UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

TEOREME O NEPOKRETNOJ TAČKI U NEKIM KLASAMA VEKTORSKIH TOPOLOŠKIH PROSTORA

DOKTORSKA DISERTACIJA

mr LJILJANA GAJIĆ

NOVI SAD
1982.

SADRŽAJ

III GLAVA

TEORIJA STEPENA PRESLIKAVANJA

IV GLAVA

TEOREME O KOINCIDENCIJI

SPISAK OZNAKA

N	skup prirodnih brojeva
R	skup realnih brojeva sa uobičajenom topologijom
$R^n = \underbrace{R\times R\times\ldots\times R}_{n\text{-puta}}$	sa topologijom topološkog proizvoda
C	skup kompleksnih brojeva
$\overset{o}{A}$	unutrašnjost skupa A
$\overline{A}$	zatvaranje skupa A
conv A	konveksna obvojnica skupa A
$\overline{\text{conv}}$ A	zatvorena konveksana obvojnica skupa A
$f\|A$	restrikcija preslikavanja f nad skup A
dim A	dimenzija skupa A
Fix(f)	skup nepokretnih tačaka preslikavanja A

UVOD

Teorija nepokretne tačke je danas samostalna matematička oblast čije su metode prihvaćene u mnogim drugim oblastima matematike. Posebno je značajna uloga metoda teorije nepokretne tačke pri rešavanju nelinearnih operatorskih jednačina, u teoriji optimizacije i numeričkoj matematici. Do sada se pojavilo i nekoliko knjiga iz ove oblasti (|11|,|33|,|34|,|60|, |64|,|78|) a u štampi je i knjiga | 7 |. Pojedini delovi teorije nepokretne tačke su obuhvaćeni knjigama | 4 |,| 6 |,|41|,|63| i |66|.

Sve je više matematičara u svetu i kod nas koji su zainteresovani za ovu oblast matematike i mogućnosti njene primene. To se posebno odnosi na mnogobrojne primene metoda teorije nepokretne tačke u numeričkoj matematici a poslednjih godina i na rešavanje problema nelinearnog programiranja, gde se ova teorija pokazala kao veoma uspešna.

Osnovni rezultati teorije nepokretne tačke su teorema Brouwera, Banacha, Schaudera i Tihonova. Mnogi kasniji rezultati su generalizacije ovih teorema.

Banachov princip kontrakcije je generalisan kako u odnosu na prostor nad kojim je preslikavanje definisano tako i u odnosu na uslove koje zadovoljava to preslikavanje. Do sada je objavljen veći broj radova iz ove oblasti izmedju ostalog i u verovatnosnim metričkim prostorima (|1|,|13|), i lokalno konveksnim prostorima (|14|,|23|,|26|,|70|).

Posebno značajno mesto u teoriji nepokretne tačke ima Brouwerova teorema iz koje sledi da svaki kompaktan i konveksan podskup $K \subset R^n$ ima osobinu nepokretne tačke (tj. $f : K \to K$ je neprekidno implicira da je $Fix(f) \neq \emptyset$). U poslednje vreme objavljen je veći broj radova koji se odnose posebno na mogućnost konstrukcije nepokretne tačke neprekidnog preslikavanja $f : K \to K$, $(K \subset R^n)$ (|38|,|63|,|81|).

Teorema Schaudera odnosno Tihonova daje nam pozitivan odgovor na pitanje da li konveksan i kompaktan podskup normiranog, odnosno lokalno konveksnog prostora, ima osobinu nepokretne tačke ali je otvoren problem da li i svaki konveksan i kompaktan podskup vektorskog topološkog prostora, koji ne mora biti lokalno konveksan, ima osobinu nepokretne tačke.

Višeznačna preslikavanja, koja se prirodno nameću, dobila su svoje mesto i u teoriji nepokretne tačke izmedju ostalog i zbog mogućnosti primene (Teorija igara). Za višeznačna preslikavanja uopšten je Banachov princip kontrakcije (|52|), teorema Brouwdera (|37|) a zatim i teoreme Schaudera (|67|) i Tihonova (|10|,|32|).

Poslednjih petnaest godina u značajnoj je meri porastao interes matematičara za teoriju nepokretne tačke u vektorskim topološkim prostorima koji ne moraju biti i lokalno konveksni. Mnogi poznati vektorski topološki prostori, kao prostor $L^p (0 < p < 1)$, nisu lokalno konveksni te je dugo godina bio otvoren problem primene metoda teorije nepokretne tačke na rešavanje operatorskih jednačina u ovim prostorima.

Medju radovima vezanim za teoriju nepokretne tačke u vektorskim topološkim prostorima koji nisu lokalno konveksni posebno mesto zauzimaju radovi V. Klee-a (|40|,|66|) koji je u ovim prostorima razvio Leray-Schauder-ovu teoriju, ukazujući na značaj dopustivih skupova u teoriji nepokretne tačke. Isto tako značajni su i rezultati iz rada |30| S. Hahn-a i Pötter-a u kojem je, pored ostalog, dokazano i uopštenje teoreme Tihonova o nepokretnoj tački, a data je i primena ovog uopštenja na integralne jednačine u prostoru merljivih funkcija. U istom radu je pokazano da se mnogi rezultati teorije nepokretne tačke u lokalno konveksnim prostorima mogu uopštiti na dopustive vektorske topološke prostore. Zbog toga je od posebnog interesa da se utvrdi klasa dopustivih podskupova vektorskog topološkog prostora. Do sada nije dat odgovor na ovaj problem, ali su otkriveni neki dopustivi vektorski topološki prostori. Tako je T. Riedrich u |56| i |57| dokazao dopustivost prostora $L^p (0 < p < 1)$ i $S(0,1)$ a dopustivost odredjenih prostora funkcija je dokazana u radovima |40|,|43|,|44|. O. Hadžić je dokazala dopustivost jedne klase podskupova Φ-paranormiranih prostora |12| a u radu |21| je dokazana i dopustivost odredjenih podskupova paranormiranih prostora.

Poznato je da je svaki konveksan podskup lokalno konveksnog prostora dopustiv ali je još uvek nerešen problem da li je i svaki konveksan podskup vektorskog topološkog prostora dopustiv.

Isto tako je otvoreno pitanje dopustivosti nekonveksnih podskupova lokalno konveksnih prostora. Primer jednog nekonveksnog, kompaktnog, nedopustivog podskupa od l_2 je skup |43|:

$$\{(t^n)_{n\in N} | 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\}$$

U radu |65| poljski matematičar K. Zima je dokazao jedno interesantno uopštenje teoreme Schauder-a o nepokretnoj tački u paranormiranim prostorima, koji su odredjena klasa vektorskih topoloških prostora a koji ne moraju biti lokalno konveksni. Za domen definisanosti K preslikavanja T, čija se nepokretna tačka traži, Zima pretpostavlja da zadovoljava sledeći uslov:

Postoji $C(K) > 0$ tako da je:

$$(1) \qquad ||tx||^* \leq C(K)t||x||^* \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i \quad x \in K-K.$$

U istom radu Zima je dao i primer paranormiranog prostora E i skupa $K \subset E$ takvog da je $C(K) = 3$.

Neka uopštenja njegovih rezultata za višeznačna preslikavanja dobila je i O. Hadžić u radu |16|. Dopustivost podskupova K sa uslovom (1) u paranormiranom prostoru dokazana je u radu |21| kao i neka uopštenje Zimine teoreme o nepokretnoj tački.

U ovoj doktorskoj disertaciji u I glavi dobijeni su odredjeni rezultati o postojanju nepokretne tačke preslikavanja, definisanog nad podskupom paranormiranog prostora, koje je uopšteno kondenzujuće kao i za odredjenu klasu višeznačnih preslikavanja (teorema I.4., tvrdjenje I.2. i teorema I.6.).

U teoriji nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja posebno je značajno pitanje postojanja neprekidne selekcije višeznačnog preslikavanja jer to omogućava korišćenje dobro razradjene teorije nepokretne tačke za jednoznačna preslikavanja. Neki rezultati u ovom pravcu dati su i u ovom radu na kraju I glave.

Nemački matematičar Krauthausen u svojoj doktorskoj disertaciji uveo je pojam lokalno konveksnog podskupa vektorskog topološkog prostora i dao nekoliko primera takvih podskupova u vektorskim topološkim prostorima koji nisu lokalno konveksni. Takodje je pokazao da je svaki lokalno konveksan podskup metrizabilnog vektorskog topološkog prostora dopustiv skup te da se za preslikavanja definisana nad ovakvim skupovima mogu koristiti rezultati Hahn-a i Pötter-a.

Svaki podskup paranormiranog prostora koji zadovoljava uslov (1) je lokalno konveksan podskup a u radu |17| O. Hadžić je dokazala da je i podskup Φ-tipa takodje lokalno konveksan. Za podskupove Φ-tipa O. Hadžić i Lj. Gajić |24| su dokazale postojanje nepokretne tačke višeznačnog u-neprekidnog preslikavanja.

C. Krauthausen je u |44| postavio sledeći problem:

ko je E vektorski topološki prostor, $A \subseteq E$ i K proizvolj-
n kompaktan podskup od A pod kojim uslovima za A i E je
i conv K relativno kompaktan skup?

Poznato je da ovaj rezultat važi za lokalno konveksne prostore i svako $A \subseteq E$. U radu |44| su dati primeri podskupova $A \subseteq E$, gde su E vektorski topološki prostori koji nisu lokalno konveksni, sa navedenom osobinom. Poznato je |43| da uopšteno kondenzujuće preslikavanje F definisano nad skupom $A = \overline{\text{conv}}\ A$ sa navedenom osobinom ima bar jednu nepokretnu tačku. U |21| je dokazano da podskupovi K sa osobinom (1) paranormiranog prostora imaju tu osobinu a u |18| da i svi skupovi Φ-tipa takodje imaju navedenu osobinu. Otvoren je je još uvek problem da li navedenu osobinu imaju svi lokalno konveksni podskupovi vektorskih topoloških prostora.

U radu |84| O. Hadžić je uvela pojam podskupa Z-tipa vektorskog topološkog prostora i u radovima |17|,|18| i |19| dobila rezultate o postojanju nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja $F : K \to \mathcal{R}(K)$ ($K \subseteq E$, E vektorski topološki prostor, $K = \overline{\text{conv}}\ K$) gde je $F(K)$ Z-tipa. Neki rezultati o postojanju nepokretne tačke višeznačnih preslikavanja $F : K \to \mathcal{R}(K)$ gde je $F(K)$ Z-tipa dobijeni su i u ovoj disertaciji. Pored toga sadržaj II glave čini i primena teoreme o nepokretnoj tački višeznačnog preslikavanja na teoremu o nepraznom preseku familije zatvorenih skupova i primena ovog rezultata na minimax problem.

U teoriji nepokretne tačke značajno mesto zauzima i teorija stepena preslikavanja koja se veoma uspešno primenjuje u teoriji običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. U III glavi ove disertacije data je mogućnost zasnivanja ove teorije za jednu klasu preslikavanja (vezanu za Z-uslov) u vektorskim topološkim prostorima koji nisu lokalno konveksni a kao primena dokazane su teoreme o nepokretnoj tački.

Poslednja, IV glava, sadrži rezultate vezane za egzistenciju zajedničkih nepokretnih tačaka tri preslikavanja A, S i T kao i teoremu o koincidenciji za višeznačna preslikavanja koja je uopštenje teoreme američkog matematičara E. F. Browdera.

Akademiku prof. Dr B. Stankoviću želim da izrazim svoju zahvalnost što me je uključio u rad svoje grupe i od samog početka vodio nesebičnu brigu o mom radu.

Na kraju, želim iskreno da se zahvalim Dr Olgi Hadžić, redovnom profesoru Prirodnomatematičkog fakulteta u Novom Sadu, što me je uključila u ovu oblast matematičkih istraživanja, velikodušno mi pomagala svojim idejama i savetima u celom toku izrade i omogućila da i zajedničke rezultate izložim u ovom radu zbog čega joj dugujem trajnu zahvalnost.

I GLAVA

TEORIJA NEPOKRETNE TAČKE U PARANORMIRANIM PROSTORIMA

I.1. DOPUSTIVOST PARANORMIRANIH PROSTORA

U teoriji nepokretne tačke pojam dopustivosti pokazao se veoma značajan. Za dopustive podskupove proizvoljnog Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora dobijen je niz značajnih rezultata od kojih treba posebno istaći rad |30| G. Hahna i K.F. Pöttera u kome su mnogi rezultati iz teorije nepokretne tačke u konačnodimenzionalnim prostorima preneti na dopustive podskupove Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora.

Definicija I.1. Podskup A Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora je dopustiv ako i samo ako za svaki kompaktan podskup $K \subseteq A$ i svako $U \in \mathcal{U}$, gde je $\mathcal{U}$ fundamentalan sistem okolina nule u E, postoji neprekidno preslikavanje

$$h : K \to A$$

tako da je:

1. $\dim(\operatorname{span} h(K)) < \infty$
2. $x - h(x) \in U$ za svako $x \in K$

a span $h(K-K)$ je vektorski prostor generisan sa $h(K)$.

Ako je $A = E$ kažemo da je prostor E dopustiv. O. Hadžić je pokazala da su svi konveksni podskupovi ϕ-tipa proizvoljnog Hausdorfovog vektorskog topološkog prostora takođe su dopustivi. U radu |21| dat je dokaz o dopustivosti još jedne klase konveksnih podskupova vektorsko topoloških prostora koji ne moraju biti i lokalno konveksni.

Definicija I.2. Neka je E vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Funkcija $|| \ ||^* : E \to [0,\infty)$ naziva se paranorma ako i samo ako je:

1. $||x||^* = 0 \iff x = 0$
2. $||-x||^* = ||x||^*$ za svako $x \in E$
3. $||x+y||^* \leq ||x||^* + ||y||^*$ za svako $x,y \in E$
4. ako $||x_n - x_0||^* \to 0$ i $\lambda_n \to \lambda_0$ onda i $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0||^* \to 0$.

Prostor $(E,|| \ ||^*)$ naziva se paranormiranim. Funkcija $\rho(x,y) = ||x-y||^*$ je funkcija rastojanja na E pa je (E,ρ) metrički prostor. Ukoliko je i kompletan E je Frechie-tov prostor. Topologija koju ova metrika indukuje je kompatibilna sa njegovom algebarskom strukturom te je $(E,|| \ ||^*)$ i jedan vektorsko topološki prostor. U tom prostoru fundamentalan sistem okolina nule $\mathcal{U}$ dat je familijom $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, gde je $U_\varepsilon = \{x \mid x \in E, ||x||^* < \varepsilon\}$.

Definicija I.3. Podskup K paranormiranog prostora $(E,|| \ ||^*)$ zadovoljava Zimin uslov ako i samo ako postoji $C(K) > 0$ tako da je:

(1) $\quad ||\lambda x||^* \leq C(K)\cdot\lambda\cdot||x||^*$ za svako $0 \leq \lambda \leq 1$ i svako $x \in K-K$.

Navešćemo jedan primer |65| podskupa ne lokalno konveksnog vektorskog topološkog prostora koji zadovoljava uslov (1).

PRIMER I.1. Neka je E skup svih nizova $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots)$ čije su koordinate σ_k neprekidne realne funkcije u intervalu $[0,a]$ i neka je paranorma na E definisana na sledeći način:

$$(2) \qquad ||\sigma||^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{||\sigma_i||}{M_i + ||\sigma_i||}$$

gde je $||\sigma_i|| = \max\limits_{[0,a]} |\sigma_i(t)|$ a $M_i = \int_0^a m_i(t)dt$ pri čemu su funkcije $m_i(t)$, $i = 1,2,3,\ldots$ Lebeg-integrabilne na $[0,a]$. Prostor $(E, ||\ \ ||^*)$ je kompletan metrički prostor |65| koji jeste vektorsko topološki ali nije i lokalno konveksan. Skup $K_0 = \{\sigma | \sigma \in E,\ ||\sigma_i||^* < M_i \quad i=1,2,\ldots\}$ je konveksan, zatvoren i ograničen u E. Pošto važi da je:

$$\frac{\lambda t}{M_i + \lambda t} \leq 3\lambda \frac{t}{M_i + t} \qquad \text{za} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{i} \quad t \in [0, 2M_i]$$

paranorma (2) zadovoljava uslov:

$$||\lambda\sigma||^* \leqslant 3\lambda||\sigma||^* \quad \text{za} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \sigma \in K_0 - K_0$$

što po definiciji znači da podskup $K_0 \subset E$ zadovoljava i Zimin uslov za $C(K_0) = 3$.

K. Zima je dokazao uopštenje Šauderove teoreme u paranormiranim prostorima.

Teorema I.1. |65|. Neka je K ograničen, zatvoren i konveksan podskup kompletnog paranormiranog prostora $(F, ||\ \ ||^*)$ i neka je $A : K \to F$ totalno neprekidan operator na K. Ako:

1. $A(K) \subseteq K$

2. postoji broj $C(K) > 0$ tako da je
$||\lambda x||^* \leqslant C(K)\lambda||x||^*$ za $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ i
$x \in A(K) - A(K)$

tada postoji elemenat $p \in K$ takav da je $A(p) = p$.

Mogućnost primene i korišćenja ove teoreme Zima je ilustrovao sledećim primerom:

Neka je dat beskonačan sistem integralnih jednačina

$$\text{(A)} \qquad x_i = \int_0^t f_i(s, A_{i1}(x_1), A_{i2}(x_2), \ldots A_{in_i}(x_{n_i}))ds$$

$i = 1,2,3,\ldots$

gde su funkcije $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$, $i=1,2,3,\ldots$ definisane za $t \in [0,a]$, $x_j \in (-\infty,\infty)$, $j=1,2,\dots,n$, $\sup\{n_i\} = +\infty$ i zadovoljeni su sledeći uslovi:

(3) funkcije f_i, $i=1,2,3,\dots$ su neprekidne za svako x_j, $j=1,2,3,\dots,n_i$ i merljive po t za svako $(x_1,x_2,\dots,x_{n_i})$;

(4) postoji Lebegov integral na $[0,a]$ funkcija m_i koje imaju osobinu da je

$$|f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_{n_i})| \leqslant m_i(t) \qquad t \in [0,a],\ i=1,2,\dots$$

(5) A_{ij} $i=1,2,3,\dots$, $j=1,2,\dots,n_i$ su neprekidne transformacije prostora $C_{(0,a)}$ u samog sebe.

Neka je $(E,\|\ \|^*)$ paranormiran prostor iz Primera I.1 a $K_o = \{\sigma, \sigma \in E, \|\sigma_i\|^* \leqslant M_i\}$. Kao što je tamo pokazano, podskup koji ima osobinu Zime. Operator T definisan na sledeći način:

$$T\sigma = \left(\int_0^t f_1(s,A_{11}(\sigma_1),A_{12}(\sigma_2),\dots,A_{1n_1}(\sigma_{n_1}))ds, \right.$$
$$\left. \int_0^t f_2(s,A_{21}(\sigma_1),A_{22}(\sigma_2),\dots,A_{2n_2}(\sigma_{n_2}))ds,\dots \right)$$

preslikava K_o u K_o.

Pošto je potreban i dovoljan uslov da podskup $X \subset E$ bude relativno kompaktan u E da za svako $k \in N$ skup

$\bar{p}_k(\sigma) = \sigma_k$ bude uniformno ograničen i podjednako neprekidan na $[0,a]$ pod predpostavkama (3), (4) i (5) zadovoljeni su svi uslovi Teoreme I.2. Time je dokazana egzistencija nepokretne tačke preslikavanja T koja je ujedno i rešenje beskonačnog sistema integralnih jednačina (A).

Tvrdjenje I.1. Neka je A konveksan podskup para-normiranog prostora $(E, \|\ \|^*)$ i neka skup A zadovoljava Zimin uslov. Tada je A dopustiv.

Dokaz: Neka je K kompaktan podskup od A a U proizvoljna okolina nule u E. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $U_\varepsilon = \{x \mid x \in E, \|x\|^* < \varepsilon\} \subseteq U$. Pošto je skup K po pretpostavci kompaktan za svaku okolinu nule pa i za $U_{\frac{\varepsilon}{C(K)}}$ postoji konačan podskup $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset K$ takav da je:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{U_{\frac{\varepsilon}{C(K)}} + y_i\}.$$

Neka je $\{g_i\}_{i=1}^n$ podela jedinice koja odgovara ovom prepokrivaču skupa K. Funkcija

$$h(x) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} g_i(x) y_i\ , \qquad x \in K$$

je po konstrukciji neprekidna a pošto je $h(K) \subseteq \mathrm{conv}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ i konačno dimenzionalna. Skup A je po pretpostavci konveksan pa je $h(K) \subseteq A$. Zadovoljen je i uslov da $x-h(x) \in U$ za svako $x \in K$ jer je:

$$||x-h(x)||^* = ||\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x-y_i)||^* \leq C(K)\cdot \sum_{i=1}^{n} g_i(x)||x-y_i||^* =$$

$$= C(K)\cdot \sum_{i:g_i(x)\neq 0}^{n} g_i(x)||x-y_i||^* <$$

$$< C(K)\cdot \sum_{i:g_i(x)\neq 0} g_i(x)\cdot\frac{\varepsilon}{C(K)} = \varepsilon \quad , \quad \text{za svako } x \in K.$$

što znači da je A dopustiv podskup.

Kao posledica prethodnog tvrdjenja i Teoreme 3 o nepokretnoj tački Hahn-a i Pöttera |30| dobija se sledeća teorema:

Teorema I.2. Neka je $(E,||\ \ ||^*)$ paranormiran prostor, $K \subseteq E$ neprazan, zatvoren i konveksan podskup koji zadovoljava Zimin uslov, $0 \in K$ a W zatvorena okolina nule u E. Ako je $f: W \cap K \to K$ kompaktno preslikavanje koje zadovoljava uslov:

$$x \in \partial W \cap K \ , \quad f(x) = \alpha x \Longrightarrow \alpha \leq 1$$

onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja f.

Posledica I.1. Ako je $(E,||\ \ ||^*)$ paranormiran prostor, $K \subseteq E$ zatvoren i konveksan podskup koji zadovoljava Zimin uslov i $f: K \to K$ kompaktno preslikavanje onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja f.

I.2.1. UOPŠTENJE TEOREME ŠAUDERA U PARANORMIRANIM PROSTORIMA

Jedno od otvorenih pitanja koje od značaja i u teoriji nepokretne tačke je sledeće:

Neka je E Hausdorffov vektorski topološki prostor i K konveksan podskup od E. Ako je $A \subseteq K$ i A predkompaktno da li je to onda i conv$A$? Pod kojim uslovima za A to možemo tvrditi?

Ovaj problem je postavljen u doktorskoj disertaciji C. Krauthausena |44|.

Tvrdjenje I.2. Neka je $(E, ||\cdot||^*)$ paranormiran prostor, K zatvoren i konveksan podskup od E tako da $0 \in K$ i K zadovoljava Zimin uslov. Tada važi sledeća implikacija:

$A \subseteq K$, A je predkompaktno $\Rightarrow$ conv A je predkompaktna.

Dokaz: Neka je A predkompaktno a V proizvoljna okolina nule u E. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je

$$U_\varepsilon = \{z | z \in E, ||z||^* < \varepsilon\} \subseteq V.$$

Pošto je A predkompaktno ono je i ograničeno što znači da postoji $M > 0$ tako da je $||x||^* \leq M$ za svako $x \in A$.

Neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{2C(K)}$. Iz predkompaktnosti takodje sledi da je A i totalno ograničeno tj. da za svako $\varepsilon' > 0$ pa i za $\varepsilon' = \delta$ postoji konačan skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n(\delta)}\} \subset A$ takav da je:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\delta)} \{x_i + U_\delta\} . \tag{6}$$

Skup $S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{n(\delta)}) \mid \sum_{n=1}^{n(\delta)} s_i = 1$ i $s_i \geq 0$ za $i=1,2,\ldots,n(\delta)\}$ je kompaktan podskup od $R^{n(\delta)}$ pa za svako $t > 0$ postoji konačan skup $\{\beta^j\}_{j=1}^{m} \subset S$ sa sledećom osobinom:

Za svako $s \in S$ postoji $\beta^j \in \{\beta^j\}_{j=1}^{m}$ tako da je:

$$\sum_{i=1}^{n(\delta)} |s_i - \beta_i^j| < t \qquad (\beta^j = (\beta_i^j)) . \tag{7}$$

Neka je $t = \frac{\delta}{M}$ i neka je $y_j = \sum_{i=1}^{n(\delta)} \beta_i^j x_i$, $j=1,2,..m$.

Pokazaćemo da skup $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \text{conv } A$ ima osobinu da je:

$$\text{conv } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{y_i + V\}$$

što će značiti da je i skup conv A predkompaktan.

Neka je $x \in \text{conv } A$. Tada je:

$$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i$$

$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ za $i=1,2,\ldots,r$ a $u_i \in A$ za $i=1,2,\ldots,r$.

Iz (6) sledi da se svako u_k može napisati u obliku

$$u_k = x_{i(k)} + z_k$$

gde $z_k \in U_\delta$, $i(k) \in \{1,2,\ldots,n(\delta)\}$ za svako $k=1,2,\ldots,r$.

Ali tada je:

$$x = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_{i(k)} + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k z_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n(\delta)} \alpha_i' x_i + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k z_k$$

gde je $\sum_{i=1}^{n(\delta)} \alpha_i' = 1$, $\alpha_i' \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n(\delta)$.

Neka je β^j tako da za $s = (\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_{n(\delta)}')$ važi (7) a $y_j = \sum_{i=1}^{n(\delta)} \beta_i^j x_i$. Pokazaćemo da $x-y_j \in U_\varepsilon$. Naime:

$$||x-y_j||^* \leq ||\sum_{i=1}^{n(\delta)} \alpha_i' x_i + \sum_{k=1}^{r} \alpha_r z_k - \sum_{i=1}^{n(\delta)} \beta_i^j x_i||^* =$$

$$= ||\sum_{i=1}^{n(\delta)} (\alpha_i' - \beta_i^j) x_i + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k z_k||^* \leq$$

$$\leq ||\sum_{i=1}^{n(\delta)} (\alpha_i' - \beta_i^j) x_i||^* + ||\sum_{k=1}^{r} \alpha_k z_k||^*$$

Kako je $z_k = u_k - x_{i(k)} \in K-K$ važi da je:

$$||\sum_{k=1}^{r} \alpha_k z_k||^* \leq C(K) \cdot \sum_{k=1}^{r} \alpha_k ||z_k||^*$$

Sa druge strane $0 \in K$ i K je konveksan skup te $tx \in K$ za svako $x \in K$ i $t \in [0,1]$. Odavde sledi da je $\alpha_i' x_i \in K$ i $\beta_i^j x_i \in K$ za $i=1,2,\ldots,n(\delta)$, $j=1,2,\ldots,m$ i:

$$||\sum_{i=1}^{n(\delta)} (\alpha_i' - \beta_i^j) x_i||^* \leq C(K) \cdot \sum_{i=1}^{n(\delta)} |(\alpha_i' - \beta_i^j)| \, ||x_i||^*.$$

Ali to povlači da je:

$$||x-y_j||^* \leq C(K) \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{n(\delta)} |\alpha_i' - \beta_i^j| + C(K) \cdot \delta <$$

$$< C(K) \cdot M \cdot \frac{\delta}{M} + C(K) \cdot \delta = \varepsilon$$

što je i trebalo dokazati.

Primedba. Pretpostavka da $0 \in K$ jednostavno se može izbeći. Naime, ukoliko $0 \notin K$ a $x \in K$ onda $0 \in K-x = K'$. Ako $y \in K'-K'$ onda $y \in K-K$ te je:

$$||\lambda y||^* \leq C(K) \cdot \lambda \cdot ||y||^* \quad \text{za svako } y \in K'-K' \text{ i } \lambda \in [0,1].$$

Dalje, ako je $A \subseteq K$ predkompaktan onda je to i $A' = A - x$. Prema Tvrdjenju I.2 conv A' je predkompaktna a kako je

$\mathrm{conv}\,A' = \mathrm{conv}\,A - x$ sledi da je i $\mathrm{conv}\,A = \mathrm{conv}\,A' + x$ takodje predkompaktna.

Definicija I.4. Neka je X Hausdorffov vektorski topološki prostor, K podskup od X i $f : K \to K$. Preslikavanje f je uopšteno kondenzujuće ako i samo ako je

(i) f neprekidno;

(ii) važi sledeća implikacija:

$\emptyset \neq A \subset X, \quad f(A) \subset A,$

$A \setminus \overline{\mathrm{conv}}\, f(A)$ je kompaktno $\Rightarrow$ A je relativno kompaktno.

Slično kao u |44| može se dokazati sledeća teorema o nepokretnoj tački.

Teorema I.3. Neka je $(E, \|\ \|^*)$ paranormiran prostor, K neprazan, konveksan i kompaktan podskup koji zadovoljava Zimin uslov. Ako je f uopšteno kondenzujuće preslikavanje iz K u K onda je $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

I.2.2. UOPŠTENJE TEOREME KAKUTANIJA U PARANORMIRANIM PROSTORIMA

Daćemo prvo neke oznake i definicije koje ćemo koristiti u daljem tekstu.

Neka su X i Y vektorski topološki prostori. Sa 2^Y ćemo označiti skup svih nepraznih podskupova od Y.

Svako preslikavanje $F : X \to 2^Y$, koje svakoj tački $x \in X$ dodeljuje neprazan podskup $F(x)$ od Y naziva se višeznačno preslikavanje.

Definicija I.5. Preslikavanje $F : X \to 2^Y$ je od dole poluneprekidno (l.s.c.) ako i samo ako je skup:

$$\{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

otvoren u X za svaki otvoren skup V u Y.

Definicija I.6. Preslikavanje $F : X \to 2^Y$ je od gore poluneprekidno (u.s.c.) ako i samo ako je:

$$\{x \in X ; \ F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

zatvoreno u X za svaki zatvoren skup V u Y.

Definicija I.7. Preslikavanje F je zatvoreno ako i samo ako je graf:

$$Gr(F) = \{(x,y) : (x,y) \in X \times Y,\ y \in F(x)\}$$

zatvoren u $X \times Y$.

Definicija I.8. Preslikavanje $F : X \to 2^Y$ je kompaktno ako i samo ako je od gore poluneprekidno i skup $\overline{F(X)}$ je kompaktan.

Definicija I.9. Tačka x_0 je nepokretna tačka preslikavanja $F : X \to 2^X$ ako i samo ako $x_0 \in F(x_0)$.

Teorema I.4. Neka je $(E, \|\ \|^*)$ paranormiran prostor, K neprazan, konveksan i kompaktan podskup od E, $F : K \to 2^K$ u.s.c. preslikavanje takvo da je $\overline{\text{conv}}\, F(x) = F(x)$ za svako $x \in K$ a skup $F(K)$ zadovoljava Zimin uslov. Tada postoji, za svako $\varepsilon > 0$, neprekidno preslikavanje $f_\varepsilon : K \to K$ sa sledećim osobinama:

1) postoji $x_\varepsilon \in K$ tako da je $x_\varepsilon \in Fix\,(f_\varepsilon)$

2) postoji niz $\{x_{\varepsilon_n}\}_{n \in N}$ takav da je:

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varepsilon_n} \in Fix(F)$$

Dokaz: Ovaj dokaz je vrlo sličan dokazu teoreme Kakutanija iz |73|.

Neka je dato $\varepsilon > 0$. Na osnovu kompaktnosti skupa K je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} \{x_{\varepsilon,i} + U_\varepsilon\}$. Kao i u |73| definišimo preslikavanje $f_\varepsilon : K \to K$ tako da je:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_{\varepsilon,i}(x) y_{\varepsilon,i} , \quad x \in K ,$$

gde je $x_{\varepsilon,i} \in K$, $i=1,2,\dots,n(\varepsilon)$, $y_{\varepsilon,i} \in F(x_{\varepsilon,i})$ $i=1,2,\dots,n(\varepsilon)$ a $\{p_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^{n(\varepsilon)}$ je podela jedinice koja odgovara prepokrivaču $\{x_{\varepsilon,i} + U_\varepsilon\}_{i=1}^{n(\varepsilon)}$ skupa K. Pošto je K konveksno i $C_\varepsilon = \mathrm{conv}\{y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2}, \dots, y_{\varepsilon,n}\} \subset K$ za $f_\varepsilon : C_\varepsilon \to C_\varepsilon$ se može primeniti teorema Brauera.

Pošto je $\mathrm{Fix}(f_\varepsilon) \neq \emptyset$ postoji $x_\varepsilon \subset K$ tako da je $x_\varepsilon = f_\varepsilon x_\varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0$. Iz kompaktnosti skupa K sledi da postoji niz $\{\varepsilon_n\}_{n\in N} (\varepsilon_n > 0)$ tako da je:

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} x_{\varepsilon_n} = x_0 \in K$$

Dalje, kako je $x_\varepsilon = f_\varepsilon(x_\varepsilon)$ za svako $\varepsilon > 0$, sledi da je i

$$(10) \qquad f_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) = x_{\varepsilon_n} \qquad \text{za svako } n \in N.$$

Pokazaćemo da za svako $\delta > 0$ $x_0 \in \overline{F(x_0) + U_\delta}$ odakle će slediti da $x_0 \in F(x_0)$. Pošto je na skupu $F(K)$ zadovoljen Zimin uslov lako se proverava da je:

$$\mathrm{conv}\left(U_{\frac{\delta}{C(F(K))}} \cap (F(K) - F(K))\right) \subseteq U_\delta$$

a iz pretpostavke da je F u.s.c. preslikavanje sledi da postoji U_δ, tako da je:

$$F(x_o + U_{\delta'}) \subseteq F(x_o) + U_{\frac{\delta}{C(F(K))}} .$$

Iz uslova (8) i (9) sledi da postoji $n_o \in N$ tako da je $\varepsilon_n < \frac{\delta'}{2}$ i $x_{\varepsilon_n} - x_o \in U_{\frac{\delta}{2}}$, za svako $n \geqslant n_o$. Iz (10) sledi da je:

$$x_{\varepsilon_n} = \sum_{i:\omega_{\varepsilon_n,i}(x_{\varepsilon_n})\neq 0} \omega_{\varepsilon_n,i}(x_{\varepsilon_n,i})y_{\varepsilon_n,i}$$

gde $y_{\varepsilon_n,i} \in F(x_{\varepsilon_n,i})$. Ali za $n \geqslant n_o$:

$$F(x_{\varepsilon_n,i}) \subseteq F(x_o + U_{\delta'}) \subseteq F(x_o) + U_{\frac{\delta}{C(F(K))}}$$

pa je $y_{\varepsilon_n,i} = z_{\varepsilon_n,i} + u_{\varepsilon_n,i}$ za neko $z_{\varepsilon_n,i} \in F(x_o)$ i $u_{\varepsilon_n,i} \in U_{\frac{\delta}{C(F(K))}}$. Na kraju se dobija za $n \geqslant n_o$:

$$x_{\varepsilon_n} = \sum_{i:\omega_{\varepsilon_n,i}(x_{\varepsilon_n})>0} \omega_{\varepsilon_n,i}(x_{\varepsilon_n})\cdot z_{\varepsilon_n.i} +$$

$$+ \sum_{i:\omega_{\varepsilon_n,i}(x_{\varepsilon_n,i})>0} \omega_{\varepsilon_n,i}(x_{\varepsilon_n})\cdot u_{\varepsilon_n,i} \in$$

$$\in F(x_o) + \mathrm{conv}\left(U_{\frac{\delta}{C(F(K))}} \cap (F(K) - F(K))\right) \subseteq F(x_o) + U_\delta$$

što znači da $x_o \in \overline{F(x_o)+U_\delta}$ za svako δ pa je zbog toga $x_o \in \overline{F(x_o)} = F(x_o)$.

Iz Tvrdjenja I.2. i Teoreme I.4. dobija se sledeća posledica:

Posledica I.2. Neka je $(E, \| \ \|^*)$ paranormiran prostor, K neprazan, zatvoren i konveksan podskup od E, $F : K \to 2^K$ kompaktno preslikavanje tako da je $\overline{\mathrm{conv}}\, F(x) = F(x)$ za svako $x \in K$ i zadovoljen Zimin uslov za skup $F(K)$. Ako je E kompletan onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja F.

Dokaz: Skup $\overline{\mathrm{conv}}\, F(K)$ je kompaktan i na njemu su zadovoljeni svi uslovi Teoreme I.4. za preslikavanje $F_o = F|\overline{\mathrm{conv}}\, F(K)$.

I.3. TEOREMA O NEPREKIDNOJ SELEKCIJI U PARANORMIRANIM PROSTORIMA

Jedan od interesantnih i važnih problema u topologiji je problem proširenja, ekstenzije preslikavanja.

Neka su data dva topološka prostora X i Y i neka je A zatvoren podskup od X. Problem je: kada se svaka neprekidna funkcija $g : A \to Y$ može proširiti do neprekidne funkcije f definisane na celom prostoru X? Ograničenja, s obzirom na funkciju f, mogu biti i sledećeg oblika: za svako $x \in X$, $f(x)$ mora biti elemenat nekog unapred utvrdjenog skupa. Ovaj novi problem, koji se naziva problem selekcije, je daleko opštiji od problema ekstenzije.

Specijalne slučajeve problema selekcije ispitivali su Tong H. |80|, Katetov M. |74|, C. H. Dowker |71| ali tek pedesetih godina E. Michael je došao do značajnih rezultata. U radu |50| Michael je pokazao da se većina do tada poznatih teorema o ekstenziji, kao što je Urisonova karakterizacija normalnih prostora, teorema o ekstenziji za konačno dimenzionalne prostore Kuratovskog, teorema o proširenju homotopije, mogu dobiti iz odgovarajućih teorema teorije selekcije.

Definicija I.10. Preslikavanje $F : X \to 2^Y$ ima osobinu neprekidne selekcije ako i samo ako postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ tako da je:

$$f(x) \in F(x)$$

za svako $x \in X$.

Definicija I.11. Preslikavanje $F : X \to 2^Y$ ima osobinu gotovo neprekidne selekcije ako i samo ako za svaku okolinu nule V u Y postoji neprekidno preslikavanje $f_V : X \to Y$ tako da je:

$$f_V(x) \in \{F(x) + V\} \cap \operatorname{conv} F(X)$$

za svako $x \in X$.

Definicija I.12. Dimenzija topološkog prostora X, u oznaci $\dim X$, je ceo broj $n \geq -1$ ili ∞ koji je induktivno odredjen na sledeći način:

1. $\dim X = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$;
2. ako je $X \neq \emptyset$ onda je $\dim X = \sup\limits_{p \in X} \dim_p X$ (gde se $\dim_p X$ naziva dimenzija prostora X u tački p)
3. $\dim_p X \leq n + 1$ ako i samo ako svaka okolina tačke p sadrži okolinu tačke p čiji rub ima dimenziju $\leq n$.

Posebno mesto u ovoj klasifikaciji zauzimaju 0-dimenzionalni prostori koji imaju niz značajnih karakteristika kao što je na primer sledeća:

Tvrdjenje I.3. |51| X je 0-dimenzionalan prostor ako i samo ako svaki otvoren i konačan prepokrivač ima disjunktan, konačan i otvoren prepokrivač koji je od njega finiji.

Definicija I.13. Neka je X topološki prostor i $Z \subset X$. $\mathrm{Dim}_X Z \leq n$ ako i samo ako je $\dim S \leq n$ za svaki podskup S od Z, gde je S zatvoreno u X.

U jednom od svojih radova E. Michael i C. Pixley dokazali su teoremu koja objedinjuje i uopštava ranije poznate rezultate. Sa $F(Y)$ označimo familiju svih nepraznih i zatvorenih a sa $R(Y)$ familiju svih nepraznih, zatvorenih i konveksnih podskupova od Y.

Teorema I.5. |51| Neka je X parakompaktan, Y Banachov prostor, $Z \subseteq X$ za koji je $\dim_X Z \leq 0$, $\sigma : X \to F(Y)$ l.s.c. preslikavanje takvo da je $\sigma(x)$ konveksno za svako $x \in X \setminus Z$. Tada σ dopušta neprekidnu selekciju.

Analizom dokaza ove teoreme lako se može uočiti da ukoliko je $\bigcup\limits_{x \in X} \sigma(x)$ sadržano u nekom kompaktnom podskupu dovoljno je za X pretpostaviti samo normalnost.

Pre nego što dokažemo jedno uopštenje ovog rezultata pokazaćemo sledeću osobinu paranormiranih prostora:

Lema I.1. Neka je K neprazan, konveksan i kompaktan podskup paranormiranog prostora $(E, \|\ \ \|^*)$. Ako skup K zadovoljava Zimin uslov onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ tako da je:

$$\mathrm{conv}\left((B + U_\delta) \cap K\right) \subseteq B + U_\varepsilon$$

za svaki neprazan, konveksan i zatvoren podskup B u K.

Dokaz: Neka je $\delta > 0$ tako da je

$$U_\delta + U_\delta \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{C^2}} \qquad \left(C = C(K)\right).$$

Pošto je i skup B kompaktan postoji podskup $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset B$ takav da je:

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i + U_{\frac{\varepsilon}{2C^2}}\}$$

Ali tada je i:

$$B + U_{\frac{\varepsilon}{2C^2}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i + U_{\frac{\varepsilon}{2C^2}}\} + U_{\frac{\varepsilon}{2C^2}} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i + U_{\frac{\varepsilon}{C^2}}\}.$$

Neka je $\{p_k\}_{k=1}^n$ podela jedinice koja odgovara prepokrivaču $\{x_i + U_{\frac{\varepsilon}{C^2}}\}_{i=1}^n$. Proizvoljan elemenat $z \in \mathrm{conv}\left((B + U_{\frac{\varepsilon}{2C^2}}) \cap K\right)$ može se napisati kao $z = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j z_j$ gde je $z_j \in \left(B + U_{\frac{\varepsilon}{2C^2}}\right) \cap K$, $\gamma_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,\ell$ i $\sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j = 1$. Ako je $b_j = \sum_{k=1}^{n} p_k(z_j) x_k$ onda $b_j \in B$ za $j=1,2,\dots,\ell$. Isto tako i $b = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j b_j \in B$.

Tada je:

$$||z-b||^* = ||\sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j z_j - \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j b_j||^* \leqslant C\cdot \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j ||z_j - b_j||^* \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j || \sum_{k=1}^{n} p_k(z_j)(z_j - x_k)||^* \leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j (\sum_{k=1}^{n} p_k(z_j)||z_j - x_k||^*) =$$

$$= C^2\cdot \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j \sum_{k:p_k(z_j)>0} p_k(z_j)||z_j - x_k||^* \leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j \sum_{k:p_k(z_j)>0} p_k(z_j) \frac{\varepsilon}{C^2} = \varepsilon$$

što znači da je $z \in U_\varepsilon + b \subseteq U_\varepsilon + B$ a to je i trebalo dokazati.

Teorema I.6. Neka je X normalan topološki prostor, $(Y, ||\ \ ||^*)$ paranormiran prostor, $Z \subseteq X$ takav da $\dim_X Z \leqslant 0$ i $\sigma : X \to F(Y)$ l.s.c. preslikavanje tako da je $\sigma(x)$ konveksno za $x \in X\setminus Z$. Ako je $\sigma(X) \subseteq K$ gde je K konveksan i kompaktan i zadovoljava Zimin uslov onda σ ima osobinu gotovo neprekidne selekcije.

Dokaz. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Iz Leme I.1 sledi da postoji $\delta > 0$ tako da je za svako $x \in X\setminus Z$:

$$\operatorname{conv}\Big((\sigma(x) + U_\delta) \cap K\Big) \subset \sigma(x) + U_\varepsilon$$

Prepokrivač $\{U_\delta + y\}_{y\in K}$, zbog kompaktnosti, ima konačan podprepokrivač $\{U_\delta + y_i\}_{i=1}^{n}$. Neka je:

$$U_{y_k} = \{x \in X : y_k \in \sigma(x) + U_\delta\} \quad \text{za} \quad k=1,2,\dots,n.$$

Sada je $\{U_{y_k}\}_{k=1}^{n}$ jedan otvoren prepokrivač od X jer je σ l.s.c. preslikavanje. Pošto je X normalan topološki prostor postoji nov otvoren prepokrivač $\{V_{y_k}\}_{k=1}^{n}$ sa osobinom da je $\overline{V}_{y_k} \subset U_{y_k}$ za svako k. Skupovi $F_x = \{y_k \in K : x \in \overline{V}_{y_k}\}$ imaju osobinu da je $F_x \subset \sigma(x) + U_\delta$ za svako $x \in X$. Neka je dalje $S = X \setminus Z$ i za svako $s \in S$ neka je:

$$G_s = \{x \in X : \operatorname{conv} F_s \subseteq \sigma(x) + U_\varepsilon\} \setminus \bigcup \{\overline{V}_{y_k} : y_k \notin F_s\}$$

Tada $s \in G_s$ jer je $\operatorname{conv} F_s \subset \operatorname{conv}\left((U_\delta + \sigma(s)) \cap K\right) \subset \sigma(s) + U_\varepsilon$ pa je $G_s \neq \emptyset$, za $s \in S$. Skupovi G_s, $s \in S$ su otvoreni (Lema 11.3 |50|) i za svako $x \in G_s$ važi da je $F_x \subset F_s$ jer $x \notin \overline{V}_{y_k}$ ako $y_k \notin F_s$. Neka je $G = \bigcup_{s \in S} G_s$ a $E = X \setminus G$. Skup E je zatvoren i podskup od Z te je $\dim E \leqslant 0$. Za relativno otvoren prepokrivač $\{V_{y_k} \cap E\}_{k=1}^{n}$ od E postoji relativno otvoren, disjunktan prepokrivač $\{D_{y_k}\}_{k=1}^{n}$ od E sa osobinom da je $D_{y_k} \subset V_{y_k} \cap E$ za $k=1,2,\dots,n$. Neka je $W_{y_k} = V_{y_k} \cap (D_{y_k} \cup G)$. Prepokrivač $\{W_{y_k}\}_{k=1}^{n}$ je otvoren te postoji odgovarajuća podela jedinice $\{p_{y_k}\}_{k=1}^{n}$.

Definišimo preslikavanje:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{y_k}(x)\, y_k \quad , \qquad x \in X.$$

Ono je neprekidno po konstrukciji pa preostaje još da se pokaže da $f(x) \in U_\varepsilon + \sigma(x)$ za svako $x \in X$.

Ako $x \in E$ onda je $f(x) = y_k \in (\sigma(x) + B_\delta) \cap K \subset \subset \sigma(x) + B_\varepsilon$ za jedinstveno y_k za koje $x \in D_{y_k}$.

Ako $x \in G$ onda $x \in G_s$ za neko $s \in S$ pa je

$$f(x) \in \operatorname{conv} F_x \subset \operatorname{conv} F_s \subset U_\varepsilon + \sigma(x)$$

što je i trebalo dokazati.

Ako je paranormiran prostor Y i kompletan onda slično kao i u |51|, dobijamo da σ ima neprekidnu selekciju, tj. važi:

Posledica I.3. Neka je X normalan topološki prostor, Y kompletan paranormiran, $Z \subseteq X$ sa $\dim_X Z \leqslant 0$ a $\sigma : X \to F(Y)$ l.s.c. preslikavanje tako da je $\sigma(x)$ konveksno za $x \in X \setminus Z$. Ako je $\sigma(X) \subseteq K$, pri čemu je skup K konveksan, kompaktan i na njemu je zadovoljen Zimin uslov, onda σ dopušta neprekidnu selekciju.

Svaki rezultat iz teorije selekcije povlači i rezultate iz teorije nepokretne tačke.

Teorema I.7. Neka je $(Y, \|\ \|^*)$ kompletan paranormiran prostor, K neprazan, konveksan i kompaktan podskup koji zadovoljava Zimin uslov, $Z \subseteq K$ sa osobinom $\dim_Y Z \leqslant 0$ i $\sigma : K \to F(K)$ l.s.c. preslikavanje tako da je $\sigma(x)$ konveksno za svako $x \in K \setminus Z$. Tada postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja σ.

Dokaz. Pošto je svaki kompaktan topološki prostor normalan iz prethodne teoreme sledi da postoji neprekidna selekcija preslikavanja σ. Ali ona, koristeći Posledicu I.1, ima nepokretnu tačku koja je ujedno i nepokretna tačka preslikavanja σ.

Posledica I.4. Neka je $(Y, \|\ \|^*)$ kompletan paranormiran prostor, K neprazan, zatvoren i konveksan podskup od Y, $\sigma : K \to F(K)$ l.s.c. preslikavanje tako da je $\overline{\sigma(K)}$ kompaktno, $\overline{\text{conv}}\ \sigma(K)$ zadovoljava Zimin uslov i postoji $M \subseteq \overline{\text{conv}}\ \sigma(K)$ tako da je $\dim_Y M \leq 0$. Ako je $\sigma(x)$ konveksno za svako $x \in \overline{\text{conv}}\ \sigma(K) \setminus M$ onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja σ.

Dokaz. Primenićemo Teoremu I.7. na skup $\overline{\text{conv}}\ \sigma(K)$. Pošto je $\overline{\sigma(K)}$ kompaktno a Y kompletno na osnovu Tvrdjenja I.2. i skup $\overline{\text{conv}}\ \sigma(K)$ je kompaktan. Pošto je $\sigma(K) \subseteq K$ a K konveksno i zatvoreno imamo da je i $\sigma(\overline{\text{conv}}\ \sigma(K)) \subseteq \sigma(K) \subseteq \overline{\text{conv}}\ \sigma(K)$ pa su svi uslovi za primenu Teoreme I.7. zadovoljeni.

Posledica I.5. Neka je Y kompletan paranormirani prostor, K neprazan, zatvoren i konveksan podskup od Y, $\sigma : K \to F(K)$ l.s.c. preslikavanje tako da je na skupu $\overline{\text{conv}}\ \sigma(K)$ zadovoljen Zimin uslov i

1) Postoji neprazan podskup $C \subset K$ takav da je $C \subset \sigma(C)$ i $M \subseteq C$, $\dim_Y M \leq 0$ takav da je

$\sigma(x)$ konveksno za svako $x \subset K \setminus M$;

2) Ako je $Q = \overline{\text{conv}}\, Q \subset K$ i $Q = \overline{\text{conv}}\, \sigma(Q)$ onda je Q kompaktno.

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja σ.

Dokaz. Slično kao i u | 5 | neka je:

$$A = \{Q,\ Q \subseteq K,\ Q = \overline{\text{conv}}\, Q,\ C \subseteq Q,\ \sigma(Q) \subseteq Q\}\ .$$

A je neprazna familija sa osobinom:

$$Q \in A \Longrightarrow \overline{\text{conv}}\, \sigma(Q) \in A\ .$$

Neka je $C_0 = \bigcap_{Q \in A} Q$. Pošto je $C \subseteq C_0$, C_0 je neprazan, zatvoren i konveksan podskup od K. Na osnovu 2) C_0 je i kompaktan jer je $C_0 = \overline{\text{conv}}\, \sigma(C_0)$. Pošto je $M \subset C \subset C_0$ važi da je

$$C_0 \setminus M \subseteq K \setminus M$$

pa su uslovi Teoreme I.7 za preslikavanje $\sigma | C_0$ zadovoljeni , a time ovo tvrdjenje dokazano.

Na sličan način se može pokazati da Lema I.1 važi i za jednu klasu konveksnih i kompaktnih podskupova proizvoljnog realnog Hausdorfovog vektorskog topološkog prostora.

Neka je E vektorski prostor nad poljem K realnih ili kompleksnih brojeva, R^{Δ} neka je skup svih preslikavanja iz Δ u R sa topologijom proizvoda Tihonova i operacijama $+$ i množenja skalarom. Ako $f, g \in R^{\Delta}$ kažemo da je $f \leqslant g$ ako i samo ako je $f(t) \leq g(t)$ za svako $t \in \Delta$. Sa P^{Δ} označićemo konus nenegativnih elemenata u R^{Δ}.

Definicija I.14. Trojka $(E, \| \ \|, \Phi)$ je Φ-paranormirani prostor ako i samo ako je $\| \ \| : E \to P^{\Delta}$, Φ linearna, neprekidna i pozitivna funkcija iz R^{Δ} u R^{Δ} koja zadovoljava sledeće uslove:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|tx\| = |t| \, \|x\|$, za svako $x \in E$ i svako $t \in K$;
3. $\|x+y\| \leq \Phi(\|x\|) + \Phi(\|y\|)$ za sve $x, y \in E$.

Topologija na $(E, \| \ \|, \Phi)$ je uvedena na sledeći način: Bazu okolina nule čine skupovi oblika:

$$U_{\mu,\varepsilon} = \{x \mid x \in E \ , \ \|x\|(t) < \varepsilon, \text{ za svako } t \in \mu\}$$

gde je μ konačan podskup od Δ i $\varepsilon > 0$.

S. Kasahara je pokazao da se svaki vektorski topološki prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva može paranormirati nad nekim topološkim polupoljem R^{Δ} |39|.

Definicija I.15. |12| Neka je $(E, \| \ \|, \Phi)$ Φ-paranormiran prostor nad polupoljem R^{Δ} i $K \subseteq E$. K je Φ-tipa ako i samo ako je za svako $n \in N$, $u_i \in K-K$ $(i=1,2,\ldots,n)$ i $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [0,1]^n$, $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$, zadovoljena nejednakost

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} s_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} s_i \Phi(\|u_i\|) \ .$$

Lema I.2. Neka je $(Y, \|\ \|, \Phi)$ paranormiran prostor, K neprazan, konveksan i kompaktan podskup od Y Φ-tipa. Tada za svako $U \in \{U_{\mu,\varepsilon}\}$ postoji $V \in \{U_{\mu,\varepsilon}\}$ tako da je:

$$\operatorname{conv}\Big((V + C) \cap K\Big) \subseteq C + U$$

za svaki zatvoren i konveksan podskup C od K.

Dokaz. Neka je $U = U_{\mu,\varepsilon}$, $\mu \in \Delta$ i $\varepsilon > 0$. Pošto je preslikavanje Φ linearno i neprekidno skup:

$$N_1 = (\Phi^2)^{-1}(U_{\mu,\varepsilon})$$

je okolina nule u R^{Δ}. Neka je $\mu' \in \Delta$ i $\varepsilon' > 0$ tako da je:

$$U_{\mu',\varepsilon'} \subseteq \{x \mid \|x\| \in N_1\}$$

a $\mu'' \in \Delta$ i $\varepsilon'' > 0$ tako da je

$$U_{\mu'',\varepsilon''} + U_{\mu'',\varepsilon''} \subseteq U_{\mu',\varepsilon''}$$

Pokazaćemo da je:

$$\operatorname{conv}\Big((C + U_{\mu'',\varepsilon''}) \cap K\Big) \subset C + U_{\mu,\varepsilon}$$

Neka je z i c kao u Lemi I.1., pri čemu je $U_{\mu'',\varepsilon''}$ umesto U_δ i $U_{\mu',\varepsilon'}$ umesto $U_{\frac{\varepsilon}{C^2(K)}}$. Za proizvoljno $t \in \mu$ sledi da je:

$$\|z-c\|(t) = \Big\|\sum_{j=1}^{m} \gamma_j z_j - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j c_j\Big\|(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \Phi(||z_j - c_j||)(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(z_j)\Phi(||z_j - x_k||)\right)(t) <$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(z_j)\Phi^2(||z_j - x_k||)(t)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \left(\sum_{\substack{k=1 \\ \beta_k(z_j)\neq 0}}^{n} \beta_k(z_j)\Phi^2(||z_j - x_k||)(t)\right)$$

Pošto $\beta_k(z_j) \neq 0$ implicira da $z_j - x_k \in U_{\mu',\varepsilon'}$ sledi da $||z_j - x_k|| \in N_1$ te se na kraju dobija da je:

$$||z-c||(t) \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ \beta_k(z_j)\neq 0}}^{m} \gamma_j \sum_{k=1}^{m} \beta_k(z_j)\varepsilon = \varepsilon$$

što znači da $z-c \in U_{\mu,\varepsilon}$.

Pomoću ove leme može se pokazati sledeća teorema o nepokretnoj tački.

Teorema I.8. Neka je Y kompletan Φ-paranormiran prostor, K neprazan, konveksan i kompaktan podskup od Y Φ-tipa i $Z \subseteq K$ sa $\dim_Y Z \leqslant 0$. Neka je, dalje, $\sigma : K \to F(K)$ l.s.c. preslikavanje tako da je $\sigma(x)$ konveksno za svako $x \in K \setminus Z$ i skup $\{x | x \in K,\ C \subset U + \sigma(x)\}$ otvoren za svako $C \subseteq Y$ koje je kompaktno i $U \in \{U_{\mu,\varepsilon}\}$. Tada postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja σ.

II GLAVA

NEKE PRIMENE TEOREME O NEPOKRETNOJ TAČKI U VEKTORSKIM TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

II.1. PRIMENA PRINCIPA DUALITETA

O. Hadžić je u radu |19| dokazala uopštenje teoreme Kakutanija čije ćemo neke primene pokazati u ovoj glavi. Evo prvo te teoreme.

Teorema II.1. |19| Neka je K neprazan i konveksan podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E a $F : K \to \mathcal{R}(K)$ kompaktno preslikavanje. Ako za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ je baza okolina nule) tako da je:

$$(1) \qquad \operatorname{conv}\Big(U \cap \big(F(K) - F(K)\big)\Big) \subseteq V$$

onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja F.

Sa $\mathcal{R}(K)$, kao što je ranije rečeno, označena je familija nepraznih, konveksnih i zatvorenih podskupova skupa K.

Pošto se osobina (1) pokazala kao vrlo značajna i korisna u teoriji nepokretne tačke O. Hadžić je uvela sledeću definiciju:

Definicija II.1. Podskup $K \subseteq E$ je Z-tipa ako i samo ako za svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $U \in \mathcal{V}$ tako da

$$\operatorname{conv}\big(U \cap (K-K)\big) \in V.$$

Da klasa Z-podskupova nije prazna pokazaće nam sledeća dva primera.

PRIMER II.1. Neka je $(E, \|\ \|^*)$ paranormiran rostor (Definicija I.2.). Svaki podskup $K \subseteq E$ koji zadovoljava Zimin uslov zadovoljava i Z-uslov. Neka je $K \subseteq E$ koji adovoljava Zimin uslov a $V \in \mathcal{U}$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da e $U_\varepsilon \subseteq V$. Lako se može pokazati da se za okolinu U može zeti $U_{\frac{\varepsilon}{C(K)}}$. Naime, ako $z \in \operatorname{conv}\left(U_{\frac{\varepsilon}{C(K)}} \cap (K-K)\right)$ onda je

$= \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$ gde $z_i \in U_{\frac{\varepsilon}{C(K)}} \cap (K-K)$ a $t_i \geqslant 0$, $i=1,2,\dots,n$,

$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ i

$$\|z\|^* = \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\|^* < C(K) \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \frac{\varepsilon}{C(K)} = \varepsilon$$

to znači da $z \in U_\varepsilon \subseteq V$.

PRIMER II.2. Neka je $(E, \|\ \|, \Phi)$ Φ paranormiran rostor iz Definicije I.14.

U radu |15| O. Hadžić je pokazala sledeću lemu:

Lema II.1. Ako je $(E, \|\ \|, \Phi)$ Φ paranormiran rostor i $K \subseteq E$ podskup Φ-tipa onda je K i Z-tipa.

A. Tarfdar i T. Husain došli su na vrlo jednostavnu li interesantnu i korisnu ideju da primene princip dualnosti i teoriji nepokretne tačke. Neka je $F : X \to 2^Y$ i za svako $\in F(x)$ neka je:

$$F^{-1}(y) = \{x \mid x \in X,\ \ y \in F(x)\}.$$

ada $F^{-1} : F(X) \to 2^X$ i očigledno x je nepokretna tačka reslikavanja F ako i samo ako je i nepokretna tačka preslikavanja F^{-1}.

arafdar i Husein su takodje dokazali potreban i dovoljan usov da F^{-1} bude u.s.c. |62|.

Tvrdjenje II.1. Ako su X, Y i $F(X)$ kompaktni a (x) $(x \in X)$ i $F^{-1}(y)$ $(y \in F(X))$ zatvoreni onda je preslikavanje $: X \to 2^Y$ u.s.c. ako i samo ako je $F^{-1} : F(X) \to 2^X$ u.s.c.

Teorema II.2. |82| Neka je K neprazan i kompaktan odskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E i nea K zadovoljava Z-uslov. Ako je $F : K \to \mathcal{R}(E)$ u.s.c. presikavanje takvo da je $K \subseteq F(K)$, $F^{-1}(x) = \overline{\text{conv}}\, F^{-1}(x)$, $x \in F(K)$ $F(K)$ konveksno i kompaktno onda postoji nepokretna tačka reslikavanja F.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $T : F(K) \to 2^K$ sa

$$T(x) = F^{-1}(x) \qquad \text{za svako} \quad x \in F(X).$$

obzirom na pretpostavke T je u.s.c. preslikavanje. Za svako $\in \mathcal{U}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je

$$\text{conv}\left(U \cap (T(F(K)) - T(F(K))\right) \subseteq V$$

er je $\text{conv}\left(U \cap (K-K)\right) \subseteq V$. Iz Teoreme II.1 sada sledi egzisencija nepokretne tačke preslikavanja T a ona je istovremeo i nepokretna tačka preslikavanja F.

Slično kao i u radu |20| O. Hadžić, koristeći se

Teoremom II.2. pokazaćemo teoremu o nepokretnoj tački višeznačnog preslikavanja $F + S$ gde je F jednoznačno a S višeznačno preslikavanje.

Teorema II.3. Neka je E Hausdorffov vektorski topološki prostor, K neprazan, kompaktan podskup od E i K zadovoljava Z-uslov. Dalje, neka je $F : E \to E$ linearno i neprekidno preslikavanje, $S : K \to 2^E$ u.s.c. preslikavanje tako da je $(I-F)(K) \subseteq S(K)$ i zadovoljeni su sledeći uslovi

1. $S(K)$ je kompaktno i konveksno ;
2. $S(x) = \operatorname{conv} S(x)$, za svako $x \in K$ i $S^{-1}(y) = \overline{\operatorname{conv}}\, S^{-1}(y)$ za svako $y \in S(K)$;
3. Za svako $y \in S(K)$ postoji jedno i samo jedno $x(y) \in E$ tako da je $x(y) = F(x(y)) + y$ i skup $\overline{\{x(y)\}}_{y \in S(K)}$ je kompaktan.

Tada je $\operatorname{Fix}(F+S) \neq \emptyset$.

Dokaz. Pošto za svako $y \in S(K)$ postoji $x(y) \in E$ tako da je $x(y) = F(x(y)) + y$ definisaćemo preslikavanje $R : S(K) \to E$ na sledeći način:

$$Ry = x(y) \qquad \text{za svako } y \in S(K).$$

Pokazaćemo pre svega, da je R neprekidno preslikavanje. Neka je $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset S(K)$ konvergentna mreža i neka je $\lim_{\alpha \in A} y_\alpha = y$.

Pošto je skup $\overline{\{Ry \mid y \in S(K)\}}$ kompaktan postoji

odmreža $\{y_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in B}$ takva da je $\lim\limits_{\beta\in B} Ry_{\alpha_\beta} = z$. Za svako $\alpha\in A$
e:

$$Ry_\alpha = FRy_\alpha + y_\alpha$$

e je:

$$\lim_{\beta\in B} Ry_{\alpha_\beta} = F(\lim_\beta Ry_{\alpha_\beta}) + \lim_\beta y_{\alpha_\beta}$$

a važi da je $z = Fz + y$ što znači da je $z = Ry$. Pošto za
vaku konvergentnu podmrežu od $\{Ry_\alpha\}$ važi da ima istu granicu
ledi da je i

$$\lim_\alpha Ry_\alpha = Ry.$$

osmatrajmo sada preslikavanje $R^{-1} : R\big(S(K)\big) \to S(K)$.
ošto je $R^{-1}z = z-Fz$ za svako $z\in R\big(S(K)\big)$ preslikavanje
$^{-1}$ je takodje neprekidno na $R\big(S(K)\big)$.
efinišimo preslikavanje $R^* : K \to 2^E$ na sledeći način:

$$R^*x = \bigcup_{y\in Sx} Ry .$$

okazaćemo da preslikavanje R^* zadovoljava sve uslove Teore-
e II.2..Iz $Ry = FRy + y$ sledi da je $K\subseteq R^*(K)$ jer za svako
$\in K$ postoji $y\in S(K)$ tako da je $y = z - Fz$ te je
$= Ry\in R\big(S(K)\big)$. Pošto je S u.s.c. preslikavanje a R nep-
ekidno i R^* je u.s.c. preslikavanje. Kako je R afini homeo-
orfizam sledi da je za svako $x\in K$ $R\big(S(x)\big)$ zatvoreno i da je
(K) kompaktan i konveksan podskup od E. Preostaje još da
e pokaže da je $(R^*)^{-1}(x)$ zatvoreno i konveksno. Ali
$R^*)^{-1} = S^{-1}\cdot R^{-1}$ pa je i taj uslov zadovoljen. Sada iz Teore-
e II.2 sledi da je $Fix(R^*) \neq \emptyset$. Pošto je $Fix(R^*) \subseteq Fix(F+S)$
rdjenje je dokazano.

II.2. TEOREMA O NEPRAZNOM PRESEKU FAMILIJE ZATVORENIH SKUPOVA I PRIMENA NA MINIMAX PROBLEM

Koristeći Teoremu II.1 pokazaćemo, pre svega, uopštenje Teoreme 13. F.E. Browdera |3|.

Teorema II.4. Neka je $\{K_i\}_{i\in I}$ familija nepraznih konveksnih i kompaktnih podskupova Hausdorffovih vektorskih topoloških prostora $\{E_i\}_{i\in I}(K_i \subseteq E_i,\ i\in I)$, $K = \prod_{i\in I} K_i$ i za svako $i\in I$ $K_i' = \prod_{j\neq i} K_j$. Dalje neka je $S_i = \overline{S}_i \subseteq K$ i za svako $x\in K$, $i\in I$ neka je skup:

$$S_i(x) = \{y_i | y_i \in K_i,\quad [y_i, \hat{x}_i]\in S_i\},\qquad \hat{x}_i = \mathrm{proj}_{K_i'} x$$

neprazan i konveksan.

Ako je za svako $i\in I$ skup K_i Z-tipa onda je:

$$\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset$$

Dokaz. Definišimo preslikavanje $T : K \to 2^K$ na sledeći način:

$$y\in T(x)\,(x\in K) \iff y = (y_i)\quad \text{gde je } y_i \in S_i(x) \text{ za svako } i\in I,$$

tj. $T(x) = \prod_{i\in I} S_i(x)$ za svako $x\in K$. Pokazaćemo da preslikavanje T i skup K zadovoljavaju sve uslove Teoreme II.1.

Pošto je po pretpostavci $S_i(x)$, $i \in I$ neprazno i konveksno i $T(x)$ je neprazno i konveksno. Neka su preslikavanja $\pi_1 : K_i x K_i' \to K_i$ a $\pi_2 : K_i x K_i' \to K_i'$ projekcije. Skup $\{\hat{x}_i\}$ je zatvoren (prostori su Hausdorffovi) pa je i $\pi_2^{-1}(\hat{x}_i)$ zatvoren pa i kompaktan u K te je $\pi_2^{-1}(\hat{x}_i) \cap S_i$ zatvoreno a time i kompaktno. Lako se pokazuje da je:

$$S_i(x) = \pi_1(\pi_2^{-1}(\hat{x}_i) \cap S_i), \qquad i \in I$$

pa je $T(x)$ kao proizvod kompaktnih skupova i sam kompaktan. Time je pokazano da $T : K \to \mathcal{R}(K)$.

Sada ćemo pokazati da je skup K Z-tipa. Neka je $\mathcal{V}$ fundamentalan sistem okolina nule u $E = \prod_{i \in I} E_i$ a $\mathcal{V}_i$ fundamentalan sistem okolina nule u E_i za svako $i \in I$. Treba da pokažemo da za svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $U \in \mathcal{V}$ tako da je:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{conv}\Big(U \cap (K-K)\Big) \subseteq V$$

Neka je $V \in \mathcal{V}$. Tada postoji konačan podskup $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq I$ tako da je $V = \prod_{i \in I} E_i'$ gde je:

$$E_i' = \begin{cases} E_i, & i \in I \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \\ V_i, & i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \end{cases}$$

a $V_i \in \mathcal{V}_i$ $(i = i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Pošto su skupovi $K_i \subseteq E_i$ $(i \in I)$ i K_i je Z-tipa postoji $U_i \in \mathcal{V}_i$ tako da je

$$\mathrm{conv}\left(U_i \cap (K_i - K_i)\right) \subseteq V_i\ , \qquad i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}.$$

pokazaćemo da za okolinu U, čija se egzistencija u (2) traži, možemo uzeti okolinu:

$$U = \prod_{i \in I} E_i'' \quad \text{gde je} \quad E_i'' = \begin{cases} E_i\ , & i \in I \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \\ U_i\ , & i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \end{cases}$$

Neka je $z \in \mathrm{conv}\left(U \cap (K-K)\right)$. To znači da postoji $u^k \in U \cap (K-K)$ $(k=1,2,\ldots,m)$, $r_k \geqslant 0$ $(k=1,2,\ldots,m)$ i $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$ tako da je:

$$z = \sum_{k=1}^{m} r_k u^k\ . \tag{3}$$

Iz (3) sledi da je $\mathrm{proj}_{E_i} z = \sum_{k=1}^{m} r_k \mathrm{proj}_{E_i} u^k$ za svako $i \in I$.

Neka $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Pošto je $\mathrm{proj}_{E_i} u^k \in E_i'' \cap (K_i - K_i) = U_i \cap (K_i - K_i)$ sledi da je:

$$\mathrm{proj}_{E_i} z \in \mathrm{conv}\left(U_i \cap (K_i - K_i)\right) \subseteq V_i$$

a to znači da $z \in V$ što je i trebalo dokazati.

Kao i u |3| može se pokazati da je T zatvoreno preslikavanje. Pretpostavimo da $(x,y) \notin \mathrm{Gr}(T)$. To znači da postoji bar jedno $i \in I$ takvo da $y_i \notin S_i(x)$ tj. da $[y_i, \hat{x}_i] \notin S_i$. Pošto je S_i kompaktno postoji okolina N_1 od y_i u K_i i okolina N_2 od $\hat{x}_i$ u K_i^* tako da je:

$$(N_1 \times N_2) \cap S_i = \emptyset\ .$$

Ako je $N_1' = N_1 \times K_i'$ i $N_2' = K_i \times N_2$ za svako $\in N_2'$ i $y \in N_1'$ imamo da je $y_i' \notin S_i(x)$ tj.

$$(N_2' \times N_1') \bigcap Gr(T) = \emptyset$$

to znači da je preslikavanje T zatvoreno. Ali svako zatvo-eno preslikavanje nad kompaktnim skupom je i u.s.c. što znači a je i T u.s.c. preslikavanje. Svi uslovi za primenu Teo-eme II.1 su zadovoljeni pa postoji $u \in K$ takvo da je $\in T(u)$ ali to znači da je $u_i \in S_i(u)$ za svako $i \in I$ te je:

$$\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$$

oristeći princip dualnosti pokazaćemo sledeće tvrdjenje.

Tvrdjenje II.2. Neka je $\{K_i\}_{i \in I}$ familija nepraz-ih, konveksnih i kompaktnih podskupova Z-tipa Hausdorffovih ektorskih topoloških prostora $\{E_i\}_{i \in I}$ $(K_i \subseteq E_i,\ i \in I)$, $= \prod_{i \in I} K_i$ i $S_i = \bar{S}_i \subseteq K$ za svako $i \in I$. Neka je, za vako $x = (x_i) \in K$, $A(x) = \bigcap_{i \in I} S_i(x)$ gde je:

$$S_i(x) = \{y_i \mid y_i \in K_i\ ,\ [y_i, \hat{x}_i] \in S_i\}$$

i

$$S_i(x_i) = \{\hat{x}_i \in K_i'\ ,\ [x_i, \hat{x}_i] \in S_i\},\quad K_i' = \prod_{j \neq i} K_j$$

ko, je:

1) $K = \bigcup_{x \in K} A(x)$;

2) za svako $x \in K$ skup $S_i(x)$ je neprazan za svako $i \in I$;

3) za svako $x \in K$ i svako $i \in I$ skup $S_i(x_i)$ je konveksan;

da je:

$$\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$$

Dokaz. Kao i u |62| definišimo preslikavanje : $K \to 2^K$ sa $T(x) = A(x)$ za svako $x \in K$. Iz 2) sledi da $T(x) \neq \emptyset$ za svako $x \in K$ i kao i u Teoremi II.4 da je x) kompaktno pa i zatvoreno za svako $x \in K$. Kako je

$$T^{-1}(y) = \bigcap_{i \in I} \left((S_i(y_i) \times K_i)\right)$$

$S_i(y_i) = \pi_2(\pi_1^{-1}(y_i) \cap S_i)$, gde je $\pi_1 : K_i \times K_i' \to K_i$, i : $K_i \times K_i' \to K_i'$, važi da je $\overline{\text{conv}}\ T^{-1}(y) = T^{-1}(y)$ za svako $\in T(K)$. Kao i u prethodnoj teoremi može se pokazati da je skup Z-tipa i da je T u.s.c. preslikavanje. Pošto je $K = T(K)$ osnovu Teoreme II.2 sledi da postoji $u \in K$ tako da je $\in T(u)$ što povlači da je $u \in \bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$.

ristedi Lemu II.1 dobijamo sledeću posledicu:

Posledica II.1. Neka je $\{K_i\}$ familija nepraznih nveksnih i kompaktnih podskupova Φ_i-paranormiranih prostora $_i, \|\ \|_i, \Phi_i)$, $i \in I$, $K = \prod_{i \in I} K_i$ a S_i, K_i' i $S_i(x)$ $\in K$, $i \in I$) kao u Teoremi II.4.

o je za svako $i \in I$ skup K Φ_i-tipa onda je:

$$\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset.$$

slično, koristeći činjenicu da svaki Zimin podskup paranormiranog prostora zadovoljava Z-uslov, dobija se još jedna posledica prethodne teoreme.

Posledica II.2. Neka je $\{K_i\}_{i\in I}$ familija nepraznih, kompaktnih i konveksnih podskupova paranormiranih prostora $\{(E_i, ||\ ||_i^*)\}_{i\in I}$, $(K_i \subseteq E_i$, za svako $i \in I)$, $K = \prod_{i\in I} K_i$ i K_i', S_i, i $S_i(x)$ $(x \in K,\ i \in I)$ kao u Teoremi II.4. Ako za svako $i \in I$ postoji $c_i > 0$ tako da je

$$||tx||_i^* \leq c_i t||x||_i^*, \quad \text{za svako} \quad t \in [0,1] \quad \text{i}$$

svako $x \in K_i - K_i$ onda je:

$$\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset .$$

Sledeća teorema je generalizacija Teoreme 1 5 iz |3|.

Teorema II.5. Neka je $\{K_i\}_{i\in I}$ familija nepraznih, kompaktnih i konveksnih podskupova Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora $\{E_i\}_{i\in I}$, $(K_i \subseteq E_i$ za svako $i \in I)$ $K = \prod_{i\in I} K_i$ i neka je $\{f_i\}_{i\in I}$ odgovarajuća familija neprekidnih funkcionela na K. Ako je za svako $i \in I$ i svako svako $t \in \mathbf{R}$ skup:

$$\{y_i \ ;\ y_i \in K_i,\ \ f_i(y_i, \hat{x}_i) \geq t\}$$

konveksan podskup od K_i za svako $\hat{x}_i \in K_i'$ i K_i je Z-tipa onda postoji $u \in K$ tako da je:

$$f_i(u) = \max_{y_i \in K_i} f_i(y_i, \hat{u}_i), \qquad i \in I.$$

Dokaz. Ako primenimo Teoremu II.4, kao i u |3|, gde je:

$$S_i = \{u,\ u \in K,\ f_i(u) \geq \max_{y_i \in K_i} f_i(y_i, \hat{u}_i)\}$$

za svako $i \in I$

dobijamo da je $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$. Ako $u \in \bigcap_{i \in I} S_i$ tada je

$$f_i(u) = \max_{y_i \in K_i} f_i(y_i, \hat{u}_i), \qquad i \in I.$$

Pre nego što damo još jednu teoremu o nepraznom preseku zatvorenih skupova dokazaćemo uopštenje rezultata C.J. Himmelberga iz |32|.

Definicija II.3. Podskup A vektorskog topološkog prostora E je gotovo konveksan ako i samo ako za svaku okolinu nule V u E i svaki konačan podskup $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subset A$ postoji podskup $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset A$ takav da je $z_k - \omega_k \in V$ za svako $k = 1, 2, \dots, n$ i

$$\operatorname{conv}\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq A.$$

Neka je $\mathcal{V}$ fundamentalan sistem okolina nule vektorskog topološkog prostora E čiji su elementi zatvoreni i simetrični.

Teorema II.6. Neka je K neprazan i kompaktan podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E, $G : K \to F(K)$ u.s.c. preslikavanje takvo da je $G(x)$ konveksno za svako x iz nekog gustog gotovo konveksnog podskupa A od $G(K)$. Ako je na $G(K)$ zadovoljen Z-uslov onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja G.

Dokaz. Preslikavanje G ima nepokretnu tačku ako i samo ako je:

$$\bigcap\{F_V \mid V \in \mathcal{V}\} \neq \emptyset$$

gde je $F_V = \{x \mid x \in \left(G(x) + V\right) \cap K\}$.

Neka je $V \in \mathcal{V}$ i $U \in \mathcal{V}$ tako da je:

$$\operatorname{conv}\{U \cap \left(G(K) - G(K)\right)\} \subseteq V\,, \qquad \text{a}$$

$$F_V^* = \{x \mid x \in K,\ x \in G(x) + \overline{\operatorname{conv}}\left(U \cap (G(K) - G(K))\right)\}.$$

Pošto je $F_V^* \subseteq F_V$ dovoljno je dokazati da je:

$$(3) \qquad \bigcap\{F_V^* \mid V \in \mathcal{V}\} \neq \emptyset.$$

Da bi pokazali (3), zbog kompaktnosti skupa K i činjenice da je $F_V^* \cap F_U^* \supseteq F_{U\cap V}^*$, dovoljno je pokazati da je F_V^* zatvoreno i neprazno za svako $V \in \mathcal{V}$.

Za proizvoljno $V \in \mathcal{V}$ neka je:

$$G_V(x) = \left(G(x) + \overline{\operatorname{conv}}\ (U \cap (G(K) - G(K))\right) \cap K \qquad \text{i}$$

$$R_V(x) = \left(x + \overline{\operatorname{conv}}\ (U \cap (G(K) - G(K))\right) \cap K$$

za svako $x \in K$.

Tada je $G_V = R_V \cdot G$. Skup $Gr(R_V)$ je zatvoren podskup od $K \times K$ jer je $Gr(R_V) = \{(x,y) \mid (x,y) \in K \times K,\ y-x \in \overline{\operatorname{conv}}\ (U \cap (G(K)-G(K)).$

Zbog kompaktnosti skupa K preslikavanja R_v i G su u.s.c. pa je i G_v u.s.c. preslikavanje a to znači da je $Gr(G_v)$ zatvoren u $K \times K$. Neka je Δ dijagonala u $K \times K$. Tada je F_v^* projekcija kompaktnog skupa $\Delta \cap G_v$ na domen od G_v i kao takav i zatvoren skup. Pošto je A gotovo konveksan podskup gust u $G(K)$ imamo egzistenciju skupa $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset A \subset$ $\subset G(K)$ takvog da je:

$$G(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{z_i + U\} \quad \text{i} \quad C = \operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset A.$$

Definišimo još jedno novo preslikavanje $H_v \subset C \times C$

$$H_v \overset{def}{=} G_v \cap (C \times C)$$

Za svako $x \in C$ $H_v(x)$ je zatvoren, konveksan i neprazan skup ($z_i \in G(x) + \overline{\operatorname{conv}}(U \cap (G(K)-G(K))$ za neko $i=1,2,\ldots,m$). Preslikavanje H_v je zatvoreno (jer je G_v zatvoreno) pa zadovoljava sve uslove za primenu teoreme Kakutanija. Ali, ako je $x \in C$ nepokretna tačka preslikavanja H_v onda je

$$x \in \Big(G(x) + \overline{\operatorname{conv}}\,(U \cap (G(K) - G(K))\Big) \cap K$$

tj. $x \in F_v^*$ pa je $F_v^* \neq \emptyset$.

Primedba II.1. Ukoliko se pretpostavi da je A gust gotovo konveksan podskup od K onda se za Z-uslov takodje mora pretpostaviti da je zadovoljeno na K.

Tvrdjenje II.3. Neka je $\{E_i\}_{i \in I}$ familija

Hausdorffovih vektorskih topoloških prostora, A_i gust gotovo konveksan podskup kompaktnog skupa K_i u E_i za svako $i \in I$, $A_i' = \prod_{j \neq i} A_j$ a $K_i' = \prod_{j \neq i} K_j$. Ako je $\{S_i\}_{i \in I}$ familija zatvorenih podskupova od $K = \prod_{i \in I} K_i$ takvih da je:

$S_i(\hat{x}_i) = \{x_i \in K_i \mid [\hat{x}_i, x_i] \in S_i\}$ konveksan za svako $\hat{x}_i \in A_i'$ i neprazan za svako $\hat{x}_i \in K_i'$ $(i \in I)$ a K_i su Z-tipa za svako $i \in I$ onda je

$$\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset .$$

Dokaz. Definišimo preslikavanje $F_i : K \to 2^{K_i}$ sa

$$F_i(x) = S_i(\hat{x}_i) \quad \text{gde je} \quad \hat{x}_i = \text{proj}_{K_i'} x \, , \quad i \in I .$$

Preslikavanje F_i je u.s.c. jer je kompozicija neprekidne i u.s.c. funkcije. Naime, $F_i(x) = S_i(\pi_1(x))$ gde je $\pi_1 : K_i' \times K_i \to K_i'$ neprekidna funkcija. Preostaje da pokažemo da je $\tilde{S}_i : K_i' \to 2^{K_i}$ $(\tilde{S}_i(\hat{x}_i) = S(\hat{x}_i))$ u.s.c. preslikavanje. Neka je $\{\hat{z}_i^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda} \in K_i'$ i neka $\hat{z}_i^{(\lambda)} \to \hat{z}_i$ a $y_i^{(\lambda)} \in S_i(\hat{z}_i^{(\lambda)})$ $y_i^{(\lambda)} \to y_i$. Ali to znači da:

$$[\hat{z}_i^{(\lambda)}, y_i^{(\lambda)}] \in S_i \qquad \text{i} \qquad [\hat{z}_i^{(\lambda)}, y_i^{(\lambda)}] \to [\hat{z}_i, y_i] \in S_i$$

jer je S_i zatvoren skup pa $y_i \in S_i(\hat{z}_i)$ što znači da je $\tilde{S}_i$ zatvoreno preslikavanje pa zbog kompaktnosti i u.s.c..

Definišimo $F : K \to 2^K$ sa $F(x) = \prod_{i \in I} F_i(x)$. Pošto e K kompaktno a F_i u.s.c. preslikavanje za svako $i \in I$ sledi da je i F u.s.c. |5|.

Neka je dalje $A = \prod_{i \in I} A_i$. A je gusto u K a pokazaćemo da je i gotovo konveksno u K. Neka je $\{(\omega_i^1), (\omega_i^2), \dots, (\omega_i^n)\} \subseteq A$ i $V \in \mathcal{U}$. Tada je

$$V = \prod_{i \in I} E_i' \quad \text{gde je} \quad E_i' = \begin{cases} E_i & i \in I \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \\ V_i & i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \end{cases}$$

a $V_i \in \mathcal{U}_i$. Skup A_{i_k}, $k=1,2,\dots,m$ je gotovo konveksan podskup od K_{i_k} pa za svaki konačan skup tačaka pa i za skup $\{\omega_{i_k}^1, \omega_{i_k}^2, \dots, \omega_{i_k}^n\} \subset A_{i_k}$ i okolinu nule V_{i_k} postoji skup $\{z_{i_k}^1, z_{i_k}^2, \dots, z_{i_k}^n\} \subset A_{i_k}$ takav da je:

(4) $$z_{i_k}^j - \omega_{i_k}^j \in V_{i_k} \qquad \text{za} \quad j=1,2,\dots,n \qquad \text{a}$$

(5) $$\operatorname{conv}\{z_{i_k}^1, z_{i_k}^2, \dots, z_{i_k}^n\} \subseteq A_{i_k}$$

za svako $i_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$.

Formirajmo sada tačke (z_i^j) $j=1,2,\dots,n$ tako što ćemo uzeti $z_{i_k}^j$ iz gornje konstrukcije a preostale koordinate iz A_i tako da je zadovoljen uslov:

$$\operatorname{conv}\{z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n\} \subset A_i \qquad i \in I \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}.$$

Proizvoljno $z \in \operatorname{conv}\{z^1, z^2, \dots, z^n\}$ može se napisati u obliku

$= \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j z^j, \quad \ell \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j = 1$ i $\alpha_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,\ell.$

Ali $\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j (z_i^j) = \left(\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j z_i^j \right)$ pa zbog (5) z pripada A, a zbog (4) $z^j - \omega^j \in V$ za $j=1,2,\ldots,n$.

Pošto je $F(x)$ po definiciji konveksno i neprazno za svako $x \in A$ a neprazno za svako $x \in K$ na osnovu Teoreme II.6 sledi da postoji $x \in K$ tako da je $x \in F(x)$ što povlači da je $[x_i, \hat{x}_i] \in S_i$ za svako $i \in I$ pa je:

$$\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset.$$

Iz prethodnog uopštenja Teoreme II.4 slično kao i u |32| može se pokazati sledeća minimax teorema:

Teorema II.7. Neka su K_1 i K_2 kompaktni podskupovi Hausdorffovih vektorskih topoloških prostora L_1 i L_2 i neka su A_1 i A_2 gusti gotovo konveksni podskupovi od K_1 i K_2 respektivno a f neprekidna funkcionela na $K_1 \times K_2$. Ako za svako $x_0 \in A_1$ i $y_0 \in A_2$ skupovi:

$$\{x \mid x \in K_1, \quad f(x,y_0) = \max_{u \in K_1} f(u,y_0)\}$$

$$\{y \mid y \in K_2, \quad f(x_0,y) = \min_{v \in K_2} f(x_0,v)\}$$

su konveksni a K_1 i K_2 Z-tipa, onda je:

$$\max_{x \in K_1} \min_{y \in K_2} f(x,y) = \min_{y \in K_2} \max_{x \in K_1} f(x,y).$$

III GLAVA

TEORIJA STEPENA PRESLIKAVANJA

III.1. OSNOVNI POJMOVI TEORIJE STEPENA U R^n

Teorije stepena preslikavanja zasnovana je u okviru kombinatorne topologije i pripada H. Poincareu, L. Kroneckeru i L. Broweru. Medjutim, ovaj prilaz bio je relativno složen pa ova teorija, u početku, nije naišla na veću primenu. Tek njeno analitičko zasnivanje, za koje su zaslužni M. Nagumo i E. Heinz, pobudilo je interesovanje matematičara i naišlo na mnogobrojne primene. Na čelu sa M.A. Krasnoseljskim velika grupa matematičara u SSSR-u već više od dvadeset godina radi na ovoj teoriji i njenoj primeni |41|. Teorija stepena preslikavanja detaljno je izložena u knjizi | 6 | K. Deimlinga gde je dat i obiman spisak radova vezanih za ovu oblast kao i njenu primenu.

U najnovijoj literaturi može se naći i aksiomatski kao i algoritamski pristup (F. Stenger).

Za razumevanje ove teorije neophodno je njeno poznavanje u R^n koja je onda uopštena prvo za slučaj Banachovih |76| a onda i lokalno konveksnih prostora |78|.

Iznećemo prvo neke rezultate teorije stepena preslikavanja u R^n |11| koristeći pri tome analitički pristup.

Neka je D otvoren podskup od R^n, C otvoren, ograničen podskup i $\overline{C} \subset D$, $F : D \to R^n$ jednoznačno, neprekidno diferencijabilno preslikavanje i $y \notin F(\partial C)$. Za $\alpha > 0$ sa W_α ćemo označiti skup svih realnih funkcija σ koje preslikavaju $[0,\infty)$ u R^1, neprekidnih nad $[0,\infty)$ i za koje postoji $\delta \in (0,\alpha)$ takvo da je:

$$\sigma(t) = 0 , \quad t \notin [\delta,\alpha].$$

Neka je dalje $g : R^n \to R^1$ definisano na sledeći način:

$$g(x) = \sigma(||x||_2) , \quad \text{za svako } x \in R^n$$

pri čemu je $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 \right)^{1\backslash 2}, \quad x=(x_1,x_2,\ldots,x_n).$

Pošto preslikavanje g ima kompaktan nosač definisan je integral:

$$\int_{R^n} \sigma(||x||_2)dx$$

i možemo izdvojiti sledeći podskup funkcija iz W_α:

$$W_\alpha^1 = \{\sigma \in W_\alpha \mid \int_{R^n} \sigma(||x||_2)dx = 1\}.$$

Kako $y \notin F(\partial C)$ onda je:

$$(1) \qquad \min\{||Fx-y||_2 \mid x \in \partial C\} = \gamma > 0$$

pa postoji α tako da je zadovoljena nejednakost $0 < \alpha < \gamma$.

Definicija III.1. Neka su D,C,y i α sa gore navedenim osobinama. Integral stepena preslikavanja F na skupu $C(\bar{C} \subset D)$ u tački y u odnosu na funkciju $\sigma \in W_\alpha$ je:

(2) $$d_\sigma(F,C,y) = \int_{R^n} \Phi(x)\,dx$$ gde je funkcija

$\Phi : R^n \to R^n$ definisana na sledeći način:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sigma(||Fx-y||) \det F'(x) & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

Teorema III.1. |11| Neka je $F : D \to R$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje, D otvoren podskup od R i C otvoren i ograničen skup takav da je $\bar{C} \subset D$. Pretpostavimo da je za dato y, $y \notin F(\partial C)$, izvod $F'(x)$ nedegenerisan za svako $x \in \Gamma$ gde je $\Gamma = \{x | x \in C,\ Fx = y\}$.
Tada skup Γ sadrži ne više od konačno mnogo tačaka i postoji $\hat{\alpha} \in (0,\gamma]$ tako da je za svako $\sigma \in W^1_\alpha$, $\alpha \in (0,\hat{\alpha})$:

$$d_\sigma(F,C,y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn} \det F'(x_j), & \Gamma = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \\ 0 & \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Definicija III.2. Neka je $F : D \to R^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje i $y \notin F(\partial C)$ $(\bar{C} \subset D$, C otvoreno i ograničeno$)$. Tada je:

$$\deg(F,C,y) \stackrel{def}{=} d_\sigma(F,C,y)$$

gde je $\sigma \in W^1_\alpha$ i $0 < \alpha < \min\{||Fx-y||_2 \mid x \in \partial C\}$.

Koristeći se činjenicom da je svako neprekidno preslikavanje $F : \overline{C} \to R^n$ granica niza neprekidno diferencijabilnih preslikavanja (s obzirom na normu $||G||_C = \sup_{x \in \overline{C}} ||Gx||_2$) može se dat sledeća definicija stepena neprekidnog preslikavanja.

Definicija III.3. Neka je $F : \overline{C} \to R^n$ neprekidno, gde je C otvoren i ograničen skup, a $y \notin F(\partial C)$. Tada je stepen preslikavanja F u tački y u odnosu na skup C, u oznaci $\deg(F,C,y)$, definisan na sledeći način:

$$\deg(F,C,y) = \lim_{k\to\infty} \deg(F_k,C,y)$$

gde je $F_k : D \to R^n$ $(\overline{C} \subset D)$ niz neprekidno diferencijabilnih preslikavanja za koje je:

$$\lim_{k\to\infty} ||F_k - F||_C = 0$$

Koristeći se osobinama stepena neprekidno diferencijabilnog preslikavanja i gornjom definicijom dobija se sledeća teorema:

Teorema III.2. Neka je C otvoren i ograničen podskup od R^n a $F : \overline{C} \to R^n$ neprekidno preslikavanje. Ako $y \notin F(\partial C)$ tada je $\deg(F,C,y)$ ceo broj.

Ova teorema našla je vrlo veliku primenu u numeričkoj matematici.

Evo sada još nekoliko osnovnih rezultata iz teorije stepena preslikavanja.

Teorema III.3. |11| Neka je C ograničen i otvoren podskup u R^n, $F : \overline{C} \to R^n$ neprekidno preslikavanje a $y \notin F(\partial C)$. Tada stepen preslikavanja funkcije F u tački y u odnosu na skup C ima sledeće osobine:

1) Ako je $F : \overline{C} \to \overline{C}$ identično preslikavanje i $y \in C$ onda je $\deg(F,C,y) = 1$.

2) Ako je $F : \overline{C} \to R^n$ neprekidno preslikavanje i ako $y \in R^n \setminus F(C)$ ili je C prazno onda je $\deg(F,C,y) = 0$.

3) Za svako neprekidno preslikavanje $G : \overline{C} \to R$ za koje je

$$\|G-F\|_C < \frac{\alpha}{7} \qquad \text{važi da je}$$

$$\deg(F,C,y) = \deg(G,C,y)$$

gde je $0 < \alpha < \min \{\|Fx-y\|_2 \mid x \in \partial C\}$

4) Ako je $G : \overline{C} \to R^n$ neprekidno preslikavanje tako da da je $Fx = Gx$ za svako $x \in \partial C$, tada je

$$\deg(F,C,y) = \deg(G,C,y)$$

5) Za svako $z \in R^n$ važi da je:

$$\deg(F-z,C,y-z) = \deg(F,C,y)$$

6) Ako je $z \in R^n$ tako da se y i z mogu spojiti lukom $p : [0,1] \to R^n$ koji je takav da je $p([0,1]) \cap F(\partial C) = \emptyset$ onda je:

$$\deg(F,C,y) = \deg(F,C,z).$$

7) $\deg(F,C,\cdot)$ je konstantan na svakoj ograničenoj komponenti od $R^n \setminus F(\partial C)$

8) Ako je Q zatvoren podskup od $\bar{C}$ i $y \notin F(Q)$ važi relacija:

$$\deg(F,C,y) = \deg(F,C\setminus Q,y).$$

9) Ako je $\bigcup_{i=1}^{m} C_i \subset C$, $\bar{C} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{C}_i$ gde su C_i otvoreni skupovi takvi da je $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$ a $y \notin \bigcup_{i=1}^{m} F(\partial C_i)$ onda je:

$$\deg(F,C,y) = \sum_{i=1}^{m} \deg(F,C_i,y).$$

Jednu od najznačajnijih osobina stepena preslikavanja daje nam sledeća teorema poznata pod nazivom teorema o homotopijskoj invarijantnosti.

Teorema III.4. Neka je C otvoren i ograničen skup, $y \in R^n$ a $H : \bar{C} \times [0,1] \to R^n$ neprekidno preslikavanje tako da je $H(x,t) \neq y$ za svako $(x,t) \in \partial C \times [0,1]$. Tada $\deg(H(\cdot,t),C,y)$ ne zavisi od $t \in [0,1]$.

Sledeća teorema, koju ćemo u kasnijem radu koristiti, izražava osobinu redukcije stepena preslikavanja.

Teorema III.5. Neka je C otvoren i ograničen podskup od R^n, $C \cap R^m \neq \emptyset$ za neko $m < n$, $F : \bar{C} \to R^m$ neprekidno preslikavanje, $G = I-F$ dok $y \in R^m$ i $y \notin G(\partial C)$.

Tada je

$$\deg(G,C,y) = \deg(G|_{\overline{C}\cap R^m}, C \cap R^m, y)$$

Evo i teoreme koja najbolje pokazuje ulogu pojma stepena preslikavanja, kao i mogućnost njene primene.

Teorema III.6. (Teorema Kronekera) Neka je C otvoren i ograničen skup iz R^n i $F : \overline{C} \to R^n$ neprekidno preslikavanje. Ako $y \notin F(\partial C)$ i $\deg(F,C,y) \neq 0$ onda jednačina

$$Fx = y$$

ima bar jedno rešenje u C.

Ova definicija stepena preslikavanja može se vrlo lako preneti i u proizvoljan realan konačno dimenzionalnom normirani prostor.

Definicija III.4. Neka je E realan normirani prostor sa $\dim E = n$, A otvoren i ograničen podskup od E, $F : \overline{A} \to E$ neprekidno preslikavanje i $y \notin F(\partial A)$. Tada je:

$$\deg(F,A,y) \overset{def}{=} \deg(f,h(A),h(y))$$

stepen preslikavanja F nad A u odnosu na y. Pri tome je h odredjeno zahtevom da je $h(x^i) = e^i$, gde je $\{x^1, x^2, \dots x^n\}$ baza od E a $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ baza od R^n, h je linearni homeomorfizam E na R^n i $f = h \cdot F \cdot h^{-1}$.

U radu | 6 | je pokazano da se stepen preslikavanja koji je definisan za otvorene i ograničene skupove može uopštiti, naravno pod dodatnim uslovima, za otvorene skupove koji ne moraju biti ograničeni.

Definicija III.5. Neka je $C \subset R$, C otvoreno, $y \notin F(\partial C)$, $F : \bar{C} \to R^n$ neprekidno i

$$\sup\{||x-F(x)|| : x \in \bar{C}\} < \infty$$

onda je

$$\deg(F,C,y) = \deg(F|_{\bar{C}_1}, C_1, y)$$

gde je C_1 otvoren i ograničen podskup, $C_1 \subset C$ i $F^{-1}(y) \subset C_1$.

Lako se proverava da ova definicija ima smisla tj. da ne zavisi od skupa C_1 sa traženim osobinama.

U nizu radova koji su objavljeni poslednjih godina ispitana je teorija stepena višeznačnog preslikavanja.

A. Granas je 1959. godine uveo pojam stepena kompaktnog višeznačnog preslikavanja primenjujući metode algebarske topologije, Hukuhara (1967. god.), Cellina i Lasota (1969. god.) i T.W. Ma (1972. god.) su iskoristili analitički pristup u zasnivanju teorije stepena višeznačnog preslikavanja. U daljem radu koristićemo metod i ideju kojima je Ma dobio definiciju i osobine stepena višeznačnog preslikavanja za slučaj lokalno konveksnih prostora |48|.

III.2. DEFINICIJA I OSOBINE D(F,C,y) u VEKTORSKIM TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

Koristeći se definicijom Lere-Šauderovog stepena, zapravo idejom kojom je teorija stepena preslikavanja prvo preneta na proizvoljne realne normirane |76| a zatim i lokalno konveksne prostore |78|, daćemo definiciju stepena jedne klase preslikavanja u realnim Hausdorffovim vektorskim topološkim prostorima. Pre toga daćemo dva tvrdjenja koja su neophodna za samu definiciju.

Tvrdjenje III.1. |6| Ako je X Hausdorffov vektorski topološki prostor, $C \subset X$, $F_0 : C \to X$ kompaktno preslikavanje onda preslikavanje $F = I-F_0$ preslikava svaki zatvoren podskup od C na zatvoren podskup od X.

Primedba. Preslikavanje oblika $F = I - F_0$, za F_0 kompaktno preslikavanje naziva se kompaktno polje.

Tvrdjenje III.2. Ako je X Hausdorffov vektorski topološki prostor, $C \subset X$, $F_0 : C \to X$ kompaktno preslikavanje tako da skup $F_0(C)$ zadovoljava Z-uslov onda za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji neprekidno konačno dimenzionalno preslikavanje $F_V : C \to X$ tako da je:

$$F_V x - F_o x \in V \qquad \text{za svako } x \in C.$$

Dokaz. Isto kao i u radu |19| O. Hadžić neka je $U = U_V \in \mathcal{U}$ sa osobinom da je

$$\text{conv}\Big(U \cap (F_o(C) - F_o(C))\Big) \subset V. \tag{3}$$

Pošto je $F_o(C)$ relativno kompaktno postoji $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset F_o(C)$ takvo da je

$$F_o(C) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{y_i + U\}$$

Neka je $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ podela jedinice koja odgovara ovom prepokrivaču i neka je:

$$F_V(x) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} p_i(F_o(x)) \cdot y_i \ , \qquad x \in C.$$

Preslikavanje $F_V : C \to \text{conv}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset X$ po konstrukciji je kompaktno, konačno dimenzionalno i

$$F_V x - F_o x = \sum_{i=1}^{n} p_i(F_o(x))(y_i - F_o x) =$$

$$= \sum_{i : p_i(F_o(x)) \neq 0} p_i(F_o(x)) \ (y_i - F_o x) \in$$

$$\in \text{conv}\Big(U \cap (F_o(C) - F_o(C))\Big) \subseteq V$$

za svako $x \in C$ a to je trebalo dokazati.

Neka je X Hausdorffov vektorski topološki prostor, $C \subset X$ otvoren podskup, $F = I - F_o$, $F_o : \bar{C} \to X$ kompaktno preslikavanje tako da $F_0(C)$ zadovoljava Z-uslov i $y \notin F(\partial C)$. Na osnovu Tvrdjenja III.1 postoji okolina nule $V \in \mathcal{U}$ tako da je

$$(4) \qquad (y + V) \cap F(\partial C) = \emptyset$$

Ali na osnovu Tvrdjenja III.2 za svaku okolinu nule, pa i za balansirajuću okolinu V_1 sa osobinom da je $V_1 + V_1 \subseteq V$, postoji kompaktno konačno dimenzionalno preslikavanje, označimo ga sa F_1, tako da je:

$$F_0x - F_1x \in V_1 \qquad \text{za svako } x \in \overline{C}.$$

Neka je X_1 potprostor prostora X, $\dim X_1 < \infty$, $F_1(\overline{C}) \subseteq X_1$, $y \in X_1$ i $C \cap X_1 \neq \emptyset$.

Skup $C_1 = X_1 \cap C$ je otvoren u X_1, $(I-F_1)(\overline{C}_1) \subset X_1$, $(I - (I-F_1))(\overline{C}_1) = F_1(\overline{C}_1)$ je ograničeno i $y \notin (I-F_1)(\partial C_1)$. Ukoliko ovo poslednje ne bi važilo postojalo bi $x \in \partial C_1 \subset \partial C$ tako da je $y = x - F_1x$. Ali tada:

$$y = x-F_1x = x-F_0x+F_0x-F_1x \in x-F_0x+V = (I-F_0)(x) + V$$

pa je $(y + V) \cap (I - F_0)(\partial C) \neq \emptyset$ što je kontradikcija.

Time su ispunjeni uslovi za definisanost stepena:

$$(5) \qquad \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y) .$$

Sada ćemo pokazati da ceo broj (5) ne zavisi od preslikavanja F_1 i prostora X_1 sa navedenim osobinama. Neka je F_2 takodje jedno kompaktno konačno dimenzionalno preslikavanje,

$F_2 : \overline{C} \to X_2$, $\dim X_2 < \infty$, $y \in X_2$, $C_2 = X_2 \cap C \neq \emptyset$ i $F_2x - F_ox \in V_1$, $x \in \overline{C}$. Neka je, dalje, X_o prostor generisan sa X_1 i X_2 a $C_o = X_o \cap C$. Tada je $\dim X_o < \infty$, $y \in X_o$ i $C_o \neq \emptyset$.

Primenjujući Teoremu III.5 dobija se da je

$$(6) \qquad \deg(I-F_i|_{\overline{C}_o}, C_o, y) = \deg(I-F_i|_{\overline{C}_i}, C_i, y), \qquad i=1,2.$$

Preslikavanje $H_1 : C_o \times [0,1] \to X_o$ definisaćemo na sledeći način:

$$H_1(x,t) = t(x-F_1(x)) + (1-t)(x-F_2(x)), \ (x,t) \in C_o \times [0,1].$$

Tada je preslikavanje $H_o = I-H_1$ kompaktno i

$$H_1(x,t)-F(x) = t(F_o(x)-F_1(x)) + (1-t)(F_o(x)-F_2(x)) \in$$
$$\in tV_1 + (1-t)V_1 \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V.$$

te odavde sledi da $y \notin H_1(x,t)$ za $(x,t) \in \partial C_o \times [0,1]$.

Primenom teoreme o homotopijskoj invarijantnosti dobija se da je:

$$(7) \qquad \deg(I-F_1|_{\overline{C}_o}, C_o, y) = \deg(I-F_2|_{\overline{C}_o}, C_o, y)$$

Sada iz (6) i (7) sledi da (5) ne zavisi od izbora F_1 i X_1 sa navedenim osobinama.

Preostaje još da se pokaže da taj broj ne zavisi ni od izbora okoline V_1. Neka je i V_2 balansirajuća okolina nuve sa osobinom da je $V_2 + V_2 \subseteq V$ a F_2 i X_2 odgovarajuće preslikavanje i prostor. Tada je i $V_3 = V_1 \cap V_2$ balansirajuća okolina nule za koju važi da je $V_3 + V_3 \subseteq V$. Neka su F_3 i X_3 odgovarajuće kompaktno konačno dimenzionalno preslikavanje i prostor za okolinu V_3.

Pošto je

$$F_o(x) - F_3(x) \in V_3 \subseteq V_1 \ , \qquad x \in \overline{C}$$

koristeći dokazanu nezavisnost stepena preslikavanja od izbora preslikavanja i prostora, sa odredjenim osobinama, sledi da je:

$$\deg(I-F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y) = \deg(I-F_3|_{\overline{C}_3}, C_3, y) \tag{8}$$

Iz istih razloga, koristeći da je $V_3 \subseteq V_2$, sledi da je:

$$\deg(I-F_2|_{\overline{C}_2}, C_2, y) = \deg(I-F_3|_{\overline{C}_3}, C_3, y) \tag{9}$$

Sada iz (8) i (9) sledi da (5) ne zavisi ni od izbora okoline V_1 sa navedenim osobinama pa možemo dati sledeću definiciju:

Definicija III.6. Neka je X realan Hausdorffov vektorski topološki prostor, C otvoren podskup od X, $F_o : \overline{C} \to X$ kompaktno preslikavanje tako da $F_o(\overline{C})$ zadovoljava Z-uslov, $F = I-F_o$ i $y \notin F(\partial C)$. Stepen preslikavanja F u odnosu na skup C u tački y, u oznaci $D(F,C,y)$, neka je

$$D(F,C,y) \overset{def}{=} \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y)$$

gde je:

(i) $F_1 : \bar{C} \to X$ kompaktno konačno dimenzionalno preslikavanje sa osobinom da je:

$$F_1(x) - F_0(x) \in V_1 \qquad \text{za svako} \quad x \in \bar{C},$$

gde je V_1 je balansirajuća okolina nule, $V_1 + V_1 \subseteq V$ a $V \in \mathcal{U}$ dobijeno iz uslova:

$$(y + V) \cap F(\partial C) \neq \emptyset.$$

(ii) X_1 je potprostor od X takav da je: $\dim X_1 < \infty$, $y \in X_1$, $F_1(\bar{C}) \subseteq X_1$ i $C_1 = C \cap X_1 \neq \emptyset$.

Napomena. Označimo sa $K(X)$ familiju svih nepraznih, konveksnih i kompaktnih podskupova vektorskog topološkog prostora X. U radu |17| O. Hadžić je dokazala sledeće tvrdjenje:

Tvrdjenje III.3. Neka su M i E dva Hausdorffova vektorska topološka prostora, $F : M \to K(E)$ kompaktno preslikavanje sa osobinom da $F(M)$ zadovoljava Z-uslov. Tada za svaku okolinu nule $V \in \mathcal{U}(0_E)$ postoji kompaktno konačnodimenzionalno preslikavanje tako da je:

$$G(x) \subseteq F(x) + V \qquad \text{za svako} \quad x \in M.$$

Pošto je poznato da Tvrdjenje III.1. važi i za slučaj kada je F višeznačno u.s.c. preslikavanje u $K(E)$ možemo definisati i stepen višeznačnog preslikavanja.

Definicija III.7. Neka je A otvoren podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E, $p \in E$, $F : \bar{A} \to K(E)$, $y \notin F(\partial A)$ i $F_0 = I-F$ kompaktno preslikavanje tako da je na $F_0(\bar{A})$ zadovoljen Z-uslov. Neka je, dalje $U \in \mathcal{U}$ tako da je:

$$(y + V) \cap F(\partial A) = \emptyset$$

a V_1 balansirajuća okolina nule sa osobinom da je $V_1 + V_1 \subseteq V$. Tada je stepen preslikavanja F u odnosu na skup A u tački p:

$$D(F,A,y) \stackrel{def}{=} \deg(I-F_1|_{\bar{A}_1}, A_1, p)$$

gde je *(i)* $F_1 : \bar{A} \to E$ kompaktno konačno dimenzionalno preslikavanje sa osobinom:

$$F_1(x) \subseteq F_0(x) + V_1, \qquad \text{za svako } x \in \bar{A};$$

(ii) E_1 je potprostor od E takav da je:

$\dim E_1 < \infty$, $p \in E_1$, $F_1(\bar{A}) \subseteq E_1$ i

$A_1 = A \cap E_1 \neq \emptyset$.

Sada ćemo dokazati teoremu u kojoj su sadržane osobine ovako definisanog stepena preslikavanja u slučaju kada je ono jednoznačno.

Teorema III.7. Neka je X realan Hausdorffov vektorski topološki prostor i neka je:

$$M = \{(F,C,y \mid C \text{ je otvoreno u } X,\ F = I-F_0,\ \text{gde je } F_0 : \bar{C} \to X \text{ kompaktno, na } F_0(\bar{C}) \text{ je zadovoljen Z-uslov i } y \notin F(\partial C)\ .$$

Tada preslikavanje $D : M \to Z$ ima sledeće osobine:

1) $D(I,C,y) = 1$ ako $y \in C$ i $D(I,C,y)=0$ ako $y \notin C$.

2) Ako je $D(F,C,y) \neq 0$ onda postoji $x \in C$ tako da je

$$F(x)=y.$$

3) Ako je $H_0 : \overline{C} \times [0,1] \to X$ kompaktno, skup $H_0(\overline{C} \times [0,1])$ zadovoljava Z-uslov i $y \notin H(\partial C \times [0,1])$, $H = I-H_0$ onda $D(H(\cdot,t),C,y)$ ne zavisi od t.

4) Važi da je

$$D(F,C,y) = D(F-y,C,0)$$

5) Ako je $(G,C,y) \in M$, $G = I-G_0$ a $F_0(x) - G_0(x) \in W$ za $x \in \overline{C}$, gde je $W \in \mathcal{U}$ sa osobinom $W + W \in V_1$ a V_1 balansirajuća okolina nule, $V_1 + V_1 \in V$, $V \in \mathcal{U}$, $(y + V) \cap F(\partial C) = \emptyset$ i $(y + V) \cap G(\partial C) = \emptyset$ onda je

$$D(G,C,y) = D(F,C,y)$$

6) Ako je $(G,C,y) \in M$, $G = I-G_0$ i $G_0(x) = F_0(x)$ za svako $x \in \partial C$ onda je

$$D(G,C,y) = D(F,C,y).$$

7) $D(F,C,y)$ je konstantno na svakoj konačno dimenzionalnoj lučnoj komponenti od $X \setminus F(\partial C)$.

8) Ako je $\bigcup_{i=1}^{m} C_i \subseteq C$ i $\overline{C} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{C}_i$ gde su C_i otvoreni skupovi takvi da je $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$ a $y \notin \bigcup_{i=1}^{m} F(\partial C_i)$ onda je

$$D(F,C,y) = \sum_{i=1}^{m} D(F,C_i,y)$$

9) Ako je $C^* \subseteq C$, C^* zatvoreno i $y \notin F(C^*)$ onda je:

$$D(F,C,y) = D(F,C\setminus C^*,y)$$

Dokaz.

1) Po definiciji je $D(I,C,y) = \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1},C_1,y)$ pri čemu su zadovoljeni uslovi (i), (ii) definicije III.6.. Ali za F_1 možemo uzeti nula preslikavanje pa je:

$$D(I,C,y) = \deg(I|_{\overline{C}_1},C_1,y).$$

a za $\deg(I|_{\overline{C}_1},C_1,y)$ važi da je $\deg(I|_{\overline{C}_1},C_1,y) = 1$ ako $y \in C_1$ i $\deg(I|_{\overline{C}_1},C_1,y) = 0$ za $y \notin C_1$.

2) Pretpostavimo suprotno. Tada $y \notin F(\overline{C})$ pa postoji $V \in \mathcal{U}$ tako da je $(y + V) \cap F(\overline{C}) = \emptyset$. Pošto je po definiciji $D(F,C,y) = \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1},C\ ,y)$ koristeći pretpostavku da je $D(F,C,y) \neq 0$ sledi da je i ceo broj $\deg(I-F_1|_{\overline{C}_1},C\ ,y) \neq 0$. Tada na osnovu teoreme Kronekera postoji $x_0 \in C_1$ tako da je $x_0 - F_1(x_0) = y$. Ali onda je za $x_0 \in C_1 \subseteq C$:

$$F(x_0)-y = x -F_0(x_0)-x_0+F_1(x_0) = F_1(x_0)-F_0(x_0) \in V_1 \subset V$$

što je kontradikcija s obzirom na izbor okoline $V \in \mathcal{U}$.

3) Pošto je skup $H(\partial C \times [0,1])$ zatvoren postoji $V \in \mathcal{U}$ tako da je $(y + V) \cap H(\partial C \times [0,1]) = \emptyset$. Neka je, dalje, $H_1 : \overline{C} \times [0,1] \to x$ kompaktno i konačno dimenzionalno sa osobinom da je: $H_0(x,t) - H_1(x,t) \in V_1$,

$(x,t) \in \bar{C} \times [0,1]$ (V_1 balansirajuće i $V_1 + V_1 \subseteq V$).

Kako je:

$$\deg(H(\cdot,t),C,y) = \deg(I-H_1(\cdot,t)|_{\bar{C}_1},C_1,y)$$

a za konačno dimenzionalna preslikavanja poznata je

nezavisnost $\deg(I-H_1(\cdot,t)|_{\bar{C}_1},C_1,y)$ od $t \in [0,1]$, tvrdjenje je dokazano.

4) Koristeći definiciju dobija se da je

$$D(F,C,y) = \deg(I-F_1|_{\bar{C}_1},C_1,y) = \deg(I-F_1-y|_{\bar{C}_1},C_1,0) =$$

$$= D(F-y,C,0)$$

(činjenica da $y \notin F(\partial C)$ nam osigurava da $0 \notin F(\partial C)-y$).

5) Neka je G_1 kompaktno, konačno dimenzionalno preslikavanje, $G_1x-G_0x \in W$, $x \in \bar{C}$ i $G_1(\bar{C}) \subset X_1^G$, $\dim X_1^G < \infty$.

Ali tada je:

$$F_0x-G_1x = F_0x-G_0x+G_0x-G_1x \in W + W \subseteq V_1$$

pa za F_1 možemo uzeti G_1 a za X_1 baš X_1^G, što onda

povlači da je:

$$D(F,C,y) = \deg(I-G_1|_{\bar{C}_1^G},C_1^G,y) = D(G,C,y)$$

($C_1^G = X_1^G \cap C$).

6) Neka je $V \in \mathcal{U}$ tako da je:

$$(y+V) \cap F(\partial C) = \emptyset \quad i \quad (y+V) \cap G(\partial C) = \emptyset,$$

V_1 kao u definiciji III.6. $F_1 : \bar{C} \to X$, kompaktno, $F_1(\bar{C}) \subseteq X_1^F$, $\dim X_1^F < \infty$, $y \in X_1^F$, $C_1^F = X_1^F \cap C \neq \emptyset$ i

naravno $F_1(x)-F_0(x) \in V$. Isto tako $G_1 : \bar{C} \to X$ kompaktno, $G_1(\overline{C}) \subset X_1^G$, $\dim X_1^G < \infty$, $y \in X_1^G$, $C_1^G = X_1^G \cap C \neq \emptyset$ i $G_1x - G_ox \in V_1$ za $x \in \overline{C}$. Tada je:

$$(10)\qquad \begin{aligned} D(F,C,y) &= \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1^F}, C_1^F, y) \\ D(G,C,y) &= \deg(I-G_1|_{\overline{C}_1^G}, C_1^G, y) \end{aligned}$$

Neka je X_1 prostor generisan sa X_1^F i X_1^G a $C_1 = X_1 \cap C \neq \emptyset$. Tada je:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1^F}, C_1^F, y) &= \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y) \\ \deg(I-G_1|_{\overline{C}_1^G}, C_1^G, y) &= \deg(I-G_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y) \end{aligned}$$

Neka je dalje $H_1(x,t) : \overline{C}_1 \times [0,1] \to X_1$ definisano sa

$$H_1(x,t) = t(x-F_1(x)) + (1-t)(x-G_1(x))$$

Preslikavanje $H_o(x,t) = x - H_1(x,t) = tF_1(x) + (1-t)G_1(x)$, $(x,t) \in \overline{C}_1 \times [0,1]$ je kompaktno i konačno dimenzionalno pa preostaje još da se pokaže da $y \notin H_1(x,t)$ za $(x,t) \in \partial C_1 \times [0,1]$. Medjutim:

$$\begin{aligned} H_1(x,t) - F(x) &= t(x-F_1(x)) + (1-t)(x-G_1(x)) - x + F_o(x) = \\ &= t(F_o(x)-F_1(x)) + (1-t)(G_o(x)-G_1(x)) \in \\ &\in tV_1 + (1-t)V_1 \subset V, \end{aligned}$$

pa ako bi $H_1(x,t) = y$ za neko $(x,t) \in \partial C_1 \times [0,1] \subseteq \subseteq \partial C \times [0,1]$ onda bi $y \in V + F(x)$ za to $x \in \partial C$ što je kontradikcija. Iz teoreme o homotopijskoj invarijantnosti (8) i (9) sledi tvrdjenje.

7) Neka su y_1 i y_o dve proizvoljne tačke lučno povezanog skupa K koji je sadržan u konačnodimenzionalnom prostoru X_o i neka je $p : [0,1] \to K$, tako da je $p(0) = y_o$ i $p(1) = y_1$. Pošto je $p([0,1])$ kompaktno postoji $W \in \mathcal{U}$ tako da je:

$$\{p([0,1]) + W\} \cap F(\partial C) = \emptyset .$$

Isto tako postoji $V \subset W$ tako da je

$$(y_i + V) \cap F(\partial C) = \emptyset \qquad \text{za} \quad i=0,1.$$

Po definiciji stepena preslikavanja postoji $F_1 : \bar{C} \to X$ sa osobinama (i), (ii) iz definicije III.6 (neka je još i $X_o \subset X_1$). Tada je:

$$D(F,C,y_o) = \deg(I-F_1|_{\bar{C}_1}, C_1, y_o)$$

(12)

$$D(F,C,y_1) = \deg(I-F_1|_{\bar{C}_1}, C_1, y_1).$$

Definišimo preslikavanje:

$$H_1(x,t) = (I-F_1)(x) - p(t).$$

Tada je: $$H_1(x,0) = (I-F_1)(x) - y_o$$

(13)

$$H_1(x,1) = (I-F_1(x)) - y_1$$

Odgovarajuće preslikavanje $H_o = I - H_1$ je oblika:

$$H_o(x,t) = F_1(x) + p(t) \qquad (x,t) \in \bar{C}_1 \times [0,1] .$$

Ono je kompaktno pa treba još pokazati da $0 \notin H_1(x,t)$ za $(x,t) \in \partial C_1 \times [0,1]$. Ako bi $0 \in H_1(x,t)$ onda bi:

$p(t) = H_1(x,t) = x - F_1(x)$ za neko $x \in \partial C_1$ i $t \in [0,1]$ a $F(x)-p(t) = x-F_0x-x+F_1x = F_1(x)-F_0(x) \in W$ što bi značilo da $F(x) \in W + p(t)$ za neko $t \in [0,1]$ i $x \in \partial C_1 \subset \partial C$.

Ova kontradikcija pokazuje da je i taj uslov zadovoljen pa se može primeniti teorema o homotopijskoj invarijantnosti iz koje se onda dobija da je:

$$(14) \qquad \deg(H_1(\cdot,1)|_{\overline{C}_1}, C_1, 0) = \deg(H_1(\cdot,0)|_{\overline{C}_1}, C_1, 0)$$

Iz (13) i (14) se dobija da je:

$$(15) \qquad \deg(I-F_1-y_0|_{\overline{C}_1}, C_1, 0) = \deg(I-F_1-y_1|_{\overline{C}_1}, C_1, 0)$$

Sada iz (15) i dokazanog pod tačkom 4) sledi da je:

$$\deg(I-F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y_0) = \deg(I-F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, y_1)$$

što je i trebalo dokazati.

8) Koristeći definiciju i poznate osobine dobija se

$$D(F,C,y) = \deg(I-F_1|_{\overline{O}_1}, O_1, y) = \sum_{j=1}^{m} \deg(I-F_1|_{\overline{O}_1^j}, O_1^j, y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} D(F,C_j,y) \quad \text{gde je } O_1^j = O_1 \cap C_j,$$

$$(O_1 = C \cap X_1) \qquad j=1,2,\dots,m.$$

9) Na osnovu dokazanog pod 8) sledi da je:

$$D(F,C,y) = D(F,C\setminus C^*,y) + D(F,C^*,y) \tag{16}$$

Pošto je $F(C^*)$ zatvoreno postoji $W \in \mathcal{U}$ tako da

$$(y + W) \cap F(C^*) = \emptyset$$

a iz istih razloga postoji i $V \in \mathcal{U}$, $V \subset W$ tako da je

$$(y + V) \cap F(\partial C) = \emptyset .$$

Za ovo V neka su V_1 i F_1 kao u definiciji III.6.
Ako bi bilo $y = (I-F_1)(x)$ za neko $x \in C_1^* \subset C^*$ onda bi:

$$y - F(x) = x - F_1(x) - x + F_0(x) = F_0(x) - F_1(x) \in W$$

što je kontradikcija.
Ali iz $y \notin (I-F_1)(x)$, $x \in C^*$ sledi da je:

$$D(F,C^*,y) = \deg(I-F_1|_{\overline{C_1^*}},C_1^*,y) = 0$$

što znači da (14) dobija oblik:

$$D(F,C,y) = D(F,C\setminus C^*,y) .$$

Kao posledica se dobija da ukoliko $y \notin F(C)$ onda je

$$D(F,C,y) = 0 .$$

III.3. PRIMENA TEORIJE STEPENA PRESLIKAVANJA

Ulogu pojma stepena preslikavanja u teoriji nepokretne tačke pokazaće nam sledeće teoreme.

Teorema III.8. Neka je C otvoren i konveksan podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora X i $0 \in C$. Ako $F_o : \overline{C} \to \overline{C}$ je kompaktno preslikavanje tako da skup $F_o(\overline{C})$ zadovoljava Z-uslov onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja F_o.

Dokaz. Pretpostavimo da F_o nema nepokretnu tačku. Tada:

$$(17) \qquad 0 \neq (I-F_o)(x) \qquad x \in \overline{C}.$$

Po definiciji III.6 je za $F = I-F_o$

$$D(F,C,0) = \deg(I-F_1|_{\overline{C_1}}, C_1, 0)$$

pri čemu F_1 i C_1 imaju osobine (i), (ii).

Definišimo homotopiju:

$$H_1(x,t) = x - t \cdot F_1(x) \qquad x \in \overline{C}_1 \text{ i } t \in [0,1].$$

Preslikavanje $H_o = I - H_1$ je kompaktno pa treba još pokazati da $0 \neq x - t \cdot F_1(x)$ za $x \in \partial C_1$ i $t \in [0,1]$.

Za $t = 1$ iz (17) sledi da je $0 \neq x - F_1(x)$.

Neka je $0 \leqslant t < 1$. Pošto $F_1 : \overline{C}_1 \to \overline{C}_1$ za $x \in \partial C_1$ ili $F_1(x) \notin \partial C_1$ ili $F_1(x) \in \partial C_1$. Ako $F_1(x) \notin \partial C_1$ za $\forall x \in \partial C_1$ onda $F_1(x) \in C_1$ pa pošto je i C_1 konveksno $t \cdot F_1(x) \in C_1$ za $t \in [0,1)$. Ako $F_1(x) \in \partial C_1$, za $x \in \partial C_1$ onda na osnovu osobine da ako je skup A konveksan i $x \in \mathring{A}$ a $y \in \overline{A}$ važi da je:

$$\{z \mid z = (1-t)x + ty, \quad t \in [0,1]\} \setminus \{y\} \subset A$$

sledi da je:

$$t \cdot F_1(x) \in C_1 \qquad \text{za} \quad x \in \partial C_1, \quad t \in [0,1) \ .$$

Ali to znači da $t \cdot F_1(x) \notin \partial C_1$ pa je $x \neq t \cdot F_1(x)$, $x \in \partial C_1$, odnosno $0 \neq (I - t \cdot F_1)(x)$ za $x \in \partial C_1$ i $t \in [0,1)$ što je i trebalo dokazati.

Koristeći teoremu o homotopijskoj invarijantnosti u konačnodimenzionalnim prostorima dobija se da je:

$$(18) \qquad \deg(I - F_1|_{\overline{C}_1}, C_1, 0) = \deg(I|_{\overline{C}_1}, C_1, 0)$$

Pošto $0 \in C_1$ $\deg(I|_{\overline{C}_1}, C_1, 0) = 1$ sledi da je:

$$D(F, C, 0) \neq 0.$$

Sada na osnovu Teoreme III.7 pod tačkom 2) sledi da jednačina $Fx = 0$ ima bar jedno rešenje a to rešenje je i nepokretna tačka preslikavanja F_0.

Teorema III.9. Neka je C otvoren podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora X, $0 \in C$ a $G_o : \bar{C} \to X$ kompaktno preslikavanje za koje je zadovoljen Z-uslov na skupu $G_o(\bar{C})$. Ako je $G_o(x) \neq \lambda x$ za svako $\lambda > 1$ i $x \in \partial C$ onda postoji bar jedna nepokretna tačka preslikavanja G_o.

Dokaz. Skup:

$$L = \bigcup_{\substack{x \in \partial C \\ 0 \leq \lambda \leq 1}} (x - \lambda G_o(x))$$

je zatvoren. Ako pretpostavimo da preslikavanje G_o nema nepokretnu tačku onda $0 \notin L$ pa postoji $V \in \mathcal{U}$ tako da je:

$$V \cap L = \emptyset.$$

Za $V_1 \in \mathcal{U}$, $V_1 + V_1 \subset V$ i V_1 balansirajuće neka je G_1 kompaktno konačno dimenzionalno preslikavanje iz definicije III.6 sa osobinama (i), (ii). Tada, za $G = I - G_o$, po definiciji je:

$$D(G,C,0) = \deg(I-G_1|_{\bar{C}_1}, C_1, 0). \tag{19}$$

Neka je, kao i u prethodnoj teoremi, homotopija definisana sa:

$$H_1(x,t) = x - t\cdot G_1(x) \qquad \text{za} \qquad (x,t) \in \bar{C}_1 \times [0,1]$$

Preslikavanje $H_o = I - H_1$ je kompaktno pa preostaje da se dokaže da $0 \notin H_1(\partial C_1 \times [0,1])$.

Ako bi bilo

$$0 = x - t\cdot G_1(x)$$

za neko $(x,t) \in \partial C_1 \times [0,1]$ onda bi:

$$0 = x - tG_1(x) = x - tG_o(x) + tG_o(x) - tG_1(x) =$$
$$= x - tG_o(x) + t(G_o(x)-G_1(x)) \in L + tV_1 \subset L + V_1$$

što je kontradikcija.

Ponovnom primenom teoreme o homotopijskoj invarijantnosti dobija se da je:

$$\deg(I-G_1|_{\overline{C}_1}, C_1, 0) = \deg(I|_{\overline{C}_1}, C_1, 0)$$

a pošto $0 \in C_1$ imamo da je:

$$\deg(I|_{\overline{C}_1}, C_1, 0) = 1 \neq 0$$

pa je i $D(G,C,0) \neq 0$ što znači da jednačina $Gx = 0$ ima rešenje. To rešenje je ujedno i nepokretna tačka preslikavanja G_o.

IV G L A V A

TEOREME O KOINCIDENCIJI

IV.1. TEOREME O KOINCIDENCIJI VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

Jedan od interesantnih problema koji se rešavaju u teoriji nepokretne tačke je i pitanje tačaka koincidencije koji u slučaju višeznačnih preslikavanja dobija sledeći oblik:

Data su dva preslikavanja F i G topološkog prostora X u 2^Y. Da li postoji $x_0 \in X$ tako da je $F(x_0) \cap G(x_0) \neq \emptyset$?

Odgovori na ovakva pitanja nalaze svoju primenu u teoriji diferencijalnih i integralnih jednačina.

Evo prvo uopštenja rezultata V.M. Segala i E. Morisona iz |85|.

Teorema IV.1. Neka je S neprazan i konveksan podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E a K kompaktan podskup od S. Neka je dalje H regularan Hausdorffov topološki prostor i $F : S \to F(H)$ u.s.c. preslikavanje i $G : K \to 2^H$ u.s.c. preslikavanje tako da je $G(x)$ kompaktan skup za svako $x \in K$. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) $F(x) \cap G(K) \neq \emptyset$ za svako $x \in S$;

(ii) $G^{-1}(F(x))$ je konveksno za svako $x \in S$;

(iii) skup K zadovoljava Z-uslov;

onda postoji $x \in K$ takvo da je:

$$F(x) \cap G(x) \neq \emptyset.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ baza okolina nule čiji su elementi zatvoreni i simetrični skupovi i neka $V \in \mathcal{V}$. Pošto je na K zadovoljen Z-uslov postoji $U = U_V \in \mathcal{V}$ tako da je:

$$\operatorname{conv}\left(U_V \cap (K-K)\right) \subseteq V.$$

Pošto je K kompaktan skup postoji konačan podskup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset K$ takav da je:

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} ((x_i+U_V) \cap K)$$

te je

$$(1) \qquad F^{-1}(G(K)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F^{-1}\left(G((x_i+U_V) \cap K)\right).$$

Neka je $S(U_V) = \overline{\operatorname{conv}} \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Skup $S(U_V)$ je kompaktan i

$$(2) \qquad S(U_V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F^{-1}\left(G((x_i+U_V) \cap K)\right).$$

Naime iz $x \in S(U_V) \subset S$ na osnovu *(i)* sledi da je $F(x) \cap G(K) \neq \emptyset$ pa $x \in F^{-1}(G(K))$ te je $S \subseteq F^{-1}(G(K))$. Sada iz (1) sledi (2).

Definišimo preslikavanje $F_V : S(U_V) \to 2^{S(U_V)}$ tako da je za svako $x \in S(U_V)$:

$$(3) \qquad F_V(x) = \left(G^{-1}(F(x)) + W\right) \cap S(U_V)$$

gde je $W = \overline{\mathrm{conv}}(U_v \cap (K-K))$.

Ako je $x \in S(U_v)$ onda (na osnovu (2)):

$$x \in F^{-1}\left(G(x_i+U_v) \cap K)\right) \quad \text{za neko} \quad i=1,2,\dots,n.$$

Ali tada je:

$$F(x) \cap G((x_i+U_v) \cap K) \neq \emptyset \qquad \text{pa je i}$$

$$G^{-1}(F(x)) \cap ((x_i+U_v) \cap K) \neq \emptyset \qquad \text{tj.}$$

$$x_i \in G^{-1}(F(x)) - U_v = G^{-1}(F(x)) + U_v$$

za to $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Znači da postoji $y \in G^{-1}(F(x))$ i $u \in U_v$ tako da je $x_i = y + u$. Ali tada je $u = x_i - y \in K-K$ te $x_i \in G^{-1}(F(x)) + W$. Time smo pokazali da je $F_v(x) \neq \emptyset$ za svako $x \in S(U_v)$. Pošto je $F(x)$ po pretpostavci zatvoren skup u H za svako $x \in S(U_v) \subset S$, a G je u.s.c. preslikavanje (tj. G^{-1} je zatvoreno preslikavanje) to je $G^{-1}(F(x))$ zatvoreno u K pa i kompaktno. Kako je zbir kompaktnog i zatvorenog skupa zatvoren skup to je $G^{-1}(F(x)) + W$ zatvoreno u E pa i u $S(U_v)$. Pokazaćemo da je F_v i u.s.c. preslikavanje. Neka je A zatvoren (a time i kompaktan) podskup od $S(U_v)$. Tada je:

$$\begin{aligned} F_v^{-1}(A) &= \{x \in S(U_v) \mid F_v(x) \cap A \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in S(U_v) \mid (G^{-1}(F(x))+W) \cap S(U_v) \cap A \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in S(U_v) \mid (G^{-1}(F(x))+W) \cap A \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in S(U_v) \mid G^{-1}(F(x)) \cap (A-W) \neq \emptyset\} = \end{aligned} \tag{4}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} &= \{x \in S(U_v) \mid G^{-1}(F(x)) \cap (A+W) \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in S(U_v) \mid F(x) \cap G((A+W) \cap K) \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in S(U_v) \mid x \in F^{-1}(G((A+W) \cap K)\} = \\ &= F^{-1}(G((A+W) \cap K)) \cap S(U_v) \ . \end{aligned}$$

Pošto je $A+W$ zatvoren skup, $(A+W) \cap K$ je kompaktan pa na osnovu Leme 2 |85|, koristeći pretpostavku da je $G(x)$ kompakno za svako $x \in K$, sledi da je skup $G((A+W) \cap K)$ kompaktan. Kako je i F u.s.c. preslikavanje $F^{-1}(G((A+W) \cap K))$ je zatvoreno u S pa se može napisati u obliku:

$$F^{-1}(G((A+W) \cap K) = S \cap C$$

gde je C neki skup zatvoren u E. Sada iz (4) sledi da je F_v^{-1} zatvoreno preslikavanje jer je:

$$F_v^{-1}(A) = F^{-1}(G((A+W) \cap K) \cap S(U_v) = C \cap S(U_v)$$

zatvoreno u $S(U_v)$, a to znači da je i u.s.c. preslikavanje.

Pošto je $F_v(x)$ po konstrukciji konveksno svi uslovi za primenu teoreme Kakutanija su zadovoljeni pa za svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $x_v \in S(U_v)$ takvo da je $x_v \in F_v(x_v)$. Ali tada je i:

$$G((x_v+W) \cap K) \cap F(x_v) \neq \emptyset.$$

Neka su $z_v \in W \subset V$ i $y_v \in G(K)$ takvi da je:

$$y_v \in G(x_v+z_v) \cap F(x_v) \ .$$

Mreža $\{z_\nu, \nu \in V\} \to 0$. Pošto je $x_\nu + z_\nu \in K$ postoji konvergentna podmreža $\{x_{\nu'} + z_{\nu'} | \nu' \in V' \subset V\} \to x \in K$. Ali mreža $\{y_{\nu'}\}_{\nu' \in V'}$ je sadržana u kompaktnom skupu $G(K)$ pa ima konvergentnu podmrežu $\{y_{\nu''} | \nu'' \in V'' \subset V' \subset V\}$. Neka $y_{\nu''} \to y \in G(K)$. Pošto su preslikavanja F i G zatvorena sledi da $y \in G(x) \cap F(x)$.

Posledica IV.1. Neka je S neprazan i konveksan podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E a K kompaktan podskup od S. Neka je $F : S \to F(E)$ u.s.c. preslikavanje a $G : K \to 2^E$ u.s.c. preslikavanje takvo da je $G(x)$ kompaktan skup za svako $x \in K$. Ako su zadovoljeni uslovi *i), ii), iii),* prethodne teoreme onda postoji $x \in K$ tako da je:

$$F(x) \cap G(x) \neq \emptyset.$$

Ako je $H \equiv E$ i G je identično preslikavanje dobija se sledeća posledica:

Posledica IV.2. Neka je S neprazan i konveksan podskup Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora E a K kompaktan podskup od S. Ako je $F : S \to F(E)$ u.s.c. preslikavanje tako da je $F(x) \cap K$ neprazan i konveksan skup za svako $x \in S$ i na skupu K je zadovoljen Z-uslov onda F ima nepokretnu tačku.

Druga teorema o koincidenciji je uopštenje rezultata E.F. Browdera iz | 3 |.

Teorema IV.2. Neka je K konveksan, neprazan podskup vektorskog topološkog prostora E, K_1 kompaktan i konveksan podskup vektorskog topološkog prostora F a T i S dva preslikavanja skupa K u 2^{K_1} takva da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) Preslikavanje $T : K \to 2^{K_1}$ je u.s.c. i $T(u)$ je konveksan, neprazan i zatvoren u K_1 za svako $u \in K$;

(ii) Za svako $u \in K$, $S(u)$ je otvoreno u K_1 i $S^{-1}(v)$ je neprazan i konveksan podskup od K za svako $v \in K_1$;

(iii) Skup $T(K)$ zadovoljava Z-uslov.

Tada postoji $u_0 \in K$ tako da je:

$$T(u_0) \cap S(u_0) \neq \emptyset .$$

Dokaz. Familija $\{S(u)\}_{u \in K}$ je jedan otvoren prepokrivač skupa K_1 pa zbog kompaktnosti postoji konačan podprepokrivač $\{S(u_1), S(u_2), \ldots, S(u_n)\}$ gde je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset K$. Neka je $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ podela jedinice koja odgovara ovom prepokrivaču. Preslikavanje $p : K_1 \to K$ definisano sa:

$$p(v) = \sum_{j=1}^{n} p_j(v)\, u_j$$

je neprekidno. Ako je $p_j(v) \neq 0$ onda $v \in S(u_j)$ pa $u_j \in S^{-1}(v)$. Pošto je $S^{-1}(v)$ po pretpostavci konveksno sledi da je $p(v)$ linearna kombinacija onih elemenata u_j $(j=1,2,\ldots,n)$ koji leže u $S^{-1}(v)$ pa za svako $v \in K$ važi da je:

(5) $$v \in S(p(v)) \ .$$

Neka je R preslikavanje definisano sa:

$$R(v) = T(p(v)) \qquad \text{za svako} \quad v \in K_1 .$$

Tada $R : K_1 \to 2^{K_1}$ i za svako $v \in K_1$ skup $R(v)$ je neprazan, konveksan i zatvoren u K_1. Pošto je T u.s.c. a p neprekidno preslikavanje i R je u.s.c. preslikavanje. Dalje, pošto je $R(K_1) \subseteq T(K)$ i $\operatorname{conv}(U \cap (T(K)-T(K))) \subseteq V$ sledi da je:

$$\operatorname{conv}\Big(U \cap (R(K_1)-R(K_1))\Big) \subseteq \operatorname{conv}\Big(U \cap (T(K)-T(K))\Big) \subseteq V.$$

Primenjujući Teoremu II.1 dobijamo egzistenciju nepokretne tačke u_0 preslikavanja R. Ali tada iz (5) sledi da je:

$$T(p(u_0)) \cap S(p(u_0)) \neq \emptyset$$

što je i trebalo dokazati.

IV.2. TEOREME O KOINCIDENCIJI JEDNOZNAČNIH PRESLIKAVANJA

U radovima Marinescua i Deleanua |70|, Hadžić i Stanković |26|, Florea |77|, Hadžić |83|, i Rusa |79| dokazano je nekoliko teorema o nepokretnoj tački za preslikavanje T koje preslikava M u M gde je $M \subseteq X$ $(X, \{p_i\}_{i \in I})$ je lokalno konveksan prostor sa familijom seminormi $\{p_i\}_{i \in I}$ koja generiše topologiju na X i

$$p_i\Big(T(x) - T(y)\Big) \leq q(i) \cdot p_{f(i)}(x-y), \qquad \text{za sve } i \in I \text{ i sve } x,y \in X$$

gde je $f : I \to I$ i $q : I \to [0,\infty)$.

U radu |26| data je i primena na diferencijalne jednačine u polju operatora Mikusinskog.

U ovoj tački daćemo uopštenje teoreme Fishera o postojanju zajedničke nepokretne tačke u metričkom prostoru |9| a kao primena biće dokazane teoreme o postojanju zajedničke nepokretne tačke preslikavanja $A+F$, S i T:

$$x = A(x) + F(x) = S(x) = T(x) \ ,$$

gde je F kompaktno preslikavanje.

Pri tome biće korišćena teorema o egzistenciji nepokretne tačke kompaktnog preslikavanja definisanog nad podskupom vektorskog topološkog prostora |19|.

Neka je X vektorski prostor nad poljem K realnih ili kompleksnih brojeva, $\{p_i\}_{i \in I}$ familija funkcionela, $p : X \to [0,\infty)$, $(i \in I)$ sa sledećim osobinama:

(i) $p_i(0) = 0$

(ii) $p_i(x+y) \leq p_i(x) + p_i(y)$

(iii) Ako $x_n \to x$ i $\lambda_n \to \lambda_0$ sledi da $p_i(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$.

Poznato je da za svaki vektorski topološki prostor X postoji ovakva familija $\{p_i\}_{i \in I}$ koja generiše konvergenciju u X. što ćemo označavati sa $(X, \{p_i\}_{i \in I})$. Prostor $(X, \{p_i\}_{i \in I})$ pri tome je Hausdorffov ako i samo ako je:

$$x = 0 \iff p_i(x) = 0 \quad \text{za svako } i \in I.$$

Neka su $A, S, T : X \to X$ i $x_0 \in X$. U daljem tekstu koristićemo sledeće oznake:

$$b_n(i) = \prod_{k=0}^{n-1} q[f^k(i)] \qquad n \in N\,, \quad i \in I\,;$$

$$c_n(i) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^{n+r}(i)] \right) p_{f^{n+k}(i)}(A^4 x_0 - TA^3 x_0) +$$

$$+ q[f^n(i)] \cdot p_{f^{n+1}(i)}(A^4 x_0 - TA^2 x_0), \quad n \in N \cup \{0\}$$
$$i \in I\,.$$

Teorema IV.3. Neka je $(X,\{p_i\}_{i\in I})$ sekvencijalno kompletan realan Hausdorffov vektorski topološki prostor. Neka su S i T neprekidna preslikavanja od X u X i $A : X \to SX \cap TX$ neprekidno preslikavanje komutativno sa S i T koje zadovoljava sledeće uslove:

1) Za svako $i \in I$ postoji $q(i) \geq 0$ i $f(i) \in I$ tako da je:

   $p_i(Ax-Ay) \leq q(i)\, p_{f(i)}(Sx-Ty)$, za sve $x,y \in X$;

2) Postoji $x_0 \in X$ tako da za svako $i \in I$ red:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))\right) p_{f^k(i)}(A^2x_0 - TAx_0)$$

   konvergira.

   Tada postoji $x \in X$ tako da je $Sx = Tx = Ax$.

   Ako za svako $n \in N \cup \{0\}$ i svako $i \in I$ red $c_n(i)$ konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(i)c_n(i) = 0$ onda je x' zajednička nepokretna tačka za preslikavanja S, T i A gde je $x' = Ax$.

Dalje, postoji jedna i samo jedna zajednička nepokretna tačka y za preslikavanja S, T i A takva da je:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{k-1} q(f^k(i)) p_{f^n(i)}(A^4x_0-y) = 0 \quad \text{za svako } i \in I$$

i za svako $i \in I$ i za svako $k \in N$ je:

$$p_{f^k(i)}(x' - A^4 x_o) \leq \frac{c_o(i) - c_o^k(i)}{\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))}$$

gde je $c_o(i)$ k-ta parcijalna suma reda $c_o(i)$.

Dokaz. Neka je x_o proizvoljan elemenat iz X. Pošto A preslikava X u $SX \cap TX$ postoji $x_1 \in X$ tako da je $A^2 x_o = Sx_1$ i $x_2 \in X$ tako da je $Tx_2 = Ax_1$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ takav da je:

$$Sx_{2n+1} = Ax_{2n} \quad \text{i} \quad Tx_{2n} = Ax_{2n-1} \quad \text{za svako } n \in N.$$

Slično kao i u |84| lako se pokazuje da je za svako $i \in I$ i svako $n \geq 3$:

$$p_i(Ax_n - Ax_{n-1}) \leq q(i)\, p_{f(i)}(Ax_{n-1} - Ax_{n-2}).$$

Pošto je:

$$p_i(Ax_2 - Ax_1) \leq q(i) \cdot p_{f(i)}(Tx_2 - Sx_1) = q(i) \cdot p_{f(i)}(Ax_1 - A^2 x_o) \leq$$

$$\leq q(i) \cdot q(f(i))\, p_{f^2(i)}(Sx_1 - TAx_o) = q(i) \cdot q(f(i))\, p_{f^2(i)}(A^2 x_o - TAx_o)$$

sledi da za svako $i \in I$, $n \geq 2$ je:

$$(6) \qquad p_i(Ax_n - Ax_{n-1}) \leq \prod_{k=0}^{n-1} q(f^k(i))\, p_{f^n(i)}(A^2 x_o - TAx_o)$$

Ako za x_o izaberemo baš ono čiju egzistenciju imamo pod 2) dobija se da red $\sum_{k=1}^{\infty} (Ax_k - Ax_{k-1})$ konvergira pa onda i niz:

$$Ax_n = Ax_0 + \sum_{k=1}^{n} (Ax_k - Ax_{k-1}) \quad \text{konvergira.}$$

Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = z$. Pošto je $Sx_{2n+1} = Ax_{2n}$ i $Tx_{2n} = Ax_{2n-1}$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} Sx_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_{2n} = z$. Preslikavanja S, T i su neprekidna pa je:

$$Sz = \lim_{n\to\infty} SAx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} ASx_{2n+1} = A(\lim_{n\to\infty} Sx_{2n+1}) = Az$$

a isto tako je $Tz = Az$.

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(i)\ c_n(i) = 0$ za svako $i \in I$.

Pokazaćemo da je u tom slučaju Az zajednička nepokretna tačka preslikavanja S, T i A što je ekvivalentno sa činjenicom da je $p_i(A^2z-Az) = 0$ za svako $i \in I$.

Pošto je $Az = \lim\limits_{\to\infty} A^2x_n$ pokazaćemo da je:

$$\lim_{n\to\infty} p_i(A^2z-A^2x_n) = 0 \qquad \text{za svako } i \in I.$$

Za svako $i \in I$ i $n \in N$ važi da je:

$$p_{f^n(i)}(A^3x_1-A^3x_0) \leq q(f^n(i))\cdot p_{f^{n+1}(i)}(SA^2x_1-TA^2x_0) =$$

$$= q(f^n(i))p_{f^{n+1}(i)}(A^2Sx_1-A^2Tx_0) = q(f^n(i))p_{f^{n+1}(i)}(A^4x_0-TA^2x_0).$$

i slično:

$$(7) \quad p_{f^n(i)}(A^3x_2-A^3x_1) \leq q(f^n(i))p_{f^{n+1}(i)}(A^2Tx_2-A^2Sx_1) \leq$$

$$\leq q(f^n(i))q(f^{n+1}(i))p_{f^{n+2}(i)}(S(A^2x_1)-T(A^3x_o)) =$$

$$= q(f^n(i))q(f^{n+1}(i))p_{f^{n+2}(i)}(A^4x_o-A^3Tx_o)$$

Neka je $m = 2k+1$. Tada je:

$$p_{f^n(i)}(A^3x_m-A^3x_{m-1}) \leq q(f^n(i))p_{f^{n+1}(i)}(A^2Sx_m-A^2Tx_{m-1}) =$$

$$= q(f^n(i))p_{f^{n+1}(i)}(A^3x_{m-1}-A^3x_{m-2}) \leq$$

$$\leq q(f^n(i))\cdot q(f^{n+1}(i))\cdot p_{f^{n+2}(i)}(A^2Tx_{m-1}-A^2Sx_{m-2}) =$$

$$= q(f^n(i))\cdot q(f^{n+1}(i))\cdot p_{f^{n+2}(i)}(A^3x_{m-2}-A^3x_{m-3}) \leq \dots \leq$$

$$\leq \prod_{r=0}^{m-3} q(f^r(i))\ p_{f^{n+m-2}(i)}(A^3x_2-A^3x_1)\ ,\quad \text{za svako}\quad i\in I$$

i svako $n\in N$.

Koristeći rezultat (2) dobijamo da je za $m = 2k+1$:

$$(8)\quad p_{f^n(i)}(A^3x_m-A^3x_{m-1}) \leq \prod_{r=0}^{m-1} q(f^r(i))\cdot p_{f^{n+m}(i)}(A^4x_o-A^3Tx_o).$$

Lako se vidi da (8) važi i za $m = 2k$, pa za svako $i\in I$ i svako $n\in N$, $m\in N$ važi:

$$p_{f^n(i)}(A^3x_m-A^3x_o) \leq p_{f^n(i)}(A^3x_m-A^3x_{m-1})+p_{f^n(i)}(A^3x_{m-1}-A^3x_{m-2}) + \dots$$

$$\dots + p_{f^n(i)}(A^3x_2-A^3x_1) + p_{f^n(i)}(A^3x_1-A^3x_o) \leq$$

$$\leqslant \prod_{r=0}^{m-1} q(f^r(i))p_{f^{n+m}(i)}(A^4x_0-A^3Tx_0) + \ldots + q(f^n(i))q(f^{n+1}(i))\cdot$$

$$\cdot\, p_{f^{n+2}(i)}(A^4x_0-A^3Tx_0) + q(f^n(i))p_{f^{n+1}(i)}(A^4x_0-A^2Tx_0) =$$

$$= \sum_{k=2}^{m}\left(\prod_{r=0}^{k-1} q(f^{r+m}(i))\right)\cdot p_{f^{n+k}(i)}(A^4x_0-TA^3x_0) +$$

$$+ q(f^n(i)) + p_{f^{n+1}(i)}(A^4x_0-TA^2x_0).$$

Ako $m \to \infty$, pošto je red $c_n(i)$ konvergentan, za svako $n \in N \cup \{0\}$ i svako $i \in I$ je

$$(9) \qquad p_{f^n(i)}(A^2z-A^3x_0) \leqslant c_n(i).$$

Neka je $n = 2k$. Tada za svako $i \in I$ je:

$$p_i(A^2z-A^2x_n) \leqslant q(i)p_{f(i)}(ASz-ATx_n) = q(i)p_{f(i)}(A^2z-A^2x_{2n-1}) \leqslant$$

$$(10) \quad \leqslant q(i)q(f(i))p_{f^2(i)}(ATz-ASx_{n-1}) = q(i)q(f(i))p_{f^2(i)}(A^2z-A^2x_{n-2}) \leqslant$$

$$\leqslant \ldots \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} q(f^k(i))p_{f^n(i)}(A^2z-A^3x_0) \leqslant b_n(i)\cdot c_n(i)$$

Lako se pokazuje da (10) važi i za $n=2k-1$. Pošto je $\lim_{n\to\infty} b_n(i)\cdot c_n(i) = 0$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} p_i(A^2z-A^2x_n) = 0$.
Sada je:

$$Az = A(Az) = A(Sz) = A(Tz) = S(Az) = T(Az)$$

što znači da je Az zajednička nepokretna tačka preslikavanja A, S i T.

Pokazaćemo sada nejednakost:

$$p_{f^k(i)}(Az-A^4x_o) \leqslant \frac{c_o(i)-c_o^k(i)}{\prod\limits_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))} \qquad k \in N, \quad i \in I$$

a pre toga da je:

$$(11) \qquad p_{f^k(i)}(A^3x_n-A^4x_o) \leqslant \frac{c_o(i)-c_o^k(i)}{\prod\limits_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))} \qquad k \in N, \quad i \in I.$$

Za svako $i \in I$ i $k \in N$ važi da je:

$$p_{f^k(i)}(A^3x_1-A^4x_o) \leqslant q(f^k(i))p_{f^{k+1}(i)}(A^2Sx_1-A^3Tx_o) =$$

$$= q(f^k(i))p_{f^{k+1}(i)}(A^4x_o-A^3Tx_o) ,$$

$$p_{f^k(i)}(A^3x_2-A^3x_1) \leqslant q(f^k(i))p_{f^{k+1}(i)}(A^2Tx_2-A^2Sx_1) =$$

$$= q(f^k(i))p_{f^{k+1}(i)}(A^3x_1-A^4x_o)$$

i dalje:

$$p_{f^k(i)}(A^3x_n-A^4x_o) \leqslant p_{f^k(i)}(A^3x_n-A^3x_{n-1})+p_{f^k(i)}(A^3x_{n-1}-A^3x_{n-2})+\ldots+$$

$$+ p_{f^k(i)}(A^3x_1-A^4x_o) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{r=0}^{j-1} q(f^{r+k}(i))\right)p_{f^{k+j}(i)}(A^4x_o-A^3Tx_o).$$

Pošto je:

$$c_o(i) - c_o^k(i) = \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{n-1} q(f^r(i))\right)p_{f^n(i)}(A^4x_o - TA^3x_o) =$$

$$= \prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))\cdot\{q(f^k(i))p_{f^{k+1}(i)}(A^4x_o - TA^3x_o) +$$

$$+ q(f^k(i))q(f^{k+1}(i))p_{f^{k+2}(i)}(A^4x_o - TA^3x_o) + \ldots +\}$$

dobija se da je

$$\frac{c_o(i) - c_o^k(i)}{\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))} = q(f^k(i))\cdot p_{f^{k+1}(i)}(A^4x_o - TA^3x_o) + \ldots.$$

odakle sledi (11).

Iz činjenice da je $\lim_{k\to\infty}(c_o(i) - c_o^k(i)) = 0$ sledi da je

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))\cdot p_{f^k(i)}(Az - A^4x_o) = 0.$$

Pretpostavimo da je $z' = Az' = Sz' = Tz'$ i da je:

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))p_{f^k(i)}(z' - A^4x_o) = 0.$$

Tada je:

$$p_i(Az - z') = p_i(Az - Az') \leq q(i)p_{f(i)}(Sz - Tz') =$$

$$= q(i)p_{f(i)}(Az - Az') \leq \ldots \leq \prod_{k=0}^{n-1} q(f^k(i))\cdot p_{f^n(i)}(Az - Az') \leq$$

$$\leq \prod_{k=0}^{n-1} q(f^k(i))p_{f^n(i)}(Az - A^4x_o) + \prod_{k=0}^{n-1} q(f^k(i))p_{f^n(i)}(Az' - A^4x_o)$$

.z Teorema IV.3 sledi da postoji $x \in X$ tako da je $Sx = Tx =$ $= Ax$. Treba još da pokažemo da postoji nepokretna tačka i da je)na jedinstvena. Pošto je

$$b_n(i)\cdot c_n(i) \leq \sum_{k=n+2}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))\right) a_k(i)\cdot p_{\beta(i)}(A^4x_0 - TA^3x_0) +$$

$$+ \prod_{r=0}^{n} q(f^r(i))\cdot a_{n+1}(i) p_{\beta(i)}(A_0^4x - TA_0^2x)$$

ı red:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1} q(f^r(i))\right) a_k(i) \qquad \text{konvergira}$$

važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(i)\cdot c_n(i) = 0$ za svako $i \in I$.

Iz Teoreme IV.3 sada sledi da postoji zajednička nepokretna tačka $y \in X$ za preslikavanja S, T i A. Medjutim, za svako $x_0 \in X$ i svako $i \in I$ je:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1} q(f^k(i))\right) p_{f^n(i)}(A^4x_0 - y) = 0$$

pa je ta zajednička nepokretna tačka i jedinstvena.

Lema IV.1. Neka su S i T neprekidna preslikavanja sekvencijalno kompletnog realnog Hausdorffovog vektorskog topološkog prostora $(X,\{p_i\}_{i\in I})$ u samog sebe i za svako $u \in U$ neka je $A_u : X \to S(X) \cap T(X)$ neprekidno preslikavanje komutativno sa S i T takvo da je:

(i) Za svako $x \in X$ preslikavanje $u \to A_u(x)$ je neprekidno preslikavanje iz U u $S(X) \cap T(X)$;

(ii) Za svako $i \in I$ postoji $q(i) \geq 0$ i $f(i) \in I$ tako da je:

$$p_i(A_u(x)-A_u(y)) \leq q(i)\cdot p_{f(i)}(S(x)-T(y)), \qquad x,y \in X,\ u \in U;$$

(iii) Za svako $n \in N \cup \{0\}$ i $i \in I$ postoji $a_n(i) \geq 0$ i $\beta(i) \in I$ tako da je

$$p_{f^n(i)}(x) \leq a_n(i)\cdot p_{\beta(i)}(x) \qquad \text{za svako } x \in X$$

pri čemu je:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^r(i)] \right) a_k(i) = K(i) < \infty ,$$

za svako $i \in I$.

Tada postoji jedno i samo jedno neprekidno preslikavanje $\tilde{z} : u \to z(u)$ tako da je:

$$z(u) = A_u(z(u)) = S(z(u)) = T(z(u)) , \qquad u \in U.$$

Dokaz. Pošto su svi uslovi za primenu Posledice IV.3 zadovoljeni za svako $u \in U$ postoji jedan i samo jedan elemenat $z(u) \in S(X) \cap T(X)$ tako da važi (1). Pokazaćemo da je preslikavanje $\tilde{z} : u \to z(u)$ neprekidno. Neka je u_0 proizvoljan elemenat iz U i $\varepsilon > 0$. Tada za svako $i \in I$ imamo da je:

$$p_i(z(u)-z(u_0)) \leq p_i(z(u)-A_u(z(u_0))) + p_i(A_u(z(u_0))-z(u_0)) =$$

$$= p_i(A_u(z(u))-A_u(z(u_0))) + p_i(A_u(z(u_0)) - A_{u_0}(z(u_0))) \leq$$

$$< q(i)p_{f(i)}(S(z(u))-T(z(u_o))) + p_i(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o)))$$

$$\leq \ldots \leq \left(\prod_{k=0}^{n-1} q[f^k(i)]\right) p_{f^n(i)}(A_u(z(u))-A_u(z(u_o))) +$$

$$+ \left(\prod_{r=0}^{n-2} q[f^r(i)]\right)\cdot p_{f^{n-1}(i)}(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o))) + \ldots +$$

$$+ q(i)p_{f(i)}(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o)))+p_i(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o)))$$

$$\leq \left(\prod_{k=0}^{n-1} q[f^k(i)]\right) a_n(i)p_{\beta(i)}(A_u(z(u))-A_u(z(u_o))) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^r(i)]\right) a_k(i)\cdot p_{\beta(i)}(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o))).$$

Kada $n \to \infty$ dobija se:

$$p_i(z(u)-z(u_o)) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^r(i)]\right) a_k(i)\cdot \tag{12}$$

$$\cdot\, p_{\beta(i)}(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o)))$$

jer prvi sabirak teži nuli kad $n \to \infty$.

Pošto je preslikavanje $u \to A_u(z(u_o))$ neprekidno postoji okolina $V(u_o)$ tačke u_o takva da važi sledeća implikacija:

$$u \in V(u_o) \Rightarrow p_{\beta(i)}(A_u(z(u_o))-A_{u_o}(z(u_o))) \leq \frac{\varepsilon}{K(i)} .$$

Sada iz (12) sledi da je za svako $u \in V(u_o)$:

$$p_i(z(u)-z(u_o)) < \varepsilon ,$$

a to je i trebalo dokazati.

Teorema IV.4. Neka je $(X,\{p_i\}_{i\in I})$ kompletan realan Hausdorffov vektorski topološki prostor, $K\subseteq X$ zatvoren i konveksan podskup, S i $T : X \to X$ neprekidna aditivna preslikavanja, $A : K \to X$, $F : K \to X$ neprekidna preslikavanja takva da je $\overline{F(K)}$ kompaktno, $S|F(K) = T|F(K) = Id|F(K)$, $A(K) + F(K) \subseteq S(K) \bigcap T(K)$, $S(K) \bigcup T(K) \subseteq K$ i za svako $i\in I$ postoji $q(i) \geqslant 0$ $f(i)\in I$ tako da je

$$p_i(A(x)-A(y)) \leqslant q(i)\; p_{f(i)}(S(x)-T(y)) \qquad x,y\in K$$

pri čemu je zadovoljen uslov *(iii)* Leme IV.1.

Ako su S i T komutativna sa A i $S(K)\bigcap T(K)$ je Z-tipa onda postoji $x\in K$ tako da je:

$$x = A(x) + F(x) = S(x) = T(x) \ .$$

Dokaz. Za svako $u\in K$ neka je $A_u(x) = A(x) + F(u)$, $x\in K$. Pokazaćemo da familija $\{A_u\}_{u\in K}$ zadovoljava uslove prethodne leme. Pre svega je:

$$p_i(A_u(x)-A_u(y)) = p_i(A(x)-A(y)) \leqslant q(i)\; p_{f(i)}(S(x)-T(y))$$

za svako $u\in U$ i $x,y\in K$. Pošto je X vektorski topološki prostor a F neprekidno preslikavanje sledi da je i $u\to A_u(x)$ neprekidno za svako $x\in K$. Iz $A(K) + F(K)\subseteq S(K)\bigcap T(K)$ sledi da je $A_u(K)\subseteq S(K)\bigcap T(K)$ za svako $u\in K$. Dalje imamo da je:

$$S(A_u(x)) = S(A(x)+F(u)) = S(A(x)) + S(F(u)) =$$

$$= A(S(x)) + F(u) = A_u(S(x)) \ .$$

Slično je i $T(A_u(x)) = A_u(T(x))$ za svako $x, u \in K$.

Sada iz Leme IV.1 sledi da za svako $u \in K$ postoji $Ru \in S(K) \cap T(K)$ tako da je:

$$Ru = A(Ru) + F(u) = S(Ru) = T(Ru)$$

Preslikavanje $R : K \to S(K) \cap T(K)$ ovako definisano je neprekidno i kao što ćemo pokazati, zadovoljava sve uslove Teoreme II.1. Pošto je $R(K) \subseteq S(K) \cap T(K)$ i skup $S(K) \cap T(K)$ je Z-tipa sledi da je i $R(K)$ Z-tipa. Prostor X je kompletan pa ukoliko se pokaže da je $R(K)$ predkompaktno slediće i kompaktnost skupa $\overline{R(K)}$. Za svako z_1 i $z_2 \in K$ je:

$$Rz_1 = A(Rz_1) + F(z_1) = S(Rz_1) = T(Rz_1) \qquad \text{i}$$

$$Rz_2 = A(Rz_2) + F(z_2) = S(Rz_2) = T(Rz_2) \qquad \text{te je}$$

$$\begin{aligned}
p_i(Rz_1 - Rz_2) &\leq p_i(A(Rz_1) - A(Rz_2)) + p_i(F(z_1) - F(z_2)) \leq \\
&\leq q(i) p_{f(i)}(S(Rz_1) - T(Rz_2)) + p_i(F(z_1) - F(z_2)) \leq \\
&\leq q(i) p_{f(i)}(Rz_1 - Rz_2) + p_i(F(z_1) - F(z_2)) \leq \ \dots \leq \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{n-1} q[f^k(i)] \right) p_{f^n(i)}(Rz_1 - Rz_2) + \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^r(i)] \right) p_{f^k(i)}(F(z_1) - F(z_2)) < \\
&< p_{\beta(i)}(Rz_1 - Rz_2) \left(\prod_{k=1}^{n-1} q[f^k(i)] \right) a_n(i) + \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^k(i)] \right) a_k(i) p_{\beta(i)}(F(z_1) - F(z_2)) .
\end{aligned}$$

Kad $n \to \infty$ imamo da je:

$$(13) \qquad p_i(Rz_1 - Rz_2) \leq p_{\beta(i)}(F(z_1) - F(z_2)) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} q[f^r(i)] \right) a_k(i) .$$

Neka je dato $r > 0$. Tada postoji konačan skup $\{F(z_1), F(z_2), \ldots, F(z_n)\}$ $(z_j \in K,\ j \in \{1,2,\ldots,n\})$ tako da je:

$$F(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{F(z_j) + U_{\frac{r}{K(i)}}\} .$$

Iz (13) sledi da je:

$$R(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{Rz_j + U_r\}.$$

Sada iz Teoreme II.1 sledi da postoji $x \in K$ tako da je $x = Rx$. Ali tada je:

$$x = Rx = A(x) + F(x) = S(x) = T(x) .$$

Definicija IV.1. preslikavanje $F : X \to 2^E$ je demikompaktno ako i samo ako svaki ograničen niz $\{x_i\}_{i \in I}$, za koji niz $\{x_n - y_n\}_{n \in N}$ $(y_n \in F(x_n),\ n \in N)$ konvergira, ima konvergentni podniz.

Teorema IV.5. Neka je $(X, \{p_i\}_{i \in I})$ kompletan Hausdorffov lokalno konveksan prostor čija topologija je generisana familijom seminormi $\{p_i\}_{i \in I}$, $K \subseteq X$ zatvoren i konveksan podskup, S i $T : X \to X$ neprekidna i linearna preslikavanja takva da je $S(K) \cap T(K)$ ograničeno, $A : K \to X$ neprekidno preslikavanje, $F : K \to X$ kompaktno preslikavanje, x_0

zvezdasta tačka za $S(K)$ i $T(K)$, $A(K)+F(K) \subseteq S(K) \cap T(K)$, $S(K) \cup T(K) \subseteq K$, $S|F(K) \cup \{x_0\} = T|F(K) \cup \{x_0\} = Id|F(K) \cup \{x_0\}$, za svako $i \in I$ postoji $q(i) \geqslant 0$ i $f(i) \in I$ tako da je:

$$p_i(A(x)-A(y)) \leqslant q(i)p_{f(i)}(S(x)-T(y)), \qquad (x,y \in K)$$

pri čemu je:

$$\text{(B)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\prod_{r=0}^{n-1} q[f^r(i)]\right) a_n(i)} = 1 \qquad i \in I.$$

Ako su S i T komutativni sa A i $S(K) \cap T(K)$ je Z-tipa onda postoji $x \in K$ tako da je:

$$x = A(x) + F(x) = S(x) = T(x) .$$

Dokaz. Neka je $\{r_n\}_{n \in N} \subset (0,1)$ i $\lim r_n = 1$. Za svako $n \in N$ neka je $A_n(x) = r_nA(x) + (1-r_n)x_0$ a $F_n(x) = r_nF(x)$ za svako $x \in K$. Pokazaćemo da za svako $n \in N$ preslikavanja A_n, F_n, S i T zadovoljavaju sve uslove prethodne teoreme.

Pošto su S i T linearni sledi da je:

$$S(F_n(x)) = S(r_nF(x)) = r_nS(F(x)) = r_nF(x) =$$
$$= F_n(x) = Id|F_n(x) , \qquad \text{za svako} \quad x \in K .$$

Slično se dobija da je i $T(F_n(x)) = Id|F_n(x)$ za svako $x \in K$ te je $S|F_n(x) = T|F_n(K) = Id|F_n(K)$ za svako $n \in N$. Dalje je:

$$S(A_n(x)) = S(r_nA(x)+(1-r_n)x_0) = r_nS(A(x)) + (1-r_n)x_0 =$$
$$= r_nA(S(x)) + (1-r_n)x_0 = A_n(S(x)) \qquad \text{za svako}$$
$$x \in K \quad \text{i} \quad n \in N.$$

Isto tako se pokazuje da su i T i A_n komutativni. Treba još pokazati da je $A_n(K)+F_n(K) \subseteq S(K) \cap T(K)$. Pošto je za svako $n \in N$, $A_n(K)+F_n(K) = r_n(A(K)+F(K)) + (1-r_n)x_0$, $A(K)+F(K) \subseteq S(K) \cap T(K)$ i x_0 je zvezdasta tačka za $S(K)$ i $T(K)$ sledi da je $A_n(K)+F_n(K) \subseteq S(K) \cap T(K)$. Dalje je za svako $i \in I$:

$$p_i(A_n(x)-A_n(y)) = p_i(r_nA(x)-r_nA(y)) \leqslant$$
$$\leqslant r_n \cdot q(i)p_{f(i)}(S(x)-T(y)) \leqslant q(i)p_{f(i)}(S(x)-T(y))$$

$$\text{i} \quad \sqrt[m]{r_n^m \prod_{k=0}^{m-1}\left(q[f^k(i)]\right)a_m(i)} \to r_n < 1 \qquad \text{kada} \quad m \to \infty .$$

Sada iz prethodne teoreme sledi da za svako $n \in N$ postoji $x_n \in K$ takvo da je:

$$(14) \qquad x_n = A_n(x_n) + F_n(x_n) = S(x_n) = T(x_n)$$

Tada je:

$$x_n - A(x_n) - F(x_n) = (r_n-1)(A(x_n)+F(x_n))+(1-r_n)x_0, \qquad n \in N$$

pa pošto $r_n \to 1$, $n \to \infty$ i $A(x_n)+F(x_n) \subseteq S(K) \cap T(K)$ i skup $S(K) \cap T(K)$ je ograničen iz (14) sledi da je:

$$(15) \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n-A(x_n)-F(x_n)) = 0$$

Skup $\overline{F(K)}$ je kompaktan pa postoji podniz $\{F(x_{n_k})\}_{k \in N}$ takav da je $\lim_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = z \in X$. Tada iz (15) sledi da je:

$$(16) \qquad \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - A(x_{n_k})) = z .$$

Pošto je A demikompaktno sledi da postoji podniz $\{x_{n_{k_r}}\}_{r\in N}$ takav da je $\lim\limits_{r\to\infty} x_{n_{k_r}} = u \in K$. Iz (15) sledi da je $u = A(u)+F(u)$ a iz $x_n = S(x_n) = T(x_n)$ i neprekidnosti preslikavanja S i T da je:

$$u = A(u) + F(u) = S(u) = T(u) .$$

Definicija IV.2. Neka je $M \subset 2^X$ sa osobinom da iz $Q \in M$ sledi da je i $\overline{\text{conv}}\, Q \in M$ za svako $Q \in M$. Ako je $(A,\leqslant)$ parcijalno uredjen skup i $\psi : M \to A$ tako da je

$$\psi(\overline{\text{conv}}\, Q) = \psi(Q) \qquad \text{za svako} \quad Q \in M$$

kažemo da je ψ mera nekompaktnosti.

Mera ψ je monotona ako i samo ako iz Q_1 i $Q_2 \in M$ i $Q_1 \subseteq Q_2$ sledi da je $\psi(Q_1) \leqslant \psi(Q_2)$.

Mera ψ je algebarski semiaditivna ako i samo ako za svako Q_1 i $Q_2 \in M$ važi da je:

$$\psi(Q_1+Q_2) \leqslant \psi(Q_1) + \psi(Q_2)$$

Mera ψ je 2-regularna ako i samo ako je $\psi(Q) = 0$ za $\overline{Q}$ kompaktno.

Definicija IV.3. Preslikavanje $F : M \to X$ $(M \subset X)$ je ψ-kondenzujuće ako i samo ako iz $Q \subseteq M$ sledi da je $Q \in M$ i $F(Q) \in M$ a iz $\psi(Q) \leqslant \psi(F(Q))$, sledi da je $\overline{Q}$ kompaktno.

Posledica IV.4. Neka je $(X,\{p_i\}_{i\in I})$ kompletan realan Hausdorffov lokalno konveksan prostor, $K\subseteq X$ zatvoren i konveksan podskup x_0, S, F i T kao u Teoremi IV.5, $A : K \to X$ neprekidno ψ-kondenzujuće preslikavanje gde je $\psi : U \to G$, U familija svih ograničenih podskupova od $\overline{X}$ $(G,\leqslant)$ totalno uredjen skup a mera nekompaktnosti ψ monotona, 2-regularna i algebarski semiaditivna. Ako za svako $i\in I$ postoji $q(i)\geqslant 0$ i $f(i)\in I$ tako da je:

$$p_i(A(x)-A(y)) \leqslant q(i)p_{f(i)}(S(x)-T(y)) \qquad \text{za svako } x,y\in K,\ i\in I,$$

važi uslov (B) Tvrdjenja IV.5 a preslikavanje S i T komutativno sa A onda postoji $x\in K$ tako da je:

$$x = A(x) + F(x) = S(x) = T(x) .$$

Dokaz. Kao i u prethodnoj teoremi treba pokazati da iz (16) sledi da postoji konvergentni podniz $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ niza $\{x_n\}_{n\in N}$. Neka je $y_n = x_n - A(x_n)$ za svako $n\in N$. Tada je:

$$x_n = y_n + A(x_n) , \qquad n\in N$$

što znači da je:

$$\{x_n | n\in N\} \subseteq \{y_n | n\in N\} + \{A(x_n) | n\in N\} .$$

Kako je $x_n \in S(K)\bigcap T(K)$ a $S(K)\bigcap T(K)$ ograničeno sledi da je $\{x_n\}_{n\in N} \subseteq U$. Pošto je ψ algebarski semiaditivno važi da je:

$$\psi[\{x_n | n \in N\}] \leqslant \psi[\{y_n | n \in N\}] + \psi[\{A(x_n) | n \in N\}] .$$

Mera ψ je i 2-regularna pa je $\psi[\{y_n | n \in N\}] = 0$ te je na kraju:

$$\psi[\{x_n | n \in N\}] \leqslant \psi[\{A(x_n) | n \in N\}] .$$

Preslikavanje A je ψ-kondenzujuće pa sledi da postoji konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ niza $\{x_n\}_{n\in N}$.

Sada iz Teoreme IV.5 sledi da postoji $u \in K$ tako da je:

$$u = A(u) + F(u) = S(u) = T(u) .$$

LITERATURA

|1| Boscan G. : *On some fixed point theorem in probabilistic metric spaces*, Math. Balk., 67-70, (1974).

|2| Brouwer L.E.J. : *Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., 71, 97-115, (1910).

|3| Browder F.E. : *Fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann., 177, 283-301, (1968).

|4| Cronin J. : *Fixed point and topological degree in nonlinear analyses*, Amer. Math. Soc. New York (1964).

|5| Daneš J. : *Some fixed point theorems*, Comm. Math. Univ. Carolinea, 9, 223-235, (1969)

|6| Deimling K. : *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, Springer Verlag, (1974).

|7| Dugundji J., Granas A. : *Fixed point theory*, Vol. I, Monografie matematyczne, Vol. 61 (u štampi).

|8| Fan K. : *A generalisation of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann., 142, 305-310, (1961).

|9| Fisher B. : *Mappings with a common fixed point*, Mathematics Seminar Notes, Vol. 7, No.1, 81-84, (1979).

|10| Glicksberg J.L. : *A further generalisation of Kakutani fixed point theorem with applications to Nach eguilibrium points*, Proc. Amer. math. Soc., 3, 170-174, (1952).

|11| Hadžić O. : *Osnovi teorije nepokretne tačke*, Institut za matematiku, Novi Sad, (1978).

|12| Hadžić O. : *On the admissibility of topological vector spaces*, Acta Sci. Math., 42, 81-85, (1980).

|13| Hadžić O. : *A fixed point theorem for a class of mappings in probabilistic locally convex spaces*, Publ. Inst. Math., 21(35), 79-85, (1977).

|14| Hadžić O. : *Some theorems on the Fixed Points for Multivalued Mappings in Locally Convex Spaces*, Bulletin de L'Academie Polonaise des sciences, Vol.XXVII, No.3-4, 277-285, (1978).

|15| Hadžić O. : *A fixed point theorem in topological vector spaces*, Zbornik radova Prirodnomatematičkog fakulteta, Univerzitet u Novom Sadu, serija za matematiku, knjiga 10, 23-29, (1980).

|16| Hadžić O. : *On multivalued mappings in paranormed spaces*, Comm. Math. Univ. Carolinea, 22, 1, 129-136, (1981).

|17| Hadžić O. : *Some fixed point and almost fixed point theorems for multivalued mappings in topological vector spaces*, Nonlinear Analysis, Theory Methods & Applications, Vol. 5, No.9, 1009-1019, (1981).

|18| Hadžić O. : *On Sadovski's fixed point theorem in topological vector space*, Comm. Math., (u štampi).

|19| Hadžić O. : *On Kakutani's fixed point theorem in topological vector spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., (u štampi).

|20| Hadžić O. : *A fixed point theorem for the sum of two mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., (u štampi).

|21| Hadžić O., Gajić Lj. : *Some generalisations of Schuder's fixed point theorem with respect to paranormed space*, Math. Vesnik, (u štampi).

|22| Hadžić O., Gajić Lj. : *A theorem on almost continous selection property and its aplications*, Zbornik radova PMF u Novom Sadu (u štampi).

|23| Hadžić O., Gajić Lj. : *A common fixed point theorem in locally convex spaces*, Analele Stiintifice ale Universitatii "Al.I.Cuze" din Iasi (u štampi).

|24| Hadžić O., Gajić Lj. : *A fixed point theorem for multivalued mappings in topological vector space*, Fund. Math. CIX, 163-167, (1980).

|25| Hadžić O., Gajić Lj. : *Some applications of fixed point theorems for multivalued mappings in topological vector space*, (u pripremi).

|26| Hadžić O., Stanković B. : *Some theorems on the fixed point in locally convex spaces*, Publ. Inst. Math., T 10 (24), 9-19, (1970).

|27| Hahn S. : *Ein elementaler Zugang zur Leray-Schauder--Theorie*, Technische Universität, Dresden, Informationen, Sektion Mathematik, 07-10-77.

|28| Hahn S. : *A remark on fixed point theorem for condensing set-valued mappings*, Informationen Technische Universität, Dresden, 07-5-77.

|29| Hahn S. : *Fixpunktsätze for mengenwetige Abbildungen in local konvexen Rämen*, Math. Nachr., 73, 269-283, (1976).

|30| Hahn S. und Pötter K.F. : *Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorrämen*, Studia. Math., 50, 1-16, (1974).

|31| Hahn S. und Reidrich T. : *Der Abbildungsgrad kompakter Vektorfelder in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Rämen*, Wiss. Z. Tech. Univ.., Dresden 22, 37-42, (1973).

|32| Himmelberg C.J. : *Fixed points of Compact Multifunctions*, J. Math. Analysis Appl., 38, 205-207, (1972).

|33| Istratescu V. : *Introducere in teoria punctelor fixe*, Bucuresti, (1973).

|34| Istratescu V. : *Fixed Point Theory (An introduction)*, Mathematics and its Applications 17, D. Reidel Published Company, (1981).

|35| Ishii J. : *On the admissibility of function spaces*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 19, 49-55, (1965).

|36| Kaballo W. : *Zur Abbildungsgrad in Haudorffschen topologischen Vektorrämenen*, Manuscripta math., 8, 209-216, (1973).

|37| Kakutani S. : *A generalisation of Brouwer's fixed point theorem*, Duke math. J., 8, 457-459, (1941).

|38| Karamardian S. : *Fixed Points*, Algorithms and Applications, Avademic Press, (1977).

|39| Kasahara S. : *On formulations of topological linear spaces by topological semifield*, Math. Jap. V. 19, 121-134, (1974).

|40| Klee V. : *Scrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces*, Math. Ann., 141, 281-285, (1960).

|41| Красносельский М.А. и Забрейко П.П. : Геометрические методы нелинейного анализа, Наука, (1975).

|42| Красносельский М.А., Перов А.Х., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.: Векторние поля на плоскости, ФИЗМАТГИЗ, (1963).

|43| Krautchausen C. : *On the theorems of Dugundji and Schauder for certain nonconvex spaces*, Math. Balk., 4, 365-369, (1974).

|44| Krautchausen C. : *Der Fixpunktsatz von Schauder in nicht notwendig konvexen Raumen sowie Anwendungen auf Hammersteinsche Gleichungen*, Dissertation, Aachen, (1976).

|45| Landsberg M. : *Linear topologicshe Räume die nicht lokal konvex sind*, Math. Zeitschr., 65, 113-132, (1956)

|46| Landsberg M., Reidrich T. : *Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen*, Math. Ann., 163, 50-61, (1966).

|47| Landsberg M. : *Über die Fixpunkte kompakten Abbildungen*, Math. Ann., 154, 427-431, (1964).

|48| Ma T.W. : *Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces*, Diss. Math., 92, (1972).

|49| Матусов С. : Обобщение теорем неподвижной точке Тихонова, Уз., Д.А.Н., СССР, № 2, 12-14, (1970).

|50| Michael E. : *Continous Selection I*, Math. Ann., Vol.23, No.2, (1956).

|51| Michael E., Pixley C. : *A unfield theorem on continuous selection*, Pacific J. of Math., Vol.87, No.1, 187-188, (1980).

|52| Nadler S.B. : *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math., 30, 475-488, (1969).

|53| Reidrich T. : *Das Birkhoff-Kellogg-Theorem für lokal radial beschränkte Räume*, Math. Ann., 166, 264-276, (1966).

|54| Reinerman J., Stallbohm V. : *Fixed point theorem for compact and nonexpansive mappings on starshaped domains*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 15, 775-779, (1974).

|55| Reidrich T. : *Vorlesung über nichtlineare Operatorengleichungen*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, (1976).

|56| Reidrich T. : *Der Räum S(0,1) ist zulässig*, Wiss. Z. Techn. Univ., Dresden, 13, 1-16, (1964).

|57| Reidrich T. : *Die Räume L^p (0<p<1) sind zulässig*, Wiss. Z. Techn. Univ., 12, 1149-1152, (1963).

|58| Rzepecki B. : *Remarks on Schauder's Fixed Point Theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phy., 24, 589-603, (1976).

|59| Schulz E. : *Existenzreiche für Halbeigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen*, Math. Nachr., 57, 182-199, (1973).

|60| Smart D.R. : *Fixed point theorems*, Cambridge Universiti Press, (1974).

|61| Stallbohm V. : *Fixpukte nichtexpansiver Abbildungen*, Technische Hochschule Aachen, (1973).

|62| Tarafdar A., Husain T. : *Duality in Fixed point theory of Multivalued Mappings with Applications*, Jor. Math. Anal. Appl., 63, 371-376, (1978).

|63| Todd M. : *The Computation of Fixed Point and Applications*, Springer Verlag, (1976).

|64| Zeidler E. : *Vorlesung über nichtlineare Funktional analysis I - Fixpuktsätze*, Teubner-Texte zur Mathematik, (1976).

|65| Zima K. : *On the Schauder's fixed point theorem with respect to paranormed space*, Comm. Math., 19, 421-423, (1977).

|66| Banas J., Kazimierz Goebel. : *Measure of noncompactness in Banach spaces*, Marcel Dekker, (1980).

|67| Bohnenblust H.F. and Karlin S. : *On a theorem of Ville*, *Contributions to the Theory of Games*, Princeton, 155-160. (1950).

|68| Browder E.F. : *Nonlinear operators and nonlinear equations in Banach Spaces*, AMS, (1976),

|69| Burzyk J., Mikusinski P. : *On Normability of Semigroups*, Bulletin de´ L´Academie Polonaise des sciences matematique, 33-35, (1978).

|70| Деляну А., Маринеску Т. : Теорема о неподвижнои точке и неябноц функциях в локално в пуклых пространствах, Revue de Math. pures et appliq., 8, 91-99, (1963).

|71| Dowker C.H. : *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math., 69, 200-242, (1947).

|72| Fan K. : *Fixed point and minimax theorems in locally convex linear spaces*, Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 121-126, (1952).

|73| Канторович А.В. и Акилов Г.П. : Функциональный анализ, Наука, Москва, (1977).

|74| Katetov M. : *On real valued functions in topological spaces*, Fund. Math., 38, 85-91, (1951).

|75| Klee V. : *Leray-Schauder theory without local convexity*, Math. Ann., 141, 286-296, (1960).

|76| Leray J. and Schauder J. : *Topologie et equations fontionelles*, Ann. Ecole Norm.(3), 51, 45-78, (1934).

|77| Gădac F. : *Theoreme de punct fix in spatii local convex*, Studii si serc. mat., 24, 1097-1106, (1972).

|78| Nagumo M. : *Degree of mapping in convex linear topological spaces*, Amer. J. Math., 73, 497-511, (1951).

|79| Rus A.I. : *Principii si aplicatii ale Teoriei punctului fix*, Editura Decia, (1979).

|80| Tong H. : *Some characterizations of normal and perfecty normal spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 54, (1948) Abstract 46, p.65.

|81| Mathematical Programming Study 7: *Complementarity and Fixed Point Problems*, North-Holland, (1978).

|82| Hadžić O., Gajić Lj. : *Some fixed point theorems for multivalued mappings in topological vector spaces*, Zbornik PMF u N. Sadu, 10, 49-54, (1980).

|83| Hadžić O. : *Fixed point theorems in not necesserly localy convex topological veċtor spaces,* (u pripremi).

|84| Hadžić O. : *Existence theorems for the system* $\begin{cases} x=H(x,y) \\ y=K(x,y) \end{cases}$ *in locally convex spaces,* Publ. de l'Institut Math., T 16(30), (1973).

|85| Segal V.M., Morrison E. : *A fixed point theorem for multifunctions in a locally convex space,* Amer. Math. Soc., Vol.38, No.3, 643-645, (1973).