УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Душица Браловић

ХАРМОНИЈСКЕ МЕРЕ

мастер рад

Београд, 2020.

Ментор:

доц. др Бобан Карапетровић

Чланови комисије:

доц. др Миљан Кнежевић

доц. др Владимир Божин

Датум одбране: 14.09.2020.

Садржај

Ознаке

- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x+iy) = x$ - реалан део комплексног броја $z = x+iy \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x+iy) = y$ - имагинаран део комплексног броја $z = x+iy \in \mathbb{C}$
- $\arg z$ - аргумент комплексног броја $z \in \mathbb{C}$
- $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ - отворен диск са центром у $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника $r > 0$
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ - јединични диск за центром у координатном почетку
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ - јединична кружица
- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ - горња полураван комплексне равни
- $-i\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ - десна полураван комплексне равни
- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - Риманова сфера
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ област у комплексној равни - непразан, отворен и повезан скуп
- $\overline{\Omega}$ - затворење области Ω у $\overline{\mathbb{C}}$
- $\partial\Omega$ - граница области Ω у $\overline{\mathbb{C}}$
- $\operatorname{length} \gamma$ - еуклидска дужина лука криве γ
- $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{z_1, z_2 \in E} |z_1 - z_2|$ - дијаметар области скупа $E \subset \mathbb{C}$
- $\|f\|_\infty$ - есенцијалан супремум функције f на области дефинисаности функције

Увод

Хармонијске мере представљају један од најважнијих концепата у теорији хармонијских функција које произилазе из решења Дирихлеовог[1] проблема. Ако је Ω област у комплексној равни и $E \subset \partial\Omega$, хармонијска мера $\omega(\cdot, E, \Omega)$ је решење Дирихлеовог проблема са граничним условом $\varphi = \mathbf{1}_E$.

Назив *хармонијска мера* први пут је представио Ролф Неванлина[2] 1928. године за дводимензионе области, мада су се одговарајући концепти јављали и раније.

Хармонијска мера $\omega(\cdot, E, \partial\Omega)$, за неки фиксиран скуп $E \subset \partial\Omega$, представља хармонијску функцију на Ω. Основна својства хармонијских и субхармонијских функција описана су у првој глави.

У другој глави дефинишемо хармонијске мере на горњој полуравни и на диску, а потом уз помоћ Риманове[3] и Каратеодоријеве[4] теореме дефиницију продужавамо на Жорданове[5] просто повезане области.

Након тога, у трећој глави, приказан је доказ Хејман[6]-Вуове теореме као илустрација директне примене хармонијских мера.

Потом се обрађују основни концепти теорије потенцијала који су уско повезани са хармонијским мерама, као што су потенцијал, Гринова[7] функција и капацитет.

У петој глави, помоћу теорије хармонијских мера, доказана је теорема која се односи на карактеризацију припадности конформних пресликавања класи Хардијевих[8] простора H^p.

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet(1805-1859)- немачки математичар
[2] Rolf Nevanlinna (1895-1980)- фински математичар
[3] Georg Fridrih Bernhard Riman(1826-1866)- немачки математичар
[4] Constantin Carathéodory(1873-1950)- грчки математичар
[5] Camille Jordan(1838-1922)- француски математичар
[6] Walter Kurt Hayman(1926-1920)- енглески математичар
[7] Goerge Green(1793-1841)- енглески математичар
[8] Godfrey Harold Hardy(1877-1947)- енглески математичар

Глава 1

Хармонијске и субхармонијске функције

1.1 Дефиниције и основна својства

Дефиниција 1.1 Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област. Непрекидна функција $u : \Omega \to \mathbb{R}$ је хармонијска ако за свако $z \in \Omega$ постоји $r > 0$ тако да за све $0 \leqslant \rho < r$ важи

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta. \tag{1.1}$$

Дефиниција 1.2 Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област. Непрекидна функција $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ је субхармонијска ако за свако $z \in \Omega$ постоји $r > 0$ тако да за све $0 \leqslant \rho < r$ важи

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Особине: Нека су $u_1, u_2, u : \Omega \to \mathbb{R}$ функције дефинисане на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

(i) Ако су u_1, u_2 хармонијске функције и $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, тада је $a_1 u_1 + a_2 u_2$ хармонијска функција.

(ii) Ако су u_1, u_2 субхармонијске функције и $a_1, a_2 > 0$, тада је $a_1 u_1 + a_2 u_2$ субхармонијска функција.

(iii) Ако су u и $-u$ субхармонијске функције, онда је u хармонијска функција.

(iv) Ако је u хармонијска, тада је $|u|$ субхармонијска функција.

(v) Ако су u_1, u_2 субхармонијске функције, тада је функција дефинисана са $u = \max\{u_1, u_2\}$ субхармонијска.

Став 1.1 Нека је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна на Ω, тада су функције $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ хармонијске, а функција $|f|$ субхармонијска.

Доказ. Нека је $z \in \Omega$ произвољно изабрано. Како је Ω област, постоји $r > 0$ тако да $D(z, r) \subset \Omega$. На основу Кошијеве[1] интегралне формуле важи

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

за $0 < \rho \leqslant r$. Након увођења смене $w = z + \rho e^{i\theta}$ добијамо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Како $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ су непрекидне и важи

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

и

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \operatorname{Im} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Дакле, функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ су хармонијске.

Функција $|f|$ је непрекидна и

$$\begin{aligned} |f|(z) = |f(z)| &= \Big| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} |f(z + \rho e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} |f|(z + \rho e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Одакле закључујемо да је функција $|f|$ субхармонијска на Ω. ■

Теорема 1.2 (Принцип максимума) Нека је u субхармонијска функција у Ω, тако да $u(z_0) = \max\limits_{z \in \Omega} u(z)$ за неко $z_0 \in \Omega$. Тада је u константна на Ω.

Доказ. Нека је $E = \{z \in \Omega : u(z) = u(z_0)\} = u^{-1}\Big(\{u(z_0)\}\Big)$.

- E је непразан јер $z_0 \in E$.
- E је затворен, јер је функција u непрекидна и E се може представити као инверзна слика затвореног скупа.

[1] Augustin Louis Cauchy(1789-1857) - француски математичар

- E је отворен:

  Нека је $z_1 \in E$ произвољно одабрано. Како је u субхармонијска у Ω, постоји $r > 0$ тако да важи

$$u(z_1) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_1 + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

  за све $0 \leqslant \rho < r$. Односно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_1) - u(z_1 + \rho e^{i\theta})) d\theta \leqslant 0,$$

  за све $0 \leqslant \rho < r$, а како је функција $u(z_1) - u(z_1 + \rho e^{i\theta}) \geqslant 0$ јер је $z_1 \in E$ и непрекидна као композиција таквих, важи да је

$$u(z_1) = u(z_1 + \rho e^{i\theta})$$

  за све $0 \leqslant \rho < r$ и $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Односно, $D(z_0, r) \subset E$.

Како је E непразан, затворен и отворен подскуп од повезаног скупа Ω, то је $E = \Omega$. На основу дефиниције скупа E, функција $u(z) = u(z_0)$ за свако $z \in \Omega$, тј. u је константна. ■

Последица 1.3 Нека је u неконстантна субхармонијска функција у ограниченој области Ω и непрекидна на $\overline{\Omega}$. Тада

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} u(z) = \max_{z \in \partial\Omega} u(z).$$

Доказ. Како је Ω ограничена област, скуп $\overline{\Omega}$ је компактан, па се $\max_{\overline{\Omega}} u$ достиже у некој тачки $z_0 \in \overline{\Omega}$.

На основу Принципа максимума, видимо да $z_0 \notin \Omega$, иначе је функција u константна. Дакле, $z_0 \in \partial\Omega$. ■

Лема 1.1 Нека је u субхармонијска функција у Ω и φ растућа и конвексна на $[-\infty, +\infty)$ таква да је непрекидна у $-\infty$. Тада је $\varphi \circ u$ субхармонијска функција у Ω.

Доказ. Најпре, $\varphi \circ u$ је непрекидно на Ω, јер је функција φ непрекидна због конвексности.

Нека је $z \in \Omega$ произвољно одабрано. Како је функција u субхармонијска, постоји $r > 0$ тако да

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

за све $0 \leqslant \rho < r$. Користећи претпоставку да је функција φ растућа и Јенсенову[2] неједнакост за конвексне функције налазимо

$$\varphi(u(z)) \leqslant \varphi\Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta\Big) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u(z + \rho e^{i\theta})) d\theta,$$

[2]Johan Jensen(1859-1925) - дански математичар

за све $0 \leqslant \rho < r$. Како је $z \in \Omega$ произвољно изабрано, видимо да је функција $\varphi \circ u$ субхармонијска у Ω. ∎

Последица 1.4 Нека је f холоморфна функција у Ω и $0 < p < +\infty$. Тада је $|f|^p$ субхармонијска функција у Ω.

Доказ. На основу Става 1.1 и Леме 1.1 функција $\log|f|$ је субхармонијска у Ω. Применом својства (ii) таква је и функција $p\log|f|$.

Како је експоненцијална функција растућа и конвексна на $[-\infty, +\infty)$, непрекидна у $-\infty$, на основу претходне леме функција

$$|f|^p = e^{p\log|f|}$$

је субхармонијска у Ω. ∎

1.2 Шварцова теорема и последице

Теорема 1.5 (Шварцова теорема[3]) Нека је $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} g(e^{i\theta})d\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тада је функција u хармонијска у $\mathbb{D}$ и важи

$$\lim_{z\to a} u(z) = g(a),$$

за све $a \in \mathbb{T}$.

Доказ. Нека је

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} g(e^{i\theta})d\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Докажимо да је функција G холоморфна у $\mathbb{D}$.

Пре свега, приметимо да је G добро дефинисана функција на $\mathbb{D}$, јер интеграл којим је функција задата постоји и коначан је као интеграл непрекидне функције на $[0, 2\pi]$. Важи

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} = 1 + \frac{2e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\theta}z^n,$$

где ред представља Тејлоров[4] развој. Овај ред равномерно конвергира на компактима, па можемо заменити интеграл и суму. Дакле,

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})d\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}g(e^{i\theta})d\theta\Big)z^n.$$

[3]Hermann Schwartz(1843-1921) - немачки математичар

[4]Brook Taylor(1685-1731) - енглески математичар

Како је $G(z)$ представљено конвергентим степеним редом у $\mathbb{D}$, функција G је холоморфна у $\mathbb{D}$ и важи

$$\operatorname{Re}\Big(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{(e^{i\theta}+z)(e^{-i\theta}-\overline{z})}{|e^{i\theta}-z|^2}\Big) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}.$$

Дакле, функција $u = \operatorname{Re} G$ је храмонијска у $\mathbb{D}$, на основу Става 1.1. Осим тога, ако је $g = \mathbf{1}_{\mathbb{T}}$ на $\mathbb{T}$, тада је и $G = \mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{D}$. Специјално, $u = \mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{D}$.

Нека су $a = e^{i\alpha} \in \mathbb{T}$ и $\varepsilon > 0$ произвољно одабрани. Како је g непрекидна, постоји $\delta > 0$ тако да за све θ који задовољавају $|\theta - \alpha| < \delta$ важи $|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\alpha})| < \varepsilon$. Означимо са I_δ скуп $\{\theta \in \mathbb{R} : |\theta - \alpha| < \delta\}$. Тада

$$\begin{aligned}
|u(z) - g(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} g(e^{i\theta})d\theta - \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} d\theta\Big) g(e^{i\alpha}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \Big(g(e^{i\theta}) - g(e^{i\alpha})\Big) d\theta \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \Big|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\alpha})\Big| d\theta \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_\delta} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \Big|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\alpha})\Big| d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,2\pi]\setminus I_\delta} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \Big|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\alpha})\Big| d\theta \\
&\leqslant \varepsilon \frac{1}{2\pi}\int\limits_{I_\delta} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} d\theta \\
&\quad + \sup_{\theta\in[0,2\pi]\setminus I_\delta} \Big(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\Big) \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,2\pi]\setminus I_\delta} \Big|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\alpha})\Big| d\theta \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

јер када $z \to e^{i\alpha}$ следи $\sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]\setminus I_\delta} \Big(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\Big) \to 0$, па за z довољно близу тачке a неједнакост важи. Односно, $\lim\limits_{z\to a} u(z) = g(a)$. ∎

Последица 1.6 Ако је u хармонијска функција у $\mathbb{D}$, непрекидна у $\overline{\mathbb{D}}$, тада је за све $z \in \mathbb{D}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} u(e^{i\theta})d\theta.$$

Доказ. Означимо са

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} u(e^{i\theta})d\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

На основу претходне теореме, U је хармонијска на $\mathbb{D}$ и може се непрекидно са $U(z) = u(z)$ дефинисати на $\mathbb{T}$.

Па применом Принципа максимума на функције $u - U$ и $U - u$, видимо да је $u - U = 0$ на $\overline{\mathbb{D}}$, односно $u = U$ на $\mathbb{D}$. ∎

Теорема 1.7 Нека је u хармонијска функција у $\mathbb{D}$, непрекидна у $\overline{\mathbb{D}}$. Тада је функција f, дефинисана са

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} u(e^{i\theta})d\theta,$$

за све $z \in \mathbb{D}$, јединствена холоморфна функција за коју важи $\operatorname{Re} f = u$ и $\operatorname{Im} f(0) = 0$.

Доказ. На основу претходне последице и доказа Шварцове теореме, важи да је f холоморфна и $\operatorname{Re} f = u$. Поред тога

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta \in \mathbb{R}.$$

Дакле, $\operatorname{Im} f(0) = 0$.

Како бисмо доказали јединственост овакве функције, претпоставимо да постоји нека функција g тако да важе тражене особине. Тада је $f - g$ холоморфна у $\mathbb{D}$ и $\operatorname{Re}(f - g) = 0$. На основу теореме јединости за холоморфне функције $f - g$ је константна на $\mathbb{D}$ и то тако да $f(z) - g(z) = ic$ за све $z \in \mathbb{D}$. За $z = 0$ важи $ic = f(0) - g(0) = 0$, одакле $c = 0$, односно $f = g$ у $\overline{\mathbb{D}}$. ∎

Напомена 1.1 Шварцова теорема важи и под слабијим условима. Довољно је да функција $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ буде интеграбилна и непрекидна у тачки $a \in \mathbb{T}$.

Теорема 1.8 Нека је $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ интеграбилна функција и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T},$$

Кошијева трансформација функције f. Тада је F холоморфна у $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ и важи

$$\lim_{z\to\zeta}\left(F(z) - F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right) = f(\xi)$$

у тачкама $\zeta \in \mathbb{T}$ непрекидности функције f.

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ произвољно. Тада

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)\cdot h}{(\xi - z)^2(\xi - z - h)}d\xi.$$

Израз са десне стране једнакости тежи 0, када h тежи нули. Дакле,

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Односно, F је холоморфна у $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$.

Нека је f непрекидна у тачки $\zeta \in \mathbb{T}$. Функције $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ су интеграбилне и непрекидне у ζ.

$$\begin{aligned} F(z) - F\Big(\frac{1}{\overline{z}}\Big) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi) \Big(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - \frac{1}{\overline{z}}}\Big) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi) \frac{1 - |z|^2}{(\xi - z)(1 - \xi\overline{z})} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi) \frac{1 - |z|^2}{(\xi - z)(\overline{\xi} - \overline{z})} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi) \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta. \end{aligned}$$

Применом Шварцовове теореме на функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ и проласком лимеса $\lim\limits_{z \to \zeta}$ кроз једнакост добијамо

$$\lim_{z \to \zeta} \Big(F(z) - F\Big(\frac{1}{\overline{z}}\Big) \Big) = f(\zeta).$$

■

Лема 1.2 Нека је u хармонијска функција у Ω и $D(z, r) \subset \Omega$. Тада је

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

за све $0 \leqslant \rho < r$.

Доказ. Нека је $0 \leqslant \rho < r$ произвољно. Тада

$$\overline{D}(z, \rho) \subset D(z, r) \subset \Omega.$$

Функција u је хармонијска у $D(z, \rho)$ и непрекидна на $\overline{D}(z, \rho)$, а пресликавање $w \mapsto z + \rho w$ пресликава $\mathbb{D}$ на $D(z, \rho)$. Ако означимо са

$$\tilde{u}(w) = u(z + \rho w),$$

тада је $\tilde{u}$ хармонијска на $\mathbb{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$. На основу последице Шварцове теореме

$$\tilde{u}(w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} \tilde{u}(e^{i\theta}) d\theta, \quad \omega \in \mathbb{D},$$

када заменимо $\tilde{u}$ са u

$$u(z+\rho w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\theta}-w|^2} u(z+\rho e^{i\theta})d\theta, \quad \omega \in \mathbb{D}.$$

За $w = 0$ добијамо тражено. ■

Претходна лема нам говори да ако је u хармонијска функција у Ω и $z \in \Omega$ онда једнакост (1.1) важи за све $\rho > 0$ такве да $D(z,\rho) \subset \Omega$, што је општија тврдња од дефиниције. Слично важи и за субхармонијске функције.

Лема 1.3 Нека је u субхармонијска функција у Ω и $D(z,r) \subset \Omega$. Тада је

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta})d\theta,$$

за све $0 \leqslant \rho < r$.

Доказ. Нека је $0 \leqslant \rho < r$ произвољно. Тада

$$\overline{D}(z,\rho) \subset D(z,r) \subset \Omega.$$

Како је u субхармонијска у $D(z,\rho)$ и непрекидна на $\overline{D}(z,\rho)$, а пресликавање $w \mapsto z+\rho w$ пресликава $\mathbb{D}$ на $D(z,\rho)$ и ако означимо са

$$\tilde{u}(w) = u(z+\rho w),$$

тада је $\tilde{u}$ субхармонијска на $\mathbb{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$. Означимо са

$$U(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\theta}-w|^2}\tilde{u}(e^{i\theta})d\theta, \quad \omega \in \mathbb{D}.$$

Функција U је хармонијска у $\mathbb{D}$, непрекидна у $\overline{\mathbb{D}}$ и $U = \tilde{u}$ на $\mathbb{T}$. Тада је функција $\tilde{u} - U$ субхармонијска у $\mathbb{D}$ и непрекидна у $\overline{\mathbb{D}}$. На основу Принципа максимума

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}}(\tilde{u}-U) = \max_{\mathbb{T}}(\tilde{u}-U) = 0.$$

Дакле, $\tilde{u} \leqslant U$ у $\mathbb{D}$, односно

$$\tilde{u}(w) \leqslant U(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\theta}|^2}\tilde{u}(e^{i\theta})d\theta, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Када вратимо смену имамо

$$u(z+\rho w) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\theta}-w|^2}u(z+\rho e^{i\theta})d\theta, \quad w \in \mathbb{D}.$$

За $w = 0$

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

■

Теорема 1.9 Нека је u субхармонијска у $\mathbb{D}$ и

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta})d\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тада је v субхармонијска функција у $\mathbb{D}$.

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно. Постоји $r > 0$ тако да $D(z,r) \subset \mathbb{D}$. Нека је $0 \leqslant \rho < r$ произвољно. Применом Фубинијеве теореме и претходне леме на функцију u добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+\rho e^{it})dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u((z+\rho e^{it})e^{i\theta})d\theta dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u((ze^{\theta}+\rho e^{i(t+\theta)}))dtd\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\Big(\int_\theta^{2\pi} u(ze^{i\theta}+\rho e^{is})ds + \int_{2\pi}^{2\pi+\theta} u(ze^{i\theta}+\rho e^{is})ds\Big)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} u(ze^{i\theta}+\rho e^{is})dsd\theta\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta})d\theta = v(z).\end{aligned}$$

Дакле,

$$v(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+\rho e^{it})dt. \tag{1.2}$$

Функција u је непрекидна на $\mathbb{D}$, па је и равномерно непрекидна на компактима, односно

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} v(z+h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u((z+h)e^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{h\to 0} u((z+h)e^{i\theta})d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta})d\theta = v(z),\end{aligned}$$

односно, функција v је непрекидна у $\mathbb{D}$, а како важи и услов (1.2), функција v је субхармонијска у $\mathbb{D}$. ■

1.3 Принципи максимума

Принцип максимума тврди да ако је u субхармонијска неконстантна функција у области Ω, тада се не достиже максимум функције u у Ω. Док последица каже да ако је Ω ограничена област и u непрекидна у $\overline{\Omega}$, онда се максимум функције u достиже на рубу области.

Дакле, по принципу максимума, заправо $u(z)$ највеће вредности постиже када се z приближава граници области Ω и у овом случају подразумевамо да ако је Ω неограничена област, онда ∞ припада граници, иначе претходни закључак не би важио.

Другим речима,

$$\limsup_{z\to\partial\Omega} u(z) = \sup_{\Omega} u.$$

На овај начин добијамо још једну варијанту Принципа максимума за субхармонијске функције.

Теорема 1.10 (Принцип максимума) Ако је u субхармонијска функција у области Ω, тада је $\limsup\limits_{z\to\partial\Omega} u(z) = \sup\limits_{\Omega} u$.

Теорема 1.11 (Теорема о три кружнице) Нека је f холоморфна функција у прстену $A = \{z \in \mathbb{C} : r < z < R\}$, где су $r, R > 0$, и $m = \limsup\limits_{|z|\to r} |f(z)| < \infty$ и $M = \limsup\limits_{|z|\to R} |f(z)| < \infty$. Означимо са

$$c(z) = \frac{\log\frac{|z|}{r}}{\log\frac{R}{r}}, z \in A.$$

Тада важи

$$|f(z)| \leqslant M^{c(z)} m^{1-c(z)} \text{ за све } z \in A.$$

Доказ. Функција

$$c(z) = \frac{\log|z| - \log r}{\log R - \log r}$$

је субхармонијска у прстену A, јер је $\log|z|$ субхармонијска на тој области. Онда је и функција

$$g(z) = -\Big(c(z)\log M + (1-c(z))\log m\Big)$$

субхармонијска у прстену A. Осим тога, важи да је $g(z) = -\log m$ када је $|z| = r$ и $g(z) = -\log M$ када је $|z| = M$.

Означимо са $u(z)$ функцију $\log|f(z)| + g(z)$. Како је u збир две субхармонијске функције, то је u субхармонијска у прстену A.

Дакле, на основу Принципа максимума

$$\sup_{A} u = \limsup_{z\to\partial A} u(z) \leqslant 0.$$

Одакле је $u(z) \leqslant 0$ у A, када дејствујемо експоненцијалном функцијом добијамо да важи

$$|f(z)| \leqslant M^{c(z)} m^{1-c(z)} \quad \text{за све } z \in A.$$

■

Теорема 1.12 (Линделефов[5] Принцип максимума) Нека је u субхармонијска функција ограничена одозго у области Ω, F коначан прави подскуп од $\partial\Omega$, при чему важи

$$\limsup_{z\to\xi} u(z) \leqslant m \quad \text{за све } \xi \in \partial\Omega \setminus F.$$

Тада је

$$u(z) \leqslant m \quad \text{за све } z \in \Omega.$$

Доказ. Нека је $F = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\} \subsetneq \partial\Omega$.

1. Ако је Ω ограничена област, означимо са $d = \operatorname{diam}\Omega$ и $\varepsilon > 0$,

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{z-\xi_j}{d}\right|, \quad z \in \Omega.$$

Приметимо да $\log\left|\frac{z-\xi_j}{d}\right| < 0$ за све $j = 1, 2, ..., n$.

Тада је функција u_ε субхармонијска у области Ω и важи $u_\varepsilon(z) \leqslant u(z)$ када $z \in \Omega$ и $u_\varepsilon \to -\infty$ када $z \to \xi_j$ за $j = 1, 2, ..., n$.

На основу Принципа максимума за функцију u_ε и претходног важи

$$\sup_{\Omega} u_\varepsilon = \limsup_{z\to\partial\Omega} u_\varepsilon(z) \leqslant m.$$

Када пустимо да ε тежи нули, добијамо да $u(z) \leqslant m$ у Ω.

2. Ако је Ω неограничена област, односно $\infty \in \partial\Omega$, без умањења општости можемо претпоставити да је $\xi_j \neq \infty$, за све $j = 1, 2, ..., n$, јер је у супротном довољно је направити композицију са одговарајућим билинеарним пресликавањем којим се то ξ_j слика у неки комплексан број.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Можемо одабрати R тако да важи

$$R > \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j| \quad \text{и} \quad u(z) \leqslant m + \varepsilon,$$

за све $z \in \Omega \cap \Big(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)\Big)$.

Област $\Omega \cap D(0, R)$ је ограничена па можемо применити случај **1.**, горе наведен, на функцију $u - \varepsilon$. Односно, важи да је $u - \varepsilon \leqslant m$ на Ω. Како ε може бити произвољно мало, добијамо $u \leqslant m$ на Ω.

■

Теорема 1.13 (Теорема о три праве) Нека је u субхармонијска функција, ограничена одозго у траци $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Означимо са

$$m_0 = \limsup_{\operatorname{Re} z\to 0} u(z) \quad \text{и} \quad m_1 = \limsup_{\operatorname{Re} z\to 1} u(z).$$

Тада важи да је

$$u(z) \leqslant m_1 \operatorname{Re} z + m_0(1 - \operatorname{Re} z).$$

[5]Ernst Leonard Lindelöf(1870-1946) - фински математичар

Доказ. Функција
$$v(z) = u(z) - \Big(m_1 \operatorname{Re} z + m_0(1 - \operatorname{Re} z)\Big)$$
је субхармонијска и ограничена одозго у S. За све $\xi \in \partial S \setminus \{\infty\}$ важи $\limsup\limits_{z\to\xi} v(z) \leqslant 0$. На основу Линделефовог принципа максимума добијамо да је $v(z) \leqslant 0$ за све $z \in S$, тј. $u(z) \leqslant m_1 \operatorname{Re} z + m_0(1 - \operatorname{Re} z)$.

■

Напомена 1.2 Приметимо да је за Теорему о три кружнице била довољна обична верзија Принципа максимума јер је област била ограничена. У случају Теореме о три праве неопходно је из границе ∂S избацити коначан скуп који садржи тачку $\{\infty\}$, јер када $z \to \infty$ у општем случају, да функција u није ограничена не би морало да важи $u(z) \leqslant m_1 \operatorname{Re} z + m_0(1 - \operatorname{Re} z)$, зато је неопходно додати и тај услов и применити Линделефов принцип.

Глава 2

Хармонијске мере

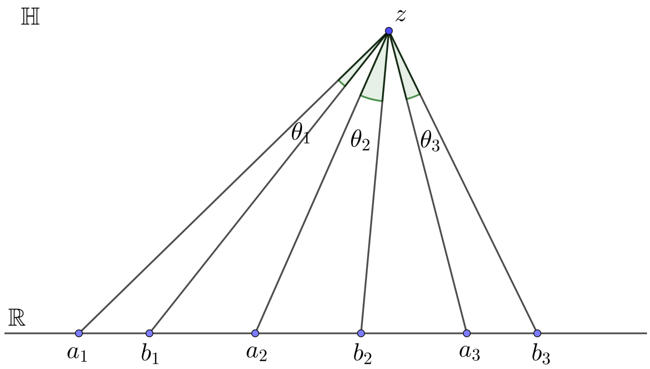
Нека су a и b реални бројеви тако да је $a < b$. Тада је

$$\theta = \theta(z) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \operatorname{Im}\left(\log\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\right),$$

хармонијска функција на $\mathbb{H}$. Функцију θ дефинишемо у тачкама $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ са

$$\theta(z) = \pi, \quad z \in (a, b) \quad \text{и} \quad \theta(z) = 0, \quad z \in \mathbb{R} \setminus [\,a, b\,].$$

Геометријски, $\theta = \operatorname{Re}\varphi$, где је φ конформно пресликавање области $\mathbb{H}$ у траку $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, тако да се интервал (a, b) слика у $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \pi\}$ и $\mathbb{R} \setminus [\,a, b]$ у $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$.



Слика 2.1

Дефиниција 2.1 Нека је $E \subset \mathbb{R}$ коначна унија отворених дисјунктних интервала, тј. $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ тако да је $b_{i-1} < a_i < b_i$. Означимо са $\theta_j = \theta_j(z) = \arg\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)$. Функцију

$$\omega(z, E, \mathbb{H}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j(z)}{\pi},$$

називамо хармонисјком мером скупа E у тачки z у $\mathbb{H}$.

Особине:

1. $0 < \omega(z, E, \mathbb{H}) < 1$ за $z \in \mathbb{H}$.

2. $\lim\limits_{z \to E} \omega(z, E, \mathbb{H}) = 1$.

3. $\lim\limits_{z \to \mathbb{R} \setminus E} \omega(z, E, \mathbb{H}) = 0$.

Став 2.1 Хармонијска функција ω са особинама 1., 2. и 3. јединствено је одређена.

Доказ. Нека је $\tilde{\omega}$ хармонијска функција у $\mathbb{H}$ таква да задовољава особине 1., 2. и 3. Тада је и функција $\omega - \tilde{\omega}$ хармонијска у $\mathbb{H}$.

Означимо са $F = \{a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{\infty\}$ коначан скуп. За све $\zeta \in \partial\mathbb{H} \setminus F$ важи

$$\lim_{z \to \zeta} \Big(\omega(z) - \tilde{\omega}(z)\Big) = \limsup_{z \to \zeta} \Big(\omega(z) - \tilde{\omega}(z)\Big) = 0.$$

На основу Линделефовог принципа, $\omega(z) - \tilde{w}(z) \leqslant 0$ за све $z \in \mathbb{H}$, тј. $\omega \leqslant \tilde{\omega}$ на $\mathbb{H}$. Аналогно, важи и $\tilde{\omega} \leqslant \omega$ на $\mathbb{H}$. Дакле, $\tilde{\omega} = \omega$ на $\mathbb{H}$. ■

Нека је Ω област и функција f непрекидна на $\partial\Omega$. Дирихлеов проблем за функцију f на области Ω јесте да се нађе непрекидна функција u у $\overline{\Omega}$, хармонијска у Ω и $u|_{\partial\Omega} = f$.

Теорема 2.2 (Дирихлеов проблем на горњој полуравни $\mathbb{H}$) Нека је функција f непрекидна на $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Тада постоји јединствена хармонијска функција u дефинисана на $\overline{\mathbb{H}}$ тако да је $u|_{\partial\mathbb{H}} = f$.

Доказ. Довољно је претпоставити да је функција f реално вредносна и $f(\infty) = 0$, иначе засебно посматрамо реалан и имагинаран део функције f транслиран за вредност $f(\infty)$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Изаберимо $I_j = (t_j, t_{j+1})$ дисјунктне интервале и $c_j \in \mathbb{R}$ за $j = 1, 2, .., n$ тако да функција $f_\varepsilon(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{I_j}$ задовољава

$$\|f_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Означимо са

$$u_\varepsilon(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \omega(z, I_j, \mathbb{H}).$$

Функција u_ε је хармонијска. Ако $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \partial I_j$, онда на основу 1. и 2. особине хармонијске мере важи

$$u_\varepsilon(t) = \lim_{\mathbb{H} \ni z \to t} u_\varepsilon(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{I_j}(t) = f_\varepsilon(t).$$

Приметимо да за $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \partial I_j$ на основу (2.1) следи

$$|u_{\varepsilon_1}(t) - u_{\varepsilon_2}(t)| = |f_{\varepsilon_1}(t) - f_{\varepsilon_2}(t)| \leqslant |f_{\varepsilon_1}(t) - f(t)| + |f(t) - f_{\varepsilon_2}(t)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

На основу Линделефовог принципа важи

$$\sup_{\mathbb{H}} |u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Кошијева теорема обезбеђује да наредни лимес постоји тачка по тачка

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) = u(z).$$

Тада је за свако $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\mathbb{H}} |u(z) - u_\varepsilon(z)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Закључуемо да је $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) = u(z)$ равномеран, одакле је функција u хармонијска на $\mathbb{H}$. Даље тврдимо да важи

$$\limsup_{z \to t} |u_\varepsilon(z) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2.2}$$

за све $t \in \mathbb{R}$. На основу претходног, јасно је да (2.2) важи за све $t \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n} \partial I_j$, како бисмо проверили да важи и за крајње тачке t_j, $j = 1, 2, ..., n$, приметимо да на основу Линделефовог принципа, 2. и 3. својства хармонијске мере важи:

$$\sup_{\mathbb{H}} \left| c_j \omega(z, I_j, \mathbb{H}) + c_{j+1} \omega(z, I_{j+1}, \mathbb{H}) - \left(\frac{c_j + c_{j+1}}{2} \omega(z, I_j \cup I_{j+1}, \mathbb{H}) \right) \right| \leqslant \left| \frac{c_j - c_{j+1}}{2} \right|,$$

док је

$$\lim_{z \to t_{j+1}} \left(\frac{c_j + c_{j+1}}{2} \right) \omega(z, I_j \cup I_{j+1}, \mathbb{H}) = \frac{c_j + c_{j+1}}{2}.$$

Како за све $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{z \to t_{j+1}} u_\varepsilon(z) \in [\, c_j, c_{j+1}] \,,$$

на основу (2.1) имамо

$$\limsup_{z \to t} |u_\varepsilon(z) - f(t)| \leqslant \varepsilon,$$

за све $t \in \mathbb{R}$.

Нека је $t \in \mathbb{R}$ произвољно, тада важи

$$\limsup_{z \to t} |u(z) - f(z)| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{H}} |u(z) - u_\varepsilon(z)| + \limsup_{z \to t} |u_\varepsilon(z) - f(t)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Исти зкључак важи када је $t = \infty$. Дакле, u можемо продужити непрекидно на $\overline{\mathbb{H}}$ тако да $u|_{\partial \mathbb{H}} = f$. Јединственост пресликавања u следи директном применом Линделефовог принципа. ■

За $a < b$, елементарни рачун нам даје

$$\omega(x + iy, (a, b), \mathbb{H}) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x - a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x - b}{y} \right) = \int\limits_a^b \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} \frac{dt}{\pi},$$

содакле имамо мотивацију за наредну дефиницију.

Дефиниција 2.2 Ако је $E \subset \mathbb{R}$ Лебег мерљив, дефинишемо хармонијску меру скупа E у тачки $z = x + iy \in \mathbb{H}$ са

$$\omega(x+iy, E, \mathbb{H}) = \int\limits_E \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\frac{dt}{\pi}. \tag{2.3}$$

Дефиниција 2.3 Функција

$$P_{\mathbb{H}}(z,t) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(t-x)^2+y^2},$$

где $z = x + iy \in \mathbb{H}$ и $t \in \mathbb{R}$, назива се Поасоновим[1] језгром на $\mathbb{H}$.

Решење Дирихлеовог проблема за функцију f непрекидну на $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ је функција

$$u_f(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) P_{\mathbb{H}}(z,t)dt.$$

Функцију u_f називамо и Поасоновим интегралом функције f.

Приметмо да је $\omega(z, E, \mathbb{H})$ решење Дирихлеовог проблема са граничном функцијом $f = \mathbf{1}_E$. Осим тога, хармонијска мера $\omega(z, E, \mathbb{H})$ је хармонијска функција по променљивој z и вероватносна мера по променљивој E.

Став 2.3 (Харнакова неједнакост) Ако $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ тада постоји нека реална константа $C > 0$ која зависи од z_1 и z_2, али не и од скупа E тако да је

$$0 < \frac{1}{C} \leqslant \frac{\omega(z_1, E, \mathbb{H})}{\omega(z_2, E, \mathbb{H})} \leqslant C < \infty.$$

Доказ. Нека је $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Како бисмо доказали ову неједнакост довољно је упоредити језгра $P_{\mathbb{H}}(z_1, t)$ и $P_{\mathbb{H}}(z_2, t)$. Циљ је да нађемо C тако да

$$\frac{1}{C}\frac{y_2}{(x_2-t)^2+y_2^2} \leqslant \frac{y_1}{(x_1-t)^2+y_1^2} \leqslant C\frac{y_2}{(x_2-t)^2+y_2^2}.$$

Довољно је

$$C \geqslant \max_{t\in\mathbb{R}}\left\{\frac{y_2}{y_1}\frac{(x_1-t)^2+y_1^2}{(x_2-t)^2}, \frac{y_1}{y_2}\frac{(x_2-t)^2+y_2^2}{(x_1-t)^2}\right\},$$

а максимум са десне стране неједнакости постоји и коначан је. Дакле, C постоји и не зависи од скупа E. ∎

Да би смо дефинисали хармонијску меру на произвољној просто повезаној области, пре свега потребно је дефинисати је на јединичном диску. У ту сврху искористићемо чињеницу да су јединични диск $\mathbb{D}$ и горња полураван $\mathbb{H}$ конформно еквивалентни.

[1] Siméon Poisson(1781-1840) - француски математичар

Дефиниција 2.4 Нека је $\mathbb{D}$ јединични диск и E коначна унија отворених лукова на $\partial\mathbb{D}$. Хармонијску меру скупа E у тачки z у $\mathbb{D}$ дефинишемо са

$$\omega(z, E, \mathbb{D}) = \omega(\varphi(z), \varphi(E), \mathbb{H}),$$

где је $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ конформно пресликавање.

Како би дефиниција била добра, потребно је доказати да хармонијска мера на диску не зависи од пресликавања φ.

Нека су φ и ψ нека два конформна пресликавања $\mathbb{D}$ на $\mathbb{H}$ и E произвољна коначна унија неких отворених лукова на $\partial\mathbb{D}$. Означимо са $F = \partial E$ и дефинишимо функцију

$$u(z) = \omega(\varphi(z), \varphi(E), \mathbb{H}) - \omega(\psi(z), \psi(E), \mathbb{H}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Функција u је хармонијска на $\mathbb{D}$ и за све $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus F$ важи

$$\lim_{z \to \zeta} u(z) = 0.$$

На основу Линделефовог принципа важи да је $u(z) \leqslant 0$ за све $z \in \mathbb{D}$. Аналогно, добијамо да је $-u(z) \leqslant 0$ за све $z \in \mathbb{D}$. Дакле, $u = 0$, односно дефиниција не зависи од избора конформног пресликавања.

Особине:

1. $0 < \omega(z, E, \mathbb{D}) < 1, \quad z \in \mathbb{D}$
2. $\omega(z, E, \mathbb{H}) \to 1, \quad z \to E$
3. $\omega(z, E, \mathbb{H}) \to 0, \quad z \to \mathbb{T} \setminus E.$

Сменом промењљивих у (2.3) са $\varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ добијамо

$$\omega(z, E, \mathbb{D}) = \int\limits_{\arg(E)} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

где је $\arg(E) = \{\theta \in [0, 2\pi) : e^{i\theta} \in E\}$. У даљем тексту, ради једноставнијих ознака, скуп $\arg(E)$ означаваћемо само са E. Функцију $P_{\mathbb{D}}(z, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ називамо Поасоновим језгром на $\mathbb{D}$.

Видели смо да на основу Шварцове теореме, за непрекидну функцију f на $\mathbb{T}$, функција

$$u_f(z) = \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

је хармонијска на $\mathbb{D}$ и $\lim\limits_{z\to a} u_f(z) = f(a)$ за све $a \in \mathbb{T}$. Функцију u_f називамо Поасоновим интегралом функције f на $\mathbb{D}$. Док функција

$$U(z) = \begin{cases} u_f(z), & z \in \mathbb{D} \\ f(z), & z \in \mathbb{T} \end{cases}$$

представља решење Дирихлеовог проблема за функцију f на $\mathbb{D}$.

Знамо да ће конформно пресликавање пресликати област у област, али остаје питање да ли се то пресликавање може продужити на границу области и да ли се њиме граница слика на границу. Наредна теорема управо то и тврди.

Теорема 2.4 (Каратеодоријева теорема) Нека је Ω просто повезана област у $\overline{\mathbb{C}}$ таква да је $\Gamma = \partial\Omega$ Жорданова крива у $\overline{\mathbb{C}}$ и нека је $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ конформно. Тада φ може непрекидно 1-1 да се продужи на $\overline{\mathbb{D}}$.

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да је Ω ограничена област у $\mathbb{C}$. Нека је $\zeta \in \mathbb{T}$ произвољно. Доказаћемо да φ може непрекидно да се продужи у ζ.

Нека је $0 < \delta < 1$, означимо са $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$, тада је $\varphi(\gamma_\delta)$ Жорданова крива, и са

$$L(\delta) = \int\limits_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| dS$$

дужину криве γ_δ. На основу Коши-Шварцове неједнакости важи

$$L(\delta)^2 \leqslant \int\limits_{\gamma_\delta} dS \int\limits_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 dS = \text{length}(\gamma_\delta) \cdot \int\limits_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 dS,$$

односно

$$\frac{1}{\delta} L(\delta)^2 \leqslant \pi \int\limits_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 dS.$$

Када кроз претходну неједнакост прођемо са $\int\limits_0^\rho d\delta$, где $\rho < 1$, добијамо

$$\int\limits_0^\rho \frac{L(\delta)^2}{\delta} d\delta \leqslant \pi \int\limits_0^\rho \int\limits_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 dS d\delta = \pi \iint\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\delta)} |\varphi'(z)|^2 dx dy$$
$$= \pi \cdot \text{area}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty,$$

јер је Ω ограничена област.

Ако узмемо низ δ_n тако да $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$, тада је $\lim\limits_{n\to+\infty} L(\delta_n) = 0$, одакле закључујемо $L(\delta_n) < \infty$. Нека су α_n и β_n крајње тачке $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ у $\overline{\Omega}$. Тада $\alpha_n, \beta_n \in \partial\Omega$, у супротном, ако би нпр. $\alpha_n \in \Omega$ онда би постојала тачка блиска α_n која има две инверзне слике у $\mathbb{D}$, а ово је немогуће јер је φ хомеоморфизам.

Нека је σ_n краћи лук са крајњим тачкама α_n и β_n на Γ. Како је $|\alpha_n - \beta_n| \leqslant L(\delta_n) \to 0$, када $n \to +\infty$, и Γ хомеоморфно са $\mathbb{T}$, добијамо $\operatorname{diam}\sigma_n \to 0$.

Крива $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$ дели $\mathbb{C}$ на два отворена скупа, ограничен U_n и неограничен $\mathbb{C} \setminus \overline{U_n}$. Како је Ω ограничен и $\partial U_n \subseteq \overline{\Omega}$, важи да је и $U_n \subseteq \Omega$. Па је и $\operatorname{diam}\partial U_n = \operatorname{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \to 0$ када $n \to +\infty$. Односно, $\operatorname{diam} U_n \to 0$ када $n \to +\infty$.

Означимо са $V_n = \mathbb{D} \cap D(\zeta, \delta_n)$. Доказаћемо да је за довољно велике $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(V_n) = U_n$.

Ако ова тврдња не би важила, онда за свако $n_0 \in \mathbb{N}$, постојало би неко $n \in \mathbb{N}$ тако да $\varphi(\mathbb{D} \setminus V_n) = U_n$ (ово важи на основу повезаности скупова), али тада је $\operatorname{diam} U_n \geqslant \operatorname{diam}\varphi(D(0, \frac{1}{2})) > 0$, што је у контрадикцији са $\operatorname{diam} U_n \to 0$ када $n \to +\infty$.

Дакле, $\operatorname{diam}\varphi(V_n) \to 0$ када $n \to +\infty$ и из начина дефинисаности V_n важи $\varphi(V_{n+1}) \subseteq \varphi(V_n)$.

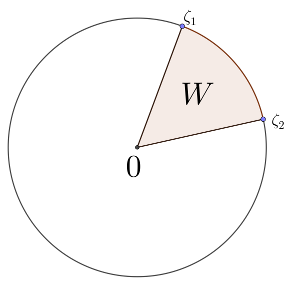
На основу Канторове леме, скуп $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varphi(V_n)}$ је непразан и једночлан. Дефинишемо са

$$\overline{\varphi}(z) = \begin{cases} \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varphi(V_n)}, & z \in \mathbb{T} \\ \varphi(z), & z \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

функцију на $\overline{\mathbb{D}}$. Овако дефинисано $\overline{\varphi}$ је непрекидно на $\overline{\mathbb{D}}$ и HA јер је и φ HA на Ω.

Остаје још да докажемо да је $\overline{\varphi}$ 1-1, али како је φ конформно и непрекидно, то је довољно проверити да ли је $\overline{\varphi}$ 1-1 на $\mathbb{T}$.
Претпоставимо да је $\overline{\varphi}(\zeta_1) = \overline{\varphi}(\zeta_2)$, за неке различите тачке $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$.
Криве $\{\overline{\varphi}(r\zeta_1) : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$ и $\{\overline{\varphi}(r\zeta_2) : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$ ограничавају област $W \subset \Omega$. Како је $\overline{\varphi}^{-1}(W)$ повезана област, мора бити једна од две компоненте повезаности области

$$\mathbb{D} \setminus \Big(\{r\zeta_1 : 0 \leqslant r \leqslant 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leqslant r \leqslant 1\}\Big).$$



Слика 2.2

Како је $\overline{\varphi}(\mathbb{T}) = \Gamma$, онда $\overline{\mathbb{T} \cap \partial(\varphi^{-1}(W))} \subseteq \partial W \cap \partial\Omega = \{\overline{\varphi}(\zeta_1)\}$, тј. $\overline{\varphi}$ константна на луку $\mathbb{T}$. Одакле, на основу Принципа максимума, функција φ константна на $\mathbb{D}$, што је немогуће.
Дакле, $\overline{\varphi}$ је тражено непрекидно 1-1 продужење конформног пресликавања φ на $\overline{\mathbb{D}}$.

■

Нека је Ω Жорданова област и $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ конформно пресликавање, претходна теорема каже да постоји непрекидно 1-1 продужење овог пресликавања на $\mathbb{T}$. Нека је f непрекидна функција на $\Gamma = \partial\Omega$, тада је $f \circ \varphi$ непрекидна на $\mathbb{T}$, и $w = \varphi^{-1}(z)$. Функција

$$u(z) = u_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f \circ \varphi(e^{i\theta}) \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} d\theta,$$

је хармонијска на Ω и

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = f(\zeta),$$

за све $\zeta \in \Gamma$. Функцију

$$P_\Omega(z,\zeta) = P_{\mathbb{D}}(\varphi^{-1}(z), \arg(\varphi^{-1}(\zeta)))$$

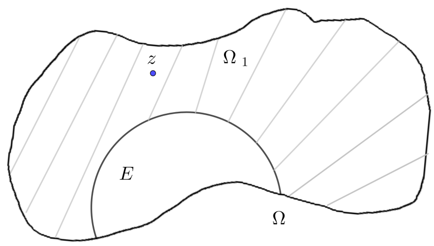
називамо Поасоновим језгром на Ω.

Дефиниција 2.5 За сваки Борелов скуп $E \subseteq \Gamma$ дефинишемо хармонијску меру тог скупа у тачки z на Ω са

$$\omega(z, E, \Omega) = \omega(w, \varphi^{-1}(E), \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\theta}-w|^2} d\theta.$$

Дефиниција 2.6 Нека је $E \subset \overline{\Omega}$ затворен, $z \in \Omega \setminus E$ и Ω_1 компонента повезаности $\Omega \setminus E$ која садржи тачку z. Дефинишемо

$$\omega(z, E, \Omega) = \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega_1, \Omega_1).$$



Слика 2.3

Лема 2.1 Нека је $E \subset \overline{\Omega}$ затворен и $z_0 \in \Omega \setminus E$. Тада је

$$\omega(z_0, E, \Omega) \geqslant \omega(z_0, \partial E \cap \partial\Omega, \Omega).$$

Доказ. Означимо са Ω_1 компоненту повезаности $\Omega \setminus E$ која садржи тачку z_0. Тада је Ω_1 просто повезано. Означимо са $\omega_1(z) = \omega(z, E, \Omega) = \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega_1, \Omega_1)$ када $z \in \Omega_1$ и са $\omega(z) = \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega, \Omega)$ када $z \in \Omega_1$.

Функције ω_1 и ω су хармонијске на Ω_1, одакле је и функција $\omega - \omega_1$ хармонијска. Тада важи

$$\begin{aligned}\omega(z) - \omega_1(z) &= \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega, \Omega) - \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega_1, \Omega_1) = \\ &= \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega, \Omega) - 1 \leqslant 0,\end{aligned}$$

за $\quad z \in \partial E \cap \partial\Omega_1$. Односно,

$$\omega(z) - \omega_1(z) = \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega, \Omega) - \omega(z, \partial E \cap \partial\Omega_1, \Omega_1) = 0,$$

за $\quad z \in \partial\Omega_1 \setminus E$. Дакле, $\omega(z) - \omega_1(z) \leqslant 0$ на $\partial\Omega_1$, па на основу Линделефовог принципа важи да је $\omega(z) - \omega_1(z) \leqslant 0$ на Ω_1. Одакле важи да је $\omega_1(z_0) \geqslant \omega(z_0)$. ■

Глава 3

Хејман-Вуова теорема

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана област, L било која права у $\mathbb{C}$ и $\psi : \Omega \to \mathbb{D}$ конформно пресликавање. Хејман-Вуова теорема тврди да постоји универзална константа C тако да је

$$\text{length}(\psi(L \cap \Omega)) \leqslant C,$$

где је length ознака за дужину. У овом раду доказаћемо теорему за $C = 4\pi$. Међутим најмања таква константа означава се са $\emptyset$ у част математичара Оиме, који је доказао да је $\pi^2 \leqslant \emptyset \leqslant 4\pi$. У доказу Хејман-Вуове теореме користићемо особине псеудохиперболичке метрике које ћемо навести у наредном одељку.

3.1 Псеудохиперболичка метрика

Дефиниција 3.1 Псеудохиперболичку метрику на јединичном диску, за $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ дефинишемо са

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right|.$$

На основу Шварц-Пикове[1] леме за сваку холоморфну функцију $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \rho(z_1, z_2),$$

једнакост важи акко је $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Очигледно је да је $\rho(z_1, z_2) \geqslant 0$ и $\rho(z_1, z_2) = 0$ ако и само ако је $z_1 = z_2$, и важи $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$.

Потребно је доказати још неједнакост троугла, како би ρ заиста била метрика. Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ произвољни. Означимо са $\varphi_{z_2}(z) = \rho(z, z_2)$. Тада $\varphi_{z_2} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Ако је $a = \rho(z_1, z_3) = \varphi_{z_3}(z_1)$ и $b = \rho(z_3, z_2) = \varphi_{z_3}(z_2)$, тада је

$$\rho(a, 0) = \rho(z_1, z_3), \quad \rho(0, b) = \rho(z_3, z_2) \quad \text{и} \quad \rho(a, b) = \rho(z_1, z_2),$$

[1] Charles Émile Picard(1856-1941) - француски математичар

јер $\varphi_{z_3} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Довољно је доказати

$$\rho(a,b) \leqslant \rho(a,0) + \rho(0,b) = |a| + |b|,$$

за $a, b \in \mathbb{D}$. Приметимо да

$$\begin{aligned} 1 - \rho(a,b)^2 = 1 - |\varphi_b(a)|^2 &= \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\bar{b}a|^2} \geqslant \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1+|a||b|)^2} \\ &= 1 - \rho(|a|, -|b|)^2. \end{aligned}$$

Односно,

$$\rho(a,b) \leqslant \rho(|a|, -|b|) = \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|} \leqslant |a| + |b|.$$

Дакле, ρ јесте метрика.

На основу Риманове теореме за сваку просто повезану област $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ постоји конформно пресликавање $f : \Omega \to \mathbb{D}$. Испоставља се

$$\mathrm{Aut}(\Omega) = \{f^{-1} \circ \varphi \circ f : \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\}.$$

На области Ω дефинишемо метрику ρ_Ω са

$$\rho_\Omega(z_1, z_2) = \rho(f(z_1), f(z_2)),$$

за $z_1, z_2 \in \Omega$.

Потребно је проверити да овако дефинисано ρ_Ω не зависи од конформног пресликавања f.

Ако су $f, g : \Omega \to \mathbb{D}$ конформна пресликавања, онда је $g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ конформно, односно $g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. На основу Шварц-Пикове леме:

$$\begin{aligned} \rho(f(z_1), f(z_2)) = \varphi_{f(z_2)}(f(z_1)) &= \varphi_{g \circ f^{-1}(f(z_2))}(g \circ f^{-1}(f(z_2))) \\ &= \varphi_{g(z_2)}(g(z_1)) = \rho(g(z_1), g(z_2)). \end{aligned}$$

Дакле, ρ_Ω не зависи од конформног пресликавања f.

Пример 3.1 За $\Omega = -i\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ важи

$$\rho_{-i\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} + z_2}\right|.$$

Став 3.1 Нека су Ω_1 и Ω_2 просто повезане области такве да $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$. Тада важи

$$\rho_{\Omega_2}(z_1, z_2) \leqslant \rho_{\Omega_1}(z_1, z_2),$$

за све $z_1, z_2 \in \Omega_1$.

Доказ. Нека је $f_i : \Omega_i \to \mathbb{D}$ конформно, за $i = 1, 2$. Означимо са $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Нека су $z_1, z_2 \in \Omega_1$ произвољни, тада $f_1(z_1), f_1(z_2) \in \mathbb{D}$. На основу Шварц-Пикове леме

$$\rho(f_2(z_1), f_2(z_2)) = \rho(\varphi(f_1(z_1)), \varphi(f_1(z_2))) \leqslant \rho(f_1(z_1), f_1(z_2)).$$

Односно,

$$\rho_{\Omega_2}(z_1, z_2) \leqslant \rho_{\Omega_1}(z_1, z_2).$$

■

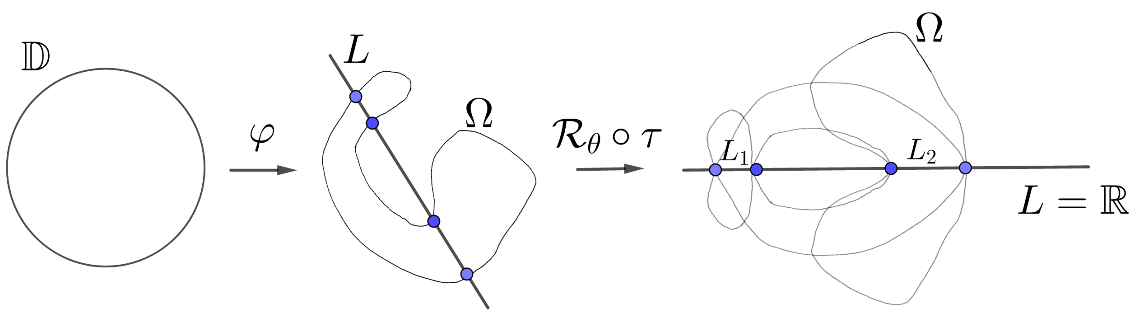
3.2 Хејман-Вуова теорема

Теорема 3.2 Нека је $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ просто повезана област и $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ конформно пресликавање. Тада за било коју праву L у $\mathbb{C}$ важи да је

$$\text{length}(\varphi^{-1}(L \cap \Omega)) \leqslant 4\pi.$$

Доказ. Можемо претпоставити да је φ холоморфна функција у некој околини затвореног јединичног диска $\overline{\mathbb{D}}$. У супротном, ако посматрамо $D(0, r)$, $r < 1$ и $\Omega_r = \varphi(D(0, r))$, можемо дефинисати са $\varphi_r(z) = \varphi(rz)$ пресликавање $\varphi_r : \mathbb{D} \to \Omega_r$ које је конформно на $D(0, \frac{1}{r})$ и $\overline{\mathbb{D}} \subset D(0, \frac{1}{r})$. Ако тврђење важи за φ_r онда важи и $\text{length}(\varphi_r^{-1}(L \cap \Omega_r)) \leqslant 4\pi$. Како је $\varphi_r^{-1}(z) = \varphi^{-1}(rz)$ непрекидна функција по r, када пустимо да $r \to 1^-$ добијамо да $\text{length}(\varphi^{-1}(L \cap \Omega)) \leqslant 4\pi$.

Дејствовањем ротацијом $\mathcal{R}_\theta$ и транслацијом τ на $\mathbb{C}$ дужине се не мењају, а пресликавање $\mathcal{R}_\theta \circ \tau \circ \varphi$ остаје конформно, па без умањења општости претпоставимо да је $L = \mathbb{R}$.



Слика 3.1

Нека је L_k, $\quad k = 1, 2, ..., N$ компонента повезаности $L \cap \Omega$ и нека је Ω_k компонента повезаности скупа $\{\overline{z} : z \in \Omega\}$, тако да $L_k \subset \Omega_k$.

Приметимо да је Ω_k симетрично у односу на L_k. На основу Риманове теореме постоји конформно пресликавање $\psi_k : \Omega_k \to -i\mathbb{H}$ тако да је $\psi_k(L_k) = [0, +\infty)$, и више, пресликавање ψ_k се може непрекидно продужити на $\overline{\Omega_k}$.

Ако је $\alpha \in \partial\Omega_k \cap \partial\Omega$ онда постоји јединствено $\xi \in \partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(\Omega_k)$ тако да је $\varphi(\xi) = \alpha$. Означимо са

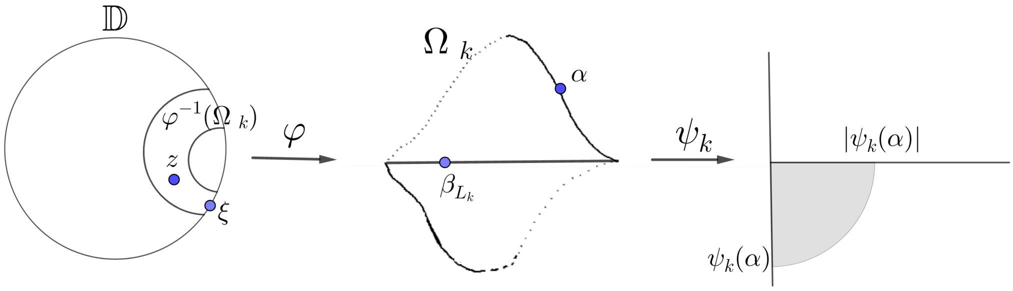
$$\beta = \psi_k^{-1}(|\psi_k(\alpha)|) \in L_k \quad \text{и са} \quad z = \varphi^{-1}(\beta) \in \mathbb{D}.$$

Нека је $P \subset \partial\Omega$ коначан скуп који се састоји од крајњих тачака скупа L_k и $P' \subset \partial\mathbb{D}$ коначан скуп који се састоји од крајњих тачака скупа $\varphi^{-1}(L_k)$. Нека је

$$E = \varphi^{-1}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_k \setminus P) \subseteq \partial\mathbb{D}$$

и

$$F = \varphi^{-1}\Big(\bigcup_k L_k\Big) \setminus P' \subseteq \mathbb{D}.$$



Слика 3.2

Дефинишимо функцију ϕ на E са

$$\phi = \varphi^{-1} \circ \psi_k^{-1}(|\psi_k \circ \varphi|)$$

за $k = 1, 2, ..., N$, ово можемо да учинимо јер су домени функција ψ_k међусобно дисјунктни.

Пресликавање $\phi : E \to F$ је непрекидно и 1-1. Како је ϕ и сурјективна функција на скупу $\varphi^{-1}\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{N} L_k\Big) \setminus P'$, она је и параметризација тог скупа. Важи

$$\begin{aligned} l &= \text{length}(\varphi^{-1}(L \cap \Omega)) = \text{length}(\varphi^{-1}(\bigcup_k L_k)) \\ &= \text{length}(\varphi^{-1}(\bigcup_k L_k) \setminus P') = \int_E |\nabla\phi(\xi)||d\xi|. \end{aligned}$$

Довољно је доказати да је $|\nabla\phi(\xi)| \leqslant 2$ за све $\xi \in E$, јер је тада

$$l \leqslant 2\int_E |d\xi| = 2\,\text{length}(E) \leqslant 4\pi.$$

Посматрајмо Поасоново језгро на $\mathbb{D}$ у тачкама e^{it} и z,

$$P_{\mathbb{D}}(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$

Нека је $I = (\xi, \xi')$ отворен интервал у $\varphi^{-1}(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)$ и $\alpha = \varphi(\xi)$ и $\alpha' = \varphi(\xi')$. Означимо са

$$x = |\psi_k(\alpha)| \quad \text{и} \quad x' = |\psi_k(\alpha')|,$$
$$\beta = \psi_k^{-1}(x) = \varphi \circ \phi(\xi) \quad \text{и} \quad \beta' = \psi_k^{-1}(x') = \varphi \circ \phi(\xi').$$

Тада је

$$\begin{aligned}\rho(\phi(\xi), \phi(\xi')) &= \rho_\Omega(\varphi(\phi(\xi)), \varphi(\phi(\xi'))) = \rho_\Omega(\beta, \beta') \\ &\leqslant \rho_{\Omega_k}(\beta, \beta') = \rho_{-i\mathbb{H}}(\psi_k(\beta), \psi_k(\beta')) \\ &= \rho_{-i\mathbb{H}}(x, x') = \Big|\frac{x - x'}{x + x'}\Big|.\end{aligned}$$

Доказаћемо да за x' довољно близу x важи

$$\omega(x, \psi_k(\varphi(I)), -i\mathbb{H}) \geqslant \frac{1}{\pi}(1 + o(|x - x'|)) \cdot \rho_{-i\mathbb{H}}(x, x').$$

Област $-i\mathbb{H}$ добијамо ротацијом $\mathbb{H}$, па сва својства хармонијске мере која важе у $\mathbb{H}$ важиће са минималним изменама и у $-i\mathbb{H}$.
Важи

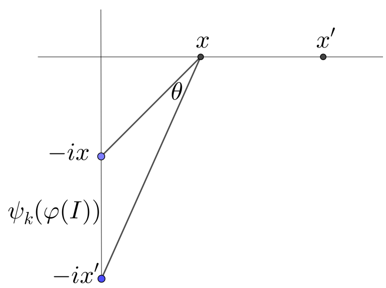
$$\omega(x, \psi_k(\varphi(I)), -i\mathbb{H}) = \frac{\theta}{\pi},$$

где је θ угао који се налази при темену x троугла $x, -ix, -ix'$.
Тада је

$$\operatorname{tg}(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{x'}{x} = 1 + \delta,$$

где је $\delta = \frac{x - x'}{x}$. С друге стране

$$\operatorname{tg}(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta},$$



Слика 3.3

одакле добијамо да је

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta}{2 + \delta},$$

односно

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{|\delta|}{|2 + \delta|} = \frac{|\delta|}{2} + o(\delta),$$

и

$$\rho_{-i\mathbb{H}}(x, x') = \Big|\frac{x - x'}{x + x'}\Big| = \Big|\frac{x \cdot \delta}{x(2 + \delta)}\Big| = \frac{|\delta|}{|2 + \delta|} = \frac{|\delta|}{2} + o(\delta).$$

Заиста,

$$\omega(x, \psi_k(\varphi(I)), -i\mathbb{H}) = \frac{|\delta|}{2\pi} + o(\delta) = \frac{1}{\pi}(1 + o(|x - x'|)) \cdot \rho_{-i\mathbb{H}}(x, x').$$

Дакле, на основу аналитичности и инјективности пресликавања $\psi_k \circ \varphi$ у околини тачке ξ

имамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\rho(\phi(\xi),\phi(\xi')) &\leqslant \frac{1}{\pi}\rho_{-i\mathbb{H}}(x,x')\\ &\leqslant (1+o(|x-x'|))\cdot\omega(x,\psi_k(\varphi(I)),-i\mathbb{H})\\ &= (1+o(|\xi-\xi'|))\cdot\omega(z,I,\varphi^{-1}(\Omega_k)).\end{aligned}$$

Означимо са

$$\begin{aligned}h_1 &= h_1(\xi)=\omega(\phi(\xi),I,\varphi^{-1}(\Omega_k))\\ h_2 &= h_2(\xi)=\omega(\phi(\xi),I,\mathbb{D}).\end{aligned}$$

Тада је $h_1 \leqslant h_2$ на $\partial\mathbb{D}\cap\partial\varphi^{-1}(\Omega_k)$. На основу Принципа максимума $h_1-h_2\leqslant 0$ на $\varphi^{-1}(\Omega_k)$. За $z=\phi(\xi)\in\varphi^{-1}(\Omega_k)$ важи

$$\omega(z,I,\varphi^{-1}(\Omega_k))\leqslant\omega(z,I,\mathbb{D})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_I\frac{1-|\phi(\xi)|^2}{|e^{i\theta}-\phi(\xi)|^2}d\theta,$$

односно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{|\xi-\xi'|}\rho(\phi(\xi),\phi(\xi')) &\leqslant (1+o(|\xi-\xi'|))\cdot\frac{1}{|\xi-\xi'|}\omega(\phi(\xi),I,\mathbb{D})\\ &= (1+o(|\xi-\xi'|))\cdot\frac{1}{|\xi-\xi'|}\int\limits_I\frac{1-|\phi(\xi)|^2}{|e^{i\theta}-\phi(\xi)|^2}\frac{d\theta}{2\pi}.\end{aligned}$$

Како је

$$\rho(\phi(\xi),\phi(\xi'))=\Big|\frac{\phi(\xi)-\phi(\xi')}{1-\overline{\phi(\xi')}\phi(\xi)}\Big|,$$

када пустимо да $\xi'\to\xi$ добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\frac{|\nabla\phi(\xi)|}{1-|\phi(\xi)|^2} &= \lim_{\xi'\to\xi}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\rho(\phi(\xi),\phi(\xi'))}{|\xi-\xi'|}\leqslant\lim_{\xi\to\xi'}\frac{1}{|\xi-\xi'|}\int\limits_{[\xi,\xi']}\frac{1-|\phi(\xi)|^2}{|e^{i\theta}-\phi(\xi)|^2}\frac{d\theta}{2\pi}\\ &= \lim_{\xi\to\xi'}\frac{1}{|\xi-\xi'|}\cdot\frac{1-|\phi(\xi)|^2}{|e^{i\theta'}-\phi(\xi)|^2}\cdot\frac{1}{2\pi}l(\xi,\xi')=\frac{1-|\phi(\xi)|^2}{|\xi-\phi(\xi)|^2}\frac{1}{2\pi},\end{aligned}$$

где $\theta'\in(\xi,\xi')$ и $l(\xi,\xi')$ представља дужину краћег лука ограниченог са ξ и ξ', одакле $\lim\limits_{\xi'-\xi}\frac{l(\xi,\xi')}{|\xi-\xi'|}=1$.

Како је $|\xi-\phi(\xi)|\geqslant 1-|\phi(\xi)|$ и $1+|\phi(\xi)|\leqslant 2$, добијамо

$$|\nabla\phi(\xi)|=\frac{1}{2}\frac{(1-|\phi(\xi)|^2)^2}{|\xi-\phi(\xi)|^2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1-|\phi(\xi)|}{|\xi-\phi(\xi)|}\Big)^2(1+|\phi(\xi)|)^2\leqslant 2.$$

■

Глава 4

Теорија потенцијала

4.1 Потенцијали

Потенцијали нам обезбеђују битан извор примера субхармонијских функција, дајући нам алате уз помоћ којих се конструишу функције са одговарајућим својствима. Друга улога потенцијала јесте у њиховој прилично посебној природи. Испоставља се да су потенцијали општи колико и произвољне субхармонијске функције, и за многе потребе ове две класе су еквивалентне. У овом раду дефинисаћемо потенцијале само за коначне мере са компактним носачем.

Дефиниција 4.1 Нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{C}$ са компактним носачем. Потенцијал мере μ је функција $p_\mu : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$ дефинисана са

$$p_\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \log|z - w| d\mu(w),$$

за $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 4.1 Функција p_μ је субхармонијска на $\mathbb{C}$ и хармонијска на $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu$. Такође,

$$p_\mu(z) = \mu(\mathbb{C}) \log|z| + O(|z|^{-1}) \quad \text{за } z \to \infty.$$

Доказ. Нека је $K = \operatorname{supp}\mu$, тада μ можемо посматрати и као меру на K. Означимо са $v(z, w) = \log|z-w|$ функцију дефинисану на $\mathbb{C} \times K$. Функција $v(z, w)$ је мерљива на $\mathbb{C} \times K$ у односу на меру $A \times \mu$, где је A Лебегова мера дефинисана на $\mathbb{C}$. Осим тога, када $v(z, w)$ посматрамо као функцију од z за фиксирано $w \in K$, ова функција је субхармонијска на $\mathbb{C}$ за све $w \in K$, па постоји $r > 0$ тако да за све $w \in K$ и $0 < \rho < r$ важи

$$v(z, w) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(z + \rho e^{i\theta}, w) d\theta.$$

Применом Фубинијеве теореме за $0 < \rho < r$ важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\mu(z+\rho e^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_K v(z+\rho e^{i\theta},w)d\mu(w)d\theta \\ &= \int_K \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+\rho e^{i\theta},w)d\theta d\mu(w) \\ &\geqslant \int_K v(z,w)d\mu(w) = p_\mu(z).\end{aligned}$$

Како је μ коначна мера, v непрекидна функција и p_μ ће бити непрекидна функција. Дакле, доказали смо да је функција p_μ субхармонијска на $\mathbb{C}$. Аналогно, можемо показати да ће $-p_\mu$ бити субхармонијска на $\mathbb{C}\setminus K$ узимајући за $v(z,w) = -\log|z-w|$ на $(\mathbb{C}\setminus K)\times K$. Односно, p_μ ће бити хармонијска на $\mathbb{C}\setminus K$. За $z \neq 0$,

$$p_\mu(z) = \mu(\mathbb{C})\log|z| + \int_{\mathbb{C}} \log\Big|1-\frac{w}{z}\Big|d\mu(w).$$

Како μ има компактан носач $\int_{\mathbb{C}} \log|1-\frac{w}{z}|d\mu(w) = O(|z|^{-1})$ када $z \to \infty$. ∎

Теорема 4.2 (Принцип непрекидности) Нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{C}$ са компактним носачем K.

(а) Ако $\zeta_0 \in K$, онда $\liminf_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) = \liminf_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in K}} p_\mu(\zeta)$.

(б) Ако $\liminf_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in K}} p_\mu(\zeta) = p_\mu(\zeta_0)$, онда $\lim_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) = p_\mu(\zeta_0)$.

Доказ. (а) Ако је $p_\mu(\zeta_0) = -\infty$, на основу непрекидности $\lim_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) = -\infty$.

Претпоставимо да је $p_\mu(\zeta_0) > -\infty$. Тада је $\mu(\{\zeta_0\}) = 0$ и за дато $\varepsilon > 0$, постоји $r > 0$ тако да је $\mu(D(\zeta_0, r)) < \varepsilon$.

За дато $z \in \mathbb{C}$, изаберимо $\zeta \in K$ које минимизује $|\zeta - z|$, оно постоји јер је K компакт. Тада за све $w \in K$,

$$\Big|\frac{\zeta-w}{z-w}\Big| \leqslant \frac{|\zeta-z|+|z-w|}{|z-w|} \leqslant 2.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}p_\mu(z) &= p_\mu(\zeta) - \int_K \log\Big|\frac{\zeta-w}{z-w}\Big|d\mu(w) \\ &\geqslant p_\mu(\zeta) - \varepsilon\log 2 - \int_{K\setminus D(\zeta_0,r)} \log\Big|\frac{\zeta-w}{z-w}\Big|d\mu(w).\end{aligned}$$

Када $z \to \zeta_0$ у $\mathbb{C}$, однсоно $\zeta \to \zeta_0$ у K имамо

$$\liminf_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) \geqslant \liminf_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in K}} p_\mu(\zeta) - \varepsilon \log 2 - 0.$$

Како је ε произвољно имамо тражену једнакост.

(б) Ако p_μ задовољава $\liminf\limits_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in K}} p_\mu(\zeta) = p_\mu(\zeta_0)$, на основу дела под (а)

$$\liminf_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) = p_\mu(\zeta_0).$$

Како је p_μ непрекидна одоздо

$$\limsup_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) \leqslant p_\mu(\zeta_0).$$

Комбинујући претходне резултате добијамо $\lim\limits_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) = p_\mu(\zeta_0)$.

■

Теорема 4.3 (Принцип минимума) Нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{C}$ са компактним носачем K. Ако $p_\mu \geqslant M$ на K, онда $p_\mu \geqslant M$ на целом $\mathbb{C}$.

Доказ. Дефинишимо са $u = -p_\mu$ на $\mathbb{C} \setminus K$. Тада је u хармонијска на $\mathbb{C} \setminus K$, па и субхармонијска на $\mathbb{C} \setminus K$ и уз претпоставку да $\mu \neq 0$, $u(z) \to -\infty$ када $z \to \infty$. Такође, ако $\zeta_0 \in \partial K$, на основу претходне теореме под (а)

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in\mathbb{C}\setminus K}} u(z) \leqslant -\liminf_{z\to\zeta_0} p_\mu(z) = -\liminf_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in K}} p_\mu(\zeta) \leqslant -M.$$

На основу примене Принципа максимума за функцију u на свакој од компоненти повезаности скупа $\mathbb{C} \setminus K$, добијамо да $u \leqslant -M$. Односно, $p_\mu \geqslant M$ на $\mathbb{C}$. ■

4.2 Поларни скупови

Поларни скупови представљају занемарљиве скупове у теорији потенцијала, на сличан начин као и скупови мере нула у теорији мере.

Дефиниција 4.2 Нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{C}$ са компактним носачем. Енергија $I(\mu)$ дата је са

$$I(\mu) = \iint\limits_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \log|z-w| d\mu(z) d\mu(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} p_\mu(z) d\mu(z).$$

Могуће је да $I(\mu) = -\infty$. Испоставља се да неки скупови подржавају само меру бесконачне енергије.

Дефиниција 4.3 Скуп $E \subset \mathbb{C}$ називамо поларним ако $I(\mu) = -\infty$ за сваку коначну Борелову ненула меру μ чији је носач компактан подскуп од E. Уколико неки скуп није поларан, називамо га не-поларним.

Приметимо да су синглтони поларни скупови. Такође сваки подскуп поларног скупа је поларан.

Теорема 4.4 Нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{C}$ са компактним носачем и претпоставимо да $I(\mu) > -\infty$. Тада $\mu(E) = 0$ за сваки Борелов поларни скуп E.

Доказ. Нека је E Борелов скуп такав да $\mu(E) > 0$. Доказаћемо да E није поларан. На основу регуларности мере μ, можемо изабрати компактан скуп $K \subset E$ такав да $\mu(K) > 0$. Посматрајмо рестрикцију мере μ на скуп K, $\tilde{\mu} = \mu|_K$ и нека је $d = \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\mu)$. Тада је $\tilde{\mu}$ коначна ненула мера чији је компактан носач подскуп скупа E, и

$$\begin{aligned} I(\tilde{\mu}) &= \iint\limits_{K\times K} \log\left|\frac{z-w}{d}\right| d\mu(z)d\mu(w) + \mu(K)^2 \log d \\ &\geqslant \iint\limits_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \log\left|\frac{z-w}{d}\right| d\mu(z)d\mu(w) + \mu(K)^2 \log d \\ &= I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log d + \mu(K)^2 \log d > -\infty. \end{aligned}$$

Одакле видимо да је E не-поларан скуп. ■

Последица 4.5 Сваки Борелов поларан скуп је Лебегове мере нула.

Доказ. Довољно је доказати да за свако $\rho > 0$ мера $d\mu = dA|_{D(0,\rho)}$, где је A ознака за Лебегову меру, има енергију $I(\mu) > -\infty$. Након тога на основу претходне теореме сваки Борелов скуп E има μ меру нула, однсоно $E \cap D(0,\rho)$ је мере нула, и резултат важи када пустимо да $\rho \to \infty$.

За фиксирано $\rho > 0$ и $d\mu = dA|_{D(0,\rho)}$. Тада за $z \in D(0,\rho)$

$$\begin{aligned} p_\mu(z) &= \int\limits_{D(0,\rho)} \log\left|\frac{z-w}{2\rho}\right| dA(w) + \pi\rho^2 \log(2\rho) \\ &\geqslant \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho} \log\frac{r}{2\rho} r\,dr\,d\theta + \pi\rho^2\log(2\rho) \\ &\geqslant -\frac{1}{2}\pi\rho^2 + \pi\rho^2\log(2\rho). \end{aligned}$$

Одакле имамо

$$I(\mu) = \int\limits_{D(0,\rho)} p_\mu(z)d\mu(z) \geqslant (-\frac{1}{2}\pi\rho^2 + \pi\rho^2\log(2\rho))\pi\rho^2 > -\infty.$$

■

У физици, електрично наелектрисање се распоређује по проводнику тако да минимализује енергију. У нашем контексту, ово сугерише на посматрање вероватносне мере μ на компактном скупу K која максимизује $I(\mu)$.

Дефиниција 4.4 Нека је K компактан подскуп од $\mathbb{C}$, и нека је $\mathcal{P}(K)$ фамилија свих вероватносних Борелових мера дефинисаних на K. Ако постоји $\nu \in \mathcal{P}(K)$ тако да

$$I(\nu) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu),$$

тада се мера ν назива еквилибријум мера за K.

Наредне две теореме навешћемо без доказа, а они се могу наћи у [5].

Теорема 4.6 За сваки компактан скуп K у $\mathbb{C}$ постоји јединствена еквилибријум мера.

Теорема 4.7 (Фростманова теорема[1]) Нека је K компактан скуп у $\mathbb{C}$, и нека је ν еквилибријум мера за K. Тада

(а) $p_\nu \geqslant I(\nu)$ на $\mathbb{C}$;

(б) $p_\nu = I(\nu)$ на $K \setminus E$, где је E поларан подскуп од ∂K.

4.3 Гринова функција

Хармонијска мера неке области уско је повезана са Гриновом функцијом. Заправо, Гринова функција је фамилија решења Дирихлеовог проблема у некој области, где је гранична функција нула.

Дефиниција 4.5 Нека је Ω просто повезана област у $\overline{\mathbb{C}}$. Гринова функција за област Ω је пресликавање $g_\Omega : \Omega \times \Omega \to (-\infty, +\infty]$, тако да за све $\omega \in \Omega$ важи

1) $g_\Omega(\cdot, w)$ је хармонијска функција на $\Omega \setminus \{w\}$ и ограничена на комплементу било које околине тачке w;

2) $g_\Omega(w, w) = \infty$ и

$$g_\Omega(z, w) = \begin{cases} \log|z| + O(1), & w = \infty, \\ -\log|z - w| + O(1), & w \neq \infty \end{cases}, \text{ када } z \to w;$$

3) $g_\Omega(z, w) \to 0$ када $z \to \zeta$, за скоро све $\zeta \in \partial\Omega$.

На пример, у области $\mathbb{D}$, Гринова функција је облика

$$g_{\mathbb{D}}(z, w) = \log\left|\frac{1 - z\overline{w}}{z - w}\right|.$$

[1] Otto Albin Frostman(1907-1977) - шведски математичар

Теорема 4.8 На просто повезаној области Ω у $\overline{\mathbb{C}}$, таквој да је $\partial\Omega$ не-поларан скуп, постоји јединствена Гринова функција.

Доказ. Прво ћемо доказати јединственост. Нека су g_1 и g_2 Гринове функције на области Ω. За неко $w \in \Omega$ дефинишемо са

$$h(z) = g_1(z, w) - g_2(z, w),$$

за $z \in \Omega \setminus \{w\}$. На основу дефиниције Гринове функције, функција h је хармонијска и ограничена на $\Omega \setminus \{w\}$ и $\lim\limits_{z \to \zeta} h(z) = 0$ за скоро све $\zeta \in \partial\Omega$. На основу Линделефовог принципа приметимо да је функција $h(z) = 0$ за $z \in \Omega \setminus \{w\}$. Како ово важи за све $w \in \Omega$, закључујемо да је $g_1(z, w) = g_2(z, w)$ за $(z, w) \in \Omega \times \Omega$.

Докажимо сада постојање функције $g_\Omega(z, w)$ када $w = \infty \in \Omega$. Означимо са $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Скуп K је компактан не-поларан подскуп од $\mathbb{C}$, и нека је ν еквилибријум мера на K. Дефинишимо са

$$g_\Omega(z, \infty) = \begin{cases} p_\nu(z) - I(\nu), & z \in \Omega \setminus \{\infty\} \\ \infty, & z = \infty \end{cases}.$$

На основу Фростманове теореме, лако се проверава да $g_\Omega(\cdot, \infty)$ задовољава услове дефиниције Гринове функције за $w = \infty$.

У случају када $w \in \Omega$ и $w \neq \infty$, дефинишемо

$$g_\Omega(z, w) = g_{\Omega'}\Big(\frac{1}{z - w}, \infty\Big),$$

за $z \in \Omega$, где је Ω' слика области Ω при конформном пресликавању $z \mapsto \frac{1}{z-w}$. Користећи већ доказано за област Ω' видели смо да функција $g_\Omega(\cdot, w)$ задовољава услове дефиниције, одакле видимо да $g_\Omega(z, w)$ постоји за све $z, w \in \Omega$. ■

Теорема 4.9 Нека је Ω просто повезана област у $\overline{\mathbb{C}}$ тако да $\partial\Omega$ је не-поларан скуп. Тада

$$g_\Omega(z, w) > 0,$$

за $z, w \in \Omega$.

Доказ. Фиксирајмо $w \in \Omega$, и дефинишимо за $z \in \Omega$ функцију

$$u(z) = -g_\Omega(z, w).$$

Тада је u ограничена одозго субхармонијска функција на Ω и $\lim\limits_{z \to \zeta} u(z) = 0$ за скоро све $\zeta \in \partial\Omega$. На основу Линделефовог принципа $u \leqslant 0$ на Ω. Штавише, ако би $u(z) = 0$ за неко $z \in \Omega$, на основу приницпа максимума $u = 0$ на Ω, што није тачно јер $u(w) = -g_\Omega(w, w) = -\infty$. Дакле, $u < 0$ на Ω. ■

Функција $\omega(z,\cdot,\Omega)$ је Борелова мера на $\partial\Omega$, за Ω просто повезану Жорданову област и важи

$$\omega(z,E,\Omega)=\int\limits_{\partial\Omega}P_\Omega(z,\zeta)d\zeta.$$

Означимо са $d\omega_\Omega(z,\zeta)=P_\Omega(z,\zeta)d\zeta$. Тада се решење Дирихлеовог проблема у Ω за непрекидну функцију f на $\partial\Omega$ може изразити са

$$u_f(z)=\int\limits_{\partial\Omega}f(\zeta)d\omega(z,\zeta). \tag{4.1}$$

Теорема 4.10 Нека је Ω ограничена просто повезана област у $\mathbb{C}$. Тада за $z,w\in\Omega$

$$g_\Omega(z,w)=\int\limits_{\partial\Omega}\log|\zeta-w|d\omega_\Omega(z,\zeta)-\log|z-w|.$$

Доказ. Нека је $w\in\Omega$, дефинишимо функцију $\phi_w:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ са

$$\phi_w(\zeta)=\log|\zeta-w|.$$

Тада је u_{ϕ_w} дефинисана са (4.1) хармонијска и ограничена функција на Ω, и $\lim\limits_{z\to\zeta}u_{\phi_w}=\phi_w(\zeta)$ за скоро све $\zeta\in\partial\Omega$. Дакле, функција

$$(z,w)\mapsto u_{\phi_w}(z)-\log|z-w|,$$

задовољава услове дефиниције Гринове функције, па на основу јединствености исте то је баш функција g_Ω. ■

Теорема 4.11 Нека је Ω просто повезана област и $z\in\Omega$. Гринова функција g_Ω може се хармонијски продужити на околину $\overline{\Omega}$ и важи

$$-\frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}>0,$$

за $\zeta\in\partial\Omega$, где је n_ζ јединична нормала у ζ која извире из Ω. Ако је u непрекидна у $\overline{\Omega}$ и хармонијска у Ω, онда

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega}-\frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}u(\zeta)dS(\zeta).$$

Доказ ове теореме може се наћи у [2] на страни 45.

Теорема 4.12 (Бјурлингова[2] теорема о пројекцији) Нека је $E\subset\overline{\mathbb{D}}$ затворен и повезан скуп, такав да $E\cap\partial\mathbb{D}\neq\emptyset$. и $E^*=\{-|z|:z\in E\}=(-1,-r_0]$, где је $r_0=\min\{|z|:z\in E\}$. Тада за $0\leqslant x<1$

$$\omega(x,E,\mathbb{D})\geqslant\omega(x,E^*,\mathbb{D})=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{(1-r_0)(1-x)}{(1+r_0)(1+x)}.$$

[2]Arne Carl-August Beurling(1905-1986) - шведски математичар

Доказ. Означимо са $\omega(z) = \omega(z, E, \mathbb{D})$. Знамо да је Гринова функција дефинисана на $\mathbb{D}$ са полом у ζ облика

$$g_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = \log\left|\frac{1-\overline{z}\zeta}{z-\zeta}\right|$$

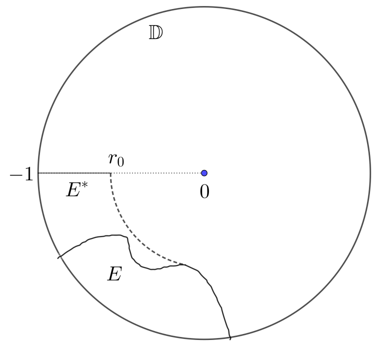
и за њу важе неједнакости

$$g_{\mathbb{D}}(|z|, -|\zeta|) \leqslant g_{\mathbb{D}}(z,\zeta) \leqslant g_{\mathbb{D}}(-|z|, -|\zeta|). \tag{4.2}$$

Како је ω хармонијска функција, на основу Гринове формуле и претходне теореме важи

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial E} g_{\mathbb{D}}(z,\zeta)\frac{\partial\omega}{\partial n_\zeta}(\zeta)dS = \int\limits_{\partial E} g_{\mathbb{D}}(z,\zeta)d\sigma(\zeta), \tag{4.3}$$

где нормала n_ζ излази из $\mathbb{D}\setminus E$ тако да је $\sigma > 0$. Посматрајмо кружну пројекцију σ^* од σ тада је $\sigma^*(A) = \sigma(\{z \in E : -|z| \in A\})$.



Слика 4.1

Означимо са

$$v(z) = \int\limits_{(\partial E)^*} g_{\mathbb{D}}(z, |\zeta|)d\sigma^*.$$

На основу (4.2) имамо

$$v(|z_n|) \leqslant \omega(z_n) \leqslant v(-|z_n|).$$

Када у претходној неједнакости пустимо да $z_n \to z \in E$, десна неједнакост нам даје

$$\liminf_{z_n\to z} v(-|z_n|) \geqslant 1,$$

па на основу Линделефовог правила и $E^* = (\partial E)^*$ имамо $\omega(z, E^*, \mathbb{D}) \leqslant v(z)$. На основу леве неједнакости имамо

$$\omega(|z|, E^*, \mathbb{D}) \leqslant v(|z|) \leqslant \omega(z).$$

Даље, желимо да израчунамо вредност $\omega(x, (-1, r_0], \mathbb{D})$, где је $x > 0$. Након примене пресликавања $\varphi(z) = \sqrt{(z + r_0)/(1 + \overline{z}r_0)}$, на $\mathbb{D}$, област $\mathbb{D}\setminus(-1, r_0]$ се слика конформно у $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D}\cap\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, а сегмент $(-1, r_0]$ постаје $\{iy : -1 < y < 1\}$ и x

постаје $p_0 = \sqrt{(x+r_0)/(1+xr_0)}$. Ако $z \in \mathbb{D}^+$, означимо са $\theta(z)$ угао у темену z троугла са теменима $z, i, -i$, онда на основу Линделефовог правила важи

$$\frac{\pi}{2}\omega(x, (-1, -r_0], \mathbb{D}) = \theta - \frac{\pi}{2},$$

јер дата једнакост важи на $\partial\mathbb{D}^+$, а одговарајуће функције су хармонијске.

Нека је $\theta_0 = \theta(p_0)$, где $p_0 > 0$, онда је

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega(x, (-1, r_0], \mathbb{D})\right) &= \sin^2(\theta/2) - \cos^2(\theta/2) = \\ &= \frac{1}{1+p_0^2} - \frac{p_0^2}{1+p_0^2} = \\ &= \frac{(1-r_0)(1-x)}{(1+r_0)(1+x)}.\end{aligned}$$

■

Хиперболичку метрику на јединичном диску $\mathbb{D}$ дефинишемо са

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \log \frac{1 + \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|},$$

за све $z, w \in \mathbb{D}$, ако је $w \in \partial\mathbb{D}$ или $z \in \partial\mathbb{D}$ метрику дефинишемо са

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = +\infty.$$

Хиперболичко растојање тачке $z \in \mathbb{D}$ од скупа $E \subset \overline{\mathbb{D}}$ биће

$$d_{\mathbb{D}}(z, E) = \inf_{w \in E} d_{\mathbb{D}}(z, w).$$

Последица 4.13 Нека је $E \subset \overline{\mathbb{D}}$ затворен и повезан скуп, такав да $E \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$. Тада

$$\omega(0, E, \mathbb{D}) \geqslant \frac{2}{\pi} e^{-d_{\mathbb{D}}(0,E)}.$$

Доказ. Приметимо да је

$$d_{\mathbb{D}}(0, E) = \log \frac{1+r_0}{1-r_0},$$

где је $r_0 = \min\{|z| : z \in E\}$. Применом Бјурлингове теореме за $x = 0$ добијамо

$$\frac{1-r_0}{1+r_0} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega(0, E^*, \mathbb{D})\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\omega(0, E, \mathbb{D}).$$

■

4.4 Капацитет

Дефиниција 4.6 Логаритамкси капацитет скупа $E \subset \mathbb{C}$ дефинише се са

$$\operatorname{Cap}(E) = \sup_{\mu} e^{I(\mu)},$$

где се супремум узима по свим вероватносним Бореловим мерама μ на $\mathbb{C}$ чији је носач компактан подскуп скупа E.

У случају када је K компактан скуп са еквилибријум мером ν, тада

$$\operatorname{Cap}(K) = e^{I(\nu)}.$$

Ако је E поларан скуп, сматрамо да је $\operatorname{Cap}(E) = 0$.

Претходна дефиниција нам даје теоријска својства капацитета, међутим не можемо увек уз помоћ ње израчунати вредност капацитета. У случају када тражимо капацитет компактног скупа можемо користити Гринову функцију.

Теорема 4.14 Нека је K компактан не-поларан скуп у $\mathbb{C}$, и Ω компонента повезаности $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ таква да $\infty \in \Omega$. Тада

$$g_\Omega(z, \infty) = \log|z| + \gamma(K) + o(1),$$

када $z \to \infty$.

Доказ. Нека је ν еквилибријум мера за K. На основу начина на који смо конструисали g_Ω у Теореми 4.8, имамо

$$g_\Omega(z, \infty) = p_\nu(z) - I(\nu) = p_\nu(z) - \log\Big(\operatorname{Cap}(K)\Big),$$

за $z \in \Omega \setminus \{\infty\}$. На основу Теореме 4.1

$$p_\nu(z) = \log|z| + o(1),$$

када $z \to \infty$, одакле и добијамо тражено. ∎

Пример 4.1 Ако је $w \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ и $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(w, r)$ важи

$$g_\Omega(z, \infty) = \log\left|\frac{z - w}{r}\right| = \log|z| - \log r + o(1),$$

када $z \to \infty$. На основу претходне теореме је $\operatorname{Cap}(\overline{D}(w, r)) = r$.

Глава 5

Хардијеви простори

Хардијеви простори H^p су простори холоморфних функција на јединичном диску $\mathbb{D}$. Представио их је Рис[1] 1923. године, али су пре тога ови концепти детаљно проучавани од стране Хардија. У овој глави упознаћемо се са основним својствима H^p простора и доказаћемо неке еквивалентне карактеризације припадности пресликавања H^p простору, где се једна од карактеризација односи и на унивалентне[2] функције.

5.1 Дефиниција и основна својства

Лема 5.1 Нека је u субхармонијска функција дефинисана на $\mathbb{D}$. Тада је функција

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$$

растућа на сегменту $(0, 1)$.

Доказ. Дефинишимо са

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta}) d\theta,$$

функцију на $\mathbb{D}$. Функција v је субхрамонијска на основу Теореме 1.9. Приметимо да важи

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(|z|e^{i(\theta+\arg z)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\arg z}^{2\pi} u(|z|e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{2\pi+\arg z} u(|z|e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\arg z}^{2\pi} u(|z|e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arg z} u(|z|e^{is}) ds. \end{aligned}$$

[1]Frigyes Riesz(1880-1956) - мађарски математичар

[2]Холоморфна функција дефинисана на отвореном скупу је унивалентна ако је ињективна на том скупу.

Дакле, $v(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(|z|e^{i\theta})d\theta$, тј. функција v је ротационо инваријантна.

За $z \in \partial D(0,r)$, $v(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$, тј. $\max\limits_{\partial D(0,r)} v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$. Ако су $0 < r \leqslant R < 1$ произвољно одабрани, онда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = \max_{\partial D(0,r)} v = \max_{\overline{D}(0,r)} v \leqslant \max_{\overline{D}(0,R)} v = \max_{\partial D(0,R)} v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta.$$

Односно, функција $r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$ је растућа на $(0,1)$. ■

Дефиниција 5.1 Нека је функција f холоморфна на $\mathbb{D}$ и $0 < r < 1$. Вредност

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}},$$

називамо интегралном средином реда p, где је $0 < p < \infty$ фиксиран.

Теорема 5.1 Нека је f холоморфна функција на $\mathbb{D}$. Тада је функција $r \mapsto M_p(r,f)$ растућа на $(0,1)$, за $0 < p < \infty$.

Доказ. Довољно је показати да је функција $r \mapsto M_p^p(r,f)$ растућа.

На основу Последице 1.4, функција $|f|^p$ је субхармонијска у $\mathbb{D}$, а на основу претходне леме, онда важи и да је функција $r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$ растућа. ■

Дефиниција 5.2 Хардијевим простором називамо скуп

$$H^p = \Big\{f \text{ холоморфна у } \mathbb{D} : \quad \|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty\Big\}.$$

На основу Теореме 5.1 важи да је $\|f\|_{H^p} = \lim\limits_{r\to 1^-} M_p(r,f)$.

Нека је f произвољна холоморфна функција у $\mathbb{D}$ и $0 < r < 1$. Означимо са $M_\infty(r,f) := \sup\limits_{\partial D(0,r)} |f(z)|$. Како је f холоморфна у $\mathbb{D}$, онда је $|f|$ непрекидна на компакту $\partial D(0,r)$, па $|f|$ достиже максимум. Односно, $M_\infty(r,f) = \max\limits_{\partial D(0,r)} |f(z)|$.

Теорема 5.2 Нека је f холоморфна функција у $\mathbb{D}$. Тада је функција $r \mapsto M_\infty(r,f)$ растућа на $(0,1)$.

Доказ. Нека су $0 < r \leqslant R < 1$ произвољно одабрани. Тада је на основу Принципа максимума

$$M_\infty(r,f) = \max_{\partial D(0,r)} |f| = \max_{\overline{D}(0,r)} |f| \leqslant \max_{\overline{D}(0,R)} |f| = \max_{\partial D(0,R)} |f| = M_\infty(R,f).$$

■

Дефиниција 5.3 Дефинишемо Хардијев простор за ограничене функције H^∞ са

$$H^\infty = \Big\{ f \text{ холоморфна у } \mathbb{D}: \quad \|f\|_{H^\infty} = \sup_{0<r<1} M_\infty(r,f)M < \infty \Big\}.$$

Лема 5.2 За све $0 < p < \infty$ важи $H^\infty \subset H^p$.

Доказ. Нека је $f \in H^\infty$ произвољна функција и $0 < r < 1$.

$$M_p^p(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\infty^p(r,f)d\theta = M_\infty^p \leqslant \|f\|_{H^\infty}$$

Дакле, за све $0 < r < 1$, $M_p(r,f) \leqslant \|f\|_{H^\infty}$. Када прођемо супремумом кроз претходну неједнакост важи да је $\|f\|_{H^p} \leqslant \|f\|_{H^\infty} < \infty$, тј. $f \in H^p$. ■

Лема 5.3 За све $0 < p < q < \infty$ важи $H^q \subset H^p$.

Доказ. Нека је $f \in H^q$ произовљна функција и $0 < r < 1$. Означимо са $b = \frac{q}{p} > 1$ и нека је $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = 1$. Након примене Хелдерове[3] неједнакости добија се

$$M_p^p(r,f) = \frac{1}{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}(|f(re^{i\theta})|^p)^b d\theta\Big)^{\frac{1}{b}} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1^{b'} d\theta\Big)^{\frac{1}{b'}} =$$

$$= \Big(\frac{1}{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta\Big)^{\frac{p}{q}} = M_q^p(r,f) \leqslant \|f\|_{H^q}^p.$$

Одакле је $M_p(r,f) \leqslant \|f\|_{H^q}$. Након проласка са супремумом добијамо $\|f\|_{H^p} \leqslant \|f\|_{H^q} < \infty$. Дакле, $f \in H^p$. ■

5.2 Карактеризације припадности H^p простору

Теорема 5.3 Нека је $0 < p < \infty$. За холоморфну функцију f у $\mathbb{D}$ важи следеће

$$f \in H^p(\mathbb{D}) \iff \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dxdy < \infty. \tag{5.1}$$

Доказ. За $\varepsilon > 0$ дефинишимо $f_\varepsilon(z) = (|f(z)|^2 + \varepsilon^2)^{p/2}$. Тада $f_\varepsilon \in C^2(\mathbb{D})$ и

$$\triangle f_\varepsilon(z) = 2p|f'(z)|^2(|f(z)|^2 + \varepsilon^2)^{p/2-2}\Big(\frac{p}{2}|f(z)|^2 + \varepsilon^2\Big).$$

У Гриновој формули

$$\int_{D(0,r)} (u\triangle v - v\triangle u)dxdy = \int_{\partial D(0,r)} \Big(u(z)\frac{\partial v}{\partial r}(z) - v(z)\frac{\partial u}{\partial r}(z)\Big)|dz|,$$

[3] Otto Ludwig Hölder(1859-1937) - немачки математичар

узмимо да је $u = 1$, $v = f_\varepsilon$ и $r < 1$ тада

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{D(0,r)} \triangle f_\varepsilon(z)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}(re^{i\theta})d\theta = \frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\varepsilon(re^{i\theta})d\theta\Big).$$

Интеграљењем по r претходне једнакости добијамо

$$\int\limits_0^1 \frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\varepsilon(re^{i\theta})d\theta\Big)dr = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{D(0,r)} \triangle f_\varepsilon(z)dxdy\Big)dr,$$

применом Фубинијеве теореме

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\varepsilon(e^{i\theta})d\theta - f_\varepsilon(0) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \triangle f_\varepsilon(z)\Big(\int\limits_0^1 \mathbf{1}_{D(0,r)}(z)\frac{dr}{r}\Big)dxdy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \triangle f_\varepsilon(z)\log\frac{1}{|z|}dxdy.\end{aligned}$$

Када пустимо да $\varepsilon \to 0$ добијамо тражену еквиваленцију (5.1). ■

Теорема 5.4 Нека је ψ унивалентна функција на $\mathbb{D}$, таква да $\psi \in \bigcup\limits_{p>0} H^p(\mathbb{D})$. За $\alpha > 0$, дефинишимо са $E_\alpha = \{e^{i\theta} : \quad |\psi(e^{i\theta})| > \alpha\}$ и $F_\alpha = \{z \in \mathbb{D} : \quad |\psi(z)| = \alpha\}$. Тада су следећи искази еквивалентни:

(i) $\psi \in H^p(\mathbb{D})$;

(ii) $\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\omega(0, E_\alpha, \mathbb{D})d\alpha < \infty$;

(iii) $\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\omega(0, F_\alpha, \mathbb{D})d\alpha < \infty$.

Доказ. (i) $\iff$ (ii):

Означимо са $|E|$ Лебегову меру скупа $E \subset \partial\mathbb{D}$ и са $\chi(x,y) = \begin{cases} 1, & y < x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Тада је

$$\begin{aligned}\|\psi\|_p^p &= \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\psi(re^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\psi(e^{i\theta})|^p d\theta =\\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^\infty \chi(|\psi(e^{i\theta})|^p, y)dy\Big)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty |\{e^{i\theta} : |\psi(e^{i\theta})|^p > y\}|dy =\\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty |E_{y^{1/p}}|dy = \Big(\text{смена: } y = \alpha^p\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty p\alpha^{p-1}|E_\alpha|d\alpha =\\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\omega(0, E_\alpha, \mathbb{D})d\alpha.\end{aligned}$$

Одакле видимо да $\psi \in H^p(\mathbb{D})$ ако и само ако је функција $\alpha^{p-1}|E_\alpha| \in L^1(0,\infty)$. Приметимо да је $|E_\alpha| \leqslant 2\pi$ и за $p > 0$ функција $\alpha^{p-1}|E_\alpha|$ је увек интеграбилна у околини нуле. Дакле, $\psi \in H^p(\mathbb{D})$ ако и само ако $\alpha^{p-1}|E_\alpha|$ интеграбилно у околини бесконачности.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii):
Нека је $\Omega = \psi(\mathbb{D})$. Тада постоји неко $\alpha_0 > 0$, тако да за све $\alpha > \alpha_0$, важи $\partial D(0,\alpha)\backslash\Omega \neq \emptyset$. За $\alpha > \alpha_0$, скуп F_α се састоји од највише пребројиво много различитих аналитичких лукова у $\mathbb{D}$. Штавише, сваки од тих лукова има тачно две крајње тачке на $\partial\mathbb{D}$.

Нека је Ω_1 компонента повезаности $\mathbb{D} \setminus F_\alpha$ која садржи 0. Тада је Ω_1 просто повезано и $E_\alpha \subset \overline{\mathbb{D} \setminus \Omega_1}$. Означимо са $\omega_1(z) = \omega(z, F_\alpha, \mathbb{D}) = \omega(z, \partial F_\alpha \cap \partial\Omega_1, \Omega_1)$ када $z \in \Omega_1$ и са $\omega(z) = \omega(z, \partial E_\alpha, \mathbb{D})$ када $z \in \Omega_1$. Функције ω_1 и ω су хармонијске на Ω_1, одакле је и функција $\omega - \omega_1$ хармонијска. Тада важи

$$\begin{aligned}\omega(z) - \omega_1(z) &= \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) - \omega(z, \partial F \cap \partial\Omega_1, \Omega_1) = \\ &= \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) - 1 \leqslant 0, \quad \text{када} \quad z \in \partial F_\alpha \cap \partial\Omega_1 \\ \omega(z) - \omega_1(z) &= \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) - \omega(z, \partial F_\alpha \cap \partial\Omega_1, \Omega_1) = 0, \quad \text{када} \quad z \in \partial\partial\Omega_1 \setminus \partial F_\alpha.\end{aligned}$$

Дакле, $\omega(z) - \omega_1(z) \leqslant 0$ на $\partial\Omega_1$, па на основу Линделефовог правила важи да је $\omega(z) - \omega_1(z) \leqslant 0$ на Ω_1. Одакле важи да је $\omega_1(0) \geqslant \omega(0)$, тј.

$$\omega(0, E_\alpha, \mathbb{D}) \leqslant \omega(0, F_\alpha, \Omega_1).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii):
Означимо са $L_\alpha = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) \geqslant \frac{1}{2}\}$. Приметимо да је $E_\alpha \subset L_\alpha \cap \partial\mathbb{D}$, јер за све $z \in E_\alpha$ $\omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) = 1$. Осим тога, приметимо да на основу Принципа максимума свака компонента повезаности $\mathbb{D} \setminus L_\alpha$ мора бити просто повезана. Важиће

$$\omega(0, E_\alpha, \mathbb{D}) \geqslant \frac{1}{2}\omega(0, L_\alpha, \mathbb{D}). \tag{5.2}$$

У случају да $0 \in L_\alpha$, онда је трвијално. Иначе, ако $0 \notin L_\alpha$, означимо са Ω_2 компоненту повезаности $\mathbb{D} \setminus L_\alpha$ која садржи 0. Тада је $\partial\Omega_2 = (\partial\Omega_2 \cap L_\alpha) \cup (\partial\Omega_2 \cap \partial\mathbb{D})$.

Функције $\omega(\cdot, E_\alpha, \mathbb{D})$ и $\frac{1}{2}\omega(\cdot, L_\alpha, \mathbb{D})$ су хармонијске на Ω_2 и важи

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\omega(z, L_\alpha, \mathbb{D}) - \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) = \frac{1}{2} - \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) \leqslant 0, \quad \text{када } z \in \partial\Omega_2 \cap L_\alpha, \\ &\frac{1}{2}\omega(z, L_\alpha, \mathbb{D}) - \omega(z, E_\alpha, \mathbb{D}) = 0 - 0 = 0, \quad \text{када } z \in \partial\Omega_2 \cap \partial\mathbb{D}.\end{aligned}$$

На основу Линделефовог принципа максимума релација (5.2) је тачна.

Нека је $z_0 = \psi(0)$ и $\alpha > \max\{\alpha_0, |z_0|\}$, где је α_0 такво да за све $\alpha > \alpha_0$, $\partial D(0,\alpha) \setminus \Omega \neq \emptyset$, одакле скуп $\mathbb{C}\setminus\Omega$ повезује $\partial D(0,\alpha)$ са бесконачношћу. Тврдимо да можемо изабрати $M_0 > 1$ тако да $F_{\alpha M_0} \subset L_\alpha$, за $\alpha > \alpha_0$. Нека је $M > 1$ и $w \in F_{\alpha M}$. Тада $z = \psi(w) \in \partial D(0, \alpha M) \cap \Omega$ и на основу Леме 2.1

$$\omega(w, E_\alpha, \mathbb{D}) = \omega(z, \partial\Omega \setminus \overline{D}(0,\alpha), \Omega) \geqslant \omega(z, \partial\Omega \setminus \overline{D}(0,\alpha), \Omega \setminus \overline{D}(0,\alpha)).$$

Примењујући конформно пресликавање $\zeta \mapsto \alpha/\zeta$, које слика $\Omega \setminus \overline{D}(0,\alpha)$ у отворен скуп $W \subset \mathbb{D}$, скуп $\Big(\mathbb{C} \setminus \Omega\Big) \setminus \overline{D}(0,\alpha)$ у скуп A који повезује 0 са $\partial\mathbb{D}$ и z у $\alpha/z \in \partial D(0, \frac{1}{M})$. На основу Бјурлингове теореме о пројекцији

$$\omega(z, \partial\Omega \setminus \overline{D}(0,\alpha), \Omega \setminus \overline{D}(0,\alpha)) = \omega(\alpha/z, A, W) \geqslant \omega(\frac{1}{M}, (-1,0], \mathbb{D}).$$

Приметимо да када M тежи бесконачости $\omega(\frac{1}{M}, (-1,0], \mathbb{D})$ тежи 1, па можемо изабрати $M_0 > 1$ тако да је $\omega(\frac{1}{M_0}, (-1,0], \mathbb{D}) = \frac{1}{2}$. Тада, за све $w \in F_{\alpha M_0}$, имамо $\omega(w, E_\alpha, \mathbb{D}) \geqslant \frac{1}{2}$, односно $F_{\alpha M_0} \subset L_\alpha$. Дакле, на основу овога и Леме 2.1 важи

$$\omega(0, E_\alpha, \mathbb{D}) \geqslant \frac{1}{2}\omega(0, F_{\alpha M_0}, \mathbb{D}).$$

■

Теорема 5.5 Нека је ψ конформно пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на неограничену област Ω. Означимо са $F_\alpha = \{z \in \mathbb{D} : |\psi(z)| = \alpha\}$ за $\alpha > 0$. Ако је $0 < p < \infty$, тада

$$\psi \in H^p(\mathbb{D}) \iff \int_0^{2\pi} \alpha^{p-1} e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)} d\alpha < +\infty. \tag{5.3}$$

Доказ. $\Longrightarrow$: Нека је $\psi \in H^p(\mathbb{D})$ за неко $0 < p < +\infty$

На основу Теореме 5.4 и Последице 4.13 важи да је

$$\int_0^{2\pi} \alpha^{p-1} e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)} d\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \omega(0, F_\alpha, \mathbb{D}) d\alpha < +\infty.$$

$\Longleftarrow$: Претпоставимо да $0 < p < +\infty$ и

$$\int_0^{2\pi} \alpha^{p-1} e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)} d\alpha < +\infty.$$

Без умањења општости, можемо претпоставити да је $\psi(0) = 0$. За Гринову функцију на области Ω важи $g_\Omega(0,w) = 0$, када $w \notin \Omega$. Сменом променљивих добијамо:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^{p-2} |\psi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dxdy &= \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^{p-2} |\psi'(z)|^2 g_{\mathbb{D}}(0,z) dxdy \\ = \int_{\Omega} |w|^{p-2} g_{\mathbb{D}}(0, \psi^{-1}(w)) dudv &= \int_{\Omega} |w|^{p-2} g_\Omega(0,w) dudv \\ = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \alpha^{p-2} g_\Omega(0, \alpha e^{i\theta}) \alpha d\theta d\alpha &= \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \Big(\int_0^{2\pi} g_\Omega(0, \alpha e^{i\theta}) d\theta\Big) d\alpha.\end{aligned}$$

Важи
$$\log \frac{e^x+1}{e^x-1} \leqslant Ce^{-x}, \tag{5.4}$$
за неку позитивну константу C и све $x > x_0$, јер $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log \frac{e^x+1}{e^x-1}}{e^{-x}} = 1$.

Како је Ω неограничена и просто повезана област јер је ψ конформно пресликавање, $d_\Omega(0,\psi(F_\alpha)) \to +\infty$ када $\alpha \to +\infty$. На основу (5.4) постоји неко $\alpha_0 > 0$, тако да за све $\alpha > \alpha_0$ важи
$$g_\Omega(0,\alpha e^{i\theta}) \leqslant Ce^{-d_\Omega(0,\alpha e^{i\theta})} \leqslant Ce^{-d_\Omega(0,\psi(F_\alpha))} = Ce^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)}.$$
Интеграљењем по θ претходне неједнакости, добијамо
$$\int_0^{2\pi} g_\Omega(0,\alpha e^{i\theta})d\theta \leqslant C\int_0^{2\pi} e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)}d\theta = 2\pi Ce^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)}$$
за све $\alpha > \alpha_0$. Односно,
$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^{p-2}|\psi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}dxdy \leqslant 2\pi C\int_{\alpha_0}^{\infty} \alpha^{p-1}e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)}d\alpha + C', \tag{5.5}$$
где је $C' = \int_0^{\alpha_0} \alpha^{p-1}\Big(\int_0^{2\pi} g_\Omega(0,\alpha e^{i\theta})d\theta\Big)d\alpha$. На основу претпоставке да је $\int_0^{2\pi} \alpha^{p-1}e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_\alpha)}d\alpha < +\infty$ и (5.5) добијамо
$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^{p-2}|\psi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}dxdy < +\infty.$$
Што на основу Теореме 5.3 повлачи да $\psi \in H^p(\mathbb{D})$. ∎

Еквиваленција (5.3) је главни резултат рада [3].

Литература

[1] P.L. Duren, *Theory of Hp Spaces*, Academic Press, New York-London, 1970.

[2] J.B. Garnett, D.E. Marshall, *Harmonic Measure*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[3] C. Karafyllia, *Hyperbolic distance and membership of conformal maps in the Hardy space*, Proc. Amer. Math. Soc. 147, 2019.

[4] P. Poggi-Corradini, *Geometric models, iteration and composition operators*, Ph.D. Thesis, University of Washington, 1996.

[5] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.