UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Nemanja Djajić

Lanci Markova višeg reda i primene

— master–rad —

Beograd, 2020.

Matematički fakultet

Univerzitet u Beogradu

Master rad

Lanci Markova višeg reda i primene

Student:

Nemanja Djajić 1059/2018

Mentor:

dr Jelena Jocković

septembar 2020.

Sadržaj

Uvod **4**

1 Slučajni procesi **5**

1.1 Definicije i osobine . . . 5

2 Lanci Markova prvog reda **9**

2.1 Lanci Markova u diskretnom vremenu . . . 9

2.1.1 Definicija i osobine . . . 9

2.1.2 Klasifikacija stanja . . . 11

2.2 Lanci Markova u neprekidnom vremenu . . . 16

3 Lanci Markova višeg reda **19**

3.1 Uvod . . . 19

3.2 Matematički modeli . . . 19

3.3 Definicije i osobine . . . 21

3.4 Modeliranje lanaca Markova višeg reda . . . 24

3.5 Odredjivanje parametara modela . . . 29

4 Primeri primene lanaca Markova višeg reda **33**

4.1 Uvodni primer . . . 33

4.2 Primena lanaca Markova višeg reda prilikom analize DNK . . . 36

4.3 Primena lanaca Markova višeg reda prilikom optimizacije i analize prodaje . . . 43

5 Zaključak **48**

Uvod

Osnovni cilj ovog rada jeste da predstavi i definiše lance Markova višeg reda, i takodje da na praktičnim primerima objasni njihovu primenu. Lanci Markova višeg reda, koji su tema ovog rada, predstavljaju veoma važan alat u modeliranju velikog broja prirodnih pojava i rešavanju svakodnevnih problema.

U prvom poglavlju ovog rada biće definisani i objašnjeni stohastički(slučajni) procesi, i definisani lanci Markova kao posebna klasa tih procesa. U drugom poglavlju, detaljno će biti definisani i opisani lanci Markova prvog reda, dok će lanci Markova višeg reda i sve njihove osobine biti centralna tema trećeg poglavlja ovog rada. U četvrtom poglavlju ovog rada, biće navedeni praktični primeri primene lanaca Markova višeg reda, za potrebe rešavanja realnih i konkretnih problema.

Kako su procesi Markova centralna tema ovog rada, na samom početku oni će biti uopšteno i neformalno definisani. Uopšteno govoreći, Markovljev proces je slučajni proces koji poseduje osobinu "odsustva memorije". Tačnije, pod uslovom da nam je poznata sva predistorija procesa, uključujući i sadašnji trenutkak, tada budućnost (odnosno verovatnosna struktura procesa u budućnosti), ne zavisi od cele predistorije procesa već samo od sadašnjeg trenutka. Ove procese i njihov koncept uveo je 1907. godine ruski matematičar Andrej Markov (Андрей Андреевич Марков , živeo od 1856. do 1922. godine).

Procesi Markova predstavljaju jednostavnu i izuzetno korisnu klasu slučajnih procesa, koja nam pomaže da opišemo i modeliramo i najkomplikovanije procese u realnom životu. Jednostavna struktura ovih procesa omogućava nam da uz minimalnu količinu početno poznatih informacija modeliramo i predvidimo uslovne raspodele i buduće ponašanje nekih sistema. Korišćenjem Markovljevih procesa mogu se modelirati mnoge pojave u psihologiji, statistici, biologiji, hemiji, finansijskoj matematici i operacionim istraživanjima.

1 Slučajni procesi

1.1 Definicije i osobine

Na samom početku ovog rada definisaćemo stohastičke (slučajne) procese, i navesti ostale definicije i teoreme neophodne za dalji rad. Više detalja o uvodnom delu, teoremama i definicijama koje su navedene u ovom poglavlju može se naći u [3].

Definicija 1. Skup svih mogućih ishoda ili rezultata nekog eksperimenta označava se sa Ω i naziva se **prostor elementarnih dogadjaja** ili prostor ishoda, elementi ovog skupa označavaju se sa ω_i, , gde je $i = 1, 2, \dots$ i nazivaju se **elementarni dogadjaji**.

Definicija 2. Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ-polje (σ-algebra) nad Ω ako važe sledeći uslovi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Jedno od svojstava σ-algebre jeste da nju čine merljivi skupovi. Takodje par $(\Omega, \mathcal{F})$ se naziva merljiv prostor.

Definicija 3. Ako je Ω skup svih elementarnih dogadjaja i ako je $\mathcal{F}$ σ-polje nad skupom Ω, tada se funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i).$

Definicija 4. Uredjena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se **prostor verovatnoća**.

Definicija 5. Neka je $\mathcal{E}$ metrički prostor. Najmanja σ-algebra podskupova od $\mathcal{E}$ koja sadrži sve otvorene (zatvorene) podskupove od $\mathcal{E}$ se zove **Borelova σ-algebra** i označava se sa $\mathcal{B}$.

Definicija 6. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, tada se preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zove slučajna promenljiva, ako za $\forall B \in \mathcal{B}$ važi da je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}$ Borelova σ-algebra. Za X kažemo da je $\mathcal{F}$-merljivo nad skupom realnih brojeva.

Prethodnim definicijama uveli smo pojmove koji su nam neophodni za definisanje stohastičkog procesa. Sam stohastički proces možemo posmatrati i kao familiju slučajnih promenljivih koje zavise od vremena. Preciznije, ako pretpostavimo da u svakom vremenskom trenutku $t \in T$, gde je $T \subset R$, posmatramo neku karakteristiku sistema X, i ako je ta karakteristika slučajnog karaktera – tada je promenljiva X_t slučajna promenljiva za svako t. Takodje, tada skup $\{X_t, t \in T\}$, skup svih slučajnih promenljivih, nazivamo slučajni proces.

Formalna definicija slučajnih procesa je sledeća:

Definicija 7. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ odredjeni prostor verovatnoće i T neprazni skup, pri čemu je svakom $t \in T$ pridružena odredjena slučajna promenljiva $X_t : \Omega \to S$, gde je S podskup od R. Tada se familija slučajnih promenljivih $\{X_t, t \in T, \omega \in \Omega\}$ (u nastavku $\{X_t, t \in T\}$) naziva **slučajni proces**.

Iz samog zapisa primećujemo da slučajni proces zavisi od promenljivih t i ω, i možemo da konstatujemo sledeće specijalne slučajeve:

1. Ako je $w_0 \in \Omega$ fiksirana vrednost, X_t je funkcija definisana na skupu T, i naziva se trajektorija slučajnog procesa
2. Ako je $t_0 \in T$ fiksirana vrednost, X_t je slučajna promenljiva

Neprazni skup T naziva se jos i parametarski skup, dok se skup S naziva skup stanja, skup u okviru koga proces može uzimati svoje vrednosti. Podela stohastičkih procesa može se napraviti u zavisnosti od tipa skupova T i S. U slučaju kada je parametarski skup T diskretan, tada posmatramo niz slučajnih promenljivih. Poznati primer za ovo su lanci Markova u diskretnom vremenu, koji predstavljaju nizove slučajnih promenljivih kod kojih je i skup S, skup stanja, diskretan. Drugu grupu stohastičkih procesa čine oni procesi kod kojih je parametarski skup T, neprekidan, dok skup stanja S može biti ili neprekidan ili diskretan. Primer ovakvih procesa, kod kojih je parametarski skup neprekidan dok je skup stanja diskretan, jesu Poasonovi (Poisson) procesi.

Definicija 8. Konačnodimenzione funkcije raspodele slučajnog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ definisane su na sledeći način:

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1,\ldots,X_{t_n} \leq x_n\}$$

,gde t_i pripadaju $[t_0, T]$ i x_i pripadaju R, $i \in N$.

Teorema 1.1.1. (Fundamentalna teorema Kolmogorova, 1933.) Za svaku familiju funkcija raspodele koje zadovoljavaju uslove simetrije i saglasnosti:

1. uslov simetrije: $F_{t_{i_1},\ldots t_{i_n}}(x_{i_1},\ldots x_{i_n}) = F_{t_{i_1},\ldots t_{i_n}}(x_1,\ldots x_n)$, gde je $i_1,\ldots,i_n$ jedna permutacija brojeva od 1 do n, $n \geq 1$, a trenuci t_{i_j} su proizvoljni.

2. uslov kompatibilnosti: $F_{t_1,\ldots t_m,t_{m+1},\ldots,t_n}(x_1,\ldots x_m,\infty,\ldots,\infty) = F_{t_1,\ldots t_m}(x_1,\ldots x_m)$

Postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i slučajni proces $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ definisan na njemu koji poseduje date raspodele kao svoje konačno dimenzione raspodele.

Teorema Kolmogorova omogućava nam da utvrdimo ekvivalentnost izmedju familije slučajnih promenljivih, definisanih na odredjenom prostoru, i familije funkcija raspodela koja zadovoljava navedene uslove simetrije i kompatibilnosti. Pored svih navedenih definicija i teorema za dalji rad biće nam značajno i definisanje nekih osobina stohastičkih procesa.

Definicija 9. Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ je proces sa nezavisnim priraštajima ako su $\forall n \in N$ i sve $t_0 < t_1 < \ldots t_n$ iz T, slučajne promenljive $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezavisne.

Definicija 10. a) Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ je strogo stacionaran ako su njegove konačno dimenzione raspodele invarijantne u odnosu na t, tačnije ako za sve $t_i, t_i + t \in T, i = 1, 2\ldots$ važi:

$$F_{t_1+t,\ldots t_n+t}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t_1,\ldots t_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

b) Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ je slabo stacionaran ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. $\mathrm{E}(X_t) = \mu = const, \forall t \in T$
2. $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty, \forall t \in T$
3. $\mathrm{Cov}(X_r, X_s) = \mathrm{Cov}(X_{r+t}, X_{s+t}) = \mathrm{E}[(X_{r+t} - \mu)(X_{s+t} - \mu)], \forall r, s, t \in T$

Definicija 11. Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ je gausovski(Gaussian) ako su sve njegove konačno dimenzione funkcije raspodele Gausovske, tačnije imaju višedimenzionu normalnu raspodelu.

Definicija 12. Stohastički proces $W_t = \{X_t, t \in T\}$ čiji su priraštaji $W_t - W_s$ nezavisni, stacionarni, i imaju raspodelu $\mathcal{N}(0,(t-s)I)$, čija je početna vrednost $W_0 = 0$ i koji ima skoro neprekidne trajektorije (sa verovatnoćom 1, funkcija $t \to W_t$ je neprekidna u t), naziva se **Vinerov proces** (Wiener).

Vinerov proces (Braunovo kretanje) je od izuzetnog je značaja i zbog svoje široke primene predstavlja jedan od najznačajnijih stohastičkih procesa.U nastavku definisaćemo lance Markova, koji imaju veoma široku primenu u mnogim naučnim oblastima.

2 Lanci Markova prvog reda

2.1 Lanci Markova u diskretnom vremenu

Više detalja o definicijama i osobinama lanaca Markova koje će biti navedene u ovom poglavlju mogu se naći u [1], [2] i [4].

2.1.1 Definicija i osobine

Pretpostavimo da analiziramo neki slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$, gde je X_t slučajna veličina definisana na nekom prostoru verovatnoća, i gde parametar t označava vreme. Tada, za ovaj proces kažemo da poseduje Markovljevo svojstvo, ukoliko verovatnosna struktura procesa u budućnosti ne zavisi od njegove predistorije, već zavisi samo od sadašnjeg trenutka (u kom se proces trenutno nalazi).

U zavisnosti od toga kako je definisan prostor stanja (da li je diskretan ili neprekidan) razlikujemo procese Markova sa diskretnim i neprekidnim vremenom. Lanci Markova su oni markovski procesi kod kojih je prostor stanja konačan ili prebrojiv.

U nastavku dodatno pretpostavljamo da sistem posmatramo u vremenskim trenucima $n \in \mathbb{N}_0$, i u skladu sa tim slučajni proces označavamo sa $\{X_n, n \geq 0\}$.

Definicija 13. Diskretan slučajni proces $\{X_n, n \geq 0\}$ je **lanac Markova** ako za svaki trenutak $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, i_1 \ldots i, j \in S$ važi sledeća jednakost:

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}.$$

Pri fiksiranom stanju i u momentu n dalje ponašnanje procesa ne zavisi od toga na koji način je proces došao u stanje i i od toga kroz koja stanja je proces prolazio do trenutka n. Uvodimo oznaku

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

kojom se označava verovatnoću prelaska sistema iz stanja i u stanje j. U skladu sa tim matricu svih verovatnoća prelaska označavamo sa $\mathbf{P}$, gde je $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{|Z| \times |Z|}$. U opštem slučaju matrica svih verovatnoća prelaska $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{|N_0| \times |N_0|}$ ima sledeći oblik:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{01} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}$$

Lanac Markova je **homogen** ukoliko za svako n i svaka dva stanja i i j važi da je $p_{ij}(n) = p_{ij}$, dodatno se homogeni lanac Markova naziva još i lanac Markova sa stacionarnim verovatnoćama prelaza. Nasuprot tome, ukoliko verovatnoća prelaska sistema iz stanja i u stanje j zavisi od trenutka n, takav lanac nazivamo nehomogeni lanac Markova.

Za svaki homogeni Markovljev lanac $\{X_n, n \geq 0\}$ važi da im je matrica verovatnoća prelaska $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$ stohastička, tačnije da za nju važe svojstva:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{za sve} \quad i, j \in \mathbb{Z},$$
$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad \text{za svako} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Prethono opisane verovatnoće prelaska, odnose se na verovatnoće prelaska iz stanja i u stanje j u jednom koraku. Potrebno je dodatno definisati i verovatnoće prelaska u većem broju koraka.

Definicija 14. Ako je dat homogen slučajni proces $\{X_n, n \geq 0\}$, sa prostorom stanja $\mathbb{Z}$, tada se matrica $\mathbf{P_n} = [p_{ij}^{(n)}]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$ čiji su članovi odredjeni jednakostima:

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

naziva **matrica verovatnoće prelaska** iz stanja i u stanje j za n koraka.

Dodatno primećujemo da važi $\mathbf{P_1} = \mathbf{P}$. Nakon uvodjenja matrice za računanje verovatnoća prelazaka u većem broju koraka, potrebno je da navedemo način za odredjivanje ovih verovatnoća. Za tu potrebu koristimo sledeću teoremu:

Teorema 2.1.1. Za proizvoljne prirodne brojeve m i n važe sledeće jednačine Kolmogorov-Čepmena:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

Dodatno važe i sledeće jednakosti:

$$\mathbf{P_{m+n}} = \mathbf{P_m}\mathbf{P_n},$$
$$\mathbf{P_n} = \mathbf{P^n}, \quad \text{gde } \mathbf{P^n} \text{ predstavlja } n\text{-ti stepen matrice.}$$

Dokaz. Koristeći jednakost koja važi za dogadjaje A, B i C, gde je $PC > 0$:

$$P(AB|C) = P(A|BC)P(B|C)$$

možemo za verovatnoću $p_{ij}^{(m+n)}$ da pokažemo da važi sledeća jednakost:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m+n)} &= P\{X_{m+n} = j|X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j, X_m = k|X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j|X_m = k, X_0 = i\}P\{X_m = k|X_0 = i\}. \end{aligned}$$

Zatim, u ovom koraku, korišćenjem svojstva Markova dobijamo:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m+n)} &= \sum_k P\{X_{m+n} = j|X_m = k, X_0 = i\}P\{X_m = k|X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j|X_m = k\}P\{X_m = k|X_0 = i\} \\ &= \sum_k p_{kj}^{(n)} p_{ik}^{(m)}. \end{aligned}$$

Kao posledica ove jednakosti slede i jednakosti $\mathbf{P_{m+n}} = \mathbf{P_m P_n}$ i $\mathbf{P_n} = \mathbf{P^n}$. ∎

Dodatno uvodimo i oznake za verovatnoće početnih stanja sistema (verovatnoća dogadjaja da se u početnom trenutku sistem nadje u nekom stanju i):

$$a_i = P\{X_0 = i\}, \text{ za svako } i \in \mathbb{Z}.$$

Za koje važi jednakost $\sum a_i = 1$.

Ukoliko sa $a_i^{(n)}$ označimo verovatnoću dogadjaja da je sistem u trenutku n u stanju i, $a_i^{(n)} = P\{X_n = i\}$, gde je $n \in \mathbb{N}$, tada i za proizvoljne prirodne brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ vazi sledeća jednakost:

$$\begin{aligned} a_j^{(m+n)} = P\{X_{m+n} = j\} &= \sum_i P\{X_{m+n} = j|X_m = i\}P\{X_m = i\} \\ &= \sum_i a_i^{(m)} p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

U skladu sa navedenom formulom primećujemo da još da za svaki prirodan broj n i proizvoljna stanja $i_0, i_1, i_2, ..., i_n$ važi jednakost:

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_0, ...X_n = i_n\} = a_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

2.1.2 Klasifikacija stanja

Prilikom analiza lanaca Markova, i njihove primene za potrebe modeliranja procesa, značajnu ulogu imaju različite vrste stanja u kojima se lanac Markova može naći. Sva potencijalna stanja mogu se klasifikovati na nekoliko načina. Da bismo klasifikovali i definisali ova stanja, potrebno je da uvedemo slučajnu veličinu Markovljev momenat, koju ćemo obeležavati sa τ.

Definicija 15. Ako je $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ lanac Markova čiji je skup stanja $\mathbb{Z}$, tada se τ naziva **Markovljev momenat** ukoliko ne zavisi od budućnosti, tačnije ukoliko se proizvoljan dogadjaj $\{\tau = t\}$ odredjuje slučajnim veličinama $\{X_s, s \leq t\}$.

Ova definicija može se interpretirati i na sledeći način: svaka evolucija sistema do trenutka t zaključno, jednoznačno odredjuje da li je $\{\tau = t\}$ ili $\{\tau \neq t\}$ Najznačajniji primeri Markovljevog momenta su trenutak prvog dolaska sistema u stanje i, trenutak prvog povratka u početno stanje i trenutak k-tog povratka u početno stanje.

Ukoliko sa τ_B označimo vreme koje protekne do prvog ulaska nekog procesa u skup B, tada važi da je:

$$\tau_B = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$$

U nastavku ćemo definisati dostižnost nekog stanja u lancu Markova kao i stanja koja medjusobno komuniciraju.

Definicija 16. Ako su dati $i, j \in S$, tada smatramo da je stanje j **dostižno iz stanja** i ukoliko važi da je

$$P_i\{\tau_j < \infty\} := P\{\tau_j < \infty | X_0 = i\} > 0$$

gde je $\tau_j = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}$ vreme koje protekne dok proces ne udje po prvi put u stanje j. Dostižnost posmatranog stanja j iz stanja i označavamo sa $i \to j$.

Definicija 17. Ako su dati $i, j \in S$, tada smatramo da su stanja i i j u komunikaciji (komuniciraju) ukoliko važi da je $i \to j$ i $j \to i$. Tačnije da je stanje j dostižno iz stanja i, i da je stanje i dostižno iz stanja j. Ovu osobinu označavamo na sledeći način $i \leftrightarrow j$.

Teorema 2.1.2. Stanje j je dostižno iz stanja i ako i samo ako postoji neko n za koje važi da je $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Dokaz. $\Leftarrow$: Ukoliko pretpostavimo da važi da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ za neko $n \geq 0$ prvo dokazujemo da je $P\{\tau_j < \infty | X_0 = i\} > 0$. Primetimo da, ako je $X_n = j$ očigledno je da prvi ulazak sistema u stanje j ne može biti posle n-tog koraka.
Tako da važi:

$$\{X_n = j\} \subset \{\tau_j \leq n\} \subset \{\tau_j \leq \infty\}$$

Odakle slede odgovarajuće nejednakosti:

$$0 < p_{ij}^{(n)} \leq P_i\{\tau_j < n\} \leq P_i\{\tau_j < \infty\} = P\{\tau_j < \infty | X_0 = i\}.$$

:$\Rightarrow$ Cilj nam je da pokažemo da na osnovu toga što važi da je $P_i\{\tau < \infty\} > 0$, važi i $p_{ij}^n = 1$ Ukoliko pretpostavimo da takva tvrdnja nije tačna, i da za svako $n \geq 0$ važi i da je $p_{ij}^n = 0$. Na osnovu toga sledi da je:

$$0 < P_i\{\tau < \infty\} = \lim_{n\to\infty} P_i\{\tau \leq n\} = \lim_{n\to\infty} P_i\left\{\bigcup_{k=0}^{n}\{X_k = j\}\right\} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} P_i\{X_k = j\} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^k = 0$$

Iz prethodnog zaključujemo da ako ne postoji ni jedno n za koje su $p_{ij}^n > 0$, tada stanje j nije dostižno iz stanja i, pošto važi da je $P_i\{\tau < \infty\} = 0$.

■

Jedna od važnijih matematičkih karakteristika koju imaju stanja koja medjusobno komuniciraju, jeste to da je komuniciranje izmedju stanja relacija ekvivalencije jer ima sledeća svojstva:

1. refleksivnost - za svako stanje i važi da je $i \leftrightarrow i$, kao posledica toga da je $P_i\{\tau_i < \infty\} = 1$.
2. simetričnost - $i \leftrightarrow j$ važi ako i samo ako $j \leftrightarrow i$.
3. tranzitivnost - ako važi da je $i \leftrightarrow j$ i $j \leftrightarrow k$, tada važi i da je $i \leftrightarrow k$.

Poslednju osobinu, tranzitivnosti, dokazujemo na sledeći način:

Dokaz. Prvo dokazujemo jedan smer, tačnije ukoliko važi da je $i \leftrightarrow j$ i $j \to k$, tada važi i da je $i \to k$. Pošto iz početnih pretpostavki znamo da važi $i \to j$ i $j \to k$ tada na osnovu definicije dostižnih stanja postoji n takvo da je $p_{ij}^n > 0$ i postoji m takvo da je $p_{jk}^m > 0$. Korišćenjem jednačina Kolmogorov-Čepmena dalje dobijamo:

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l\in S} p_{il}^n p_{lk}^m \geq p_{ij}^n p_{jk}^m > 0$$

Prethodnom nejednačinom dokazujemo da je stanje k dostižno iz stanja i, za kompletiranje celog dokaza nedostaje jos da dokažemo da je stanje i dostižno iz stanja k.

Analogno prethodnom slučaju koristeći pretpostavke da je $k \to j$ i $j \to i$, na osnovu definicije dostižnih stanja, znamo da postoji n_1 takvo da je $p_{kj}^{(n_1)} > 0$ i postoji m_1 takvo da je $p_{ji}^{m_1} > 0$. Dalje korišćenjem jednačina Kolmogorov-Čepmena dobijamo:

$$p_{ki}^{(m_1+n_1)} = \sum_{l\in S} p_{kl}^{n_1} p_{li}^{m_1} \geq p_{kj}^{n_1} p_{ji}^{m_1} > 0.$$

Čime smo dokazali da važi i $k \to i$.

■

Definicija 18. Za proizvoljni lanac Markova kažemo da je **nesvodljiv** ukoliko važi da je $i \leftrightarrow j$ za svako $i, j \in S$. Tačnije, lanac je nesvodljiv, ukoliko se prostor svih stanja S u odnosu na relaciju $\leftrightarrow$ sastoji od samo jedne klase ekvivalencije.

Značajna karakteristika nesvodljivih lanaca je ta što je svako stanje kod ovih lanaca dostižno iz svih ostalih stanja. Pored nesvodljivosti, još jedna jako važna karakteristika skupa stanja je i pojam zatvorenja ovih skupova.

Definicija 19. Za skup stanja C, gde je $C \subset S$, kažemo da je **zatvoren** za svako stanje $i \in C$ ako važi da je:

$$P_i\{\tau_{\bar{C}} = \infty\} = 1 \text{ gde je } \tau_{\bar{C}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \bar{C}\}.$$

Zatvorenje nekog skupa, u ovom slučaju skupa C, predstavlja najmanji zatvoren skup stanja koji sadrzi C. Ukoliko je taj zatvoren skup stanja jednočlan, $\{i\}$ tada kažemo da je stanje i apsorbujuće stanje. Takodje za sve zatvorene skupove stanja važe sledeće karakteristike:

1. U zatvoren skup se može ući, ali se iz njega ne može izaći.
2. Klase ekvivalencije stanja koja komuniciraju, ne moraju nužno biti zatvoreni skupovi stanja.
3. U svakom prostoru stanja može postojati beskonačno mnogo zatvorenih skupova i oni ne moraju biti disjunktni.

Osim prethodno navedene klasifikacije stanja, stanja lanca Markova mogu se podeliti i na osnovu toga koliko se često proces vraća u odredjeno stanje. Primer za to su povratna i prolazna stanja koja će biti definisana u nastavku.

Za potrebe definisanja ovih stanja dodatno ćemo uvesti i sledeće Markovljeve momente $\tau_i(1)$ i $\tau_i(n)$, broj koraka do prvog povratka sistema u stanje i i broj koraka do n-tog povratka sistema u stanje i. Ukoliko je dat proizvoljan lanac Markova, $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ i važi da je $P\{X_0 = i\} = 1$ (proces je u početnom trenutku u stanju i) tada važi:

$$\tau_i(1) = \inf\{m \geq 1 : X_m = i\}$$
$$\tau_i(n) = \inf\{m > \tau_i(n-1) : X_m = i\}.$$

Za neko stanje i, kažemo da je povratno stanje ukoliko važi da će se lanac Markova, za konačno mnogo koraka, sa verovatnoćom 1 vratiti u to stanje i. Ukoliko navedena tvrdnja ne važi tada za takvo stanje i kažemo da je prolazno stanje. U skladu sa tim za povratna stanja važi da je $P_i\{\tau_i(1) = \infty\} = 0$, dok je za sva prolazna stanja $P_i\{\tau_i(1) = \infty\} > 0$.

Definicija 20. Stanje i je **povratno** ako važi da je vreme do prvog povratka u stanje i skoro sigurno konačno:

$$P_i\{\tau_i(1) < \infty\} = 1.$$

U suprotnom je stanje i prolazno.

Pored toga, ukoliko dodatno važi i da je očekivano vreme koje protekne do prvog povratka sistema u stanje i skoro izvesno konačno, tada za stanje i kažemo da je pozitivno povratno i važi

$$E_i(\tau_i(1)) < \infty.$$

Ukoliko za stanje i važi da je očekivano vreme do prvog povratka beskonačno, tačnije $E_i(\tau_i(1)) = \infty$, tada za takvo stanje kažemo da je nula-povratno. Kriterijumi za povratnost i prolaznost stanja, dati su i u sledećoj teoremi, koja će biti navedena bez dokaza:

Teorema 2.1.3. Stanje i je povratno ako i samo ako važi da je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$, u suprotnom, stanje i je prolazno ako i samo ako važi da je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$.

Takodje uvešćemo i pojam stacionarnih raspodela kod lanaca Markova, koje su izutezno važne u procesu izučavanja ponašanja lanaca u budućnosti. Ukoliko postoji stacionarna raspodela i ako se ona koristi kao početna raspodela za lana Markova, onda on postaje stacionaran slučajan proces.

Definicija 21. Raspodela verovatnoća $(\pi_i)_{i\in Z}$, gde je $\sum_i \pi_i = 1$ je stacionarna raspodela za homogeni Markovljev lanac $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sa skupom stanja $\mathbb{Z}$, ako pri uslovu da je početna raspodela verovatnoća po stanjima

$$a_i = \pi_i, \text{ za sve } i \in \mathbb{Z}$$

raspodela u narednim trenucima vremena ostaje nepromenjena, tj. ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$a_i^{(n)} = P\{X_n = i\} = \pi_i, \text{ za sve } i \in \mathbb{Z}$$

Na kraju ovog poglavlja još ćemo uvesti i pojam ergodičnih lanaca Markova:

Definicija 22. Markovljev lanac je **ergodičan** ako za proizvoljna stanja i i j postoji:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0, \text{ gde je } \sum_j p_j = 1.$$

2.2 Lanci Markova u neprekidnom vremenu

Sve do sada opisano i definisano za lance Markova odnosilo se na lance Markova u diskretnom vremenu - o procesima koji zavise od diskretnog parametra i uzimaju vrednosti u najviše prebrojivom skupu. U ovom poglavlju razmatraćemo neprekidne lance Markova i opisati njihove najznačajnije osobine.

Definicija 23. Neka je dat slučajni proces $\{X(t), t \geq 0\}$, koji ima Markovljevo svojsto, tačnije za svako $n \in N$, i svako $i_0, i_1 \ldots i_n, j \in S$ i sve trenutke $t_0 < t_1 \cdots < t_n$ važi sledeća jednakost:

$$P\{X(t_{n+1}) = j | X(t_1) = i_1, \ldots X(t_n) = i_n\} = P\{X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i_n\}.$$

Tada se takav proces $\{X(t), t \geq 0\}$ zove Markovljev lanac u neprekidnom vremenu sa prebrojivim skupom stanja S.

Definicija 24. Verovatnoće prelaska $p_{ij}(s,t)$ definisane su za $s \leq t$ i $i, j \in S$ sledećim jednakostima:

$$p_{ij}(s,t) = P\{X(t) = j \mid X(s) = i\}.$$

Definicija 25. Markovljev lanac je **homogen** ako za sva stanja $i, j \in S$ i sve nenegativne brojeve $s \leq t$ važi:

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(0, s-t).$$

Ukoliko je poslednje svojstvo ispunjeno za neki lanac Markova, tačnije ukoliko je lanac Markova u neprekidnom vremenu homogen, onda za verovatnoće prelaska koristimo oznaku $p_{ij}(s-t)$, umesto $p_{ij}(s,t)$ ili jednostavnije samo $p_{ij}(t)$, gde je $t \geq 0$. Evolucija Makovljevog lanca u neprekidnom vremenu potpuno je odredjena verovatnoćama prelaza, $p_{ij}(s,t)$ za $s \leq t$ i $i, j \in S$. Ukoliko sa $a_i = P\{X(0) = i\}, i, j \in S$, označimo početnu raspodelu verovatnoća, tada korišćenjem ove raspodele i verovatnoće prelaska možemo odrediti konačno-dimenzione raspodele Markovljevog lanca $\{X(t), t \geq 0\}$, tako da za proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$ važi:

$$\begin{aligned} &P\{X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \ldots X(t_n) = i_n\} = \\ &= \sum_{i \in S} a_i p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots p_{i_{(n-1)} i_n}(t_{n-1} - t_n). \end{aligned}$$

Specijalno, na osnovu ove jednakosti, verovatnoća da se sistem u trenutku t nadje u stanju j jednaka je:

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\} = \sum_{i \in S} a_i p_{ij}(t), \, j \in S$$

Analogno lancima Markova u diskretnom vremenu, i za lance Markova u neprekidnom vremenu važe analogna svojstva i odgovarajuće jednačine Kolmogorov-Čepmena.

Teorema 2.2.1. Za proizvoljne pozitivne brojeve s i t i stanja $i, j \in S$ važi sledeća jednakost (jednačina Kolmogorov - Čepmena):

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

Dokaz. Dokaz teoreme potpuno je analogan dokazu ove teoreme za lance Markova u diskretnom vremenu.

Korišćenjem jednačina Kolmogorov - Čepmena i pretpostavljajući diferencijabilnost verovatnoća prelaska $p_{ij}(t)$ po t, mogu se izvesti diferencijalne jednačine za ove verovatnoće prelaska. Tačnije, dobićemo dva sistema diferencijalnih jednačina koji su poznati kao obrnuti i direktni Kolmogorovljevi sistemi.

Ako su verovatnoće prelaska $p_{ij}(t)$, $t \geq 0$, diferencijalne po t i ako je $q_{ij}(t) = p'_{ij}(0)$, $i, j \in S$, onda je:

$$q_{ii} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ii}(h)-1}{h} = -q_i \leq 0$$
$$q_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0, \quad i \neq j.$$

Teorema 2.2.2. (Obrnuti Kolmogorovljev sistem) Ukoliko pretpostavimo da su verovatnoće prelaska $P_{ij}(t)$, $t \geq 0$ diferencijabilne po t i označimo $q_{ij}(t) = p'_{ij}(0)$, gde su $i, j \in S$, i ako dodatno važi da je:

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i,$$

gde je q_{ij} odredjeno sledećim formulama:

$$q_{ii} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ii}(h)-1}{h} = -q_i \leq 0$$
$$q_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0, \quad i \neq j.$$

Tada za verovatnoće prelaska važe sledeće diferencijalne jednačine:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik}p_{kj}(t), \, i, j \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Koristeći jednačine Kolmogorova dobijamo da za $h > 0$ važi sledeće:

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} - \frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t) = \frac{p_{ij}(t+h)}{h} - \frac{p_{ii}(h)p_{ij}(t)}{h}$$
$$\sum_k \frac{p_{ik}(t)p_{kj}(h)}{h} - \frac{p_{ii}(h)p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(t)p_{kj}(h)}{h}$$

Ukoliko na desnoj strani jednakosti koju smo dobili uzmemo konačan broj sabiraka, na primer sabirke po indeksima $k \in [n, -n]$, onda za $h \to 0$ i $n \to \infty$, dobićemo sledeću nejednakost:

$$p'_{ij}(t) - q_{ii}p_{ij}(t) \geq \sum_{k \neq i} q_{ik}pkj(t).$$

Na taj način dobili smo ocenu odozdo, a nakon toga odredjujemo i ocenu odozgo za $p'_{ij}(t) - q_{ii}p_{ij}(t)$. Pošto za $n > |i|$ važi:

$$\lim_{h \in 0} \sum_{|k|>n} \frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h} \leq \lim_{h \in 0} \sum_{|k|>n} \frac{p_{ik}(h)}{h} = \lim_{h \in 0} \frac{1}{h}\left\{1 - \sum_{|k| \leq n} p_{ik}(h)\right\} =$$
$$\lim_{h \in 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} - \lim_{h \in 0} \sum_{|k| \leq n, k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} = q_i - \sum_{|k| \leq n, k \neq i} q_{ik},$$

Iz toga dobijamo da je:

$$p'_{ij}(t) - q_{ii}p_{ij}(t) \leq \sum_{k \neq i} q_{ik}pkj(t) + \left(q_i - \sum_{|k| \leq n, k \neq i} q_{ik}\right)$$

Na osnovu ocene odozgo i ocene odozdo zaključujemo da važi da je:

$$p'_{ij}(t) - q_{ii}p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik}pkj(t)$$

Čime je teorema i dokazana. ∎

Teorema 2.2.3. (Direktni Kolmogorovljev sistem) Neka je $q_{ij} \leq C_j$ za sve i i neka je u q_{ii} i q_{ij} konvergencija ravnomerna po stanjima (preciznije za verovatnoće prelaska $p_{ij}(t), t \geq 0$, diferencijabilne po t, važi da je $q_{ij}(t) = p'_{ij}(0)$, gde su q_{ij} odredjene sledećim formulama:

$$q_{ii} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = -q_i \leq 0$$
$$q_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0, \quad i \neq j).$$

Tada važi sledeća jednakost:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)q_{kj}, \; i, j \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Iz uslova da važi ravnomerna konvergencija po stanjima u:

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0$$

Dobijamo da je $\frac{p_{kj}(h)}{h} \leq \mathbb{C}$ za sve k i j. Jednačina $p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)q_{kj}$ dobija se ako se u jednakosti ispod pretpostavi da $h \to 0$:

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t)\frac{p_{ij}(h) - 1}{h} + \sum_{k \neq j} \frac{p_{ik}(t)p_{kj}(h)}{h}.$$

∎

3 Lanci Markova višeg reda

3.1 Uvod

Za razliku od lanaca prvog reda, lanci Markova višeg reda pomažu nam da detaljnije analiziramo i optimizujemo kompleksnije matematičke probleme. Kod ovakvih lanaca, stanje procesa koje odredjujemo ne zavisi samo od sadašnjeg trenutka, već i od odredjenog broja prethodnih stanja posmatranog lanca. Zbog tog svojstva, ovaj tip lanaca Markova često se koristi u razvoju i izradi matematičkih modela kojima se opisuju kompleksne prirodne pojave.

U nastavku ovog rada biće definisani i opisani lanci Markova višeg reda i dodatno objašnjeni najosnovniji matematički modeli koji se koriste za rad sa ovom klasom lanaca.

3.2 Matematički modeli

Kao što je već pomenuto, najznačajnija primena lanaca Markova višeg reda, jeste pri opisivanju procesa čije buduće ponašanja zavisi od niza istorijskih stanja. Da bismo mogli detaljnije da analizitamo takve procese i utvrdimo njihovu strukturu - potrebno je da kreiramo matematičke modele koji te procese najpreciznije simuliraju. U skladu sa tim, pre nego što detaljnije analiziramo lance višeg reda, opisaćemo i objasniti pojam matematičkog modeliranja i navesti osnovne pojmove koji su značajni za taj proces.

Definicija 26. Matematički modeli predstavljaju skup matematičkih relacija koje opisuju ili definišu veze između odredjenih veličina u posmatranom procesu.

Neformalno rečeno, ukoliko analiziramo odredjeni proces, na primer kretanje cena na trzistu, replikaciju gena u DNK itd. - matematičkim modelima predstavićemo na jednostavan način veze između svih veličina koje karakterišu taj proces, replicirajući pri tome najvažnija svojstva tog procesa.

Matematički modeli sastoje se od matematičkih relacija, koje predstavljaju uzajamne veze u posmatranim procesima, i parametara (konstanti i promenljivih), koji predstavljaju elemente posmatranih procesa. U zavisnosti od strukture koju imaju, oni se mogu klasifikovati na osnovu nekoliko različitih kriterijuma:

- deterministčki/stohastički model

  Deterministički model sadrži promenljive kojima se pri zadatim uslovima mogu pripisati tačno odredjene vrednosti - skup stanja promenljivih jedinstveno je određen parametrima u modelu. Kod stohastičkih modela odredjene promenljive (parametre modela) neophodno je smatrati slučajnim. Stohastički modeli nazivaju se još i statistički modeli.

- linearni/nelinearni model

  Ukoliko su sve relacije u matematičkom modelu linearne, celokupan matematički model je linearan. U suprotnom, smatra se da je model nelinearan.

- stacionarni/nestacionarni model

  Za nestacionarne procese je karakteristično da se bar neke od promenljivih(ili sve) menjaju u toku vremena, i odgovarajući modeli kojima se oni opisuju se zovu nestacionarni modeli. Za stacionaran procese važi da se svojstva sistema, odnosno promenljive, ne menjaju sa vremenom. Takvi procesi opisuju se stacionarnim modelima.

- diskretni/kontinualni model

  Diskretni model sadrži samo diskretne promenljive, dok kontinualni model analizira dodatno i neprekidne promenljive.

Definicija 27. Matematičko modeliranje predstavlja proces razvoja matematičkog modela, i podrazumeva postavljanje odgovarajućih matematičkih jednačina koje opisuju ponašanje posmatranog sistema u stacionarnom ili u dinamičkom stanju. Pored odredjivanja osnovnih formula, pod procesom modeliranja podrazumeva se i odredjivanje svih prametara koji čine matematički model.

Matematčke (analitičke) jednačine koje opisuju ponašanje nekog sistema (i koje se koriste za proces modeliranja) mogu biti:

- Linearne jednačine
- Nelinearne jednačine
- Algebarske jednačine
- Diferencijalne jednačine
- Integralne jednačine

Modeli koji će biti opisani u okviru ovog rada, nastaju modeliranjem realnih procesa koji imaju strukturu lanaca Markova višeg reda - predvidjanje strukture DNK u genima, optimizacija proizvodnih procesa u zavisnosti od efikasnosti prodaje kroz vreme itd.

3.3 Definicije i osobine

Nakon što smo definisali matematičke modele, u nastavku ovog poglavlja definisaćemo lance Markova višeg reda i opisati njihova osnovna svojstva.

Definicija 28. Slučajni proces $\{X_n, n \geq 0\}$, gde $X_n : \Omega \to S$ (skup S je konačan ili prebrojiv) nazivamo **lanac Markova reda** m ukoliko svako $n \geq 0$, stanje u kome se posmatrani proces može naći, zavisi od njegovih m prethodnih stanja, tačnije važi sledeća jednakost:

$$P\{X_n = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} =$$
$$P\{X_n = j | X_{n-m} = i_{n-m}, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = p_{j,\dots,i_{n-m}}$$

Očigledno je da za $m = 1$ dobijamo standardan lanac Markova. Analogno tome, sve karakteristike koje poseduju lanci Markova prvog reda mogu se uopštiti tako da budu primenljive i na lance Markova višeg reda. U skladu sa tim, matrica verovatnoća prelaska za lance Markova višeg reda, definiše se za verovatnoću prelaska iz stanja $i_{n-1}, ..., i_{n-m}$ u stanje j i mnogo je kompleksnija nego matrica koju posmatramo kod lanaca Markova prvog reda. Usložnjavanje uzrokuju dodatne verovatnoće prelaska u više koraka.

Na primer, ukoliko posmatramo lanac Markova reda k sa 3 potencijalna stanja ($S = \{1, 2, 3\}$), tada će naša tranziciona matrica umesto 3^2 potencijalnih tranzicija (kao kod standardnog lanca Markova prvog reda) imati $3^k * 3^k$ potencijalnih tranzicija. Pošto je potrebno razmotriti i sve prethodne $k - 1$ korake u kojima se sistem mogao naći pre prelaska u sledeće stanje. To znači da verovatnoća da se neki proces u trenutku X_n nalazi u stanju 1, zavisi od toga u kojim stanjima se sistem nalazio u prethodnim koracima i sve te tranzicije potrebno je razmotriti $X_{n-1} \dots X_{n-k}$. Konkretno, sa p_{112} označavamo verovatnoću da u trenutku t_{n-1} i t_{n-2}, važi da je $X_{n-1} = 1$ i $X_{n-2} = 1$, dok je $X_n = 2$. Za opisani lanac drugog reda tranziciona matrica će imati sledeći oblik:

$$
P = \begin{array}{cc|ccccccccc}
 & X_2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
X_0 & X_1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 1 & p_{111} & 0 & 0 & p_{112} & 0 & 0 & p_{113} & 0 & 0 \\
2 & 1 & p_{211} & 0 & 0 & p_{212} & 0 & 0 & p_{213} & 0 & 0 \\
3 & 1 & p_{311} & 0 & 0 & p_{312} & 0 & 0 & p_{313} & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & p_{121} & 0 & 0 & p_{122} & 0 & 0 & p_{123} & 0 \\
2 & 2 & 0 & p_{221} & 0 & 0 & p_{222} & 0 & 0 & p_{223} & 0 \\
3 & 2 & 0 & p_{321} & 0 & 0 & p_{322} & 0 & 0 & p_{323} & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 & p_{131} & 0 & 0 & p_{132} & 0 & 0 & p_{133} \\
2 & 3 & 0 & 0 & p_{231} & 0 & 0 & p_{232} & 0 & 0 & p_{233} \\
3 & 3 & 0 & 0 & p_{331} & 0 & 0 & p_{332} & 0 & 0 & p_{333}
\end{array}
$$

Može se primetiti da za slučaj kada je red lanca veći od jedan, postoji odredjen broj tranzicija koje ne mogu da se dogode. Primer za to je tranzicija iz prvog reda ($X_0 = 1$ i $X_1 = 1$) i druge kolone ($X_1 = 2$ i $X_2 = 1$), pošto se vrednost koju proces ima u trenutku X_1 razlikuje. Verovatnoća ove tranzicije je u tom slučaju jednaka nuli, i taj element nazivamo **strukturalna nula**. Kako su svi elementi matrice kod kojih se javljaju ove strukturalne nule poznati, samu matricu je moguće ispisati i preformulisati tako da bude kompaktnija i ne sadrži ove elemente.

Ovakav način zapisa ovih matrica koji je definisao Pegram (Geoffrey G. S. Pegram, 1980.), naziva se **redukovana forma** tranzicione matrice i obeležavaćemo je sa R. Redukovana forma tranzicione matrice iz opisanog primera, lanca Markova drugog reda sa tri potencijalna stanja, ima sledeći oblik:

$$
R = \begin{bmatrix}
p_{111} & p_{112} & p_{113} \\
p_{211} & p_{212} & p_{213} \\
p_{311} & p_{312} & p_{313} \\
p_{121} & p_{122} & p_{123} \\
p_{221} & p_{222} & p_{223} \\
p_{321} & p_{322} & p_{323} \\
p_{131} & p_{132} & p_{133} \\
p_{231} & p_{232} & p_{233} \\
p_{331} & p_{332} & p_{333}
\end{bmatrix}
$$

Svaka moguća kombinacija m uzastopnih stanja posmatrane slučajne promenljive X_n, $(X_{n-m}, \ldots X_{n-1})$, naziva se stanje modela. Ukupan broj potencijalnih stanja modela jednak je N^m, gde je m red lanca Markova koji ima N stanja. U opštem slučaju tranziciona matrica lanca Markova reda m koja ima N potencijalnih stanja imaće sledeći oblik:

$$
P = \begin{array}{cccc c}
 & & & & X_n \\
X_{n-m} & \ldots & X_{n-2} & X_{n-1} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{array} &
\begin{array}{c} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \vdots \\ \ldots \\ \ldots \\ \vdots \\ \ldots \end{array} &
\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{array} &
\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{array} &
\begin{bmatrix}
p_{1\ldots 11} & p_{1\ldots 12} & \cdots & p_{1\ldots 1N} \\
p_{2\ldots 11} & p_{2\ldots 12} & \cdots & p_{2\ldots 1N} \\
p_{3\ldots 11} & p_{3\ldots 12} & \cdots & p_{3\ldots 1N} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
p_{N\ldots 11} & p_{N\ldots 12} & \cdots & p_{N\ldots 1N} \\
p_{1\ldots 21} & p_{1\ldots 22} & \cdots & p_{1\ldots 2N} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
p_{N\ldots N1} & p_{N\ldots N2} & \cdots & p_{N\ldots NN}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Više detalja o tranzicionim matricama lanaca Markova višeg reda mogu se naći u [11] i [12].

3.4 Modeliranje lanaca Markova višeg reda

Kao što je već pomenuto na početku ovog rada, primena lanaca Markova u procesu matematičkog modeliranja izuzetno je važna. Modeliranje procesa koji imaju strukturu ovih lanaca koristi se često u polju finansija, u medicini, biologiji i ostalim prirodnim naukama.

Prvi izazov sa kojim se susrećemo u modeliranju ovakvih procesa, jeste izbor odgovarajuće strukture lanca Markova koja najviše odgovara posmatranom problemu. Da bismo to uradili neophodno je da dobijemo odgovor na nekoliko pitanja:

- Odredjivanje odgovarajućeg reda lanca Markova koji treba primeniti.
- Odredjivanje matrice verovatoća prelaska izmendju svih potencijalnih stanja.
- Razmatranje tehničkih kapaciteta neophodnih za razvoj kompleksnih modela koji imaju tako veliki broj parametara.

U skladu sa navedenim, pored mnogih pozitivnih aspekata koje dobijamo modeliranjem lanaca Markova višeg reda, i činjenice da pomoću njih možemo opisati veoma kompleksne procese - postoje i odredjena ograničenja koja moramo uzeti u obzir prilikom razvoja modela za ovakve lance. Ova ograničenja posledica se kompleksnih algoritama linearne optimizacije koji se u ovakvim modelima primenjuju. Razlog za njihovu kompleksnost je preveliki broj parametara koje treba odrediti prilikom razvoja modela za ovakav tip Markovljevih lanaca.

Kod ovih lanaca, broj parametara koji su neophodni za modeliranje eksponencijalno raste sa povećavanjem reda lanca koji se koristi. Tačnije, ukoliko imamo lanac Markova m-tog reda sa N stanja, broj stanja (parametara) koje modeliramo je u tom slučaju N^{m+1}. Koliko brzo se broj parametara uvećava, čak i za lance Markova koji imaju malo stanja, možemo videti u sledećoj tabeli (u kolonama su navedene dimenzije tranzicionih matrica u zavisnosti od broja stanja i reda lanca Markova):

Broj stanja (N)	Red lanca Markova (m)	Veličina TM	Broj verovatnoća prelaska
2	1	2x2	4
2	2	4x2	8
2	3	8x2	16
2	4	16x2	32
3	1	3x3	9
3	2	9x3	27
3	3	27x3	81
3	4	81x3	243
4	1	4x4	16
4	2	16x4	64
4	3	64x4	256
4	4	256x4	1024

Tako da čak i ukoliko bismo uspeli da odredimo sve parametre, snimanje i čuvanje ovolikog broja podataka je veliki problem. Dodatno, u skladu sa tim što broj parametara brzo raste, količina podataka koja je neophodna za razvoj modela se eksponencijalno uvećava sa povećanjem reda m (a prikupljanje tako velikih količina podataka obično nije moguće).

Jedno od prvih pojednostavljenja modela za lance Markova višeg reda dao je Rafteri (Adrian E. Raftery), koji je predstavio model lanaca Markova višeg reda kod koga se broj paramatara uvećava za jedan sa svakim povećanjem reda. Broj parametara u ovakvom modelu je $n + m^2$. Ako je dat slučajni proces X_n sa konačnim skupom stanja $N = \{1, 2, \dots m\}$ i posmatramo lanac Markova reda k, tako da X_n zavisi od svih $X_{n-1} \dots X_{n-k}$. Tada se **Rafteri model** može predstaviti na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
& P\{X_n = j | X_{n-k} = i_{n-k}, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = \\
& = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l P\{X_n = j | X_{n-l} = i_{n-l}\} \\
& = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l p_{i_{n-l} j}.
\end{aligned}
$$

Gde su:

$$\sum_{l=1}^{k} \lambda_l = 1$$

i $P = [p_{i_{n-l} j}]$ je nenegativna $m \times m$ tranziciona matrica verovatnoća prelaska iz stanja i_{n-l} u stanje j, za koju dodatno važi da je:

$$0 \leq \sum_{l=1}^{k} \lambda_l p_{i_{n-l}j} \leq 1. \tag{3.1}$$

Poslednja nejednačina garantuje nam da je desna strana jednakosti u Rafterijevom modelu raspodela verovatnoća. Jedan od najznačajnijih doprinosa ovog modela jeste redukcija broja parametara koji se modeliraju, pošto je ukupan broj parametara koje modeliramo u Rafteri modelu $(k + m^2)$. Medjutim problem nastaje u kompleksnosti odredjivanja parametara λ_l i $p_{i_{n-l}j}$. U Rafteri modelu parametri λ_l i $p_{i_{n-l}j}$ numerički se ocenjuju korišćenjem metode maksimalne verodostojnosti pomoću kompleksnih metoda nelinarne optimizacije.

Rafteri model, koji se koristi za rad sa lancima Markova višeg reda, može se proširiti i uopštiti dozvoljavanjem da tranziciona matrica verovatnoća prelaska P varira u odnosu na različiti broj koraka (lag - ove). Ovde pretpostavljamo da je parametar značajnosti λ_i nenegativan i da važi:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \tag{3.2}$$

Pored prethodnog zapisa Rafteri modela, ovaj model možemo predstaviti i na drugačiji način. Ako uvedemo oznaku za verovatnoću raspodele stanja u trenutku n, i obeležimo je sa $\mathbf{X}^{(n)}$, tako da $\mathbf{X}^{(n)} = (\bar{X}_0^{(n)}, \bar{X}_1^{(n)}, ..)$, gde je $\bar{X}_i^{(n)}$ verovatnoća da je proces u stanju i nakon n koraka i važi da je $\sum_i^\infty \bar{X}_i^{(n)} = 1$. Tada sledi:

$$\mathbf{X}^{(n+k+1)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P \mathbf{X}^{(n+k+1-i)}, \tag{3.3}$$

gde je sa $\mathbf{X}^{(n+k+1-i)}$ označena funkcija raspodele stanja u trenutku $n + k + 1 - i$, a sa P odgovarajuća tranziciona matrica verovatnoća prelaska. Takodje koristeći činjenicu da je P tranziciona matrica i da je suma svih λ_i jednaka 1, možemo primetiti da je svako $\mathbf{X}^{(n+k+1)}$ u intervalu $[0, 1]$ i da je suma svih njih jednaka 1. Dodatno, pošto se kod Rafteri modela ne pretpostavlja da je λ_i nenegativno, uslov 3.1 mora da bude uključen da bi se obezbedilo da je $\mathbf{X}^{(n+k+1)}$ raspodela verovatnoća. Korišćenjem navedenih pretpostavki Rafteri model možemo raspisati i generalizovati na sledeći način:

$$\mathbf{X}^{(n+k+1)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \mathbf{X}^{(n+k+1-i)}, \tag{3.4}$$

U ovom slučaju broj nezavisnih parametara koji treba odrediti je $(k + km^2)$. Dodatno se može primetiti da u navedenoj jednačini, u slučaju kada je:

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_k$$

dobijamo standardni Rafteri model.

U novom modelu mi pretpostavljamo da $\mathbf{X}^{(n+k+1)}$ zavisi od $\mathbf{X}^{(n+i)}$, gde je $(i = 1, 2, \ldots, k)$ preko matrice P_i i parametra λ_i. U nastavku ćemo navesti nekoliko teorema potrebnih za odredjivanje parametara kod ovog modela:

Teorema 3.4.1. Ako pretpostavimo da je matrica Q_i **nesvodljiva** i da je $\lambda_i > 0$ takvo da važi:

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Tada model:

$$\mathbf{X}^{(n+k+1)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \mathbf{X}^{(n+k+1-i)}, \tag{3.5}$$

Ima stacionarne raspodele $\bar{\mathbf{X}}$ kada $n \to \infty$ nezavisne od vektora verovatnoća početnih stanja $\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{X}^{(1)}, \ldots \mathbf{X}^{(k-1)}$, i stacionarna raspodela $\bar{\mathbf{X}}$ je jedinstveno rešenje sledećeg linearnog sistema jednačina:

$$(I - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i)\bar{\mathbf{X}} = 0 \quad \text{i} \quad 1^T \bar{\mathbf{X}} = 1, \tag{3.6}$$

gde je sa I označena $m \times m$ jedinična matrica, a 1 je $m \times 1$ vektor jedinica.

Pre nego što dokažemo navedenu teoremu, definisaćemo pojam nesvodljivih matrica uz pomoć narednih definicija:

Definicija 29. Matrica Q reda n se naziva **permutaciona matrica** ako za sve $i, j = 1, 2, \ldots n$ važi:

- $p_{i,j} \in [0, 1]$
- $\sum_i p_{i,j} = 1$
- $\sum_j p_{i,j} = 1$

Definicija 30. Matrica Q je permutaciono slična matrici P ukoliko postoji permutaciona matrica S tako da važi sledeća jednakost $Q = S^T P S$

Definicija 31. Nenegativna matrica Q, za koju važi da je $n \geq 2$ se naziva **svodljiva** ukoliko je permutaciono slična sa matricom koja ima sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

, gde su navedene matrice B i D kvadratne podmatrice. U suprotnom matrica Q je nesvodljiva.

Nakon što smo definisali nesvodljive matrice u nastavku izvodimo dokaz teoreme 3.2.1. :

Dokaz. Neka $\mathbf{Y}^{(n+k+1)} = (\mathbf{X}^{(n+k+1)}, \mathbf{X}^{(n+k)}, \dots \mathbf{X}^{(n+2)})^T$ predstavlja $nm \times 1$ vektor. Tada važi $\mathbf{Y}^{(n+1)} = R\mathbf{Y}^{(n)}$ gde je:

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \dots & \lambda_{n-1} P_{n-1} & \lambda_n P_n \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica $nm \times nm$. Tada definišemo i $\tilde{R}$ na sledeći način:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 & I & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 P_2 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & I & 0 \\ \lambda_{n-1} P_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & I \\ \lambda_n P_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice R i $\tilde{R}$ imaju isti karakteristican polinom u τ:

$$\det[(-1)^{k-1}((\lambda_1 P_1 - \tau I)\tau^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i P_i \tau^{k-i}]$$

Prema tome R i $\tilde{R}$ imaju iste sopstvene vrednosti. Za matricu $\tilde{R}$ možemo primetiti da je to nesvodljiva stohastička matrica kod koje je suma svih kolona jednaka 1. Koristeći teoremu Peron - Frobenius (Perron - Frobenius, videti u [9] na strani 134.), možemo zaključiti da se sve sopstvene vrednosti matrica R i $\tilde{R}$ nalaze u intervalu (0,1] i da postoji tačno jedna sopstvena vrednost jednaka jedinici. Dalje zaključujemo da:

$$\lim_{n\to\infty} R_1 \dots R_n = \lim_{n\to\infty} (R)^n = VU^T.$$

I važi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{Y}^{(n+k+1)} &= \lim_{n\to\infty} (R)^n \mathbf{Y}^{(k+1)} \\ &= V(U^T \mathbf{Y}^{(k+1)}) \\ &= V\alpha \end{aligned}$$

Gde je α nenegativan broj, što sledi iz $\mathbf{Y}^{(k+1)} \neq 0$. Iz toga sledi da $\mathbf{X}^{(n)}$ takodje ima stacionarnu raspodelu kad t teži beskonačnosti. Iz toga imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}^{(n+k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \mathbf{X}^{(n+k+1-i)}$$

Iz čega sledi:

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \bar{\mathbf{X}}$$

Dalje je jasno da za vektor stacionarne raspodele $\bar{\mathbf{X}}$ važi:

$$(I - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i)\bar{\mathbf{X}} = 0 \quad \text{i} \quad 1^T \bar{\mathbf{X}} = 1.$$

■

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza, jer se izvodi kao direktna posledica prethodne toreme, dok se potpun dokaz nalazi u [10]:

Teorema 3.4.2. Ako je P_k nesvodljiva i aperiodična, i važi da je $\lambda_1, \lambda_k > 0$ i $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Tada model ima stacionarne raspodele za slučajne promeljive X koje zadovoljavaju uslove:

$$(I - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i)\bar{\mathbf{X}} = 0 \quad \text{i} \quad 1^T \bar{\mathbf{X}} = 1.$$

I važi da je:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{X}^{(n)} = \bar{\mathbf{X}}.$$

3.5 Odredjivanje parametara modela

U ovoj sekciji biće opisani efikasni načini za odredjivanja parametara P_i i λ_i za svako $i = 1, 2 \ldots k$, kod ovih modela. Na samom startu potrebno je da za početni dati set podataka $\{X^{(n)}\}$ izračunamo tranzicije $f_{jl}^{(i)}$ i matricu prelazaka sistema iz stanja l u stanje j u i-tom koraku:

$$F^{(i)} = \begin{bmatrix} f_{11}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{m1}^{(i)} \\ f_{11}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{m2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1m}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{mm}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Koristeći preračunatu matricu tranzicija, odredjujemo matricu verovatnoća prelaska $P_i = [p_{lj}^{(i)}]$ na sledeći način:

$$\hat{P}_i = \begin{bmatrix} \hat{p}_{11}^{(i)} & \cdots & \cdots & \hat{p}_{m1}^{(i)} \\ \hat{p}_{11}^{(i)} & \cdots & \cdots & \hat{p}_{m2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{p}_{1m}^{(i)} & \cdots & \cdots & \hat{p}_{mm}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Gde su:

$$\hat{p}_{lj}^{(i)} = \begin{cases} \frac{f_{lj}^{(i)}}{\sum_{l=1}^{m} f_{lj}^{(i)}} & \text{, ako je } \sum_{l=1}^{m} f_{lj}^{(i)} \neq 0 \\ \\ 0 & \text{, inače} \end{cases} \tag{3.7}$$

Primećujemo još da je kompleksnost računanja matrice $F^{(i)}$ - $O(L^2)$, gde je sa L označena dužina niza podataka. Takodje kompleksnost računanja matrice $\{F^{(i)}\}_{i=1}^{k}$ - $O(kL^2)$, gde je sa k označen broj legova(red matrice). Sledećom teoremom, koju navodimo bez dokaza (dokaz ove teoreme može se naći u [5]), pokazujemo da su ocene ovih parametara nepristrasne:

Teorema 3.5.1. Za ocenu $\hat{p}_{lj}^{(i)}$ definisanu formulom (3.6) važi jednakost da je:

$$E(f_{kj}^{(i)}) = p_{kj}^{(i)} E(\sum_{j=1}^{m} f_{kj}^{(i)})$$

Nakon što smo u prethodnom delu definisali način za odredjivanje ocene $\hat{P}_i$ potrebno je još odrediti i ocenu za parametre $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_i)$ da bi model bio u potpunosti odredjen.

Pretpostavljajući da $\mathbf{X}^{(n)} \to \bar{\mathbf{X}}$ kada $n \to \infty$, tada se $\bar{\mathbf{X}}$ može oceniti iz samih podataka, odredjivanjem proporcije pojavljivanja svakog stanja u setu podataka - obeležićemo taj vektor sa $\hat{\mathbf{X}}$. Kao posledicu teoreme 3.4.2 imamo da je:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{P}_i \hat{\mathbf{X}} \approx \hat{\mathbf{X}}$$

Koristeći ovu jednakost možemo da definišemo jedan od potencijalnih načina za ocenjivanje parametara $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k)$, gde je sa k označeno kog je reda posmatrani lanac Markova. Tražene parametre odredjujemo rešavanjem sledećeg problema optimizacije:

$$\min_{\lambda} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{P}_i \hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}} \right\| \right\}$$

Pod uslovom da je:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{ i } \quad \lambda_i \geq 0 \text{ , za svako } i.$$

I gde je $\|\cdot\|$ odredjena vektorska norma. Ukoliko je ta norma $\|\cdot\|_\infty$, tada je problem koji treba da rešimo, da bismo odredili tražene parametre, sledeći:

$$\min_{\lambda} \left\{ \max_{l} \left| \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{P}_i \hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}} \right]_l \right| \right\}$$

Gde važi da je:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_i \geq 0$$

U ovom slučaju $[\cdot]_l$ predstavlja l-ti element vektora. Navedena ograničenja u optimizacionom problemu garantuju postojanje stacionarne distribucije $\bar{\mathbf{X}}$. Takodje vidimo da se navedeni problem minimizacije može formulisati i kao problem linearnog programiranja:

$$\min_{\lambda} \omega$$

Gde važi:

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix} \geq \hat{\mathbf{X}} - \begin{bmatrix} \hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} | \hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} | \dots | \hat{P}_k\hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix} \geq -\hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} \hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} | \hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} | \dots | \hat{P}_k\hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

$$\omega \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_i \geq 0$$

Ovako definisani problem linearnog programiranja može se efikasno rešiti i na taj način odrediti parametar λ_i. Za razliku od rešavanja min – max problema, može se izabrati umesto gore korišćene $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$. U tom slučaju navedeni optimizacijski problem se formuliše na sledeći način:

$$\min_{\lambda} \left\{ \sum_{l=1}^{m} \left| \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{P}_i \hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}} \right]_l \right| \right\}$$

Gde važi da je:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_i \geq 0$$

U ovom slučaju se problem linearnog programiranja formuliše na sledeći način:

$$\min_{\lambda} \sum_{l=1}^{m} \omega_l$$

Gde važi:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} \geq \hat{\mathbf{X}} - \begin{bmatrix} \hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} | \hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} | \dots | \hat{P}_k\hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} \geq -\hat{\mathbf{X}} + \left[\hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} | \hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} | \dots | \hat{P}_k\hat{\mathbf{X}} \right] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

$$\omega_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_i \geq 0.$$

U prethodno opisanom problemu linearne optimizacije, u kome imamo k promenljivih, broj uslova koji treba da budu zadovoljeni je $(2m+1)$, dok je kompleksnost rešavanja ovog problema $O(k^3L)$ (gde je L broj bitova potrebnih za skladištenje podataka).

Više detalja o modelima koji se koriste za lance Markova višeg reda kao i sve definicije i teoreme koje su navedene u ovom poglavlju, mogu se naći u [5], [6], [7] i [8].

4 Primeri primene lanaca Markova višeg reda

Postoje mnoge oblasti u kojima je korišćenje lanaca Markova višeg reda neophodno da bi se dobili zadovoljavajući rezultati i rešili kompleksni problemi. Primena ovih lanaca rasprostranjena je u finansijama(posebno u bankarstvu), marketingu, analizi tržišta, medicini i mnogim drugim oblastima. Neki od primera poznati u naučnoj literaturi biće navedeni u nastavku. Na samom početku pre nego što budu navedeni konkretni primeri primene ovih lanaca, biće opisan uvodni primer lanaca Markova višeg reda. Više detalja o primerima koji su navedeni u ovom radu, kao i podaci koji su korišćeni za njih, mogu se naći u [5].

4.1 Uvodni primer

Pretpostavimo da sistem koji posmatramo ima tri potencijalna stanja (m=3) i da je dat sledeći niz podataka:

$$\{X_n\} = \{1,1,2,2,1,3,2,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,1,2\}$$

Ili zapisano u formi vektora:

$$X_1 = (1,0,0)^T, X_2 = (1,0,0)^T, X_3 = (0,1,0)^T, \dots, X_{20} = (0,1,0)^T$$

Ako još pretpostavimo da je red lanca Markova $k = 2$, možemo da odredimo sledeće tranzicione matrice - $F^{(1)}$ i $F^{(2)}$:

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i kad je k=2} \quad F^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovih tranzicionih matrica, a korišćenjem formule (3.6) možemo lako da odredimo tranzicione matrice verovatnoća prelaska za $i = 1,2$, koje obeležavamo sa $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$:

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

I dodatno možemo da izračunamo i $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)^T$$

Koristeći $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ dobijamo:

$$\hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} = \left(\frac{13}{35}, \frac{57}{140}, \frac{31}{140}\right)^T$$

$$\hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} = \left(\frac{47}{140}, \frac{61}{140}, \frac{8}{35}\right)^T.$$

Preostaje još da odredimo parametare λ_i gde je $i = 1, 2$ i model je potpuno odredjen. Ove parametre odredićemo korišćenjem oba prethodno navedena metoda linearne optimizacije - $\min_{\lambda_1\lambda_2} \omega$ i $\min_{\lambda_1\lambda_2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$. Prvo ćemo tražene parametre odrediti optimizacijom problema $\min_{\lambda_1\lambda_2} \omega$.

U tu svrhu potrebno je rešiti sledeći sistem nejednačina. U ovom primeru za tu svrhu korišćena je EXCEL funkcija SOLVER:

$$\begin{cases} \omega \geq \frac{2}{5} - \frac{13}{35} * \lambda_1 - \frac{47}{140} * \lambda_2 \\ \omega \geq -\frac{2}{5} + \frac{13}{35} * \lambda_1 + \frac{47}{140} * \lambda_2 \\ \omega \geq \frac{2}{5} - \frac{57}{140} * \lambda_1 - \frac{61}{140} * \lambda_2 \\ \omega \geq -\frac{2}{5} + \frac{57}{140} * \lambda_1 + \frac{61}{140} * \lambda_2 \\ \omega \geq \frac{1}{5} - \frac{31}{140} * \lambda_1 - \frac{8}{140} * \lambda_2 \\ \omega \geq -\frac{1}{5} + \frac{31}{140} * \lambda_1 + \frac{8}{140} * \lambda_2 \\ \omega \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je optimalno rešenje:

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \omega^*) = (1, 0, 0.02857).$$

Tako da model možemo zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_1\hat{P}_1\mathbf{X}^{(n)} + \lambda_2\hat{P}_2\mathbf{X}^{(n-1)}$$

Što je u ovom konkretnom primeru:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)}$$

Ukoliko tražene parametre odredjujemo optimizacijom problema $\min_{\lambda_1 \lambda_2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$, tada je potrebno da rešimo sledeći sistem nejednačina (kao i u prethodnom slučaju korišćenjem EXCEL funkcija SOLVER):

$$\begin{cases} \omega_1 \geq \frac{2}{5} - \frac{13}{35} * \lambda_1 - \frac{47}{140} * \lambda_2 \\ \omega_1 \geq -\frac{2}{5} + \frac{13}{35} * \lambda_1 + \frac{47}{140} * \lambda_2 \\ \omega_2 \geq \frac{2}{5} - \frac{57}{140} * \lambda_1 - \frac{61}{140} * \lambda_2 \\ \omega_2 \geq -\frac{2}{5} + \frac{57}{140} * \lambda_1 + \frac{61}{140} * \lambda_2 \\ \omega_3 \geq \frac{1}{5} - \frac{31}{140} * \lambda_1 - \frac{8}{140} * \lambda_2 \\ \omega_3 \geq -\frac{1}{5} + \frac{31}{140} * \lambda_1 + \frac{8}{140} * \lambda_2 \\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Rešavanjem ovog drugog sistema odredjujemo više parametara i dobijamo da je optimalno rešenje:

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) = (1, 0, 0.02857, 0.0071, 0.0214).$$

Kada želimo da analiziramo performanse i efektivnost samog modela lanaca Markova višeg reda, definišemo dodatno meru r koja predstavlja preciznost modela. Prediktivnost ovih modela, izuzetno je korisna mera kada želimo da odredimo adekvatan model kojim opisujemo zadati problem. Mera preciznosti modela odredjuje se na sledeći način:

$$r = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^{T} \delta_t.$$

gde je sa T označena dužina niza koji smo posmatrali, a sa δ_t uspešnost predikcije:

$$\delta_t = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \hat{X}_t = X_t \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \tag{4.3}$$

U prethodnom primeru, preciznost odredjujemo u zavisnosti od dva prediktivna pravila koja su definisana modelom.

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 1 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)}$$

Zamenom vrednosti u jednačini dobijamo tri nove jednačine iz kojih odredjujemo dva prediktivna pravila:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 1 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)}$$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 1 * \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 1 * \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 1 * \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo dva potencijalna prediktivna pravila:

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = 2 & \text{ako je } \hat{X}_n = 1, \\ \hat{X}_{n+1} = 1 & \text{ako je } \hat{X}_n = 2, \\ \hat{X}_{n+1} = 1 & \text{ako je } \hat{X}_n = 3 \end{cases}$$

i drugo prediktivno pravilo:

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = 2 & \text{ako je } \hat{X}_n = 1, \\ \hat{X}_{n+1} = 3 & \text{ako je } \hat{X}_n = 2, \\ \hat{X}_{n+1} = 1 & \text{ako je } \hat{X}_n = 3. \end{cases}$$

U zadatom primeru za oba prediktivna pravila računamo da je preciznost jednaka 12/19, ili 63.15%.

4.2 Primena lanaca Markova višeg reda prilikom analize DNK

Primena Lanaca Markova višeg reda rasprostranjena je u velikoj meri u medicini i biologiji, posebno pošto omogućava utvrdjivanje odredjenih zavisnosti/zakonitosti koje korišćenjem običnih lanaca Markova ne bi bile vidljive. Jedan od takvih primera, jeste primena lanaca Markova višeg reda na analizu DNK strukture(nizova) u genima. Pomenuta analiza korišćena je kako bi se utvrdilo da li postoje odredjene pravilnost/zakonitost u strukturi DNK sekvenci u samim genima. Znajući da se geni sastoje od segmenata koji sadrže informacije za sintezu proteina (egzoni) i nekodirajućih nizova (introna, naziv intron je izveden iz termina intrageni region, tačnije region unutar gena) izmedju njih, cilj ove analize bilo je utvrdjivanje potencijalnih zakonitosti u strukturi introna, samim tim i gena, na osnovu poznatih podataka. Analizu je sproveo Averi (P. Avery, 1987.) koji je posmatrao strukturu introna u genima miševa.

Analizirano je i posmatrano nekoliko potencijalnih modela, kojima bi se zavisnost i očekivana struktura gena mogla predvideti, i najprecizniji rezultati dobijeni su korišćenjem modela za lance Markova drugog reda. Podaci koje je Averi analizirao nalaze se u tabeli ispod, podaci obuhvataju nizove gena u dva introna ukupne dužine 1306 baza (A, C, G, T su četiri baze koje čine strukturu introna i gena - gde je A=1, C=2, G=3 i T=4):

3411314321	1221212433	4422422413	2432421313	3334244334	2443424131	3312132413
3314224231	3333212414	3122243432	4242242113	2112342221	3224242221	3224234122
2332131334	4333434321	2212143224	1432431134	2122212142	1223331443	3334233133
1331312211	2213222231	3222213222	3124322434	2444422422	2142133211	3441214332
3113321132	3432443122	3322124222	4331244424	3442443343	4333334433	3143422431
1322213131	3312333244	4244121312	3333213311	2244243413	2433211132	4321314333
3242244424	1324422243	1431243113	1113322121	4222422241	2221134313	2212134424
1311313243	2242224443	2442111131	1332422213	1233314221	3243211242	4133113211
1443222211	1432133242	4132133321	3311313133	3343331113	3244434144	1321324134
1341243433	1124344334	1141433121	3323133313	3242243312	3414331412	1221213124
4413422212	2132413221	3442221144	1322133211	1431422441	1431122232	2122214114
2112214112	2112213241	2244411421	1221324324	4114243441	1313221422	1112214112
2142121241	3122141142	1132112233	2211224341	1241321442	4324312112	2133213244
1432411342	1411322141	1224331242	4114213221	1332124212	4312214421	1221442412
4241222112	2242411424	1411221344	1324414424	1411421344	3424312221	3414122213
2114311423	2124322213	4224433342	4331334211	4343314244	1224343333	2213343121
3422213222	2133121212	2132444244	3324431331	1321313313	4312334433	4424314332
4313242442	2443422414	3431422132	2214213312	2141213243	4422222142	2444342424
3313243343	3422444333	3132422111	2343334443	344213		

Tranziciona matrica koja je dobijena od zadatih podataka ima sledeći oblik:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ C \\ G \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & C & G & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 71 & 113 & 73 & 58 \\ 78 & 129 & 85 & 83 \\ 108 & 21 & 101 & 89 \\ 58 & 112 & 60 & 66 \end{pmatrix} \end{array}$$

Za modeliranje problema korišćeni su lanci Markova prvog i drugog reda(u nastavku finalni model) kao i Rafteri model - i nakon toga testirana je preciznost svih modela u cilju odredjivanja onog modela koji najbolje rešava pomenuti problem. Takodje posmatrana su tri odvojena slučaja, tranzicije izmedju svih baza (A, C, G, T), purin - piramidin tranzicije(izmedju A/G i C/T) kao i kombinovane tranzicije (izmedju A/G, C i T).

U nastavku će detaljno biti opisan i izračunat finalni model koji je dobijen korišćenjem lanaca Markova višeg reda. Za ostale modele koji su testirani biće navedeni samo krajnji rezultati dobijeni prilikom testiranja preciznosti modela.

Prvi model odredićemo za najjednostvniji slučaj purin - piramidin tranzicija, pošto u tom slučaju imamo samo 4 potencijalna stanja koja posmatramo - tranzicije A/G u C/T, A/G u A/G, C/T u A/G i C/T u C/T. Za početak će kao i u prethodnom primeru biti odredjene matrice $F^{(1)}$ i $F^{(2)}$:

$$F^{(1)} = \begin{array}{c} \\ A/G \\ C/T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A/G & C/T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 353 & 281 \\ 281 & 390 \end{pmatrix} \end{array} \qquad F^{(2)} = \begin{array}{c} \\ A/G \\ C/T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A/G & C/T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 288 & 345 \\ 346 & 325 \end{pmatrix} \end{array}$$

Na osnovu ovih tranzicionih matrica kao i u prethodnom primeru, korišćenjem formule (3.6) možemo lako da odredimo tranzicione matrice verovatnoća prelaska za $i = 1, 2$, $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$:

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5568 & 0.4188 \\ 0.4432 & 0.5812 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4543 & 0.5156 \\ 0.5442 & 0.4844 \end{bmatrix}$$

I dodatno računamo $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = (0.4862, 0.5138)^T$$

Zatim koristeći $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ dobijamo:

$$\hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} = (0.4858, 0.5141)^T$$

$$\hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} = (0.4858, 0.5134)^T.$$

Preostaje još da odredimo parametre λ_i gde je $i = 1, 2$ i traženi model je potpuno odredjen. Ove parametre odredićemo korišćenjem metoda linearne optimizacije, rešavanjem problema $\min_{\lambda_1 \lambda_2} \omega$.

Za tu svrhu potrebno je rešiti sistem nejednačina:

$$\begin{cases} \omega \geq 0.4862 - 0.4858 * \lambda_1 - 0.4858 * \lambda_2 \\ \omega \geq -0.4862 + 0.4858 * \lambda_1 + 0.4858 * \lambda_2 \\ \omega \geq 0.5138 - 0.5141 * \lambda_1 - 0.5134 * \lambda_2 \\ \omega \geq -0.5138 + 0.5141 * \lambda_1 + 0.5134 * \lambda_2 \\ \omega \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je optimalno rešenje:

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \omega^*) = (0, 0.5073, 0.4937).$$

Tako da model možemo zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_1 \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + \lambda_2 \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)}$$

Što je u ovom konkretnom primeru:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 0.5073 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + 0.4927 * \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)}$$

Na osnovu dobijenog modela zaključujemo da važe sledeća prediktivna pravila:

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = 1 & \text{ako je } \hat{X}_n = 1 \text{ i } \hat{X}_{n-1} = 1, \\ \hat{X}_{n+1} = 1 & \text{ako je } \hat{X}_n = 1 \text{ i } \hat{X}_{n-1} = 2, \\ \hat{X}_{n+1} = 2 & \text{ako je } \hat{X}_n = 2 \text{ i } \hat{X}_{n-1} = 2, \\ \hat{X}_{n+1} = 2 & \text{ako je } \hat{X}_n = 2 \text{ i } \hat{X}_{n-1} = 1. \end{cases}$$

Koristeći ova prediktivna pravila računamo preciznost samog modela:

Niz	Broj kombinacija
111	181
211	172
222	216
122	174
212	109
112	171
121	107
221	174

Na osnovu podataka zaključujemo da je preciznost finalnog modela 57%. Rezultati koji su dobijeni Rafteri modelom i metodom slučajnog izbora ("Random" modelom) su 57% i 50%. U ovom primeru kada posmatramo tranzicije izmedju dva stanja Rafteri model i model lanaca Markova višeg reda daju istu preciznost, dok se u slučaju kada posmatramo više potencijalnih stanja - mnogo veća preciznost dobija korišćenjem modela sa lancima Markova višeg reda.

Ukoliko posmatramo kombinovane tranzicije (izmedju A/G, C i T) - tada model i tranzicione matrice kreiramo za šest potencijalnih stanja. Na početku odredjujemo matrice $F^{(1)}$ i $F^{(2)}$:

$$F^{(1)} = \begin{array}{c} \\ A/G \\ C \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A/G & C & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 353 & 134 & 147 \\ 163 & 129 & 83 \\ 118 & 112 & 66 \end{pmatrix} \end{array} \qquad F^{(2)} = \begin{array}{c} \\ A/G \\ C \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A/G & C & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 288 & 205 & 141 \\ 208 & 86 & 81 \\ 137 & 84 & 74 \end{pmatrix} \end{array}$$

Na osnovu njih odredjujemo verovatnoće prelaska za $i = 1, 2$, koje obeležavamo sa $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$:

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5568 & 0.3573 & 0.4966 \\ 0.2571 & 0.3440 & 0.2804 \\ 0.1861 & 0.2987 & 0.2230 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4543 & 0.5467 & 0.4764 \\ 0.3286 & 0.2293 & 0.2736 \\ 0.2164 & 0.2240 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

I dodatno računamo $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = (0.4862, 0.2871, 0.2266)^T$$

Zatim koristeći $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ dobijamo:

$$\hat{P}_1 \hat{\mathbf{X}} = (0.4859, 0.2873, 0.2268)^T$$

$$\hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} = (0.4862, 0.2876, 0.2262)^T.$$

Preostaje još da odredimo parametre λ_i, gde je $i = 1, 2$ i traženi model je potpuno odredjen. Ove parametre odredićemo linearnom optimizacijom problema $\min_{\lambda_1 \lambda_2} \omega$ kao i u prethodnom primeru.

U tu svrhu potrebno je rešiti sistem nejednačina:

$$\begin{cases} \omega \geq 0.4862 - 0.4859 * \lambda_1 - 0.4862 * \lambda_2 \\ \omega \geq -0.4862 + 0.4859 * \lambda_1 + 0.4862 * \lambda_2 \\ \omega \geq 0.2871 - 0.2873 * \lambda_1 - 0.2876 * \lambda_2 \\ \omega \geq -0.2871 + 0.2873 * \lambda_1 + 0.2876 * \lambda_2 \\ \omega \geq 0.2266 - 0.2268 * \lambda_1 - 0.2262 * \lambda_2 \\ \omega \geq -0.2266 + 0.2268 * \lambda_1 + 0.2262 * \lambda_2 \\ \omega \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je optimalno rešenje:

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \omega^*) = (0.000272, 0.7542, 0.2458).$$

Tako da model možemo zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_1 \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + \lambda_2 \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)}$$

Što je u ovom konkretnom primeru:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 0.7541 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + 0.2458 * \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)}$$

Na osnovu dobijenog modela i prediktivnih pravila koja su pomocu njega definisana, dobijamo da je preciznost ovog modela 49%. Preciznost Rafteri modela je 47%, za ovako definisan sistem, dok je preciznost "Random" modela 33%.

U poslednjem modelu posmatrane su tranzicije izmedju svih baza (A, C, G i T) i dobijeni rezultati su navedeni u nastavku. Matrice $F^{(1)}$ i $F^{(2)}$:

$$F^{(1)} = \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ G \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & C & G & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 71 & 113 & 73 & 58 \\ 78 & 129 & 85 & 83 \\ 108 & 21 & 101 & 89 \\ 58 & 112 & 60 & 66 \end{pmatrix} \end{array} \qquad F^{(2)} = \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ G \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & C & G & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 71 & 113 & 73 & 58 \\ 78 & 129 & 85 & 83 \\ 108 & 21 & 101 & 89 \\ 58 & 112 & 60 & 66 \end{pmatrix} \end{array}$$

Verovatnoće prelaska za $i = 1, 2$, koje obeležavamo sa $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$:

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.2254 & 0.3013 & 0.2288 & 0.1959 \\ 0.2476 & 0.3440 & 0.2665 & 0.2804 \\ 0.3429 & 0.0560 & 0.3166 & 0.3007 \\ 0.1841 & 0.2987 & 0.1881 & 0.2230 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.1879 & 0.2933 & 0.2514 & 0.2331 \\ 0.3822 & 0.2293 & 0.2759 & 0.2736 \\ 0.2516 & 0.2533 & 0.2288 & 0.2432 \\ 0.1783 & 0.2240 & 0.2539 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

I dodatno računamo $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = (0.2412, 0.2871, 0.2450, 0.2266)^T$$

Zatim koristeći $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ dobijamo:

$$\hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} = (0.2414, 0.2873, 0.2445, 0.2268)^T$$

$$\hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} = (0.2415, 0.2876, 0.2446, 0.2262)^T.$$

Dalje se rešavanjem sistema nejednačina kao u prethodnim slučajevima dobija da je optimalno rešenje:

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \omega^*) = (0.00043, 0.249412, 0.750588).$$

Tako da model možemo zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_1\hat{P}_1\mathbf{X}^{(n)} + \lambda_2\hat{P}_2\mathbf{X}^{(n-1)}$$

Što je u ovom konkretnom primeru:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 0.2494 * \hat{P}_1\mathbf{X}^{(n)} + 0.7506 * \hat{P}_2\mathbf{X}^{(n-1)}$$

Na osnovu dobijenog modela i prediktivnih pravila koja su pomocu njega definisana, dobijamo da je preciznost ovog modela 33%. Preciznost Rafteri modela je 31%, za ovako definisan sistem, dok je preciznost "Random" modela 25%.

Iz sumarne analize ovih modela koja se nalazi u tabeli ispod, vidno je da je preciznost modela koji je testiran(Finalnog modela) veća od ostalih testiranih modela:

Preciznost testiranih modela

Model	2 - tranzicije	3 - tranzicije	4 - tranzicije
Finalni model	57%	49%	33%
Rafteri model	57%	47%	31%
"Random" model	50%	33%	25%

4.3 Primena lanaca Markova višeg reda prilikom optimizacije i analize prodaje

U pimeru koji će biti opisan u narednoj sekciji analizirana je efikasnost i uspešnost u prodaji jedne velike internacionalne kompanije. Cilj analize bilo je rešavanje problema planiranja proizvodnje i kontrole zaliha. Inicijalni razlog za ovu analizu, bio je problem koji je nastao sa skladištenjem zaliha proizvoda ove kompanije, pošto se u centralnom skladištu pojavio višak proizvoda čija je produkcija i prodaja na jako niskom nivou. Za te potrebe kompanija je analizirala efikasnost prodaje svoja četiri glavna proizvoda (obeleženih sa proizvod A, B, C i D) i za svaki od njih definisala 6 potencijalnih stanja kako se kretala prodaja na mesečnom nivou:

- Veoma slaba prodaja
- Slaba prodaja
- Standardan nivo prodaje
- Visok nivo prodaje
- Veoma visok nivo prodaje

Kompanija je analizirala podatke o ovim proizvodima i efikasnosti njihove prodaje na nedeljnom nivou u prethodnih pet godina. Važan rezultat ove analize trebao je da bude razvoj strategije, i bolje planiranje procesa proizvodnje svakog od ovih proizvoda. Podaci o ponašanju ovih proizvoda i kretanju vremenske serije uspešnosti prodaje, za svaki od posmatranih proizvoda, dati su u sledećim nizovima:

- Proizvod A: 6 6 6 6 2 6 2 6 2 2 6 2 6 6 2 6 2 4 4 4 5 6 6 1 2 2 6 6 6 2 6 2 6 6 2 6 2 2 6 2 1 2 2 6 6 6 2 1 2 6 2 6 6 2 2 6 2 2 2 6 2 6 2 2 2 2 2 6 2 2 6 6 6 6 1 2 2 6 2 2 2 2 6 2 2 2 2 3 3 2 3 2 6

6 6 6 2 6 2 6 6 2 6 2 6 6 2 6 6 2 2 3 4 3 3 1 3 1 2 1 6 1 6 6 1 6 6 2 6 2 6 2 2 2 6 6 1 6 2 6 1 2 1 6 2 6 2 2 2 2 6 6 1 6 6 2 2 6 2 2 2 3 4 4 4 6 4 6 1 6 6 1 6 6 6 6 1 6 2 2 2 6 6 6 6 2 6 6 2 2 6 2 6 2 2 2 6 2 2 2 6 6 6 6 3 2 2 6 2 2 2 2 2 2 6 2 6 2 2 2 6 2 2 6 6 2 6 6 6 2 2 2 3 3 3 4 1 6 6 1 6 6 1 6 1 6 6 6 6 1 6 6 6 2 1 2 2 2 2 2 2 3 6 6 6 6 6 2 6

- Proizvod B: 1 6 6 1 6 1 1 1 1 1 1 6 6 6 1 2 1 6 6 1 1 1 6 6 2 1 6 6 1 1 1 6 1 2 1 6 2 2 2 2 2 6 1 6 6 1 2 1 6 6 6 1 1 1 6 6 1 1 1 1 6 1 1 2 1 6 1 6 1 1 6 2 6 2 6 6 6 3 6 6 1 6 6 2 2 2 3 2 2 6 6 6 1 1 6 2 6 6 2 6 2 6 6 1 3 6 6 1 1 1 2 2 3 2 2 6 2 2 2 1 6 1 6 1 1 6 2 1 1 1 2 2 1 6 1 1 1 1 2 6 1 1 1 1 6 1 6 1 2 1 6 1 6 6 1 6 1 2 2 2 2 3 3 2 2 2 6 6 6 6 2 1 1 6 1 1 1 6 1 6 1 6 1 6 1 1 6 6 2 1 1 6 6 1 1 2 6 2 6 6 6 1 2 6 1 6 1 1 1 1 6 1 6 1 1 6 6 1 6 6 1 6 1 6 6 1 1 6 6 2 2 2 2 2 2 2 2 2 6 6 6 6 1 6 6 6 1 6 6 1 6 6 1 1 6 1 3 3 3 5 1 6 6 6 6 6 6 6 6
- Proizvod C: 6 6 6 6 6 6 6 2 6 6 6 6 6 6 6 2 6 6 6 6 2 6 6 6 2 2 6 6 6 6 6 6 6 1 6 2 6 6 6 6 6 6 6 2 6 6 1 2 6 1 6 6 1 6 2 6 6 6 6 6 6 6 2 6 6 6 2 6 6 1 6 6 6 6 6 6 6 3 3 6 3 2 1 2 2 1 6 6 1 6 1 6 6 6 6 6 6 1 6 6 6 1 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 2 6 6 6 6 6 6 6 6 2 2 6 6 2 6 1 2 6 6 6 2 6 6 2 6 6 2 6 1 6 2 6 2 1 2 6 6 2 2 6 2 6 2 2 6 2 6 6 6 2 2 2 6 6 2 6 6 2 2 6 1 2 1 2 6 6 2 2 6 6 1 2 2 1 6 2 6 2 2 1 1 5 6 3 6 1 6 6 1 2 2 6 1 6 2 6 6 1 6 2 6 2 6 6 6 1 6 1 6 6 2 2 2 1 2 3 6 1 6 1 6 1 6 1 6 6 6 1 1 6 6 6 6 6 1 6 6 6 1 6 1 1 6 6 6 6 6 6 6 6 1 6 6 1 6
- Proizvod D: 6 2 2 2 2 3 3 4 4 4 5 4 3 3 6 2 6 6 6 3 4 4 3 3 3 3 3 2 6 6 3 4 4 4 4 3 4 2 6 2 2 6 2 2 6 6 3 4 5 4 4 6 3 6 6 6 2 6 2 6 6 2 2 6 4 4 5 4 3 4 3 4 4 6 2 6 6 2 2 6 2 6 6 2 6 6 2 6 6 2 6 2 6 3 5 5 5 4 4 4 3 6 2 6 6 2 6 2 6 2 2 6 2 6 6 2 6 4 4 4 4 4 4 6 3 6 6 2 6 2 6 2 6 2 6 6 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 5 5 4 5 3 3 3 6 2 6 6 2 2 6 2 2 2 2 6 2 3 2 2 3 6 3 2 2 3 4 4 4 4 5 5 4 4 6 6 2 6 2 6 2 2 2 2 2 2 2 5 5 4 4 5 5 2 6 2 6 6 2 6 2 6 2 2 3 3 4 4 5 4 4 4 3 4 3 6 2 6 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 5 4 4 4 3 2 2 2 6 2 2 2 6 2 6 2 6 2 2 2 2 2 2 3 2

Korišćenjem lanaca Markova drugog i trećeg reda mozemo mnogo preciznije modelirati i predvideti efikasnost prodaje svakog od ovih proizvoda u budućnosti. Za tu svrhu na samom početku odredjujemo tranzicione matrice za svaki od navedenih proizvoda - za jedan, dva i tri koraka prelaska. U ovom primeru za proizvod A tranzicione matrice imaju sledeći oblik:

$$\hat{P}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 5 & 51 & 6 & 1 & 0 & 46 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 14 & 48 & 1 & 1 & 0 & 50 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \hat{P}_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 56 & 7 & 3 & 0 & 41 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13 & 43 & 1 & 1 & 0 & 56 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\hat{P}_3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 4 & 52 & 8 & 5 & 0 & 39 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 50 & 2 & 1 & 0 & 51 \end{pmatrix} \end{array}$$

Na osnovu ovih tranzicionih matrica kao i u ostalim primerima, uz korišćenje formule (3.6) odredjujemo tranzicione matrice verovatnoća prelaska za $i = 1, 2, 3$, koje obeležavamo sa $\hat{P}_1$,$\hat{P}_2$ i $\hat{P}_3$:

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.06 & 0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.12 \\ 0.23 & 0.47 & 0.46 & 0.11 & 0.00 & 0.40 \\ 0.09 & 0.03 & 0.31 & 0.33 & 0.00 & 0.01 \\ 0.05 & 0.00 & 0.08 & 0.44 & 1.00 & 0.02 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 0.64 & 0.44 & 0.08 & 0.11 & 0.00 & 0.44 \end{bmatrix} \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,09 \\ 0,05 & 0,51 & 0,54 & 0,33 & 0,00 & 0,36 \\ 0,09 & 0,03 & 0,31 & 0,22 & 0,00 & 0,02 \\ 0,05 & 0,00 & 0,08 & 0,33 & 1,00 & 0,03 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,01 \\ 0,59 & 0,39 & 0,08 & 0,11 & 0,00 & 0,50 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_3 = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,11 \\ 0,18 & 0,48 & 0,62 & 0,56 & 0,00 & 0,35 \\ 0,14 & 0,01 & 0,23 & 0,22 & 0,00 & 0,04 \\ 0,05 & 0,00 & 0,00 & 0,11 & 1,00 & 0,05 \\ 0,05 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,41 & 0,46 & 0,15 & 0,11 & 0,00 & 0,46 \end{bmatrix}$$

Kao i u prethodnim primerima, dodatno računamo i $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = (0.0818, 0.4052, 0.04833, 0.03346, 0.0037, 0.4275)^T$$

Koristeći ovako izračunate $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{P}_1$,$\hat{P}_2$ i $\hat{P}_3$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1\hat{\mathbf{X}} &= (0.0822, 0.4067, 0.0484, 0.0335, 0.0038, 0.4254)^T \\ \hat{P}_2\hat{\mathbf{X}} &= (0.0824, 0.4042, 0.0485, 0.0337, 0.0038, 0.4275)^T \\ \hat{P}_3\hat{\mathbf{X}} &= (0.0830, 0.4054, 0.0487, 0.0341, 0.0037, 0.4252)^T. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Preostaje još da odredimo parametare λ_i gde je $i = 1, 2, 3$ i model je u potpunosti odredjen. Ove parametre odredićemo, kao i u prethodnom primeru, korišćenjem metoda linearne optimizacije - $\min_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \omega_A$.

$$\begin{cases}
\omega_A \geq 0.0818 - 0.0822 * \lambda_1 - 0.0824 * \lambda_2 - 0.0830 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq -0.0818 + 0.0822 * \lambda_1 + 0.0824 * \lambda_2 + 0.0830 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq 0.4052 - 0.4067 * \lambda_1 - 0.4042 * \lambda_2 - 0.4054 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq -0.4052 + 0.4067 * \lambda_1 + 0.4042 * \lambda_2 + 0.4054 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq 0.04833 - 0.0484 * \lambda_1 - 0.0485 * \lambda_2 - 0.0487 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq -0.04833 + 0.0484 * \lambda_1 + 0.0485 * \lambda_2 + 0.0487 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq 0.03346 - 0.0335 * \lambda_1 - 0.0337 * \lambda_2 - 0.0341 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq -0.03346 + 0.0335 * \lambda_1 + 0.0337 * \lambda_2 + 0.0341 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq 0.0037 - 0.0038 * \lambda_1 - 0.0038 * \lambda_2 - 0.0037 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq -0.0037 + 0.0038 * \lambda_1 + 0.0038 * \lambda_2 + 0.0037 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq 0.4275 - 0.4254 * \lambda_1 - 0.4275 * \lambda_2 - 0.4252 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq -0.4275 + 0.4254 * \lambda_1 + 0.4275 * \lambda_2 + 0.4252 * \lambda_3 \\
\omega_A \geq 0, \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.
\end{cases} \tag{4.7}$$

Rešavanjem ovog drugog sistema odredjujemo više parametara i dobijamo da je optimalno rešenje:

$$(\omega_A, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0.0006, 0.2771, 0.7228, 0).$$

Tako da model kojim procenjujemo produkciju i efikasnost proizvoda A možemo zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_1 \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + \lambda_2 \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)}$$

Što je u ovom konkretnom primeru za proizvod A sledeća formula:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = 0.2771 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + 0.7228 * \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)}$$

Na osnovu dobijenih modela i prediktivnih pravila koja su definisana za proizvod A, dobijamo da je preciznost ovog modela 79%. Ponavljanjem opisane procedure za sve ostale proizvode dobijamo sledeće modele:

$$
\begin{aligned}
(\omega_B, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) &= (0.00006, 0.9207, 0.0793, 0) \\
(\omega_C, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) &= (0.000000002, 0.9999, 0.0001, 0) \\
(\omega_D, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) &= (0.0004, 0.8988, 0.0994, 0.0018).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Ispisano u formi modela:

$$
\begin{aligned}
&\text{Proizvod B: } \mathbf{X}^{(n+1)} = 0.9207 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + 0.0793 * \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)} \\
&\text{Proizvod C: } \mathbf{X}^{(n+1)} = 0.9999 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + 0.0001 * \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)} \\
&\text{Proizvod D: } \mathbf{X}^{(n+1)} = 0.8988 * \hat{P}_1 \mathbf{X}^{(n)} + 0.0994 * \hat{P}_2 \mathbf{X}^{(n-1)} + 0.0018 * \hat{P}_3 \mathbf{X}^{(n-2)}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Preciznost modela koji su dobijeni za ostale proizvode je u tabeli ispod:

Preciznost testiranih modela

Model	Proizvod A	Proizvod B	Proizvod C	Proizvod D
Markov model - prvog reda	76%	70%	39%	74%
Markov model - višeg reda	79%	78%	51%	83%
"Random" model	25%	25%	25%	25%

5 Zaključak

Kroz ovaj rad predstavili smo i definisali lance Markova višeg reda i ukazali na njihove pozitivne i korisne strane u primeni prilikom modeliranja slučajnih procesa. Rezultati koje dobijamo prilikom primene modela zasnovanih na lancima Markova višeg reda, precizniji su i prediktivniji od modela koji koriste standardne lance Markova prvog reda. Takav rezultat je direktna posledica načina na koji su lanci Markova višeg reda konstruisani i toga što oni prilikom modeliranja i analize klijenata razmatraju veću i dužu istorijsku vremensku seriju.

Kao što je već opisano u prethodnom poglavlju lanci Markova višeg reda (takodje i lanci Markova prvog reda) veliku primenu imaju u modeliranju prirodnih pojava. Medjutim pored toga što se ovi modeli primenjuju za modeliranje u velikom broju prirodnih nauka, najveća primena ovih lanaca jeste u okviru bankarskog sektora. U okviru finansijskog/bankarskog sektora se modeli kreirani korišćenjem lanaca Markova višeg reda koriste za potrebe kreiranja regulatornih modela zahtevanih od strane Narodne Banke Srbije. To se pre svega odnosi na modele koji se koriste za procenu kreditnog rizika klijenata, IFRS9 metodologiju kao i procenu potencijalnih gubitaka finansijske institucije (VAR).

Za popularnost lanaca Markova višeg reda u bankarskom sektoru, pre svega u proceni kreditnog rizika, zaslužno je to što ovi modeli prilikom procene rizika uzimaju u obzir i informacije iz dalje prošlosti. Na taj način omogućava se preciznija i adekvatnija procena rizika u finansijskim institucijama, što kasnije ima pozitivne efekte na samo poslovanje banaka, odgovaranje regulatornim zahtevima i računanje adekvatnosti kapitala.

Takodje sam način konstrukcije i njihova prediktivnost razlog su za to da se oni koriste u širokom spektru različitih industrija - od finansija, marketinga do bioinformatike. Pored toga i jednostavnost samog algoritma ovih lanaca čini ih primenjivijim i češćim u svakodnevoj upotrebi. Jedine mane ovih lanaca jesu kompleksnost kalkulacije zbog korišćenja linearne optimizacije, kao i korišćenje prevelikog broja parametara neophodnih za razvoj samih modela.

Literatura

[1] Pavle Mladenović,"Verovatnoća i statistika", Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[2] Slobodanka Janković, Lenka Glavaš, "Stohastički modeli u operacionim istraživanjima", Matematički fakultet, 2016.

[3] L. Arnold, "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications", New York, 1974.

[4] Samuel Karlin, Howard M. Taylor, "A first course in stochastic processes", Academic press, New York, 1975.

[5] Wai-Ki Ching, Ximin Huang, Michael K. Ng, Tak-Kuen Siu "Markov Chains: Models, Algorithms and Applications", Second edition, 2013.

[6] Dao Xuan Ky, Luc Tri Tuyen, "A Higher order Markov model for time series forecasting", 2018.

[7] Wai-Ki Ching, Michael K. Ng, Eric S. Fung, "Higher-order multivariate Markov chains and their applications", 2007.

[8] A. Raftery, "A model for high-order Markov chains", Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) pp. 528–539. 1985.

[9] O. Axelsson, "Iterative solution methods", Cambridge, 1996.

[10] Zhu D, Ching W, "A note on the stationary property of high-dimensional Markov chain models", 2011.

[11] André Berchtold, Adrian E. Raftery, "The Mixture Transition Distribution Model for High-Order Markov Chains and Non-Gaussian Time Series", Statistical Science, 2002.

[12] Wai Ki Ching, Eric S. Fung, Michael K. Ng, "Higher-Order Markov Chain Models for Categorical Data Sequences", 2004.