Маја Алексић

Трећи Хилбертов проблем и тензорски производ

-Мастер рад-

Ментор:
Проф. др Зоран Петровић

Београд, 2020. година

Садржај

Захвалност **2**

1 О Давиду Хилберту **3**
1.1 Давид Хилберт 3
1.1.1 Живот Давида Хилберта 3
1.1.2 Предавање у Паризу 6

2 Увод **9**

3 Једнакоразложивост у равни **14**
3.1 Једнакоразложивост 14
3.2 Особине једнакоразложивости 15

4 Једнакоразложивост у простору **28**
4.1 Основни појмови теорије група 29
4.2 Тензорски производ 29
4.3 Деново решење 31

5 Занимљивости **37**

Литература **41**

Биографија **43**

Захвалност

На почетку желим да се захвалим свом ментору проф. др Зорану Петровићу на избору занимљиве теме и свим корисним саветима и сугестијама датим током писања овог рада, такође се захваљујем и члановима комисије проф. др Александру Липковском и др Марку Радовановићу који су својим сугестијама допринели да овај рад добије своју финалну верзију.
Највише бих желела да се захвалим својим родитељима, Зорану и Драгани, брату Бојану, и наравно супругу Предрагу који су веровали у мене и подржавали ме током мог студирања, као и свим мојим пријатељима који су употпунили студијске дане.

Глава 1

О Давиду Хилберту

1.1 Давид Хилберт

Давид Хилберт (David Hilbert) је био чувени немачки математичар који је живео крајем XIX и у XX веку. Хилберт је, као један од најбољих математичара тог периода, оставио изузетно велики траг. Био је један од последњих универзалних математичара који се бавио најразличитијим темама, од теорије бројева, преко геометрије и функционалне анализе, до математике у физици. Његова дела и радови су имали огроман утицај на развој математике у XIX веку. Предавање које је Хилберт одржао у Паризу 1900. године под називом *Математички проблеми*, од изузетног је значаја за даљи развој математике.

1.1.1 Живот Давида Хилберта

Давид Хилберт је рођен 23. јануара 1862. године у Кенигсбергу, Источна Пруска, од оца Ота и мајке Марије Хилберт. Отац му је био окружни судија, веома строг у његовом васпитању, а мајка је била фасцинирана филозофијом, астрономијом и простим бројевима. Верује се да га је првим математичким појмовима баш она научила.

Давид је похађао гимназију "Фридрихсколег гимназију"[1] (исту школу похађао је и Имануел Кант[2]), у којој је нагласак био на латинском и грчком језику, због чега се 1879. пребацио и 1880. завршио научно оријентисану гимназију у Вилхему, у којој је већи приоритет у учењу имала математика. Добио је највишу оцену из математике, а на његовом завршном испиту је писало:
,,За математику је увек показивао веома живахан интерес и продорно

[1] Collegium fridericianum - била је престижна гимназија у Кенигсбергу, основана је 16. августа 1698. а затворена је 1944.

[2] Immanuel Kant (1724-1804) је био родоначелник класичног немачког идеализма и по многима један од највећих филозофа свих времена

разумевање, савладао је сав материјал који је учио у школи на веома леп начин и био је у стању да га примени са сигурношћу и домишљатошћу".

У јесен исте године уписује факултет у Кенигсбергу, као и већина великих немачких математичара, у то време светски математички центар. Тамо се упознао са Херманом Минковским[3] са којим је био врло близак пријатељ, заједно су делили љубав према математици и снажно су утицали на математички напредак. Још једно пријатељство, које је тамо стекао, и које је имало значајан фактор у Хилбертовом математичком развоју било је са Адолфом Хурвицом[4], који је био докторант на факултету као и Хилберт и Минковски. Велики део свог радног века проведеног на Универзитету у Кенигсбергу искористио је за научну размену знања са колегама математичарима Хурвицом и Минковским. На универзитету у Кенигсбергу, Хилберт је студирао код Линдемана[5] код кога је радио докторат који је завршио 1884. године. Његов докторат посвећен је једном проблему из теорије алгебарских инваријанти, и до 1892. године Хилберт је углавном радио на тој теорији. До многих значајних резултата дошао је приликом тих истраживања, од којих неки носе његово име (Hilbertov Nullstellensatz), Хилбертова теорема о несводљивости полинома.
Године 1886. постао је Privatdozent[6], 1892. добија звање ванредног професора (Extraordinarius), а 1893. постаје редован професор (Ordinarius) Универзитета у Кенигсбергу, и тада замењује свог професора Линдемана.

На наговор Феликса Клајна[7], године 1895., долази на Универзитет у Гетинген, где је именован за председника математике на универзитету[8], где предаје до краја каријере, до 1930. године. За то време успео је да доведе свог пријатеља Минковског у Гетинген. Могућност да заједно раде била је обојици од великог значаја. Предавање које је Хилберт одржао 1900. године, о ком ће касније бити више речи, веома је утицало на даљи ток развоја математике.
Између 1892. и 1909. године Хилберт је дао своје највеће доприносе математици, бавио се основама геометрије и радио је на теорији интегралних једначина, поједноставио је постојеће доказе за постојање трансцендентних бројева e и π. Потом је, бавећи се интегралним једначинама, увео анализу са бесконачно много променљивих, из које ће

[3]Hermann Minkowski (1827-1904) је био истакнути немачки математичар и физичар, професор универзитета у Цириху и Гетингену. Био је ученик Давида Хилберта.

[4]Adolf Hurwitz (1859-1919) је био немачки математичар који се бавио алгебром, анализом, геометријом и теоријом бројева.

[5]Karl Luis Ferdinand Lindeman (1852-1939) био је немачки математичар. Познат је по доказу да је π трансцендентан број који је објавио 1882. године.

[6]виши предавач на универзитету, плату је добијао директно од студената који су похађали његова предавања

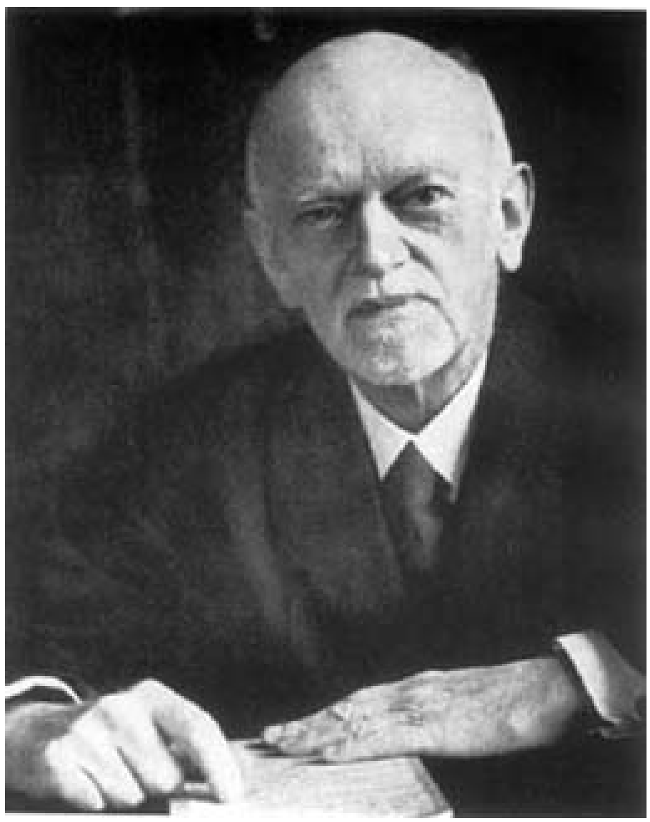
[7]Christian Felix Klein (1849-1925), немачки математичар који се бавио теоријом група, комплексном анализом и нееуклидском геометријом

[8]основао га је 1732/1734. британски краљ и хановерски изборник Џорџ II, док је отворен за наставу 1737.

се развити оно што се данас назива теоријом Хилбертовог простора.

Те Хилбертове идеје су дале велики допринос развијању математичке анализе у физици, тачније квантној механици. Затим је 1909. године решио Варингов[9] проблем о представљању природних бројева помоћу сума n-тих степена. Те године, велики ударац за Хилберта, била је смрт његовог пријатеља Минковског. После његове смрти, Хилберт се углавном бавио проблемима теоријске физике, све до 1922. године када се опет посвећује основама математике.

До дубоке старости држао је предавања која би давала детаљан преглед математике, као и предавања из филозофије математике. Био је сјајан лидер и заговорник математике за живота, његов утицај на математику и дан данас је веома велики, део тог утицаја преноси се преко његових проблема. Умро је 14. фебруара 1943. у Гетингену. Ученици Хилберта су били све сами великани математике двадесетог века.



Слика 1.1: Хилберт, 1937.

[9]Edvard Waring (1736-1798) био је британски математичар.

1.1.2 Предавање у Паризу

,,Историја нас учи континуитету развоја науке. Знамо да свако доба има своје проблеме, које следећа година или решава или их одбацује као бескорисне и замењује их новим. Да бисмо добили идеју о могућем развоју математичког знања у блиској будућности, морамо да пустимо да нам нерешена питања прођу кроз умове и да се осврнемо на проблеме које данашња наука поставља и чије решење ишчекујемо у будућности. Таквом прегледу проблема данашњи дан, који лежи на састанку векова, чини ми се добро прилагођен. Јер, завршетак велике епохе не само да нас позива да се осврнемо у прошлост, већ и усмерава наше мисли у непознату будућност.”

Године 1900. 8. августа овим речима започето је, и одржано чувено предавање Давида Хилберта, на ком је изложио, описао, 10 од 23 проблема са своје листе. Он је желео да ти проблеми покажу пут математичарима у двадесетом веку. У првом делу његовог излагања говорио је о важности проблема за одређивање правца развоја у науци. Затим су разматрани неки велики проблеми у математици, и говорило се о захтевима које решења морају да задовоље, где Хилберт инсистира на ригорозности тих захтева, јер сматра да само на тај начин можемо да откријемо једноставније методе доказивања. Изложени проблеми су изазвали, и још увек изазивају, математичаре да реше основна питања. Комплетна листа од 23 проблема појавила се у раду објављеном у *Зборник радова* конференције. Проблеме не наводимо у потпуности, већ читаоцу дајемо само контекст проблема:

1. Канторов проблем кардиналног броја континуума.

2. Конзистентност аксиома аритметике.

3. Питање једнакоразложивости два полиедра истих запремина.

4. Проблем праве линије као најкраћег растојања између две тачке.

5. Концепт Лијевих група непрекидних трансформација, без претпоставке диференцијабилности.

6. Математички третман аксиома физике. Може ли се физика аксиоматизовати?

7. Ирационалност и трансцендентност извесних бројева, облика a^b, нпр. $2^{\sqrt{2}}$, e^{π}.
8. Проблем простих бројева, Риманова хипотеза.
9. Општи доказ теорема реципроцитета теорије бројева.
10. Опште решење Диофантове једначине.
11. Решавање квадратних форми са алгебарским нумеричким коефицијентима.
12. Проширење Вебер - Кронекерове теореме
13. Немогућност решења опште једначине 7-ог степена функцијама са само два аргумента.
14. Проблем коначне генерисаности извесних прстена инваријаната
15. Строго заснивање Шубертовог енумеративног рачуна.
16. Проблем топологије алгебарских кривих и површи.
17. Изражавање ненегативне рационалне функције у облику количника сума квадрата.
18. Проблем прекривања и паковања.
19. Јесу ли решења варијационих проблема увек аналитичка?
20. Да ли сви варијациони проблеми са одређеним граничним условима имају решење.
21. Доказ егзистенције линеарне диференцијалне једначине са унапред задатом групом монодромије.
22. Униформизација аналитичких релација помоћу аутоморфних функција.
23. Даљи развоја варијационог рачуна.

Ми ћемо се у овом раду посветити трећем Хилбертовом проблему, тј. проблему једнакости запремине два тетраедра једнаких база и једнаких висина. У целости преносимо Хилбертово предавање у Паризу о овом проблему.

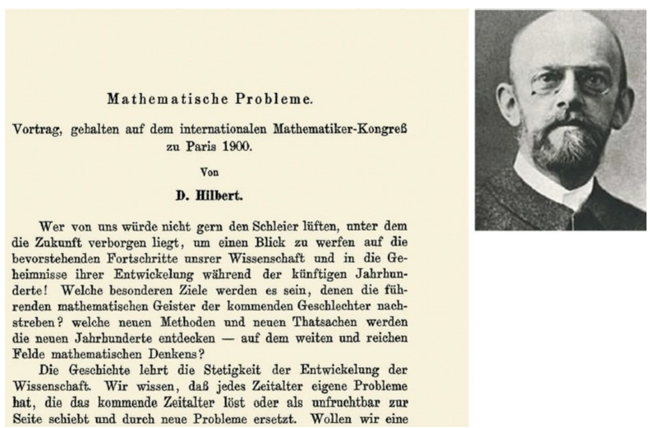
,, *У два писма Герлингу*[10]*, Гаус*[11] *изражава жаљење што одређене теореме у геометрији зависе од метода исцрпљивања, тј. од аксиоме континуитета (или од Архимедове аксиоме). Гаус посебно спомиње Еуклидову теорему, да се тетраедри једнаких висина односе као њихове базе.*

[10]Christian Ludwig Gerling(10. јул 1788. - 15. јануар 1864.) био је Гаусов ученик, докторирао је 1812. на Универзитету у Гентингену.

[11]Johann Carl Friedrich Gauss (30. април 1777. - 23. фебруар 1855.) био је немачки математичар и научник који је дао значајан допринос у многим пољима, укључујући теорију бројева, анализу, ...

Аналогни проблем у равни је решен. Герлинг је такође био успешан у доказивању једнакости запремине симетричних полиедара тако што их је поделио у конгруентне парове. Ипак, чини ми се вероватним да је општи доказ ове врсте за Еуклидову теорему који је управо споменут немогућ, а наш задатак је да дамо строг доказ о његовој немогућности. Ово би се добило чим бисмо успели да одредимо два тетраедра једнаких база и једнаких висина које ни на који начин не можемо поделити на једнакоразложиве тетраедре, и који се не могу комбиновати са једнакоразложивим тетраедрима да би се формирале у полиедре, који би се могли поделити у једнакоразложиве тетраедре."

Проблем је решен, решио га је Хилбертов ученик Макс Ден[12]. Ден је схватио, да не остаје само запремина непромењена у односу на операције које вршимо, дељење и лепљење, већ и да одређене дужине страница и диедри остају непромењени. Ова комбинација је сада позната као Денова инваријанта.



Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwickelung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine

Слика 1.2: Исечак о Хилбертовом излагању Математичких проблема у Паризу, 1900.

[12]Max Wilhelm Dehn (13. новембар 1878. - 27. јун 1952.) био је немачки математичар, најпознатији по свом раду у геометрији, топологији и теорији геометријске групе. Био је Хилбертов ученик, који је решио трећи Хилбертов проблем.

Глава 2

Увод

Кренимо од најпростијег примера. Посматрајмо најједноставнији многоугао, троугао, и одредимо његову површину. То ћемо урадити на следећи начин. Уочимо теме код највећег угла, и кроз њега провуцимо праву паралелну наспрамној страници. Потом, спустимо нормале из преостала два темена на повучену праву. За крај, спустимо још и нормалу из темена код највећег угла. Овим поступком добили смо правоугаоник ког формирају два пара подударних троуглова, одакле нам директно следи да је површина троугла једнака једној половини површине правоугаоника.

У каснијем делу овог рада показаћемо шта се дешава у простору, тачније чему је једнака запремина најједноставнијег полиедра, тростране пирамиде. У чувеном Еуклидовом уџбенику геометрије, *Елементи*, Еуклид, у вези са овим питањем, наводи следеће теореме.

2.1. Теорема. *(Теорема 3 из* XII *књиге Елемената)*
Свака пирамида са троугаоном основом може се поделити на две једнаке пирамиде са троугаоним основама, сличне једна другој и целој пирамиди, и на две једнаке призме. Збир те две призме је већи од половине целе пирамиде.

2.2. Теорема. *(Теорема 1 из* X *књиге Елемената)*
Нека су дате две неједнаке величине. Ако од веће одузмемо величину већу од њене половине, а од остатка већу од његове половине и тако поступамо непрекидно, остаће нека величина која је мања од друге дате величине.

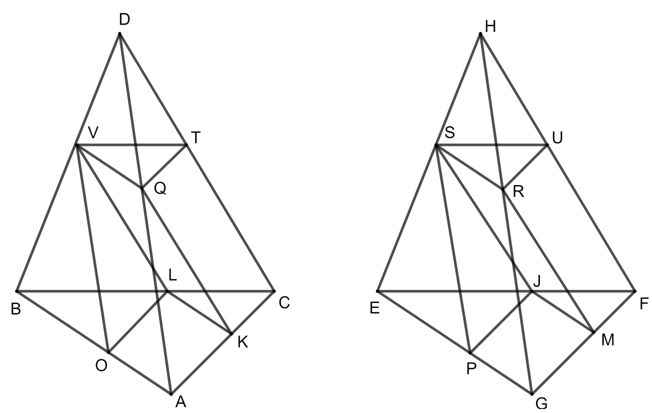
2.3. Теорема. *(Теорема 4 из* XII *књиге Елемената)*
Ако постоје две пирамиде са истом висином, чије су основе троуглови, и сваку поделимо на две једнаке пирамиде, међусобно сличне и сличне са целом пирамидом, и на две једнаке призме, основа једне пирамиде односиће се према основи друге пирамиде као све призме прве пирамиде према свим, у истом броју, призмама друге пирамиде.

2.4. Теорема. *(Теорема 5 из* XII *књиге Елемената) Тростране пирамиде са истом висином се једна према другој односе као њихове базе.*

Доказ. Доказ ове теореме Еуклид даје помоћу методе ексхаустије[1]. Нека су дате пирамиде са основама ABC и GEF, са истом висином и врховима у тачкама D и H. Показаћемо да се основа ABC према основи GEF односи као запремина пирамиде $ABCD$ према запремини пирамиде $GEFH$.
Ако се основа ABC не би односила према основи GEF као запремина пирамиде $ABCD$ према запремини пирамиде $GEFH$, онда би се основа ABC према основи GEF односила као запремина пирамиде $ABCD$ према запремини мањој или већој од запремине пирамиде $GEFH$. Показаћемо да оба случаја воде контрадикцији.
Претпоставимо прво да се основа ABC односи према основи GEF као запремина пирамиде $ABCD$ према запремини тела X, мањој од запремине пирамиде $GEFH$. Поделимо пирамиду $GEFH$ на две једнаке пирамиде, међусобно сличне, и сличне целој пирамиди, и на две призме једнаких запремина, при чему је збир запремина призми већи од половине запремине пирамиде (на основу теореме 2.1). Затим добијене пирамиде поново делимо на сличан начин, и тако поступамо све док од полазне пирамиде $GEFH$ не остану пирамиде чије су запремине мање од разлике запремина пирамиде $GEFH$ и тела X (на основу теореме 2.2). Обележимо одговарајуће пирамиде $EPJS$ и $SRUH$. Тада је укупна запремина осталих призми у пирамиди $GEFH$ већа од запремине тела X. Поделимо и пирамиду $ABCD$ на сличан начин и на исти број делова, као што је подељена пирамида $GEFH$. Тада се основа ABC према основи GEF односи као призме у пирамиди $ABCD$ према призмама у пирамиди $GEFH$, (на основу теореме 2.3). Али основа ABC је према основи GEF као пирамида $ABCD$ према телу X. Што даље имплицира, пирамида $ABCD$ према телу X се односи као призме у пирамиди $ABCD$ према призмама у пирамиди $GEFH$. На тај начин, имамо следеће, однос пирамиде $ABCD$ према призмама у њој исти је као однос тела X према призмама у пирамиди $GEFH$. Даље, имамо да је запремина пирамиде $ABCD$ већа од збира запремина призми у њој, па према томе и запремина тела X је већа од збира запремина призми у пирамиди $GEFH$, што нас доводи до контрадикције са закључком да је укупна запремина осталих призми у пирамиди $GEFH$ већа од запремине тела X. Не може запремина тела X у исто време бити и мања и већа од запремина пирамиди у пирамиди $GEFH$. Према томе, основа ABC према основи GEF није у размери као запремина пирамиде $ABCD$ према телу запремине мање од пирамиде $GEFH$. Што нас доводи до контадикције са нашом претпоставком.
На сличан начин се доказује да се основа GEF према основи ABC није

[1]Метода ексхаустије (у преводу са грчког метод исцрпљивања) представља метод израчунавања површине неке фигуре тако што се полазна фигура подели на полигоне чије површине конвергирају ка површини посматране фигуре.

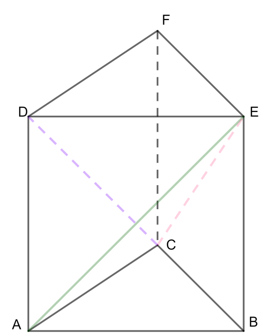
у размери као запремина пирамиде $GEFH$ према телу запремине мање од пирамиде $ABCD$.
Тврдимо да основа ABC према основи GEF није ни у односу као запремина пирамиде $ABCD$ према телу X запремине веће од запремине пирамиде $GEFH$. Дакле, посматрајмо сада случај да се основа ABC односи према основи GEF као запремина пирамиде $ABCD$ према запремини тела X, већој од запремине пирамиде $GEFH$. Обрнуто гледајући, основа GEF је према основи ABC као запремина тела X према запремини пирамиде $ABCD$. Али запремина тела X према запремини тела $ABCD$ је у односу као запремина пирамиде $GEFH$ према телу мање запремине од запремине пирамиде $ABCD$. Дакле, основа GEF се према основи ABC односи као запремина пирамиде $GEFH$ према телу чија је запремина мања од запремине пирамиде $ABCD$, што смо доказали да је бесмислено. Према томе основа ABC према основи GEF није у размери запремина пирамиде $ABCD$ према телу веће запремине од запремине пирамиде $GEFH$. Што значи да и овај случај води контрадикцији, па долазимо до тога што је требало доказати. Дакле, основа ABC односи се према основи GEF као запремина пирамиде $ABCD$ према запремини пирамиде $GEFH$. □



Слика 2.1: Еуклидова подела пирамиде методом ексхаустије.

2.5. Теорема. *(Теорема 7 из* XII *књиге Елемената) Запремина тростране пирамиде једнака је једној трећини запремине призме са истом базом и истом висином.*

Доказ. Призму $ABCDE$ поделићемо на три пирамиде на следећи начин. Повуцимо прво дијагонале бочних страна AE, CD и CE. Пошто је $ABED$ паралелограм, а AE његова дијагонала имамо да је троугао ABE подударан троуглу AED, према томе пирамида којој је у основи троугао ABE и врх у тачки C, означимо је са $P_1 = ABEC$, има исту запремину као пирамида којој је у основи троугао AED и врх такође у тачки C, означимо је са $P_2 = AEDC$. Али пирамида $P_2 = AEDC$ има исту запремину као пирамида којој је основа троугао ACD и врх у тачки E, јер су обухваћене истим равнима. Према томе пирамида $P_1 = ABEC$ има исту запремину као пирамида $P_2 = ACDE$. Даље посматрајмо паралелограм $ACFD$, и његову дијагоналу CD, тада је троугао CDF подударан троуглу ACD и на тај начин пирамида чија је основа троугао ACD и врх у тачки E, има исту запремину као пирамида са основом CDF и врхом у тачки E, означимо је са $P_3 = CDFE$. Сада пирамиде P_2 и P_3 имају исту запремину. Доказали смо већ да су запремине пирамида P_1 и P_2 једнаке. Према томе, из транзитивности, следи да је запремина пирамиде $P_3 = CDFE$ иста као запремина пирамиде $P_1 = ABEC$. На овај начин је призма $ABCDEF$ подељена на три међусобно подударне тростране пирамиде. Јасно је да је запремина тростране пирамиде једнака једној трећини запремине призме са истом базом и истом висином. $\square$



Слика 2.2: Запремина пирамиде износи једну трећину запремине призме.

Након што се упознао са овим проблемом, и са добијеним резултатима у равни, да ако имамо фигуре исте површине, могуће је поделити једну од њих на коначан број делова, од којих се може саставити друга фигура, Хилберт се запитао да ли је исти метод, метод ексхаустије, неопходан и приликом одређивања запремине пирамиде. Ако би у простору важило слично тврђење, да ако имамо полиедре једнаких запремина, и један од њих поделимо на делове од којих се може саставити други, били бисмо у стању да дамо основну дефиницију за запремину пирамиде. Тачније, тада бисмо призму поделили на коначан број полиедара, од којих би саставили три подударне пирамиде, и тиме бисмо добили резултат за запремину пирамиде која не захтева метод ексхаустије. Испоставиће се да је одговор на ово питање негативан, и да је немогуће избећи метод ексхаустије, одговор, односно решење овог проблема је дао Ден, убрзо након што га је Хилберт поставио. Ден је показао да уколико правилан тетраедар поделимо на било који начин, никако не би било могуће саставити коцку исте запремине. У наставку рада ћемо презентовати детаљније овај проблем.

Глава 3

Једнакоразложивост у равни

Пре него дамо негативан одговор на питање о трећем Хилбертовом проблему, сагледаћемо на још један начин аналоган проблем у равни. Показаћемо да је могуће да, ако посматрамо многоуглове једнаких површина, један од њих поделимо на коначан број делова и пресложимо га у други. Позитиван одговор на ово питање даће нам Валас-Бољаи-Гервинова теорема. Теорема је добила назив по математичарима који су је доказали у првој половини XIX века, како они тврде независно један од другог, Вилијаму Валасу[1], Фаркашу Бољаиу[2] и Полу Гервину[3].
Бољаи је први формулисао питање. Гервин је доказао теорему 1833. године, док је Валас исти резултат као и Гервин дао 1807. године. Према неким другим изворима, Бољаи и Гервин су самостално дали доказ ове теореме 1833. и 1835. године.

Пре него докажемо Валас-Бољаи-Гервинову теорему, увешћемо појам о једнакоразложивости и помоћне леме које ће нам бити потребне, неке од њих ћемо и доказати.

3.1 Једнакоразложивост

Посматрајмо произвољно разлагање многоугла A. Јасно нам је да дато разлагање многоугла ротацијама и транслацијом можемо превести у неки други многоугао B. Једнакоразложивост, је појам који нам објашњава однос полазног многоугла A, и добијеног многоугла B.

[1]William Wallace(1768-1843) шкотски математичар и астроном
[2]Farkas Bolyai(1775-1856) мађарски математичар, бавио се геометријом
[3]Paul Gerwien о њему се мало зна, био је немачки официр који се бавио математиком

3.1. Дефиниција. *Многоуглови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ чине разлагање (декомпозицију) многоугла A, у ознаци $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, ако је $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ и многоуглови имају дисјунктне унутрашњости.*

3.2. Дефиниција. *Многоуглови A и B су једнакоразложиви, у ознаци $A \sim B$, ако постоје многоуглови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$, такви да је испуњено следеће $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, и $A_1 \cong B_1, A_2 \cong B_2, \ldots A_n \cong B_n$.*

3.2 Особине једнакоразложивости

Дакле, за многоуглове A и B кажемо да су једнакоразложиви ако постоји многоугаона декомпозиција $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ многоугла A и B, редом, тако да је A_i подударно са B_i за свако $1 \leq i \leq n$. Укратко, два многоугла су једнакоразложива ако један од њих може да се растави и понови склопи у други. Једнакоразложивост обележаваћемо $\sim$, и пишемо $A \sim B$.

Показаћемо да је $\sim$ релација еквивалинције у Еуклидској равни.

3.3. Теорема. *Нека су дати многоугли A, B, и C. Тада важи:*

Рефлексивност: $A \sim A$. A је једнакоразложиво са самим собом.

Симетричност: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Ако је A једнакоразложиво са B, онда је и B једнакоразложиво са A.

Транзитивност: $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$. Ако је A једнакоразложиво са B и B једнакоразложиво са C, тада је и A једнакоразложиво са C.

Доказ. Рефлексивност и симетричност следе директно из дефиниције једнакоразложивости. Остаје нам да покажемо да важи транзитивност.

Транзитивност: Претпоставимо да је $A \sim B$ и $B \sim C$. Нека декомпозицију многоугла A чине многоуглови $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а декомпозицију многоугла B многоуглови $B_1, B_2, \ldots, B_n$, и нека при томе важи $A_i \cong B_i$ за свако $1 \leq i \leq n$. Нека многоуглови $B'_1, B'_2, \ldots, B'_m$ чине другу декомпозицију многоугла B, а нека многоуглови $C_1, C_2, \ldots, C_m$ чине декомпозицију многоугла C, тако да је $B'_j \cong C_j$, за свако $1 \leq j \leq m$.
Посматрајмо следећу декомпозицију многоугла B :

$$B_{ij} = B_i \cap B'_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m.$$

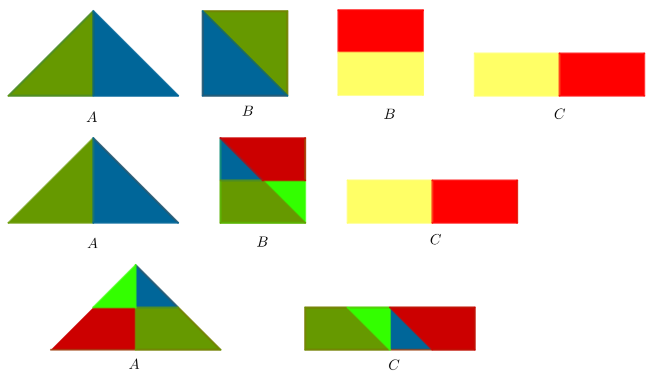
Неки од B_{ij} могу бити празни скупови, или скупови дисјунктних тачака. Ми ћемо посматрати само оне B_{ij} који представљају конвексне многоуглове. Сада за $i_1 \neq i_2$ важи $int(B_{i_1}) \cap int(B_{i_2}) = \emptyset$, па је и $int(B_{i_1 j}) \cap int(B_{i_2 j}) = \emptyset$. Аналогно показујемо за j. Одатле следи да $\{B_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ заиста представља разлагање многоугла B. Фиксирајмо сада индекс i. Тада важи

$$\cup_{j=1}^{m} B_{ij} = \cup_{j=1}^{m} (B_i \cap B_j^{'}) = B_i \cap \cup_{j=1}^{m} B_j^{'} = B_i \cap B = B_i.$$

Аналогно, ако фиксирамо индекс j добијамо

$$\cup_{i=1}^{n} B_{ij} = \cup_{i=1}^{n} (B_i \cap B_j^{'}) = (\cup_{i=1}^{n} B_i) \cap B_j^{'} = B \cap B_j^{'} = B_j.$$

Пошто је $A \sim B$, и A_i је подударно са B_i за $i = 1, \ldots, n$, свако A_i можемо записати као унију неких A_{ij}, где је $A_{ij} \cong B_{ij}$, за $j \leq m$. Аналогно, и B_j је подударно са C_j за $j = 1, \ldots, m$, и свако C_j можемо записати као унију неких C_{ij}, $B_{ij} \cong C_{ij}$, за $i \leq n$. Како је подударност релација еквиваленције, добијамо $A_{ij} \cong C_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, односно A и C су једнакоразложиви, што је и требало доказати. □



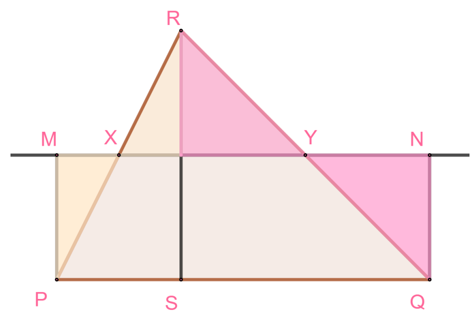
Слика 3.1: Пример претходне теореме 3.3.

Из претходне теореме следи да једнакоразложивост задаје релацију еквиваленције на скупу свих многоуглова.

Уведимо сада леме које ће нам у наставку рада бити потребне.

3.4. Лема. *Сваки троугао је једнакоразложив са правоугаоником исте основе.*

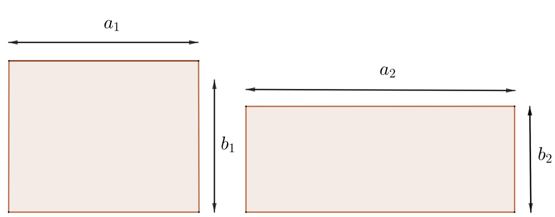
Доказ. Посматрајмо неки произвољан троугао PQR. Нека је његова најдужа страница страница PQ. Нека је RS висина тог троугла из темена R на страницу PQ. Тачка S се сада налази између тачака P и Q (у супротном то не би била најдужа страница). Даље, повуцимо средњу линију троугла XY, она је паралелна са PQ, затим је продужимо, и на продужену праву спустимо нормале из темена P и Q. У пресеку нормала из темена P и Q и праве која садржи тачке X и Y добијамо неке нове тачке M и N. Сада је правоугаоник $PQNM$ тражени правоугаоник које је једнакоразложив са троуглом PQR (слика 3.2). Једна страница тако добијеног правоугаоника одговара основици троугла PQR, PQ, а друга страница износи половину висине троугла $\frac{RS}{2}$. □



Слика 3.2: Троугао PQR и правоугаоник $PQNM$ су једнакоразложиви.

3.5. Лема. *Два правоугаоника једнаких површина су једнакоразложиви.*

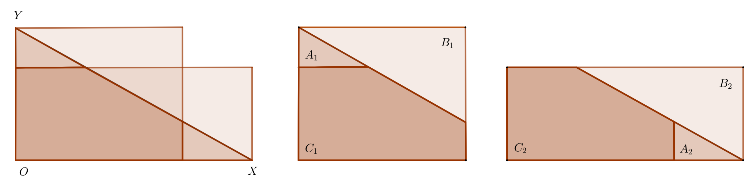
Доказ. Нека су дати правоугаоници P_1 страница a_1 и b_1, и P_2 страница a_2 и b_2, и нека им је површина једнака, тј. $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$. Претпоставимо даље да је $b_2 < b_1$, тада је $b_2 < b_1 \leq a_1 < a_2$. Дакле, имамо да је правоугаоник P_2 дужи од правоугаоника P_1. У наставку ћемо доказати да можемо претпоставити да је $b_2 < b_1 \leq a_1 < a_2 < 2a_1$ (за конструкцију не одговара да један правоугаоник буде знатно дужи од другог).



Слика 3.3: Правоугаоници за које важи $b_2 < b_1 \leq a_1 < a_2 < 2a_1$.

Даље, ако се деси да је $2a_1 < a_2$, тада можемо по дужини поделити правоугаоник P_2 на два мања правоугаоника, од којих можемо направити нови правоугаоник тако што их сложимо један на други. Тиме добијамо правоугаоник P_2' чија дужина сада износи $\frac{a_2}{2}$,а висина $2b_2$. Како су површине полазних правоугаоника једнаке, и површине правоугаоника P_1 и P_2' биће једнаке, тј. важи једнакост, $a_1 \cdot b_1 = \frac{a_2}{2} \cdot 2b_2$. Из претпоставке $2a_1 < a_2$ и из последње једнакости имамо да је $2b_2 < b_1$, па ако понављамо споменути поступак више пута, правоугаоник P_2 можемо пресложити у правоугаоник код кога је $a_2 < 2a_1$. Претпоставимо да

имамо баш такав правоугаоник.
Сместимо правоугаонике P_1 и P_2 у раван тако да им доња лева темена буду смештена у координатном почетку. Потом, повуцимо дуж која спаја горње лево теме правоугаоника P_1 и доње десно теме P_2. На овај начин смо правоугаонике поделили на по један петоугао, један већи и један мањи троугао. Приметимо да су петоуглови C_1 и C_2



подударни, а да су троуглови A_1, A_2 и XOY слични. Из једнакости $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$ добијамо $b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot b_2$, односно имамо $(a_2 - a_1)b_1 = (b_1 - b_2)a_2$. Одавде је

$$\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{b_1}{a_2}.$$

Пошто су A_1 и XOY слични, и из последње једнакости, можемо закључити да је једна катета троугла A_1 дужине $b_1 - b_2$, а друга катета је $a_2 - a_1$. Слично добијамо и за троугао A_2, једна његова катета је дужине $a_2 - a_1$, а друга је $b_1 - b_2$. Што даље имплицира да је $A_1 \cong A_2$. Тривијално следи и подударност троуглова B_1 и B_2, $B_1 \cong B_2$. На основу овога можемо доћи до закључка да су катете оба троугла a_1 и b_2. Из свега овога долазимо до онога што смо требали доказати, тј да су правоугаоници P_1 и P_2 једнакоразложиви. □

3.6. Лема. *Сваки n-тоугао $A_1, A_2, ...A_n$ $(n > 3)$ има унутрашњу дијагоналу (дуж која спаја два несуседна темена и која, са искључењем крајњих тачака, цела припада унутрашњости многоугла).*

Доказ. Изаберимо произвољно теме A_i, многоугла $A_1, A_2, ...A_n$, које је уједно и теме конвексног покривача тог многоугла. Тада је могућ један од следећих случаја:

1) дуж $A_{i-1}A_{i+1}$ је унутрашња дијагонала многоугла.

2) у унутрашњости троугла $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ постоји бар једно теме многоугла $A_1, A_2, ..., A_n$ различито од темена троугла $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, које је у њему, најудаљеније од праве $p(A_{i-1}A_{i+1})$, а које заједно са A_i чини унутрашњу дијагоналу n-тоугла $A_1, A_2, ...A_n$.

3) теме n-тоугла $A_1, A_2, ...A_n$ налази се на страници $A_{i-1}A_{i+1}$ троугла $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, тада имамо да то теме и теме A_i чине унутрашњу дијагоналу. □

3.7. Лема. *Сваки многоугао $A_1, A_2, ...A_n$ може се разложити унутрашњим дијагоналама на троуглове, тј. може се приказати као унија троуглова, са теменима међу теменима полигона $A_1, A_2, ...A_n$, за које важи да свака два од њих имају дисјунктне унутрашњости, и при томе број тих троуглова је увек једнак $n-2$, без обзира на разбијање многоугла $A_1, A_2, ...A_n$.*

Доказ. У леми 3.6 показали смо постојање унутрашње дијагонале у многоуглу $A_1, A_2, ...A_n$. Разлагањем n-тоугла $A_1, A_2, ...A_n$ по унутрашњој дијагонали добијамо два дисјунктна многоугла. Сваки од многоуглова има унутрашњу дијагоналу по којој их разлажемо. Понављамо тај поступак док не добијемо да су се сви многоуглови, настали од n-тоугла $A_1, A_2, ...A_n$, разложили на троуглове.

Доказ да таквих троуглова има тачно $n-2$ даћемо индукцијом по n:

1) Б: За $n = 4$, четвороугао можемо унутрашњом дијагоналом разложити на два дисјунктна троугла;

2) И.Х.: Претпоставимо да за неки број k, $k < n$, важи да број троуглова на које се разлаже k-тоугао $A_1, A_2, ...A_k$ једнак $k-2$;

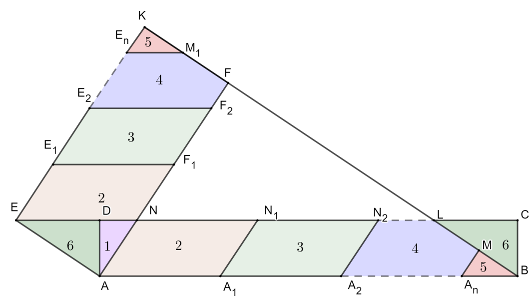
3) И.К.: Треба показати да је за n број троуглова на које се разлаже n-тоугао $A_1, A_2, ...A_n$ једнак $n-2$. Лема 3.6 нам даје постојање унутрашње дијагонале. Многоугао се разлаже на два дела. Нека су добијени k-тоугао и $n-k+2$-тоугао. Из индуктивне хипотезе за k-тоугао имамо $k-2$ дијагонале и за $n-k+2$ - тоугао имамо $n-k$ дијагонала, што је укупно $n-2$ дијагонале. □

3.8. Лема. *За сваки правоугаоник постоји правоугаоник, са унапред задатом једном страницом, који је са њим једнакоразложив.*

Доказ. Тврђење ове леме следи директно из леме 3.5, али ми ћемо у наставку рада дати још један, конструктиван доказ ове леме.
Размотримо прво случај када је задата страница новог правоугаоника већа од мање странице правоугаоника $ABCD$, и нека је она мања од дијагонале правоугаоника $ABCD$.

Уочимо тачку E, које је у продужетку странице CD, тако да је дуж AE једнаке дужине као задата страница. Из темена B повучемо праву паралелну са AE и на њу спустимо нормале AF и EK из тачака A и E. Тачке пресека CD са BK и AF означимо словима L и N.
Наносимо дужину дужи EN на страницу AB, од тачке A ка тачки B, и нека је број наношења n, тако да је $n \cdot EN \leq AB$, а $(n+1) \cdot EN > AB$. Из тачака дељења $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ повлачимо праве паралелне са AF до пресека са LD у тачкама $N_1, N_2, \ldots$ Последњу праву повлачимо из A_n паралелно са AF, она сече BL у тачки M.

На исти начин наносимо дужину дужи AN на страницу EK и из тачака дељења $E_1, E_2, \ldots$ повучемо праве паралелне са EN, до пресека са AF у тачкама $F_1, F_2, \ldots$. Последња од тих тачака сече KF у тачки M_1. Приметимо да ће број тачака $E_1, E_2, \ldots$ бити колико и тачака $A_1, A_2, \ldots A_n$. Из конструкције овог правоугаоника следи подударност делова, означених на слици 3.4, део 1 им је заједнички. Тако се добија да су правоугаоници $ABCD$ и $AFKE$ једнакоразложиви.



Слика 3.4: Једнакоразложивост правоугаоника.

Други случај је када је дата страница траженог правоугаоника већа од дијагонале датог правоугаоника.
Претпоставимо да је $AFKE$ дати правоугаоник (иста слика 3.4). Продужимо страницу KF до тачке B, тако да је дуж AB једнаке дужине као дата страница траженог правоугаоника. Повлачимо $EC \parallel AB$, $AD \perp EC$ и $BC \perp EC$. На страницама EK и AF из тачака E и A, поново наносимо дужи дужине AN, и конструишемо $E_1F_1, E_2F_2, \ldots$ Налазимо подударне делове у правоугаоницима $AFKE$ и $ABCD$.
Последњи случај је када је тражена страница правоугаоника мања од сваке странице датог правоугаоника $AFKE$ (иста слика 3.4). Тада је довољно да конструисемо дуж EC из E на растојању AD од темена A. Даља контрукција је аналогна претходном случају. □

3.9. Лема. *Сваки n-тоугао* ($n \geq 3$) *је једнакоразложив са неким правоугаоником.*

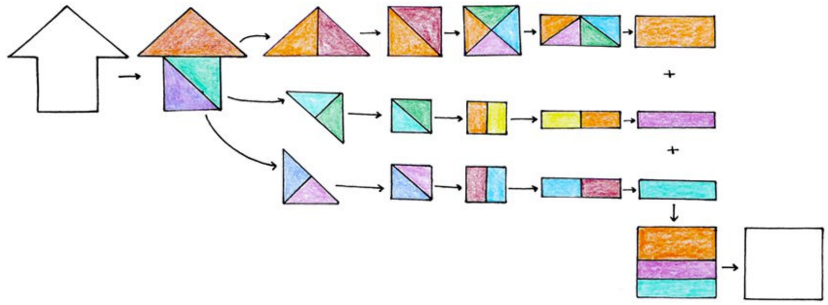
Доказ. Дати n-тоугао се унутрашњим дијагоналама разбија на $(n-2)$ троугла (Лема 3.6 и Лема 3.7). Означимо их са $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2}$, а њихове површине са $P_1, P_2, \ldots P_{n-2}$, респективно. Формирајмо правоугаоник $A_0B_0B_{n-2}A_{n-2}$ основице A_0B_0 произвољне дужине и површине једнаке површини датог многоугла. На страници A_0A_{n-2} означимо тачке $A_1, A_2, \ldots A_{n-3}$, а на страници B_0B_{n-2} означимо тачке $B_1, B_2, \ldots B_{n-3}$, тако да важи распоред $A_{i-1} - A_i - A_{i+1}$ и $B_{i-1} - B_i - B_{i+1}$, и површина правоугаоника $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$ је P_{i+1} за $i = 1, 2, \ldots n-3$. Применом леме 3.8 и леме 3.4 доказује се да је дати n-тоугао једнакоразложив са правоугаоником $A_0B_0B_{n-2}A_{n-2}$. □

3.10. Теорема. *(Волас-Бољаи-Гервинова теорема)*
Два многоугла су једнакоразложива акко имају једнаке површине.

Доказ. Ако су два многоугла једнакоразложива онда они имају једнаке површине. То нам следи из адитивности функције површине. Са друге стране, покажимо да су два многоугла једнаких површина једнакоразложиви. Многоуглове обележимо са A_1 и A_2, а њихову површину са $P(A_1)$ и $P(A_2)$. На основу леме 3.9, постоје правоугаоници R_1 и R_2 који су једнакоразложиви многоугловима A_1 и A_2, редом. Јасно је да су и њихове површине једнаке, тј. имамо $P(R_1) = P(A_1) = P(A_2) = P(R_2)$. Примењујући лему 3.5, добијамо да су правоугаоници R_1 и R_2 једнакоразложиви. Даље, примењујући теорему 3.3 на полигоне A_1, R_1 и R_2, а затим на полигоне A_1, R_2 и A_2 добијамо да су полигони A_1 и A_2 једнакоразложиви, што је и требало доказати. □

3.11. Последица. *Сваки многоугао је једнакоразложив са квадратом који има исту површину.*

У следећем примеру ћемо објаснити како можемо кућицу разложити у квадрат, у чему нам помаже Валас-Бољаи-Гервинова теорема. (Слика 3.5)



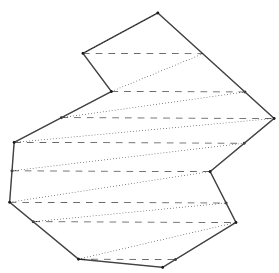
Слика 3.5: Разлажемо кућу у квадрат.

3.12. Пример. Кућицу смо прво поделили на два многоугла, на троугао и квадрат. Затим смо квадрат разложили на два мања троугла, и сваки од тих троуглова даље разложили на правоуганик. Користили смо лему 3.4, добијене правоугаонике смо спојили и добили квадрат. Добијени квадрат је исте површине као и површина наше кућице.

Даћемо још два доказа Волас-Бољаи-Гервинове теореме.

Први доказ.

3.13. Лема. *Сваки многоугао има многоугаоно разлагање на троуглове.*



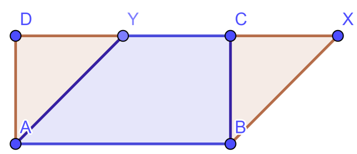
Слика 3.6: Разлагање многоугла.

Доказ. Из једног темена изаберимо линију чији је нагиб различит од нагиба свих страница, тиме се осигуравамо да нећемо добити линију паралелну са неком страницом. Затим ако из сваког темена повучемо линију са истим тим нагибом, односно повлачимо паралелне праве са првом повученом правом, ми тада тај многоугао делимо на троуглове и трапезе, а даље те трапезе можемо поделити на троуглове. □

3.14. Лема. *Било која два паралелограма са истом основицом и истом висином су једнакоразложиви. Исто важи и за троуглове.*

Доказ. Нека је $ABCD$ правоугаоник чија је основица страница AB, а висина је једнака страници AD. Нека је $ABXY$ паралелограм са висином AD. Претпоставимо да је $\mid DY \mid \leq \mid DC \mid$. Тада је

$$ABCD \sim AYD + ABCY \sim ABCY + BXC \sim ABXY.$$



Слика 3.7: Разлагање многоугла.

Сада претпоставимо да је $\mid DY \mid > \mid DC \mid$. Хоћемо да докажемо да је $ABXY$ подударан са неким паралелограмом $ABMN$ коме је висина једнака страници AD и где важи $\mid DN \mid \leq \mid DC \mid$ и онда на основу претходно доказаног имамо

$$ABXY \sim ABMN \sim ABCD.$$

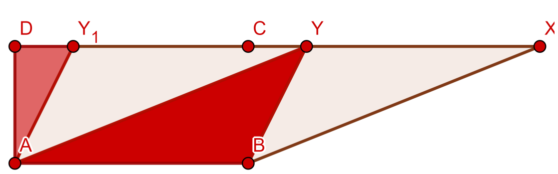
Даље, $ABXY$ разложимо дуж дијагонале BY и тај троугао $\triangle BXY$ налепимо са друге стране (то је $\triangle AYY_1$). Сада је

$$ABXY \sim ABYY_1 \text{ и важи } \mid DY_1 \mid = \mid DY \mid - \mid YY_1 \mid = \mid DY \mid - \mid DC \mid,$$

јер је $\mid YY_1 \mid = \mid AB \mid = \mid CD \mid$. И сада по томе, могуће је да $\mid DY_1 \mid \leq \mid DC \mid$, што смо доказали, или ако је $\mid DY_1 \mid > \mid DC \mid$ онда опет поновимо разлагање са $ABYY_1$ и онда добијемо тачку Y_2 тако да важи $\mid DY_2 \mid = \mid DY_1 \mid - \mid DC \mid$ и тако сваки пут смањујемо док не добијемо Y_i тако да важи $\mid DY_i \mid \leq \mid DC \mid$ и онда

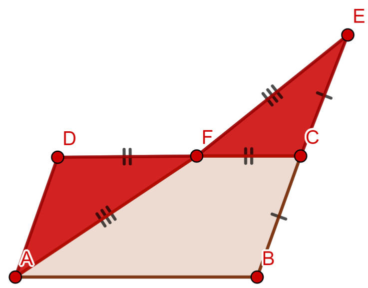
$$ABXY \sim ABYY_1 \sim ABY_1Y_2 \sim \ldots \sim ABY_{i-1}Y_i \sim ABCD,$$

што смо и хтели показати. □



Слика 3.8: Разлагање многоугла.

За сваки троугао важи да је једнакоразложив паралелограму, ако они имају исте основице и висина паралелограма одговара половини висине троугла, што даље имплицира да било која два троугла са истом основицом и једнаком висином су једнакоразложиви.



Слика 3.9: Разлагање многоугла.

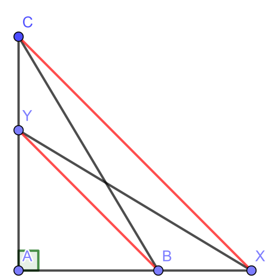
3.15. Лема. *Свака два троугла, једнаких површина, су једнакоразложива.*

Доказ. Користићемо претходну лему 3.14. Претпоставимо да су оба троугла правоугла. Тада имамо следеће

$$\begin{array}{rccc} & P(\triangle ABC) & = & P(\triangle AXY) \\ \Rightarrow & \frac{|AB||AC|}{2} & = & \frac{|AY||AX|}{2} \\ \Rightarrow & |AB|\,|AC| & = & |AY|\,|AX| \\ \Rightarrow & \frac{|AY|}{|AC|} & = & \frac{|AB|}{|AX|} \\ \Rightarrow & \frac{|AY|}{|AB|} & = & \frac{|AC|}{|AX|} \end{array}$$

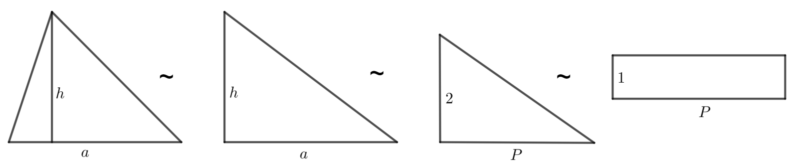
Добили смо да је $\triangle ABY$ сличан $\triangle AXC$ по ставу SUS. Ово нам даље имплицира да је BY паралелна са XC. Дакле троуглови $\triangle BYC$ и $\triangle BYX$ имају једнаке основице и једнаке висине, па на основу претходне леме можемо закључити да су они једнакоразложиви,

$$ABC \sim ABY + BYC \sim ABY + BYX \sim AXY.$$



Да бисмо завршили доказ закључимо следеће.
Два троугла са истом базом и висином су једнакоразложиви. Па ако

имамо троугао са основицом a и висином h он је једнакоразложив са неким правоуглим троуглом, исте основице a, и висине h. Користећи претходно доказано да су два правоугла троугла једнакоразложива, можемо закључити да правоугли троугао основице a и висине h, ($P = \frac{ah}{2}$), је једнакоразложив са правоуглим троуглом висине 2, и основице P (занемаримо јединице $P = \frac{2P}{2}$). Сада гледајући почетни троугао са основицом a и висином h, он је једнакоразложив са неким правоуглим троуглом висине 2, и основице P, који је даље једнакоразложив са правоугаоником исте основице и висине 1.



Слика 3.10: Једнакоразложивост.

Означимо тај правоугаоник P_x, где је x дужина основице посматраног троугла. Тада за сваки многоугао M важи,

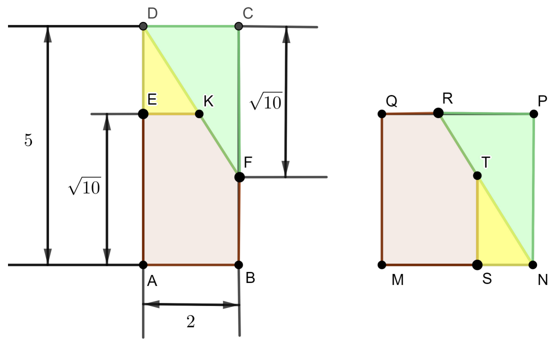
$$\begin{aligned} M &\sim T_1 + T_2 + \cdots + T_n \\ &\sim P_{x_1} + P_{x_2} + \cdots + P_{x_n} \\ &\sim P_{x_1+x_2+\cdots+x_n} \\ &\sim P_M \end{aligned}$$

Одакле следи да су многоуглови једнаких површина једнакоразложиви са правоугаоницима једнаких површина. □

Други доказ.

Да би дали други доказ, потребне су нам леме 3.13 и 3.14 које смо показали у првом доказу. Преостаје нам да дамо доказ још једне леме тј. да покажемо да за сваки правоугаоник и квадрат једнаких површина важи да су једнакоразложиви. Покажимо то прво на конкретном примеру, па ћемо дати доказ.

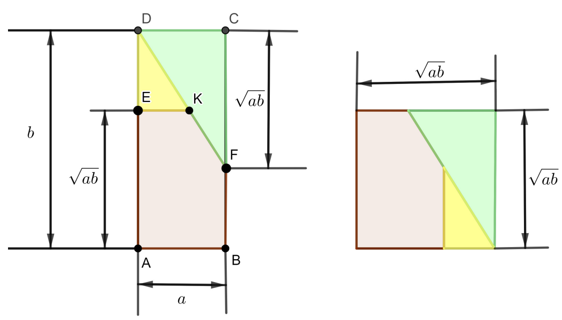
3.16. Пример. Посматрајмо правоугаоник димензије 5×2. Разложимо га на 3 дела које ћемо пресложити у квадрат странице $\sqrt{10}$. Једно од могућих решења је приказано на слици. На страницама правоугаоника AD и BC конструишимо дуж $AE = CF = \sqrt{10}$ што је уједно и дужина странице квадрата $MNPQ$. Правоугаоник разлажемо по дужи DF и $EK \parallel AB$, где је K тачка пресека дужи EK и DF. На страницама квадрата MN и QP ћемо конструисати дуж $PR = MS = 2$, даље



разлажемо квадрат по дужима NR и $ST \parallel MQ$, где је T тачка пресека дужи ST и NR. Из подударности одговарајућих фигура, следи и једнакоразложивост правоугаоника и квадрата површине 10.

3.17. Лема. *Правоугаоник и квадрат једнаких површина су једнакоразложиви.*

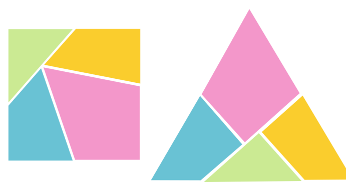
Доказ. Пратећи претходни пример, ова лема је уопштени случај разлагања правоугаоника у квадрат. Посматрајмо правоугаоник стра-



ница a и b, и квадрат странице $\sqrt{ab}$. На исти начин као у примеру 3.16 разлажемо правоугаоник и преслажемо га у квадрат. Уочимо тачке E и F на страницама AD и BC редом, чија дужина одговара дужини странице квадрата $\sqrt{ab}$, тј. $AE = CF = \sqrt{ab}$. Потом конструишемо дуж DF и дуж EK и важи $EK \parallel AB$. Разлажемо квадрат на три многоугла подударна са многоугловима на које је правоугаоник разложен. Приметимо да је то могуће само у случају када EK сече дуж DF, а за то је неопходно да дуж $AE = \sqrt{ab}$ не буде мања од половине странице $AD = b$. □

На основу леме 3.13, и 3.14 и 3.17 ми знамо да сваки многоугао можемо поделити на троуглове, а сваки троугао T је једнакоразложив са квадратом који има исту површину (последица 3.11). Обележимо то на следећи начин $K_{P_{(T)}}$. Даље ако спајамо те квадрате по два, рецимо површине a^2 и b^2, добијамо (из Питагорине теореме) многоугао површине c^2, опет када применимо последицу 3.11 добијамо квадрат површине c^2, и тако настављамо поступак док не добијемо један велики квадрат чија је површина једнака површини почетног многоугла. Тада за сваки многоугао M важи:

$$\begin{aligned} M &\sim T_1 + T_2 + \cdots + T_n \\ &\sim K_{P_{(T_1)}} + K_{P_{(T_2)}} + \cdots + K_{P_{(T_n)}} \\ &\sim K_{P_{x_1+x_2+\cdots+x_n}} \\ &\sim K_{P_{(T_M)}} \end{aligned}$$



Слика 3.11: Једнакоразложивост квадрата и једнакостраничног троугла.

3.18. Пример. Дати квадрат смо разложили на један троугао, и три четвороугла. Даље смо те делове ротацијом и транслацијом пресложили и добили смо једнакостранични троугао једнаке површине, као и почетни квадрат. Јасно је да ово није једини начин да квадрат разложимо и пресложимо у троугао.

Глава 4

Једнакоразложивост у простору

4.1. Дефиниција. *Полиедар је геометријско тело у* E^3 *простору ограничено многоугловима.*

4.2. Дефиниција. *Дужи којима су спојене две суседне стране полиедра називамо ивице полиедра, а тачке у којима се спајају суседне ивице су темена полиедра.*

4.3. Дефиниција.
Полиедарска декомпозиција полиедра A *је коначан скуп полиедара* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *чија је унија полиедар* A*, а пресек свака два мања полиедра јесте њихова заједничка страна.*

4.4. Дефиниција. *За полиедре* A *и* B *кажемо да су једнакоразложиви ако постоји полиедарска декомпозиција* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *и* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *полиедара* A *и* B*, редом тако да је* A_i *подударно са* B_i *за свако* $1 \leq i \leq n$*. Укратко, два полиедра су једнакоразложива ако један од њих може да се растави и понови склопи у други. Једнакоразложивост обележаваћемо* $\sim$*, и пишемо* $A \sim A_1 + A_2 + \cdots + A_n$*.*

4.5. Пропозиција. *Ако су два полиедра једнакоразложива,* $A \sim B$*, тада они имају исту запремину,* $V(A) = V(B)$*.*

У равни смо показали да ако два полиедра имају једнаку површину, онда су они једнакоразложиви. У простору, ако посматрамо два полиедра која имају исту запремину неће важити да су они и једнакоразложиви, што ћемо показати у примеру. Да би то важило још један услов мора бити испуњен, Денова инваријанта им мора бити иста. Пре увођења Денове инваријанте, о којој ће касније бити речи, прво морамо увести неке основне појмове теорије (Абелових) група.

4.1 Основни појмови теорије група

4.6. Дефиниција. *Група G је непразан скуп, са бинарном операцијом $\cdot$, и неутралним елементом e, где важе следећи услови:*
1) *За свако $f, g \in G$ важи $f \cdot g \in G$;*
2) *За свако $f, g, h \in G$ важи $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$;*
3) *Постоји $e \in G$ тако да за свако $g \in G$ важи $g \cdot e = e \cdot g = g$ (e се назива неутрални елемент);*
4) *За свако $g \in G$ постоји $g^{-1} \in G$, тако да важи $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ (g^{-1} се назива инверз елемента g).*

4.7. Дефиниција. *Група G је Абелова група, ако је бинарна операција $\cdot$ комутативна, тј. ако за свако $f, g \in G$ важи $f \cdot g = g \cdot f$.*

4.8. Дефиниција. *Нека је G група са неутралним елементом e, и операцијом $\cdot$. Нека је H група са неутралним елементом e' и операцијом $*$. Хомоморфизам $\Psi : (G, \cdot, e) \longrightarrow (H, *, e')$ је функција у којој за свако $f, g \in G$ важи*

$$\Psi(f \cdot g) = \Psi(f) * \Psi(g).$$

4.9. Дефиниција. *Нека је H непразан подскуп групе $(G, \cdot)$. Тада H чини подгрупу групе G ако и само ако важе следећи услови:*
1) *За свако $f, g \in H$ важи $f \cdot g \in H$;*
2) *$e \in H$;*
3) *За свако $f \in H$ постоји $f^{-1} \in H$.*

4.10. Дефиниција. *Нека је H подгрупа групе G. Нека је $g \in G$. Скуп $\{gh \mid h \in H\}$, означавамо са gH и зовемо леви косет, а скуп $\{hg \mid h \in H\}$, означавамо са Hg и зовемо десни косет.*

4.11. Дефиниција. *Нека је N подгрупа групе G. Ако за свако $g \in G$ важи $gNg^{-1} = N$ (тј. $gN = Ng$, сваки леви косет, поклапа се са одговарајућим десним косетом) онда кажемо да је N нормална подгрупа групе G.*

4.12. Дефиниција. *Нека је G група и N њена нормална подгрупа. Количничком групом називамо групу чији су елементи леви косети (или десни косети) подгрупе N. Количничку групу обележавамо G/N.*

4.13. Дефиниција. *Група G/N биће дефинисана на скупу косета $Ng : g \in G$ подгрупе N тако што за $a, b \in G$ дефинишемо $Na \cdot Nb = Nab$*

4.2 Тензорски производ

4.14. Дефиниција. *Нека су G и H Абелове групе. Дефинишимо тензорски производ на G и H, у ознаци $G \otimes H$, на следећи начин:*

$$G \otimes H := \{\sum a_i(g_i \otimes h_i) \mid g_i \in G, h_i \in H, a_i \in \mathbb{Z}\},$$

за који важе следеће особине:

1) $a_1(g \otimes h) + a_2(g \otimes h) = (a_1 + a_2)(g \otimes h)$;
2) $(g_1 + g_2) \otimes h = (g_1 \otimes h) + (g_2 \otimes h)$;
3) $g \otimes (h_1 + h_2) = (g \otimes h_1) + (g \otimes h_2)$.

Посматрајмо количничку групу $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ са операцијом $+$ и неутралним елементом 0.

4.15. Дефиниција. Денова инваријанта

За ивицу a полиедра P, нека $l(a)$ означава дужину ивице a, а $\theta(a)$ угао диедра у полиедру P са ивицом a. Тада Денова инваријанта $\delta(P)$ полиедра P јесте

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^{n} l(a_i) \otimes (\theta(a_i) + \pi\mathbb{Q}) \in \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}), \text{ где је } n \text{ број ивица.}$$

Симбол $\otimes$ чува $\delta(P)$ да се не промени приликом сечења дуж ивице или дуж диедра, тј. $\delta(P)$ је инваријанта једнакоразложивости (раставне конгруенције). Сада можемо формулисати и доказати следећу теорему.

4.16. Теорема. *Ако су полиедри A и B једнакоразложиви, онда је $V(A) = V(B)$ и $\delta(A) = \delta(B)$.*

Доказ. Лако доказујемо случај, ако су два полиедра једнакоразложива, онда они имају једнаку запремину. Посматрајмо полиедре A и B и њихово разлагање $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$, где за свако i важи $A_i \cong B_i$. Узмимо у обзир разлагање полиедра A и B и њихов утицај на Денову инваријанту. Желимо да покажемо, ако је полиедар A разложен на два мања полиедра A_1 и A_2, тада је $\delta(A) = \delta(A_1) + \delta(A_2)$.
Полиедре можемо сећи дуж ивице a, тако да диедри остају очувани, тада важи $l(a) = l(a_1) + l(a_2)$, где су a_1, a_2 дужине ивица полиедара A_1, A_2 добијене сечењем ивице A. Користећи релацију еквиваленције тензорског производа имамо следеће

$$\begin{aligned} & l(a) \otimes \theta(a) = [l(a_1) + l(a_2)] \otimes \theta(a) \\ \Rightarrow \quad & l(a) \otimes \theta(a) = [l(a_1) \otimes \theta(a)] + [l(a_2) \otimes \theta(a)], \end{aligned}$$

и видимо да то не утиче на Денову инваријанту.

Ако полиедре сечемо дуж диедра θ, тада ивица остаје непромењена и важи $\theta(a) = \theta(a_1) + \theta(a_2)$. На основу претходног и овде закључујемо да тензорски производ не утиче на Денову инваријанту и важи следеће

$$\begin{aligned} & l(a_1) \otimes \theta(a_1) + l(a_2) \otimes \theta(a_2) \ , \ l(a_1) = l(a_2) \\ & = l(a_1) \otimes [\theta(a_1) + \theta(a_2)] \\ & = l(a_1) \otimes \theta(a), \end{aligned}$$

тј. Денова инваријанта се не мења.

Према томе можемо приметити, приликом разлагања A и B имамо:

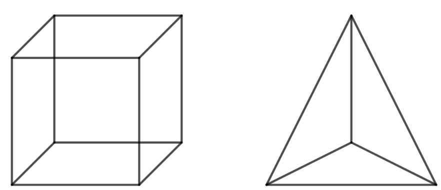
$$\begin{aligned}\delta(A) &= \delta(A_1) + \delta(A_2) + \cdots + \delta(A_n)\\ &= \delta(B_1) + \delta(B_2) + \ldots \delta(B_n)\\ &= \delta(B),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Ова теорема нам дозвољава да дамо негативан одговор на трећи Хилбертов проблем, што ћемо презентовати у наставку, у одељку Деново решење.
Вратимо се Трећем Хилбертовом проблему који је гласио ,, Да ли су полиедри једнаке запремине у E^3 једнаkoразложиви?" Хилберт је јасно ставио до знања да очекује негативан одговор на ово питање, што је пар година касније, као што смо већ споменули, *Max Dehn* и доказао. Показаћемо како је Ден посматрајући правилан тетраедар и коцку дао негативан одговор на трећи Хилбертов проблем.

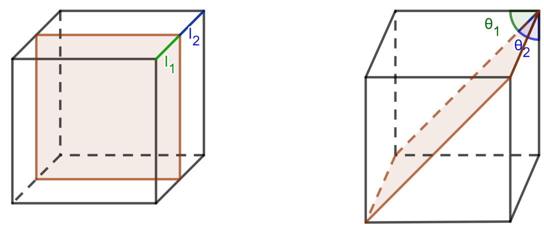
4.3 Деново решење

Ден је показао да коцка и правилан тетраедар, који имају исту запремину, нису једнакоразложиви.



Слика 4.1: Коцка и тетраедар.

Покушавао је на два начина да исече коцку и преслoжи у тетраедар. Један од начина био је да коцку сече вертикално и тада ивицу подели на два или више делова, тако да диедри очувају своју меру, или да сече диедре, тако да дужина ивице остане непромењена. Са l обележимо дужину странице коцке, а са θ угао диедра.



Слика 4.2: Подела коцке.

Дакле, ако би секли вертикално добили би

$$(l_1, \theta),\ (l_2, \theta),\ l_1 + l_2 = l,$$

а ако би секли по ивици и разлагали диедре добили би

$$(l, \theta_1),\ (l, \theta_2),\ \theta_1 + \theta_2 = \theta.$$

Када бисмо коцку на један или други начин разложили на коначан број делова које можемо сабрати долазимо до следеће суме

$$\sum_i l(a_i) \otimes (\theta(a_i) + \pi\mathbb{Q}) \in \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}),\ i = 1, 2 \dots n$$

Пре него наставимо да образлажемо Деново решење, наведимо нека правила.

4.17. Лема. *За* $a_i,\ b_i \in \mathbb{R}$ *важи:*

1. $a \otimes b \sim a \otimes (b + 2\pi)$;
2. $(a_1 \otimes b + a_2 \otimes b) = (a_1 + a_2) \otimes b$;
3. $(a \otimes b_1 + a \otimes b_2) = a \otimes (b_1 + b_2)$.

На основу ових правила можемо закључити да како год исечемо коцку или било који други објекат њихова запремина неће се променити.

4.18. Дефиниција. *Инваријанта је својство које поседује класа математичких објеката које остаје непромењено када се на објекте примене трансформације одређеног типа.*

Запремина је инваријанта једнакоразложивости, тј. два објекта која јесу једнакоразложива имају исту запремину.

Приказаћемо у пар корака како је Ден показао да правилан тетраедар и коцка, који имају исту запремину, нису једнакоразложиви.

4.19. Лема. *У $\delta(P)$ диедри који садрже број π као резултат дају* 0.

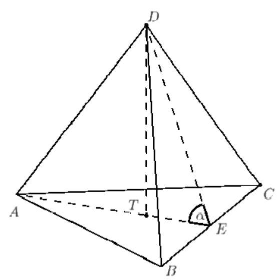
Израчунаћемо Денову инваријанту за коцку запремине 1. Јасно је, да је страница коцке димензије 1.

$$\delta\ (\text{коцке}) = 12 \times 1 \otimes (\frac{\pi}{2}) = 6 \otimes \pi = 6 \otimes 0 = 0.$$

Даље нас занима, колико износи Денова инваријанта за правилан тетраедар запремине 1, где је дужина свих страница неки позитиван број a, и сви диедри имају угао θ. Посматрајмо правилан тетраедар и израчунајмо његове диедарске углове. Посматраћемо троугао ABC у основи тетраедра и уочимо тежиште тог троугла T (слика 4.3). Како је у питању правилан тетраедар DT је висина посматраног тетраедра. Из особине тежишта ми знамо да тачка T дели AE у односу $2:1$. Како је $|AE| = |DE|$, добијамо

$$\cos\alpha = \tfrac{|TE|}{|DE|} = \tfrac{\frac{1}{3}|AE|}{|DE|} = \tfrac{1}{3},$$

тада да $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Одакле нам следи да је $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$.



Слика 4.3: Диедарски угао правилног тетраедра.

Даље нас занима да ли је $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ рационални умножак броја π. Одговор на то питање даје нам следећа лема.

4.20. Лема. *Израз $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{n}\right)$ је ирационалан број за свако $n \geqslant 3$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да је израз $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{n}\right)$ неки рационалан број. Користићемо краћи запис, $\arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \phi$. Сада можемо записати $\frac{\phi}{\pi} = \frac{l}{k}$ где су l и k природни бројеви. Из последње једнакости следи да је $\phi k = \pi l$, што даље имплицира $\cos(k\phi) = \pm 1$, тј. $\cos(k\phi)$ је неки цео број.
Показаћемо да ова претпоставка води контрадикцији, тј. показаћемо да $\cos(k\phi)$ не може бити цео број за било које $k = 1, 2, \ldots$
Кренимо од адиционе формуле за трансформацију збира косинуса у производ косинуса.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$

За $\alpha = (k+1)\phi$ и $\beta = (k-1)\phi$ имамо следеће

$$\cos(k+1)\phi + \cos(k-1)\phi = 2\cos(k\phi)\cos(\phi),$$

што даље имплицира

$$\cos(k+1)\phi = \frac{2}{n}\cos(k\phi) - \cos(k-1)\phi. \qquad (*)$$

Знамо да је $\cos(\phi) = \frac{1}{n}$.
Даљи ток доказа зависи од парности броја n. Испитаћемо оба случаја, када је n паран број, и када је n непаран број.

Претпоставимо прво да је n неки непаран број. Показаћемо да $\cos(k\phi)$ можемо представити као разломак, чији је именилац n^k, а бројилац је једнак неком броју који је узајамно прост са n, ово даље имплицира да $\cos(k\phi)$ не може бити цео број за било које $k = 1, 2, \ldots$ До доказа долазимо математичком индукцијом.

1) Б: За $k = 1$ и $k = 2$ директно следи

$$\cos(\phi) = \frac{1}{n},\ \cos(2\phi) = 2\frac{1}{n}\cos(\phi) - \cos(0) = 2\cos^2\phi - 1 = \tfrac{2}{n^2} - 1 = \tfrac{2-n^2}{n^2}.$$

Како је n непаран број различит од 1, имамо да $\dfrac{1}{n}$ није цео број. n и 2 су узајамно прости, следи да су и $2 - n^2$ и n^2 узајамно прости.

2) И.Х.: Претпоставимо да наша претпоставка важи за све бројеве $k \geqslant 2$, па важи и за k, где долазимо до

$$\cos(k\phi) = \tfrac{a}{n^k},\ \cos(k-1)\phi = \tfrac{b}{n^{k-1}}.$$

где су a и b цели бројеви, узајамно прости са n.

3) И.К.: Покажимо да тврђење важи за $k+1$.
Из * имамо следеће

$$\cos(k+1)\phi = \tfrac{2}{n}\tfrac{a}{n^k} - \tfrac{b}{n^{k-1}} = \tfrac{2a-bn^2}{n^{k+1}}.$$

Даље, како су бројеви 2 и a узајамно прости са n, јасно је да су и бројеви $2a$ и n узајамно прости, исто, b и n су узајамно прости, па самим тим бројилац $2a - bn^2$ је узајамно прост са n. Овим смо доказали да $\cos(k\phi)$ не може бити цео број ако је n непаран број.

Погледајмо шта се дешава ако је n паран број.
Нека је n паран број, тада важи $n = 2m$, где је m је цео број, $m \geqslant 2$. Тада $\cos(k\phi)$ представљамо као разломак чији је именилац $(2m)^k$, а

бројилац је једнак неком броју који је узајамно прост броју m. Ово се доказује аналогном индукцијом као малопре.

1) Б: За $k=1$ и $k=2$ директно следи

$$\cos(\phi) = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m},$$

$$\cos(2\phi) = 2\frac{1}{n}\cos(\phi) - \cos(0) = 2\cos^2\phi - 1 = \tfrac{2}{n^2} - 1 = \tfrac{2-n^2}{n^2} = \frac{2-4m^2}{4m^2},$$

одакле следи да је $\cos(2\phi) = \frac{1-2m^2}{2m^2}$.

Како је $m \geqslant 2$ број $\dfrac{1}{2m}$, као и број $\frac{1-2m^2}{2m^2}$ није цео број. Изрази $1-2m^2$ и $2m^2$ су узајамно прости.

2) И.Х.: Претпоставимо да наша претпоставка важи за све бројеве $k \geqslant 2$, па важи и за k, где долазимо до

$$\cos(k\phi) = \tfrac{a}{(2m)^k},\ \cos(k-1)\phi = \tfrac{b}{(2m)^{k-1}},$$

где су a и b цели бројеви, узајамно прости са m.

3) И.К.: Покажимо да тврђење важи за $k+1$.
Из $(*)$ имамо следеће

$$\cos(k+1)\phi = \tfrac{2}{2m}\tfrac{a}{(2m)^k} - \tfrac{b}{(2m)^{k-1}} = \tfrac{2a-4m^2b}{(2m)^{k+1}},$$

$$\cos(k+1)\phi = \tfrac{2a-4m^2b}{(2m)^{k+1}}$$

Дакле, ни у овом случају не би добили да је $\cos(k\phi)$ цео број за било које $k = 1, 2 \ldots$

Самим тим ни $\arccos\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 3$ није рационалан број. □

Што нас доводи до тога да схватимо да је наша почетна претпоставка била погрешна, односно $\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ је ирационалан број за било које $n \geqslant 3$.

На основу свега овога можемо закључити да δ(тетреаедра) неће бити једнака 0, већ ће имати неку вредност

$$\delta\ (\text{тетреаедра}) = 6 \times a \otimes \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Када упоредимо δ (јединичне коцке) и δ (тетреаедра) добијамо следеће

$$\delta\ (\text{јединичне коцке}) = 0 \neq 6 \times a \otimes \arccos(\tfrac{1}{3}) = \delta\ (\text{тетреаедра})$$

Одакле нам следи да коцка и тетраедар једнаких запремина нису једнаковразложиви објекти.
Сидлер[1] је 1965. проширио Денов резултат, и доказао да сви полиедри који имају исту запремину и исту Денову инваријанту јесу једнакоразложиви, тј. можемо их разложити на коначан број делова и пресложити један у други.

4.21. Теорема. *(Ден - Сидлер) Нека су дати полиедри A и B који имају исту запремину. Тада важи,*

$$A \text{ и } B \text{ су једнакоразложиви акко је } \delta(A) = \delta(B).$$

Доказ ове теореме је доста сложен и излази ван оквира овог рада чији циљ је био да представимо Денов доказ.
Истраживање о једнакоразложивости врши се и у вишим димензијама, али ту је математика доста сложенија, стога то није обрађено у овом раду.

[1] Jean-Pierre Sydler (1921-1988) швајцарски математичар, познат по свом раду у геометрији, највише по трећем Хилбертовом проблему

Глава 5

Занимљивости

Идеја о једнакоразложивости долази од давнина, још од Еуклида[1].

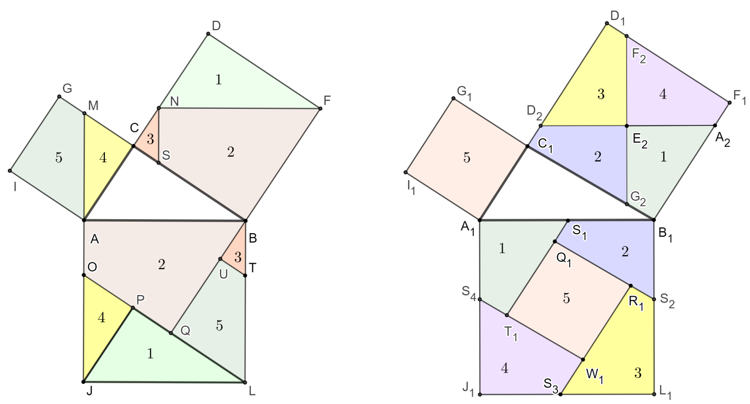
Једноставни метод разлагања и метод допуњавања многоуглова се користио још пре нове ере за доказивање неких основних теорема елементарне геометрије.
Илустроваћемо ове две методе на примеру Питагорине теореме која каже да је *површина квадрата над хипотенузом правоуглог троугла једнака збиру површина квадрата конструисаних над катетама истог троугла.*

Представимо прво доказ Питагорине теореме методом разлагања. Квадрати конструисани над страницама правоуглог троугла ABC разбијају се одговарајућим дужима на неки број многоуглова (слика 5.1), тако да се између многоуглова, на које је разложен квадрат над хипотенузом и уније свих многоуглова на које су разбијени квадрати над катетама троугла ABC, може успоставити бијекција одакле имамо да су одговарајући многоуглови подударни.

Продискутоваћемо први цртеж са слике. Посматрамо разнострани правоугли троугао ABC за који важи $|AC| < |BC| < |AB|$. Тачка M добијена је у пресеку полуправе $pp(J, A)$ са дужи $|CG|$. Тачку N добијамо у пресеку полуправе којој је почетак у тачки F, паралелна је страници $|AB|$, са дужи $|CD|$. Тачка O добијена је у пресеку дужи $|AJ|$ са полуправом која исходи из L и паралелна је катети $|BC|$. Даље, тачке P и Q добијају се у пресеку дужи $|LO|$ са правама које садрже редом тачке J и B и паралелне су катети $|AC|$. Тачка S се добија у пресеку дужи $|BC|$ са правом која пролази кроз тачку N и која је нормална на хипотенузу $|AB|$. Последње тачке које су нам потребне су тачке које се формирају редом на дужима $|BL|$ и $|BQ|$, означимо их са T и U. Тачка T добијена

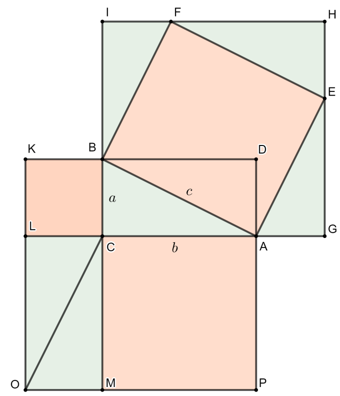
[1] Еуклид (око 300.п.н.е. - 4.век п.н.е.) из Александрије био је антички математичар познат по својим делима *Елементи*, *Дата*, *Оптика* и алгоритму за израчунавање највећег заједничког делиоца (НЗД) који је по њему назван Еуклидов алгоритам.

је тако што пренесемо дужину дужи $|NS|$ из темена B на страницу BL, а тачка U добијена је у пресеку полуправе, која исходи из темена T и паралелна је катети BC, са дужи $|BQ|$. Површина квадрата конструисаног над хипотенузом, следи нам из адитивности функције површине, једнака је збиру површина троуглова означених са $1, 3$ и 4, и четвороуглова означених са 2 и 5. На основу задатог разлагања, лако уочавамо да је површина квадрата над већом катетом BC, троугла ABC, једнака збиру површина троуглова 1 и 3, и четвороугла 2, као и да је површина квадрата над мањом катетом AC једнака збиру површина троугла 4 и четвороугла 5, одакле нам следи тврђење Питагорине теореме.



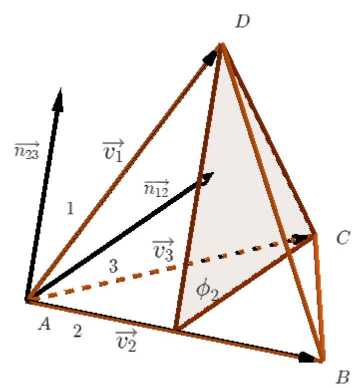
Слика 5.1: Докази Питагорине теореме методом разлагања - доказ који одговара првом цртежу потиче из 900. године н.е. од Анеризи-а, док доказ који одговара другом цртежу потиче од Перигала.

Исту теорему докажимо сада методом допуњавања. Означимо странице правоуглог троугла ABC са a, b, и c, тако да важи $a \leq b < c$ (слика 5.2). Допунимо квадрат $AEFB$ над хипотенузом правоуглог троугла ABC троугловима ABC, AEG, FEH и BFI који су међусобно подударни. Тако добијени квадрат $CGHI$ је странице дужине $a+b$. Допунимо сада унију квадрата над катетама троугловима ABC, BAD, CMO и COL до квадрата $PDKO$. Како је дужина странице и овог квадрата једнака $a+b$, тада су квадрати $CGHI$ и $PDKO$ подударни, те су им и површине једнаке. Последица овога је да је збир површина квадрата над катетама AC и BC једнака површини квадрата $PDKO$ умањеној за четвороструку вредност површине троугла ABC, што је једнако површини квадрата $CGHI$ умањеној исто за четвороструку вредност површине троугла ABC, тј једнака је површини квадрата $AEFB$.



Слика 5.2: Доказ Питагорине теореме методом допуњавања.

Показаћемо још један интересантан доказ, како се преко аналитичке геометрије, долази до формуле помоћу које се израчунава угао диедра у тетраедру. Посматрајмо тетраедар са основом ABC и врхом у тачки D, $ABCD$.



Слика 5.3: Израчунавање диедра у правилном тетраедру.

Ради једноставнијег записа обележимо ивице AD, AB, и AC бројевима 1, 2 и 3 редом. Нека су $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_3}$ три јединична вектора, из темена A ка осталим теменима, који одговарају ивицама 1, 2 и 3. Посматрајмо једну од ивица, рецимо ивицу 2. Она је одређена двема равнима. Једна раван је одређена векторима $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$, тј. $\triangle ABD$, а друга раван одређена је векторима $\overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_3}$, тј. $\triangle ABC$. Унутрашњи нормални вектори на ове две равни израчунавају се на следећи начин:

$$\overrightarrow{n_{12}} = \frac{\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|} \text{ и } \overrightarrow{n_{23}} = \frac{\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}}{|\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}|}.$$

Ови нормални вектори образују угао ϕ_2 на слици 5, диедарски угао, у односу на ивицу 2, и израчунавамо га на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\cos(\phi_2) = &\quad -\overrightarrow{n_{12}}\cdot\overrightarrow{n_{23}}\\
= &\quad -\frac{(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot(\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3})}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}||\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}|}\\
= &\quad -\frac{(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2})(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3})-(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3})|\overrightarrow{v_2}|^2}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}||\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}|}\\
= &\quad \frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3}-(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2})(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3})}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}||\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}|}.
\end{aligned}$$

Обележимо са θ_{ij} угао између ивица i и j. Можемо поједноставити последњу једнакост, и тиме добијамо инверзну косинусну формулу за израчунавање диедра у тетраедру

$$\cos(\phi_2) = \frac{\cos(\theta_{13})-\cos(\theta_{12})\cos(\theta_{23})}{\sin(\theta_{12})\sin(\theta_{23})},$$

тј.

$$\phi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\cos(\theta_{13})-\cos(\theta_{12})\cos(\theta_{23})}{\sin(\theta_{12})\sin(\theta_{23})}\right).$$

Како посматрамо правилан тетраедар имамо да је $\theta_{12}=\theta_{13}=\theta_{23}=60^\circ$ одакле следи

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \cos^{-1}\left(\frac{\cos(60^\circ)-\cos(60^\circ)\cos(60^\circ)}{\sin(60^\circ)\sin(60^\circ)}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

С обзиром да угао ϕ_2 одговара горе поменутом углу θ, добили смо да је угао $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Литература

[1] *Abhijit Champanerka*, Scissors Congruence & Hilbert's 3rd Problem, College of Staten Island CUNY, CSI Math Club CUNY, April 14th 2010

[2] *Хилбертови проблеми и логика*, Ж. Мијајловић, З. Марковић, К. Дошен, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд

[3] R. Fitzpatrick (editor), *Euclid's Elements of Geometry*, 2008

[4] *100 различитих доказа Питагорине теореме*, Марковић Г. Ђоко, Универзитет у Црној Гори стр [2-16]

[5] Комбинаторна геометрија, Олга Бодрожа-Пантић, Универзитет у Новом Саду-Природно математички факултет

[6] Радојка Цигановић Мастер рад

[7] *Scissors congruence, Maeve Coates Welsh* [стране 4 - 7]

[8] Предавања из теорије бројева, Игор Долинка, Универзитет у Новом Саду-Природно математички факултет

[9] Hilbert's Third Problem, Vladimir G. Boltianskii Translated by Richard A. Silverman and introduced by Albert B. J. Novikoff,

[10] Boltianski, V. G. (1979). Hilbert's third problem. Bull. Amer. Math. Soc, 1, 646-650.

[11] Bilimovic A. (1957). Еуклидови елементи.

[12] *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Hilbert.html*

[13] *https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/hilbert/problems.html*

[14] *Hilbert: Mathematical problems* 1902., preuzeto sa sajta $https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183417035$

[15] $http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/Bolyai.shtml$

[16] $http://poincare.matf.bg.ac.rs/nastavno/zlucic/l$

[17] $https://www.youtube.com/watch?v = eYfpSAxGakI$

[18] $https : //math.stackexchange.com/questions/314970/dihedral - angles - between - tetrahedron - faces - from - triangles - angles - at - the - tip$

Биографија

Рођена сам 21.06.1991. године у Оџацима. Основну школу ,,Бора Станковић" похађала сам у Каравукову, и завршила је 2006. године као носилац Вукове дипломе. Исте године уписала сам средњу медицинску школу ,,Др Ружица Рип" у Сомбору, смер фармацеутски техничар. Средњу школу сам завршила са одличним успехом 2010. године.

Након паузе од годину дана, 2011. године, уписујем Природно-математички фалултет у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике. Основне академске студије сам завршила 2017. и исте године уписујем мастер студије математике у Београду, смер Теоријска математика и примене.

Нови Сад, јун 2020.

Маја Алексић