

Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

MASTER RAD

Tema:

Efikasne metode nastave matematike

Profesor: Milan Božić

Asistent: Ivan Anić

Student:

Ana Todorović 1090/2011

Beograd, septembar 2012.

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET
BR. 201
BEOGRAD

Sadržaj

Uvod.....	2
Nastava matematike u prošlosti, sadašnjosti i budućnosti	3
Ciljevi nastave matematike	4
Načela nastave matematike.....	10
Oblici nastave matematike.....	16
Frontalni oblik nastave	16
Diferencirana nastava	17
Metode nastave matematike.....	21
Predavačka metoda.....	22
Metoda dijaloga	22
Heuristička metoda.....	25
Metoda rada sa tekstom	27
Problemska metoda	29
Programirana nastava	32
Demonstrativna metoda.....	34
Eksperimentalna metoda	35
Nastavnik matematike kao faktor u učenju i napredovanju učenika	36
Zaključak.....	40
Literatura.....	41

Uvod

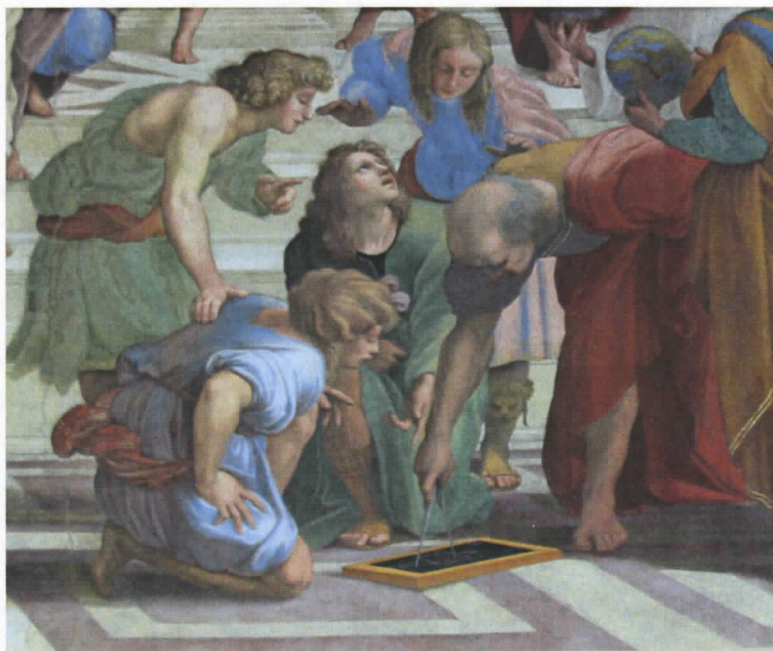
Matematika kao nastavni predmet u školi ima naglašeno mesto u celokupnom obrazovno-vaspitnom programu, ne samo kao nastavni predmet koji obrazuje ljude, pružajući učenicima korisna znanja za život ili nastavljanje obrazovanja, nego i kao predmet koji ima vaspitnu funkciju i široko učestvuje i izgradnji naučnog pogleda na svet. Jedan od zahteva nastave matematike, kao što je poznato, ima zadatak da kod učenika razvija smisao za samostalan rad, sposobnost jasnog, logičkog i preciznog izražavanja, navike odgovornosti i urednosti u izvršavanju školskih i drugih zadataka. Budući da se u školi učenici spremaju za život, od škole u mnogome zavisi kako će osposobiti učenike da se snalaze u problemskim situacijama, kako na poslu tako i u svakodnevnim životnim situacijama. Ako se postavi pitanje osposobljavanje učenika za samostalan rad u nastavi matematike, tradicionalna nastava, organizovana starim oblicima i metodama rada, ne može dati potpun odgovor na ovo pitanje u pogledu ispunjavanja zahteva iz programa za osnovnu i srednju školu. Nesumnjiva je potreba da se jedino unapređivanjem nastavne prakse sadašnja predavačka nastava, kojom se samo prenose znanja do stepena prepoznavanja i reprodukcije, mora zameniti nastavom koja će učenike osposobljavati da samostalno stiču znanja, počev od planiranja pa do samovrednovanja i stvaralačke primene u svakodnevnim životnim situacijama. Nastavni proces se i dalje izvodi improvizovano, rutinski, sa puno prakticizma. Položaj nastavnika i učenika je podređen i nadređen. Nastavnik je isključivi i neprikosnoveni organizator, gde je njegova reč prva i poslednja, sa dosta krutosti i odstojanja, bez samokritičnosti i kritičnosti u radu. Predavač je više akademskog tipa, bez demokratičnosti u radu i izvođenju nastavnog procesa, nezainteresovan za kreativan istraživački rad. Drži se šablona prema programu rada, neusavršava se i ne prati literaturu u dovoljnoj meri, ne uvodi inovacije u radu. Što se tiče samog učenika, on je samo objekat kome treba "sipati" znanje u glavu. On je više pasivan posmatrač, nego aktivni učesnik nastavnog procesa, koji mehanički usvaja znanja do nivoa reprodukcije, bez većeg interesovanja za samostalni stvaralački rad, bez demokratičnosti da zajedno sa nastavnikom učestvuje u organizaciji nastavnog procesa, bez prava na iznošenje svojih stavova.

Osavremenjavanjem nastave, uvođenjem inovatorskog rada, uvođenjem savremenih oblika i metoda rada, uvođenjem demokratičnosti i saradnje, sa stalnim zajedničkim konsultacijama u traženju puteva rešavanja određenih vaspitnih situacija u nastavnom procesu, podiže se kritička svest kod nastavnika i učenika u procenjivanju i samoprocenjivanju rezultata rada. U nastavi matematike treba koristiti problemske situacije, odnosno koristiti oblike učenja putem rešavanja problema. Bezobzira da li se radi o obradi, ponavljanju, vežbanju ili primeni matematičkog znanja u praksi, stalno treba težiti otkrivanju činjenica, određivanju definicija, i formulaciji pravila, zaključivanju, rasuđivanju i traženju novih ideja u rešavanju nekog matematičkog problema. Da bi se učenici osposobili za rešavanje problemskih zadataka neophodan je postupan, sistematičan i osmišljen rad i rešavanje zadataka po principu-od jednostavnijeg ka složenom problemskom zadatku. Bez osposobljenosti učenika da uče u vidu rešavanja problema nema ni samostalnosti ni stvaralačkog učenja.

Nastava matematike u prošlosti, sadašnjosti i budućnosti

Uz promene u društvu u kojem živimo menja se i sastav obrazovanja, a u promenama sastava obrazovanja, naravno, nije pošteđena ni nastava matematike. Zapravo, ne samo da svedočimo novim situacijama u nastavi matematike, već se i sama matematika kao naučna disciplina uveliko razvila od svojih početaka.

Iako začeci današnje matematike sežu još u stari Egipat i Babilon, tada je matematika uglavnom bila shvaćena kao isključivo primenjena disciplina, kroz korisne formule za zapreminu poznatih tela i sl. Matematika kao deduktivna naučna disciplina razvijala se u vreme stare Grčke, uglavnom kroz geometriju. Arapi preuzimaju znanja starih Grka (geometrija) i Indijaca (aritmetika) i u procvatu svoje kulture od IX do XIV veka se svojim osvajanjima šire na Zapad. Evropljani se tada upoznaju s arapskom matematikom koja je bila uveliko naprednija od evropske, pogotovo u području zapisa brojeva i računanja. Naime, tada su u Evropi bile u upotrebi rimske brojke koje su polako bivale istisnute od strane arapskih. U vekovima koji slede, uglavnom su se prevodili i izučavali stari matematički spisi, a od XVI veka Evropa doživljava procvat i tada nastaje moderna matematika. Osnovne matematičke discipline su aritmetika, algebra, geometrija, matematička analiza, matematička logika, teorija skupova, teorija verovatnoće, kombinatorika i dr.



Grčki matematičar Euklid iz III veka p.n.e.

Razvojem matematike kroz vekove čovek bi očekivao da su se događale i paralelne modifikacije sadržaja u nastavi matematike. No, nije tako. Modernije matematičke discipline poput verovatnoće i statistike su se tek nedavno (i to u vrlo malom opsegu) uvrstile u matematički plan, iako se, kako u svakodnevicu, tako i u međunarodnim istraživanjima, takvo znanje traži u velikoj meri. Uostalom, metodika nastave matematike u mnogim zemljama i matematičkim krugovima još nije ni prihvaćena kao naučna disciplina i ne ulaže se u istraživanja iz ovog važnog područja.

Savremena nastava matematike se obično opisuje kao nastava orijentisana prema učenicima što znači da se dosadašnja dominantna uloga nastavnika stavlja u drugi plan, a povećava se učenikova aktivnost u nastavi matematike, posebno kroz eksperiment u nastavi (učenje otkrivanjem). Time nastavnik nije više u poziciji glavnog aktera prenosa znanja, već postaje koordinator i organizator nastavnog procesa. Uz to, tendencija je podsticati odgovornost učenika za vlastiti uspeh i napredovanje u matematici. Savremena nastava matematike teži većoj zastupljenosti pitanja otvorenog tipa i diskusije između nastavnika i učenika. Od učenika se takođe očekuju sposobnosti tačnog obrazloženja odgovora, argumentacije i dubljeg shvatanja matematičkog sadržaja.

Ciljevi nastave matematike

Nastava je svrsishodan, dvosmerni, planski i racionalno organizovan radni proces u kojemu se, jednostavno rečeno, vrši prenošenje steknutih iskustava starijih generacija na mlade, sa svrhom njihovog osposobljavanja za samostalno i uspešno snalaženje u životnom okruženju. Cilj označava očekivano, zamišljeno buduće stanje koje želimo postići određenim aktivnostima i sredstvima (sadržajima). Ciljevima iskazujemo formulaciju očekivanih promena koje će nastati kod učenika (pojedina) nakon što ovlada sadržajima koji su obuhvaćeni u određenom ciklusu školovanja. Uopšteno formulisani ciljevi za svaki tip škole obično se baziraju na odlukama političkih organa, uz učešće stručnjaka, a realizuju se u smernicama i nastavnim programima. U ciljevima škole sadržane su želje društva da se učenici pripreme za budući život u porodici, profesiji i javnosti.

Ciljeve matematike grupisaćemo na sledeći način:

Fundamentalne misaone delatnosti.:

1. Sposobnost opažanja

2. *Logičko mišljenje*
3. *Sposobnost komunikacije i koordinacije*
4. *Unapređenje jezika i sposobnost za kritiku*
5. *Unapređenje pristupa rešavanju problema i kreativnost*
6. *Samostalnost i samostalan rad*

Osnovne mentalne operacije:

1. *Upoređivanje*
2. *Sređivanje*
3. *Apstrahovanje*
4. *Uopštavanje*
5. *Klasifikovanje*
6. *Konkretizovanje*
7. *Formalizacija*

Opšti "vaspitni" ciljevi:

1. *Ovladavanje kulturnim tehnikama*
2. *Razumevanje za "algoritmizaciju"*
3. *Sposobnost matematiziranja jednostavnih situacija iz okruženja*
4. *Sposobnost razumevanja matematičkih životnih pojava i njihovog kritičkog procenjivanja*

Uvidi i stavovi o celovitosti predmeta:

1. *Sposobnost da se vide mogućnost i ograničenja matematike*
2. *Radost zbog estetske strane matematike*

Sposobnost opažanja

Sposobnost opažanja se ovde razume u dvostrukom smislu: Kao sposobnost prostorane

apstrakcije (pretvaranje dvodimenzionalnih predstava u trodimenzionalne i obratno) i kao korišćenje opažanja (kao heurističku pomoć kroz pretvaranje činjeničnog stanja stvari u slikoviti, naročito geometrijski način prikazivanja). Primeri za prvo: prostorno predstavljanje kuće na osnovu horizontalne i vertikalne projekcije; prikazivanje prostornih osnovnih oblika (npr. pravougaoni paralelopiped, piramida, kupa) na listu papira. Primeri za drugo: razjašnjavanje situacije uz pomoć skice, šeme, prikaza u koordinatnom sistemu.

Logičko mišljenje

I ovo se posmatra dvostruko: "unutar-matematički" (kao deo opštih ciljeva nastave matematike) i "van-matematički" (kao elemenat zajednički grupi predmeta). Uz prvo: naučiti da se poštuju pravila formalne logike (pravila poricanja, završna pravila, dokazni postupak....) kod matematičkog argumentovanja. Uz drugo: naučiti primenu logičkih principa na svakodnevnom jeziku i u vanmatematičkim situacijama.

Sposobnost komunikacije i kooperacije

Ovaj cilj istovremeno podrazumeva volju za komunikacijom i kooperacijom: spremnost na "racionalni" dijalog. Naglašava, da se treba pridržavati pravila logičke igre ali, pored toga, prihvata i čitav niz pojedinačnih sposobnosti kao što su: tačno registrovanje i razjašnjavanje iskaza, navođenje primera i protiv primera, logičko raspoređivanje iskaza, proveravanje iskaza (ponovno računanje, kontrola), pridržavanje određenih definicija itd.

Unapređivanje jezika i sposobnost za kritiku

Ovi ciljevi se od prethodnih jedva mogu razdvojiti. Nastava matematike može (da li u velikoj meri?) podsticati, da se sopstvene delatnosti i misli verbalizuju, npr. pri korišćenju specijalnih materijala za igru i učenje, pri radu sa izazovnim zadacima, pri izradi modela ili u okviru manjih "projekata".

Nastava matematike može doprineti i preciziranju jezika, ona podstiče na tačnije (a time i razumljivije) izražavanje, tako što se uvek iznova pita o tačnom sadržaju pojma, o pretpostavkama i obrazloženjima. Nastava matematike tako doprinosi razvoju sposobnosti kritikovanja, tako što zahteva postavljanje odgovarajućih pitanja. Osim toga ova nastava daje svoj specijalni doprinos sposobnosti kritikovanja kroz bolju matematičku informisanost.

Unapređivanje pristupa rešavanju problema i kreativnost

Ovaj cilj, u osnovi obuhvata sve prethodne ciljeve: "Cilj je aktivni stav prema novim problemima, hrabrost za razmišljanje, iako put rešenja nije na vidiku; znati sam sebi pomoći, biti spreman na formulisanje i proveravanje pretpostavki, biti spreman na variranje mogućih rešenja". Delimični aspekt ovog cilja je "kombinatorno mišljenje", tj. sistematsko iscrpljivanje mogućnosti rešenja (Primer: Koliko "različitih" kvadratnih mreža ima?) Drugi delimični aspekt

je "sposobnost kombinovanja": sposobnost da se kombinovanjem poznatih pojmova, teorema i pravila dobijaju novi iskazi.

Na kraju, taj cilj sadži i stvaranje strategija mišljenja, što znači metoda, kako da se priđe problemima i kako da se oni, korak po korak, reše. Uz to, npr. ide sistematsko skupljanje podataka, "skiciranje" nekih činjenica, podela problema na delove, povezivanje sa poznatim stvarima, provera rešenja. Ovakve strategije mišljenja se nazivaju i "kognitivnim strategijama" ili "heurističkim pravilima".

Samostalnost i samostalan rad

Ovaj cilj je u uzajamnom odnosu sa rešavanjem problema. Rešavanje problema pretpostavlja samostalnost i samostalnu aktivnost, ali ih istovremeno i favorizuje. Posebne mogućnosti nastave matematike da doprinese samostalnosti zasnovane su, između ostalog, i na činjenici, da je za rešavanje matematičkih problema principijelno potrebno "samo" sopstveno razmišljanje i da rešenje može principijelno samostalno da se proveri (nezavisno od nastavnika ili drugih autoriteta). Samostalnost kao centralni cilj vaspitanja, naravno, uveliko prevazilazi matematičku samostalnost.

Osnovne mentalne operacije

U svaki od prethodno navedenih ciljeva ulaze osnovne mentalne operacije, koje ovde pojedinačno ističemo: upoređivanje, sređivanje, apstrahovanje, uopštavanje, klasifikovanje, konkretizovanje, formalizovanje, analogizovanje.

Upoređivanje

Primeri za uočavanje razlika među objektima (koji se upoređuju) prema određenim osobinama i uočavanje zajedničkih osobina među njima: upoređivanje četvorougla prema simetriji, upoređivanje kocaka prema istim tj. različitim osobinama. Na višem nivou: upoređivanje pojmova i postupaka za uočavanje razlike i zajedničkih obeležja (npr. različiti pojmovi simetrije ili različite procedure rešavanja).

Sređivanje i raspoređivanje

Primeri za uočavanje, tj. stvaranje rastućeg ili opadajućeg niza objekata prema jednom ili više obeležja": Sređivanje razlomaka prema njihovoj veličini, raspoređivanje kocaka u tabelarnu šemu). Na višem nivou: logičko sređivanje pojmova (npr. vrste četvorougla ili formule za izračunavanje uglova).

Apstrahovanje

Primeri za uočavanje obeležja ili komponenti, bitnih za konkretnu postavku cilja ili pitanja i za zanemarivanje nebitnih: izvlačenje bitnih podataka u zadacima, odbacivanje nebitnih

obeležja pri formiranju nekog pojma. Na višem nivou: izrada "struktura" (npr. Struktura grupe).

Uopštavanje

Primeri za uočavanje obeležja, zajedničkih i bitnih za niz predmeta ili pojava i stvaranje klasa: nastavljjanje niza brojeva 2,3,5....(kako bi se moglo nastaviti?), pretpostavke za pravila o brojevima na osnovu pojedinačnih primera. Na višem nivou: uopštavanje pojmova i pravila (npr. proširivanje ravanske simetrije na prostornu simetriju, proširivanje i primena pojmova i postupaka na nove oblasti).

Klasifikovanje

"Raspoređivanje objekata u jednu klasu ili stvaranje odnosa između klasa". Primeri: Sortiranje kocaka prema bojama, odlučivanje da li su kvadrati rombovi. Na višem nivou: klasifikovanje pojmova i postupaka (npr. geometrijski protiv algebarskih pojmova ili postupaka).

Konkretizovanje tj. specijalizovanje

Primeri za prenos i primenu opšteg na posebno i pojedinačno: primena Pitagorine teoreme na specijalni pravougli trougao, konstruisanje odraza u ogledalu neke određene tačke. Na drugom nivou: konkretizovanje sadržajnog postupka ili strategije mišljenja (npr. izračunavanje procenata u konkretnom slučaju ili razjašnjavanje datih podataka na nekoj skici).

Formalizovanje

Mi, sa tim u vezi, ne mislimo prvenstveno na formalizovanje u strogo matematičkom smislu, nego podrazumevamo sasvim uopšteno veštinu kodiranja informacija, dakle upotrebu pogodnog sistema znakova. Primeri: izrada algoritma, kodiranje brojeva na bušenim karticama. Na drugom nivou: prenos činjeničnih podataka u jednačinu, prenos matematičkog postupka u kompjuterski program.

Analogizovanje

Učenik pronalazi odnose između fenomena različitih oblasti. Tačnije: učenik ocenjuje da li i u kolikoj meri, dve (sadržajno različite) oblasti fenomena imaju neku opštu strukturu." Primeri: Stvarati "odnose" između brojeva i tački na jednoj ravni, između algebarskih jednačina i dijagrama u koordinatnom sistemu, između algebre i geometrije itd. Uopšteno gledano radi se o "sličnostima", koje se koriste u nastavi npr. kod očiglednijeg predstavljanja putem prenošenja u konkretnije ili blaže situacije.

Opšti "vaspitni ciljevi" nastave matematike

Misli se na opšte "radne vrline", kao što su brižljivost, tačnost, odgovornost, jasnoća, urednost. Ove vrline imaju dobro dejstvo npr. u sledećim aktivnostima:

- konstrukcija geometrijskih formi,
- brižljiva izrada dijagrama i tabela,
- tačno računanje, ukoliko ima smisla i ako je moguće,
- pregledno i potpuno beleženje računskih postupaka,
- opis konstrukcionih postupaka i rešenja zadataka.

Vladanje tzv. kulturnim tehnikama

Ovo se odnosi na izvesnu sigurnost pri izvođenju operacija, koje su nam u svakodnevnom životu često potrebne, kao npr. tablica množenja, pismene računске operacije, zaokruživanje, izračunavanje površine i zapremine, tumačenje decimalnih razlomaka i procenata, rad sa uobičajenim veličinama. Danas bi se u to sigurno ubrajalo i čitanje grafičkih prikaza i tabela, rad pomoću trougla i šestara, rad pomoću elektronskih računara (džepni kalkulator, kompjuter).

Razumevanje za "algoritmovanje"

"Algoritmovanje" je bitan aspekt ne samo u pismenim računskim operacijama, u radu sa formulama i pri rešavanju jednačina u matematici, već je to aspekt koji postaje sve značajniji i u informatici. Pod algoritmovanjem podrazumeva se rastavljanje jedne operacije na određeni redosled pojedinačnih koraka (koji se eventualno ponavljaju), tako da ta operacija principijelno može biti sprovedena i uz pomoć programiranog kompjutera. Pri tome je danas često važnije da se razume kako takav algoritam "funkcioniše", nego da se zna, kako da se izvede što je moguće brže, pošto ćemo svi ranije ili kasnije imati elektronski računar.

Sposobnost matematiziranja (jednostavnijih) situacija iz naše okoline

Misli se na sposobnost da se prepoznaju računске operacije i drugi matematički odnosi u situacijama oko nas i da se izraze matematičkim jezikom. Naročito se misli na sposobnost računanja prema zahtevima tradicionalne metodike matematike (to znači sposobnost rešavanja zadataka iz oblasti računanja razlomcima, pravila trojnog, računanja procentima). U to bi se moglo ubrajati i prepoznavanje i matematičko opisivanje simetrija, primena grafičkih metoda (izrada dijagrama, grafičkih redova vožnje, linearno optimizovanje...). Sposobnost razumevanja matematičkih životnih pojava (i njihovog kritičkog procenjivanja).

Danas je npr. zadatak škole da, u okviru opšteg obrazovanja, pomogne mladima da prozru način rada kompjutera (kodiranje, dekodiranje, postupci aproksimacije), igara na sreću (loto i dr.).

Uopšteno gledajući, radi se o većoj sposobnosti prosuđivanja brojčanih podataka svake vrste, statističkih podataka kao i uslova za otplaćivanje ili zajam. Učenik treba, takođe, da bude u stanju da oceni vrednost iskaza neke grafike (šta mogu da očitam sa grafika temperature?). On treba da zna da se grafikama i brojčanim podacima, u izvesnoj meri, može manipulirati i tako nešto treba i da prepozna.

Sposobnost da se vide mogućnosti i granice matematike

Na primer:

- matematika kao osnova za tehniku i prirodne nauke (opis prirodnih zakona uz pomoć "formula"),
- opasnost od zamenjivanja tačnosti i pravednosti (primer: "prosek ocena" kao uslov za podobnost),
- obmanjivanje lažnom apsolutnošću i objektivnošću: ako-onda karakter matematike (matematika daje npr. podatke o određenim pretpostavkama, ali ne može da odlučuje....).

Radost zbog estetske i razigrane strane matematike

Na primer zbog "elegancije" logičkih izvođenja za interesantne teoreme (Euklidova teorema prostih brojeva, Pitagorina teorema, Talesova teorema, itd.), zbog stručne sistematike, zbog "lepote" geometrijskih figura (npr. ornament, parket), zbog zadataka koji zahtevaju mišljenje (ima vrednost i za slobodno vreme).

Načela nastave matematike

Pri nastavi, kao i u svakom drugom radu moraju se poštovati određena načela ili principi. Načela nastave matematike temeljne su ideje na kojima se i uz pomoć kojih se uređuju uslovi učenja u nastavi matematike. To su polazne osnove pri uspostavljanju, stvaranju, procenjivanju i vrednovanju celokupnog vaspitno – obrazovnog procesa u nastavi. Njima se izražava koncepcija te nastave, pojavni oblici i konačni učinci. Načela su rezultat proučavanja nastavne prakse, zakonitosti procesa učenja, nivoa i kvaliteta psihičke razvijenosti učenika i prirode nastavnih matematičkih sadržaja. U osnovi to su smernice kojih bi se trebao pridržavati svako ko organizuje i sprovodi nastavu matematike. Konačna im je svrha učiniti matematičko obrazovanje maksimalno efikasnim.

Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi uspostavlja razna načela od kojih ćemo navesti:

- 1. Načelo primerenosti*
- 2. Načelo naučnosti*
- 3. Načelo interesa, svesnosti i aktivnosti*
- 4. Načelo sistematičnosti i postupnosti*
- 5. Načelo jasnosti i apstraktnosti*
- 6. Načelo problematičnosti*

7. Načelo trajnosti znanja, veština i navika

8. Načelo individualizacije

9. Načelo ekonomičnosti i racionalizacije

10. Načelo istoričnosti i savremenosti.

Naravno, načela nisu međusobno odvojena već se uzajamno uslovljavaju i istovremeno ostvaruju.

Načelo primerenosti

Načelo primerenosti zasniva se na saznanju da se dete postupno razvija te da nastavni rad treba uskladiti sa psihofizičkim snagama učenika. Nastava po sadržaju i načinu ne sme biti ni prelagana, ni preteška, proučavanjem pojedinih nastavnih sadržaja ne treba započeti ni prerano ni prekasno, psiho-fizičke osobine učenika ne bi se smele ni precenjivati niti potcenjivati. Učenje ne sme biti previše lako zato što lakoća učenja ne stvara kod učenika navike rada i savladavanja teškoća. S druge strane osim što se nastava prilagođuje učeniku, nastavni rad treba ići i korak napred ispred trenutnog stanja, tj. treba uvesti faktor koji će angažovati u potpunosti intelektualni potencijal učenika.

Ponekad se susreću studenti koji su u srednjoj školi bili dobri učenici, a na višim školama doživljavaju neuspeh. Jedan od razloga je i to što im je nastava u srednjoj školi bila suviše laka, a u višoj nisu mogli savladati naviku da rade bez napora.

Nije manje štetna i druga krajnost ako su zahtevi koji se stavljaju učenicima neprimereni. Tada oni traže površne veze ili mnemotehnička pravila kojima ovladavaju tim gradivom samo prividno. Dobijena znanja su kratkotrajna, neprimenljiva, učenik uči napamet nedovoljno shvaćeno gradivo, traži zaobilazne puteve (prepisivanje), gubi interes za predmet. Zahtevi koji se stavljaju pred celi razred moraju biti primereni (ne suviše laki) većini učenika. Međutim uvek će se naći nekoliko učenika za koje su zahtevi teški, a takođe i takvi za koje su suviše laki. Prvima treba ukazivati individualnu pomoć, a to se najčešće i čini bilo na redovnom času, bilo na dopunskoj nastavi.

Nastavnik često ne obraća pažnju učeniku koji bez napora dobija dobre ocene, to znači da potencijalne mogućnosti takvih učenika ostaju neiskorišćene, stoga njih treba dodatno opteretiti usmjeravajući ih u dublje proučavanje matematike (izborna nastava, grupe naprednih matematičara, dodatni zadaci i literatura).

Dobar nastavnik mora ovladati sposobnošću držanja na oku čitavog razreda, kako slabe tako i odlične učenike i sve njih primereno opteretiti.

Primer 1. Načelo primerenosti ogleda se i u izgledu nastavnih programa, kako gledanih u celini, tako posmatranih i po metodičkim jedinicama. Na primer, u 5. razredu osnovne škole proučava se skup N i operacije na njemu na intuitivnom nivou, u 4. razredu srednje škole uvodi se aksiom matematičke indukcije, dok se tek na fakultetu skup prirodnih brojeva definiše pomoću Peanovih aksioma. Naime, u osnovnoj školi učenik nije u stanju shvatiti skup prirodnih brojeva kao jednu apstraktnu strukturu, nego isključivo kao skup onih brojeva koje dobijemo prebrojavanjem stvari oko sebe.

Primer 2. *Evo još jednog primera primene načela primerenosti. Jednačine se u nastavi pojavljuju na svakom nivou, ali zavisno od znanja kojima učenik raspolaže metode rešavanja su različite. U nižim razredima jednačine imaju oblik $3 + \square = 12$ i rešavaju se napamet. U 5. razredu se jednačina $3 + x = 12$ rešava koristeći vezu sabiranja i oduzimanja, tj. sabirak je jednak razlici sume i drugog sabirka. U 7. razredu, na obe strane dodajemo -3 tj. koristimo sabiranje suprotnih brojeva.*

Načelo naučnosti

Načelo naučnosti nastave matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne i zahteva i zakonitosti matematike kao nauke s druge strane. To znači da nastavnik matematike treba učenike upoznavati s onim činjenicama i u njihovom mišljenju formirati one pojmove koji su danas naučno potvrđeni. Nastava mora biti takva da omogućuje dalja produbljivanja i proširivanja gradiva i prirodan nastavak matematičkog obrazovanja na višom nivou..

Nastavnik upotrebljava onaj matematički jezik i simbole koji su uobičajeni u matematici (tg, a ne tan kao oznaku za tangens; $|\overline{AB}|$, a ne $|AB|$; oznake za pravi ugao; razlomak se skraćuje, a ne poništava i sl.). Takođe, dobar nastavnik koristi različite nastavne metode kao što su analiza i sinteza, metoda analogije, metoda indukcije. Dokazi teorema mogu biti više ili manje strogi, ali nastavnik mora uvek imati na umu da će učenici pre ili kasnije izaći iz te škole i nastaviti školovanje na višim nivoima. Veoma je loše ako se u školi učilo nešto čega se učenici moraju odvikavati, nešto što smeta daljem napredovanju. Ovde se ne misli samo na pogrešne činjenice već i na metode. Naime, ako će nastavnik poučavati samo na primerima, tj. učiti metodu rešavanja nekoliko tipova zadataka, ne ističući tačno suštinu problema, ili npr. primenjivati teoreme bez obzira na uslove njihove primenljivosti, to će biti stvaranje loših navika u matematičkom razmišljanju i biće narušen princip naučnosti.

Primer 3. *U 5. razredu uči se pravilo komutativnosti sabiranja prirodnih brojeva, ali se ne dokazuje (iz jasnog razloga – u dokazu se koriste Peanove aksiome a dokazuje se metodom indukcije). Ipak treba napomenuti da se to pravilo treba dokazati i da će tko biti učinjeno u kasnijem školovanju, tako da je učenik svestan nedovršenosti posla.*

Primer 4. *Ako u 2. razredu srednje škole logaritamsku jednačinu rešavamo ovako:*

$$\log(x + 5) + \log(x + 3) = \log 15$$

$$\log((x + 5)(x + 3)) = \log 15$$

$$(x + 5)(x + 3) = 15$$

$$x_1 = 0, x_2 = -8$$

i oba broja se proglašavaju rešenjem jednačine, narušili smo načelo naučnosti. Naime, upotrebili smo pravilo $\log(xy) = \log x + \log y$ bez provere pretpostavki za brojeve x i y . To je pravilo, u stvari, teorema i pre korišćenja tvrdnje teorema treba proveriti jesu li zadovoljene pretpostavke teorema. Dakle, ta transformacija će vredeti ako su argumenti pozitivni, tj. ako je $x + 5 > 0$ i $x + 3 > 0$. Obično kažemo: postavimo i rešimo uslove. Samo ono rešenje kvadratne jednačine koje zadovoljava i postavljene uslove jeste rešenje početne jednačine. U ovom slučaju samo je $x = 0$ rešenje početne jednačine.

Primer 5. *Setimo se koliko smo puta napisali $\sqrt{x^2} = x$ bez naznake da je x pozitivan broj. Naime, ako je x realan tada važi $\sqrt{x^2} = |x|$.*

Primer 6. *Evo još nekih mesta gde se narušava načelo naučnosti: korišćenje pogrešnih naziva i neprecizno izrečenih teorema kao: crtež je funkcija umesto crtež je graf funkcije, visine se seku u tački, kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama, rešavanje neodređenog integrala mehanički bez uvođenja limesa, korišćenje teorema bez provere pretpostavki.*

Načelo interesa, svesnosti i aktivnosti

Nastava mora biti takva da budi interes prema predmetu. Ako nastavni rad nije popraćen pozitivnim emocionalnim uzbudjenjima učenika, njegov efekt biće slab; stečena znanja ostaće mrtva, pasivna, formalna pa će se prvom prilikom zaboraviti.

Te povoljne situacije u nastavi stvara nastavnik kao organizator nastavnog procesa, premda takva situacija mnogo zavisi i o objektivnim uslovima u kojima radi škola. Npr. nastavnik može sadržaje obrađivati suvoparno, monotono, nizanjem činjenica i generalizacija bez vlastitog subjektivnog pozitivnog emocionalnog tona, što će kod učenika imati za posledicu neugodna emocionalna raspoloženja. Naprotiv nastavnik može sadržaje obraditi kvalitetnije pa ih učenici ugodno doživljuju, nastavni ih rad zanese, zagreje, koncentriše, pasionira, oduševi. Monotoni rad se neugodno emocionalno doživljava pa se pojavom monotonije u nastavi smanjuje učinak. Ta se situacija može promeniti ako nastavnik obogaćuje svoj način rada, unosi smišljene promene u nastavni proces, tj. jednolični rad pretvara u svestraniji, mrtvilo u živahnost, statičnost u dinamičnost, pasivnost u aktivnost.

Aktivnost u nastavi je takođe važan faktor u razvoju i formiranju ličnosti učenika. Poštujući princip aktivnosti treba učenicima dati da rade, jer znanje se ne može dobiti, dati, preneti, pokloniti, ono se stiče vlastitom aktivnošću. Kvalitet znanja zavisi upravo o intenzitetu aktivnosti, pa je uspeh u nastavi proporcionalan udelu vlastite aktivnosti.

Načelo sistematičnosti i postupnosti

Sistematičnost znači obrađivanje nastavnih sadržaja u određenom logičkom redosledu. Što je broj činjenica i generalizacija veći to se intenzivnije nameće potreba za logičkim sređivanjem tih sadržaja. Usvajanje naučnih sistema kao rezultata sistematizacije naučnih činjenica i generalizacija je krajnji cilj do kojega treba učenike postupno dovesti, više što su učenici u razvojnoj fazi pa ne mogu još svojim mentalnim snagama usvajati naučne sisteme u njihovom punom intenzitetu.

Ta postupnost u radu nastavnika izražena je pravilima koja glase:

*od lakšeg ka težem,
od jednostavnog ka složenom,
od bližeg ka daljem,
od poznatog ka nepoznatom,
od konkretnog ka apstraktnom.*

Nastavnikova je veština da pronađe takvu postupnost u obrađivanju gradiva bez prevelikih skokova i preteških prelaza.

Primer 7. *Setimo se kako je organizovano učenje rešavanja jednačina: u 5. razredu imamo jednačine s jednom nepoznatom koja se nalazi na jednom mestu: $3x + 12 = 15$, zatim se uvode komplikovaniji oblici tog tipa jednačina uz upotrebu zagrada, ali nepoznata se još uvek nalazi samo na jednom mestu: $30 + (3-x) = 21$, zatim se nepoznata pojavljuje na više mesta, ali još uvek na jednoj strani jednačine: $3x + 5x = 64$. U 6. razredu nepoznate se pojavljuju na različitim stranama znaka jednakosti: $3x + 15 = 7x - 143$, uvode se zagrade, a i koeficijenti jednačine nisu više samo celi brojevi. U 7. razredu pojavljuju se i sistemi dveju jednačina sa dve nepoznate. U 1. razredu jednačine se dodatno komplikuju uvođenjem funkcije apsolutne vrednosti, a u višim razredima proučavaju se još složenije jednačine.*

Načelo opažanja i apstraktnosti

Držati se principa opažanja znači omogućiti učenicima da u toku nastave čulnim organima neposredno zahvataju stvarnost koja se u nastavi proučava. Radi ostvarivanja principa opažanja nastavnici primenjuju opažajne izvore znanja, počevši od neposrednog posmatranja u izvornoj objektivnoj stvarnosti, preko posmatranja nastavnih sredstava pa sve do slikovitog pripovedanja. U primeni opažanja ne treba preterivati, jer niti je moguće odjednom usvojiti brojne činjenice, niti je potrebno da odjednom učenici usvoje sve činjenice. U tome greše nastavnici koji u razred donesu mnogo opažajnih sredstava i menjaju ih filmskom brzinom, od čega u svesti učenika ostane samo nekoliko površnih utisaka, a ne i stvarno upoznavanje i usvajanje činjenica. Zato treba naglasiti da je opažanje potrebno u tolikoj meri da učenici akumuliraju dovoljno činjenica na temelju kojih prelaze dalje na apstrakcije, odnosno generalizacije. Sticanje znanja ne iscrpljuje se samo usvajanjem činjenica posredstvom opažanja nego i na temelju usvojenih činjenica treba učenika misaonom aktivnošću dovesti do generalizacija, a to znači do formiranja pojmova, zakona, principa, pravila, aksioma, formula i sl. Opažanjem učenici treba da usvoje samo one činjenice koje će biti materijalna baza za formiranje određene vrste generalizacije.

Ponekad nam se čini da, za razliku od drugih prirodnih predmeta, u matematici nemamo tolike raznovrsne mogućnosti za prikazivanje i opisivanje matematičkih pojmova. Ipak, dobar nastavnik će koristeći kedu, grafoskop, folije, računar i odgovarajuće programe, modele od papira i žice, postere i plakate i naravno svoju maštu biti u stanju svoje predavanje učiniti jasnijim, a samim time i zanimljivijim. Pogotovo nam geometrija pruža velike mogućnosti za to. Ne zaboravimo da čim u geometrijskom zadatku skiciramo sliku, u stvari, primenjujemo načelo opažanja. Isto tako neki algebarki identiteti i tvrdnje mogu se prikazati, pokazati, "dokazati" koristeći geometrijske sličice.

Primer 9. *U 5. razredu pri obradi osne i centralne simetrije zadati učenicima da kod kuće pronađu primere osnosimetričnog oblika: ornamenti po crkvama, ornamenti u čipki, motivi u reklamama, motivi u automobilskim znakovima itd. Obavezno treba obraditi zadatak s bilijarskim stolom i osnom simetrijom.*

Primer 10. *Pri obradi mernih jedinica dužine, površine i zapremine dobro je pokazati te jedinice: lenjir, krojački i zidarski metar, komad papira dimenzija $1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}$, $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, posudu dimenzija $1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}$, tj. posudu zapremine 1 litra i sl.*

Primer 11. U školi su velike mogućnosti u radu s modelima koje nastavnik ili sam izrađuje ili na nekom od časova zajedno s učenicima. Na primer, u 6. razredu pri obradi teorema o zbiru uglova u trouglu možemo se poslužiti sledećim modelom pri uveravanju učenika u istinitost teoreme. Učenik neka izreže iz komada A3 papira trougao i uglove neka označi slovima α , β i γ . Zatim neka taj trougao izreže na tri dela rezovima koji ne prolaze kroz vrhove trougla. Tako dobijene papirnate uglove neka spoji tako da su im vrhovi zajednički, a krakovi se dodiruju. Spoljne granice tih triju papira zajedno čine jednu dužinu, tj. zbir uglova je 180.

Primer 12. Za trajno pamćenje definicije elipse korisno je sprovesti njenu konstrukciju. Isto tako, kada govorimo o kružnici ne zaboravimo je i nacrtati šestarom, a ne samo skicirati je rukom na tabli.

Primer 13. Kad proučavamo grafik kvadratne funkcije u 2. razredu srednje škole u zavisnosti od njene diskriminante i vodećeg člana, dobro je svaki slučaj pratiti skicom parabole u odgovarajućem položaju.

Načelo problematičnosti

Učenik obično uči tako da se ne upušta dublje u gradivo, već ostaje na površini, ne rešava nikakve probleme i teškoće, potpuno je zadovoljan i misli da mu je sve jasno. Zadatak je nastavnika da taj samouvereni stav razbije i stavi pred njega problem (prema načelu primerenosti ne pretežak ne prelagan) i traži rešenje. Ni jedan matematičar nema prava za neko područje matematike reći "Ja ga potpuno poznajem".

Načelo individualizacije

Razredna zajednica je skup različitih individualiteta. Te su razlike: fizičke, psihičke i moralne.

Zbog tih individualnih razlika treba nastavu individualizirati, tj. psihofizičke sposobnosti svakog pojedinca razviti do maksimuma. Individualizacija se sprovodi različitim načinima diferencirane nastave. Pa ćemo o tome više reći u toj temi.

Načelo ekonomičnosti i racionalizacije

Smisao tog načela je da se postigne najveći mogući učinak sa što manjim utroškom vremena, sredstava i snage. Treba imati na umu da svaki nastavni postupak zahteva određeni optimalni utrošak vremena; suvišno trošenje vremena primenom nekog postupka šteti obrađivanju ostalih nastavnih sadržaja. Na primer sistem predavanja je ekonomičniji od sistema samostalnog rada, ali se ne sme sve vreme upotrebljavati jedna metoda rada, jer se tada njene negativne strane pokazuju u većoj meri nego kada je kombinovana sa ostalim metodama.

Načelo istoričnosti i savremenosti

Veći deo učenika nema ni najosnovnija znanja o razvoju matematike. Oni misle da je matematika uvek bila takva kakva je sada. Bilo bi korisno da saznaju da za vreme Euklida nije bilo formula, da su u srednjem veku pravila rešavanja kvadratnih jednačina bila komplikovanija

nego danas (zbog manjka pojma negativnih brojeva trebalo je razmatrati mnogo posebnih slučajeva), i izražavala su se ne formulama nego latinskim stihovima, da je $\sin 90^\circ$ svaki autor predstavljao po svom, na primer, ako je radijus bio 10000 onda je i $\sin 90^\circ$ bio 10000 i sl.

Saznavši te činjenice učenici će shvatiti da su se pogledi na jedan te isti pojam menjali i da su ti pojmovi vremenom postajali jednostavniji. Oni postaju sposobni ceniti savremene matematičke metode i pojmove i shvataju da njihovo današnje stanje nije konačno.

Razvoj treba shvatiti ne samo kao nagomilavanje novih činjenica nego i kao evoluciju metoda. Nastavnik koji u nastavu uvodi elemente istoricizma može očekivati porast interesa za predmet, ali treba paziti da uzročnik interesa ostane sama matematika, a ne prelaziti u krajnosti i pričati samo o čudnim ponašanjima matematičara, anegdote o njima, nego uz spominjanje matematičara (na pr. kad je neka teorema vezana imenom uz osobu) spomenuti i vreme i područje delovanja te osobe, njena najveća dostignuća i sl.

Princip savremenosti odnosi se na neprestano aktualiziranje i osavremenjivanje nastavnih sadržaja i unošenje novih naučnih znanja (oprez da se ne nagomilava novo znanje), ali i osavremenjivanje nastavnih pomagala (od logaritamskih tablica preko šublera do računara).

Oblici nastave matematike

Socijalni oblici nastave matematike su:

1. *Frontalni oblik nastave*
2. *Diferencirana nastava*

Frontalni oblik nastave

Za frontalni oblik nastave karakterističan je rad jednog nastavnika pred učenicima celog razreda. Dakle, nastavnik se frontalno obraća celom razredu, izlaže gradivo, demonstrira i simulira razne situacije itd. Učenici se nalaze uglavnom u ulozi slušalaca i od njih se zahteva da pažljivo i sa razumevanjem prate nastavnikovu prezentaciju. Dakle, pri takvom obliku rada dominira jednosmerna komunikacija eventualno praćena neverbalnom povratnom informacijom učenika (klimanje glavom, mimika lica, položaj tela i sl.). Nastavnik gradivo izlaže kao da se pred njim nalazi skupina učenika istih interesa i sposobnosti, dakle, ne vodi računa o razlikama među učenicima. On svoje izlaganje priprema i izvodi za prosečnog pripadnika tog odeljenja. Prednost ovog oblika rada je ekonomičnost i racionalnost. Nastava se izvodi istovremeno sa tridesetak učenika, nastavnik u potpunosti prati pripremu koju je napravio za to predavanje bez neočekivanih skretanja s glavnog toka predavanja, nema "praznog hoda" i sl. Nedostaci frontalnog oblika rada su: neuvažavanje činjenice da je svaki učenik specifičan po svojim interesima i sposobnostima, te da ono što je zanimljivo i primereno jednom nije i drugom učeniku, dolazi do smanjenja koncentracije i popuštanja pažnje bilo zbog toga što je gradivo učeniku prelagano ili preteško nema mogućnosti komuniciranja sa učenicima, tj. nema povratne informacije od učenika prema nastavniku koja bi u nekom drugom obliku rada ukazala na to da

se neke stvari u obradi moraju korigovati – bilo dodatno objasniti bilo skratiti objašnjenje ako je predugačko. Na nastavi matematike frontalni oblik rada ima svoje mesto na primer pri izlaganju pozadine neke ideje, pri motivaciji, pri obradi težeg dokaza neke matematičke tvrdnje i sl.

Diferencirana nastava

Diferencirana je nastava jedan od socijalnih oblika nastave koji podrazumeva samostalnu aktivnost učenika. Diferencirana nastava vodi računa o konkretnoj situaciji u razredu, uvažava razlike među učenicima i nastoji da se optimalno ispolje matematičke i druge sposobnosti učenika. U njoj se uspostavlja jedinstvo nastavne delatnosti nastavnika i školske delatnosti učenika.

Naime, nastavni proces treba pružati više od obične informacije i u tu svrhu potrebno je aktivirati sve učenike u razredu.

Oblici diferencirane nastave su:

1. *Homogene grupe*
2. *Grupni rad*
3. *Individualizacija*

U našoj nastavi najčešće se primenjuje oblik rada u homogenim grupama, dok je najracionalniji oblik kombinacija grupnog i individualnog rada.

Homogene grupe

Ovaj oblik rada naziva se još i grupisanje po sposobnostima. Sam naziv kaže kakav je to oblik. Nastavnik fiktivno dieli čitav razred na grupe prema predznanju i matematičkim sposobnostima tako da razlike unutar grupe budu svedene na najmanju moguću meru. Obično se radi o tri grupe: u prvoj grupi su slabiji učenici, u drugoj dobri, a u trećoj vrlodobri i izvrsni učenici.

U toku nastavnog procesa nastavnik postavlja pred učenike svake od ovih grupa zadatke primerene upravo njihovom predznanju i sposobnostima. Budući da pri obradi nekog matematičkog sadržaja uvek ima i lakših i težih delova, moguće je na svakom času primeniti rad sa homogenim grupama. Cilj nastavnika je pomeranje učenika iz niže u višu grupu. Prednosti su aktivnost svih učenika, razvijanje interesa za matematiku, učenje na času, zadržavanje pažnje i koncentracije svih učenika, mogućnost praćenja napredovanja učenika, povećanje efikasnosti nastave, optimalna brzina učenja.

Nedostaci su to što se ta fiktivna podela otkriva i kod slabijih učenika pojačava osećaj inferiornosti, nemogućnost komuniciranja sa većim brojem učenika, tj. tokom časa se komunicira sa oko 20% učenika.

Ovo je opis fiktivne podele na grupe. Međutim ponekad se ta podela radi i stvarno. Naime, u nekim školama sa većim brojem učenika formiraju se razredi u koje se uključuju učenici sa natprosečnim sposobnostima. Takvi razredi imaju pojačan program rada bilo samo iz nekih predmeta bilo iz svih. Kriterijumi za ovakvo diferenciranje su obično testovi inteligencije dopunjeni ranijim ocenama iz specifičnih predmeta uz nastavnikovu procenu uspeha u sledećem periodu i naravno, zavisno od želje učenika i roditelja o učešću u takvom razredu.

Za sprovođenje ovog oblika rada pretpostavlja se da nastavnik dobro poznaje sve učenike u pogledu nivoa znanja, interesa i sposobnosti.

Primer 14. Rešavanje kvadratne jednačine, II razred srednje škole.

Cilj ove nastavne celine je izvođenje formule za rešenja kvadratne jednačine. Nastavnik definiše kvadratnu jednadžinu i pojam rešenja.

Prva grupa rešava posebni slučaj kada je $c = 0$ i to prvo primer, zatim jednačinu sa opštim brojevima.

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ ili } x_2 = 8$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ ili } x_2 = -\frac{b}{a}$$

Druga grupa rešava slučaj kad je $b = 0$ uz diskusiju o pozitivnosti $-c/a$.

$$25x^2 - 16 = 0$$

$$25x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{25}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{4}{5}$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ ako je } -\frac{c}{a} \geq 0,$$

$$x_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}, \text{ ako je } -\frac{c}{a} < 0,$$

Grupa izvrsnih učenika dobija zadatak da reši najopštiji oblik kvadratne jednačine dopunom do potpunog kvadrata, pri čemu izvode i formulu za rešenja kvadratne jednačine.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 4$$

$$(x + 3)_{1,2} = \pm \sqrt{4}$$

$$(x + 3)_{1,2} = \pm 2$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 2$$

$$x_1 = -3 + 2 = -1$$

$$x_2 = -3 - 2 = -5$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zatim sledi uvežbavanje tih formula gde učestvuju sve tri grupe.

Primer 15. *Grafik inverzne funkcije, II razred srednje škole.*

Cilj je ponoviti pojmove: funkcija, bijekcija, inverzna funkcija; provere bijektivnosti; crtanje grafika; izvođenje formule inverzne funkcije, izvesti vezu grafika inverzne funkcije i početne funkcije.

Prva grupa: ponavljanje definicije funkcije, bijekcije, inverzne funkcije.

Druga i treća grupa: Na primeru $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x - 6$ proveriti bijektivnost. Kod injekcije nema problema, dok se eventualne logičke poteškoće očekuju kod provere surjektivnosti, tj. da se za dati y_0 mora naći odgovarajući x_0 i to će biti formula za inverznu funkciju.

Druga grupa proverava vrede li formule $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$ za konkretni primer. Opet se mogu pojaviti poteškoće na mestu gde funkcija deluje ne na x nego na izraz, tj.

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3} + 2\right) = 3\left(\frac{x}{3} + 2\right) - 6 = x.$$

Prva grupa crta oba grafika i izvodi zaključak: Grafik inverzne funkcije funkcije f dobija se iz grafika te funkcije simetrijom u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta.

Formulu izvodi treća grupa:

$$f \circ f^{-1} = \text{id}; \quad f(f^{-1}(x)) = x; \quad 3f^{-1}(x) - 6 = x; \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 2.$$

Nakon toga slede primeri.

Grupni rad

Ovaj oblik nastave je vrlo star i postojao je još pre uvođenja razredne nastave. Grupni rad predstavlja deljenje razreda na grupe koje mogu imati homogen ili nehomogen sastav učenika. Brojčani sastav može biti različit, a takođe i zadaci koji se daju grupama. Na izbor tog oblika nastave utiču karakter rada, nastavna sredstva, a takođe i vreme koje nastavnik ima na raspologanju.

Principi organizacije:

1. Najkorisnije je sastavljati grupe od 4-6 učenika.
2. Sastave grupa nije dobro često menjati.
3. U svakoj grupi bira se jedan učenik kao vođa grupe. Vođe grupe se menjaju na sledećem času.
4. U grupama treba raditi približno istim tempom.
5. Za izveštaj o radu čitave grupe nastavnik određuje jednog člana grupe, čiji odgovor može oceniti.
6. Nastavnik obedinjuje rad svih grupa i daje ocenu izvršenog rada.
7. Za grupni rad nužno je razmotriti i odgovarajući raspored klupa u razredu.

Grupni rad učenika pri rešavanju nekog nastavnog problema ne isključuje individualni rad svakog od njih, jer grupni rad je u suštini objedinjenje individualnih radova svih članova grupe. Važno pitanje u primeni grupnog rada učenika je pitanje kontrole rada učenika i povratna informacija. Kontrolu rada sprovodi nastavnik u toku čitavog časa. On postavlja grupi pitanja o temi koja se proučava. Kontrolna pitanja mogu postavljati i sami učenici, npr. članovi jedne

grupe članovima druge grupe. Efikasan oblik kontrole i ocene grupnog rada jesu i izveštaji učenika o radu grupe i diskusija.

Kontrola individualnog rada članova grupe ostvaruje se u samoj grupi. Drugo važno pitanje je ocena rada učenika u grupama. Ona predstavlja stimulans za razvoj stvaralačke aktivnosti. Postoje nekoliko mogućnosti ocenjivanja aktivnosti: ocena nastavnog časa, ocena rešenja nekog posebnog problema, ocena samostalnog rada čitave grupe, ocena kratkog testa o proučenoj temi.

Ovaj oblik nastave pogodan je u osnovnoj školi, posebno pri rešavanju zadataka i problema. Postoji opasnost narušavanja nastavnog kolektiva. Ovakav rad podrazumeva žamor u razredu (u granicama normale).

Primer 16. Što sve može biti presek:

A) dva trougla, B) trougla i četvorougla, C) dva jednaka kvadrata?

Razred delimo na 3 ili 6 grupa. Po dve grupe dobijaju isto pitanje. Nakon 5 minuta rada vođe četiri grupe na tabli zapisuju rešenja, dok one grupe koje imaju ista pitanja, a nisu prozване kontrolišu rešenja. Celi razred zapisuje odgovore u svoje sveske. Ukupno predviđeno vreme za ovaj zadatak je 20 minuta.

Primer 17. Rešiti sistem dveju linearnih jednačina sa dve jednačine.

$$2x - 3y = 5 \quad x + 2y = -2.$$

Razred delimo u 6 grupa. Grupe A i B rešavaju metodom komparacije, grupe C i D metodom supstitucije, a grupe E i F metodom suprotnih koeficijenata. Nakon rada u grupi na tabli se u vertikalne kolone upisuju sva tri načina rešavanja, uspoređuje se efikasnost tih metoda i komentariše se kada upotrebiti koju metodu.

($219x - 47y = 50$, $102x + 47y = -2297$).

Primer 18. Izračunajte vrednost izraza

$$x = \frac{507,62 \cdot \sqrt[5]{10,0924}}{2,8306^8}$$

logaritmiranjem.

Ovaj problem zadaje se svim grupama, a unutar grupa svaki član ima svoj deo zadatka, npr. jedan računa $\log 507.62$ itd.

Individualizacija

Razmatrajući nastavu kao proces upravljanja dolazimo do zaključka da je za ostvarenje efikasnog procesa nastave nužno uvažavati osobine učenika, a posebno ove: mišljenje, pamćenje, sluh, volja, vid, karakter. Kao rezultat različitosti javljaju se potpuno različite individualne brzine usvajanja jednog te istog nastavnog materijala. Individualni pristup susreće se sa ozbiljnim teškoćama. Podučavajući na primer 30 učenika, nastavnik nije u stanju voditi računa o individualnim brzinama usvajanja. On se neizbežno orjentiše na tzv. prosečnog učenika. To

dovodi do negativnih posledica. Slabiji učenici ne mogu pratiti nastavu, a sa druge strane bolji učenici počinju se dosađivati.

Idealni način realizacije bi bio jedan nastavnik-jedan učenik. To je očito nerealno ostvariti, pa treba tražiti puteve ostvarivanja individualizacije u postojećoj razrednoj organizaciji nastave.

Neke mogućnosti individualizacije nastave su:

1. *programirana nastava*
2. *dopunska nastava (slabiji učenici)*
3. *dodatna nastava (bolji učenici)*
4. *izborna nastava*
5. *fakultativna nastava (bolji učenici)*
6. *matematičke i informatičke grupe*
7. *grupni rad(kooperativna nastava)*
8. *problemska nastava*
9. *mentorska nastava.*

Boljim učenicima zadaju se i dodatni zadaci, slabijima dopunski, svi dobijaju zadatke za domaći koji može biti diferenciran, tj. zadaju se zadaci različitih težina i učenik sam bira kojeg će izraditi, daju se dodatni neobavezni zadaci za domaći rad ili čak učenik sam sastavlja zadatke, izrađuje modele, samostalno priprema i izvodi deo nastavnog časa(seminar, predavanje) .

Metode nastave matematike

Metode nastave matematike su načini i sredstva prenošenja određenog sistema matematičkih znanja, umeća i realizacije ciljeva nastave matematike.

Neke od metoda su:

1. *predavačka metoda (metoda usmenog izlaganja)*
2. *metoda dijaloga*
3. *heuristička metoda*
4. *metoda rada s tekstom*
5. *problemska metoda*
6. *programirana metoda*
7. *demonstrativna metoda*
8. *eksperimentalna metoda.*

Za uspešnu primenu neke nastavne metode ili nekog oblika nastave u nastavnom procesu nastavnik mora u potpunosti poznavati njene karakteristike.

To podrazumeva:

1. razumevanje suštine metode i umeće njene primene u različitim konkretnim nastavnim situacijama.

2. poznavanje formi iskazivanja te metode koje se najčešće pojavljuju u nastavnom procesu.
3. poznavanje pozitivnih i negativnih strana tih metoda
4. saznanje koja je pitanja školske matematike prikladno podučavati tom metodom.
5. umeće osposobljavanja učenika da rade tom metodom u procesu izučavanja određenog matematičkog sadržaja.

Predavačka metoda

Naziv metode govori o tome da aktivna uloga pripada nastavniku, a pasivna učenicima, oni treba pažljivo slušati predavanje i zapisivati u sveske ono što nastavnik piše po tabli. Kada bi to stvarno bilo tako, ova bi se nastavna metoda pokazala neefikasnom. Savremeni zahtevi nastave, a posebno nastavne metode pretpostavljaju da je čak i u tom slučaju potrebna aktivna delatnost samih učenika.

Zato predavanje nastavnika treba da bude interesovanje kod učenika i aktivira njihovo mišljenje. Slušajući predavanje i prateći zapis na tabli učenici zajedno s nastavnikom prelaze put traženja, postavljanja i utvrđivanja matematičkih činjenica. Dakle, treba pratiti i slediti njegov proces mišljenja pri izvođenju različitih formula, dokazivanju teorema. U tome se i sastoji glavna prednost "žive reči" nastavnika u odnosu na tekst učenika. U skladu s tim nastavnik tokom predavanja postavlja niz popratnih pitanja tipa: "Zašto? Na osnovu čega? Kako to učiniti? Postoji li drugi način? Odakle treba početi?".

Znajući da na većinu postavljenih pitanja, koja se odnose na novo gradivo, učenici nisu u stanju odgovoriti, nastavnik gotovo uvek sam na njih odgovara – dijalog nastavnika sa samim sobom. Predavanje se uvek može pripremiti tako da njegov pedagoški efekt ne bude manji od onog koji se dobija primenom metode dijaloga.

Metoda predavanja primjenjuje se u svim razredima škole počevši od prvog. Vremenski ova primena obuhvata deo nastavnog časa, ređe čitav čas.

Matematički sadržaji koji su pogodni za obradu:

- istorijske činjenice; zanimljivosti;
- tumačenja i objašnjenja pre samostalnog rada učenika;
- otkrivanje suštine problema ili ukazivanje na praktičnu važnost;
- opis rada sa tablicama ili kalkulatorom;
- izvodi formula; dokazi teorema;
- složeno ili važno gradivo sa aspekta celovitosti opažanja i usvajanja.

Dobre strane metode: precizan plan izvođenja, postavljanje težišta na glavna pitanja, jasan i precizan zapis na tabli, racionalnost, jasnoća, priprema učenika za nastavak školovanja na fakultetima, promenljivost svih logičkih koraka.

Slabe strane metode: slaba efikasnost, ograničenost, pasivnost učenika, nema povratne informacije, slabljenje koncentracije.

Metoda dijaloga

Oblik nastave koji smo nazvali diferencirana nastava (homogene grupe) često se sprovodi metodom dijaloga ili razgovora. Ova metoda smatra se jednom od efikasnijih nastavnih metoda.

Dijalog se može uspostaviti između nastavnika i razreda ili između nastavnika i pojedinačnog učenika.

Ukoliko želi neko gradivo obraditi metodom dijaloga, nastavnik se mora dobro pripremiti proučivši temeljno nastavnu temu i uočivši njene karakteristike. Treba da ima jasnu predstavu o cilju nastave koja će se realizovati metodom dijaloga, kao i da utvrdi opseg i sadržaj nastavnog gradiva koji je već poznat učenicima i koji je potreban za ostvarivanje postavljenog cilja.

Pri izradi pismene pripreme nastavnik treba tačno formulirati i zapisati osnovna i dopunska pitanja koja namerava postaviti učenicima, a nastavnik početnik bi trebalo da zapiše i očekivane odgovore. Uz ta pitanja treba stajati naznaka i kojeg će učenika pitati koje pitanje (ili iz koje homogene grupe očekujemo odgovor), kojeg će učenika prozvati pred tablu, a kojeg će pitati sa mesta. Pitanja moraju biti jasna i kratka i takva da pobuđuju interes učenika prema sadržaju, da su u skladu sa opsegom gradiva koji učenici poznaju, da privlače pažnju svakog učenika i da sva zajedno otkrivaju temu koja se proučava. Obično se ne postavljaju sugestivna pitanja, pitanja koja u sebi sadrže deo odgovora, ali niti pitanja čiji odgovor je "da" ili "ne". Po završetku dijaloga nastavnik obavezno formuliše zaključak u kojem se ističe ono glavno zbog čega je i vođen razgovor.

Primer 19. *Obrada nastavne jedinice "Teorema o simetrali unutrašnjeg ugla trougla", I razred srednje škole prema nastavnom programu koji je važio do 1995/96. (2 časa)*

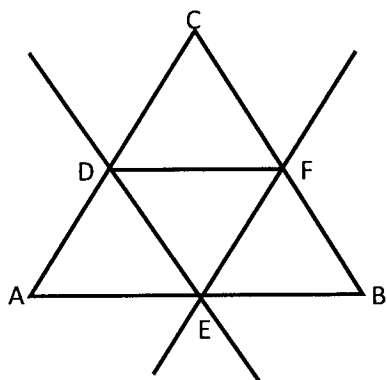
Primer 20. *Obrada nastavne jedinice "Srednja linija trougla", I razred srednje škole, šk. god 1996/97, 97/98. (1 čas)*

Pripremna faza. Nastavnik u uvodnom delu časa treba ponoviti gradivo koje će se koristiti u obradi ove jedinice koristeći razgovor sa učenicima najslabije grupe.

Primeri pitanja: navedi teoreme podudarnosti trougla, kako glasi teorema o uglovima uz simetralu, šta znaš o uglovima sa paralelnim kracima i sl. Odgovore učenik može ispratiti crtežom na tabli.

Nastavnik izgovara teoremu: *Ako se od središta jedne stranice trougla nacrtava prava paralelna sa drugom stranicom trougla, onda je preseka te prave i treće stranice trougla središte te treće stranice trougla. Dužina duži koja spaja središta prve i druge stranice jednaka je polovini treće stranice trougla.*

Učenik iz I ili II grupe crta skicu na tabli.



Pitanja:

U kojem odnosu su DF i AB ?

Šta je D ?

U kojem odnosu su $|AD|$ i $|CD|$?

Zaključak: Dakle, poznati podaci su $|AD| = |CD|$ i $DF \parallel AB$.

Napiši simbolima šta treba dokazati.

Odgovor: $|BF| = |CF|$, $|DF| = \frac{1}{2}|AB|$.

Učenik I. razreda srednje škole još ne razlikuje šta je pretpostavka, a šta tvrdnja teorema, te ako ostavimo pitanje: Šta su pretpostavke teorema? Verovatno neće biti odgovora. Ako se to desi treba preformulisati pitanje.

Nastavnik započinje dokaz povlačeći paralelu tačkom D sa stranicom BC i označavanjem tačke E .

N: Uočimo trouglove AED i DFC . Koje stranice su im jednake? Imaju li iste uglove? Ako imaju obrazloži odgovor.

U: $|AD| = |DC|$, $\angle FDC = \angle DAE$, $\angle CFD = \angle CBA = \angle DEA$, jer su to uglovi s paralelnim kracima odnosno uglovi uz transversalu.

N: U kakvom su odnosu ta dva trougla?

U: Podudarni su.

N: Po kojoj teoremi?

U: ...

N: Ako su podudarni koji su im još elementi jednaki?

U: $|AE| = |DF|$, $|DE| = |CF|$.

N: U kakvom su odnosu trouglovi DEF i BFE ?

U: Takođe su podudarni.

N: Obrazloži odgovor.

Učenik obrazlaže.

N: Koje su još stranice međusobno podudarne?

U: $|DF| = |BE|$, $|DE| = |BF|$.

N: Pronađite sada tri jednake stranice.

U: $|DE| = |CF| = |BF|$, $|DF| = |AE| = |BE|$.

N: Pogledajmo prve tri podudarne dužine. Jesmo li dobili traženu tvrdnju?

U: Jesmo, prvi deo.

N: Kako ćemo dobiti drugi deo tvrdnje? Uočite druge tri podudarne stranice.

U: Kako je $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$ vidim da je $|DF| = |AE| = \frac{1}{2}|AB|$.

Celi ovaj razgovor praćen je označavanjem stranica i uglova na slici u boji, ili folijama u nizu (koje se poklapaju jedna na drugu, a svaka nosi jednu informaciju).

Zaključak: Time smo pokazali da vrede obe tvrdnje teoreme.

N: Duži koje spajaju središta stranica trougla nazivamo srednje linije trougla.

U ovom trouglu dužine DE , DF , EF su srednje linije trougla ABC . Sledeći korak na tom času je izricanje obrnute teoreme. Svaka duž kojoj su krajnje tačke središta stranica trougla paralelna je sa trećom stranicom trougla, a njena dužina jednaka je polovini dužine treće stranice trougla.

Dokaz obrnute teoreme ostavlja se učenicima iz III grupe ili za samostalan rad ili za domaći rad.

Do kraja časa izrađuju se primeri i zadaci.

Dakle, pri stvaranju pripreme za čas nastavnik se služi udžbenikom, zbirkom i dodatnom literaturom da bi detaljno proučio matematičku pozadinu gradiva (naučio ili se prisetio te teoreme, dokaza itd.) Pri tom proučavanju, nastavnik uočava koje je predznanje potrebno za obradu dotičnog gradiva, koje pojmove i teoreme mora ponoviti u uvodnom delu časa. Pri pisanju pripreme, tj. pri postavljanju pitanja, mora razmisliti o raznim odgovorima koje može dobiti na svoja pitanja, možda će učenik uočiti neki drugi način dokaza teoreme i sl. Poželjno je zapisati svaku takvu ideju jer se može desiti da je ekonomičnija nego ona koju je nastavnik zamislio. Zato nakon održanog časa nastavnik upotpunjava svoje pripreme upisujući komentare, reakcije na pitanja, pa će tokom vremena izbaciti ona pitanja koja su se pokazala nejasnima, koja nisu dovela do očekivanih reakcija učenika i sl.

Heuristička metoda

Šta je **heuristika**? Heuristika je mlada naučna disciplina koja je iznikla iz nauka kao što su filosofija, kibernetika, psihologija i pedagogija. Stručnjaci svake od tih naučnih disciplina posmatraju heuristiku sa svoga stanovišta:

Metode i načini povezani s poboljšanjem efikasnosti sistema koji rešava problem (kibernetičari).

Deo psihologije koji proučava stvaralačko mišljenje (psiholozi).

Saznanje o sredstvima i metodama rešavanja zadataka (pedagozi).

Pravila i pretpostavke koje omogućuju otkrivanje novog (filosofi).

Heuristički procesi - Raznolikost čovekovog mišljenja koja stvara novi sistem operacija ili otkriva ranije nepoznate zakone mernosti objekata koji okružuju čoveka ili se proučavaju u nauci.

Heuristička nastava - Iznikla je iz potrebe da se prevladaju radikalizam i zastranjivanje nove škole (prelaz iz 19. u 20. veka). Jedan od kopernikanskih obrta nastave nove škole bio je usmeren pre svega na ukidanje predavačke nastave stare škole i to uvođenjem samostalnog rada učenika. Nažalost, samostalni rad učenika nije u potpunosti uspeo. Za učenike bio je to prevelik obrt. Oni za to nisu bili dovoljno pripremljeni, manjkao je pedagoški proces njihovog postepenog osamostaljivanja. Dakle, bilo je potrebno da se krene umerenijim i realnijim putem.

Početak **heurističke metode** kao nastavne metode nalazimo u prvoj deceniji 20. veka. Negde ona još nema savremeni naziv i manifestuje se u obliku saveta nastavnicima. Evo nekih od njih:

”Zadržati prividnost igre. Uvažavati slobodu učenika, podržavajući iluziju njegovog vlastitog otkrivanja istine. Izbegavati u početnom obrazovanju učenika opasnu probu vežbi pamćenja jer to potiskuje njegove urođene osobine. Podučavati oslanjajući se na interesovanje prema sadržaju koji se proučava.” (Francuska, 1908.).

”Ne izlagati određeni deo matematike u potpuno gotovom obliku (ako se tako postupa dolazi se u raskorak s osnovnim principima nastave). Razvijati umni rad, a ne zahtevati učenje napamet. Pridržavati se principa primerenih teškoća.” (Rusija, 1908.)

”Razvijanje stvaralačkih sposobnosti učenika je glavni zadatak nastave.” (Rusija, 1916.)

”Heuristička metoda je takva metoda nastave u kojoj nastavnik ne saopštava učenicima gotove činjenice i istine, nego ih navodi na samostalno otkrivanje odgovarajućih tvrdnji i pravila.”(SSSR, 1954.)

”Heuristička metoda nastave sastoji se u tome da nastavnik postavlja pred razred matematički problem, a onda pomoću odgovarajućih pogodnih pitanja vodi učenike do rešenja.” (SSSR, 1958.)

Uloga heurističkog procesa u nauci i nastavi matematike iscrpno je osvetljena u knjigama američkog matematičara Georga Polye. U knjizi ”Kako rešiti zadatke” (1945.) Polya pokušava okarakterisati heuristiku kao posebnu granu saznanja.

Cilj heuristike: istražiti pravila i metode koje vode do pronalazaka i otkrića. Po njegovom mišljenju osnovna metoda pomoću koje je moguće izučiti strukturu stvaralačkog umnog procesa jeste analiza sopstvenog iskustva u rešavanju zadataka i posmatranje načina na koji drugi rešavaju zadatke.

G. Polya nudi sledeću shemu rešavanja zadataka:

1. Razumevanje zadatka.
2. Stvaranje plana rešavanja.
3. Izvršavanje plana.
4. Osvrt (analiza dobijenog rešenja).

Pitanja kojima se nastavnik služi pri ovoj metodi su na primer ova: Šta je nepoznato? Šta je zadano? Kako glasi uslov? Je li moguće zadovoljiti uslov? Je li uslov dovoljan za određivanje nepoznate? Možeš li rastaviti uslov na delove? Jesi li zadatak već pre video? Znaš li neki srodan zadatak? Znaš li neku teoremu koja bi ti mogla pomoći? Možeš li je upotrebiti? Možeš li primeniti njegov rezultat? Možeš li primeniti metodu kojom je taj zadatak rešen? Možeš li zadatak drugačije izraziti? Možeš li smisliti neki srodan zadatak? Možeš li rešiti deo zadataka? Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uslov? Možeš li jasno videti da je sprovedeni korak ispravan? Možeš li dokazati da je ispravan? Možeš li proveriti rezultat? Možeš li proveriti dokaz? Možeš li rezultat dobiti drugačije? Možeš li rezultat ili metodu primeniti na neki drugi zadatak?

”Za sve matematičare karakteristična je radoznalost uma. Matematičar ne voli kada mu o nečemu drugi govore, on hoće doći sam do svega.” (W. Sawyer, 197?.)

Karakteristike heurističke metode

1. Rad i aktivnost učenika predstavlja bazu za sticanje znanja i sposobnosti. Pri tome se naglašava važnost nastavnikova proučavanja o sadržaju i načinu rada kao svojevrstne pomoći učenicima.

2. Obrazovno značenje imaju samo oni sadržaji koje učenici potpuno razumeju. Ono što učenici ne razumeju brzo se zaboravlja i potpuni je obrazovni promašaj. Zato je bitna odrednica heurističke nastave da nastavnici svojim podučavanjem treba da misaono vode učenike i da ih dovedu do razumevanja i shvatanja sadržaja (novi kvalitet nastave u odnosu na predavačku metodu, pa i na dijalog). Kako dovesti učenike do razumevanja, shvatanja?

3. Heuristička nastava pretpostavlja neposredno komuniciranje nastavnika i učenika, najčešće posredstvom herističkog razgovora ili dijaloga. Nastavnik svojim pitanjima upućuje učenike da iz izvora uočavanju činjenice na temelju kojih misaonim vođenjem nastavnika dolazi do shvatanja suštine (induktivni put). Slobodan razgovor i diskusija omogućava i učenicima da

postavljaju pitanja svojim nastavnicima i to posebno u slučajevima kad im nedostaje neka saznanja informacija. Tako se uspostavlja dvosmerna komunikacija.

4. Iako heuristička nastava još ne dovodi učenike do potpuno samostalnog rada u otkrivanju novih istina, nego do te spoznaje učenike vodi nastavnik na temelju svog heurističkog modela, važnije je ipak naglasiti da su učenici misaono aktivni, jer je to preduslov za shvatanje. Učenici su u velikoj meri ipak subjekti. Heuristička nastava mora dovesti do saznanja.

Slabe strane heurističke metode: nemogućnost direktne komunikacije sa svim učenicima, nepotpuna povratna informacija, nemogućnost misaonog vođenja svih učenika.

Primer 21. Pitagorina teorema.

1. Prvo u kvadratnoj mreži učenici ucrtavaju niz kvadrata i prebrojavanjem osnovnih kvadratića izračunavaju im površinu.

2. Zatim u kvadratnoj mreži crtaju desetak primera pravouglavih trouglova sa kvadratima opisanim nad njihovim stranicama. Koristeći znanje prvog koraka popunjava se tablica sa površinama p_a , p_b , p_c kvadrata nad stranicama.

3. Na temelju rezultata u tablici izvodi se zaključak da je $p_a + p_b = p_c$, tj. $a^2 + b^2 = c^2$.

4. Dokaz. Nastavnik navodi učenike na konstrukciju dva kvadrata dužine stranica $a + b$.

5. Zatim se raspravlja o obrnutoj Pitagorinoj teoremi.

Na prvi pogled heuristička metoda čini se da je previše detaljna. Međutim, nastavnik dobro poznaje teoremu, ali je ona potpuno nova učenicima. S druge strane, nije sve u upoznavanju Pitagorine teoreme, važan je i oblik spoznaje.

Metoda rada sa tekstom

Heuristička metoda, metoda dijaloga i metoda predavanja nisu jedine metode prenošenja novih znanja učenicima. Mnoga pitanja školske matematike mogu učenici samostalno proučiti pomoću udžbenika. Treba imati u vidu da učenici, radeći sa udžbenikom, usvajaju određenu količinu informacija od koje ovaj ili onaj deo im može biti nejasan. Učenici moraju sami razjasniti nejasnoće na temelju tog istog teksta, za razliku od nastavnika koji uvek može na osnovu pitanja dati tumačenje istog pitanja u drugom obliku ili odgovoriti na njega.

Čitanje sa razumevanjem i umeće reprodukcije matematičkog teksta samo je prva stepenica u ovladavanju umećem rada s nastavnom literaturom. Na višem stupnju razvitka tog umeća učenici moraju biti sposobni ne samo usvajati dobijenu informaciju iz udžbenika, nego i znati stvaralački osmisliti pročitano, tj. znati na temelju dobijene informacije doći do novih znanja, koja nisu neposredno izražena u udžbeniku već su rezultat stvaralačkog razmišljanja nad pročitanim.

Značenje samostalnog rada učenika sa nastavnom literaturom iz matematike je vrlo veliko i zato što je taj rad jedno od osnovnih sredstava realizacije važnog cilja nastave naučiti učenike učiti.

Dobre strane metode: razvijanje navike korišćenja literature, samostalan rad učenika, negovanje navike duže koncentracije, kritičnost, priprema za samostalni rad u životu, samoobrazovanje, upornost, učenje kako se uči, neguje se pismenost i sposobnost čitanja sa razumevanjem.

Loše strane metode: nemogućnost samostalnog savladavanja nekih težih delova, opasnost samoobmane, popuštanje koncentracije, površnost, manjka "živa" reč nastavnika, slaba kontrola naučenog, nema povratne informacije niti nastavniku, a ni samom učeniku.

Rad s tekstem je metoda koju nastavnik uvežbava, neguje u razrednom odeljenju tokom nekoliko godina rada. Pri prvim susretima s tom metodom nastavnik će potrošiti više vremena na objašnjenja učenicima kako koristiti tekst. Kad se kasnije učenici budu susretali s tom metodom vreme potrebno za objašnjavanje rada s tekstem biće sve kraće. Isto tako i vreme posvećeno obradi novog gradiva ovom metodom varira: od svega par minuta posvećenih čitanju jednog zadatka ili teoreme, pa do nekoliko sati učenja koje obično praktikuje student na višem nivou školovanja.

Da bi se dobili efikasni rezultati samostalnog rada učenika sa matematičkom literaturom, nastavnik treba organizovati taj rad. Nastavnik će učenicima dati neke od sledećih saveta.

1. Pri proučavanju dela udžbenika kojeg je zadao nastavnik, korisno je imati čist list papira i olovku.
2. Pročitati čitav deo u celini i u njemu izdvojiti one delove koji imaju samostalno značenje (definicije, teoreme, primeri, zadaci).
3. Pri analizi svakog od tih delova, na primer teoreme, potrebno je pažljivo pročitati njegovu formulaciju, shvatiti smisao, koristeći u knjizi crtež, shemu. Ako takvog crteža nema u knjizi, korisno je napraviti ga sam.
4. Pri prvom čitanju nastojati shvatiti samo osnovnu misao datog dela teksta (glavna mesta dokaza, teorema ili izvoda formule); nejasne detalje može privremeno preskočiti.
5. Proučivši dato pitanje u celini, važno je preći na izučavanje njegovih detalja (uslovi, zaključak, ocene mesta te teoreme u vezi s tom temom).
6. Pri drugom čitanju treba pokloniti pažnju detaljima dokaza teorema ili izvoda formule, a takođe onim matematičkim činjenicama (aksiome, definicije, teoreme) na temelju kojih se izvode zaključivanja. Ako je nešto zaboravljeno, treba potražiti u prethodnim glavama udžbenika.
7. Pristupajući čitanju dokaza teorema (izvoda formule, rešenja zadatka), treba ga korak po korak proučiti; pri tom je nužno postupno reprodukovati taj dokaz na list papira.
8. Posle toga kada je nužni deo teksta udžbenika shvaćen, nužno je jedan – dva puta usmeno ili pismeno reprodukovati pročitano.
9. Sada je korisno obratiti posebnu pažnju na ono glavno što treba zapamtiti (definicije, teoreme), pročitati te činjenice nekoliko puta sve dok ih ne uspe reprodukovati ako ne doslovno, a onda bar tačno. Korisno je sastaviti kratki plan proučenog i zapamtiti ga.
10. Pažljivo proučiti ilustrovane primere.
11. Usvojivši teoriju treba početi rešavati odgovarajuće zadatke (ali ne obrnuto); nužno je pamtit da se pravilnost rešavanja svakog zadatka određuje dobrim znanjem teorije koja se odnosi na njega.
12. Po završetku čitavog rada korisno je razmisliti o tome kako bi se sproveo dokaz teoreme (rešenje zadatka, izvod formule) na drugi način, ako je to moguće.

13. Uopštavanje.

14. Ako u proučenom delu nije sve jasno, treba uočiti ta mesta i obratiti se nastavniku za pomoć. Ne treba se stideti tog neshvatanja.

Ove savete treba dati na konkretnom primeru, a prema prilikama može se njihov broj smanjiti.

Problemska metoda

U današnje vreme jedan od važnih smerova istraživanja metoda nastave matematike jeste istraživanje suštine i primene problemske nastave. Ideja problemske nastave u mnogo čemu nije nova, ali je ona u praksi pomalo zapostavljena.

Bitan uslov za ispoljavanje problemske nastave je istraživački karakter rada učenika u nastavnom procesu. Danas je opštepriznato mišljenje da nastavni čas nije efikasan ako na njemu učenici ne rade aktivno i samostalno, ako ne rešavaju probleme za koje osim znanja treba i dovitljivost, bistrina i određen nivo kreativnosti.

Suština problemske nastave sastoji se dobrim delom u postavljanju, stvaranju problemske situacije. Sa tog stanovišta problemska nastava je okarakterisana postavljanjem takvih nastavnih problema u kojima je jedna ili više komponenata problemske situacije nepoznata učenicima, a koju oni treba sami razrešiti. Komponente problemske situacije su: elementi, objekti, svojstva, odnosi, veze, faze i dr.

Kad je pred nastavnikom obrada nekog problema on treba najpre pobuditi interes stvaranjem problemske situacije. To može učiniti na sledeće načine:

- Nastavnik jasno i precizno postavlja problem učenicima.
- Nastavnik stvara situaciju u kojoj se od učenika zahteva da sami shvate i formulišu problem koji se u toj situaciji nalazi.
- Nastavnik stvara situaciju sa više ili manje jasno istaknutim problemom koji tokom analize treba dovesti učenika do novog problema koji je nastavnik predvideo.

Prvi način je najjednostavniji, u ostalim ima više nepoznanica, a posebno je vredan poslednji način jer je u toj situaciji bar jedna komponenta nepoznata i samom nastavniku, a rad učenika je kreativan i stvaralački.

Analizirajući problemsku situaciju koju im je postavio nastavnik, učenik ne treba otkriti samo način rešavanja problema koji se u njoj nalazi, nego dati i određeno uopštenje te situacije ili dati poređenje sa nekom drugom situacijom, drugim rečima, uočiti u datom problemu novi problem koji bi bilo korisno razrešiti.

Za razliku od tradicionalne nastave, problemska nastava uključuje ne samo postavljanje uvodnog pitanja, problema, stvaranje problemske situacije, nego i samostalni stvaralački rad učenika u postavljenoj problemskoj situaciji, otkrivanje novih matematičkih istina i obrazloženje svih njegovih misaonih postavki.

U problemskoj nastavi podučavanje nastavnika još se više smanjuje. Ova nastava nosi i određenu težinu za nastavnike: nastavnik mora učenicima savetom pomagati u izboru i proceni izvora, koncentrisati pažnju učenika na važne činjenice, upozoravati na pravilnu interpretaciju izvora itd., sve do završnog dijaloga o izvršenom radu i rešenju problema, koje se može razlikovati od onog kojeg je predvideo nastavnik. Sve to zahteva da nastavnik dobro poznaje

područje koje je dato učenicima na samostalno proučavanje. Zato problemska nastava pretpostavlja izvršnog stručnog nastavnika.

Problemska nastava kao viši nastavni nivo znatno je teža i učenicima. Učenici osećaju njenu težinu u odnosu na samostalno rešavanje problema, što nije jednostavno, ni lako. Zato je bitna pretpostavka za uspešno izvođenje problemske nastave, posebno onog dela koji se odnosi na samostalni rad učenika, da su učenici ovladali osnovnom tehnikom umnog rada. Naravno sve treba prilagoditi uzrastu učenika i nivou školovanja. Tehniku umnog rada učenici postepeno savladavaju i na nižim nivoima nastave (misaono vođenje učenika u heurističkoj nastavi, programiranim samostalnim radom u programiranoj nastavi), ali se u problemskoj nastavi ta tehnika još više širi i produžuje.

Shema organizacije problemske nastave:

1. Stvaranje nastavne problemske situacije.
2. Postavljanje problema koji niče iz date problemske situacije i njegova jasna formulacija.
3. Proučavanje različitih uslova koji karakterišu postavljeni problem i razmatranje mogućnosti pojednostavnjenja.
4. Rešavanje postavljenog problema (celina i detalji, bitno i nebitno, teškoće rešavanja, dodatni zadaci, smerovi - putevi rešavanja, izbor i primena teoretskih činjenica, plan rešavanja na odabrani način, ispravnost svih koraka).
5. Razmatranje dobijenog rešenja problema i iskaživanje novog znanja.
6. Proučavanje dobijenog rešenja problema i traženje drugih, ekonomičnijih ili lepših načina rešavanja.
7. Proučavanje mogućih proširenja i uopštenja postavljenog problema.
8. Zaključci izvršenog rada. Dijalog učenika i nastavnika. Razmatranje mogućnosti primene novog znanja.

Dati shematski plan organizacije problemske nastave je dinamičan. On se može ostvariti u potpunosti ili delimično, pojedine tačke plana mogu se objediniti itd. Sve to zavisi o karakteru postavljenog nastavnog problema.

Prednosti problemske nastave: veća motivisanost učenika, primerena mogućnost saradnje, istraživački pristup rešavanju problema, razvoj kritičkog mišljenja, bolje shvatanje suštine i zakonitosti, povećanje količine znanja, stečena znanja su trajnija, veća primenljivost stečenih znanja.

Nedostatak problemske nastave odlikuje se time što je ona zahtevan nastavni sastav koji zbog složenosti zahteva više vremena. Ne može se primenjivati na svakom času, već je za tu svrhu potrebno načiniti užu, primereniji izbor matematičkih sadržaja, a za njihovu obradu dobru pripremu.

Primer 22. *Svojstva rešenja kvadratne jednačine.*

Predznanje potrebno za obradu ovog problema su formule za rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ovom formulom data su rešenja kvadratne jednačine u zavisnosti od koeficijenata a , b , c . Zanimljivo je ispitati veze između tih rešenja. Problemnost ove situacije moguće je izraziti na tri načina.

1. U prvom načinu nastavnik precizno i jasno izriče problem: *Dokažite da za rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ važe formule*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dakle, pri ovakvom pristupu poznate su pretpostavke, poznata je tvrdnja koju treba dokazati i od učenika se jedino to i očekuje.

2. U drugom načinu postavljanja problema, nastavnik stvara situaciju koja od učenika zahteva da sami razreše problem koji se u toj situaciji nalazi i gde jedna komponenta problemske situacije nije poznata.

Izrazite broj $x_1 + x_2$ i proizvod $x_1 x_2$, rešenja x_1, x_2 kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ pomoću koeficijenata a , b i c .

Ovde krajnji rezultat nije poznat, ali je naznačen smer u kojem treba krenuti.

3. I konačno, u trećem pristupu, nastavnik od učenika zahteva da sami shvate, formulišu i razreše problem koji se u toj situaciji nalazi.

Koja veza postoji između rešenja x_1, x_2 kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ i njenih koeficijenata a , b i c .

Ovde nije poznat ni smer istraživanja ni krajnji rezultat. Ovde se kao rezultat mogu pojaviti i druge formule koje povezuju rešenja kvadratne jednačine kao što je na primer:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

U sva tri slučaja cilj nastavnog časa je upoznati i dokazati Vijeteove formule. Jedino se u svakom od njih polazi sa drugačije strane problematičnosti.

Programirana nastava

Počeci programirane nastave javljaju se 1926. godine u SSSR-u i SAD-u. Programirana nastava proizlazi iz zahteva savremenog društva u kojemu je faktor vreme bitna komponenta. Društvo zahteva veliko znanje, a to znači da treba razviti takav nastavni proces koji učenicima nudi veliku količinu informacija, ali u što je moguće kraćem vremenu.

Sušтина programirane nastave je podela nastavnog gradiva na manje delove tzv. članke, koji su potrebni pri izučavanju određenih pojmova i tvrdnji. Svaki se korak nadovezuje na prethodne informacije. Učenika treba što aktivnije usmeriti na ključni problem unutar članka, te se pretpostavlja određena samostalnost učenika pri izvođenju ove nastave. Težište se stavlja na

umni i stvaralački rad učenika, na direktnu vezu učenik–gradivo. Da bi se mogao savladati naredni članak potrebna je informacija o savladanom prethodnom gradivu (to se može ispitati nekom drugom metodom – metoda dijaloga, pismeni zadatak). Od učenika se očekuje neprekidni aktivni odaziv koji omogućuje eksplicitno vežbanje i proveravanje svakog koraka.

Programirana nastava sprovodi se ovako:

1. Ponavljanje, provera predznanja – metoda dijaloga

2. Svaki učenik dobija programirani materija i uputstva koju temu treba samostalno obraditi. Taj materijal može biti dat u obliku listića, posebnih udžbenika ili na računaru. Na listićima, odnosno stranicama knjige, napisan je tekst materije koju treba proučiti, a ispod nje pitanja na koja učenika odgovara.

U ovom uvodnom delu rada nastavnik usmeno objašnjava šta će se raditi u sledećem delu časa.

3. Rad sa programiranim materijalom ne treba trajati duže od 20 – 30 minuta. Pokazalo se da učenici mogu održati koncentraciju u tom vremenskom periodu.

Učenik radi "samostalno", ali ipak pod stalnim nadzorom nastavnika koji će po potrebi dati uputstva, razjasniti nejasni deo teksta i sl. Individualni tempo uslovljava da pojedini učenici obrade različiti opseg predviđenog materijala. Nedovršeni deo može se zadati za obradu kod kuće.

4. Sledeći čas treba proveriti usvojenost gradiva, najčešće putem kratkog pismenog rada ili metodom dijaloga.

U programiranom učenju dužnost nastavnika je da objasni učenicima kako treba raditi po programiranoj metodi, navikavati učenike na pravilan odnos prema radu, tj. samostalno izučavanje materije i da tek posle toga kontrolišu svoje odgovore (a ne prvo pogledati rešenja). Nastavnik mora naučiti svakog učenika da pravilno čita listiće, objasni nerazumljive postupke u radu i sl.

Ovom metodom ne može se zameniti bogata pedagoška deskripcija, analiza i diskusija problema koja se razvija na času gde se primenjuju neke druge metode. Dobar nastavnik će svoj pedagoško – didaktički savet dati čak i intonacijom govora, celim držanjem i prilaskom radu, načinom analize, donošenjem zaključaka itd, dok se sve te mere ne mogu sprovesti u programiranoj nastavi. Sa druge strane, programirana nastava lako otklanja jednu slabost tradicionalne nastave, a to je manjak povratne informacije o nivou usvojenosti pređenog gradiva. U programiranoj nastavi povratna informacija se dobija nakon svakog koraka. Provera usvojenosti gradiva ne mora se odvijati samo pomoću pitanja i zadataka, već se svaki članak može proveriti kratkim testom znanja.

Programirana nastava je nastava tako koncipirana da se nastavno gradivo daje u malim količinama koje su međusobno logički povezane u zatvorene odgojne, obrazovne i logičke celine u kojima je učenik u punoj meri aktivan. Osnovni problem je opseg i sadržaj članka. Oni moraju biti odmereni tako da postoji velika verovatnoća pravilnog odgovora. Skinner je smatrao da se

nastavno gradivo mora podeliti na elementarne delove, što više usitniti jer se tako učenik ne preopterećuje. Ali, pokazalo se da preveliko usitnjavanje ne daje najbolje rezultate, tj. javlja se dosada i nezanimljivost. Zato se danas govori o člancima optimalne veličine.

Prednosti

1. U prvom planu je aktivnost učenika. On samostalno produbljuje, uvežbava, primenjuje i učvršćuje novu informaciju. Određuje vlastiti tempo rada, pažnja mu nije prenapregnuta.
2. Stečeno znanje se odmah proverava, koriguje i utvrđuje. Javlja se osećaj uspeha koji i sam dalje aktivira i podstiče na dalji rad.
3. Učenik može na miru razmisliti o pitanjima, može ih uskladiti i dobro proceniti.
4. Opseg novih informacija nije suviše veliki, radni koraci su kratki i prilagođeni mogućnostima učenika. Moguće je u potpunosti diferencirati, individualizirati nastavu, tj. slabim učenicima dati takav materijal koji omogućava usvajanje samo nužnog gradiva, a najboljim učenicima dati komplikovanije zadatke.
5. Direktna veza učenika i gradiva, bez delovanja nastavnika.
6. Razvija se samokontrola, jer postoji povratna informacija.

Nedostaci

1. Krutost – ne mogu se obuhvatiti svi smerovi razmišljanja pa se razvija jednostrano mišljenje. Ovo se može ublažiti razgranatim programiranjem.
2. Smanjena je odgojna komponenta nastave, jer individualizacija razbija karakter razreda.
3. Dolazi do površnosti u radu, zbog popuštanja koncentracije, pa se prelazi na sledeći članak bez dobrog usvajanja prethodnog ili se nekritički smatra da je prethodni članak dobro naučen, a ustvari nije.
4. Smanjena je uloga nastavnika.
5. Do povratne informacije nastavnik dolazi tek kasnije, a ne odmah kao u metodi dijaloga.
6. Ako je programirani materijal loš, učenik ga teško uči i taj čas se mora ponoviti.

Nastavnik–početnik ne treba odmah krenuti na programiranje čitavih kompleksa gradiva, već je dobro da prvo programira ponavljanje, vežbe ili manje nastavne celine. Programirana nastava traži od nastavnika izuzetno dobru i dugotrajnu pripremu. Kao i sve druge metode, ne sme postati dominantna, nego je treba kombinovati. Može se izvoditi i u grupama.

Kvant se sastoji od

1. informacije koju prenosimo učeniku (teorija, jedan do dva primera);
2. zadataka vezanih uz informaciju;
3. prostora za unošenje rešenja;
4. povratne informacije o rešenju zadataka.

Vrste programiranja

Razlikujemo dve vrste programiranja nastavnih cjelina:

1. *linearno*
2. *razgranato*

1. Linearni model karakteriše napredovanje u jednom smeru. Pogodan je za usvajanje i memorisanje pojmova i tvrdnji. Članci slede jedan za drugim u jednoznačno određenom redosledu.

2. Razgranati model pogodan je za uspoređivanje različitih mišljenja, za usmeravanje na različite putove napredovanja zavisno od znanja, sposobnostima ili afinitetu. U razgranatom modelu često se koristi *preskakanje članaka*. Naime, ako učenik reši važan zadatak brzo i dobro, iz čega se vidi da dobro razume problem, treba mu omogućiti brže napredovanje u programu. Preskakanje članaka deluje motivacijski pa se čak sugeriše i unošenje nepotrebnih grana koje će gotovo svaki učenik preskočiti. U razgranatom modelu može se uvesti i tzv. *retrogradno programiranje*. Ako se iz odgovora vidi da učenik nije shvatio suštinu, može se vratiti nekoliko koraka unazad. Isto tako u razgranatom programiranju mogu se pojaviti i *dodatne petlje* za dodatno uvežbavanje ili objašnjavanje.

Demonstrativna metoda

Osnovna odlika ove metode je očigledno pokazivanje predmeta, pojava i stanja. Osnovni uslovi za primenu ove metode su posmatranje kao psihološka osnova i zahtevi za pokazivanje kao metodička osnova. Racionalno određivanje odnosa između opisivanja, objašnjavanja i pokazivanja je prvi zahtev solidne pripremljenosti nastavnika za demonstriranje i ilustriranje.

U nastavi demonstracija (pokazivanje, dokazivanje, objašnjavanje) je prikazivanje svega što je moguće perceptivno doživeti. Zato je ova metoda najuže povezana sa materijalno-tehničkom stranom nastave, sa primenom nastavnih sredstava i radom u laboratorijskim uslovima. Najčešće se, u ovom smislu, koristi sledeće: demonstracija statičkih predmeta (slike, crteži, šeme, predmeti), demonstracija aktivnosti (dinamička struktura određenog rada, radni procesi i dr.). Osnovna svrha demonstriranja je da učenici steknu adekvatna saznanja o stvarnosti (prirodnoj i društvenoj), da usvoje neke činjenice koje služe kao osnova za razvijanje generalizacija. Stoga je naročito važno da nastavnik odabere adekvatne izvore, izvore iz prve ruke, jer će na takvim izvorima prezentovane činjenice biti veoma korisne za dalja uopštavanja. Metoda demonstracije se uvek povezuje sa ostalim nastavnim metodama. To je nužno jer kad nastavnik na primer izlaže nastavno gradivo, on to praćuje demonstracijom odgovarajućih sredstava, postupaka, pokreta, radnji i sl., kako bi se učenici potpunije uneli u problem i shvatili ono što je predmet izlaganja. Zato se metoda demonstracije primenjuje u svim etapama nastavnog procesa, pa čak i u fazi provere naučenog. Retko se ova metoda primenjuje kao jedina

metoda rada. Nastavniku danas služe mnoga sredstva za ilustraciju i demonstraciju u nastavi. Može se demonstrirati i putem statičkih(crteži, slike, skice, tekst i dr.) i dinamičkih(film, televizija, radio itd.) nastavnih sredstava.

Eksperimentalna metoda

Savremena nastava matematike teži većoj orijentaciji prema učenicima što znači da se povećava učenikova aktivnost u nastavi, posebno kroz eksperimentalnu nastavu. Tradicionalna nastava matematike se uglavnom oslanja na nastavnika kao predavača, a zatim na učenike koji potom samostalno rešavaju zadatke. Drugim rečima, učenik ima pasivnu ulogu prilikom sticanja novog znanja. Učenje otkrivanjem se odnosi na mogućnost da učenici samostalno, kroz eksperimentisanje, dođu do novih saznanja, ideja i rešenja problema.

Eksperimentalni rad ima važno mesto u metodici matematike jer je povezan sa heurističkim strategijama i idejama. Sa jedne strane matematika je stroga i sistematična deduktivna disciplina, a sa druge strane matematika je i eksperimentalna induktivna disciplina jer za rešenje problema treba isprobavati mogućnosti, tj. eksperimentisati i delovati induktivno. Dakle, prvo treba koristiti heurističko razmišljanje, pretpostavke i ideje kako bismo izgradili i pripremili pravi dokaz. Taj princip možemo primeniti i u nastavi matematike: učenici mogu novo gradivo prvo ispitivati eksperimentalno, a potom mogu preći na stroži matematički nivo.

Takođe, eksperimentalna nastava učenicima daje mogućnost da rade vlastitim tempom, samim tim više se poštuju razlike među učenicima. To znači da nadareni učenici za matematiku mogu pratiti nastavu u skladu sa svojim posebnim talentima i time naučiti nešto više na nov način. Sa druge strane, učenici sa teškoćama u savladavanju gradiva mogu eksperimentisati i preći iz pasivne uloge u aktivnu. Time bi se mogli osloboditi straha i zakočenosti pred matematičkim sadržajem.

Eksperimentalni rad u nastavi matematike posebno može doći do izražaja prilikom upotrebe računara u nastavi matematike. Mnogo je mogućnosti za eksperimentalnu primenu računara u nastavi matematike. Za modele i simulacije često se koriste razni interaktivni alati(Flash, web alati i sl.), ali i softveri dinamičke geometrije, CAS i grafički alati. GeoGebra je program koji poseduje svojstva programa dinamičke geometrije(animirano pomicanje geometrijskih objekata), ali i mogućnost CAS-a(prikazivanje u simboličkom i grafičkom obliku). Uz to, GeoGebra spada u grupu besplatnih *open source* programa, vrlo je dostupna za preuzimanje i ima svojstvo da za online rad ne moramo imati instaliranu GeoGebru na računaru.

Eksperimentalni rad se može koristiti za ispitivanje svojstava funkcija kroz promene raznih parametara, pri čemu se posmatraju promene na grafiku funkcije i donose zaključci. Tako

se mogu istraživati karakteristike poput monotonosti funkcija, zatim simetričnost, karakteristične tačke itd.

Takođe, eksperiment se može sprovoditi kroz razna ponavljanja računanja ili koraka konstrukcije kako bi učenik vlastitim tempom i brojem ponavljanja uočio tražena svojstva. Učenik može otkriti razna matematička pravila i postupke, primere, pravira diferenciranja i integriranja, pravila računanja sa zarezima itd.

Prilikom upotrebe eksperimenta u nastavi matematike, svaki nastavnik kao vođa treba obratiti pažnju na dve stvari. Prvo, može se dogoditi da učenici nakon što eksperimentalno utvrde određena svojstva ili ideje, nemaju potrebu za pravim matematičkim dokazom jer smatraju da je eksperiment koji su napravili dovoljan dokaz da uočeno pravilo generališu. Stoga bi nastavnik, prema uzrastu učenika, trebalo brižljivo da ukaže na potrebu za matematičkim dokazom, tj. na činjenicu da heurističke ideje ipak nisu egzaktno proverene.

Drugo, treba spomenuti da to što se delovi nastave odvijaju po heurističkim metodama, ne znači da ta nastava nije sistematski organizovana. Naprotiv, nastavnik treba dobro organizovati takav čas, poznavajući prikladne metode i mogućnosti računara. Nastavnik takođe treba da proceni da li je određeno gradivo prikladno za eksperimentalni rad ili je prikladnije za neku drugu metodu ili nastavni oblik.

Nastavnik matematike kao faktor u učenju i napredovanju učenika

Učenje matematike, i napredovanje učenika u tom smislu, zavisi od brojnih i različitih faktora. Pored različitih metoda, nastavnik, kao jedan od najvažnijih učesnika u procesu, deluje ne samo na postizanje određenih rezultata u radu i učenju, već i na potsticanje i razvijanje mnogobrojnih sposobnosti i oblika ponašanja. Od ličnosti nastavnika matematike u velikoj meri zavise kvalitativni i kvantitativni aspekti učenja, interesovanja, kao i klima u razredu, vaspitni i nastavni postupci, metode i rezultati rukovođenja.

Povoljna klima za učenje i uspostavljanje pozitivnih socijalnih odnosa su tesno međusobno povezane, i zavisne od sposobnosti nastavnika da razume probleme i težnje učenika, i da uskladi njihovo ponašanje. Međutim, klima za učenje matematike zavisi i od odnosa koji postoje među samim učenicima, a delimično i od opšte atmosfere koja vlada u školi, kao celini. Dobra nastava matematike podrazumeva ne samo poznavanje struke i sposobnosti prenošenja znanja nego i lična svojstva, usvojen sistem vrednosti, temperament i karakter nastavnika, što podstiču određeni sistem interakcije – utiče na učenja matematike i kvalitet znanja učenika.

Podsticaji za učenje matematike zasnivaju se na stavovima, a ovi na normama koje se formiraju u razredu. Atmosfera (klima) u razredu, koju nastavnik stvara, po pravilu, itekako utiče na podsticanje ili kočenje učenja. Atmosfera u razredu zavisi od atmosfere u školi, u sredini, i šire, u društvu. Ako u školi prevladava nerad, javašluk, i ako nastavnik, sa poremećenim predstavama o vrednostima života, sa dnevnikom ulazi u razred, onda, samim tim, nastavnik

matematike ne može da stvori radnu atmosferu u razredu. Znači, ako u sredini cveta kriminal, gde se kupuju i prodaju ocene i diplome, na ulicama dešavaju ubistava, na televiziji se prikazuje nasilja raznog oblika, ako je poremećen sistem vrednosti u kulturi, i uopšte u društvu, gde se ne cení rad, znanje i moral, onda nastavnik matematike, koliko god težio pozitivnim vrednostima u školi i razredu, teško da može mnogo, suštinski, da utiče u pozitivnom smislu na učenike. Sadašnja kriza morala, sistema vrednosti društva i u školi stvaraju potrebu za posebnim tipom nastavnika - koji će odoleti takvim iskušenjima, i koji će biti kreativno - stvaralački, i svestrano, pedagoški, psihološko - didaktički i metodički stručno osposobljen, kako bi imao moralnu i pedagoško - stručnu "čvrstinu" da svojim pravim autoritetom znanja i vrednosti postane istinski faktor u nastavi matematike, i napredovanju učenika u sticanju znanja iz matematike.

Pored ovih opštih pedagoških, psiholoških, socioloških i užestručnih pretpostavki, vratimo se na neka konkretna svojstva nastavnika matematike koja utiču na učenje i napredovanje učenika. Naravno, to podrazumeva da su prvo ostvareni opšti uslovi za rad nastavnika u školi, a onda se može posmatrati koje su pedagoško - praktični tipovi nastavnika u školi potrebni, koji su faktor kočenja, ili pospešivanja učenika u procesu napredovanja u školi.

Naravno, sama tipologija ličnosti nastavnika matematike uslovljena je i od samog procesa izvođenja nastave i celokupnog obrazovno-vaspitnog rada u školi. Na žalost, u autoritarnoj školi - sa autoritarnim nastavnicima, gde je nastava čisto "predavačka", gde se samo želi da se "sipa" znanje učenicima u glavu, gde je učenik čisto "objekat" u nastavi, gde se teži čistoj reprodukciji znanja - bez stvaralačkog odnosa u nastavi, nastavnik matematike nema šansu da istinski postane pravi faktor u procesu učenja, i napredovanju učenika u sticanju pravih znanja. Ne može nastavnik matematike, "čvrste ruke" i autoritarnog ponašanja, biti pravi model nastavnika, koji će istinski pomoći učeniku u učenju i sticanju znanja.

Oblici ponašanja autoritarnog (autoritativnog) nastavnika su: ponaša se šefovski, ima oštar glas, ponaša se naredbodavno, pokazuje moć, vrši pritisak na učenike u naturanju pojmova i mišljenja, isključiv je u radu, ne podnosi kritiku, sklon je kažnjavanju učenika, ponaša se bahato prema učenicima, sklon je podaništvu i neodgovoran u radu, ne saraduje u pogledu unapređenja nastave, i, uopšte, u obrazovno-vaspitnom radu, prevrtljivac je, jak pred slabim učenicima, savija rep pred jačim od sebe - u pogledu hijerarhije u školi, pruža otpor svakoj inovaciji u školi.

Pošto je u društvu dugo vladao autoritarni sistem ponašanja i mišljenja, biće veoma teško da se stvori jedan savremeni demokratski tip ponašanja nastavnika matematike u školi. Na žalost, surovost školske i društvene sredine, sputavala da se kod učenika razvija demokratski dijalog, stvaranje slobode mišljenja u nastavi, slobodu komuniciranja, menjanja subjekta učenika u nastavi, potsticanje učenika na stvaralački rad, kreativnost i originalnost u rešavanju problemskih zadataka, da svojim ponašanjem i ličnošću nastavnici utiču na formiranje pozitivnih crta zdrave i svestrane ličnosti, sklone kritici i samokritici. Naravno, formiranje oblike ponašanja demokratskog tipa u školi je, za sada, samo pusti ideal kome treba težiti. Formiranje takvog tipa nastavnika matematike je dug i mukotrpan, i najčešće nedostižan u nekim elementima. Naravno, svaki izazov je težak, pa i ovaj. Potrebno je dosta energije, puno znanja, volje, i želje da se mnogo toga menja, u nastavniku, i u odnosu nastavnika prema učeniku. Nekada je potrebno dosta odricanja i dosta utrošene energije.

Demokratski model ponašanja nije dogma koja se samo "prenosi" u učionicu, to je dug proces u formiranju ličnosti i nastavnika i učenika, a da bi se težilo tom idealu mora se posedovati i neko znanje o tome. Svaki ulazak u učionicu sa učenicima treba da bude istraživanje svoga odnosa, i odnosa učenika u izgrađivanju demokratske klime na relaciji nastavnik - učenik. Demokratski tip nastavnika matematike treba da ispoljava sledeće vidove ponašanja: Da učenike posmatra kao subjekt u nastavi; da teži demokratskom obliku ponašanja; da poseduje samokritičnost u svom radu; da razvija kritički duh kod svojih učenika; da prati savremena zbivanja u struci, pedagogiji, a i šire, u društvu; da koristeći naučni pogled na svet; da utiče na pravilno formiranje njihovih stavova; da nije opterećen politikom i religijom; da ima pozitivan stav prema ljudima; da je human; da svojim stavovima i ličnim primerom podstiče učenike na učenje i zdrav odnos prema radu i pravim vrednostima života; da je komunikativan; da poseduje samokritički stav i širi vedrinu života, vedar i duhovit, tolerantan; da poseduje radnu i moralnu samodisciplinu, osećaj odgovornosti; da je tačan i disciplinovan; da poseduje pedagoški takt, da je kreativan i da stvara pretpostavku za stvaralački rad u nastavi; da poseduje moralne vrednosti vaspitača, u školi i u sredini u kojoj živi i radi; da je psihički i socijalno zdrava ličnost; da svojim radom i stavovima doprinosi stvaralačkoj i demokratskoj atmosferi u nastavi i u školi.

Na žalost, zbog teške društvene i moralne krize, kao i vladanja tradicionalizma u školi, u nerazvijenim sredinama je zavladao jedan loš tip nastavnika u školi. To su posledice nemorala, poremećenog sistema vrednosti u društvu, teške ekonomske i društvene krize koja vlada već desetina godina u zemljama bivše Jugoslavije. Dakle, na površinu je "isplivao" nastavnik takozvanog ravnodušnog (anarhičnog) oblika ponašanja i rada u školi. Takav nastavnik je postao samo nemi posmatrač i koji nemoćno posmatra šta se to odigrava u njemu i oko njega, u školi i društvu. Na časovima matematike je postao nezainteresovan - u pogledu uvođenja inovacija u radu, sve je prepušteno stihiji (anarhiji) pa se za takvog nastavnika može reći da je postao sa svojim učenicima u nastavi matematike, samo posmatrač.

Zaključak

Neophodno je menjati poziciju učenika i nastavnika u nastavnom procesu. Treba prevazilaziti nastavu u kojoj je učenik većinom slušalac i posmatrač bez dovoljne intelektualne angažovanosti i aktivnog učešća u rešavanju nastavnih zadataka. Treba početi od nastavnih planova, udžbenika, nastavnika, didaktičko-metodičke organizacije časa i u tim okvirima tražiti mogućnost racionalne opterećenosti učenika.

Stručnjaci u svojim radovima opravdano ukazuju na potrebu prevazilaženja tradicionalne nastave. To se postiže jedino modernizacijom i racionalizacijom obrazovanja. Kao posledicu preobimnog nastavnog gradiva imamo opterećenost učenika mnoštvom informacija, što opet vodi primeni većinom frontalnog oblika rada i verbalnih nastavnih metoda. Takva jednolična nastava zamara učenika, jer je monotono, oni moraju da slušaju i što više memorišu. Tako, umesto da razvijamo učeničku aktivnost, krutom organizacijom kod učenika izazivamo dosadu, pasivnost i odbojnost prema nastavi. U osnovnoj školi učenici bi trebalo da steknu znanja i sposobnosti koje će predstavljati osnovu za dalji nastavak školovanja i profesionalno obrazovanje. Važno je pri tom ne zapostaviti ni učenike koji imaju teškoće u razvoju, niti darovite učenike. Treba težiti sažimanju, diferenciranju ali i uvođenju novih nastavnih metoda koje će dodatno zainteresovati i motivisati učenike za rad.

Na časovima matematike kao i na svim ostalim treba težiti razvijanju sposobnosti učenika koje traži savremena civilizacija: sposobnost komunikacije, kritičkog mišljenja, etičke sposobnosti. Takođe neophodno je stvarati što je više moguće situacija koje omogućavaju da učenik bude u aktivnoj poziciji, da slobodno govori, zapaža, izlaže i brani svoje ideje, primenjuje stečena znanja i ispoljava svoju kreativnost. Časovi koji ovo pružaju učeniku su prijatni, interesantni jer ga svestrano angažuju i pružaju mogućnost za samopotvrđivanje i napredak u skladu sa sopstvenim sposobnostima.

Literatura

Bajrović, V. (1996.): *Neke važne formule-modeli u prostoru*, Bilten Seminara iz matematike za nastavnike mentore 5, HMD i Element, Zagreb.

Bognar, L., Matijević M. (2002.): *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb.

Dakić, B. (1993.): *Zornost u nastavi matematike*, Školske novine, Zagreb.

Fischer, R. (2009.): *Höhere Allgemeinbildung*, Sveučilišna skripta, 15 str. Pristupljeno 14. 3. 2009.

Glasnović Gracin, D. (2007.): *Matematička pismenost (1. dio)*, Matematika i škola 39 (2007). 155-163. Element, Zagreb.

Glasnović Gracin, D. (2007.): *Matematička pismenost (2. dio)*, Matematika i škola 40 (2007). 202-210. Element, Zagreb.

Glasnović Gracin, D. (2008.): *Računalo u nastavi matematike. Teorijska podloga i metodičke smjernice. 1. dio: Potencijali primjene računala u nastavi*, Matematika i škola 46 (2008). 10-15. Element, Zagreb.

Glasnović Gracin, D. (2008.): *Računalo u nastavi matematike. Teorijska podloga i metodičke smjernice (2. dio: Promjene u nastavi matematike)*, Matematika i škola 47 (2008). 81-84. Element, Zagreb.

Glasnović, D.(2002.): *Mnogokuti-rad u parovima*, Matematika i škola 13, 121-122.

Grgin, T. (1986.): *Školska dokimologija*, Školska knjiga, Zagreb.

Gusić, I. (1995.): *Matematički rječnik*. Element. Zagreb.

Ivić, I. (1985.): *Opterećenost učeka osnovne škole*, Nastava i vaspitanje br. 5

Kadum, V. (2005.): *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi matematike*, IGSA, Pula.

Kurnik, Z. (2001.): *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola 10, 195-199.

Kurnik, Z. (2002.): *Načelo znanstvenosti*, Matematika i škola 13, 102-106.

Kurnik, Z. (2002.): *Načelo problemnosti*, Matematika i škola 14, 148-152.

Kurnik, Z. (2002.): *Problemska nastava*, Matematika i škola 15, 196-202.

Kurnik, Z. (2002.): *Historicizam*, Matematika i škola 17, 52-58.

Kurnik, Z. (2003.): *Grupni rad*, Matematika i škola 22, 52-57.

Kurnik, Z. (2004.): *Individualizacija*, Matematika i škola 25, 196-201.

Miladinović, M. (2003.): *Integracija informacione tehnologije sa predmetima u osnovnoj školi*, Beograd: XIX Specijalizovani republički seminar za nastavnike računarstva i informatike u osnovnim i srednjim školama.

Mužić, V. (1968.): *Programirana nastava*, Školska knjiga, Zagreb.

Pavković, B. i dr. (1994.): *Male teme iz matematike*, HMD, Zagreb.

Pavleković, M. (1997.): *Metodika nastave matematike s informatikom I*, Element, Zagreb.

Pavleković, M. (1999.): *Metodika nastave matematike s informatikom II*, Element, Zagreb.

Pelle, B. (2004.): *Tako poučavamo matematiku*, Školske novine i HMD, Zagreb.

Polya, G. (1956.): *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb.

Poljak, V. (1982.): *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb.

Schneider, E. (2002.): *Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Didaktische Orientierungen – Praktische Erfahrungen*, Profil Verlag, München-Wien.

Varošanec, S. (2003.): *Neke metode rješavanja problemskih zadataka*, Poučak br. 13, 32.-38.

Šuljić, Š. (2005.): *Geogebra (2) – Prvi softver dinamične geometrije na hrvatskom jeziku*. Matematika i škola, br. 29, Element, Zagreb.

Šuljić, Š. (2006.): *Geogebra (6) – S dinamičnim crtežom na Internet*, Matematika i škola, br. 33.
Element, Zagreb.

www.pfb.unssa.rs

www.invibl.org