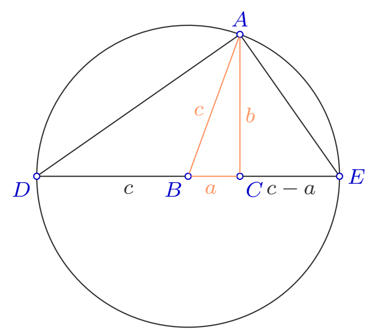
tj.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.2.2 Dokaz korišćenjem Euklidovog stava

Dokaz koji se izvodi korišćenjem Euklidovog stava da je hipotenuzina visina geometrijska sredina odsečaka koje ona pravi na hipotenuzi.

Neka je sa centrom u temenu B konstruisana kružnica poluprečnika c kao na slici 30.



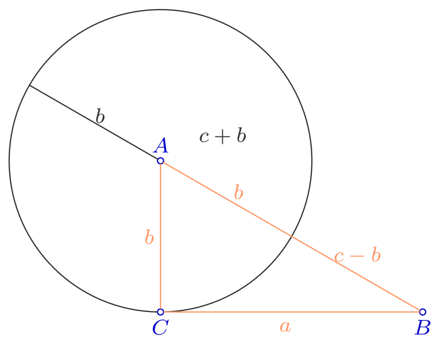
Slika 30

Produžimo katetu BC do preseka sa kružnicom. Dobijamo tačke D i E, tako da je trougao ADE pravougli sa pravim uglom u temenu A. Tada je $AC^2 = DC \cdot CE$, odnosno $b^2 = (c + a)(c - a)$ što posle sređivanja daje:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.2.3 Hoenov dokaz

Dr Larry Hoehn je profesor matematike na Univerzitetu u Austin-u u SAD-u. Svoj dokaz primenom potencije tačke u odnosu na krug objavio je 2000. godine u časopisu *Math gazette*.



Slika 31

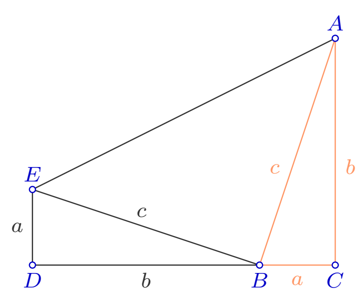
Sa slike 31 se vidi da je potencija tačke B jednaka: $a^2 = (c-b)(c+b)$ pa je:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.2.4 Garfildov dokaz

James Abram Garfield (1831.–1881.) je bio američki naučnik i političar, poznat kao 20. predsednik SAD-a i drugi predsednik koji je ubijen u atentatu. Garfield je odrastao u državi Ohio, gdje je brzo dobio reputaciju vunderkinda i osigurao obrazovanje na nekim od najprestižnijih institucija u SAD. Pokazao je veliku sklonost prema gotovo svim naučnim disciplinama, ali i prema stranim jezicima.

Njegov dokaz je prezentovan 1876. godine i izgleda ovako:



Slika 32

Postavimo dva podudarna pravougla trougla kao na slici 32. Tada je prema formuli za površinu trapeza $P_{AEDC} = \frac{a+b}{2}(a+b)$. S druge strane je:

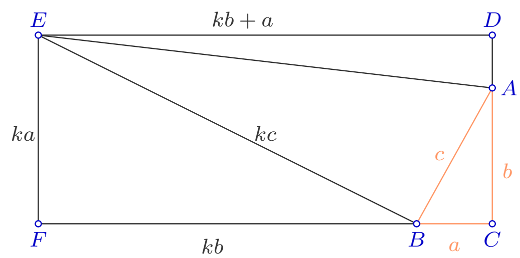
$$P_{AEDC} = P_{BED} + P_{ABC} + P_{AEB} = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Izjednačavanjem ovih površina i posle množenja sa 2 dobija se jednakost:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.3.2.5 Hoenov dokaz

Leri Hoen je u časopisu *The Mathematics Teacher*, 1997. godine, objavio i ovaj zanimljiv dokaz. Neka za katete pravouglog trougla i za neki prirodan broj k važi $b > a, ka > b$. Možemo posmatrati površine figura kao na slici 33.



Slika 33

Imamo da je:

$$P_{FCDE} = P_{FBE} + P_{ABE} + P_{ABC} + P_{ADE} \text{ tj.}$$

$$ka(kb + a) = \frac{ka \cdot kb}{2} + \frac{kc \cdot c}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{(kb+a)(ka-b)}{2}$$

što posle sređivanja i kraćenja sa $\frac{k}{2}$ daje tvrđenje teoreme:

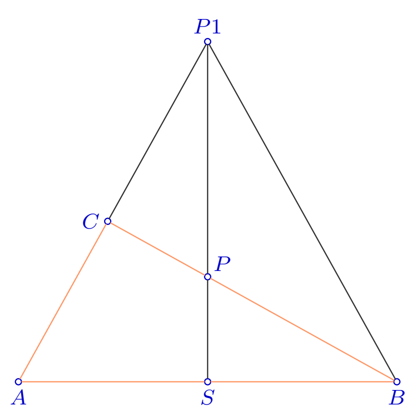
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ako u o vom dokazu uzmemo da je $k = 1$, dokaz se svodi na Garfildov.

8.3.2.6 Havkinsov dokaz

Cecil Hawkins, engleski matematičar, koji je živeo s početka 20. veka i koji je radio na Univerzitetu u Austinu, je 1909. godine teoremu ovako dokazao:

Neka je dat pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C i neka je iz središta S hipotenuze povučena normala do preseka P_1 sa produženom katetom AC, (slika 34). Sa P označimo presek normale SP_1 sa katetom BC. Površina četvorougla $APBP_1$ može se izracunati na dva načina.



Slika 34

Sa jedne strane površina četvorougla $APBP_1$ je jednaka zbiru površina podudarnih trouglova APP_1 i BPP_1 koji imaju zajednicku osnovicu PP_1 i visine $AS = BS = \frac{c}{2}$.

Dakle, $P_{APBP_1} = \frac{PP_1 \cdot \frac{c}{2}}{2} + \frac{PP_1 \cdot \frac{c}{2}}{2} = PP_1 \cdot \frac{c}{2}$ (1)

Buduci da je trougao CPP_1 slican trouglu ABC, sledi: $PP_1 = k \cdot c, CP_1 = k \cdot a, PC = k \cdot b$ (2), gde je k faktor proporcionalnosti razlicit od nule i gde su c, a i b merni brojevi dužina stranica AB, BC i AC respektivno, datog pravouglog trougla ABC. Iz (1) i (2) zaključujemo da je $P_{APBP_1} = \frac{k \cdot c^2}{2}$.

Sa druge strane površina četvorougla $APBP_1$ je jednaka zbiru površina pravouglih trouglova APC i CBP_1. Prema ovome imamo da je

$$P_{APBP_1} = P_{APC} + P_{BCP_1} = \frac{b \cdot PC}{2} + \frac{a \cdot CP_1}{2}.$$

Kako je $PC = k \cdot b$ i $CP_1 = k \cdot a$, to je $P_{APBP_1} = \frac{k \cdot b^2}{2} + \frac{k \cdot a^2}{2}$. Zaključujemo da je $\frac{k \cdot c^2}{2} = \frac{k \cdot b^2}{2} + \frac{k \cdot a^2}{2}$, tj. da je $c^2 = a^2 + b^2$, što je i trebalo dokazati.

8.4 OBRATNA PITAGORINA TEOREMA

Kao što je već rečeno, Pitagorina teorema se može formulisati na sledeći način: Ako je trougao ABC pravougli, sa pravim uglom kod temena C, onda je zbir kvadrata nad stranicama AC i BC jednak kvadratu nad stranicom AB, odnosno važi da je $a^2 + b^2 = c^2$.

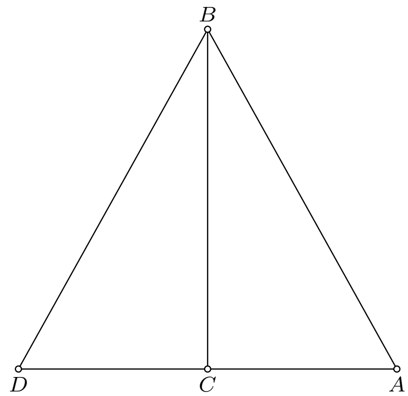
Postavlja se pitanje da lizaži i obrnuti smer ove teoreme, tj. ako je u nekom trouglu ABC zadovoljen uslov

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

da li je tada je taj trougao pravougli sa pravim uglom kod temena C. Odgovor nam daje obrnuta Pitagorina teorema.

Teoremu obrnutu Pitagorinoj nalazimo i u *Elementima*, u 48. stavu prve knjige, koju je Euklid formulisao na sledeći način: **Ako je kod trougla kvadrat na jednoj strani jednak kvadratima na ostalim dvema stranama, onda je ugao koji obrazuju ove dve strane prav.**

Dokaz: U trouglu ABC kvadrat na jednoj njegovoj strani BC jednak je kvadratima na BA, AC. Tvrdim da je ugao BAC prav.



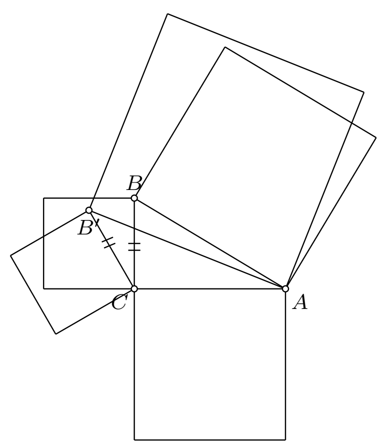
Slika 35

Neka se provuče kroz tačku C prava CD upravna na BC, prenese CD jednako AC i spoje tačke D i B, (slika 35). Pošto je DC jednako CA, onda je kvadrat na DC jednak kvadratu na AC. Ako se svakom od njih doda kvadrat na BC, biće kvadrati na CD, BC jednaki kvadratima na CA, CB. Ali kvadratima na CA, CB jednak je kvadrat na DB, jer je ugao DCB prav. I kvadratima na CA, CB jednak je kvadrat na AB, jer je to pretpostavljeno. Prema tome je kvadrat na DB jednak kvadratu na AB, a stoga je i strana DB jednaka strani AB. Pošto je strana DC jednaka strani CA, a BC je zajednička strana, to su dve strane DC, BC jednake dvema stranama CA, BC, a i osnovica BD jednaka osnovici AB. Odatle je ugao DCB jednak uglu ACB. Ali ugao DCB je prav, pa je i ugao ACB prav.

Dakle, ako je kod trougla kvadrat na jednoj strani jednak kvadratima na ostalim dvema stranama, onda je ugao koji obrazuju ove dve strane prav. A to je i trebalo dokazati.[1]

Da važi obrat Pitagorine teoreme pokazuje i sledeći primer:
Primer 1: Pretpostavimo da je u trouglu ABC zadovoljeno:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$



Slika 36

[1] Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, 84

Konstruišimo trougao $AB'C$ pri čemu je ugao kod vrha C tupi, tj. veći od pravog ugla, a stranice $B'C$ i BC jednake, (slika 36). Posmatramo trouglove ABC i $AB'C$. Pošto je naspram većeg ugla duža stranica zaključujemo da je stranica AB' veća od stranice AB pa je samim tim i kvadrat konstruisan nad stranicom AB' veći (po površini) od kvadrata konstruisanog nad stranicom AB pa je:

$$AC^2 + BC^2 = AC^2 + BC'^2 = AB^2 < AB'^2,$$

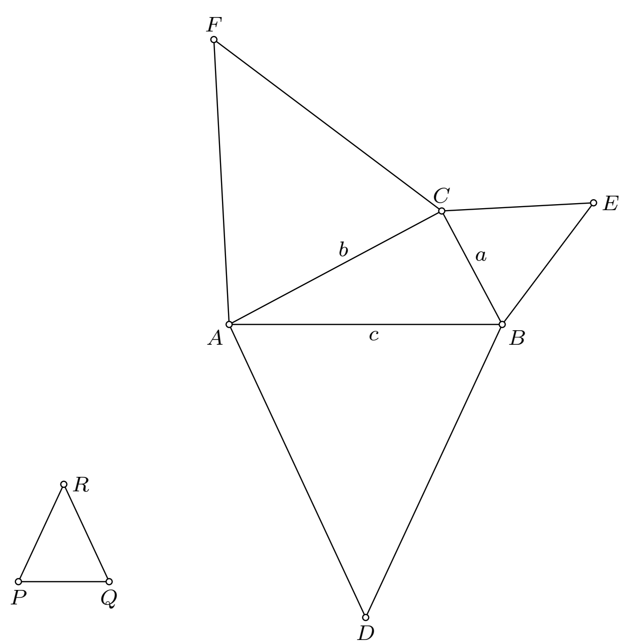
što je kontradikcija i time zaključujemo da je polazna pretpostavka da je ugao kod temena C tup pogrešna iz čega sledi da je ugao kod temena C prav.

8.5 UOPŠTENJA PITAGORINE TEOREME

8.5.1 Slične figure nad stranicama pravouglog trougla

Pitagorina teorema se može uopštiti na različite načine, a najčešća zabluda vezana za nju jeste da su kvadrati jedine geometrijske figure koje se mogu konstruisati nad stranicama pravouglog trougla, a da teorema važi. To možemo pokazati na sledećim primerima.

Neka je u ravni pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruisan proizvoljan jednakokraki trougao $\triangle PQR$ sa osnovicom $PQ = 1$ i neka je njegova površina jednaka p. Nad stranicom pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruišemo trouglove slične trouglu $\triangle PQR$, (slika 37).



Slika 37

Za osnovice ovih jednakokrakih trouglova važe sledeće proporcije:

$$PQ : AB = 1 : c,\ PQ : BC = 1 : a,\ PQ : AC = 1 : b,$$

Pošto su trouglovi ABC, CBE, ACF slični trouglu PQR biće i njihove visine proporcionalne stranicama c, a, b a samim tim će i površine biti proporcionalne sa c^2, a^2, b^2. Dakle, važiće:

$$P_{ABD} = c^2 p,\ P_{BCE} = a^2 p,\ P_{CAF} = b^2 p,$$

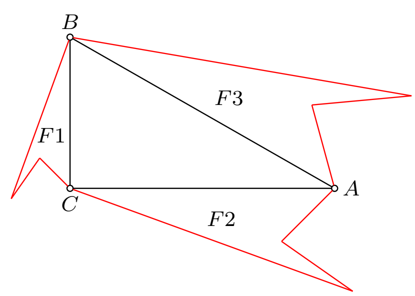
$$P_{ABD} = c^2 p = (a^2 + b^2)p = a^2 p + b^2 p = P_{BCE} + P_{CAF}$$

Ako se uzme u obzir da se svaki pravilan n-tougao može razložiti na n podudarnih jednakokrakih trouglova, sa osnovicom jednakom stranici n-tougla i vrhom u njegovom centru, dolazimo do tvrđenja:

Zbir površina pravilnih n-touglova konstruisanih nad katetama pravouglog trougla jednak je površini odgovarajućeg pravilnog n-tougla konstruisanog nad hipotenuzom tog pravouglog trougla.

Važi i opštije tvrđenje:

Zbir površina sličnih geometrijskih figura konstruisanih nad katetama pravouglog trougla jednak je površini odgovarajuće slične figure konstruisane nad hipotenuzom tog pravouglog trougla, (sl. 38).



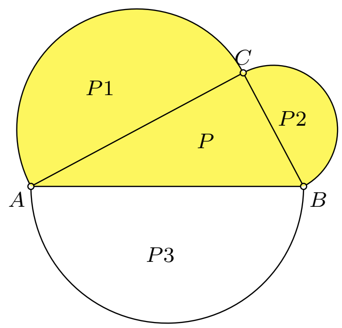
$P(F1) + P(F2) = P(F3)$

Slika 38

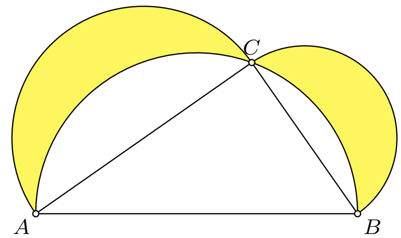
Kvadratura lunule

Iz relacije $c^2 = a^2 + b^2$ sledi da je $\pi c^2 = \pi a^2 + \pi b^2$, pa je površina kruga čiji je poluprečnik hipotenuza pravouglog trougla jednak zbiru površina dva kruga kojima su poluprečnici katete tog trougla. Dakle, i površina polukruga nad hipotenuzom jednaka je zbiru površina polukrugova nad katetama.

Neka je P površina pravouglog trougla ABC, a P_1, P_2 površine polukrugova konstruisanih nad katetama tog trougla i P_3 površina polukruga konstruisanog nad odgovarajućom hipotenuzom kao na slici 39.



Slika 39



Slika 40

Važiće da je:

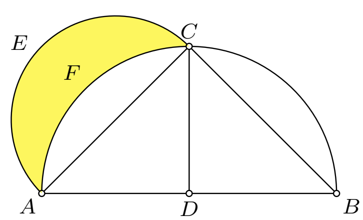
$$P_3 = P_1 + P_2$$

Na istoj slici površina obojene figure je $P + P_1 + P_2$. Na slici 40, obojeni deo figure će biti $P + P_1 + P_2 - P_3 = P$.

Dakle, zbir površina dva obojena polumeseca biće jednak površini pravouglog trougla nad kojim su konstruisani. Do ovog rezultata došao je starogrčki matematičar Hipokrat, pa su po njemu poumeseci nazvani Hipokratove lunule. Istorijski ovo je prvo ujednačavanje površina pravolinijske i krivolinijske figure. Ovaj primer dao je lažnu nadu da će jednoga dana biti rešen i problem kvadrature kruga, tj. da će samo konstrukcajama pravih i krugova biti konstruisan kvadrat koji je po površini jednak zadatom krugu. Hipokratov tekst je izgubljen, a o njegovom otkriću „kvadrature lunulešvedoči Aleksandar iz Afrodizije. On u svom citatu, sačuvanom u Simplikijevim komentarima Aristotelove *Fizike* kaže sledeće:

Pretpostavimo da je AB prečnik kruga kojem je D središte, a AC i CB ivice kvadrata koji je upisan u taj krug.

Nad ivicom AC, kao nad prečnikom opisan je polukrug, AEC (slika 41).



Slika 41

Povežimo tačke C i D.

Sada, kako je $AB^2 = 2AC^2$, a krugovi (pa stoga i polukrugovi) jedan prema drugome odnose se kao kvadrati na njihovim prečnicima, biće:

$$(\text{polukrug } ACB) = 2\ (\text{ polukrug } AEC).$$

Ali,

$$(\text{polukrug } ACB) = 2\ (\text{ kvadrant } ADC),$$

pa je

$$(\text{polukrug } AEC) = (\text{ kvadrant } ADC).$$

Ako sada oduzmemo zajednički deo, odsečak AFC, dobićemo da je

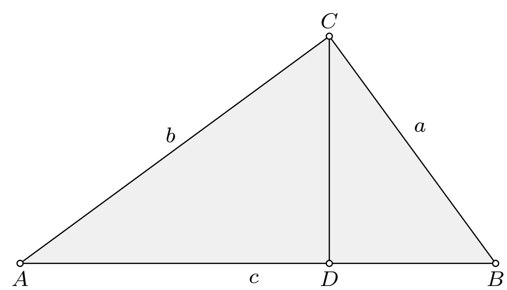
$$(\text{lunula } AECF) = \triangle ACD,$$

pa je tako dobijena kvadratura lunule.[2]

8.5.2 Kosinusna teorema

Jedna od značajnih generalizacija Pitagorine teoreme je kosinusna teorema, koja, pored pravouglih,važi i za oštrougle i tupougle trouglove, odnosno može se primeniti na proizvoljan trougao.

Neka je ABC proizvoljan trougao. Označimo sa a, b, c dužine njegovih stranica a sa α, β, γ njima odgovarajuće uglove. Neka je D ortogonalna projekcija temena C na stranicu AB, (slika 42).



Slika 42

Iz pravouglih trouglova ACD i BCD dobija se: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$. Analogno, projektovanjem preostala dva temena na suprotnu stranicu može se dobiti: $b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$ i $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$. Množenjem prve jednakosti sa c, a druge i treće sa $-b$ odnosno sa $-a$, pa zatim sabirajući leve i desne strane dobijamo:

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos\gamma$$

i na kraju:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Poslednju formulu nazivamo kosinusna teorema. Ona važi za svaki trougao. U slučaju oštrouglog trougla zaključujemo da je $c^2 < a^2 + b^2$. Ako je $\gamma = 90^\circ$ kosinusna teorema se svodi na Pitagorinu tj. $c^2 = a^2 + b^2$. A ako je trougao tupougli biće $c^2 > a^2 + b^2$.

Ove zaključke, koristeći funkciju signum možemo zapisati kao sledeću formulu:

[2] Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, 83

$$sgn(\alpha+\beta-\gamma)=sgn(a^2+b^2-c^2)$$

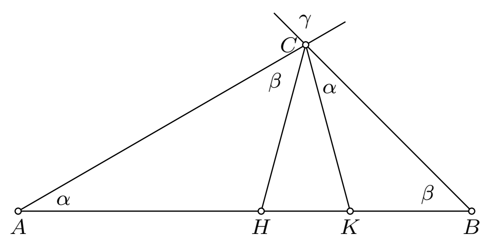
Pogledajmo geometrijski dokaz ovog tvrđenja.

Neka je dat proizvoljan trougao ABC (slika 43). Na stranici AB odredimo tačku H tako da je $\angle ACH = \angle ABC = \beta$ i tačku K tako da je $\angle BCK = \angle BAC = \alpha$. Mogu nastupiti sledeći slučajevi:

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta<\gamma, & P_{ACH}+P_{BCK}<P_{ABC} \\ \alpha+\beta=\gamma, & P_{ACH}+P_{BCK}=P_{ABC} \\ \alpha+\beta>\gamma, & P_{ACH}+P_{BCK}>P_{ABC} \end{array}$$

Sve možemo napisati na sledeći način:

$$sgn(\alpha+\beta-\gamma)=sgn(P_{BCK}+P_{ACH}-P_{ABC})$$



Slika 43

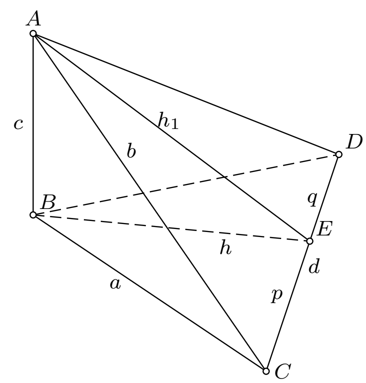
S obzirom da su trouglovi ACH, BCK i ABC slični, to su njihove površine proporcionalne kvadratima stranica

$$\frac{P_{CKB}}{a^2}=\frac{P_{ACH}}{b^2}=\frac{P_{ABC}}{c^2}>0$$

Zaključujemo dakle da je:
$sgn(\alpha+\beta-\gamma)=sgn(a^2+b^2-c^2)$, što je i trebalo dokazati.

8.5.3 Pravougli tetraedar

Neka su bočne strane pravouglog tetraedra pravougli trouglovi. Tada važi tvrđenje:
Zbir kvadrata površina bočnih strana jednak je kvadratu površine osnove.



Slika 44

Neka su bočne strane ABC, ABD i BCD pravougli trouglovi sa pravim uglovima u temenu B. Postavimo ravan koja sadrži ivicu c normalno na ivicu d. Ona trouglove BCD i ACD seče po visinama h i h_1 koje se sustiču na ivici d u tački E, (slika 44).

U pravouglom trouglu BCD važe sledeće jednakosti:

$$h = \tfrac{ab}{d} \quad \text{i} \quad d^2 = a^2 + b^2,$$

a u trouglu ABE jednakost:

$$h_1^2 = c^2 + h^2 = c^2 + \tfrac{a^2b^2}{d^2} = \tfrac{a^2b^2+c^2d^2}{d^2}$$

Imamo da je kvadrat površine trougla ACD jednak:

$$P_{ACD}^2 = \tfrac{1}{4}h_1^2d^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{a^2b^2+c^2d^2}{d^2}\cdot d^2 = \tfrac{a^2b^2+c^2d^2}{4} = \tfrac{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}{4}$$

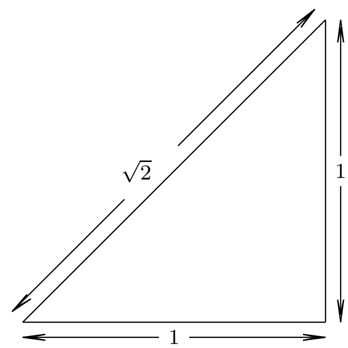
$$= \tfrac{a^2b^2}{4} + \tfrac{a^2c^2}{4} + \tfrac{b^2c^2}{4} = P_{BCD}^2 + P_{ABC}^2 + P_{ABD}^2$$

što je i trebalo pokazati.

8.6 POSLEDICE I UPOTREBA TEOREME

8.6.1 Geometrijska konstrukcija iracionalnih brojeva

Kao što je već rečeno, Pitagorejci su otkrili postojanje iracionalnih brojeva. Pored toga što su ustanovili da postoje nesamerljivi brojevi, pokazali su i da se oni mogu konstruisati, ali su to otkriće čuvali u tajnosti.



Slika 45

Iako se ne mogu izraziti u obliku količnika dva cela broja, neki iracionalni brojevi se ipak mogu konstruisati pomoću lenjira i šestara. Tako se $\sqrt{2}$, koji se nekada naziva i Pitagorinom konstantom, može dobiti kao hipotenuza pravouglog trougla kome su obe katete jedinične duži, (slika 45). Zato ćemo reći da je $\sqrt{2}$ konstruktibilan broj. Ukoliko su katete dužina 1 i $\sqrt{2}$, hipotenuza će biti dužine $\sqrt{3}$, tako da je i ovaj koren konstruktibilan. Na sličan način se može konstruisati koren proizvoljnog prirodnog broja. Međutim, ne mogu se svi pozitivni iracionalni brojevi konstruisati pomoću lenjira i šestara, pa konstruktibilni iracionalni brojevi čine poseban podskup skupa algebarskih brojeva, i ima ih prebrojivo mnogo.

8.6.2 Bazelski problem

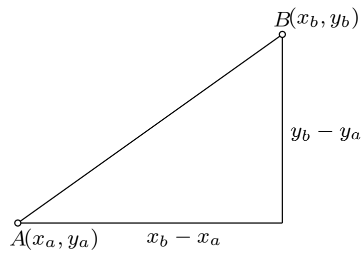
Pjetro Mengoli, italijanski matematičar je 1644. godine postavio pitanje određivanja zbira recipročnih vrednosti kvadrata svih prirodnih brojeva. Iako je postavka problema relativno jednostavna, na rešenje se čekalo sloro čitav vek. Ojler je tek 1735. godine objavio rezultat, za koji je 1741. godine i dokazao da je zaista traženi zbir. Koriščenjem matematičke notacije, Bazelski problem se može zapisati na sledeći način:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6},$$

a zbir datog reda se može geometrijski aproksimirati koriščenjem Pitagorine teoreme. Konstrukcijom pravouglog trougla čije su katete 1 i $\frac{1}{2}$ dobija se hipotenuza čija je dužina kvadratni koren zbira prva dva člana datog reda. Ukoliko se zatim nad tom hipotenuzom kao katetom konstruiše novi pravougli trougao kome je druga kateta dužine $\frac{1}{3}$, njegova hipotenuza će imati dužinu jednaku kvadratnom korenu iz zbira prva tri člana istog reda. Produžavanjem postupka u beskonačnost dužina hipotenuze svakog sledećeg trougla je sve bliža vrednosti $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

8.6.3 Rastojanje između dve tačke u analitičkoj geometriji

Formula za rastojanje između dve tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu je izvedena pomoću Pitagorine teoreme. Ako imamo dve tačke u ravni $A(x_a, y_a)$ i $B(x_b, y_b)$, onda možemo posmatrati njihovo rastojanje, (sl. 46).



Slika 46

Na osnovu Pitagorine teoreme imamo da je
$AB^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$, tj. $|AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

8.6.4 Poslednja Fermaova teorema

Postavlja se pitanje da li postoje prirodni brojevi koji bi zadovoljavali uopštenje jednačine kojom se definišu Pitagorine trojke, tj. uopštenje jednačine $a^2 + b^2 = c^2$, gde su a, b i c prirodni brojevi. Do odgovora na ovo pitanje je došao Pjer Ferma, koji je otprilike 1637. god. tvrdio da ne postoje prirodni brojevi a, b i c, takvi da je $a^n + b^n = c^n$, gde je n pripodan broj veći od 2. Ovo tvrđenje je zapisano bez dokaza na margini Diofantove druge knjige *Aritmetike*, a dokazao ga je Endru Vajls 1995. god.

8.7 PRIMENA PITAGORINE TEOREME U ZADACIMA

1. Ako su a i b katete, a h visina koja odgovara hipotenuzi, dokazati da je $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.

Rešenje: Poznato je da je u pravouglom trouglu $ab = ch$. Ako rešimo tu jednakost po h dobićemo $h = \frac{ab}{c}$. Kada posle kvadriranja pređemo na recipročne vrednosti, dobija se $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, što je i trebalo dokazati.

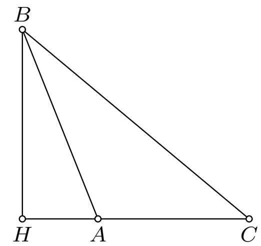
2. Neka je ABC proizvoljan trougao i neka je H podnožje visine iz temena B na pravu AC. Dokazati da važi da je $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AH$, ako je ugao kod temena A oštar, a $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AC \cdot AH$, ako je taj ugao tup. (Formule iz ovog zadatka su poznate kao **Karnoove formule**).

Rešenje: Primenom Pitagorine teoreme na trouglove sa slike 47, dobijamo sledeće jednakosti: $AB^2 = AH^2 + BH^2$ i $BC^2 = CH^2 + BH^2$. Zamenom prve jednakosti u drugu dobija se da je $BC^2 = AB^2 + CH^2 - AH^2$.
Ako je trougao oštrougli biće $CH = ACAH$ pa je:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AH$$

U suprotnom je $CH = AC + AH$ pa je :

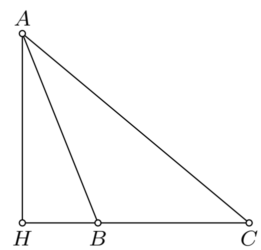
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AC \cdot AH$$



Slika 47

3. Polazeći od Pitagorine teoreme izvesti Heronovu formulu za izračunavanje površine trougla.

Rešenje: Neka je dat trougao ABC, kao na slici 48.



Slika 48

Ako je ugao kod temena A oštar, primenom Karnoove formule biće
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AH$ (1).
Sa druge strane, primenom Pitagorine teoreme na trougao AHB imamo da
$BH^2 = c^2 - AH^2$ (2).
Iz (1) i (2) se dobija da je

$$\begin{aligned} BH^2 &= c^2 - \left(\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2 \\ &= \left(c - \tfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(c + \tfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right) \\ &= \tfrac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2} \\ &= \tfrac{(a^2-(c-b)^2)((b+c)^2-a^2)}{4b^2} \\ &= \tfrac{(a-c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2} \end{aligned}$$

Ako se uzme u obzir da je poluobim trougla $s = \frac{a+b+c}{2}$, dobijamo da je

$$\frac{b^2 \cdot BH^2}{4} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

a to je poznata **Heronova formula** za izračunavanje površine trougla, koju mi najčešće zapisujemo u obliku

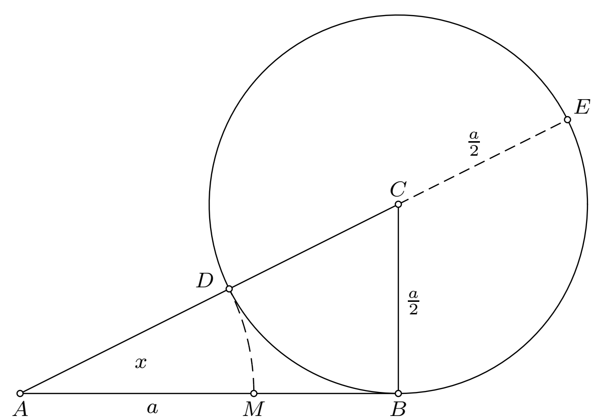
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4. Podeliti datu duž a **zlatnim presekom**.

Rešenje:

Analiza: Prema definiciji duž $AB = a$ je podeljena zlatnim presekom na veći deo x i manji deo $a - x$ ako važi proporcija $a : x = x : (a - x)$. Izvedimo konstrukciju.

Konstrukcija: U krajnjoj tački date duži (npr, u tački B) konstruišimo normalu na tu duž. Na normali odredimo tačku C, takvu da je $BC = \frac{a}{2}$. Konstruišimo zatim kružnicu poluprečnika $\frac{a}{2}$ sa centrom u tački C. Ova kružnica seče duž AC u tački D, tako da je $AD = x$. Zatim na duži AB odredimo tačku M, takvu da je $AM = AD$, (slika 49).



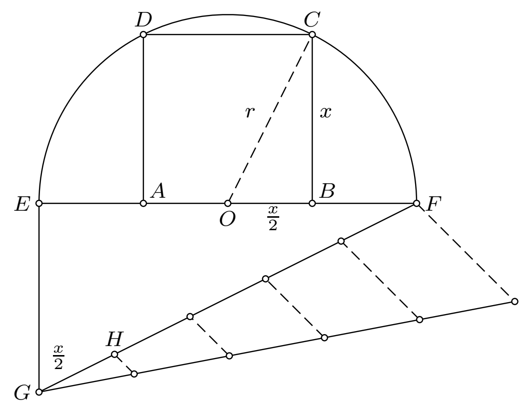
Slika 49

Dokaz: Na osnovu slike imamo da je $AD \cdot AE = AB^2$, primenom potencije tačke u odnosu na krug. Ako se prebacimo na oznake koje smo uveli u analizi, imamo da je $x(a + x) = a^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - ax = a(a - x)$ tj. $a : x = x : (a - x)$. Takođe važi $AC > AB \wedge AD > DC \Rightarrow AM > MB$ pa zaključujemo da tačka M deli duž AB po zlatnom preseku.

5. U dati polukrug poluprečnika r upisati kvadrat.

Rešenje:

Analiza: Neka dati polukrug k ima centar O i poluprečnik r i neka je u njega upisan kvadrat kao na slici 50. Neka je stranica tog kvadrata x . Uočavamo da $OA = OB = \frac{x}{2}$, a primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao OBC dobijamo da je $r^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2$ (1). Iz (1) zaključujemo da je $\frac{x}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5}$.



Slika 50

Konstrukcija: Da bismo rešili zadatak potrebno je konstruisati duž $\frac{x}{2}$. Najpre ćemo konstruisati duž $x_1 = \sqrt{(2r)^2 + r^2}$ tako što ćemo na prečnik polukruga u tački E konstruisati normalu a zatim ćemo na normali odrediti tačku G, takvu da je $EG = r$. Hipotenuza FG će biti jednaka duži x_1 . Zatim ćemo duž FG podeliti na pet jednakih delova, pa je $GH = \frac{x}{2} = \frac{1}{5}GF = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Sada duž GH nanosimo iz tačke O na duž EF sa obe strane tačke O i na taj način dobijamo tačke A i B. Normale iz tačaka A i B na EF seku polukružnicu u tačkama D i C. Time smo dobili kvadrat $ABCD$ koji je i trebalo konstruisati.

Dokaz: Trougao EFG je pravougli na osnovu konstrukcije, pa je na osnovu Pitagorine teoreme $FG = \sqrt{5r^2}$. Takođe, na osnovu konstrukcije je $GH = \frac{1}{5}FG$, tj. $\frac{x}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Na kraju je $AB = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$ normalno i jednako sa BC.

Glava 9

ZAKLJUČAK

Na osnovu onoga što je već zapisano možemo zaključiti da pitagorejci matematici pridaju ogroman značaj. Kako je njihova matematika u suštini mistična, oni je podižu na jedan viši, apstraktniji nivo. Od njih potiče teza da se priroda i njeni zakoni mogu opisati jezikom matematike, teza koju su koristili matematičari svih vremena.

Pitagoru i pitagorejce čini značajnim i to što izučavaju svojstva brojeva, a ne praktični račun. Oni prvi vrše klasifikaciju brojeva. Geometrijsko značenje brojeva doprinosi mnogo razvoju matematike.

Pitagorejci su imali veliku zaslugu za usavršavanje naučnih metoda za rešavanje matematičkih problema. Uvode važnu osobinu u matematici, a to je rasuđivanje. Oni uviđaju da se matematika bazira na strogim dokazima, a baš to je ono što matematiku svrstava u red nauka.

Pitagora i pitagorejci su ostavili dubok trag, ne samo u matematici, već i drugim naukama. Nesumnjivo je da je pitagorejska misao prisutna i u tokovima današnje kulture i civilizacije. Pored matematike, fizike, astronomije, prisutna je i u mnogim naukama koje nisu srodne matematici, kao što su medicina, biologija, psihologija.

Dokaz Pitagorine teoreme bio je epohalan za geometriju starog veka, sa posledicama koje se protežu kroz geometriju svih vekova. Ma kraju prošlog milenijuma pravljene su razne top liste 100 najboljih. Na jednoj matematičkoj konferenciji, jula 1999. god Pol i Džek Abad su predstavili svoju listu 100 najznačajnijih matematičkih teorema. Na prvo mesto postavili su pitagorejsko otkriće iracionalnih brojeva, a na četvrtom se našla Pitagorina teorema. Ako Pitagorina teorema na ovoj listi zauzima četvrto mesto, ne može se poreći da je svakako najpoznatije i najpopularnije tvrđenje u matematici, ako ne i u nauci uopšte, ma koliko ta lista bila subjektivna.

Sama činjenica da postoji nekoliko stotina dokaza ove teoreme opet dovoljno govori o njoj. Ni u trećem milenijumu matematičari nisu odustali od nalaženja novih mogućnosti dokazivanja i primene ove teoreme. Zbog svega navedenog, možemo slobodno reći da je Pitagorina teorema večita inspiracija svakog matematičara, a svakako ne i samo matematičara.

LITERATURA

1. Lućano de Krešenco, Istorija grčke filozofije - predsokratovci, Adresa,Novi Sad,2009.
2. T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I, Dover, New York, 1981.
3. Zoran Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik,2009.
4. Leonard Mlodinov, Euklidov prozor, Laguna,Beograd,2005.
5. Ksenija Atanasijević, Antička filozofija, Plato,Beograd,2007.
6. Mirko Dejić, Tajni svet matematike, Nolit,1998.
7. Kliford A. Pikover, Strast za matematikom–Brojevi,zagonetke,ludilo, religija i potraga za stvarnošću, Beograd,2007
8. V. Korać, B. Pavlović, Istorija filozofije, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd ,1996.
9. http://sites.google.com/site/pitagorac
10. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/
11. Aristotel, Metafizika I
12. Diogen Laertije, Životi i mišljenja istaknutih filozofa, Beograd,1985.
13. Ser Tomas Hit, Aristarh sa Samosa, antički Kopernik, Beograd,2007.

Sadržaj