Математички факултет

МАСТЕР РАД

МАРТИНГАЛНИ H_p ПРОСТОРИ

Студент:

Милица Иконић

Ментор:

проф. др Драгољуб Кечкић

Београд

Септембар 2020.

Садржај

Предговор

Теорија мартингала илуструје историју математичке вероватноће, при чему можемо основне дефиниције поистоветити са стратегијом игара на срећу. Појам мартингала је близак појму случајног корака, па је самим тим то и био мотив за увођење у теорију вероватноће. Временом теорија је постала софистицирани алат модерне математике доприносећи и осталим пољима, као што су проучавање финансијских тржишта и финансијских деривата, па чак и теорији дифузија која се раније проучавала методама из теорије о парцијалним диференцијалним једначинама данас се развила у теорију мартингала.

Још раних седамдесетих година пратећи развој $H_p - BMO$ теорије на $\mathbb{R}^n$, развијала се и теорија мартингала, при чему ће касније добити назив мартингални простори и мартингалне неједнакости. Све до сада, најбитније чињенице у теорији $H_p - BMO$ на $\mathbb{R}^n$ имају своје задовољавајуће аналогне чињенице у мартингалном окружењу. Мартингали могу бити разматрани у случају дискретног параметра и непрекидног параметра. У раду, фокус ће бити на дискретном случају, с обзиром да је тај случај најразвијенији и најлакши.

Рад се састоји од шест поглавља, која су подељена у три целине, прва два поглавља су на природан начин увела основна предзнања из теорије вероватноће која су нам потребна да бисмо дефинисали мартингалне H_p просторе. Треће, четврто поглавље се односе на дефинисање мартингалних Хардијевих[1] простора и неких од највећих научних достигнућа у овој области, а то су атомарна декомпозиција и неједнакости мартингалних Хардијевих простора. Пето поглавље проширује област изучавања рада са комутативних мартингалних простора на некомутативне мартингалне просторе, дајући нам широк спектар неких од новијих научних достигнућа у овој области. Шесто поглавље представља нека од скорашњих научних достигнућа у комутативном случају.

У првом поглављу уводимо основне појмове из теорије вероватноће, дефинишемо време заустављања и филтрације које су нам важан предуслов за дефинисање мартингала.

У другом поглављу уведимо концепт мартингала и дефинишемо једну врста мартингалних простора, тј. L_p простора. Дефинишемо појмове субмартингал и супермартингал, као и неке од битнијих теорема попут Дуб[2]-Мејерове[3] декомпозиције. Такође, акценат је стављен и на конвергенцију мартингала.

У трећем поглављу уводи се концепт два битна оператора - максимални опе-

[1] Godfrey Harold Hardy (1877-1947.), енглески математичар

[2] Joseph Leo Doob (1910-2004.), амерички математичар

[3] Paul-André Meyer (1934-2003.), француски математичар

ратор M и квадратни оператор S. За $1 \leqslant p \leqslant \infty$, успостављамо L_p еквиваленцију између M и S (тј. показујемо Дејвисову[4] неједнакост). Затим, проучавамо мартингалне H_p просторе, као и BMO просторе, при чему уводимо и простор ${}_aK_p$ и ${}_{a^+}K_p$ који представљају нови опис простора L_p и који су значајни у карактеризацији BMO простора.

У четвртом поглављу проучавамо мартингалне неједнакости међу којима је као најзначајнија Дубова максимална и L_p неједнакост. Дефинишемо још неке од мартингалних Хардијевих простора, тј. просторе $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{Q}_p$, за $0 < p < \infty$. Теорему о конвексности и конкавности генерализујемо за произвољан пребројив скуп индекса, а затим потврђујемо и за дискретан случај и примењујемо при доказивању мартингалних неједнакости. Показујемо теорему која описује однос свих пет Хардијевих мартингалних простора $\mathcal{P}_p$, $\mathcal{Q}_p$, H_p^s, H_p^S и H_p^*. Коришћењем атомарне декомпозиције и односа између простора, показујемо Буркхолдер[5]-Дејвис-Гандијеву[6] неједнакост која нам каже да су простори H_p^* и H_p^S еквивалентни за $1 \leqslant p < \infty$.

У петом поглављу уводимо концепт некомутативних Хардијевих простора мартингала, као и неке од новијих радова из тог подручја, посебно се осврћући на достигнућа из те области која смо претходно формулисали у комутативном случају.

У шестом поглављу проучавамо мешовите мартингалне Хардијеве просторе и приказујемо њихову атомарну декомпозицију.

Аутор се овим путем захваљује ментору, проф. др Драгољубу Кечкићу, на идеји за израду рада, као и на сугестијама и помоћи при изради истог. Такође, аутор се захваљује члановима комисије проф. др Павлу Младеновићу и доц. др Биљани Вујошевић, на примедбама, сугестијама и указаним грешкама. Искуство ментора и чланова комисије значајно је унапредило квалитет рада. На крају, аутор се искрено захваљује породици и пријатељима, који су га бодрили при изради рада, посебно колегиници Милици Јовановић и колеги Димитрију Шпадијер.

[4] Burgess James Davis (1944.), амерички математичар

[5] Donald Lyman Burkholder (1927-2013.), амерички математичар

[6] Richard Floyd Gundy (око 1934.), амерички математичар

1 Теорија вероватноће

Мартингали представљају један од кључних појмова модерне теорије вероватноћа. У самој дефиницији мартингала јавља се појам условног очекивања, стога ћемо у овом поглављу увести појам условног очекивања на σ–подалгебри и повезати дефинисане појмове с уобичајеним условним очекивањем на простору догађаја позитивне вероватноће.

1.1 Условно очекивање

Фиксирајмо простор вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Подсетимо се шта то значи у Теорији вероватноће:.

(1) Скуп Ω је непразан и његове елементе називамо елементарним исходима;

(2) $\mathcal{F}$ је σ–алгебра догађаја, тј. непразна фамилија подскупова од Ω која садржи Ω, те је затворена за комплементирање и пребројиве уније;

(3) $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ је σ–адитивна функција на $\mathcal{F}$ таква да је $\mu(\Omega) = 1$ и зовемо је вероватноћа.

Вероватносни простор $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ је пример простора с мером, а случајна променљива f на Ω је мерљива функција. Теорија мере нам говори како интегралити случајну променљиву f у односу на σ–адитивну меру μ. Све ово нас доводи до појма очекивања у нашем случају.

Дефиниција 1.1. *Простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ је комплетан ако σ–алгебра $\mathcal{F}$ садржи све подскупове скупова чија је вероватноћа једнака нули.*

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ комплетан простор вероватноћа, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ комплетна σ–подалгебра. За свако $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ са

$$\nu(F) = \int\limits_F f d\mu, \quad F \in \mathcal{F}_1$$

дефинисана је комплексна мера на $\mathcal{F}_1$ која је апсолутно непрекидна у односу на меру $\mu|_{\mathcal{F}_1}$. На основу Радон[7]-Никодимове[8] теореме, постоји јединствена функција означена са $E_1(f)$, $E_{\mathcal{F}_1}(f)$ или $E(f \mid \mathcal{F}_1)$, која је мерљива у односу на $\mathcal{F}_1$ и интеграбилна у односу на $\mu|_{\mathcal{F}_1}$ таква да

$$\int_F E(f \mid \mathcal{F}_1) d\mu = \int_F f d\mu, \quad F \in \mathcal{F}_1. \tag{1}$$

[7] Johann Karl August Radon (1887-1956.), аустријски математичар

[8] Otto Marcin Nikodym (1887-1974.), пољски математичар

Дефиниција 1.2. *Нека је* $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Тада се* $E_{\mathcal{F}_1}(f) = E(f \mid \mathcal{F}_1)$ *назива условно очекивање функције* f *у односу на* $\mathcal{F}_1$. *За свако* $F \in \mathcal{F}_1$, $E_{\mathcal{F}_1}(\chi_{\mathcal{F}})$ *се назива условна вероватноћа од* F, *где је* χ_F *карактеристична функција од* F.

Пример 1.3. *Нека је* $\mathcal{F}_1$ σ*–подалгебра генерисана атомима* $\{F_k\}_{k=1}^n$. *Атом мерљивог простора је скуп* A *такав да не постоји скуп* B *који задовољава* $0 < |B| < |A|$, *где* $|\cdot|$ *означава меру. Тада за* $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *имамо*

$$E_{\mathcal{F}_1}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|F_i|} \int_{F_i} f d\mu_{\chi_{F_i}}. \tag{2}$$

Како то можемо видети.
С обзиром да је $E_{\mathcal{F}_1}(f)$ *константна на сваком атому, јер је тако дефинисана* $\mathcal{F}_1$, *одатле следи*

$$E_{\mathcal{F}_1}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{F_i}$$

интеграцијом обе стране и користећи (1) добијамо

$$c_i = \frac{1}{|F_i|} \int_{F_i} f d\mu$$

као и (2).

Пример 1.4. *Нека је* $\mathcal{F}_1$ *генерисан атомима* $\{F, F^C\}$, $F \in \mathcal{F}_1$ *и нека је* $f = \chi_G$. *Тада*

$$E_{\mathcal{F}_1}(\chi_G) = \frac{|G \cap F|}{|F|}\chi_F + \frac{|G \cap F^C|}{|F^C|}\chi_{F^C}.$$

Овде је $\frac{|G \cap F|}{|F|}$ *ништа друго до условне вероватноће догађаја* G *при услову да се догађај* F *реализовао.*

Наведимо сада особине условног очекивања.

(1) $E_{\mathcal{F}_1}(1) = 1$.

(2) $E_{\mathcal{F}_1}$ је (комплексно) линеаран и комутира са својим комплексним конјугатом, тј.

$$E_{\mathcal{F}_1}(\bar{f}) = \overline{E_{\mathcal{F}_1}(f)}.$$

(3) $E_{\mathcal{F}_1}$ је позитивно. Дакле, $f \geqslant 0$ имплицира $E_{\mathcal{F}_1}(f) \geqslant 0$. Уколико би посматрали скуп $F = \{E_{\mathcal{F}_1}(f) < 0\}$, тада

$$\int_F E_{\mathcal{F}_1}(f) d\mu = \int_F f d\mu \geqslant 0$$

одакле следи да је $|F| = 0$.

(4) Мартингално својство:
Нека су $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ две σ–подалгебре и $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Тада је

$$E_{\mathcal{F}_1}(E_{\mathcal{F}_2}(f)) = E_{\mathcal{F}_1}(f), \quad f \in L_1.$$

Нека је $F \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, онда је

$$\int_F E_{\mathcal{F}_1}(E_{\mathcal{F}_2}(f))d\mu = \int_F E_{\mathcal{F}_2}(f)d\mu = \int_F f d\mu = \int_F E_{\mathcal{F}_1}(f)d\mu$$

(5) Ако је $\|\cdot\|_p$ норма L_p–простора, онда

$$\|E_{\mathcal{F}_1}(f)\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Ову чињеницу добијамо из следећег. Нека су p и q такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. На основу особине (4) добијамо

$$\|E_{\mathcal{F}_1}(f)\|_p = \sup_{\|g\|_q < 1} |E(E_{\mathcal{F}_1}(f)g)| \tag{3}$$

Узимајући даље, супремум по свим g облика

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{F_i}, \quad n \in \mathbb{N},\ \{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C},\ F_i \in \mathcal{F}_1, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

добијамо, на основу (1) и линеарности интеграла, да је

$$\sup_{\|g\|_q < 1} |E(E_{\mathcal{F}_1}(f)g)| = \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} |E(fg)| \tag{4}$$

Тада, закључујемо из (3) и (4) да је

$$\|E_{\mathcal{F}_1}(f)\|_p = \sup_{\|g\|_q < 1} |E(E_{\mathcal{F}_1}(f)g)| = \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} |E(fg)| \leqslant \|f\|_p,$$

(6) За $f \in L_p$, $g \in L_q(\mathcal{F}_1)$ (дакле g је такође $\mathcal{F}_1$–мерљива) и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ имамо

$$E_{\mathcal{F}_1}(fg) = gE_{\mathcal{F}_1}(f). \tag{5}$$

За g облика

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{F_i}$$

једнакост (5) очигледно важи.

Узимајући $g = \chi_F$, $F \in \mathcal{F}_1$ имамо да су $E_{\mathcal{F}_1}(f\chi_F)$ и $E_{\mathcal{F}_1}(f)\chi_F$ $\mathcal{F}_1$–мерљиве, па ако за свако $G \in \mathcal{F}_1$ важи

$$\int_G E_{\mathcal{F}_1}(f\chi_F)d\mu = \int_{F\cap G} f d\mu = \int_G E_{\mathcal{F}_1}(f)\chi_F d\mu,$$

онда је

$$E_{\mathcal{F}_1}(f\chi_F) = E_{\mathcal{F}_1}(f)\chi_F.$$

Уколико уочимо низ $\{g^{(n)}\}$ такав да $g^{(n)} \to g$ у L_q норми, тада у (5) обе стране конвергирају у L_1 и њихови лимеси су исти.

(7) $|E_{\mathcal{F}_1}(f)| \leqslant E_{\mathcal{F}_1}(|f|)$, с.с. $\forall f \in L_1$

Претпоставимо да је f реално вредносна функција. Узмимо

$$F = \{E_{\mathcal{F}_1}(f) > E_{\mathcal{F}_1}(|f|)\}$$

Тада $F \in \mathcal{F}_1$ и

$$\int_F E_{\mathcal{F}_1}(f)d\mu = \int_F f d\mu \leqslant \int_F |f| d\mu = \int_F E_{\mathcal{F}_1}(|f|)d\mu,$$

па је $|F| = 0$. Такође, аналогно, скуп

$$\{E_{\mathcal{F}_1}(f) < -E_{\mathcal{F}_1}(|f|)\}$$

је мере 0.

Уколико је функција f комплексно вредносна, тада постоји $\mathcal{F}_1$–мерљив $\theta(\omega)$ такав да

$$E_{\mathcal{F}_1}(f)e^{i\theta(\omega)} = |E_{\mathcal{F}_1}(f)|.$$

Користећи особину (6) имамо

$$E_{\mathcal{F}_1}(f^{i\theta(\omega)}) = |E_{\mathcal{F}_1}(f)|$$

и тада је

$$|E_{\mathcal{F}_1}(f)| = E_{\mathcal{F}_1}\left(\mathrm{Re}(fe^{i\theta(\omega)})\right) \leqslant E_{\mathcal{F}_1}\left(\left|\mathrm{Re}(fe^{i\theta(\omega)})\right|\right) \leqslant E_{\mathcal{F}_1}(|f|).$$

(8) Парсевалова[9] једнакост. Нека је $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тада је

$$E(E_{\mathcal{F}_1}(f)g) = E(fE_{\mathcal{F}_1}(g)).$$

Обе стране једнакости једнаке су $E(E_{\mathcal{F}_1}(f)E_{\mathcal{F}_1}(g))$. Заиста, означимо σ–алгебру $\{\emptyset, \Omega\}$ са $\mathcal{F}_0$. Тада је $E_{\mathcal{F}_0}(f) = E(f)$ и из особина (4) и (6) имамо

$$E(E_{\mathcal{F}_1}(f)g) = E(E_{\mathcal{F}_1}(E_{\mathcal{F}_1}(f)g)) = E(E_{\mathcal{F}_1}(f)E_{\mathcal{F}_1}(g)).$$

[9] Marc-Antoine Parseval (1755-1836.), француски математичар

(9) Хелдерова[10] неједнакост. За $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ такве да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ имамо
$$|E_{\mathcal{F}_1}(fg)| \leqslant E_{\mathcal{F}_1}(|f|^p)^{\frac{1}{p}} |E_{\mathcal{F}_1}(|g|^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Нека је
$$F = \{E_{\mathcal{F}_1}(|f|^p) > 0, E_{\mathcal{F}_1}(|g|^q) > 0\}.$$

Тада на F имамо
$$E_{\mathcal{F}_1}\left(|f|^p\right)^{-\frac{1}{p}} |f| E_{\mathcal{F}_1}\left(|g|^q\right)^{-\frac{1}{q}} |g| \leqslant \frac{1}{p} E_{\mathcal{F}_1}\left(|f|^p\right)^{-1} |f|^p + \frac{1}{q} E_{\mathcal{F}_1}\left(|g|^q\right)^{-1} |g|^q.$$

Пошто је $F \in \mathcal{F}_1$, имамо
$$\begin{aligned}
&E_{\mathcal{F}_1}\left(E_{\mathcal{F}_1}\left(|f|^p\right)^{-\frac{1}{p}} E_{\mathcal{F}_1}\left(|g|^q\right)^{-\frac{1}{q}} |f||g|\right)\chi_F \\
&\leqslant E_{\mathcal{F}_1}\left(\frac{1}{p} E_{\mathcal{F}_1}(|f|^p)^{-1} |f|^p \chi_F\right) + E_{\mathcal{F}_1}\left(\frac{1}{q} E_{\mathcal{F}_1}(|g|^q)^{-1} |g|^q \chi_F\right) \\
&\leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Дакле,
$$E_{\mathcal{F}_1}(|fg|\chi_F) \leqslant E_{\mathcal{F}_1}(|f|^p)^{\frac{1}{p}} E_{\mathcal{F}_1}(|g|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Међутим, приметимо да на $F_f = \{E_{\mathcal{F}_1}(|f|^p) = 0\}$ важи да је $f = 0$ с.с. јер
$$\int_{F_f} |f|^p d\mu = \int_{F_f} E_{\mathcal{F}_1}(|f|^p) d\mu = 0.$$

Аналогно, $g = 0$ с.с. на $F_g = \{E_{\mathcal{F}_1}(|g|^q) = 0\}$. Тада $fg = 0$ с.с. на $F^c = F_f \cup F_g$, чиме смо доказали (6).

Следећа дефиниција уопштава појам очекивања на функције које не припадају нужно L_1 простору, али морају бити позитивне.

Дефиниција 1.5. *Нека је f ненегативна и мерљива.*
$$f^{(N)} \stackrel{def}{=} \begin{cases} f, \ f \leqslant N \\ N, f > N \end{cases}$$
Због позитивности и монотоности,
$$\lim_{N \to \infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(N)})$$
постоји с.с. Означавамо га са $E_{\mathcal{F}_1}(f)$.

[10] Otto Ludwig Hölder (1859-1937.), немачки математичар

Примедба 1.6. *Оваква дефиниција $E_{\mathcal{F}_1}$ чува две карактеристичне особине, то су $\mathcal{F}_1$–мерљивост и*

$$\int_F f d\mu = \int_F E_{\mathcal{F}_1}(f) d\mu \tag{7}$$

за све ненегативне и мерљиве функције f и за свако $F \in \mathcal{F}_1$.

(10) Теорема о монотоној конвергенцији. Нека је $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 0}$ растући низ ненегативних мерљивих функција таквих да

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega) = f(\omega)$$

постоји скоро свуда. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}) = E_{\mathcal{F}_1}(f) \text{ с.с.}$$

Заиста, због особина позитивности и монотоности $E_{\mathcal{F}_1}$ имамо да

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}) = h \text{ с.с.}$$

где је h $\mathcal{F}_1$-мерљива функција. Тада је

$$h \geqslant E_{\mathcal{F}_1}(f), \text{ с.с.}$$

Међутим, за свако $F \in \mathcal{F}_1$ имамо

$$\begin{aligned} \int_F h d\mu &= \int_F \lim_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_F E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_F f^{(n)} d\mu \\ &= \int_F \lim_{n\to\infty} f^{(n)} d\mu \\ &= \int_F f d\mu \\ &= \int_F E_{\mathcal{F}_1}(f) d\mu, \end{aligned}$$

где друга и четврта једнакост важе на основу теореме о монотоној конвергенцији за функције, трећа и шеста следе из (7), док пета једнакост следи из дефиниције граничне вредности функције.

Одавде закључујемо да је $h = E_{\mathcal{F}_1}(f)$ с.с.

(11) Фатуова лема. За било који низ $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 0}$ ненегативних мерљивих функција имамо

$$E_{\mathcal{F}_1}\left(\varliminf_{n\to\infty} f^{(n)}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}),\ \text{с.с.}$$

Овај закључак изведен је из теореме о монотоној конвергенцији.

Означимо са $g^{(n)} = \inf\limits_{m\geqslant n} f^{(m)}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)} = \varliminf_{n\to\infty} f^{(n)},\ \text{с.с.}$$

одакле је

$$E_{\mathcal{F}_1}\left(\varliminf_{n\to\infty} f^{(n)}\right) = E_{\mathcal{F}_1}\left(\lim_{n\to\infty} g^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(g^{(n)}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}).$$

(12) Теорема о доминантној конвергенцији. Нека је $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 0} \subset L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)} = f$ с.с. и $|f^{(n)}| \leqslant g \in L_1$. Тада

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}(f^{(n)}) = E_{\mathcal{F}_1}(f),\ \text{с.с.}$$

Овај резултат проистиче из (11). Заправо, имамо

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_1}(2g) - \varlimsup_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}\left(\left|f - f^{(n)}\right|\right) &= \varliminf_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}\left(2g - \left|f - f^{(n)}\right|\right) \\ &\geqslant E_{\mathcal{F}_1}\left(\varliminf_{n\to\infty}(2g - |f - f^{(n)}|)\right) \\ &= E_{\mathcal{F}_1}(2g) \end{aligned}$$

и тада

$$\varlimsup_{n\to\infty} E_{\mathcal{F}_1}\left(\left|f - f^{(n)}\right|\right) \leqslant 0.$$

Услов $0 \leqslant f^{(n)} \leqslant g \in L_1$ могли смо заменити условом $h \leqslant f^{(n)} \leqslant g$, $h, g \in L_1$.

(13) Јенсенова[11] неједнакост. Нека је $\varphi(u)$ конвексна функција дефинисана на (a,b). Тада за свако $u \in (a,b)$ и за све $\lambda \in (a,b)$, такве да постоји $\varphi'(\lambda)$ (сем евентуално за највише пребројиво много вредности λ) знамо да је

$$\varphi(u) - \varphi(\lambda) \geqslant \varphi'(\lambda)(u - \lambda). \tag{8}$$

Нека је $f \in L_1$ таква да је $f(\omega) \in (a,b)$ за скоро свако ω и такво да је $\varphi(f) \in L_1$ или $\varphi(f)$ је ненегативна. Тада је

$$\varphi(E_{\mathcal{F}_1}(f)) \leqslant E_{\mathcal{F}_1}(\varphi(f))\ \text{с.с.} \tag{9}$$

[11] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925.), дански математичар

Докажимо претходну неједнакост. Нека су λ и ω такви да $\varphi'(\lambda)$ постоји и да је

$$a < u(= f(\omega)), \quad v(= E_{\mathcal{F}_1}(f)(\omega)) < b.$$

За такво λ и u примењујући (8) и узимајући условно очекивање на обе стране, добијамо

$$E_{\mathcal{F}_1}(\varphi(f)) \geqslant \varphi'(\lambda)(E_{\mathcal{F}_1}(f) - \lambda) + \varphi(\lambda).$$

Уколико узмемо низ таквих λ који теже ка v, тада $\varphi'(\lambda)(E_{\mathcal{F}_1}(f) - \lambda) + \varphi(\lambda)$ тежи $\varphi(E_{\mathcal{F}_1}(f))$ и тиме смо доказали (9).

1.2 Филтрације

Посматрајмо $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ простор вероватноћа. При проучавању математичих модела случајних променљивих које се мењају у времену разматрају се и неопадајуће фамилије σ–подалгебри из σ–алгебре $\mathcal{F}$ које називамо филтрацијама. Филтрације представљају један од кључних појмова теорије мартингала. Можемо их поистоветити са прикупљањем информација које су нам на располагању у неким одређеним временским тренуцима. Да бисмо утврдили да ли је неки процес мартингал или није, искључиво зависи од простора вероватноћа на ком се посматра филтрација.

Дефиниција 1.7. *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ комплетан простор вероватноћа. Филтрација $F = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ је неопадајућа фамилија σ–подалгебри од $\mathcal{F}$, тако да*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}.$$

где је σ–алгебра $\mathcal{F}_0$ комплетирана нула догађајима из $\mathcal{F}$.

Дефиниција 1.8. *Простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ снабдевен филтрацијом F, у ознаци $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mu)$, назива се стохастичким базисом или простором са филтрацијом.*

Најмања σ–алгебра у ознаци $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ је σ–алгебра генерисана фамилијама облика $\bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$, тј.

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left\{ \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n \right\}.$$

Јасно је да важи $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}$.
Можемо схватити филтрацију $F = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ као описивање прошлости неке појаве, док је σ–алгебра $\mathcal{F}_n$ колекција догађаја који се могу десити пре или у тренутку n, тј. то је скуп свих могућих „прошлости“ до тренутка n.

1.3 Време заустављања

Време заустављања представља један од битнијих појмова теорије случајних процеса. С обзиром да описује тренутке када се догађај реализовао, већина теорије из вероватноће се везује баш за њих.

Дефиниција 1.9. *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ простор вероватноћа и $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ неопадајућа фамилија комплетних σ–подалгебри таквих да је $\mathcal{F} = \bigvee_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n$. Време заустављања у односу на фамилију $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ је пресликавање $T : \Omega \to \overline{\mathbb{Z}}^+$, такво да је*

$$\{T = n\} := \{w \in \Omega \mid T(w) = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

за свако $n \geqslant 0$ или еквивалентно

$$\{T \leqslant n\} := \{w \in \Omega \mid T(w) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n,$$

за свако $n \geqslant 0$.

Време заустављања $T(\omega)$ је одређено догађајем $\{T \leqslant n\}$ и уз то је мерљиво у односу на прошлост.

Нека је $a \wedge b = min\{a, b\}$.

Дефиниција 1.10. *Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ случајан процес и T време заустављања. Тада процес дефинисан са*

$$\{f_n^T\}_{n\geqslant 0} := \{f_{T\wedge n}\}_{n\geqslant 0}$$

називамо процесом заустављеним у тренутку T. Прецизније, за свако n и за свако $\omega \in \Omega$

$$f_n^T(\omega) = f_{T(\omega)\wedge n}(\omega).$$

Мартингали су стохастичи процес који је стабилан у односу на време заустављања, тј. ако је $f = \{f\}_{n\geqslant 0}$ мартингал и T време заустављања, онда је и процес $f^T = \{f_n^T\}_{n\geqslant 0}$ такође, мартингал, што ћемо и показати у Леми 2.16. Оно што је важно је да се времена заустављања могу корисити за дефинисање σ–алгебри које представљају све информације које смо прикупили до тренутка T.

Дефиниција 1.11. *Нека је T време заустављања одређено фамилијом филтрација σ–поља $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Означимо са $\mathcal{F}_T$ класу догађаја*

$$\mathcal{F}_T = \left\{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}, \tag{10}$$

где је $\mathcal{F}_\infty$ σ–поље генерисано са $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$. $\mathcal{F}_T$ се назива σ–поље догађаја који су се десили пре времена заустављања.

Ако претпоставимо да имамо мартингал $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ и време заустављања T, можемо да дефинишемо случајну променљиву $f_T : \Omega \to \mathbb{R}$ са

$$f_T(\omega) = f_{T(\omega)}(\omega)$$

бар за неко ω изван скупа вероватноће 0.

Наведимо неке од особина времена заустављања:

(1) Нека је T време заустављања. Тада $B \in \mathcal{F_T} \Leftrightarrow B \in \mathcal{F}$, и

$$T_B = \begin{cases} T, & \omega \in B \\ \infty, & \omega \notin B \end{cases}$$

је време заустављања.

(2) Нека је S време заустављања и T пресликавање са вредностима у $\overline{\mathbb{Z}}^+$, које је $\mathcal{F_S}$–мерљиво и такво да је $S \leqslant T$. Тада је T време заустављања.

(3) Нека су T_1 и T_2 времена заустављања, онда су и $T_1 \wedge T_2 = min(T_1, T_2)$, $T_1 \vee T_2 = max(T_1, T_2)$, $T_1 + T_2$ времена заустављања.

(4) Нека су T_1 и T_2 времена заустављања и B је $\mathcal{F}_{T_1}$–мерљив, тада

$$B \cap \{T_1 \leqslant T_2\} \in \mathcal{F}_{T_2}$$

одакле закључујемо уколико је $T_1 \leqslant T_2$, онда је $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

(5) Нека су T_1 и T_2 времена заустављања. Тада сваки од догађаја $\{T_1 \leqslant T_2\}$, $\{T_1 > T_2\}$, $\{T_1 < T_2\}$ и $\{T_1 = T_2\}$ припада истовремено σ–пољу $\mathcal{F}_{T_1} \cap \mathcal{F}_{T_2}$ и $\mathcal{F}_{T_1} \cap \mathcal{F}_{T_2} = \mathcal{F}_{T_1 \wedge T_2}$.

(6) Уколико је $\{T_k\}_{k>0}$ низ времена заустављања, тада је $\sup\limits_k T_k$ и $\inf\limits_k T_k$ такође, време заустављања.

(7) Нека су T_1 и T_2 времена заустављања и $B \subset T_1 \leqslant T_2$ и $B \in \mathcal{F}_{T_2}$, тада је $B \cap \mathcal{F}_{T_1} \subset B \cap \mathcal{F}_{T_2}$

(8) Нека је $B \subset \{T = S\}$, $B \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Тада, за свако $f \in L_1$, важи $E(f|\mathcal{F}_S)\chi_B = E(f|\mathcal{F}_T)\chi_B$

(9) Нека је T време заустављања, $f \in L_1$.
Тада, f_T дефинисано изнад, такво да је $f_n = E(f|\mathcal{F}_n)$, за $n \geqslant 0$ и $f_\infty = f$, задовољава

$$f_T = E(f|\mathcal{F}_T)$$

$$E(|f_T|) \leqslant E(|f|)$$

(10) Нека су T_1 и T_2 времена заустављања. Тада, за свако $f \in L_1$, важи
$(f_{T_1})_{T_2} = f_{T_1 \wedge T_2}$.

2 Мартингали, субмартингали и супермартингали

У теорију вероватноћа концепт мартингала уводи Вил[12] 1939. године у циљу побољшања концепта случајних низова. Дуб је у радовима, 1940. године, направио велики помак, посматрајући везу између мартингала и хармонијских функција и одатле развио целу теорију мартингала базирану на теорији вероватноће. Због тога се Дуб сматра оснивачем теорије мартингала.

Мартингал представља модел фер опкладе. Сам назив потиче од популарне коцкарске стратегије настале у XIX веку у којој се улог дуплира после сваког губитка све до првог добитка. Оваква стратегија нам гарантује добитак у неком моменту, јер ако након сваког губитка дуплирамо улог, први пут када победимо вратићемо све претходно уз додати профит.

Математички речено, ако посматрамо случајни процес $f = \{f\}_{n\geqslant 0}$, такав да су случајне променљиве f_n интеграбилне и за $n \geqslant 1$ означимо $d_n := f_n - f_{n-1}$, где разлику d_n сматрамо јединичним добитком (или губитком) у n–тој игри, онда под појмом фер очекује се да очекивани добитак буде нула, тј. $E[d_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[f_n - f_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$, тј. да је управо тај процес мартингал. Већина игара на срећу је не-фер и њима одговарају супермартингали.

Дефинишимо сада појам мартингала, супермартингала и субмартингала.

Дефиниција 2.1. *Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ процес. Кажемо да је f адаптиран ако је f_n $\mathcal{F}_n$–мерљив за свако n (тј. $f_n^{-1}(B) \in \mathcal{F}_n$ за сваки Борелов скуп $B \subset \mathbb{R}$).*

Дефиниција 2.2. *Случајан процес $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ који је адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ је мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ ако је*

(1) $E|f_n| < \infty, \quad n \geqslant 0;$

(2) $E(f_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = f_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$

Уколико у услову (2) *заменимо знак једнакости са $\leqslant$, односно $\geqslant$ добијамо појам супермартингала, односно субмартингала.*

Примедба 2.3. *Можемо уочити да уколико је f мартингал, тада за $m < n$ коришћењем мартингалног својства и принципа математичке индукције добијамо да је*

$$E(f_n \mid \mathcal{F}_m) = E\left(E(f_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_m\right) = E(f_{n-1} \mid \mathcal{F}_m) = \ldots = E(f_m \mid \mathcal{F}_m) = f_m$$

[12] Jean Ville (1910-1989.), француски математичар

Можемо приметити да је f супермартингал ако и само ако је $-f$ субмартингал. Сваки мартингал је специјално и супермартингал и субмартингал.

У даљем излагању посматраћемо комплетан вероватносни простор $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ са фамилијом $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ σ–подалгебри, где је $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ неопадајући низ, такав да $\mathcal{F} = \bigvee\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n$, при чему још важи и да је за свако n простор $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mu)$ комплетан.

Пример 2.4. *Нека је $f \in L_1$ и $f_n = E(f \mid \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 0$. Тада је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал.*

Нека је $\{d_n\}_{n\geqslant 0}$ адаптирани процес такав да $d_n \in L_1$ и $E(d_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ за $n \geqslant 1$. Ако је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ дато са $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} d_k$, онда је f мартингал.

Важи и обратно. Сваки мартингал $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ може бити генерисан на овај начин. Заиста, ако означимо

$$d_n = \Delta_n f = f_n - f_{n-1}, \quad n \geqslant 0,$$

где подразумевамо да је $f_{-1} = 0$, што је уобичајено, онда је $\{d_n\}_{n\geqslant 0}$ адаптиран процес такав да је $E(d_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ за $n \geqslant 1$ и $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} d_k$ за $n \geqslant 0$.

Став 2.5. *Нека је $f \in L_2$, онда је $\{d_n\}_{n\geqslant 0} = \{\Delta_n f\}_{n\geqslant 0}$ ортогоналан систем у L_2, јер за $l < k$ важи*

$$E(d_k \bar{d}_l) = 0.$$

где, $\bar{d}_l$ означава комплексно конјуговање.

Доказ: Нека је $l < k$ и $d_k = f_k - f_{k-1}$.
Користећи особину (6) условног очекивања, као и дефиницију мартингала, следи

$$\begin{aligned} E(d_k \bar{d}_l) &= E\left(E(d_k \bar{d}_l \mid \mathcal{F}_{k-1})\right) = E\left(\bar{d}_l E(d_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\right) = E\left(\bar{d}_l E(f_k - f_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})\right) \\ &= E\left(\bar{d}_l (f_{k-1} - f_{k-1})\right) = 0. \end{aligned}$$

□

Примедба 2.6. *Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал и $1 \leqslant p < \infty$. На основу Јенсенове неједнакости примењене на функцију $t \to t^p$ добијамо да важи*

$$|f_n|^p = |E(f_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)|^p \leqslant E(|f_{n+1}|^p \mid \mathcal{F}_n), \quad n \geqslant 0,$$

одакле закључујемо да је $\{|f_n|^p\}_{n\geqslant 0}$ субмартингал.

Нека је сада $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *субмартингал и нека је* φ *растућа конвексна функција. Тада је и* $\{\varphi(f_n)\}_{n\geqslant 0}$ *субмартингал. Ово се, поново, лако добија из Јенсенове неједнакости примењеној на функцију* φ. *Наиме,*

$$\varphi(f_n) \leqslant \varphi(E(f_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \leqslant E(\varphi(f_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n), \quad n \geqslant 0.$$

Такође, уколико је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *супермартингал и* φ *растућа конкавна функција, онда је* $\{\varphi(f_n)\}_{n\geqslant 0}$ *супермартингал. Да бисмо то видели посматрајмо инверзну функцију* ψ *функције* φ *која је растућа и конвексна. Тада имамо*

$$E(f_{n+1} \mid \mathcal{F}) = E(\psi(\varphi(f_{n+1})) \mid \mathcal{F}_n) \geqslant \psi(E(\varphi(f_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n)),$$

$$\varphi(f_n) \geqslant \varphi(E(f_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \geqslant E(\varphi(f_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n), \quad n \geqslant 0.$$

Примедба 2.7. *Услов да је функција* φ *растућа је овде веома битан, јер у том случају инверзна функција конкавној је конвексна. Уколико бисмо узели конвексну функцију* $\varphi(u) = |u|$, *која није монотона, и* $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *ненегативан супермартингал, али не и субмартингал, онда је* $\{-f_n\}_{n\geqslant 0}$ *субмартингал, али* $\{\varphi(-f_n)\}_{n\geqslant 0}$ *није субмартингал.*

Пример 2.8. *Један од најважнијих примера мартингала је диадички мартингал.*

Нека је $([0,1), \mathcal{B}, dx)$ *Лебегов простор вероватноћа, где је фамилија* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *таква да је* $\mathcal{F}_n$ σ*–поље генерисано атомима*

$$F_j^{(n)} = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right), \quad j = 0, \dots, 2^n - 1.$$

Тада се сви мартингали у односу на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ *називају диадички мартингали.*

Дефиниција 2.9. *Нека је* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *мартингал, супермартингал или субмартингал. Означимо*

$$\|f\|_p = \sup_n \|f_n\|_p.$$

Ако је $\|f\|_p < \infty$, *за* f *кажемо да је* L_p*–мартингал,* L_p*–супермартингал или* L_p*–субмартингал, (односно кажемо да је* f *ограничен* L_p*- мартингал или супер-(суб-) мартингал) и пишемо* $f \in L_p$.

Ако за $f \in L_p$ *важи да је* $f_n = E(f \mid \mathcal{F}_n)$ *за свако* $n \geqslant 0$, *онда за* f *кажемо да је* L_u^p*–мартингал.*

Ознаку L_p користимо за простор мартингала (као и супермартингала или субмартингала) са симболом Лебеговог простора, па може доћи до забуне.
Међутим, обратимо пажњу на следеће чињенице :

(1) Разлика у случају $1 < p < \infty$ није суштинска, тј. $L_p = L_u^p$ и $\|f\|_p = \|f\|_\infty$,

(2) $L_u^1 \subsetneq L_1$, где је L_u^1 простор униформно интеграбилних мартингала,

(3) Ако $f \in L_1$, онда скоро свуда постоји $f_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ скоро сигурно, и $\|f_\infty\| \leqslant \|f\|$ при чему се једнакост достиже акко $f \in L_u^1$.

Чињенице (1) и (3) показане су у књизи [2, Теорема 1.3.2.8, Теорема 1.3.2.9, Теорема 1.3.2.13], док следећи пример показује (2).

Пример 2.10. *Посматрајмо диадички мартингал. Нека је $f_n = 2^n\chi_{[0,2^{-n})}$, тада је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал, с обзиром да је*

$$E(f_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 2^n\int_0^{2^{-n}} 2^{n+1}\chi_{[0,2^{-n-1})}dx\chi_{[0,2^{-n})} = f_n$$

Мартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ је ненегативан и $E(f_n) = 1$, што значи да је у L_1. Његов лимес тачка по тачка је $f_\infty = 0$, па стога $f \notin L_u^1$.

Примедба 2.11.

$$\|f\|_p = \Big(E\left(|f|^p\right)\Big)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Један од највећих доприноса теорији мартингала даје Дуб 1953. године теоремом о декомпозицији мартингала. До 1962. године није било могуће проширити ову дефиницију и на непрекидан случај. Те године Мејер доказује егзистенцију и показује да се теорема може проширити на напрекидан случај. Годину дана касније показује јединственост декомпозиције која је данас позната под називом Дуб–Мејерова декомпозиција. Пре саме формулације теореме и доказа, уведимо потребне појмове.
Следећа дефиниција нам каже да се вредност f_n може предвидети у односу на информације које су доступне у тренутку $n - 1$.

Дефиниција 2.12. *Стохастички процес $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ се назива предвидив, уколико важи:*

(i) *f_0 је константно*

(ii) *f_n је $\mathcal{F}_{n-1}$–мерљив за $n \geqslant 1$*

Лема 2.13. *Нека је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ предвидив мартингал. Тада је он константан, тј. постоји $c \in \mathbb{R}$, тако да је $f_n = c$, за свако $n \geqslant 0$.*

Доказ: Индкуцијом:

База: С обзиром да је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ предвидив мартингал, из дефиниције, закључујемо да постоји константа $c \in \mathbb{R}$ тако да је $f_0 = c$.

И.Х.: Претпоставимо да је $f_n = c$.

И.К.: Користећи мартингално својство и (ii) из Дефиниције 2.12 имамо

$$f_{n+1} = E(f_{n+1}|\mathcal{F}_n) = f_n$$

Одатле, коришћењем индуктивне хипотезе следи да је $f_{n+1} = c$.

Овим је доказ завршен. □

Теорема 2.14. *(Дуб-Мајерова декомпозиција)*
Нека је $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ адаптиран интеграбилан процес. Тада постоји мартингал $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ и предвидив процес $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ такав да је

$$X_n = M_n + A_n$$

за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Шта више,

- (i) *Декомпозиција је јединствена до на константу. Уколико је $X_n = \widetilde{M_n} + \widetilde{A_n}$, нека друга декомпозиција, тада постоји константа $c \in \mathbb{R}$ тако да је за свако $n \in \mathbb{N}_0$ имамо $\widetilde{M_n} = M_n + c$ и $\widetilde{A_n} = A_n - c$.*
- (ii) *Уколико је процес $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ субмартингал (супермартингал), процес $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ је растући (опадајући), тј. $A_{n+1} \geqslant A_n$ $(A_{n+1} \leqslant A_n)$, за $n \geqslant 0$.*

Доказ: Јединственост декопозиције до на констатну је последица Леме 2.13, процес $M_n - \widetilde{M_n} = \widetilde{A_n} - A_n$ је предвид мартингал и стога константан. Да би показали егзистенцију, нека је

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} E(X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})$$

и

$$M_n := X_n - A_n$$

Очито, $A_0 = 0$, тј. константан и A_n је $\mathcal{F}_{n-1}$–мерљив за $n \geqslant 1$, па је тада процес $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ предвидив мартингал. Шта више, процес $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ је интеграбилан и интеграбилан, и за $n \geqslant 1$ важи

$$\begin{aligned} E(M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) &= E(X_n - X_{n-1} - (A_n - A_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E(X_n - X_{n-1} - E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Стога, процес $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ је мартингал.
Кончно, уколико је процес $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ субмартингал (супермартингал), имамо $A_n - A_{n-1} = E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \geqslant 0(\leqslant 0)$, за $n \geqslant 1$. □

Лема 2.15. *Нека је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал(субмартингал, супермартингал) у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ и нека је $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ ограничен, адаптиран процес, за који сматрамо да је ненегативан ако је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ искључиво суб- или супермартингал. Тада (суб-/супер-) мартингална трансформација мартингала f у односу на X дефинисана са*

$$(X \cdot f)_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(f_k - f_{k-1})$$

је мартингал (субмартингал, супермартингал).

Доказ:

$$\begin{aligned} E(((X \cdot f)_{n+1} - (X \cdot f)_n)|\mathcal{F}_n) &= E(X_n(f_{n+1} - f_n)|\mathcal{F}_n) \\ &= X_n E((f_{n+1} - f_n)|\mathcal{F}_n) \\ &\{=, \geqslant, \leqslant\} 0. \end{aligned}$$

□

Лема 2.16. *Нека је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал (субмартингал, супермартингал) и нека је T време заустављања. Тада је заустављен процес $\{f_{T\wedge n}\}_{n\geqslant 1}$ такође мартингал (субмартингал, супермартингал).*

Доказ: Нека је $X_n := \chi_{\{T\geqslant n+1\}}$. Ненегативан процес $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ је адаптиран јер је $\{T \geqslant n+1\} = \{T \leqslant n\}^c$. Мартингална трансформација мартингала f са X је тада

$$\begin{aligned} (X \cdot f)_n &= \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(f_k - f_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{T\geqslant k\}}(f_k - f_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{T\wedge n} (f_k - f_{k-1}) \\ &= f_{T\wedge n} - f_0 \end{aligned}$$

Одатле, видимо да је $f_{T\wedge n} - f_0$ једнак мартингалној трансформацији мартингала f са X, за коју смо у претходној леми доказали да је мартингал. Одатле, $f_{T\wedge n} - f_0$

је мартингал (субмартингал, супермартингал). Овим је доказ завршен. □

Интуитивно, $E(f_T)$ представља очекивано богатство играча у тренутку T. Уколико желимо да покажемо да је игра фер и у тренутку T морамо да покажемо да је $E(f_T) = E(f_0)$ у том тренутку.

Дуб је у следећој теореми предочио да можемо очекивати такав исход под одређеним условима. Како се мартингали користе и у стратегијама коцкања то би значило да се ништа не може добити заустављањем игре, на основу доступних информација, тј. без гледања у будућност.

Теорема 2.17. *(Дубова теорема о опционалном заустављању) Нека је f мартингал у односу на филтрацију F и нека је T време заустављања. Претпоставимо да је задовољен неки од следећих услова:*

(i) *T је ограничен, тј. постоји $N \in \mathbb{N}$ тако да је $T(\omega) \leqslant N$, за $\omega \in \Omega$*

(ii) *Постоји $K \in \mathbb{R}^+$ тако да $|f_n(\omega)| \leqslant K$, за свако n, ω и T је скоро сигурно коначно.*

(iii) *$E(T) < \infty$ и постоји $K \in \mathbb{R}$, ткд. $|f_n(\omega) - f_{n-1}(\omega)| \leqslant K$, за свако n, ω.*

Тада је f_T интеграбилно и

$$E(f_T) = E(f_0).$$

Доказ: Уочимо да је у сва три случаја T скоро сигурно кончно. То значи да је онда и f_T скоро сигурно дефинисано. И имамо да $f_{T\wedge n} \to f_0$ скоро сигурно. Шта више из претходне леме, имамо да је $f_{T\wedge n}$ интеграбилно и $E(f_{T\wedge n}) = E(f_0)$.
Нека је испуњено (i). Тада за свако $n \geqslant N$ имамо да је $T(\omega) \wedge n = T(\omega)$, за $\omega \in \Omega$. Одатле, $f_{T\wedge n} = f_T$, за $n \geqslant N$, па је тада f_T интерабилно и важи

$$E(f_T) = E(f_{T\wedge n}) = E(f_0).$$

Нека је сада испуњено (ii). Из услова ограничености f_n имамо да је

$$|f_{T\wedge n}(\omega)| < K$$

за свако n и $\omega \in \Omega$.
Лако се проверава и да је

$$f_{T\wedge n}(\omega) = f_0(\omega) + \sum_{k=1}^{T\wedge n(\omega)} f_k(\omega) - f_{k-1}(\omega)$$

за свако ω, па колико би било испуњено (iii) имали бисмо

$$|f_{T\wedge n}(\omega)| \leqslant |f_0(\omega)| + \sum_{k=1}^{T\wedge n(\omega)} |f_k(\omega) - f_{k-1}(\omega)| \leqslant |f_0(\omega)| + KT(\omega)$$

Оно што је сигурно, то је да је f_0 интеграбилно и да имамо да је по претпоставци $E(KT) = KE(T) < \infty$. Стога, било да посматрамо случај (ii) или (iii) можемо $|f_{T\wedge n}|$ ограничити са интеграбилном случајном променљивом. Примењујући теореме о доминантној конвергенцији и како је f_T интеграбилно имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{T\wedge n(\omega)} d\nu(\omega) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_{T\wedge n(\omega)} d\nu(\omega) = \int_\Omega f_T d\nu(\omega)$$

Еквивалентно,

$$\lim_{n\to\infty} E(f_{T\wedge n}) = E(f_T).$$

Међутим, како је $E(f_{T\wedge n}) = E(f_0)$, за свако n, добијамо управо оно што је и био циљ, а то је $E(f_T) = E(f_0)$. □

Примедба 2.18. *За T кажемо да је скоро сигурно коначно уколико је $\mu(T = \infty) = 0$.*

2.1 Конвергенција мартингала

Лема 2.19. *За субмартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ следећи искази су еквивалентни*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E((f_n)_+) < \infty$,

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E(|f_n|) < \infty$.

Доказ: Како је $(f_n)_+ \leqslant |f_n|$, лако се види да други исказ повлачи први. Обратно, како је

$$|f_n| = f_n^+ + f_n^- = 2f_n^+ - f_n,$$

имамо

$$E(|f_n|) \leqslant 2E(f_n^+) - E(f_0),$$

па и први исказ повлачи други. □

Теорема 2.20. *(Дубова теорема конвергенције) Нека је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ субмартингал такав да важи $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E((f_n)_+) < \infty$ (или, еквивалентно, $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E(|f_n|) < \infty$). Тада низ $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ конвергира скоро сигурно ка интеграбилној случајној променљивој f_∞.*

Доказ: Доказ се може наћи у [25]. □

У наредном делу испитујемо да ли конвергенција $f_n \to f_\infty$ важи у L_1, као и да ли ако узмемо $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left\{\bigcup\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n\right\}$, процес $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ је мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$.

Лема 2.21. *Случајна променљива X је интеграбилна ако и само ако је*

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\{|X|>M\}}|X|d\mu = 0. \tag{1}$$

Доказ: Претпоставимо најпре да важи (1).
Тада је интеграл $\int\limits_{\{|X|>M\}}|X|d\mu$ коначан за неко M, па је

$$E(|X|) = \int_{\{|X|\leqslant M\}}|X|d\mu + \int_{\{|X|>M\}}|X|d\mu \leqslant M + \int_{\{|X|>M\}}|X|d\mu < \infty.$$

Обратно, претпоставимо да је случајна променљива X интеграбилна. Имамо $0 \leqslant |X|\cdot\chi_{\{|X|\leqslant M\}} \nearrow X$, па на основу Бепо-Левијеве теореме добијамо

$$\int_{\{|X|\leqslant M\}}|X|d\mu \nearrow E(|X|).$$

Према томе, како претпостављамо да је $E(|X|)$ коначно,

$$\int_{\{|X|>M\}}|X|d\mu = E(|X|) - \int_{\{|X|\leqslant M\}}|X|d\mu \to 0,$$

када $M \to \infty$. □

Дефиниција 2.22. *Кажемо да је фамилија случајних променљивих $\{X_i\}_{i\in I}$ униформно интеграбилна уколико задовољава услов (1) униформно по i, тј. уколико је*

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>M\}}|X_i|d\mu = 0.$$

Став 2.23. *Нека је $\mathcal{F}(\varepsilon) = \{A\in\mathcal{F} \mid \mu(A)\leqslant\varepsilon\}$. Фамилија случајних променљивих $\{X_i\}$ је униформно интеграбилна ако и само ако важи*

(i) $\sup\limits_{i\in I} E(|X_i|) < \infty$,

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{A\in\mathcal{F}(\varepsilon),\ i\in I}\int_A |X_i|d\mu = 0.$

Доказ: Доказ се може наћи у [25]. □

Став 2.24. *(Довољан услов за униформну интеграбилност) Фамилија случајних промењљивих $\{X_i\}_{i\in I}$ је униформно интеграбилна ако важи бар један од наредна два услова*

(i) Постоји интеграбилна случајна промењљива X таква да је $|X_i| \leqslant X$ за свако $i \in I$.

(ii) Постоји $p > 1$ такво да је $\sup\limits_{i\in I} E(|X_i|^p) < \infty$.

Доказ: Претпоставимо да је задовољен први услов. Тада је фамилија $\{X_i\}_{i\in I}$ ограничена у L_1 са $E(|X|)$. Штавише, имамо

$$\sup_{A\in\mathcal{F}(\varepsilon),\ i\in I}\int_A |X_i|d\mu \leqslant \sup_{A\in\mathcal{F}(\varepsilon))}\int_A |X|d\mu \to 0$$

јер је свака интеграбилна случајна промењљива је униформно интеграбилна.

Претпоставимо сада да је испуњен други услов. Тада

$$\sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>M\}} |X_i|d\mu \leqslant \sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>M\}} \frac{|X_i|^p}{M^{p-1}}d\mu \leqslant \frac{1}{M^{p-1}}\sup_{i\in I} E(|X_i|^p) \to 0, \quad M\to\infty. \ \square$$

Теорема 2.25. *(Виталијева[13] теорема о конвергенцији) Нека је $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ низ интеграбилних случајних промењљивих и нека је X интеграбилна случајна промењљива. Следећи искази су еквивалентни*

(i) $X_n \to X$ у L_1

(ii) Низ случајних промењљивих $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ је униформно интеграбилан и $X_n \to X$ у вероватноћи.

Доказ: $(i) \Rightarrow (ii)$: Знамо да из конвергенције у L_1 следи конвергенција у вероватноћи. Да бисмо показали да је низ $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ униформно интеграбилан, прво ћемо показати да је низ $\{X_n - X\}_{n\geqslant 1}$ униформно интеграбилан.
За $\varepsilon > 0$ нека је $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такво да је $E(|X_n - X|) \leqslant \varepsilon$ за $n > n_0(\varepsilon)$.
Даље,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|X_n-X|>M\}} |X_n - X|d\mu$$
$$= \max\left(\sup_{n\leqslant n_0(\varepsilon)}\int_{\{|X_n-X|>M\}} |X_n - X|d\mu,\ \sup_{n>n_0(\varepsilon)}\int_{\{|X_n-X|>M\}} |X_n - X|d\mu\right).$$

[13] Giuseppe Vitali (1875-1932.), италијански математичар

Како је свака коначна фамилија интеграбилних случајних променљивих и униформно интеграбилна, за први супремум важи

$$\sup_{n \leqslant n_0(\varepsilon)} \int_{\{|X_n - X| > M\}} |X_n - X| d\mu \leqslant \epsilon$$

је $\leqslant \varepsilon$ за довољно велико M. Други супремум је ограничен са

$$\sup_{n > n_0(\varepsilon)} E(|X_n - X|) \leqslant \varepsilon.$$

Из униформне интеграбилност низа $\{X_n - X\}_{n \geqslant 1}$ следи да је

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |X_n - X| d\mu = 0,$$

одакле је

$$\sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |X_n| d\mu \leqslant \sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |X_n - X| d\mu + \sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \int_A |X| d\mu \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

па је такође и низ $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ интеграбилан.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Најпре показујемо да је низ $\{X_n - X\}_{n \geqslant 1}$ униформно интеграбилан. Важи

$$\sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |X_n - X| d\mu \leqslant \sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |X_n| d\mu + \sup_{A \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \int_A |X| d\mu \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Да бисмо доказали да $X_n \to X$ у L_1, морамо показати да за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$E(|X_n - X|) \leqslant \varepsilon$$

за довољно велико $n \in \mathbb{N}$. За свако $\delta > 0$ одаберимо $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\mu\{|X_n - X| > \delta\} \leqslant \delta$$

за свако $n \geqslant n_0(\delta)$ (ово је могуће јер $X_n \to X$ у вероватноћи).
Тада важи $\{|X_n - X| > \delta\} \in \mathcal{F}(\delta)$ за свако $n \geqslant n_0(\delta)$, па је

$$\sup_{n \geqslant n_0(\delta)} \int_{\{|X_n - X| > \delta\}} |X_n - X| d\mu \leqslant \sup_{A \in \mathcal{F}(\delta)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |X_n - X| d\mu \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Одаберимо сада $\delta > 0$ такво да је $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и

$$\sup_{n \geqslant n_0(\delta)} \int_{\{|X_n - X| > \delta\}} |X_n - X| d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тада имамо да за свако $n \geqslant n_0(\delta)$ важи

$$\begin{aligned} E(|X_n - X|) &\leqslant \int_{\{|X_n - X| \leqslant \delta\}} |X_n - X| d\mu + \int_{\{|X_n - X| > \delta\}} |X_n - X| d\mu \\ &\leqslant \delta + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 2.26. *Нека је* $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *субмартингал на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *и нека је* $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left\{\bigcup\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n\right\}$.

(i) Субмартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *конвергира у* L_1 *ако и само ако је униформно интеграбилан.*

(ii) Ако је испуњен неопходни услов, онда је процес $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ *(где је* $f_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$*) субмартингал у односу на филтрацију* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$.

Доказ: Из Теореме 2.25 имамо да конвергенција у L_1 повлачи униформну интеграбилност. Обрнуто, претпоставимо да је субмартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ унифомрно интеграбилан. Тада је он ограничен у L_1, па на основу Теореме 2.20 конвергира скоро сигурно ка интеграбилној случајној промењљивој f_∞. На основу Теореме 2.25 (Виталијеве теореме), уз услов униформне интеграбилности, добијамо конвергенцију у L_1.

Коначно, да би показали да је процес $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ субмартингал, потребно је показати да је

$$\int_A f_\infty d\mu \geqslant \int_A f_n d\mu$$

за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $A \in \mathcal{F}_n$. Како $f_n \to f_\infty$ у L^1, имамо

$$\int_A f_\infty d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_A f_m d\mu \geqslant \int_A f_n d\mu. \quad \square$$

Теорема 2.27. *Нека је* $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *мартингал на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *и нека је* $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left\{\bigcup\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n\right\}$. *Тада су следећи искази еквивалентни.*

(i) Мартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *је униформно интеграбилан.*

(ii) $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *конвергира у* L_1 *ка неком* f^*.

(iii) Постоји $\mathcal{F}_\infty$*-мерљива случајна промењљива* f_∞ *таква да је процес* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ *мартингал у односу на филтрацију* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$.

Штавише, у овом случају је $f_\infty = f^*$.

Доказ: $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$: Ове импликације следе из претходне теореме.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Како је фамилија $\{E(f_\infty \mid \mathcal{A})\}$ (где су $\mathcal{A}$ σ-подалгебре од $\mathcal{F}$) униформно интеграбилна, то је и низ $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ униформно интеграбилан.

Да бисмо доказали да је $f_\infty = f^*$, приметимо најпре да за све $A \in \bigcup\limits_{m \geqslant 0} \mathcal{F}_m$ важи

$$\int_A f^* d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f_\infty d\mu. \tag{2}$$

Како је $\{A \in \mathcal{F} \mid \int_A f^* d\mu = \int_A f_\infty d\mu\}$ σ–алгебра, следи да (2) важи за све $A \in \mathcal{F}_\infty$. Како су f^* и f_∞ $\mathcal{F}_\infty$-мерљиви (f^* јер је лимес $\mathcal{F}_\infty$-мерљивих случајних променљивих, а f_∞ по претпоставци), то је $f_\infty = f^*$. $\square$

Теорема 2.28. *(Теорема о L_p-конвергенцији) Нека је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал такав да је $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E(|f_n|^p) < \infty$ за неко $p > 1$. Тада $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ конвергира скоро сигурно и у L_p.*

Доказ: Како је мартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ ограничен у L_p, тада је он и униформно интеграбилан, па конвергира скоро сигурно ка f_∞. Докажимо да конвергира у L_p. Означимо $Y = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n|$. Тада важи

$$|f_n - f_\infty|^p \leqslant (2Y^p).$$

На основу Теореме 4.4 (Дубова неједнакост),

$$E(Y^p) = E\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n|^p\right) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\in\mathbb{N}_0} E(|f_n|^p) < \infty,$$

па је одатле $Y^p \in L_1$.
Коначно, на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији, добијамо

$$\lim_{n\to\infty} E(|f_n - f_\infty|^p) = 0. \ \square$$

3 H_p $(p \geqslant 1)$ и BMO мартингали

У претходној глави увели смо концепт мартингала и једну врсту мартингалних простора L_p. У овом поглављу увешћемо концепт максималног оператора M и квадратног оператора S. Проучаваћемо мартингални простор H_p и утврдити L_p еквиваленцију $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ између M и S. Дефинисаћемо и мартингалне BMO просторе.

У наредном излагању $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mu)$ је комплетан простор вероватноћа снабдевен растућом фамилијом σ–подалгебри који задовољава уобичајени услов, тј. $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mu)$ је комплетан и $\mathcal{F} = \bigvee\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n$.

Дефинишимо максимални оператор M и квадратни оператор S. Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал. Разлику мартингала дефинишемо као

$$d_0 f \overset{def}{=} 0, \quad d_n f \overset{def}{=} f_n - f_{n-1},\ n \in \mathbb{N},$$

Низ $df = \{d_n f\}_{n\geqslant 1}$ назива се мартингални низ разлика од f. Кажемо да је f коначан мартингал уколико постоји N такво да је $d_n f = 0$ за свако $n \geqslant N$.

Условно очекивање f-а у односу на $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, $E(f|\mathcal{F}_n)$ означаваћемо са $E_n(f)$ за свако n, кад год нам буде погодније ради елегантнијег записа.

Максимална функција мартингала $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ дефинише се као

$$M_n(f) \overset{def}{=} f_n^* = \sup_{k\leqslant n} |f_k|,$$

$$M(f) = \lim_{n\to\infty} M_n(f) \overset{def}{=} f^* = \sup_n |f_n|.$$

Квадратна варијација дефинише се као

$$S_n(f) \overset{def}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} |d_k f|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$S(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f) \overset{def}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_n f|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

док се условна квадратна варијација дефинише као

$$s_n(f) \overset{def}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} E_{k-1} |d_k f|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$s(f) = \lim_{n\to\infty} s_n(f) \overset{def}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_{n-1} |d_n f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Посматрајмо својства оператора M и S на L_p просторима, пошто се мартингални Хардијеви простори дефинишу помоћу њих. У наредним тврђењима посматрамо коначне мартингале (тј. оне мартингале $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ такве да постоји $N \geqslant 0$ за које важи $f_n = f_N$ за свако $n \geqslant N$), а затим прелазимо на мартингале у општем случају узимајући лимес. Запазимо још, да за било који мартингал $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ и за свако N, $f^{(N)} = \{f_{n\wedge N}\}_{n\geqslant 0}$ је коначан мартингал и називамо га још мартингал заустављања мартингала f у тренутку N. На тај начин избегавамо одређене потешкоће које се тичу конвергенције и интеграбилности.

Најпре, размотримо како се оператори M и S понашају на L_1 мартингалима.

Лема 3.1. *Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ L_1 мартингал, $\lambda > 0$ и $\tau_\lambda = \inf\{n \mid |f_n| > \lambda\}$. Тада је*

$$\big|\{\tau_\lambda < \infty\}\big| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1.$$

Доказ: Посматрајмо коначан мартингал $f^{(n)} = \{f_{n\wedge m}\}_{m\geqslant 0}$ и

$$\tau_n = \inf\{m \leqslant n, |f_m| > \lambda\} = \begin{cases} \tau_\lambda, & \tau_\lambda \leqslant n \\ \infty, & \tau_\lambda > n \end{cases}$$

Тада је $|f_{\tau_n}| > \lambda$ на $\{\tau_n < \infty\}$. Стога,

$$\big|\{\tau_n < \infty\}\big| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\{\tau_n<\infty\}} |f_{\tau_n}|\, d\mu = \frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^{n}\int\limits_{\{\tau_n=m\}} |f_m| d\mu \leqslant \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\{\tau_n<\infty\}} |f_n| d\mu.$$

Како имамо $\big|\{\tau_n < \infty\}\big| \to \big|\{\tau_\lambda < \infty\}\big|$, добијамо

$$\big|\{\tau_\lambda < \infty\}\big| \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup_n \|f_n\|_1 = \frac{1}{\lambda}\|f\|_1. \ \square$$

Теорема 3.2. *Максимални оператор M је оператор слабог типа $(1,1)$. За свако $f \in L_1$, имамо*

$$\big|\{Mf > \lambda\}\big| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1,\ \lambda > 0. \tag{1}$$

где формула (1) даје оцену слабе $(1,1)$ норме.

Доказ: Нека је $\lambda > 0$ произвољно и

$$\tau_\lambda = \inf\{n \mid |f_n| > \lambda\}.$$

Приметимо да је

$$\{Mf > \lambda\} = \{\tau_\lambda < \infty\},$$

па на основу претходне леме добијамо

$$|\{Mf > \lambda\}| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1. \ \square$$

Примедба 3.3.

(1) *За $f \in L^1_u$ можемо тврдити и више. Како је $f_n = E(f_\infty \mid \mathcal{F}_n)$, где смо са f_∞ означили f (као што иначе чинимо за $f \in L^p_u$), из доказа претходне леме добијамо*

$$\big|\{Mf > \lambda\}\big| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\{Mf>\lambda\}} |f| d\mu. \tag{2}$$

(2) *Неједнакост (1) такође важи и за све ненегативне L_1-субмартингале.*

Лема 3.4. *Нека је $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0}$ L_1–мартингал, $\lambda > 0$ и $\tau_\lambda = \inf\{n \mid |f_n| > \lambda\}$. Тада је*

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left(|d_k f|^2 \chi_{\{\tau_\lambda > k\}}\right) \leqslant 2\lambda \|f\|_1.$$

где је $d_n = f_n - f_{n-1}, n \geqslant 0$ и $f_{-1} = 0$.

Доказ: Прво покажимо да за било који коначни мартингал $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0}$ и било које време заустављања τ имамо идентитет

$$\sum_{k=0}^{\tau-1} |d_k f|^2 + |f_{\tau-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\tau} \bar{f}_{k-1}(f_{k-1} - f_k) + \sum_{k=1}^{\tau} f_{k-1}(\bar{f}_{k-1} - \bar{f}_k) + f_\tau \bar{f}_{\tau-1} + \bar{f}_\tau f_{\tau-1}$$

У тачкама у којима је $\tau < \infty$ имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\tau-1} |d_k f|^2 + |f_{\tau-1}|^2 &= \sum_{k=0}^{\tau-1} (f_k - f_{k-1})(\bar{f}_k - \bar{f}_{k-1}) + f_{\tau-1}\bar{f}_{\tau-1} \\
&= 2\sum_{k=1}^{\tau} f_{k-1}\bar{f}_{k-1} - f_{\tau-1}\bar{f}_{\tau-1} - \sum_{k=1}^{\tau} f_k \bar{f}_{k-1} + f_\tau \bar{f}_{\tau-1} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\tau} \bar{f}_k f_{k-1} + \bar{f}_\tau f_{\tau-1} + f_{\tau-1}\bar{f}_{\tau-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\tau} \bar{f}_{k-1}(f_{k-1} - f_k) + \sum_{k=1}^{\tau} f_{k-1}(\bar{f}_{k-1} - \bar{f}_k) + f_\tau \bar{f}_{\tau-1} + \bar{f}_\tau f_{\tau-1}.
\end{aligned}$$

У оним тачкама у којима је $\tau = \infty$, с обзиром да је мартингал коначан и не мења се после n, тј. за $k > n$ је $d_k = 0$, имамо да су $\sum_0^{\tau-1}$, $f_{\tau-1}$, f_τ и $\sum_1^\tau$, у ствари $\sum_0^n$, f_n, f_n и $\sum_0^n$, редом.

Сада, за L_1–мартингале $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0}$ и $\tau_\lambda = \inf\{n \mid |f_n| > \lambda\}$ узимајући у обзир $f^{(n)} = (f_{n \wedge m})_{m \geqslant 0}$ и

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_\lambda, & \tau_\lambda \leqslant n \\ \infty & \tau_\lambda > n \end{cases}$$

и записујући их као f и τ имамо

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=0}^{\tau-1}|d_k f|^2\right)+E\left(|f_{\tau-1}|\right)^2 &= E(\sum_{k=1}^{\tau}\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)+\sum_{k=1}^{\tau}f_{k-1}(\bar{f}_{k-1}-\bar{f}_k)+f_\tau\bar{f}_{\tau-1}+\bar{f}_\tau f_{\tau-1}) \\
&= E(\sum_{k=1}^{\tau}\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k))+E(\sum_{k=1}^{\tau}f_{k-1}(\bar{f}_{k-1}-\bar{f}_k))+E(f_\tau\bar{f}_{\tau-1})+E(\bar{f}_\tau f_\tau \\
&= E(f_\tau\bar{f}_{\tau-1})+E(\bar{f}_\tau f_{\tau-1})\leqslant 2\lambda E(|f_\tau|)\leqslant 2\lambda\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Преласком на лимес када n тежи бесконачности, добијамо

$$\sum_{k=0}^{\infty}E\left(|d_k f|^2\chi_{\{\tau_\lambda>k\}}\right)\leqslant 2\lambda\|f\|_1.$$

Међутим, уочимо неке битне техничке детаље које смо користили при извођењу формуле изнад:

(i) Из особине (6) условног очекивања, имамо да је

$$E_{\mathcal{F}_1}(fg)=gE_{\mathcal{F}_1}(f),\quad f\in L_p, g\in L_1$$

и g је $\mathcal{F}_1$–мерљива.

(ii) Из дефиниције мартингала
$E_(f_n|\mathcal{F}_{n-1})=f_{n-1}$, па на основу Примедбе 2.3 важи $E_{\mathcal{F}_m}(f_n)=f_m$, за $m<n$.

(iii) Сада, на основу (i) и (ii) имамо

$$\begin{aligned}
E\left(\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)\right) &= E\Big(E\left(\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)|\mathcal{F}_{k-1}\right)\Big) \\
&= E\left(\bar{f}_{k-1}E(f_{k-1}-f_k|\mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&= E\left(\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_{k-1})\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Дакле, из (iii) закључујемо да је

$$E\left(\sum_{k=1}^{\tau}\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)\right)=\sum_{k=1}^{\tau}E(\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k))=0.$$

Аналогно је и

$$E\left(\sum_{k=1}^{\tau}f_{k-1}(\bar{f}_{k-1}-\bar{f}_k)\right)=0.\quad\square$$

Теорема 3.5. *Квадратни оператор S је слабог типа* $(1,1)$.

Доказ: Применом претходне леме и Чебишевљеве неједнакости $|\{h > \lambda\}| \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\|h\|_2^2$ добијамо

$$|\{Sf > \lambda\}| \leqslant |\{S_{\tau_\lambda - 1}f > \lambda\}| + |\{\tau_\lambda < \infty\}| \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\|S_{\tau_\lambda - 1}f\|_2^2 + \frac{1}{\lambda}\|f\|_1 \leqslant \frac{3}{\lambda}\|f\|_1,$$

где је $f \in L_1$, $\lambda > 0$ и $\tau_\lambda = \inf\{n \mid |f_n| > \lambda\}$ време заустављања. □

Дубова максимална неједнакост из које закључујемо L_p–ограниченост оператора M за $p > 1$ је последица неједнакости (2).

Теорема 3.6. *Нека је* $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0} \in L_p$, $1 < p \leqslant \infty$. *Тада*

$$\|f\|_p \leqslant \|Mf\|_p \leqslant q\|f\|_p. \tag{3}$$

где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказ: Неједнакост (2) нам даје

$$\big|\{Mf > \lambda\}\big| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\{Mf > \lambda\}} |f| d\mu,$$

одакле интеграцијом обе стране неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (Mf)^p d\mu &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \big|\{Mf > \lambda\}\big| \, d\lambda \\
&\leqslant p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int\limits_{\{Mf > \lambda\}} |f| \, d\mu d\lambda \\
&= q \int_\Omega |f| (Mf)^{p-1} d\mu \\
&\leqslant q\|f\|_p \left(\int_\Omega (Mf)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а како можемо претпоставити да је

$$\int_\Omega (Mf)^p d\mu < \infty,$$

добијамо да важи (3). □

Да бисмо показали ограниченост оператора S на простору L_p мартингала, за $1 < p < \infty$, посматраћемо паралелно и L_p–еквиваленцију између M и S.

Пре свега потребан нам је простор ${}_2K_p$. С обзиром да је Банахов простор уређен пар скупа и норме, а како је овде дефинисана ${}_2K_p$ норма различита од L_p норме, у том смислу он представља нови простор. Међутим, као скуп једнак је простору L_p за $2 \leqslant p < \infty$.

Дефиниција 3.7. *Нека је $2 \leqslant p < \infty$ и $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ L_1–мартингал. Кажемо да f припада простору ${}_2K_p$ ако постоји $\gamma \in L_+^p$ такво да је*

$$E\left(|f - f_{n-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n\right) \leqslant E(\gamma^2 \mid \mathcal{F}_n),\ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Норма у овом простору се дефинише са

$$\|f\|_{{}_2K_p} = \inf\{\|\gamma\|_p \mid \gamma \text{ задовољава (4)}\}.$$

Примедба 3.8. *У неједнакости (4) са f означавамо f_∞. Напоменимо, да исти симбол f користимо када означавамо мартингал $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ и када означавамо $f_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n$, када постоји тачка по тачка.*
Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0} \in L_1$ и нека важи (4). Тада можемо уочити да је $f \in L_2$. Заиста, уколико у (4) убацимо $n = 0$, добијамо

$$E\left(|f_\infty|^2 \mid \mathcal{F}_0\right) \leqslant E(\gamma^2 \mid \mathcal{F}_0),$$

односно

$$E(|f_\infty|^2) \leqslant E(\gamma^2)$$

Одатле,

$$\begin{aligned}
E(|f_n|^2)^{\frac{1}{2}} &\leqslant E(|f_\infty - f_n|^2)^{\frac{1}{2}} + E(|f_\infty|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant E\left(E(|f_\infty - f_n|^2 \mid \mathcal{F}_{n+1})\right)^{\frac{1}{2}} + E\left(|f_\infty|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant E\left(E(\gamma^2 \mid \mathcal{F}_{n+1})\right)^{\frac{1}{2}} + E(|f_\infty|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2E(\gamma^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Одавде је $f \in L_2$. Индекс 2 не игра пресудну улогу у овим аргументима.

Сада можемо дефинисати просторе ${}_{a+}K_p$ и ${}_aK_p$, $1 \leqslant a \leqslant p \leqslant \infty$ као

$${}_{a+}K_p = \left\{ f \in L_u^a \mid (\exists \gamma \in L_+^p)(\forall n \in \mathbb{N})\ E\left(|f - f_n|^a \mid \mathcal{F}_n\right) \leqslant E(\gamma^a \mid \mathcal{F}_n) \right\},$$

$${}_aK_p = \left\{ f \in L_u^a \mid (\exists \gamma \in L_+^p)(\forall n \in \mathbb{N})\ E\left(|f - f_{n-1}|^a \mid \mathcal{F}_n\right) \leqslant E(\gamma^a \mid \mathcal{F}_n) \right\},$$

са нормом

$$\|f\| := \inf_\gamma \|\gamma\|_p$$

Притом, може се показати да је ${}_aK_p \sim {}_{a+}K_p \sim L_p$, за $1 < p < \infty$.

Следећу лему наводимо без доказа, а њен доказ се може наћи у [2]. Користимо је као битан корак при приказивању својстава оператора S.

Лема 3.9. *Нека је* $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k \geqslant 0}$ *низ чији су елементи* $\{-1, 1\}$, *док је* T_ε *оператор дефинисан са*

$$T_\varepsilon f = g = \{g_n\}_{n \geqslant 0},$$

где је

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k d_k f$$

и $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0}$. *Тада за* $2 < p < \infty$ *важи*

$$\|Mg\|_p \leqslant \sqrt{e}\sqrt{\frac{p^3}{p-2}}\|f\|_{{}_2K_p}.$$

Наредна дефиниција представља кључни појам рада.

Дефиниција 3.10. *Нека је* $0 < p \leqslant \infty$. *Мартингални Хардијеви простори* H_p^s, H_p^S, H_p^* *су простори мартингала за које редом важи*

$$\|f\|_{H_p^s} \stackrel{def}{=} \|s(f)\|_p < \infty,$$
$$\|f\|_{H_p^S} \stackrel{def}{=} \|S(f)\|_p < \infty,$$
$$\|f\|_{H_p^*} \stackrel{def}{=} \|M(f)\|_p < \infty.$$

Када нам ситуација буде дозвољавала, заменићемо H_p за H_p^S. Оваква терминологија је дозвољена јер за погодан избор $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и $\{\mathcal{F}_n\}$ ови простори могу бити идентификовани са класичним H_p простором, тј. скупом функција $F(z)$ аналитичких на диску $|z| < 1$ и таквих да је

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Примедба 3.11. *Простор* H_p^s *се у литератури означава и са* h_p *и назива се условни мартингални Хардијев простор, за* $0 < p \leqslant \infty$.

У наредном излагању показаћемо Хичинову неједнакост, која нам је потребна да бисмо доказали да за $2 < p < \infty$ важи да је $H_p^S = H_p^* = {}_2K_p$ са еквивалентним нормама, користићемо наредну лему, коју приказујемо без доказа.

Лема 3.12. *Нека су* $X_1, \ldots, X_n$ *независне случајне променљиве, при чему је свака са Радемарховом дистрибуцијом. За* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *и* $\lambda > 0$ *важи*

$$\mu\left(|S_n| > \lambda(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2)^{1/2}\right) \leqslant 4e^{-\lambda^2/2}$$

где је

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k.$$

Примедба 3.13. *Нека је* $\{r_k(t)\}_{k\geqslant 0}$ *Радемахеров*[14] *систем, где је*

$$r(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

и $r_n(x) := r(2^n x)$, $(0 \leqslant x < 1, n \in \mathbb{N})$.
Тада кажемо независне случајне променљиве $r_1, \ldots, r_k$ *имају исту Радемархову дистрибуцију ако је* $\mu(r_k = 1) = \mu(r_k = -1) = 1/2$.

Теорема 3.14. *Нека је* $1 \leqslant p < \infty$, $C(p) = (2^{1+\frac{1}{p}} \cdot p \cdot \Gamma(\frac{p}{2}))^{\frac{1}{p}}$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Уколико су* $X_1, \ldots, X_n$ *независне случајне променљиве са Радемарховом дистрибуцијом и* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, *тада*

$$C(q)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(E \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k \right|^p \right)^{1/p} \leqslant C(p) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \tag{5}$$

Доказ: Уочимо прво да можемо израчунати да је

$$\left(\int_0^\infty p t^{p-1} \cdot 4 e^{-t^2/2} dt \right)^{1/p} = (2^{1+\frac{1}{p}} \cdot p \cdot \Gamma(\frac{p}{2}))^{\frac{1}{p}} = C(p)$$

Нека је $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$ и нека је $\alpha_k = \frac{a_k}{\sigma}$. Уколико је $\sigma = 0$ доказ је завршен. Доказивање (5) еквивалентно је доказивању следеће неједнакости

$$C(q)^{-1} \leqslant \left(E \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_k \right|^p \right)^{1/p} \leqslant C(p)$$

Нека је $S_n := \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$. Користећи особину да за случајну променљиву X за коју важи $\mu(X \geqslant 0) = 1$, имамо

$$E(X^p) = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(X \geqslant t) dt,$$

па, одатле, користећи Лему 3.12

$$E(|S_n|^p) = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(|S_n| \geqslant t) dt \leqslant \int_0^\infty p t^{p-1} \cdot 4 e^{-t^2/2} dt.$$

Одатле, закључујемо,

$$E(|S_n|^p)^{1/p} \leqslant C(p). \tag{6}$$

[14] Hans Adolph Rademacher (1892-1969.), немачко-амерички математичар

Како су X_k независне случајне променљиве, $E(X_k) = 0$ и $E(|X_k|^2) = 1$, користећи Хелдерову неједнакост, следи

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right|^2\right) \leqslant E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right|^p\right)^{1/p} \cdot E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right|^q\right)^{1/q}$$

Користећи (6) добијамо

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right|^q\right)^{1/q} \leqslant C(p),$$

па како је $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = 1$ добијамо следеће

$$1 \leqslant C(q) E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right|^q\right)^{1/q}.$$

Стога, имамо

$$C(q)^{-1} \leqslant E(|S_n|^p)^{1/p} \leqslant C(p)$$

чиме је доказ завршен. □

Теорема 3.15. *За* $2 < p < \infty$ *важи да је* $H_p^S = H_p^* = {}_2K_p$ *са еквивалентним нормама.*

Доказ: Претпоставимо да је $p > 2$.
Користећи Став 2.5 имамо

$$\begin{aligned}
E(|f - f_{n-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n) &= E\left(|\sum_{k=n}^{\infty} d_k f|^2 | \mathcal{F}_n\right) = E\left((\sum_{k=n}^{\infty} d_k f)(\sum_{k=n}^{\infty} \overline{d_k f}) | \mathcal{F}_n\right) \\
&= E\left((\sum_{k=n}^{\infty} d_k f \overline{d_k f}) | \mathcal{F}_n\right) = E\left((\sum_{k=n}^{\infty} |d_k f|^2) | \mathcal{F}_n\right) \\
&= E\left((\sum_{k=0}^{\infty} |d_k f|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |d_k f|^2) | \mathcal{F}_n\right) \\
&= E\left((S(f))^2 - (S_{n-1}(f))^2 \mid \mathcal{F}_n\right) \\
&\leqslant E\left((S(f))^2 \mid \mathcal{F}_n\right), \ n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

као и

$$E\left(|f - f_{n-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n\right) \leqslant E\left((2Mf)^2 \mid \mathcal{F}_n\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Приметимо сада, да је одатле

$$H_p^S \subset {}_2K_p, \quad H_p^* \subset {}_2K_p,$$

где су ова утапања непрекидна.

Уколико применимо Лему 3.9 на идентички оператор I добијамо

$$\|Mf\|_p \leqslant \sqrt{\frac{ep^3}{p-2}}\|f\|_{{}_2K_p}.$$

Овде закључујемо да је ${}_2K_p \subset H_p^*$ и утапање је непрекидно. Примењујући Лему 3.9 на $\varepsilon = \{r_k(t)\}_{k\geqslant 0}$ Радемахеров[15] систем, добијамо

$$\int_\Omega \left|\sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)d_kf(\omega)\right|^p d\mu \leqslant C_p\|f\|^p_{{}_2K_p},$$

па је

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)d_kf(\omega)\right|^p dtd\mu &= \int_0^1\int_\Omega \left|\sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)d_kf(\omega)\right|^p d\mu dt \\
&\leqslant \int_0^1 C_p\|f\|^p_{{}_2K_p}dt \\
&= C_p\|f\|^p_{{}_2K_p}t\Big|_0^1 \\
&= C_p\|f\|^p_{{}_2K_p}
\end{aligned}$$

Користећи Хинчинову неједнакост (5) имамо

$$a_p^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|d_kf|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(E|\sum_{k=0}^{\infty}r_kd_kf|^p\right)^{1/p} \leqslant a_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}|d_kf|^2\right)^{1/2}$$

где је a_p константа која зависи од p и $\left(E|\sum_{k=0}^{\infty}r_kd_kf|^p\right)^{1/p} = \left(\int_0^1|\sum_{k=0}^{\infty}r_kd_kf|^pdt\right)^{1/p}$.

Даље,

$$a_p^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|d_kf|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1|\sum_{k=0}^{\infty}r_kd_kf|^pdt\right)^{1/p} \leqslant a_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}|d_kf|^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

па је одатле,

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)d_kf(\omega)\right|^p dt \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty}|d_kf|^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{8}$$

[15] Hans Adolph Rademacher (1892-1969.), немачко-амерички математичар

где је $f \approx g$ ако постоји константом $c > 0$ тако да је $c^{-1}f \leqslant g \leqslant cf$.

Из леве стране неједнакости (7) следи:

$$A_p \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} |d_k f|^2 \right)^{1/2} \right)^p \leqslant \left(\int_0^1 |\sum_{k=0}^{\infty} r_k d_k f|^p dt \right) \tag{9}$$

где је $A_p = (a_p^{-1})^p$.

С обзиром да је, $S(f) \overset{def}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |d_k f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, замењујући у (9) добијамо,

$$A_p \left(S(f) \right)^p \leqslant \int_0^1 |\sum_{k=0}^{\infty} r_k d_k f|^p dt$$

$$A_p \int_{\Omega} \left(S(f) \right)^p d\mu \leqslant \int_{\Omega} \int_0^1 |\sum_{k=0}^{\infty} r_k d_k f|^p dt d\mu$$

$$a_p^{-1} \left(\int_{\Omega} \left(S(f) \right)^p d\mu \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\Omega} \int_0^1 |\sum_{k=0}^{\infty} r_k d_k f|^p dt d\mu \right)^{1/p}$$

$$a_p^{-1} \|S(f)\|_p \leqslant \left(\int_{\Omega} \int_0^1 |\sum_{k=0}^{\infty} r_k d_k f|^p dt d\mu \right)^{1/p}$$

добијамо

$$\|S(f)\|_p \leqslant C_p \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t) d_k f(\omega) \right|^p dt d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p \|f\|_{{}_2K_p}.$$

Одавде закључујемо да је ${}_2K_p \subset H_p^S$ и утапање је непрекидно. Овим је завршен доказ за $p > 2$.

У случају, $p \leqslant 2$ имамо следеће.

Приметимо да је оператор T_ε дефинисан у Леми 3.9 самоадјунгован и да је $T_\varepsilon^2 = I$.

Дакле, нека је $1 < p \leqslant 2$ и $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0} \in L_p$ коначни мартингал, тада за свако $g = \{g_n\}_{n \geqslant 0} \in L_q$, где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ важи

$$|E(T_\varepsilon f g)| = |E(f T_\varepsilon g)| \leqslant \|f\|_p \|T_\varepsilon g\|_q \leqslant C \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ово нам показује да је

$$\|T_\varepsilon f\|_p \leqslant C \|f\|_p,$$

$1 < p \leqslant 2$ за свако $f \in L_p$. $\square$

Преласком на лимес, T_ε се може продужити на цео L_p, $1 < p \leqslant 2$ и при томе да остане L_p–ограничен.

Поред тога, имамо

$$\|f\|_p = \|T_\varepsilon T_\varepsilon f\|_p \leqslant C\|T_\varepsilon f\|_p, \quad 1 < p < \infty. \tag{10}$$

Према томе добијамо

$$C\|f\|_p \leqslant \|T_\varepsilon f\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty. \tag{11}$$

Тада из (8) и (11)

$$C\|f\|_p \leqslant \|S(f)\|_p \leqslant C\|f\|_p, \ 1 < p < \infty,$$

одакле добијамо наредну теорему.

Теорема 3.16. *За* $1 < p < \infty$ *имамо* $H_p^* = H_p^S = L_p$ *са*

$$\|Mf\|_p \approx \|S(f)\|_p \approx \|f\|_p.$$

Истим доказом можемо показати да је ${}_aK_p$ за $1 \leqslant a < p < \infty$ еквивалентан са H_p (H_p^s или H_p^*, с обзиром да су исти).

Посматрајмо случај $p = 1$. Тада имамо следећу теорему.

Теорема 3.17. *За сваки мартингал* $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *имамо*

$$C\|Mf\|_1 \leqslant \|S(f)\|_1 \leqslant C\|Mf\|_1.$$

При доказу претходне теореме користи се Дејвисова декомпозиција, коју ћемо формулисати као лему и доказати, док се доказ теореме може наћи у књизи [2].

Лема 3.18. *(Дејвисова декомпозиција) Нека је* $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *мартингал, тада се* f *може разложити као* $f = g + h$, *где је*

$$g = \{g_n\}_{n\geqslant 0}, \quad |dg| \leqslant 4M_{n-1}\Delta, \ n \geqslant 0,$$

$$h = \{h_n\}_{n\geqslant 0}, \quad E\left(\sum_{k=0}^{\infty} |d_k h|\right) \leqslant 4E(M\Delta),$$

где је $\Delta_n = d_n f, \ n \geqslant 0$.

Доказ: Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ и $f_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k$. Тада дефинишемо

$$d_n g = \Delta_n \chi_{\{|\Delta_n| \leqslant 2M_{n-1}\Delta\}} - E\left(\Delta_n \chi_{\{|\Delta_n| \leqslant 2M_{n-1}\Delta\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right), \quad n \geqslant 0,$$

$$d_0 g = g_0 = 0,$$
$$d_n h = \Delta_n \chi_{\{|\Delta_n| > 2M_{n-1}\Delta\}} - E\left(\Delta_n \chi_{\{|\Delta_n| > 2M_{n-1}\Delta\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right), \quad n \geqslant 1,$$
$$d_0 h = h_0 = \Delta_0.$$

Имамо $|d_n g| \leqslant 4M_{n-1}\Delta$, као и

$$|\Delta_n|\chi_{\{|\Delta_n| > 2M_{n-1}\Delta\}} \leqslant (2|\Delta_n| - 2M_{n-1}\Delta)\chi_{\{|\Delta_n > 2M_{n-1}\Delta|\}} \leqslant 2(M_n\Delta - M_{n-1}\Delta),$$

одакле следи

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_n h|\right) &\leqslant E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(2(M_n\Delta - M_{n-1}\Delta) + E(2(M_n\Delta - M_{n-1}\Delta \mid \mathcal{F}_{n-1}))\right)\right) \\
&\leqslant 4E\left(\sum_{n=0}^{\infty} (M_n\Delta - M_{n-1}\Delta)\right) \\
&= 4E(M\Delta) \quad \square
\end{aligned}$$

Докажимо да је H_1 Банахов простор. Довољно је доказати комплетност. Нека је $\{f^{(k)}\}_k$ Кошијев[16] низ у H_1. Тада је $f_n^{(k)} \to f_n$ у L_1, $0 \leqslant n \leqslant \infty$. Узмимо низ $\{k_j\}$ такав да је

$$\lim_{j\to\infty} f_n^{(k_j)} = f_n$$

тачка по тачка за свако n. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји j_0 такво да је

$$\begin{aligned}
\|S(f - f^{(k_{j_0})})\|_1 &= \int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \left| d_n\left(f^{(k_j)} - f^{(k_{j_0})}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\mu \\
&\leqslant \varliminf_{j\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| d_n\left(f^{(k_j)} - f^{(k_{j_0})}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\mu \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

То значи да $f^{(k_j)} \to f$ у H_1 и стога $f^{(k)} \to f$ у H_1. $\square$

Приметимо да је простор коначних мартингала који је у L_∞ је густ потпростор од H_1.

[16] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857.), француски математичар инжењер и физичар

3.1 Мартингални BMO простори

Сада ћемо дати дефиницију мартингалних BMO простора.

$$BMO = \{f : \|f\|_{BMO} = \sup_{n\geqslant 1} \left\| E\left(|f - f_{n-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n\right)\right\|_\infty < \infty\},$$

Дефиниција 3.19. *Нека је $1 \leqslant a < \infty$. Простор BMO_a дефинишемо*

$$BMO_a = \{f \in L_u^a : \|f\|_{BMO_a} \stackrel{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| E\left(|f - f_{n-1}|^a|\mathcal{F}_n\right)^{\frac{1}{a}}\right\|_\infty < \infty\}.$$

Дефиниција 3.20. *Нека је $1 \leqslant a < \infty$. Простор BMO_a^+*

$$BMO_a^+ = \{f \in L_u^a : \|f\|_{BMO_a^+} \stackrel{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| E_n\left(|f - f_n|^a|\mathcal{F}_n\right)^{\frac{1}{a}}\right\|_\infty < \infty\}.$$

Примедба 3.21. *Стриктно говорећи, да би изнад дефинисан функционал био норма, мора да важи $E_0 f = 0$ за свако $f \in L_1$.*

Ако је $f \in L_1$, приметимо да је низ $\tilde{f} = \{E_n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ мартингал.

Примедба 3.22. *Простор ${}_2K_\infty$ је управо BMO простор.*

Уколико $f \in BMO$, онда је

$$(df_n)^2 \leqslant E_n|f - E_{n-1}f|^2 \leqslant \|f\|_{BMO}^2$$

што нас води до закључка да је $\|f\|_{BMO} = \|f\|_{{}_2K_\infty}$, тј. $BMO = {}_2K_\infty$.

Такође, може се показати и да је

$${}_aK_\infty = BMO_a,$$

$${}_{a^+}K_\infty = BMO_a^+.$$

Јасно је да је $\|f\|_{BMO_a} \leqslant 2\|f\|_\infty$ и $\|f\|_{BMO_a^+} \leqslant 2\|f\|_\infty$. Штавише,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{BMO_2} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sqrt{E_n|f - f_n^2|}\right\|_\infty \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left(E_n[s^2(f) - s_n^2(f)]\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left(E_n[s^2(f)]\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty \\
&\leqslant \|s(f)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Покажимо још да уколико је $f \in BMO_a$, онда је $f_n \in L_\infty$, па је

$$|f_n - f_{n-1}| \leqslant \|f\|_{BMO_a}, \quad 1 \leqslant a < \infty. \tag{12}$$

Да бисмо показали (12), уочимо да условно очекивање $\big(E_n|f_m - f_{n-1}|\big)_{m\geqslant n}$ расте како m расте, за фиксирано $n \in \mathbb{N}$. То проистиче из чињенице да је $(|f_m - f_{n-1}|)_{m\geqslant n}$ субмартингал. Како је $f \in L_p$, овај субмартингал конвергира скоро свуда и такође конвергира ка $|f - f_{n-1}|$ у L_1 норми. Одатле

$$|f_m - f_{n-1}| \leqslant E_m|f - f_{n-1}| \tag{13}$$

и као последица тога

$$E_n|f_m - f_{n-1}| \leqslant E_n|f - f_{n-1}|, \quad m \geqslant n. \tag{14}$$

Уколико ставимо $m = n$ у неједнакости (14) и користећи Хелдерову неједнакост добијамо (12).

Примењујући неједнакост Минковског, тј. неједнакост троугла, закључујемо следеће

$$\begin{aligned}\big(E_n|f - f_n|^a\big)^{\frac{1}{a}} = \big(E_n|f - f_n + f_{n-1} - f_{n-1}|^a\big)^{\frac{1}{a}} &\leqslant \big(E_n(|f - f_{n-1}| + |f_n - f_{n-1}|)^a\big)^{\frac{1}{a}} \\ &\leqslant \big(E_n|f - f_{n-1}|^a\big)^{\frac{1}{a}} + (|f_n - f_{n-1}|^a)^{\frac{1}{a}} \\ &= \big(E_n|f - f_{n-1}|^a\big)^{\frac{1}{a}} + |f_n - f_{n-1}|\end{aligned}$$

При чему, $E_n|f_n - f_{n-1}| = |f_n - f_{n-1}|$, јер $|f_n - f_{n-1}|$ припада σ–алгебри $\mathcal{F}_n$. Користећи неједнакост (12) и неједнакост више

$$\big(E_n|f - f_n|^a\big)^{\frac{1}{a}} \leqslant \big(E_n|f - f_{n-1}|^a\big)^{\frac{1}{a}} + |f_n - f_{n-1}|$$

добијамо

$$\|f\|_{BMO_a^+} \leqslant 2\|f\|_{BMO_a}.$$

Стога, закључујемо

$$L_\infty \subset BMO_a \subset BMO_a^+ \subset L_a, \quad 1 \leqslant a < \infty.$$

Уведимо још два нова простора мартингала.

Дефиниција 3.23. *Нека је $0 < r < \infty$. BMO_r^s и BMO_r^S, тим редом, јесу простори мартингала $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ за које је*

$$\|f\|_{BMO_r^s} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \Big(E_n[s^2(f) - s_n^2(f)]^{\frac{r}{2}}\Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_\infty < \infty,$$

$$\|f\|_{BMO_r^S} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \Big(E_n\left[S^2(f) - S_{n-1}^2(f)\right]^{\frac{r}{2}}\Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_\infty < \infty.$$

Можемо уочити као битну чињеницу да је $BMO_2^s = BMO_2^+$, $H_\infty^s \subset BMO_r^s$ и $BMO_2^S = BMO_2$, $H_\infty^S \subset BMO_r^S$.

4 Мартингалне неједнакости

У овом поглављу разматрамо неједнакости између мартингалних Хардијевих простора уведених у претходном поглављу. Показаћемо класичне Дубове неједнакости и чињеницу да је $H_p^* \sim L_p$ за $p > 1$. На почетку увешћемо појам $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{Q}_p$ простора и помоћу $\mathcal{Q}_p$ простора дати једноставан доказ Дејвисове неједнакости. Користећи атомарну декомпозицију и односе између простора које ћемо показати у Теореми 4.15 даћемо нов доказ Буркхолдер-Дејвис-Гандијеве неједнакости која нам каже да су простори H_p^* и H_p^S еквивалентни за $1 \leqslant p < \infty$.

Из Теореме 4.22 закључићемо да уколико је стохастички базис F регуларан, онда су простори $H_p^s,\ H_p^S,\ H_p^*,\ \mathcal{P}_p$ и $\mathcal{Q}_p$ међусобно еквивалентни за $p > 0$.

Дефиниција 4.1. *Адаптирани процес $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ се назива L_p-предвидив, $0 < p \leqslant \infty$ ако постоји ненегативан, адаптиран и растући процес $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 0}$ такав да је*

$$|f_n| \leqslant \gamma_{n-1}, \quad n \geqslant 0, \quad \gamma_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \in L_p. \tag{1}$$

И дефинишемо

$$\mathcal{P}_p = \{\textit{мартингал } f = \{f_n\}_{n\geqslant 0} \mid f \textit{ је } L_p - \textit{предвидив}\}$$

$$\|f\|_{\mathcal{P}_p} = \inf_\gamma \{\|\gamma_\infty\|_p\}, \quad 0 < p \leqslant \infty.$$

Дефиниција 4.2. *Адаптирани процес $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ се назива мартингал са предвидивом квадратном варијацијом у L_p, $0 < p \leqslant \infty$ ако постоји ненегативан, адаптиран и растући процес $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 0}$ такав да је*

$$|S_n(f)| \leqslant \gamma_{n-1}, \quad n \geqslant 0, \quad \gamma_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \in L_p. \tag{2}$$

И дефинишемо

$$\mathcal{Q}_p = \{\textit{мартингал } f = \{f_n\}_{n\geqslant 0} \mid f \textit{ је са предвидивом квадратном варијацијом у } L_p\}$$

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_p} = \inf_\gamma \{\|\gamma_\infty\|_p\}, \quad 0 < p \leqslant \infty.$$

Наредна лема нам је потребна да бисмо доказали Дубову неједнакост.

Лема 4.3. *Сваки ненегативан субмартингал $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ задовољава неједнакост*

$$\lambda\mu(f_n^* > \lambda) \leqslant \int_{\{f_n^*>\lambda\}} f_n d\mu, \quad n \in \mathbb{N},\ \lambda > 0.$$

где је $f_n^* = \sup_{k\leqslant n} |f_k|$.

Доказ: Нека је $\tau_\lambda = \min\{n \mid f_n \geqslant \lambda\}$ време заустављања. Користећи особине субмартингала имамо

$$\begin{aligned}
\lambda\mu(\tau_\lambda \leqslant n) &= \lambda \sum_{k=0}^{n} \mu(\tau_\lambda = k) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\{\tau_\lambda = k\}} f_k d\mu \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\{\tau_\lambda = k\}} E_k f_n d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\{\tau_\lambda = k\}} f_n d\mu \\
&= \int_{\{\tau_\lambda \leqslant n\}} f_n d\mu.
\end{aligned}$$

Како је $\{\tau_\lambda \leqslant n\} = \{f_n^* > \lambda\}$, лема је доказана. □

Покажимо сада Дубову неједнакост, а затим да важи $H_p^* \sim L_p$, за $p > 1$.

Теорема 4.4. *(Дубова неједнакост)*
Нека је $p > 1$. За сваки ненегативан, L_p -ограничен субмартингал $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ важи да $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in L_p$. Прецизније,

$$\left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p.$$

Доказ: Неједнакост из претходне леме можемо записати у следећем облику

$$\lambda E(\chi_{\{f_n^* > \lambda\}}) \leqslant E(f_n \chi_{\{f_n^* > \lambda\}}), \quad n \in \mathbb{N},\ \lambda > 0.$$

Уколико интегралимо обе стране у односу на меру $p\lambda^{p-2} d\lambda$ за $p > 1$ и применимо Фубинијеву теорему, добијамо

$$\begin{aligned}
E((f_n^*)^p) &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} E(\chi_{\{f_n^* > \lambda\}}) d\lambda \\
&\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-2} E(f_n \chi_{\{f_n^* > \lambda\}}) d\lambda \qquad (3) \\
&= \frac{p}{p-1} E(f_n (f_n^*)^{p-1}).
\end{aligned}$$

Из Хелдерове неједнакости даље имамо

$$E(f_n (f_n^*)^{p-1}) \leqslant \|f_n\|_p \|(f_n^*)^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} = \|f_n\|_p \|f_n^*\|_p^{p-1}. \qquad (4)$$

После поделе по $\|f_n^*\|_p^{p-1} < \infty$ из (3) и (4) добијамо

$$\|f_n^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p.$$

Како је $\{f_n^*\}$ нерастући низ, узимање супремума по свим $n \in \mathbb{N}$ завршава доказ. $\square$

Дакле, уколико је $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ мартингал, тада је јасно $\{|f_n|\}_{n\geqslant 0}$ ненегативан субмартингал па је

$$\lambda\mu(f^* > \lambda) \leqslant \int\limits_{\{f^*>\lambda\}} |f| d\mu, \quad f \in L_1, \ \lambda > 0,$$

као и

$$\|f\|_p \leqslant \|f^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p, \quad f \in L_p, \ p > 1,$$

тј. другим речима $H_p^* \sim L_p$, за $p > 1$.

У наредном делу формулисаћемо теорему о конвексности и конкавности, а пре тога одређене појмове који су потребни при доказивању теореме.

Дефиниција 4.5. *Нека је T пребројив скуп индекса. $L_p(l_r)$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, означава простор свих низова $\xi = \{\xi_n\}_{n\in T}$ мерљивих функција за које важи*

$$\|\xi\|_{L_p(l_r)} \stackrel{def}{=} \left\| \left(\sum_{n\in T} |\xi_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_p < \infty.$$

Лема 4.6. *Дуал простора $L_p(l_r)$ је $L_q(l_s)$ кад год је $1 \leqslant p, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Линеарни ограничени функционали у $L_p(l_r)$ могу се записати као*

$$\Lambda(\xi) = \sum_{k\in T} E(\xi_k \eta_k), \quad \xi \in L_p(l_r)$$

и $\|\Lambda\| = \|\eta\|_{L_q(l_s)}$, за сваки $\eta \in L_q(l_s)$.

Доказ претходне леме је сличан доказу дуалности простора L_p и L_q па га нећемо наводити.

Формулишимо сад теорему о конвексности и конкавности.

Теорема 4.7. *Нека је T пребројив скуп индекса и нека је $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$ прозивољан (не нужно монотон) низ σ–алгебри и нека је $\mathcal{A} = \sigma(\bigcup\limits_{t\in T} \mathcal{A}_t)$. Претпоставимо да за свако $h \in L_p$ важи Дубова неједнакост*

$$\left\| \sup_{t\in T} |E_t h| \right\|_p \leqslant C_p \|h\|_p, \quad p > 1, \tag{5}$$

где E_t означава условно очекивање у односу на $\mathcal{A}_t$. Уколико је $\{f_t\}_{t\in T}$ низ ненегативних мерљивих функција, онда за $1 \leqslant p < \infty$ имамо

$$E\left[\left(\sum_{t\in T} E_t f_t\right)^p\right] \leqslant C_q^p E\left[\left(\sum_{t\in T} f_t\right)^p\right], \tag{6}$$

као и

$$E\left[\left(\sum_{t\in T} f_t\right)^{\frac{1}{p}}\right] \leqslant B_p E\left[\left(\sum_{t\in T} E_t f_t\right)^{\frac{1}{p}}\right], \tag{7}$$

где је $B_p > 0$ и $C_q > 1$ константа која се јавља у неједнакости (5) и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказ: За $p = 1$ доказ је тривијалан. Покажимо тврђење за $1 < p < \infty$. Користећи Рисову[17] теорему о репрезентацији добијамо

$$\left\|\sum_{t\in T} E_t f_t\right\|_p = \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} \left|E\left[\left(\sum_{t\in T} E_t f_t\right) g\right]\right|.$$

Из (5) и Хелдерове неједнакости следи

$$\begin{aligned}
\left|E\left[\left(\sum_{t\in T} E_t f_t\right) g\right]\right| &\leqslant \sum_{t\in T} E(f_t |E_t g|)\\
&\leqslant E\left[\left(\sum_{t\in T} f_t\right)\left(\sup_{t\in T} |E_t g|\right)\right]\\
&\leqslant \left\|\sum_{t\in T} f_t\right\|_p \left\|\sup_{t\in T} |E_t g|\right\|_q\\
&\leqslant C_q \left\|\sum_{t\in T} f_t\right\|_p \|g\|_q\\
&\leqslant C_q \left\|\sum_{t\in T} f_t\right\|_p
\end{aligned}$$

при чему је $\|g\|_q < 1$. Овим је доказ неједнакости (6) завршен.

Докажимо сада неједнакост (7). Нека је r конјуговани индекс индекса $2p$, тј. $\frac{1}{r} + \frac{1}{2p} = 1$ и нека је $g_t := (f_t)^{\frac{1}{2p}}$ за $t \in T$ и $g := \{g_t\}_{t\in T}$. На основу претходне леме имамо

$$\left(E\left[\left(\sum_{t\in T} f_t\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|_{L_2(l_{2p})} = \sup_{\|\lambda\|_{L_2(l_r)} \leqslant 1} \left|E\left(\sum_{t\in T} g_t \lambda_t\right)\right|.$$

[17] Frigyes Riesz (1880-1956.), мађарски математичар

Шта више, из Хелдерове неједнакости следи

$$\begin{aligned}\left|E\Big(\sum_{t\in T} g_t\lambda_t\Big)\right| &\leqslant \sum_{t\in T} E[E_t|g_t\lambda_t|]\\ &\leqslant \sum_{t\in T} E\Big[(E_t g_t^{2p})^{\frac{1}{2p}}(E_t|\lambda_t|^r)^{\frac{1}{r}}\Big]\\ &= \sum_{t\in T} E\Big[(E_t f_t)^{\frac{1}{2p}}(E_t|\lambda_t|^r)^{\frac{1}{r}}\Big]\\ &\leqslant E\Bigg[\Big(\sum_{t\in T} E_t f_t\Big)^{\frac{1}{2p}}\Big(\sum_{t\in T} E_t|\lambda_t|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Bigg]\\ &\leqslant \Bigg(E\Bigg[\Big(\sum_{t\in T} E_t f_t\Big)^{\frac{1}{p}}\Bigg]E\Bigg[\Big(\sum_{t\in T} E_t|\lambda_t|^r\Big)^{\frac{2}{r}}\Bigg]\Bigg)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Како је $1 < \frac{2}{r} = 2 - \frac{1}{p} < 2$, из прве неједнакости следи да је

$$E\Bigg[\Big(\sum_{t\in T} E_t|\lambda_t|^r\Big)^{\frac{2}{r}}\Bigg] \leqslant B_p E\Bigg[\Big(\sum_{t\in T} |\lambda_t|^r\Big)^{\frac{2}{r}}\Bigg] \leqslant B_p\|\lambda\|^2_{L_2(l_r)} \leqslant B_p,$$

чиме је доказ неједнакости (7) завршен. □

Како (5) важи у случају $T = \mathbb{N}$ и како је $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нерастући низ, добијамо да и у овом случају (дискретном) важе неједнакости (6) и (7). Може се видети да ће тада бити $C_q = p$ и $B_p \leqslant 4$.

4.1 Атомарна декомпозиција

Атомарна декомпозиција представља веома битну карактеризацију Хардијевих простора којом на поједностављен начин можемо показати неке од теорема дуалности и мартингалних неједнакости. Користећи време заустављања, дефинишу се три врсте атома и доказујемо атомарну декомпозицију простора H_p^s, при чему формулишемо и теореме атомарне декомпозиције простора $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{Q}_p$. Такође, дефинишемо и просте атоме, при чему је важно напоменути, да теореме атомарне декомпозиције важе и за просте атоме.

Прво ћемо формулисати појам атома.

Дефиниција 4.8. *Мерљива функција a је (p, ∞) атом прве категорије (односно $(1, p, \infty)$ атом) ако постоји време заустављања $\nu \in T$ такво да је*

(i) $a_n := E_n a = 0,\quad$ *за* $\nu \geqslant n$;

(ii) $\|s(a)\|_\infty \leqslant \mu(\nu \neq \infty)^{-\frac{1}{p}}$.

Уколико заменимо $s(a)$ са $S(a)$, односно са $M(a)$ у (ii), добијамо концепт атома друге категорије ($(2, p, \infty)$ атом), односно треће категорије $(3, p, \infty)$ атом). Са $A_i(p, \infty)$ означавамо скуп свих (i, p, ∞) атома $(i = 1, 2, 3)$.

Теорема 4.9. *(Атомарна декомпозиција) Уколико је $f = \{f_n\}_{n \geqslant 0} \in H_p^s$, $0 < p < \infty$, онда постоји низ $\{a^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in A_1(p, \infty)$ $(1, p, \infty)$ атома и низ $\eta = \{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$ реалних бројева таквих да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k E_n a^k = f_n, \tag{8}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p \|f\|_{H_p^s}. \tag{9}$$

Такође, $\sum_{-\infty}^{\infty} \eta_k a^k$ конвергира ка f у H_p^s норми.

Обратно, ако је $0 < p \leqslant 1$ и мартингал f има декомпозицију (8), онда је $f \in H_p^s$ и

$$\|f\|_{H_p^s} \sim \inf \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

где је инфимум узет по свим декомпозицијама облика (8).

Доказ: Нека је $f \in H_p^s$. Посматрајмо нерастући низ времена заустављања

$$\nu_k := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid s_{n+1}(f) > 2^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

За произвољно време заустављања ν и мартингал f,
$f^\nu = \{f_n^\nu\}_{n \geqslant 1}$ дефинишемо као

$$f_n^\nu := \sum_{m=0}^{n} \chi_{\{\nu \geqslant m\}} d_m f$$

Даље,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_n^{\nu_{k+1}} - f_n^{\nu_k}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m=0}^{n} (\chi_{\{\nu_{k+1} \geqslant m\}} d_m f - \chi_{\{\nu_k \geqslant m\}} d_m f)\right) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{\{\nu_k < m < \nu_{k+1}\}} d_m f\right) = f_n \end{aligned} \tag{11}$$

Нека је

$$\eta_k := 2^k 3\mu(\nu_k \neq \infty)^{\frac{1}{p}}, \tag{12}$$

$$a_n^k := \frac{f_n^{\nu_{k+1}} - f_n^{\nu_k}}{\eta_k}. \tag{13}$$

Уколико је $\eta_k = 0$, тада ставимо $a_n^k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. За фиксирано $k \in \mathbb{Z}$ $\{a_n^k\}_{n\geqslant 1}$ мартингал. По дефиницији је,

$$\begin{aligned} s(f^{\nu_k}) &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_{n-1}|d_n f^{\nu_k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_{n-1}|\chi_{\{\nu_k\geqslant n\}} d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\{\nu_k\geqslant n\}} E_{n-1}|d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\nu_k} E_{n-1}|d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = s_{\nu_k}(f) \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) и дефиниције времена заустављања ν_k имамо

$$s(f_n^{\nu_k}) = s_{\nu_k}(f_n) \leqslant 2^k, \tag{15}$$

одакле је

$$s(a_n^k) \leqslant \frac{s(f_n^{\nu_{k+1}}) + s(f_n^{\nu_k})}{\eta_k} \leqslant \mu(\nu_k \neq \infty)^{-\frac{1}{p}},$$

што следи из (15) и (13).

Из претходног разматрања можемо закључити да је $\{f_n^{\nu_k}\}_{n\geqslant 0}$ ограничен L_2 мартингал, а самим тим и $\{a_n^k\}$ је L_2-ограничен. Тада постоји $\lim_{n\to\infty} a_n^{\nu_k} = a^k$ у L_2 скоро свуда тако да је

$$E_n a^k = a_n^k,$$

Овим је задовољено (8).

Проверимо да ли је a^k неки $(1, p, \infty)$ атом.

Уочимо да на скупу $\{n \leqslant \nu_k\}$ имамо

$$a_n^k = \frac{f_n^{\nu_{k+1}} - f_n^{\nu_k}}{\eta_k} = \frac{f_n - f_n}{\eta_k} = 0 \tag{16}$$

Стога $E_n a^k = a_n^k = 0$, када $\nu_k \geqslant n$. Тада је испуњен услов (i) Дефиниције 4.8.

Користећи (16) закључујемо следеће

$$\chi_{\{\nu_k=\infty\}}(s(a^k))^2 \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \chi_{\{\nu_k\geqslant n\}} E_{n-1}|d_n a^k|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \chi_{\{\nu_k\geqslant n\}} E_{n-1}|\chi_{\{\nu_k\geqslant n\}} d_n a^k|^2 = 0$$

Нека је даље,

$$d_n a^k = \frac{d_n(f^{\nu_{k+1}} - f^{\nu_k})}{\eta_k} = d_n \chi_{\{\nu_k < n \leqslant \nu_{k+1}\}} \eta_k$$

тада је

$$(s(a^k))^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_{n-1}|d_n a^k|^2 \leqslant \left(\frac{s_{\nu_{k+1}(f)}}{\eta_k}\right)^2 \leqslant \left(\frac{2^{k+1}}{\eta_k}\right)^2 = \left(\frac{2^{k+1}}{2^k 3\mu(\nu_k \neq \infty)^{\frac{1}{p}}}\right)^2 \leqslant \left(\mu(\nu_k \neq \infty)^{-\frac{1}{p}}\right)^2$$

Одатле, $s(a^k) \leqslant \mu(\nu_k \neq \infty)^{-\frac{1}{p}}$. а с обзиром да је $s(a^k) = 0$ изван скупа $\{\nu_k \neq \infty\}$ закључујемо да је

$$\|s(a)\|_\infty \leqslant \mu(\nu_k \neq \infty)^{-\frac{1}{p}}$$

чиме је испуњен и услов (ii) Дефиниције (4.8).

Како су испуњени сви услови Дефиниције (4.8) можемо закључити да је a^k неки $(1, p, \infty)$ атом и

$$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_n^{\nu_{k+1}} - f_n^{\nu_k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k a_n^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k E_n a^k$$

Даље,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k|^p &= 3^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \mu(\nu_k \neq \infty) \\
&= 3^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \mu\{s(f) > 2^k\} \\
&= 3^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k)^p \mu\{s^p(f) > (2^k)^p\} \\
&= \frac{3^p}{2^p - 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[(2^p)^{k+1} - (2^p)^k\right] \mu\{s^p(f) > (2^p)^k\} \\
&= \frac{3^p}{2^p - 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^p)^k \mu\{(2^p)^{k-1} < s^p(f) \leqslant (2^p)^k\} \\
&\leqslant \frac{3^p}{2^p - 1} E(s^p(f)).
\end{aligned}$$

Овим је показано (9).

Покажимо сада да

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k a^k \to f \tag{17}$$

у норми H_p^s.

Како је

$$\eta_k a^k = f^{\nu_{k+1}} - f^{\nu_k}$$

тада је

$$\sum_{k=l}^{m} \eta_k a^k = \sum_{k=l}^{m} (f^{\nu_{k+1}} - f^{\nu_k}) = f^{\nu_{m+1}} - f^{\nu_l}$$

Очигледно,

$$f - \sum_{k=l}^{m} \eta_k a^k = (f - f^{\nu_{m+1}}) + f^{\nu_l}.$$

и

$$\left\| f - \sum_{k=l}^{m} \eta_k a^k \right\|_{H_p^s} \leqslant \|f - f^{\nu_{m+1}}\|_{H_p^s} + \|f^{\nu_l}\|_{H_p^s} \tag{18}$$

Из дефиниције имамо да је

$$\|f - f^{\nu_{m+1}}\|_{H_p^s} = \|s(f - f^{\nu_{m+1}})\|_p.$$

Даље,

$$\|s(f - f^{\nu_{m+1}})\|_p = \left(\int_\Omega |s(f - f^{\nu_{m+1}})|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega s^p(f - f^{\nu_{m+1}}) d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{19}$$

Међутим, како је $s^2(f - f^{\nu_{m+1}}) = s^2(f) - s^2(f^{\nu_{m+1}})$, одатле $s(f - f^{\nu_{m+1}}) \leqslant s(f)$ и $s(f^{\nu_{m+1}}) \leqslant s(f)$.

Па је онда и

$$s^p(f - f^{\nu_{m+1}}) \leqslant s^p(f)$$

и $\int_\Omega s^p(f) d\mu = \|f\|_{H_p^s}^p < \infty$.

Користећи да је $\lim_{m\to\infty} s(f - f^{\nu_{m+1}}) = \lim_{m\to\infty} s(f^{\nu_{m+1}}) = 0$ скоро свуда закључујемо да

$$s^p(f - f^{\nu_{m+1}}) = (s^2(f) - s^2(f^{\nu_{m+1}}))^{p/2} \to 0$$

скоро свуда, када $m \to \infty$.

Тада примењујући теорему од доминантној конвергенцији из (19) следи

$$\|s(f - f^{\nu_{m+1}})\|_p \to 0$$

када $m \to \infty$.

Стога,

$$\|f - f^{\nu_{m+1}}\|_{H_p^s} \to 0 \tag{20}$$

када $m \to \infty$.

Такође из чињенице да је $s(f^{\nu_l}) \leqslant 2^l$, закључујемо

$$\|f^{\nu_l}\|_{H_p^s} = \|s(f^{\nu_l}\|_p \leqslant 2^l$$

Стога,

$$\|f^{\nu_l}\|_{H_p^s} \to 0 \tag{21}$$

када $l \to -\infty$ Тада из (18) примењујући (20) и (21) добијамо да ред $\sum_{k=l}^{m} \eta_k a^k$ конвергира ка f у H_p^s норми када $m \to +\infty$, $l \to -\infty$.

Докажимо последње тврђење теореме.

Нека је $0 < p \leqslant 1$ и нека f можемо записати у облику (8), тада

$$s(f) \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k| s(a^k).$$

Пошто је $0 < p \leqslant 1$, то је

$$E(s^p(f)) \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^p E(s^p(a^k)).$$

Уколико је a неки $(1, p, \infty)$ атом, онда из саме дефиниције како је $a_n^k = E_n a^k = 0$ на скупу $\{\nu_k \geqslant n\}$ имамо

$$\chi_{\{\nu \geqslant k\}} E_{k-1} |d_k a|^2 = E_{k-1}(\chi_{\{\nu \geqslant k\}} |d_k a|^2) = 0,$$

тако да је $s(a) = 0$ на скупу $\{\nu = \infty\}$.

Тада је $E(s^p(a)) \leqslant 1$, тј. важи неједнакост

$$E(s^p(f)) \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^p. \quad \square$$

Теорема 4.10. *Уколико у Теореми 4.9, заменимо H_p^s и $A_1(p, \infty)$, тим редом, са $\mathcal{Q}_p$ и $A_2(p, \infty)$, односно са $\mathcal{P}_p$ и $A_3(p, \infty)$ за $0 < p < \infty$. тада, такође важе (8) и (9). Сума $\sum\limits_{k=l}^{m} \eta_k a^k$ конвергира ка f у $\mathcal{Q}_p$ норми ($0 < p \leqslant 2$) и у $\mathcal{P}_p$ норми ($0 < p \leqslant 1$), када $m \to +\infty$, $l \to -\infty$. Обрнуто, и (10) важе у оба случаја, за $0 < p \leqslant 1$.*

Доказ: Доказ се може пронаћи у [1]. $\square$

Дефиниција 4.11. *Мерљива функција a је $(1, p, \infty)$ прост атом уколико постоје $n \in \mathbb{N}$ и $H \in \mathcal{F}_n$ такви да*

(i) $a_n := E_n a = 0$,

(ii) $\|s(a)\|_\infty \leqslant \mu(H)^{-\frac{1}{p}}$,

(iii) $\{a \neq 0\} \subset H$.

Уколико заменимо $s(a)$ са $S(a)$, односно са $M(a)$ у (ii), добијамо концепт $(2, p, \infty)$, односно $(3, p, \infty)$ простог атома. Са $A_i(p, \infty)$ означавамо скуп свих (i, p, ∞) простих атома.

Приметимо да уколико је $H \in \mathcal{F}_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$, онда је пресликавање

$$\nu_H(\omega) = \begin{cases} n, & \omega \in H \\ \infty, & \omega \notin H \end{cases}$$

време заустављања.

Како је $H = \{\nu_H \neq \infty\}$, можемо уочити да је сваки (i, p, ∞) прост атом у ствари (i, p, ∞) атом ($i = 1, 2, 3,\ 0 < p < \infty$). Теорема о атомарној декомпозицији такође важи за просте атоме, тако да мартингале у H_p^s, $\mathcal{P}_p$, $\mathcal{Q}_p$ такође можемо раставити на просте атоме.

4.2 Неједнакости мартингалних Хардијевих простора

Да бисмо доказали Буркхолдер-Дејвис-Гандијеву неједнакост (Теорему 4.16), ослањамо се на теорему о атомарној декомпозицији, при чему нам је такође потребна и Дејвисова декомпозиција мартингала H_p^S и H_p^* простора коју ћемо овде приказати.

Дефиниција 4.12. *Означимо са $\mathcal{G}_p$, $0 < p < \infty$ простор мартингала f за које важи*

$$\|f\|_{\mathcal{G}_p} \stackrel{def}{=} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} |d_n f| \right\|_p < \infty.$$

Простор $\mathcal{G}_p$ је увео Гарсија[18] у [7].

Лема 4.13. *Нека је $f \in H_p^S$, $1 \leqslant p < \infty$. Тада постоји $h \in \mathcal{G}_p$ и $g \in \mathcal{Q}_p$ такво да је $f_n = h_n + g_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и*

$$\|h\|_{\mathcal{G}_p} \leqslant (2 + 2p)\|f\|_{H_p^S},$$

$$\|g\|_{\mathcal{Q}_p} \leqslant (7 + 2p)\|f\|_{H_p^S}.$$

Доказ: Претпоставимо да је $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots$ адаптирани низ функција такав да је

$$S_n(f) \leqslant \lambda_n, \quad \lambda_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \in L_p.$$

[18] Adriano Mario Garsia (1928.), италијанско-амерички математичар

Можемо уочити

$$d_n f = d_n f \chi_{\{\lambda_n > 2\lambda_{n-1}\}} + d_n f \chi_{\{\lambda_n \leqslant 2\lambda_{n-1}\}}.$$

Нека је

$$h := \sum_{k=1}^{\infty} \left[d_k f \chi_{\{\lambda_k > 2\lambda_{k-1}\}} - E_{k-1}(d_k f \chi_{\{\lambda_k > 2\lambda_{k-1}\}}) \right],$$

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} \left[d_k f \chi_{\{\lambda_k \leqslant 2\lambda_{k-1}\}} - E_{k-1}(d_k f \chi_{\{\lambda_k \leqslant 2\lambda_{k-1}\}}) \right].$$

На скупу $\{\lambda_k > 2\lambda_{k-1}\}$ имамо $\lambda_k \leqslant 2(\lambda_k - \lambda_{k-1})$, па је

$$|d_k f| \chi_{\{\lambda_k > 2\lambda_{k-1}\}} \leqslant \lambda_k \chi_{\{\lambda_k > 2\lambda_{k-1}\}} \leqslant 2(\lambda_k - \lambda_{k-1}),$$

одакле добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} |d_k h| \leqslant 2\lambda_n + 2 \sum_{k=1}^{n} E_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

На основу Теореме 4.7 имамо да је констатнта $C_p = p$ одакле добијамо

$$\|h\|_{\mathcal{G}_p} \leqslant (2 + 2p) \|\lambda_\infty\|_p.$$

Са друге стране,

$$|d_k f| \chi_{\{\lambda_k \leqslant 2\lambda_{k-1}\}} \leqslant \lambda_k \chi_{\{\lambda_k \leqslant 2\lambda_{k-1}\}} \leqslant 2\lambda_{k-1}$$

и као последицу тога

$$|d_k g| \leqslant 4\lambda_{k-1}.$$

Коначно, можемо закључити

$$\begin{aligned} S_n(g) &\leqslant S_{n-1}(g) + |d_n g| \\ &\leqslant S_{n-1}(f) + S_{n-1}(h) + 4\lambda_{n-1} \\ &\leqslant \lambda_{n-1} + 2\lambda_{n-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} E_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + 4\lambda_{n-1}. \end{aligned}$$

Поново, на основу Теореме 4.7, $C_p = p$, па је

$$\|g\|_{\mathcal{Q}_p} \leqslant (7 + 2p) \|\lambda_\infty\|_p.$$

Стављајући $\lambda_n := S_n(f)$, доказ леме је завршен. $\square$

Лема 4.14. *Нека је* $f \in H_p^*$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тада постоји* $h \in \mathcal{G}_p$ *и* $g \in \mathcal{P}_p$ *такво да је* $f_n = h_n + g_n$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *и*

$$\|h\|_{\mathcal{G}_p} \leqslant (4+4p)\|f\|_{H_p^*},$$

$$\|g\|_{\mathcal{P}_p} \leqslant (13+4p)\|f\|_{H_p^*}.$$

Доказ: Доказ ове леме је сличан претходном доказу и може се наћи у [7] и [8]. □

Покажимо сада две главне теореме које описују однос између Хардијевих простора.

Теорема 4.15.

(i) $\|f\|_{H_p^*} \leqslant C_p\|f\|_{H_p^s}$, $\|f\|_{H_p^S} \leqslant C_p\|f\|_{H_p^s}$, $(0 < p \leqslant 2)$;

(ii) $\|f\|_{H_p^s} \leqslant C_p\|f\|_{H_p^*}$, $\|f\|_{H_p^s} \leqslant C_p\|f\|_{H_p^S}$, $(2 \leqslant p < \infty)$;

(iii) $\|f\|_{H_p^*} \leqslant \|f\|_{\mathcal{P}_p}$, $\|f\|_{H_p^S} \leqslant \|f\|_{\mathcal{Q}_p}$, $(0 < p < \infty)$;

(iv) $\|f\|_{H_p^*} \leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{Q}_p}$, $\|f\|_{H_p^S} \leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{P}_p}$, $(0 < p < \infty)$;

(v) $\|f\|_{H_p^s} \leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{P}_p}$, $\|f\|_{H_p^s} \leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{Q}_p}$, $(0 < p < \infty)$.

Теорема 4.16. *(Буркхолдер-Дејвис-Гандијева неједнакост) Простори* H_p^S *и* H_p^* *су еквивалентни за* $1 \leqslant p < \infty$, *тј.*

$$c_p\|f\|_{H_p^S} \leqslant \|f\|_{H_p^*} \leqslant C_p\|f\|_{H_p^S}, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{22}$$

Ове две теореме доказане су користећи методу атомарне декомпозиције. Међутим, могу се доказати и без ње, користећи друге аргументе као у [4], [5] и [6]. У доказу који следи акценат ће бити стављен на концепт атомарне декомпозиције.

Доказ Теореме 4.15:

Покажимо, најпре, да уколико је a неки $(1, p, \infty)$ атом тада је $\|a\|_{H_p^*} \leqslant 2$ и $\|a\|_{H_p^S} \leqslant 1$ за $0 < p \leqslant 2$.

Нека је $a^* = \sup_{k \leqslant n} a_k$ и нека је ν време заустављања за које важи (i) и (ii) из Дефиниције 4.8, тада,

$$E(a^{*p}) = E(a^{*p}\chi_{\{\nu \neq \infty\}}) \leqslant E^{\frac{p}{2}}(a^{*2})\mu(\nu \neq \infty)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Користећи Дубову неједнакост добијамо

$$E(a^{*2}) \leqslant 4E(a^2) \leqslant 4E(s^2(a)),$$

па је

$$E(a^{*p}) \leqslant 2^p \left(\mu(\nu \neq \infty)^{-\frac{2}{p}} \mu(\nu \neq \infty) \right)^{\frac{p}{2}} \mu(\nu \neq \infty)^{1-\frac{p}{2}} = 2^p,$$

где је $\nu \in T$ време заустављања. Одавде имамо да је

$$\|a\|_{H_p^*} \leqslant 2 \tag{23}$$

Слично се показује да је $\|a\|_{H_p^s} \leqslant 1$.

Покажимо сада прву неједнакост у (i) за $0 < p \leqslant 1$.

Нека f има декомпозицију као у Теореми 4.9, тј.

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k a^k$$

где је $a_k,\ k \in \mathbb{Z}$, неки $(1, p, \infty)$ атом. Тада,

$$f^* = \sup_n |f_n| = \sup_n |\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k a_n^k| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k| \sup_n |a_n^k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k| (a^k)^*$$

па одатле за $0 < p \leqslant 1$

$$E|f^*|^p \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k|^p E((a^k)^*)^p$$

тј.

$$\|f\|_{H_p^*}^p \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k|^p \|a^k\|_{H_p^*}^p \tag{24}$$

Како је a^k један $(1, p, \infty)$ атом, тада за $0 < p \leqslant 2$

$$\|a^k\|_{H_p^*} \leqslant 2.$$

Тада из (24) применом претходног, закључујемо да је

$$\|f\|_{H_p^*} \leqslant 2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{25}$$

Применом неједнакости (9) Теореме (4.9) добијамо да је

$$\|f\|_{H_p^*} \leqslant 2C_p \|f\|_{H_p^s}$$

чиме је доказ прве неједнакости у (i), за $0 < p \leqslant 1$ завршен.

Докажимо сада другу неједнаксост у (i) за $0 < p \leqslant 2$.

Нека је

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k a^k$$

и

$$f_n^{\nu} := \sum_{m=0}^{n} \chi_{\{\nu \geqslant m\}} d_m f.$$

Применом једнакости $f_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (f_n^{\nu_{k+1}} - f_n^{\nu_k})$ и $f_n^{\nu_{k+1}} - f_n^{\nu_k} = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i f \chi_{\{\nu_k < i \leq \nu_{k+1}\}}$, које смо показали у доказу Теореме 4.9, на функцију $d_n f$ уместо f_n, закључујемо да важи

$$d_n f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (d_n f) \chi_{\{\nu_k < n \leqslant \nu_{k+1}\}}.$$

где је $\nu_k = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid s_{n+1}(f) > 2^k\}$

За фиксирано n, скупови $\{\nu_k < n \leqslant \nu_{k+1}\}$ су дисјунктни и имамо

$$|d_n f|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_n f|^2 \chi_{\{\nu_k < n \leqslant \nu_{k+1}\}}. \tag{26}$$

при чему је скуп $\{\nu_k < n \leqslant \nu_{k+1}\}$ је $\mathcal{F}_{n-1}$ мерљив.

Стога,

$$S^2(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} S^2(\eta_k a^k),$$

где су η_k и a^k, $k \in \mathbb{N}$, дефинисани као у доказу Теореми 4.9 тј. $\eta_k = 2^k 3\mu(\nu_k \neq \infty)^{\frac{1}{p}}$ и a^k је неки $(1, p, \infty)$ атом.

Како је $0 < \frac{p}{2} \leqslant 1$, из претходног следи

$$E(S^p(f)) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\eta_k|^p E(S^p(a^k)) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\eta_k|^p. \tag{27}$$

где применом неједнакости (9) Теореме 4.9 закључујемо да је

$$\|f\|_{H_p^S} \leqslant C_p \|f\|_{H_p^s}$$

тиме смо доказали другу неједнакост у (i) за $0 < p \leqslant 2$.

Уколико у Теореми 4.7 заменимо $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$ са $\{\mathcal{F}_{k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$, p са $\frac{p}{2}$ и f_t са $|d_k f|^2$ у неједнакости (6), добијамо за $1 \leqslant \frac{p}{2} < \infty$

$$E\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} E_{k-1}|d_k f|^2\right)^{p/2}\right] \leqslant C_p E\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |d_k f|^2\right)^{p/2}\right]$$

одакле добијамо да је $\|f\|_{H_p^s} \leqslant C_p \|f\|_{H_p^S}$, $2 \leqslant p < \infty$, чиме смо доказали другу неједнакост у (ii).

Доказ (iii) лако следи из дефиниције простора.

Једноставно се утврђује (из (i)) да је $\|a\|_{H_p^*} \le 2$ ако је $a \in A_2(p,\infty)$ и $\|a\|_{H_p^S} \le 1$ ако $a \in A_3(p,\infty)$ $(0 < p \le 2)$. Слично као у доказу (i) можемо показати да прва неједнакост у (iv) важи за $0 < p \le 1$ и да друга важи за $0 < p \le 2$ применом Теореме 4.10.

Означимо са K_0 скуп ограничених и $\mathcal{F}_n$–мерљивих функција, за неко n. K_0 је очигледно садржан у свих пет Хардијевих простора мартингала који су уведени раније. Показаћемо да прва неједнакост (iv) важи за свако $f \in K_o$ и за $p > 1$. Претпоставимо да ова неједнакост важи за све $f \in K_0$ и за фиксирано $\frac{p}{2}$ $(p > 0)$, односно

$$\|f\|_{H^*_{\frac{p}{2}}} \leqslant C_{\frac{p}{2}} \|f\|_{\mathcal{Q}_{\frac{p}{2}}} \qquad (f \in K_0) \tag{28}$$

и покажимо да ова важи и за p.

Нека је

$$g_n \stackrel{def}{=} f_n^2 - S_n^2(f).$$

Лако се види да је $g = \{g_n\}_{n \geqslant 0}$ мартингал и да $g \in K_0$ пошто $f \in K_0$. Штавише, важи

$$S_n^2(g) \leqslant 4^2 f_{n-1}^{*2} S_n^2(f) \leqslant 4^2 f_{n-1}^{*2} \lambda_{n-1}^2,$$

где је $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 0}$ низ предвиђања низа $(S_n(f))$ у L_p. Према Хелдеровој неједнакости добијамо

$$\|g\|_{\mathcal{Q}_{\frac{p}{2}}} \leqslant 2\|f^* \lambda_\infty\|_{\frac{p}{2}} \leqslant 2\|f^*\|_p \|\lambda_\infty\|_p,$$

то јест

$$\|g\|_{\mathcal{Q}_{\frac{p}{2}}} \leqslant 2\|f\|_{H_p^*} \|f\|_{\mathcal{Q}_p}. \tag{29}$$

Пошто је $f_n^2 = g_n + S_n^2(f)$, имамо

$$|f_n|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}} \left(|g_n|^{\frac{p}{2}} + S_n^p(f) \right)$$

и

$$|f^*|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}} \left(|g^*|^{\frac{p}{2}} + S^p(f) \right).$$

Другим речима,

$$\|f^*\|_{H_p^*}^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}} \|g^*\|_{H^*_{\frac{p}{2}}}^{\frac{p}{2}} + 2^{\frac{p}{2}} \|f\|_{\mathcal{Q}_p}^p.$$

Следећа неједнакост следи из (28) и (29):

$$\|f\|_{H_p^*}^p - 2^{\frac{p}{2}} \left(\|f\|_{\mathcal{Q}_p}^p + C_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}} \|f\|_{H_p^*}^{\frac{p}{2}} \|f\|_{\mathcal{Q}_p}^{\frac{p}{2}} \right) \leqslant 0.$$

Решавањем ове квадратне неједначине по $z = \|f\|_{H_p^*}^{\frac{p}{2}}$ добијамо да важи

$$\|f\|_{H_p^*} \leq \left(4C_{\frac{p}{2}} + \sqrt{2}\right) \|f\|_{\mathcal{Q}_p}$$

за све $f \in K_0$. Стога ова неједнакост важи за све $f \in K_0$ и за све $1 < p < \infty$, због тога што важи за $0 < p \leq 1$, као што видимо горе. Остаје још да се докаже да важи и за све $f \in \mathcal{Q}_p$. То ће бити доказано коришћењем Теореме 4.16.

Коначно, пошто је, као у (26), скуп $\{\nu_k < n \leq \nu_{k+1}\}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-мерљив, докази обе неједнакости (v) за $0 < p \leqslant 2$ су слични доказу (i). $\square$

Сада можемо започети доказ Буркхолдер-Дејвис-Гандијеве неједнакости.

Доказ теореме 4.16: Покажимо, најпре, десни део неједнакости (22) за свако $f \in H_1^S$ уколико је $p = 1$, и за свако $f \in K_0$, уколико је $1 < p < \infty$, тј.да важи

$$\|f\|_{H_p^*} \leqslant C_p \|f\|_{H_p^S}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Лако се може показати да је

$$\|h\|_{H_p^*} \leqslant \|h\|_{\mathcal{G}_p},$$

$$\|h\|_{H_p^S} \leqslant \|h\|_{\mathcal{G}_p},$$

где је h уведено у Леми 4.13.

Нека је $f \in H_1^S$ за $p = 1$ и $f \in K_0$ за $1 < p < \infty$. Тада постоје $h \in \mathcal{G}_p$ и $g \in \mathcal{Q}_p$ такви да важи Лема 4.13. С обзиром да је g коначна сума ограничених разлика, тада $g \in K_0$. Примењујући ове резултате и део (iv) Теореме 4.15 на $g \in K_0$, добијамо

$$\|f\|_{H_p^*} \leqslant \|h\|_{H_p^*} + \|g\|_{H_p^*} \leqslant \|h\|_{\mathcal{G}_p} + C_p \|g\|_{\mathcal{Q}_p} \leqslant C_p \|f\|_{H_p^S}.$$

Леви део неједнакости (22) можемо слично показати за $f \in H_p^*$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Дејвисова неједнакост (случај када је $p = 1$) која представља тежи део доказа је овим већ показана. Наиме, користећи Дејвисову декомпозицију $f = h + g$ и Лему 4.13, као и прву неједнакост у (iv) Теореме 4.15

$$\|f\|_{H_1^*} \leqslant \|h\|_{H_1^*} + \|g\|_{H_1^*} \leqslant \|h\|_{\mathcal{G}_1} + C_p \|g\|_{\mathcal{Q}_1} \leqslant 4\|f\|_{H_1^S} + 9\|f\|_{H_1^S} = 13\|f\|_{H_1^S}$$

Док, користећи Дејвисову декомпозицију $f = h' + g'$, Лему 4.14 и другу неједнакост у (iv) Теореме 4.15

$$\|f\|_{H_1^S} \leqslant \|h'\|_{H_1^S} + \|g'\|_{H_1^S} \leqslant \|h\|_{\mathcal{G}_1} + C_p \|g\|_{\mathcal{P}_1} \leqslant 8\|f\|_{H_1^*} + 17\|f\|_{H_1^*} = 25\|f\|_{H_1^*}$$

Оригинални доказ Дејвисове неједнакости може се пронаћи и у раду [9].

Покажимо сад да леви део неједнакости (22) важи за свако $f \in K_0$, за $p > 2$.

Неједнакост

$$\|g\|_{H^S_{\frac{p}{2}}} \leqslant 2\|f\|_{H^*_p}\|f\|_{H^S_p} \tag{30}$$

може бити доказана баш као и (29). Из дефиниције g_n можемо закључити да је $S^2_n(f) = f^2_n - g_n$ и као последица тога

$$\|f\|^p_{H^S_p} \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\|g\|^{\frac{p}{2}}_{H^*_{\frac{p}{2}}} + 2^{\frac{p}{2}}\|f\|^p_{H^*_p}.$$

Из десног дела неједнакости за $\frac{p}{2}$ и из (30) следи да је

$$\|f\|^p_{H^S_p} - 2^{\frac{p}{2}}\left(\|f\|^p_{H^*_p} + C^{\frac{p}{2}}_{\frac{p}{2}}2^{\frac{p}{2}}\|f\|^{\frac{p}{2}}_{H^*_p}\|f\|^{\frac{p}{2}}_{H^S_p}\right) \leqslant 0.$$

Решавајући ову неједнакост за $z = \|f\|^{\frac{p}{2}}_{H^S_p}$ закључујемо да леви део неједнакости важи за $p > 2$ и $f \in K_0$.

Показали смо до сада да неједнакост (22) важи за $p = 1$ и посебно за $1 < p < \infty$ уколико је $f \in K_0$. Како смо доказали $H^*_p \sim L_p$, за $1 < p < \infty$, простор H^*_p је Банахов простор и K_0 је густ у H^*_p, за $1 \leqslant p < \infty$. Иста последња два тврђења важе и за H^S_p. Тада доказ теореме следи директно из претходног и тврђења да је $||f||_1 \leqslant ||f||_H$, где је $H \in \{H^s_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{P}_1\}$ (ова неједнакост представља последицу Теореме 4.9 и важи за $H = H^*_1$), с обзиром да је $||a||_1 \leqslant 1$ уколико је $a \in A_1(p, \infty)$, за $i = 1, 2, 3$. $\square$

Наставак доказа теореме 4.15: Прва неједнакост у (i) за $1 < p \leq 2$ је једноставна последица Теореме 4.16 и друге неједнакости у (i). Такође, прва неједнакост у (ii) за $2 \leq p < \infty$ је једноставна последица исте теореме и друге неједнакости у (ii). Остатак (iv) следи из Теореме 4.16 и (iii), за свако $1 < p < \infty$. За $2 \leq p < \infty$ неједнакости у (v) следе из (ii) и (iii). $\square$

Контрапример Марцинкјевића [19] и Зигмунда[20] из [1] показује да Буркхолдер-Дејвис-Гандијева неједнакост не важи за $0 < p < 1$, а исказан је следећим ставом.

Став 4.17. *Не постоји $c_p > 0$ нити $C_p > 0$ такви да важи*

$$c_p\|S(f)\|_p \leqslant \|f^*\|_p \leqslant C_p\|S(f)\|_p$$

за све мартингале, уколико је $0 < p < 1$.

[19] Józef Marcinkiewicz (1910-1940.), пољски математичар

[20] Antoni Zygmund (1900-1992.), пољски математичар

Доказ: Доказ се може наћи у [1]. □

Из овог става следи да леме (4.13) и (4.14) не важе за $0 < p < 1$, јер би у супротном доказ Буркхолдер-Дејвис-Гандијеве неједнакости прошао и за овај случај.

У следећем примеру ћемо видети да неједнакости (i) за $2 \leqslant p < \infty$ и (ii) за $0 < p \leqslant 2$ Теореме 4.15 не важе.

Пример 4.18. *Нека је* $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ *и* $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \ldots = \mathcal{F}$. *Тада је*

$$H_p^* = H_p^S = L_p \cap L_1,$$

$$\|f\|_{H_p^*} = \|f\|_{H_p^S} = \|f\|_p,$$

$$H_p^s = L_2,$$

$$\mathcal{P}_p = \mathcal{Q}_p = L_\infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Ситуација је другачија уколико је F регуларан стохастички базис. Тада је свих пет Хардијевих простора међусобно еквивалентно. Регуларни стохастички базис дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 4.19. *Стохастички базис* F *се назива регуларним уколико постоји број* $R > 0$ *такав да за сваку ненегативну и интеграбилну функцију* f *важи*

$$E_n f \leqslant R E_{n-1} f, \quad n \in \mathbb{N},$$

при чему је $E_{-1} := E_0$.

Овде ће бити показан генералан случај, при чему ћемо дефинисати појам регуларног базиса у таквом случају користећи појам „*невидљивог*“ мартингала.

Вејс[21] је назвао мартингал $f = \{f\}_{n \geq 0}$ „*невидљивим*“ уколико постоји реалан број $R > 0$ такав да је

$$|d_n f|^2 \leqslant R E_{n-1} |d_n f|^2, \quad n \geqslant 0. \tag{31}$$

Класу „*невидљивих*“ мартингала који имају исту константу R означаваћемо са ν_R. Стохастички базис је регуларан ако и само је сваки мартингал „*невидљив*“. Неједнакост (31) може се дефинисати са експонентом p уместо 2.

Лема 4.20. *Уколико (31) важи, онда постоји позитиван број* R_p *такав да за свако* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$|d_n f|^p \leqslant R_p E_{n-1} |d_n f|^p, \quad 0 < p < \infty. \tag{32}$$

[21] Ferenc Weisz, мађарски математичар

Доказ: Доказ се може наћи у [1]. □

Услов (32) за $p = 1$ потврдио је Гарсија [7].

Став 4.21. *Уколико важи (31) за све мартингале са истом константом R, тада је стохастички базис F регуларан. Обрнуто такође важи.*

Доказ: Нека је $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ ненегативан мартингал. Тада

$$E_{n-1}|f_n - f_{n-1}| \leqslant E_{n-1}(|f_n| + |f_{n-1}|) = E_{n-1}(f_n + f_{n-1}) = 2f_{n-1}.$$

Из (31) и неједнакости која је добијена из (31) $(E_{n-1}|d_nf|^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant R^{\frac{2-p}{2}}E_{n-1}|d_nf|^p$ за $p = 1$ следи

$$\begin{aligned}|d_nf|^2 &\leqslant RE_{n-1}|d_nf|^2\\ &\leqslant R^2(E_{n-1}|f_n - f_{n-1}|)^2\\ &\leqslant 4R^2f_{n-1}^2.\end{aligned}$$

Тада је

$$f_n \leqslant f_{n-1} + |d_nf| \leqslant (1+2R)f_{n-1},$$

одакле следи да је F регуларан. Обрнуто важи из дефиниције регуларности. □

Теорема 4.22. *Нека је ν_R класа „невидљивих“ мартингала који имају исту константу R у (17). Нека је $f \in \nu_R$. За $0 < p < \infty$ важи*

$$\|f\|_{H_p^s} \leqslant C_p\|f_{H_p^S} \leqslant C_p\|f\|_{H_p^*} \leqslant C_q\|f\|_{\mathcal{P}_p} \leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{Q}_p} \leqslant C_p\|f\|_{H_f^s},$$

где је C_p константа која зависи искључиво од константи R и p.

Доказ: Доказ се може наћи у [1]. □

Став 4.21 и Теорема 4.22 повлаче наредну последицу.

Последица 4.23. *Уколико је F регуларан стохастички базис, тада су H_p^s, H_p^S , H_p^*, $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{Q}_p$ еквивалентни простори за $0 < p < \infty$.*

5 Некомутативни мартингални Хардијеви простори

У овом поглављу дефинисаћемо некомутативне мартингалне H_p просторе и сачинићемо преглед скорашњих научних достигнућа у овом правцу.

Нека је $\mathcal{M}$ фон Нојманова[22] алгебра са нормалним верним и нормализованим трагом τ. Нека је $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ фон Нојманова подалгебра. Некомутативан L_p простор придружен простору $(\mathcal{N}, \tau|_{\mathcal{N}})$ је природно идентификован са потпростором од $L_p(\mathcal{M})$. Постоји јединствено, нормално, верно условно очекивање $\mathcal{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, које чува траг τ, тј. $\tau(\mathcal{E}(x)) = \tau(x)$, за свако $x \in \mathcal{M}$. За $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathcal{E}$ је проширен до контрактибилне пројекције простора $L_p(\mathcal{M})$ на простор $L_p(\mathcal{N})$ при чему ознака остаје иста.
За свако $0 < p \leqslant \infty$ нека је $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ или једноставно $L_p(\mathcal{M})$ придружен некомутативан L_p-простор. уочимо да је за $p = \infty$, $L_p(\mathcal{M})$ је заправо $\mathcal{M}$ са оператором норме. Норма на $L_p(\mathcal{M})$ је дефинисана као

$$\|x\|_p = \Big(\tau\left(|x|^p\right)\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L_p(\mathcal{M}),$$

где је

$$|x| = (x^* x)^{\frac{1}{2}}$$

стандардна апсолутна вредност од x. Уколико је $\|x\|_p < \infty$ кажемо да је мартингал L_p ограничен.

Примедба 5.1. *Простор свих ограничених L_p мартингала може се идентификовати са простором $L_p(\mathcal{M})$, за $1 < p < \infty$ [10].*

За више детаља о овом простору може се погледати [22].

За $x \in L_p(\mathcal{M})$ означимо редом са $r(x)$ и $l(x)$ десни и леви носач елемента x. Уколико је $x = u|x|$ поларна декомпозиција од x, тада је $r(x) = u^*u$ и $l(x) = uu^*$. Уочавамо да су $r(x)$ и $l(x)$ такође најмање пројекције e такве да $xe = x$, односно $ex = x$. Уколико је елемент x самоадјунгован, онда је $r(x) = l(x)$.

Поставимо сада опште појмове потребне за дефинисање мартингала у некомутативном случају.

Нека је $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geqslant 1}$ растући низ фон Нојманових подалгебри алгебре $\mathcal{M}$ такав да је $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathcal{M}_n$ W^*-густ у $\mathcal{M}$ и $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(\cdot|\mathcal{M}_n)$ условно очекивање од $\mathcal{M}$ у односу на $\mathcal{M}_n$.

[22] John von Neumann (1903-1957), мађарско-амерички математичар

Тада је $\mathcal{E}_n$ пројекција норме 1 простора $L_p(\mathcal{M})$ на простор $L_p(\mathcal{M}_n)$ и $\mathcal{E}_n \geqslant 0$, кад год је $x \geqslant 0$.

Дефиниција 5.2. *Низ $x = \{x_n\}_{n\geqslant 1} \in L_1(\mathcal{M})$ назива се некомутативни мартингал у односу на $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geqslant 1}$ уколико је*

$$\mathcal{E}_n(x_{n+1}) = x_n,\ n \geqslant 1$$

.

Додатно, ако је x_n у $L_p(\mathcal{M})$ за $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ онда се x назива L_p-мартингалом.
У том случају је

$$\|x\|_p = \sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_p.$$

Уколико је $\|x\|_p < \infty$, онда се x назива ограничен L_p-мартингал.

Нека је даље $x = \{x_n\}_{n\geqslant 1}$ некомутативан мартингал у односу на $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geqslant 1}$. Дефинишимо

$$dx_n = x_n - x_{n-1},\ n \geqslant 1,$$

$$x_0 = 0.$$

Низ $dx = \{dx_n\}_{n\geqslant 1}$ назива се низ мартингалних разлика од x. Кажемо да је x коначан мартингал уколико постоји N такво да је $dx_n = 0$ за свако $n \geqslant N$.

У наставку за сваки оператор $x \in L_1(\mathcal{M})$ означићемо $x_n = \mathcal{E}_n(x)$, $n \geqslant 1$.

Дефинишимо квадратну функцију и Хардијев простор за некомутативне мартингале. С обзиром да у некомутативном случају постоје две врсте Хардијевих простора, тј. Хардијеви простори колона и Хардијеви простори редова, у складу са тим дефинишемо верзију квадратне функције колоне и реда у односу на (коначан) мартингал $x = \{x_n\}_{n\geqslant 1}$.

$$S_{c,n}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |dx_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad S_c(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |dx_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$S_{r,n}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |dx_k^*|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad S_r(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |dx_k^*|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дефиниција 5.3. *Нека је $1 \leqslant p < \infty$. Дефинишимо простор $H_p^c(\mathcal{M})$ као комплетирање свих коначних L_p-мартингала са нормом*

$$\|x\|_{H_p^c} = \|S_c(x)\|_p.$$

Дефинишимо простор $H_p^r(\mathcal{M})$ као комплетирање свих коначних L_p-мартингала са нормом

$$\|x\|_{H_p^r} = \|S_r(x)\|_p.$$

Дефинишимо Хардијев простор некомутативних мартингала.

Дефиниција 5.4. *Нека је $1 \leqslant p < 2$.*

$$H_p(\mathcal{M}) = H_p^c(\mathcal{M}) + H_p^r(\mathcal{M})$$

са нормом

$$\|x\|_{H_p} = \inf\left\{\|y\|_{H_p^c} + \|z\|_{H_p^r}\right\},$$

где је инфимум узет по свим $y \in H_p^c(\mathcal{M})$ и $z \in H_p^r(\mathcal{M})$ таквим да $x = y + z$.

Нека је $2 \leqslant p < \infty$.

$$H_p(\mathcal{M}) = H_p^c(\mathcal{M}) \cap H_p^r(\mathcal{M})$$

са нормом

$$\|x\|_{H_p} = \max\left\{\|x\|_{H_p^c},\ \|x\|_{H_p^r}\right\}.$$

Примедба 5.5. *Разлог зашто је дефинисан $H_p(\mathcal{M})$ различито за $1 \leqslant p < 2$ и $2 \leqslant p \leqslant \infty$ представљен је у [10].*

Дефинишимо сада условљену квадратну функцију колона и условљену квадратну функцију редова и на основу ње дефинишимо (условљени) H_p простор, као што је то развијено у раду Јунгеа[23] и Сјуа [24] у [11].

Нека је $x = \{x_n\}_{n\geqslant 1}$ коначан мартингал у $L_2(\mathcal{M})$.

$$s_{c,n}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_{k-1}|dx_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_c(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_{k-1}|dx_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{r,n}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_{k-1}|dx_k^*|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_r(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_{k-1}|dx_k^*|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дефиниција 5.6. *Нека је $0 < p < \infty$. Дефинишемо $h_p^c(\mathcal{M})$ као комплетирање свих коначних L_∞-мартингала у односу на (квази)норму*

$$\|x\|_{h_p^c} = \|s_c(x)\|_p.$$

За $p = \infty$, дефинишемо $h_\infty^c(\mathcal{M})$ као Банахов простор $L_\infty(\mathcal{M})$-мартингала x таквих да $\sum_{k\geqslant 1}\mathcal{E}_{k-1}|dx_k|^2$ конвергира у слабој топологији.

[23] Marius Junge (1962.), немачки математичар

[24] Qinwu Xu, кинески математичар

Дефиниција 5.7. *Нека је $0 < p < \infty$. Дефинишемо $h_p^r(\mathcal{M})$ као комплетирање свих коначних L_∞-мартингала у односу на (квази)норму*

$$\|x\|_{h_p^r} = \|s_r(x)\|_p.$$

За $p = \infty$, дефинишемо $h_\infty^r(\mathcal{M})$ као Банахов простор $L_\infty(\mathcal{M})$-мартингала x таквих да $\sum_{k\geqslant 1}\mathcal{E}_{k-1}|dx_k^*|^2$ конвергира у слабој топологији.

Такође, потребан нам је $l_p(L_p(\mathcal{M}))$ простор свих низова $a = \{a_n\}_{n\geqslant 1} \in L_p(\mathcal{M})$ таквих да је

$$\|a\|_{l_p(L_P(\mathcal{M}))} = \left(\sum_{n\geqslant 1}\|a_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

и

$$\|a\|_{l_\infty(L_\infty(\mathcal{M}))} = \sup_n \|a_n\|_\infty, \quad p = \infty.$$

Нека је

$$s_d(x) = \left(\sum_{n\geqslant 1}\|dx_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\|x\|_{h_p^d} = \|s_d(x)\|_p = \|dx\|_{l_p(L_p(\mathcal{M}))}$$

Простор $h_p^d(\mathcal{M})$ је потпростор простора $l_p(L_p(\mathcal{M}))$ који садржи низове мартингалних разлика и са нормом дефинисаном више.

Дефинишимо сада условну верзију Хардијевих мартингалних простора.

Дефиниција 5.8. *За $0 < p < 2$,*

$$h_p(\mathcal{M}) = h_p^d(\mathcal{M}) + h_p^c(\mathcal{M}) + h_p^r(\mathcal{M})$$

са нормом

$$\|x\|_{h_p} = \inf\left\{\|w\|_{h_p^d} + \|y\|_{h_p^c} + \|z\|_{h_p^r}\right\}$$

где је инфимум узет по свим $w \in h_p^d(\mathcal{M})$, $y \in h_p^c(\mathcal{M})$, $z \in h_p^r(\mathcal{M})$ таквим да је $x = w + y + z$.
За $2 \leqslant p < \infty$,

$$h_p(\mathcal{M}) = h_p^d(\mathcal{M}) \cap h_p^c(\mathcal{M}) \cap h_p^r(\mathcal{M})$$

са нормом

$$\|x\|_{h_p} = \max\left\{\|x\|_{h_p^d},\ \|x\|_{h_p^c},\ \|x\|_{h_p^r}\right\}.$$

5.1 Некомутативни мартингални BMO простори

Можемо дефинисати и некомутативне мартингалне BMO просторе.

Дефиниција 5.9. *Нека је простор*

$$BMO^c(\mathcal{M}) = \Big\{a \in L_2(\mathcal{M}) \ \Big| \ \sup_{n\geqslant 1} \|\mathcal{E}_n\left(|a - \mathcal{E}_{n-1}(a)|^2\right)\|_\infty < \infty\Big\},$$

$$\mathcal{E}_0 = 0,$$

са нормом

$$\|a\|_{BMO^c(\mathcal{M})} = \Big(\sup_{n\geqslant 1} \|\mathcal{E}_n\left(|a - \mathcal{E}_{n-1}(a)|^2\right)\|_\infty\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Слично, простор

$$BMO^r(\mathcal{M}) = \left\{a \in L_2(\mathcal{M}) \mid a^* \in BMO^c(\mathcal{M})\right\},$$

са нормом

$$\|a\|_{BMO^r(\mathcal{M})} = \|a^*\|_{BMO^c(\mathcal{M})}.$$

Коначно,

$$BMO(\mathcal{M}) = BMO^c(\mathcal{M}) \cap BMO^r(\mathcal{M}),$$

са нормом

$$\|a\|_{BMO(\mathcal{M})} = \max\left\{\|a\|_{BMO^c(\mathcal{M})}, \ \|a\|_{BMO^r(\mathcal{M})}\right\}.$$

Може се показати да је простор $\left(BMO^c(\mathcal{M}), \|\cdot\|_{BMO^c(\mathcal{M})}\right)$ Банахов.

Дефиниција 5.10. *Нека је простор*

$$bmo^c(\mathcal{M}) = \Big\{a \in L_2(\mathcal{M}) \ \Big| \ \sup_{n\geqslant 1} \|\mathcal{E}_n\left(|a - \mathcal{E}_n(a)|^2\right)\|_\infty < \infty\Big\},$$

са нормом

$$\|a\|_{bmo^c(\mathcal{M})} = \max\left\{\|\mathcal{E}_1(a)\|_\infty, \ \left(\sup_{n\geqslant 1} \|\mathcal{E}_n\left(|a - \mathcal{E}_n(a)|^2\right)\|_\infty\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Слично, простор

$$bmo^r(\mathcal{M}) = \left\{a \in L_2(\mathcal{M}) \mid a^* \in bmo^c(\mathcal{M})\right\},$$

са нормом

$$\|a\|_{bmo^r(\mathcal{M})} = \|a^*\|_{bmo^c(\mathcal{M})}.$$

За било који низ $a = \{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *у* $\mathcal{M}$ *је*

$$\|a\|_{l_\infty(L_\infty(\mathcal{M}))} = \sup_{n\geqslant 1} \|a_n\|_\infty.$$

Нека је

$$\|a\|_{bmo^d} = \|dx\|_{l_\infty(L_\infty(\mathcal{M}))}$$

Простор $bmo^d(\mathcal{M})$ *је потпростор од* $l_\infty(L_\infty(\mathcal{M}))$ *који садржи низове мартингалних разлика са нормом дефинисаном више.*

Коначно,

$$bmo(\mathcal{M}) = bmo^c(\mathcal{M}) \cap bmo^r(\mathcal{M}) \cap bmo^d(\mathcal{M}),$$

са нормом

$$\|a\|_{bmo(\mathcal{M})} = \max\left\{\|a\|_{bmo^c(\mathcal{M})},\ \|a\|_{bmo^r(\mathcal{M})},\ \|a\|_{bmo^d(\mathcal{M})}\right\}.$$

Може се показати да су простори $bmo^c(\mathcal{M})$, $bmo^r(\mathcal{M})$ и $bmo(\mathcal{M})$ подскупови од L_2.

У наставку, $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geqslant 1}$ ће бити филтрација фон Нојманових подалгебри алгебре $\mathcal{M}$. Сви мартингали ће бити у односу на њу.

5.2 Некомутативна Буркхолдер-Гандијева неједнакост

У класичној теорији вероватноће, Буркхолдер и његови коаутори су развили снажан алат мартингалних трансформација, максималних функција и времена заустављања који су добро утврђени у модерној теорији стохастичких процеса [4]. Да бисмо прешли из класичних мартингалних неједнакости у некомутативни случај, захтева се додатни функционални рачун и комбинаторни увид, при чему и већина аргумената за време заустављања нису више доступни.

Писиер[25] и Сју су у заједничком раду [10] из 1997. године први показали Бурхолдер-Гандијеву неједнакост у некомутативном случају. Теорема 5.11 и њене последице су један од кључних делова овог рада.

Теорема 5.11. *Нека је* $1 < p < \infty$ *и* $x = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$ L_p*-мартингал у односу на* $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geqslant 0}$*. Тада је* x *ограничен мартингал у* $L_p(\mathcal{M})$ *ако и само ако* x *припада* $H_p(\mathcal{M})$*. Штавише, уколико је ово случај, онда*

$$\alpha_p^{-1}\|x\|_{H_p(\mathcal{M})} \leqslant \|x\|_p \leqslant \beta_p \|x\|_{H_p(\mathcal{M})}. \tag{1}$$

где су α_p *и* β_p *позитивне константе које зависе искључиво од* p.

[25] Gilles Pisier (1950.), француски математичар

Доказ: Доказ се може наћи у [10, Теорема 2.1.]. □

Последица 5.12. *Нека је $1 < p < \infty$. Тада $H_p(\mathcal{M}) = L_p(\mathcal{M})$ са еквивалентним нормама.*

Доказ: Доказ се може наћи у [10, Последица 2.2.]. □

Ослањајући се на Теорема 5.11, у раду [12] из 2005.године, аутори су презентовали процене за најбоље константе у Бурхолдер-Гандијевој неједнакости (1). Одатле, имамо да је:

(*i*) $\alpha_p \leqslant C((p-1)^{-2}), \quad p \to 1;$

(*ii*) $\alpha_p \approx p, \quad p \to \infty;$

(*iii*) $\beta_p \approx 1, \quad p \to 1;$

(*iv*) $\beta_p \approx p, \quad p \to \infty.$

где је $a_p \approx b_p, \quad p \to p_0$, ако постоје позитивне константе K_1 и K_2 тако да

$$K_1 \leqslant \frac{a_p}{b_p} \leqslant K_2$$

за p близу p_0.

Важно је нагласити, да је једини случај који је остао нерешен у раду [12], процена оптималне оцене за α_p, када $p \to 1$, решио Рандианантоанина, 2004.године док је рад [12] био у фази припреме за публикацију. Он је показао да је $\alpha_p \approx (p-1)^{-1}, \quad p \to 1$. Често се ова процена приписује управо ауторима рада [12].

Још један од радова на ову тему је рад [11] из 2003. године. Аутори су проширили Буркхолдерову неједнакост и приказују нам следећи резултат ослањајући се на рад [10] и Теорему 5.11 .

Теорема 5.13. *Нека је $1 < p < \infty$ и $x = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$ L_p-мартингал у односу на $\{\mathcal{M}_n\}_{n \geqslant 0}$. Тада је x ограничен у $L_p(\mathcal{M})$ ако и само ако x припада $h_p(\mathcal{M})$. Штавише, уколико је ово случај, онда*

$$\delta_p^{-1} \|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leqslant \|x\|_p \leqslant \eta_p \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}. \tag{2}$$

где су δ_p и η_p позитивне константе које зависе искључиво од p.

Доказ: Доказ се може наћи у [11, Теорема 6.1.]. □

Примедба 5.14.

Последица 5.15. *Нека је* $1 < p < \infty$. *Тада је* $h_p(\mathcal{M}) = L_p(\mathcal{M})$ *са еквивалентним нормама.*

Доказ: Доказ се може наћи у [11, Последица 6.2.]. □

Међутим, већ 2007.године у раду [19] аутор као један од циљева рада има да обезбеди прави редослед раста за најбоље константе у Бурхолдер-Гандијевој неједнакости (2). Један од резултата је следеће.

Теорема 5.16. *Нека је* $1 < p < \infty$. *Постоје константе* δ_p *и* η_p, *које зависе искључиво од* p, *такве да за било који коначан мартингал* x *простора* $L_p(\mathcal{M})$,

$$\delta_p^{-1} \|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leqslant \|x\|_p \leqslant \eta_p \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}. \tag{3}$$

Шта више, имамо следеће процене за најбоље константе (3)

(*i*) $\beta_p \approx (p-1)^{-1}, \quad p \to 1;$

(*ii*) $\beta_p \approx p, \quad p \to \infty;$

(*iii*) $\eta_p \approx 1, \quad p \to 1;$

(*iv*) *Постоји константа* $C > 0$, *тако да* $\eta_p \leqslant Cp$, *за* $p > 2$.

Комбинујући некомутативну Бурхолдер-Гандијеву неједнакост Теорема 5.11 и некомутативну Бурхолдерову неједнакост Теорема 5.16 као закључак и потенцијално отворен проблем, аутор наводи следеће.

Став 5.17. *Нека је* $1 < p < \infty$. *Постоје константе* k_p *и* v_p, *које зависе искључиво од* p, *такве да за било који коначан мартингал* x *простора* $L_p(\mathcal{M})$,

$$k_p^{-1} \|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leqslant \|x\|_{H_p(\mathcal{M})} \leqslant v_p \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}. \tag{4}$$

Шта више, имамо следеће процене за најбоље константе (3)

(*i*) $k_p = O((p-1)^{-1}), \quad p \to 1;$

(*ii*) $k_p = O(p), \quad p \to \infty;$

(*iii*) $v_p \approx 1, \quad p \to 1;$

(*iv*) $v_p = O(\sqrt{p}), \quad p \to \infty;.$

Идаље, не можемо са сигурношћу тврдити да су ове величине оптималне.

5.3 Некомутативна Дејвисова декомпозиција мартингала

Дејвисову декомпозицију први пут смо срели при доказивању еквиваленције у L_1-норми између мартингалне квадратне функције и Дубове максималне функције $\|M(f)\|_1 \approx \|S(f)\|_1$. Уколико је са H_1^* означен простор мартингала такав да је $M(f) \in L_1(\Omega)$ и H_1^S (тј. H_1) простор свих L_1-мартингала таквих да је
$S(f) \in L_1(\Omega)$ у класичном случају је важило да је $H_1 = h_1 = H_1^*$, где је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ простор вероватноћа, тј.

$$\left\|(\sum_n |df_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right\| \sim_C \left\|\sup_n |f_n|\right\|_1$$

где је $A \sim_c B$, ако постоји константа c, тако да $c^{-1}A \leqslant B \leqslant cA$. Доказ можемо пронаћи у [9].

Некомутативан случај је изненађујуће другачији, јер ту не можемо тврдити да се простори H_1 и H_1^* поклапају, што је и показано у раду [12].До 2009.године, однос простора h_1 и H_1, односно H_1^* у некомутативном случају остаје отворен.
У раду [13] један од главних циљева био да се покаже Дејвисова декомпозиција за мартингале у некомутативном L_p простору која је аналогна оној коју смо показали у комутативном случају. Главни резултат рада је био показати да важи $H_1 = h_1$ и у некомутативном случају, при чему то представља и некомутативни аналог Дејвисове декомпозиције са квадратном уместо максималне функције. Пут којим су аутори ово доказивали, био је преко дуалности, описујући дуал простора h_1 као простор BMO типа, док је у комутативном случају показано да је дуал простора h_1 простор bmo, при чему се доказ може пронаћи у [15]. Комбинујући тај резултат и чињеницу да је дуал простора $H_1(\mathcal{M})$ једнак $BMO(\mathcal{M})$, што је резултата рада [10], наредна теорема нам даје да је $H_1 = h_1$ у некомутативном случају.

Дакле, као један од главних резултата, имамо следеће.

Теорема 5.18. $H_1(\mathcal{M}) = h_1(\mathcal{M})$ *са екивалентним нормама. Прецизније, уколико је* $x \in H_1(\mathcal{M})$*, онда је*

$$\frac{1}{2}\|x\|_{h_1} \leqslant \|x\|_{H_1} \leqslant \sqrt{6}\|x\|_{h_1}.$$

Доказ: Доказ се може наћи у [13, Теорема 2.1.]. □

Један од новијих радова на ову тему, је рад из 2017.године [28]. Аутори су приказали Дејвисову декомпозицију за $1 \leqslant p < 2$. Једна од значајних карактеристика овог разлагање је истовремено контролисање H_p^c и H_q^c норми за $2 \leqslant q < \infty$.

Став 5.19. *Нека је* $1 \leqslant p < 2 \leqslant q < \infty$. *Тада сваки мартингал* $x \in H_p^c(\mathcal{M}) \cup H_q^c(\mathcal{M})$ *може да се разложи на два мартингала* x^c *и* x^d *тако да:*

(i) $x = x^c + x^d$;

(ii) $\|x^c\|_{h_p^c} + \|x^d\|_{h_p^d} \leqslant 2^{5/2}\|x\|_{H_p^c}$

(iii) $\|x^c\|_{h_q^c} + \|x^d\|_{h_q^d} \leqslant Cq\|x\|_{H_q^c}$, $C > 0$ *константа*

Доказ: Доказ се може пронаћу у раду [28].

Аутори су такође показали да Дависова декомпозиција некомутативих мартингалних Хардијевих простора колона није могућа за $0 < p < 1$, што представља, такође, један од битнијих делова рада.

5.4 Атомарна декомпозиција некомутативних мартингалних Хардијевих простора

У раду [14] доказано је да атомарна декомпозиција простора h_1 и H_1 важи за некомутативне мартингале.

С обзиром да постоје две врсте Хардијевих простора, тј. Хардијев простор колона и Хардијев простор редова, у раду су приказана два одговарајућа типа атома и то је једна од главних разлика у односу на комутативни случај. Приступ аутора при доказивању атомарне декомпозиције условних Хардијевих некомутативних мартингалних простора је дуалност простора h_1 и bmo. Дуалност $h_1^* = bmo$ показана је у Теореми раду [13, Став 2.3.]. Међутим, овај метод, не даје експлицитно атомарну декомпозицију. Други важан резултат рада је интерполација условљеног Хардијевог простора h_p. Главна идеја је инспирисана еквивалентном (квази)нормом за h_p, $0 < p \leqslant 2$ коју је увео Херц [17]. Аутори су пребацили ову (квази)норму у некомутативан случај, да би добили нову карактеризацију простора h_p.

Уведимо концепт некомутативних атома.

Дефиниција 5.20. $a \in L_2(\mathcal{M})$ *се назива а* $(1,2)_c$*-атом у односу на* $\{\mathcal{M}_n\}_{n\geqslant 1}$ *уколико постоји* $n \geqslant 1$ *и пројектор* $e \in \mathcal{M}_n$ *тако да важи*

(i) $\mathcal{E}_n(a) = 0$,

(ii) $r(a) \leqslant e$,

(iii) $\|a\|_2 \leqslant \tau(e)^{-\frac{1}{2}}$

Замењујући (ii) са $l(a) \leqslant e$, *добијамо а* $(1,2)_r$*-атом. Овде су* $(1,2)_c$*-атоми и* $(1,2)_r$*-атоми некомутативни представници* $(1,2,\infty)$*-атома за класичне мартингале.*

Став 5.21. *Уколико је* a $(1,2)_c$*-атом, тада*

$$\|a\|_{H_1^c} \leqslant 1, \quad \|a\|_{h_1^c} \leqslant 1.$$

Сличне неједнакости важе и за $(1,2)_r$*-атоме.*

Доказ: Доказ се може наћи у [14, Став 2.2.]. □

Дефиниција 5.22. *Дефинишимо* $h_1^{c,at}(\mathcal{M})$ *као Банахов простор свих* $x \in L_1(\mathcal{M})$ *за које важи декомпозиција*

$$x = \sum_k \lambda_k a_k,$$

где је a_k $(1,2)_c$*-атом или елемент у* $L_1(\mathcal{M}_1)$ *норме мање или једнаке* 1 *и* $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *такво да је* $\sum\limits_k |\lambda_k| < \infty$.

У овом простору, норму уводимо са

$$\|x\|_{h_1^{c,at}} = \inf \sum_k |\lambda_k|,$$

где је инфимум узет по свим декомпозицијама елемента x *описаних више.*

Слично дефинишемо и $h_1^{r,at}(\mathcal{M})$ *и* $\|\cdot\|_{h_1^{r,at}}$.

Простор $h_1^{c,at}(\mathcal{M})$ је Банахов и $h_1^{c,at}(\mathcal{M}) \subset h_1^c(\mathcal{M})$.

Следећа теорема говори да се ова два простора подударају и омогућава нам атомарну декомпозицију условног Хардијевог простора што представља главни резултат.

Теорема 5.23. *Важи да је* $h_1^c(\mathcal{M}) = h_1^{c,at}(\mathcal{M})$ *са еквивалентним нормама. Прецизније, уколико је* $x \in h_1^c(\mathcal{M})$*, онда је*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_{h_1^{c,at}} \leqslant \|x\|_{h_1^c} \leqslant \|x\|_{h_1^{c,at}}.$$

Слично, $h_1^r(\mathcal{M}) = h_1^{r,at}(\mathcal{M})$ *и важе аналогне неједнакости.*

Доказ: Доказ се може наћи у [14, Теорема 2.4.]. □

Дефиниција 5.24. *Нека је*

$$h_1^{at}(\mathcal{M}) = h_1^d(\mathcal{M}) + h_1^{c,at}(\mathcal{M}) + h_1^{r,at}(\mathcal{M})$$

простор са нормом

$$\|x\|_{h_1^{at}} = \inf \left\{ \|w\|_{h_1^d} + \|y\|_{h_1^{c,at}} + \|z\|_{h_1^{r,at}} \right\},$$

где је инфимум узет по свим $w \in h_1^d$, $y \in h_1^{c,at}$, $z \in h_1^{r,at}$ *таквим да је* $x = w + y + z$.

Теорема 5.25. *Важи да је* $h_1(\mathcal{M}) = h_1^{at}(\mathcal{M})$ *са еквивалентним нормама. Прецизније, уколико је* $x \in h_1^{at}(\mathcal{M})$ *онда је*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_{h_1^{at}} \leqslant \|x\|_{h_1} \leqslant \|x\|_{h_1^{at}}.$$

Доказ: Доказ се може наћи у [14, Теорема 2.9.]. □

Некомутативна Дејвисова декомпозиција [13] нам говори да је $H_1(\mathcal{M}) = h_1(\mathcal{M})$. Стога, Теорема 5.25 доводи до $H_1(\mathcal{M}) = h_1^{at}(\mathcal{M})$, што значи да ми можемо разложити било који мартингал у $H_1(\mathcal{M})$ на атомарни део и дијагонални део. Таква декомпозиција је атомарна декомпозиција некомутативних марингала Хардијевих простора.

Један од радова вредних пажње је и рад [27] из јануара 2020. године. Аутори уводе два нова појма, а то су груби атоми и алгебарски атоми. Овде ћемо само дефинисати такве атоме, док просторе који су изграђени од тих атома, као и декомпозиције истих могу се пронаћи у раду.

Дефиниција 5.26. *Нека је* $0 < p < 2$. *Оператор* $a \in L_p(\mathcal{M})$ *се назива* $(p,2)_c$*–сирови атом, ако постоји* $n \geqslant 1$ *и факторизација* $a = yb$, *тако да важи:*

(i) $y \in L_2(\mathcal{M}), \mathcal{E}_n(y) = 0,$ *и* $\|y\|_2 \leqslant 1$

(ii) $b \in L_q(\mathcal{M}), \|b\|_q \leqslant 1,$ *где је* $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$

Замењујући факторизацију са $a = by$, *добијамо* $(p,2)_r$*–сирови атом.*

Дефиниција 5.27. *Нека је* $0 < p < 2$. *Оператор* $x \in L_p(\mathcal{M})$ *се назива* h_p^c*–алгебарски атом, кад год може бити записан у облику* $x = \sum_{n\geqslant 1} y_n b_n$, *где* y_n *и* b_n *задовољавају следеће услове, за* $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ *:*

(i) $\mathcal{E}_n(y) = 0,$ *и* $b_n \in L_q(\mathcal{M}_n),$ *за* $n \geqslant 1$

(ii) $\sum_{n\geqslant 1} \|y_n\|_2^2 \leqslant 1,\ \left\| \left(\sum_{n\geqslant 1} |b_n|^2\right)^{1/2} \right\|_q \leqslant 1.$

6 Мешовити мартингални Хардијеви простори, атомарна декомпозиција и дуалност

У раду [18] из 2020. године уводе се мешовити мартингални Хардијеви простори $H^s_{p,q}$, $\mathcal{Q}_{p,q}$ и $\mathcal{P}_{p,q}$. Аутори презентују две атомарне декомпозиције ових простора. Показују да је дуал простора $H^s_{p,q}$ за $0 < p \leqslant q \leqslant 1$ простор Кампаната[26] [26].

Нека је Ω произвољан непразан скуп и $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ низ непразних подскупова од Ω такав да је $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, за свако $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \Omega_j = \Omega$.

За $0 < p, q \leqslant \infty$ класични мешовити простор означавамо са $L_{p,q}$ на Ω, као простор који садржи функције које су локално L_p, а у бесконачности имају l_p понашање, тј. за $p, q \in (0, \infty)$,

$$L_{p,q} = \{f \mid \|f\|_{p,q} := \|f\|_{L_{p,q}(\Omega)} < \infty, \}$$

где је

$$\|f\|_{p,q} := \|f\|_{L_{p,q}(\Omega)} = \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_\Omega |f|^p \chi_{\Omega_j} d\mu\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

За $0 < p < \infty$ и $q = \infty$

$$L_{p,\infty} = \left\{ f \mid \|f\|_{p,\infty} := \|f\|_{L_{p,\infty}(\Omega)} := \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_\Omega |f|^p \chi_{\Omega_j} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Са (квази) нормом $\|\cdot\|_{p,q}$ мешовити простор $L_{p,q}$ је комплетан простор и Банахов простор за $1 \leqslant p, q < \infty$

- $\|f\|_{p,p} = \|f\|_p,\ f \in L_p(\Omega)$,
- $\|f\|_{p,q} \leqslant \|f\|_p,\ p \leqslant q,\ f \in L_p(\Omega)$,
- $\|f\|_p \leqslant \|f\|_{p,q},\ q \leqslant p,\ f \in L_{p,q}(\Omega)$.

Дефинишемо мешовите мартингалне Хардијеве просторе.

(1) Нека је

$$H^s_{p,q}(\Omega) = \{f \in \mathcal{M} \mid \|f\|_{H^s_{p,q}(\Omega)} := \|s(f)\|_{p,q} < \infty\}.$$

Нека је Γ скуп свих низова $\beta = \{\beta_n\}_{n\geqslant 0}$ адаптираних, нерастућих и ненегативних функција и дефинишемо

$$\beta_\infty = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

[26] Sergio Campanato (1930-2005.), италијански математичар

(2) Простор $\mathcal{Q}_{p,q}(\Omega)$ садржи све мартингале f за које постоји низ функција $\beta = \{\beta_n\}_{n\geqslant 0} \in \Gamma$ такав да је

$$S_n(f) \leqslant \beta_{n-1}, \quad \beta_\infty \in L_{p,q}(\Omega).$$

На $\mathcal{Q}_{p,q}$ дефинишемо норму са

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_{p,q}(\Omega)} := \inf_{\beta\in\Gamma} \|\beta_\infty\|_{p,q}.$$

(3) Простор $\mathcal{P}_{p,q}(\Omega)$ садржи све мартингале f за које постоји низ функција $\beta = \{\beta_n\}_{n\geqslant 0} \in \Gamma$ такав да је

$$|f_n| \leqslant \beta_{n-1}, \quad \beta_\infty \in L_{p,q}(\Omega).$$

На $\mathcal{P}_{p,q}(\Omega)$ дефинишемо норму са

$$\|f\|_{\mathcal{P}_{p,q}(\Omega)} := \inf_{\beta\in\Gamma} \|\beta_\infty\|_{p,q}.$$

Примедба 6.1. *За $0 < p = q < \infty$ простори $H^s_{p,q}$, $\mathcal{Q}_{p,q}$, $\mathcal{P}_{p,q}$ поклапају се са просторима H^s_p, $\mathcal{Q}_p$ и $\mathcal{P}_p$, редом.*

У раду су приказана два типа атома и атомарне декомпозиције за овако дефинисане просторе, при чему ћемо презентовати само један од циљева рада, а то је атомарна декомпозиција простора $H^s_{p,q}$, док се атомарна декомпзиција за просторе $\mathcal{Q}_{p,q}$, $\mathcal{P}_{p,q}$, може пронаћи у раду [18, Теорема 3.5., Теорема 3.6.], као и дуалност простора $H^s_{p,q}$ за $0 < p \leqslant q \leqslant 1$. .

Дефиниција 6.2. *Нека је $0 < p < \infty$ и $\max(p, 1) < r \leqslant \infty$. Мерљива функција a је $(p, r)^s$-атом уколико постоји време заустављања $\nu \in T$ такво да је*

(i) $a_n := E_n a = 0, \quad \nu \geqslant n,$

(ii) $\|s(a)\|_{r,r} := \|s(a)\|_r \leqslant \mu(B_\nu)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}},$

где је $B_\nu = \{\nu \neq \infty\}$.

Уколико у (ii) ставимо $\|S(f)\|_r$ или $\|a^*\|_r$ уместо $\|s(f)\|_r$ добијамо дефиницију $(p, r)^S$, односно $(p, r)^*$-атома редом.

Дефиниција 6.3. *Нека је $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ и $\max(p, 1) < r \leqslant \infty$. Мерљива функција a је $(p, q, r)^s$-атом уколико постоји време заустављања $\nu \in T$ такво да је*

(i) $a_n = E_n a = 0, \quad \nu \geqslant n,$

(ii) $\|s(a)\|_r \leqslant \mu(B_\nu)^{\frac{1}{r}} \|\chi_{B_\nu}\|_{p,q}^{-1}$.

Уколико у (ii) ставимо $\|S(a)\|_r$, *односно* $\|a^*\|_r$ *уместо* $\|s(a)\|_r$ *добијамо* $(p,q,r)^S$-*атом, односно* $(p,q,r)^*$-*атом.*

$\mathcal{A}(p,q,r)^s$ ($\mathcal{A}(p,q,r)^S$, $\mathcal{A}(p,q,r)^*$) је скуп свих низова тројки (λ_k, a^k, ν^k) где су λ_k ненегативни бројеви, a^k су $(p,r)^s$-атоми ($(p,r)^S$-атоми, $(p,r)^*$-атоми) и $\nu^k \in T$ задовољава услов (i) и (ii) у Дефиницији 6.2 и тако да за свако $0 < \eta \leqslant 1$

$$\sum_k \left(\frac{\lambda_k}{\mu(B_{\nu^k})^{\frac{1}{p}}} \right)^n \chi_{B_{\nu^k}} \in L_{\frac{p}{n},\frac{q}{n}}.$$

$\mathcal{B}(p,q,r)^s$ ($\mathcal{B}(p,q,r)^S$, $\mathcal{B}(p,q,r)^*$) је скуп свих низова тројки (λ_k, a^k, ν^k) где су λ_k ненегативни бројеви, a^k су $(p,q,r)^s$-атоми ($(p,q,r)^S$-атоми, $(p,q,r)^*$-атоми) и $\nu^k \in T$ задовољава услов (i) и (ii) у Дефиницији 6.3 и тако да за свако $0 < \eta \leqslant 1$

$$\sum_k \left(\frac{\lambda_k}{\|\chi_{B_{\nu^k}}\|_{p,q}} \right)^n \chi_{B_{\nu^k}} \in L_{\frac{p}{n},\frac{q}{n}}.$$

Прикажимо сада атомарну декомпозицију $H^s_{p,q}$.

Теорема 6.4. *Нека је* $0 < p < \infty$, $0 < p \leqslant \infty$ *и* $\max(p,1) < r \leqslant \infty$. *Уколико је мартингал* $f \in \mathcal{M}$ *у* $H^s_{p,q}$, *тада постоји низ тројки* $(\lambda_k, a^k, \nu^k) \in \mathcal{A}(p,q,r)^s$ *такав да за свако* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k E_n a^k = f_n \tag{1}$$

и за било које $0 < \eta \leqslant 1$

$$\left\| \sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{\lambda_k}{\mu(B_{\nu^k})^{\frac{1}{p}}} \right)^\eta \chi_{B_{\nu^k}} \right\|_{\frac{p}{\eta},\frac{q}{\eta}}^{\frac{1}{\eta}} \leqslant C\|f\|_{H^s_{p,q}}.$$

Штавише,

$$\sum_{k=l}^{m} \lambda_k a^k \longrightarrow f$$

у $H^s_{p,q}$ *када* $m \to \infty$, $l \to -\infty$.

Обратно, уколико $f \in \mathcal{M}$ *има декомпозицију (1), тада за било које* $0 < \eta \leqslant 1$

$$\|f\|_{H^s_{p,q}} \leqslant C \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda_k}{\mu(B_{\nu^k})^{\frac{1}{p}}} \right)^\eta \chi_{B_{\nu^k}} \right\|_{\frac{p}{\eta},\frac{q}{\eta}}^{\frac{1}{\eta}}.$$

Доказ: Доказ се може наћи у [18, Теорема 3.3.]. □

Теорема 6.5. *Нека је* $0 < p < \infty$, $0 < p \leqslant \infty$ *и* $\max(p, 1) < r \leqslant \infty$. *Уколико је мартингал* $f \in \mathcal{M}$ *у* $H^s_{p,q}$, *тада постоји низ тројки* $(\lambda_k, a^k, \nu^k) \in \mathcal{B}(p, q, r)^s$ *такав да за свако* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k E_n a^k = f_n \tag{2}$$

и за било које $0 < \eta \leqslant 1$

$$\left\| \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{\lambda_k}{\|\chi_{B_{\nu^k}}\|_{p,q}} \right)^{\eta} \chi_{B_{\nu^k}} \right\|_{\frac{p}{\eta}, \frac{q}{\eta}}^{\frac{1}{\eta}} \leqslant C \|f\|_{H^s_{p,q}}.$$

Штавише,

$$\sum_{k=l}^{m} \lambda_k a^k \longrightarrow f$$

у $H^s_{p,q}$ *када* $m \to \infty$, $l \to -\infty$.

Обратно, уколико $f \in \mathcal{M}$ *има декомпозицију (2), тада за било које* $0 < \eta \leqslant 1$

$$\|f\|_{H^s_{p,q}} \leqslant C \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda_k}{\|\chi_{B_{\nu^k}}\|_{p,q}} \right)^{\eta} \chi_{B_{\nu^k}} \right\|_{\frac{p}{\eta}, \frac{q}{\eta}}^{\frac{1}{\eta}}.$$

Доказ: Доказ се може наћи у [18, Теорема 3.4.]. □

7 Закључак

Циљ овог мастер рада био је изложити неопходну теорију мартингалних Хардијевих простора, одговарајуће примере и у завршном делу сачинити преглед скорашњих научних достигнућа у области некомутативних мартингалних Хардијевих простора. Мартингални Хардијеви простори представљају област великог интересовања. Почетком 20-тог века, интересовање са једнопараметарских мартингалних простора, на двопараметарске је порасло. Уопштење појма H_p простора са димензије 2, на више димензије уско је повезано са одсуством аналитичности. Појам маритингалних H_p простора један је од начина аксиоматизације H_p простора у R^n чија се нарочита предност састоји у лаком преношењу на некомутативни случај. Проучавање некомутативних Хардијевих простора налази се у центру пажње данашњих истраживачких радова. Све је веће интересовање и за проучавање мешовитих Хардијевих мартингалних простора, као и атомарне декомпозиције истих. Атомарна декомпозиција игра важну улогу у класичној теорији мартингала и хармонијској анализи. Као таква, атомарна декомпозиција је снажан алат у изучавању теорема дуалности, теорема интерполације, као и фундаменталних неједнакости како у теорији мартингала, тако и у хармонијској анализи. С обзиром да се атоми у класичној теорији мартингала дефинишу на основу времена заустављања, а како основне конструкције базиране на времену заустављања нису валидне у некомутативном случају, атомарна декомпозиција представља отворен проблем при изучавању некомутативних мартингалних простора. Област великог интересовања представљају такође и промењиви мартингални Хардијеви простори и њихова примена у Фуријеовој[27] анализи. Као један од примера, може се приказати рад [24] у коме је испитивано пет врста мартингалних Хардијевих простора са промењивим експонентом, $H_{p(\cdot)}$ и $H_{p(\cdot),q}$ као и њихове атомарне декомпозиције. Мартингалне неједнакости и теореме дуалности истих, представљане су као последице теорема о атомарној декомпозицији.

[27] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830.), француски математичар и физичар

Литература

[1] F. Weisz, *Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier Analysis*, Springer, New York, 1994.

[2] R. Long, *Martingale Spaces and Inequalities*, Springer, Wiesbaden, 1993.

[3] R. J. Elliot, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] D. L. Burkholder, *Distribution Function Inequalities for Martingales*, Annals of Prob., 19-42, 1973.

[5] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, *Extrapolation and Interpolation of Quasi-linear Operators*, Acta Math 124, 249-304, 1970.

[6] R. F. Gundy, *Inégalités pour Martingales á un et Deux Indices: L'espace H_p*, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VIII-1978., Lect. Notes Math., vol 774, 251-331, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[7] A. M. Garsia, *Martingale Inequalities, Seminar Notes on Recent Progress*, University of California, San Diego, 1973.

[8] C. Herz, *Bounded Mean Oscillation and Regulated Martingales*, Trans. Amer. Math. Soc. 193, 199-215, 1974.

[9] B. Davis, *On the Integrability of the Martingale Square Function*, Israel Journal of Mathematics 8, 187-190, 1970.

[10] G. Pisier, Q. Xu, *Non-commutative martingale Inequalities*, Comm. Math. Phys. 189, 667-698, 1997.

[11] M. Junge, Q. Xu, *Noncommutative Burkholder/Rosenthal Inequalities*, Ann. Probab. 31, 948-995, 2003.

[12] M. Junge, Q. Xu, *On the best constants in some non-commutative martingale inequalities*, Bull. London Math. Soc. 37, 243-353, 2005.

[13] M. Perrin, *A Noncommutative Davis' Decomposition for Martingales*, J. London Math. Soc. 80(3), 624-648, 2009.

[14] T. N. Bekjan, Z. Chen, M. Perrin, Z. Yin, *Atomic Decomposition and Interpolation for Hardy Spaces of Noncommutative Martingales*, Journal of Functional Analysis 258, 2483-2505, 2010.

[15] M. Pratelli, *Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable*, Springer, Berlin, 1976. Séminaire de Probabilités, X (Seconde partie: Théorie das intégrales stochastiques, Univ. Strasbourg, Strasbourg, ann ée universitaire 1974/1975)

[16] K. Yosida, *Functionala Analysis*, Springer: Berlin, heidelberg, New York, p. 127, 1980.

[17] C. Herz, *H_p-spaces of Martingales,* $0 < p \leqslant 1$, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 28, 189-205, 1974.

[18] J. S. Bansah, B. F. Sehba, *Martingale Hardy-amalgam Spaces: Atomic Decompositions and Duality*, arXiv:1901.02311v4, 2020.

[19] N. Randrianantoanina, *Conditioned Square Functions for Noncommutative Martingals*, The Annals of Probability, Vol. 35, No. 3, 1039-1070, 2007.

[20] F. Weisz, *Martingale Hardy Spaces for* $0 < p \leqslant 1$, Probab. Th. Rel. Fields 84, 361-376, 1990.

[21] H. P. Rosenthal, *On the Subspaces of L^p ($p > 2$) Spanned by Sequences of Independent Random Variables*, Israel J. Math. 8, 273-303, 1970.

[22] G. Pisier, Q. Xu, *Non-commutative L_p-spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, pages 1459–1517. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[23] M. Junge, Q. Xu, *On the best constants in some non-commutative martingale inequalities*, Bull. London Math. Soc. 37 243–253. MR2119024, 2005.

[24] Y. Jiao, F. Weisz, L. Wu, D. Zhou, *Variable Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier Analysis*, arXiv:1809.07520v2, 2020.

[25] R. Philipowski, *Probability (Martingale Theory)*, Notes of a course given at the University of Luxembourg 2013.-2016.

[26] S. Campanato, *Proprietá di hölderianitá di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Pisa (3) 17: 175-188, 1963.

[27] Z. Chen, N. Randrianantoanina, Q. Xu, *Atomic Decomposition for Nonvommutative Martingales*, arXiv:2001.08775v1, 2020.

[28] N. Randrianantoanina, L. Wu, Q. Xu, *Noncommutative Davis Type Decompositions and Applications*, arXiv:1712.01374v1, 2017.