

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јована Јовановић

Проксимални алгоритми и примери
примене

Мастер рад

Београд, 2020.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

проф. др Зорица Станимировић,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

доц. др Сандра Живановић,
Универзитет у Београду, Математички факултет

доц. др Младен Николић,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Садржај

1	Увод	1
1.1	Конвексни скупови и функције	1
1.2	Субдиференцијабилност	6
1.3	Јака конвексност	9
1.4	Проксимални оператори	12
1.5	Конјуговане функције	15
1.6	Мореов омотач	17
1.7	Резолвента оператора субдиференцијала	20
2	Конвергенција проксималних оператора	22
2.1	Неекспанзивни оператори	22
2.2	Упросечени оператори	24
2.3	Асимптотски регуларни оператори	26
3	Проксимални алгоритми	30
3.1	Проксимални алгоритам минимизације	30
3.2	Проксимални градијентни алгоритам	33
3.3	Убрзани проксимални градијентни алгоритам	37
3.4	Douglas - Rachford раздвајајући алгоритам	39
4	Примене проксималних алгоритама	42
4.1	Обрада сигнала	42
4.2	Проблем ретке деконволуције сигнала	49
4.3	Математичка формулација проблема ретке деконволуције сигнала	49
4.4	Алгоритам мајоризације - минимизације	51
4.5	Нумерички експеримент 1	54
4.6	Проблем компресованог детектовања	59

4.7	Математичка формулација проблема компресованог детек- товања	60
4.8	Нумерички експеримент 2	61
5	Закључак	65
	Литература	66

1 Увод

У овом поглављу изложене су теоријске основе проксималних оператора. Поред представљања њихових основних карактеристика дати су неки основни појмови из конвексне анализе. Треба напоменути да су изложени докази само оних теорема које су од фундаменталне важности за овај рад. Више детаља се може наћи у [1–6].

1.1 Конвексни скупови и функције

Скуп дефиниција и теорема који следе су неопходни за даљи рад и дефинисање сложенијих појмова, како у текућој, тако и у наредним секцијама.

Дефиниција 1.1. *Скуп $C \in \mathbb{R}^n$ је конвексан ако за произвољне две тачке $x_1, x_2 \in C$ и све $\lambda \in [0, 1]$ важи:*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C.$$

Дефиниција 1.2. *Скуп $C \in \mathbb{R}^n$ је афин ако за произвољне две тачке $x_1, x_2 \in C$ и све $\lambda \in \mathbb{R}$ важи:*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C.$$

Дефиниција 1.3. *Нека је X реалан векторски простор. Функција*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

представља скаларни производ на простору X ако задовољава следеће услове:

- (1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ за свако $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- (2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ за свако $x, y \in X$,
- (3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ за свако $x \in X$,
- (4) $\langle x, x \rangle = 0$ ако и само ако је $x = 0$.

Тада се уређен пар $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ назива унитаран или пред-Хилбертов простор.

Дефиниција 1.4. *Нека је X реалан векторски простор. Функција*

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

представља норму на простору X ако су испуњени следећи услови:

- (1) $\|x\| \geq 0$ за свако $x \in X$,

- (2) $\|x\| = 0$ ако и само ако је $x = 0$,
 (3) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ за свако $x \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$,
 (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ за свако $x, y \in X$.

Тада се уређен пар $(X, \|\cdot\|)$ назива нормиран векторски простор.

Дефиниција 1.5. Нека је X реалан векторски простор. На овом простору, норма се може дефинисати следећом формулом:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.1)$$

за $p \geq 1$, при чему је $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. У граничном случају, када $p \rightarrow +\infty$ добија се:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (1.2)$$

Норма дефинисана помоћу (1.2) се назива униформном нормом вектора. За $p = 1$ добија се:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (1.3)$$

а за $p = 2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}. \quad (1.4)$$

Норма дефинисана помоћу (1.3) се назива апсолутном или l_1 нормом вектора, а норма дефинисана помоћу (1.4) се назива еуклидском или l_2 нормом вектора.

На једном векторском простору, норма се може задати на више начина. Од посебног значаја јесте норма која је индукована скаларним производом.

Теорема 1.1. Нека је X унитаран простор са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тада је $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ норма на простору X која задовољава услове:

- (1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (неједнакост Коши-Шварц-Буџаковског),
 (2) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (правило паралелограма).

Доказ теореме 1.1 може се наћи у [7].

Дефиниција 1.6. Нека је $x \in \mathbb{R}^n$ и $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Тада се вектор:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

назива градијент функције f у тачки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Дефиниција 1.7. Нека је $x \in \mathbb{R}^n$ и $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Тада се матрица:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

назива Хесијан функције f у тачки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Дефиниција 1.8. Нека је дата функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ефективни домен функције f , у ознаци $\text{dom}(f)$ представља скуп тачака у којима та функција има коначну вредност, односно:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

Дефиниција 1.9. Симетрична матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $n \in \mathbb{N}$ је позитивно-семедефинитна, у ознаци $A \succeq 0$, ако за свако $x \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$x^T A x \geq 0.$$

Дефиниција 1.10. Афини омотач скупа A , у ознаци $\text{aff}(A)$ је пресек свих афиних скупова које га садрже.

Дефиниција 1.11. Конвексни омотач скупа A , у ознаци $\text{conv}(A)$ је пресек свих конвексних скупова који га садрже.

Другим речима, афини омотач скупа представља најмањи афин скуп који садржи тај скуп, док је конвексни омотач скупа најмањи конвексни скуп који садржи тај скуп.

При проучавању конвексних скупова, често се уместо унутрашњости скупа дефинише релативна унутрашњост скупа која не зависи од димензије амбијентног простора. На пример, релативна унутрашњост затвореног интервала ће увек бити отворен интервал, независно од простора у којем је тај интервал смештен. С друге стране, унутрашњост затвореног интервала у простору \mathbb{R}^n , где $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, представља празан скуп.

Дефиниција 1.12. Тачка $x \in \mathbb{R}^n$ је релативно унутрашња тачка скупа $A \subset \mathbb{R}^n$ ако за неко $\varepsilon > 0$ важи: $(x + \varepsilon B) \cap \text{aff}(A) \subset A$, где је $B = K(0, 1)$ јединична лопта у \mathbb{R}^n . Скуп свих релативно унутрашњих тачака скупа A представља релативну унутрашњост скупа A , у ознаци $\text{relint}(A)$.

Дефиниција 1.13. Нека је C конвексан скуп у \mathbb{R}^n . Функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна ако за све $x, y \in C$ и све $\lambda \in [0, 1]$ важи неједнакост:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

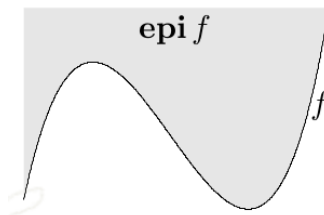
Притом, ако за $x \neq y$ и $\lambda \in (0, 1)$ важи строга неједнакост, функција f је строго конвексна. Функција f је конкавна (строго конкавна) ако је функција $-f$ конвексна (строго конвексна).

Постоји алтернативни приступ при дефинисању конвексне функције тако што се скупу вредности конвексне функције дода бесконачно велики број $+\infty$. Наиме, ако се полазна конвексна функција прошири на читав \mathbb{R}^n тако да у свим тачкама ван конвексног скупа C узима вредности $+\infty$, неједнакост која учествује у дефиницији конвексне функције и даље важи. На тај начин се постиже да се за домен сваке конвексне функције може узети читав еуклидски простор \mathbb{R}^n .

Функције које ће бити разматране у даљем раду би требало да поред конвексности задовољавају одређене додатне услове. Сходно томе, у наставку рада следи скуп дефиниција које говоре о тим додатним особинама.

Дефиниција 1.14. Нека је дата функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, где је $C \subset \mathbb{R}^n$. Тада се скуп $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$ који садржи тачке изнад графика функције f назива надграфик функције f .

На слици 1 приказана је функција f и њен надграфик, означен са $\text{epi} f$.



Слика 1: Надграфик функције

Теорема 1.2. Нека је C конвексан скуп у \mathbb{R}^n . Функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна ако и само ако је њен надграфик $\text{epi}(f)$ конвексан скуп.

Доказ теореме 1.2 може се наћи у [1].

Дефиниција 1.15. Функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ је права функција ако важи $f(x) < +\infty$ за бар једно $x \in \mathbb{R}^n$ и $f(x) > -\infty$ за све x .

Дакле, функција је права ако је одговарајући ефективни домен непразан скуп и ако никада не узима вредност $-\infty$. Функције које нису праве, називају се неправим функцијама.

Дефиниција 1.16. Функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ је затворена ако је њен надграфик $\text{epi}(f)$ затворен подскуп скупа \mathbb{R}^{n+1} .

У наставку рада претпоставља се да је функција затворена, права и конвексна (уколико се експлицитно не наведе другачија претпоставка). Сходно дефиницијама, у том случају важи да је надграфик функције f непразан, затворен и конвексан скуп.

Под посебним претпоставкама о функцији f могу се задати услови који гарантују конвексност задате функције. Следеће две теореме говоре о томе.

Теорема 1.3. (Услов првог реда за конвексне функције) Нека је дата диференцијабилна функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тада је f конвексна ако и само ако је $\text{dom}(f)$ конвексан скуп и за све $x, y \in \text{dom}(f)$ важи:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle .$$

Теорема 1.4. (Услов другог реда за конвексне функције) Нека је дата два пута непрекидно диференцијабилна функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тада је f конвексна ако и само ако је $\text{dom}(f)$ конвексан скуп и одговарајући Хесијан позитивно семидефинитан, односно за све $x, y \in \text{dom}(f)$ важи:

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0.$$

Докази теорема 1.3 и 1.4 могу се наћи у [2].

1.2 Субдиференцијабилност

Многе познате методе оптимизације (нпр. метода најбржег спуста, метода конјугованих градијената) захтевају диференцијабилност функције коју треба оптимизовати. Међутим, у пракси се често дешава да функција не испуњава овај услов. На пример, апсолутна вредност функције, $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, као и њена проширена верзија у \mathbb{R}^n , односно l_1 норма, $f(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ нису диференцијабилне на целом свом домену. У циљу превазилажења овог проблема, уведена су проширења појма диференцијала и градијента, што доприноси развоју метода за оптимизацију нове класе функција.

Дефиниција 1.17. Нека је дата функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}^n$ и $x \in C$. Тада:

(1) Вектор $g \in \mathbb{R}^n$ је субградијент функције f у тачки x ако за све $y \in C$ важи:

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, g \rangle.$$

(2) Скуп свих субградијената функције f у тачки x се зове субдиференцијал функције f у тачки x и означава се са $\partial f(x)$.

(3) Функција f је субдиференцијабилна у тачки x ако је $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Из дефиниције субградијента следи да за свако $g \in \partial f(x)$, график афине функције дате са: $y \rightarrow f(x) + \langle y - x, g \rangle$ лежи испод графика функције f и додирује f у тачки $(x, f(x))$.

Слична интерпретација важи за конвексне диференцијабилне функције (теорема 1.3) и испоставља се да су појмови субдиференцијабилности и конвексности веома блиски.

Теорема 1.5. Нека је $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $C \subset \mathbb{R}^n$ и x_0 тачка из релативне унутрашњости скупа C . Тада је функција f субдиференцијабилна у тачки x_0 .

Теорема 1.6. Функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна ако и само ако је субдиференцијабилна на \mathbb{R}^n .

Докази теорема (1.5) и (1.6) могу се наћи у [1].

Да би субградијент функције постојао у некој тачки, функција не мора

бити диференцијабилна у тој тачки. Такође, ако субградијент функције постоји у некој тачки, не мора бити јединствен.

Пример 1. Нека је дата функција норме, индуковане скаларним производом на \mathbb{R}^n , у ознаци $f(x) = \|x\|$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ова функција није диференцијабилна у 0. Нека је ϕ угао између вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тада је субдиференцијал функције норме у 0 једнак:

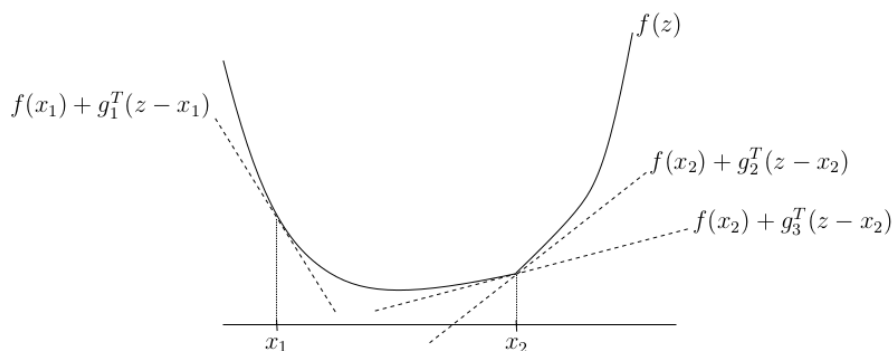
$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n : (\forall x \in \mathbb{R}^n) \|x\| \geq \langle x, x_0 \rangle\} \\ &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 1 \geq \|x_0\| \cos \phi\} \\ &= K[0, 1]. \end{aligned}$$

Под одређеним условима, субградијент у некој тачки је јединствено одређен и поклапа се са градијентом у истој тој тачки.

Теорема 1.7. Нека је $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $C \subset \mathbb{R}^n$, диференцијабилна у тачки x_0 која припада унутрашњости скупа C . Тада је: $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Доказ теореме 1.7 може се наћи у [1].

На слици 2 је представљена конвексна функција f и њени субградијенти у различитим тачкама. Функција f је диференцијабилна у тачки x_1 , па је на основу теореме 1.7 њен субградијент g_1 у тачки x_1 јединствено одређен и представља градијент функције f у тачки x_1 . У тачки x_2 функција f није диференцијабилна, па функција у овој тачки нема јединствено одређен субградијент. На слици 2 су представљени субградијенти функције f у тачки x_2 , означени са g_2 и g_3 .



Слика 2: Субградијент функције

У једноставнијим случајевима, за одређивање субдиференцијала је довољно применити дефиницију. У компликованијим случајевима, у литератури је предложено неколико правила која олакшавају његово израчунавање.

Теорема 1.8. (1) *Правило сабирања:* Нека су $f_1 : C \rightarrow \mathbb{R}$ и $f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ конвексне функције дефинисане редом на конвексним скуповима C и D у \mathbb{R}^n за које је $\text{relint } C \cap \text{relint } D \neq \emptyset$. Тада за свако $x \in C \cap D$ важи:

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

(2) *Множење скаларом:* Нека је $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу C у \mathbb{R}^n и $\lambda > 0$. Тада важи:

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

(3) *Афина трансформација:* Нека је $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу C у \mathbb{R}^n , $U \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$. Ако је $g(x) = f(Ux + v)$, тада важи:

$$\partial g(x) = U^T \partial f(Ux + v).$$

(4) *Правило максимума:* Нека је $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$, где су f_i , $i = 1, \dots, m$ конвексне функције и $I(x) = \{i \mid f_i(x) = f(x)\}$ скуп индекса који одговара активним f_i функцијама. Тада важи:

$$\partial f(x) = \text{conv}\{\partial f_i(x) \mid i \in I(x)\}.$$

Доказ теореме 1.8 може се наћи у [3].

Пример 2. Нека је дата функција l_1 норме, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$. Користећи следећу репрезентацију ове функције:

$$\|x\|_1 = \max\{s^T x \mid s_i \in \{-1, 1\}\},$$

где је $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$, могуће је применити (4) из теореме 1.8. Прво, потребно је пронаћи одговарајуће $s \in \{-1, 1\}^n$ за које важи $s^T x = \|x\|_1$, а то се може постићи одабиром $s_i = 1$ за $x_i > 0$, $s_i = -1$ за $x_i < 0$ и $s_i \in \{-1, 1\}$ за $x_i = 0$. Функција $\phi_s(x) = s^T x$ је диференцијабилна и има јединствени субградијент s . Користећи адекватан избор координатних

вектора g_i :

$$g_i = \begin{cases} 1 & , x_i > 0 \\ -1 & , x_i < 0 \\ \pm 1 & , x_i = 0, \end{cases}$$

закључује се да је субградијент функције l_1 норме конвексни омотач свих оних вектора g чије координате задовољавају горе наведене услове, односно:

$$\partial f(x) = \{g \mid \|g\|_\infty \leq 1, g^T x = \|x\|_1\}.$$

Појам субдиференцијабилности је посебно значајан при одређивању услова под којима постоји минимум конвексне функције која није обавезно диференцијабилна.

Теорема 1.9. *Нека је дата конвексна функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тада функција f достиже минимум у тачки x^* ако и само ако важи $0 \in \partial f(x^*)$.*

Доказ. На основу дефиниције субградијента за свако $y \in \mathbb{R}^n$ важи еквиваленција:

$$f(y) \geq f(x^*) + 0^T(y - x^*) \iff 0 \in \partial f(x^*).$$

□

1.3 Јака конвексност

У проблемима математичке оптимизације је често пожељно да функција циља буде јако конвексна. Осим што ово својство гарантује постојање само једног оптимума, може се показати да је и тачка у којој се тај оптимум достиже јединствена. Такође, особина јаке конвексности значајно доприноси бржем проналажењу оптимума код метода оптимизације првог реда.

Дефиниција 1.18. *Функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ је јако конвексна ако је конвексна и ако постоји $\alpha > 0$ такво да за све $x, y \in \text{dom}(f)$ и $g \in \partial f(x)$ важи:*

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, g \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2.$$

Теорема 1.10. *Нека је дата јако конвексна функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Тада за произвољне $\lambda \in [0, 1]$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2}\alpha \|y - x\|^2. \quad (1.5)$$

Доказ. Нека је $g \in \partial f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тада на основу дефиниције 1.18 важе следеће неједнакости:

$$f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda \langle x - y, g \rangle + \frac{\alpha}{2}\lambda^2 \|y - x\|^2, \quad (1.6)$$

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \lambda)\langle x - y, g \rangle + \frac{\alpha}{2}(1 - \lambda)^2 \|y - x\|^2. \quad (1.7)$$

Након сабирања помножених неједнакости (1.6) са $1 - \lambda$ и (1.7) са λ , добија се неједнакост (1.5). \square

Услов за постојање минимума конвексне функције дат у теорему 1.9 може се генерализовати за јако конвексне функције. Нека су $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ јако конвексна, субдиференцијална функција у x и $g \in \partial f(x)$. Тада важи:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq \langle y - x, g \rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2 \\ &\geq \min_{t>0} \left\{ -t\|g\| + \frac{t^2\alpha}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\|g\|^2. \end{aligned}$$

Специјално, ако се минимум функције f достиже у тачки x^* , тада важи:

$$f(x^*) \geq f(x) - \frac{1}{2\alpha}\|g\|^2, \quad (1.8)$$

одакле следи:

$$\|g\| \leq (2\alpha\varepsilon)^{1/2} \implies f(x) - f(x^*) \leq \varepsilon,$$

односно, ако је субградијент у некој тачки близак нули, тада је та тачка блиска тачки у којој се достиже минимум посматране функције.

Теорема 1.11. *Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ јако конвексна функција. Тада постоји минимум функције f и тачка у којој се тај минимум достиже је јединствена.*

Доказ. Нека су $x, y \in \mathbb{R}^n$ и g субградијент функције f у x . На основу

(1.8) следи да је f ограничена одоздо и да постоји $f^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < +\infty$. Тада постоји низ реалних бројева (x_n) такав да $f(x_n) \rightarrow f^*$, када $n \rightarrow +\infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ и $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ довољно велико да $f(x_i) \leq f^* + \varepsilon$ за све $i \geq N_\varepsilon$. Користећи неједнакост (1.5) за $\lambda = \frac{1}{2}$ и $i, j \geq N_\varepsilon$ добија се:

$$\begin{aligned} f^* \leq f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) &\leq \frac{f(x_i) + f(x_j)}{2} - \frac{\alpha}{8} \|x_i - x_j\|^2 \\ &\leq f^* + \varepsilon - \frac{\alpha}{8} \|x_i - x_j\|^2, \end{aligned}$$

а одавде :

$$\|x_i - x_j\| \leq \sqrt{\frac{8\varepsilon}{\alpha}},$$

што значи да је (x_n) Кошијев низ. Како је \mathbb{R}^n комплетан метрички простор, постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Даље, нека је g субградијент функције f у x^* . Тада важи:

$$f(x_i) \geq f(x^*) - \|g\| \|x_i - x^*\| + \frac{\alpha}{2} \|x_i - x^*\|^2. \quad (1.9)$$

Користећи $f(x_i) \rightarrow f^*$ и $\|x_i - x^*\| \rightarrow 0$ када $i \rightarrow +\infty$, из неједнакости (1.9) следи да $f(x^*) \leq f^*$. Пошто већ важи да $f(x^*) \geq f^*$, следи да је $f(x^*) = f^*$, чиме је показано да постоји тачка x^* у којој се достиже минимум.

Коначно, ако би постојао $x^{**} \neq x^*$ у којем се такође достиже минимум функције f , тада би низ $x^*, x^{**}, x^*, x^{**}, \dots$ био Кошијев (јер је претходно показано да важи за општији случај). Одатле би следило да $x^* = x^{**}$. Дакле, тачка минимума функције f је јединствена. \square

Теорема 1.12. Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ јако конвексна и $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ конвексна функција. Тада је функција $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ дефинисана са $h = f + g$ јако конвексна.

Доказ. На основу претпоставки о функцијама f и g и теореме 1.3, постоји $\alpha > 0$ тако да за све $x, y \in \mathbb{R}^n, a \in \partial f(x)$ и $b \in \partial g(x)$ важи:

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, a \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2,$$

$$g(y) \geq g(x) + \langle y - x, b \rangle.$$

Сабирањем ових неједнакости добија се:

$$h(y) \geq h(x) + \langle y - x, a + b \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2.$$

На основу (1) из теореме 1.8, следи да $a + b \in \partial h(x)$, што значи да је h јако конвексна функција. \square

1.4 Проксимални оператори

Дефиниција 1.19. Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ права, затворена, конвексна функција. Проксимални оператор функције f , у ознаци $prox_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ се дефинише на следећи начин:

$$prox_f(v) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(f(x) + \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2 \right). \quad (1.10)$$

Често ће бити потребно да се одреди проксимални оператор скалиране функције λf , где је $\lambda > 0$:

$$prox_{\lambda f}(v) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|_2^2 \right). \quad (1.11)$$

Оператор дефинисан изразом (1.11) у литератури је познат под називом проксимални оператор функције f са параметром λ .

Из дефиниције се може приметити да се помоћу проксималног оператора проналази она тачка која представља компромисно решење између проблема проналажења минимума функције f и тачке најближе задатој тачки v . Посебно, ако би био посматран проксимални оператор са параметром λ , улога параметра би била да контролише колико се тежине придаје сваком од ова два услова. Прецизније, што је већа вредност параметра λ , решење би било ближе минимуму функције, а у супротном ближе задатој тачки v . Како је норма јако конвексна функција и f је по услову конвексна, на основу теореме 1.12 следи да је $f(x) + (1/2) \|x - v\|_2^2$ јако конвексна функција. Стога на основу теореме 1.11 следи да је проксимални оператор коректно дефинисан.

Следећи пример показује да проксимални оператор генерализује ортогонални оператор пројекције.

Пример 3. Нека је $C \in \mathbb{R}^n$ затворен, непразан, конвексан скуп и нека је $I_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ индикатор функција скупа C дефинисана на следећи начин:

$$I_c(x) = \begin{cases} 0 & , x \in C \\ +\infty & , x \notin C. \end{cases}$$

Проксимални оператор функције I_c представља пројекцију на skup C , односно:

$$\begin{aligned} \text{prox}_{I_c}(v) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \begin{cases} \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases} \\ &= \arg \min_{x \in C} \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2 \\ &= P_c(v). \end{aligned}$$

Као што је већ поменуто, проксимални оператор се може одредити и за функције које нису диференцијабилне.

Пример 4. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, дефинисана са $f(x) = |x|$. Тада на основу дефиниције 1.19 важи:

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \phi(x),$$

где је:

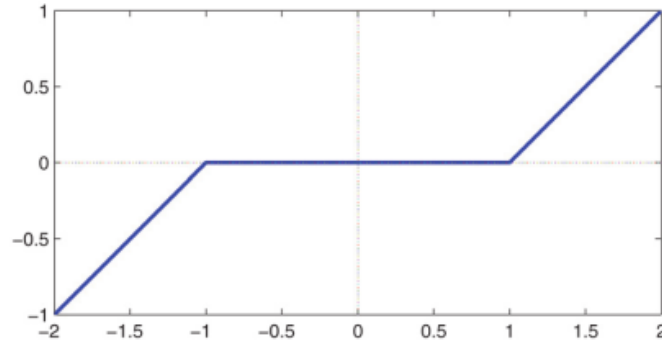
$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) \equiv x + \frac{1}{2\lambda}(x - v)^2, & x > 0 \\ \phi_2(x) \equiv -x + \frac{1}{2\lambda}(x - v)^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Ако се минимум функције $\phi(x)$ достиже у $x > 0$, тада је $\phi_1'(x) = 1 + \frac{1}{\lambda}(x - v) = 0$, односно $x = v - \lambda$. Стога, за $v > \lambda$ важи: $\text{prox}_{\lambda f}(v) = v - \lambda$. На исти начин се може показати да је $\text{prox}_{\lambda f}(v) = v + \lambda$ за $v < -\lambda$. Ако је $|v| \leq \lambda$, тада се минимум функције ϕ достиже у тачки у којој она није диференцијабилна, односно у $x = 0$. Коначно следи:

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \begin{cases} v - \lambda & , v \geq \lambda \\ 0 & , |v| \leq \lambda \\ v + \lambda & , v \leq -\lambda. \end{cases}$$

Ова функција је позната у литератури као меко одсецање (енгл. *soft thresholding*). На слици 3 је приказана функција меког одсецања за вред-

ност параметра $\lambda = 1$.



Слика 3: Функција меког одсецања

У претходним примерима проксимални оператори су се могли израчунати директном применом дефиниције. У компликованијим случајевима од користи ће бити следећа теорема:

Теорема 1.13. *Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ права, затворена и конвексна функција, $\lambda > 0$ и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тада се одговарајући проксимални оператори могу представити на следеће начине, у зависности од форме функције f :*

(1) *Сепарабилне функције: Ако се f може представити као $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, тада важи:*

$$(\text{prox}_f(v))_i = \text{prox}_{f_i}(v_i).$$

(2) *Скалирање и транслација: Ако се f може представити као $f(x) = \phi(\alpha x + b)$, где је $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $\alpha \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$, тада важи:*

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \frac{1}{\alpha}(\text{prox}_{\alpha^2 \phi}(\alpha v + b) - b).$$

(3) *Композиција са афиним пресликавањем: Ако се f може представити као $f(x) = \phi(Qx)$, где је Q ортогонална матрица ($Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $Q^T Q = Q Q^T = I$) и $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, тада важи:*

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = Q^T \text{prox}_{\lambda \phi}(Qv).$$

(4) *Квадратна пертурбација: Ако се f може представити као $f(x) = \phi(x) +$*

$\frac{c}{2}\|x\|^2 + a^T x + b$, где је $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $c > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, тада важи:

$$\text{prox}_f(x) = \text{prox}_{\frac{1}{c+1}\phi}\left(\frac{x-a}{c+1}\right).$$

Пример 5. Нека је функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ дефинисана на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} -\lambda \sum_{j=1}^n \log(x_j), & x > 0 \\ \infty, & x \leq 0, \end{cases}$$

где је $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$. Тада је $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi(x_i)$, где је:

$$\phi(t) = \begin{cases} -\lambda \log(t), & t > 0 \\ \infty, & t \leq 0. \end{cases}$$

Вредност проксималног оператора $\text{prox}_\phi(s)$ представља тачку у којој се достиже минимум функције $\phi_1(x) = -\lambda \log(x) + \frac{1}{2}(x-s)^2$, односно:

$$\text{prox}_\phi(s) = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Како f јесте сепарабилна то на основу (1) из теореме 1.13 следи:

$$(\text{prox}_f(x))_j = (\text{prox}_\phi(x_j)) = \left(\frac{x_j + \sqrt{x_j^2 + 4\lambda}}{2} \right),$$

где $j = 1, \dots, n$.

1.5 Конјуговане функције

У циљу детаљнијег испитивања карактеристика дате функције, понекад је корисно придружити посматраној функцији нову функцију која ће дати додатне информације о особинама полазне функције. Једна таква придружена функција је такозвана конјугована функција.

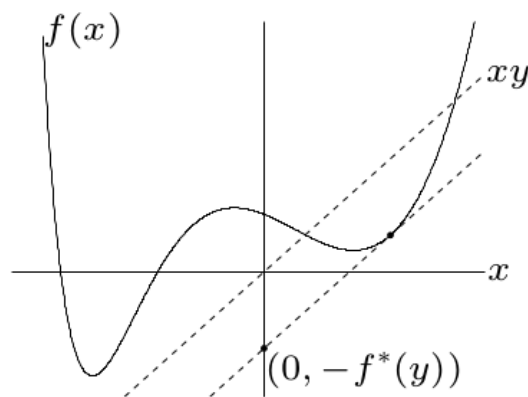
Дефиниција 1.20. Нека је задата функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, где је $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Тада се функцији f може придружити конјугована функција $f^* : D \rightarrow \mathbb{R}$ која се

дефинише на следећи начин:

$$f^*(y) = \sup_{x \in C} (\langle x, y \rangle - f(x)),$$

где је $D \subseteq \mathbb{R}^n$ скуп тачака на којем је овај супремум коначан.

На слици 4 је илустрована геометријска интерпретација конјуговане функције f . Наиме, конјугована функција говори о растојању између неке праве са задатим правцем и тангенте на посматрану функцију која је паралелна задатој правој.



Слика 4: Геометријска интерпретација конјуговане функције

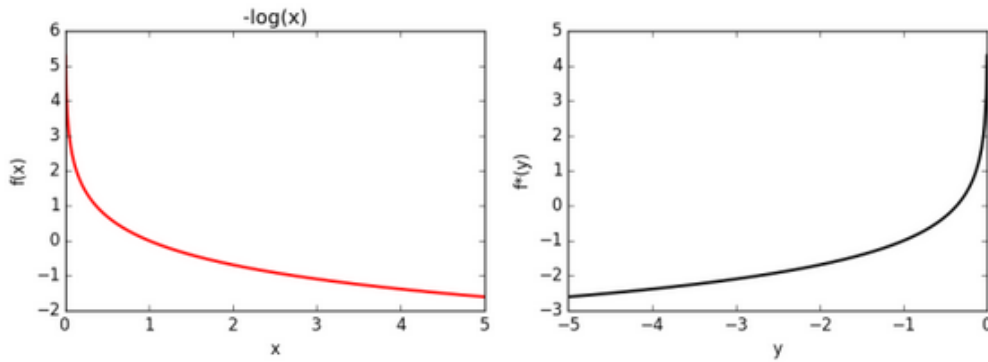
Пример 6. Нека је дата функција $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\log x$. Тада је

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (yx + \log x).$$

У случају $y > 0$, вредност израза $\sup(yx + \log x)$ конвергира ка $+\infty$ када x конвергира ка $+\infty$. У том случају, конјугована функција f^* није коректно дефинисана. Када је $y < 0$, диференцирањем функције $\phi(x) = yx + \log x$ и изједначавањем $\phi(x)$ са 0, следи да се њена највећа вредност достиже у $-\frac{1}{x}$. Након замене $x = -\frac{1}{y}$ у $\phi(x)$, коначно следи:

$$f^*(y) = -1 - \log(-y).$$

На слици 5 су представљене функција $f(x) = -\log(x)$ и одговарајућа конјугована функција $f^*(y) = -1 - \log(-y)$.



Слика 5: Функција $-\log(x)$ и одговарајућа конјугована функција

Теорема 1.14. Свака конјугована функција је затворена и конвексна.

Теорема 1.15. Нека је дата затворена, јако конвексна функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, где је $C \in \mathbb{R}^n$. Тада је одговарајућа конјугована функција f^* глатка.

Докази теорема (1.14) и (1.15) могу се наћи у [1].

Дефиниција 1.21. Нека је задата функција $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, где је $C \in \mathbb{R}^n$. Тада се други конјугат функције f , у ознаци f^{**} дефинише на следећи начин:

$$f^{**}(y) = \sup_{x \in \text{dom}(f^*)} (\langle x, y \rangle - f^*(x)).$$

Теорема 1.16. Нека је $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ затворена и конвексна функција на затвореном конвексном скупу C у \mathbb{R}^n . Тада је $f^{**} = f$.

У случају првог конјугата, може се показати да је $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ једина функција за коју важи да је $f = f^*$. Међутим, на основу теореме 1.16 постоји више од једне функције које се поклапају са својим другим конјугатом, нпр. $f(x) = -\log(1 - x^2)$, $|x| < 1$.

1.6 Мореов омотач

Дефиниција 1.22. Нека су $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ праве, затворене конвексне функције. Тада се инфимална конволуција функција f и g , у ознаци $f \square g$ дефинише као:

$$(f \square g)(x) = \inf_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n} \{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\},$$

и притом важи да је $\text{dom}(f \square g) = \text{dom}(f) \cup \text{dom}(g)$.

Дефиниција 1.23. Мореов омотач функције f (енгл. Moreau envelope) представља инфималну конволуцију функција f и $\frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, односно:

$$M_f(v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2}\|x - v\|_2^2 \right\}. \quad (1.12)$$

Дефиниција 1.24. Мореов омотач функције f са параметром λ се дефинише на следећи начин:

$$M_{\lambda f}(v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x - v\|_2^2 \right\}. \quad (1.13)$$

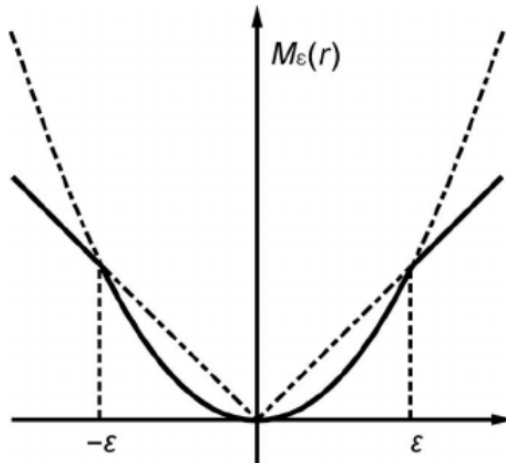
Израчунавањем проксималног оператора се заправо одређује јединствена тачка у којој се достиже инфимум дефинисан Мореовим омотачем, односно:

$$M_f(x) = f(\text{prox}_f(x)) + \frac{1}{2}\|x - \text{prox}_f(x)\|_2^2. \quad (1.14)$$

Пример 7. Нека је задата функција $f(x) = |x|$. Тада је Мореов омотач функције f дат са:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}|x|^2 & , |x| \leq \lambda \\ |x| - \frac{\lambda}{2} & , |x| > \lambda. \end{cases}$$

Ова функција је у литератури позната и под називом Хуберова функција и приказана је на слици 6.



Слика 6: Хуберова функција

Теорема 1.17. Нека су $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ праве, затворене конвексне

функције. Тада важи:

$$(f \square g)^* = f^* + g^*.$$

Доказ. Нека је $h = f \square g$, $\text{dom}(h) = \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$. Користећи чињеницу $\inf f(x) = -\sup(-f(x))$ за $x \in \mathbb{R}^n$, следи да за свако $y \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$\begin{aligned} h^*(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, y \rangle - \inf_{x_1+x_2=x} \{ f(x_1) + g(x_2) \} \} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, y \rangle + \sup_{x_1+x_2=x} \{ -f(x_1) - g(x_2) \} \} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{x_1+x_2=x} \{ \langle x, y \rangle - f(x_1) - g(x_2) \} \\ &= \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle - f(x_1) - g(x_2) \} \\ &= \sup_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x_1, y \rangle - f(x_1) \} + \sup_{x_2 \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x_2, y \rangle - g(x_2) \} \\ &= f^*(y) + g^*(y). \end{aligned}$$

□

Теорема 1.18. Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ права, затворена конвексна функција и $x, x^* \in \mathbb{R}^n$. Тада важи:

(1) Градијент одговарајућег Мореевог омотача увек постоји и може се одредити на следећи начин:

$$\nabla M_{\lambda f}(x) = \frac{1}{\lambda}(x - \text{prox}_{\lambda f}(x)). \quad (1.15)$$

(2) У тачки $x^* \in \mathbb{R}^n$ се достиже минимум функције f ако и само ако је уједно и непокретна тачка одговарајућег проксималног оператора $\text{prox}_{\lambda f}$, односно $x^* = \text{prox}_{\lambda f}(x^*)$.

(3) Варијациона неједнакост:

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle + \lambda f(x^*) - \lambda f(y) \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

је еквивалентна са: $x^* = \text{prox}_{\lambda f}(x)$.

(4) Скупови тачака у којима се достиже минимум функција f и $M_{\lambda f}$ се поклапају.

Више детаља о особинама Мореевог омотача, као и доказ претходне теореме може се наћи у [5], [8], [16].

Теорема 1.19. Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ права, затворена, конвексна

функција. Тада је Мореов омотач функције f (у смислу дефиниције 1.12) глатка функција.

Доказ. Користећи интерпретацију (1.14), може се показати да је M_f затворена и конвексна функција. На основу теореме 1.16 важи $M_f^{**} = M_f$. Сада користећи ове последице, као и чињенице да је функција $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ једнака свом првом конјугату и израчунавањем другог конјугата функције M_f следи:

$$M_f = \left(f^* + \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2 \right)^*.$$

На основу теореме 1.14, f^* је конвексна функција. Норма је јако конвексна па на основу теореме 1.12 важи да је функција $f^* + \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$ јако конвексна. Свака конјугована функција је и затворена (теорема 1.14), па на основу теореме 1.15, следи да је M_f глатка функција. \square

На основу теореме 1.19, функција Мореовог омотача M_f може бити посматрана као глатка апроксимација функције f без обзира да ли је f уопште и диференцијабилна. На основу теореме 1.18, скупови тачака у којима се достиже минимум функција f и M_f су идентични. У неким ситуацијама, може бити тешко одредити M_f , али чињеница да је M_f глатка обезбеђује да се проблем оптимизације функције M_f често може лакше решити него проблем оптимизације саме функције f .

1.7 Резолвента оператора субдиференцијала

Веза између проксималног оператора и оператора субдиференцијала дата је следећом теоремом:

Теорема 1.20. *Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ права, затворена, конвексна функција. Тада важи:*

$$\text{prox}_{\lambda f} = (I + \lambda \partial f)^{-1}. \quad (1.17)$$

Пресликавање на десној страни једнакости (1.17) назива се резолвента оператора ∂f са параметром λ .

Доказ. Нека је $z \in (I + \lambda \partial f)^{-1}(x)$. Тада важи: $x \in (I + \lambda \partial f)(z)$, односно:

$$0 \in \partial f(z) + \frac{1}{\lambda}(z - x),$$

што је еквивалентно са:

$$0 \in \partial(f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2).$$

На основу теореме 1.9 ово је неопходан и довољан услов за постојање минимума јако конвексне функције $f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2$ у јединственој тачки z , односно:

$$z = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left(f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|_2^2 \right).$$

Стога, $z \in (I + \lambda\partial f)^{-1}(x)$ ако и само ако $z = \text{prox}_{\lambda f}(x)$. \square

Једна од директних последица теореме 1.20 је следећа. Иако ∂f није функција (субдиференцијал у некој тачки може узимати више различитих вредности), резолвента оператора субдиференцијала јесте функција, при чему се $(I + \lambda\partial f)^{-1}$ слика у само једну тачку.

Специјално, ако је f два пута диференцијабилна, развијањем десне стране једнакости (1.17) у Тејлоров ред следи:

$$\text{prox}_{\lambda f}(x) = (I + \lambda\partial f)^{-1}(x) = x - \lambda \nabla f(x) + o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Одавде следи да се за мало λ , $\text{prox}_{\lambda f}$ може интерпретирати као апроксимација итеративног корака у методи градијентног спушта при минимизацији функције f .

Пример 8. Нека је f индикатор функција конвексног скупа C , у ознаци I_C . Може се показати да је субдиференцијал ове функције једнак нормалном конусу који одговара конвексном скупу C :

$$N_C(x) = \begin{cases} \emptyset & , x \notin C \\ \{w \mid w^T(z - x) \leq 0, \forall z \in C\} & , x \in C. \end{cases}$$

Тада користећи пример (3), резолвента која одговара нормалном конусу конвексног скупа C је једнака:

$$(I + \lambda\partial I_C)^{-1}(x) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left(I_C(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|_2^2 \right) = P_C(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

односно ортогоналној пројекцији на конвексни скуп C .

2 Конвергенција проксималних оператора

Дефиниција 2.1. Оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ је контракција ако је Липшиц-непрекидан са Липшицовом константом $L < 1$, односно постоји норма $\|\cdot\|$ на \mathbb{R}^n тако да за све $x, y \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Теорема 2.1. (Банахова теорема о непокретној тачки) Нека је (X, d) комплетан метрички простор, M непразан и затворен подскуп од X и $F : M \rightarrow M$ контракција над M . Тада постоји јединствена непокретна тачка x^* пресликавања F и важи да низ (x_n) одређен рекурентном формулом $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ конвергира ка x^* , где је x_0 произвољан елемент из M .

Резултати о егзистенцији непокретне тачке неког пресликавања датог скупа у самом себе се често примењују у многим математичким дисциплинама. Наиме, многи проблеми проналажења решења једначина одређеног типа могу се формулисати као проблеми одређивања непокретних тачака одговарајућих придружених функција. Банахова теорема о непокретној тачки је једна од најчешће примењиваних теорема у оваквим проблемима. Она гарантује постојање и јединственост непокретне тачке посматране функције, али и конструктивни метод за проналажење те непокретне тачке. Међутим, Банахова теорема (теорема 2.1) захтева да посматрана функција буде контракција. Испоставља се да проксимални оператори не задовољавају услове Банахове теореме. У овом делу рада биће представљена класа оператора којој проксимални оператори припадају. Такође биће представљене теореме чији резултати дају конструктиван метод за проналажење фиксних тачака проксималних оператора. Више детаља се може пронаћи у [5], [10].

2.1 Неекспанзивни оператори

Дефиниција 2.2. Оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ је неекспанзиван ако постоји норма $\|\cdot\|$ на \mathbb{R}^n тако да за све $x, y \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Дефиниција 2.3. Оператор $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ је чврсто неекспанзиван ако за све $x, y \in \mathbb{R}^n$ важи један од следећа два еквивалентна услова:

$$\|F(x) - F(y)\|_2^2 \leq \langle x - y, F(x) - F(y) \rangle, \quad (2.1)$$

$$\|F(x) - F(y)\|_2^2 \leq \|x - y\|_2^2 - \|(I - F)(x) - (I - F)(y)\|_2^2. \quad (2.2)$$

Теорема 2.2. Сваки чврсто неекспанзиван оператор је неекспанзиван оператор.

Доказ. Користећи неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског (теорема 1.1) следи:

$$\|F(x) - F(y)\|_2^2 \leq \langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \leq \|x - y\|_2 \|F(x) - F(y)\|_2,$$

а одавде се добија: $\|F(x) - F(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$. □

Теорема 2.3. Нека је дата конвексна, права, затворена функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тада одговарајући проксимални оператор $\text{prox}_{\lambda f}$ за $\lambda > 0$ припада класи чврсто неекспанзивних оператора.

Доказ. Користећи варијациону неједнакост (1.16) из теореме 1.18 и замењујући y са $\text{prox}_{\lambda f}(y)$ и x^* са $\text{prox}_{\lambda f}(x)$ добија се:

$$\langle \text{prox}_{\lambda f}(x) - x, \text{prox}_{\lambda f}(x) - \text{prox}_{\lambda f}(y) \rangle + \lambda f(\text{prox}_{\lambda f}(x)) - \lambda f(\text{prox}_{\lambda f}(y)) \leq 0. \quad (2.3)$$

Нека је $y^* = \text{prox}_{\lambda f}(y)$. Тада за свако $x \in \mathbb{R}^n$ на основу теореме 1.18, важи следећа варијациона неједнакост:

$$\langle y - \text{prox}_{\lambda f}(y), x - \text{prox}_{\lambda f}(y) \rangle + \lambda f(\text{prox}_{\lambda f}(y)) - \lambda f(x) \leq 0. \quad (2.4)$$

Замењујући x са $\text{prox}_{\lambda f}(x)$ у (2.4) следи:

$$\langle \text{prox}_{\lambda f}(y) - y, \text{prox}_{\lambda f}(y) - \text{prox}_{\lambda f}(x) \rangle + \lambda f(\text{prox}_{\lambda f}(y)) - \lambda f(\text{prox}_{\lambda f}(x)) \leq 0. \quad (2.5)$$

Сабирањем неједнакости (2.3) и (2.5) добија се:

$$\langle \text{prox}_{\lambda f}(x) - \text{prox}_{\lambda f}(x) - (x - y), \text{prox}_{\lambda f}(x) - \text{prox}_{\lambda f}(y) \rangle,$$

односно након сређивања:

$$\|prox_{\lambda f}(x) - prox_{\lambda f}(y)\|_2^2 \leq \langle x - y, prox_{\lambda f}(x) - prox_{\lambda f}(y) \rangle,$$

што према дефиницији 2.3 значи да проксимални оператор $prox_{\lambda f}$ припада класи чврсто неекспанзивних оператора. \square

2.2 Упросечени оператори

Дефиниција 2.4. Оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ је *упросечен* ако постоји неекспанзиван оператор $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и константа $\alpha \in (0, 1)$, такав да је $F = \alpha I + (1 - \alpha)R$.

Може се показати да за операторе F и R из дефиниције 2.4 важи да се њихови скупови непокретних тачака поклапају:

$$\begin{aligned} F(x) = x &\iff \alpha x + (1 - \alpha)R(x) = x \\ &\iff (1 - \alpha)R(x) = (1 - \alpha)x \\ &\iff R(x) = x. \end{aligned}$$

Веза између контракција, упросечених, неекспанзивних и чврсто неекспанзивних оператора је дата у следећој теорему:

Теорема 2.4. Нека је дат оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тада важи:

- (1) Ако је оператор F упросечен, онда је и неекспанзиван.
- (2) Ако је оператор F контракција са Липшицовом константом $L < 1$, тада је F такође упросечен оператор којем одговара параметар $\alpha \in (0, \frac{L-1}{2}]$.
- (3) Оператор F је чврсто неекспанзиван ако и само ако је упросечен оператор којем одговара параметар $\alpha = \frac{1}{2}$.

Доказ. (1) Нека је оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ упросечен. Према дефиницији 2.4, F се може представити као $F = \alpha I + (1 - \alpha)R$, где је $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ неекспанзиван оператор и $\alpha \in (0, 1)$. Тада важи:

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_2 &= \|\alpha x + (1 - \alpha)R(x) - \alpha y - (1 - \alpha)R(y)\|_2 \\ &\leq \alpha \|x - y\|_2 + (1 - \alpha) \|R(x) - R(y)\|_2 \\ &\leq \alpha \|x - y\|_2 + (1 - \alpha) \|x - y\|_2 \\ &= \|x - y\|_2. \end{aligned}$$

(2) Нека је оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ контракција са Липшицовом константом $L < 1$ и нека је оператор $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ дефинисан на следећи начин: $R = \frac{1}{1-\alpha}(F - \alpha I)$. Тада важи:

$$\begin{aligned} \|R(x) - R(y)\|_2 &= \frac{1}{1-\alpha} \|(F - \alpha I)(x) - (F - \alpha I)(y)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \|F(x) - F(y)\|_2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x - y\|_2 \\ &\leq \frac{L + \alpha}{1-\alpha} \|x - y\|_2. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha \leq \frac{1-L}{2}$, тада је по дефиницији 2.2 оператор R неекспанзиван, па из дефиниције оператора R следи да је F упросечен оператор.

(3) Ако је оператор F упросечен са параметром $\alpha = \frac{1}{2}$, тада се F може представити помоћу одговарајућег неекспанзивног оператора R на следећи начин: $F = \frac{1}{2}(I + R)$, при чему је $R = 2F - I = F - (I - F)$. Тада користећи правило паралелограма (теорема 1.1) следи:

$$\begin{aligned} \|R(x) - R(y)\|_2^2 &= \|F(x) - F(y) - ((I - F)(x) - (I - F)(y))\|_2^2 \\ &= -\|x - y\|_2^2 + 2\|F(x) - F(y)\|_2^2 + 2\|((I - F)(x) - (I - F)(y))\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Након сређивања израза (2.6), добија се:

$$\begin{aligned} &\|x - y\|_2^2 - \|F(x) - F(y)\|_2^2 - \|((I - F)x - (I - F)y)\|_2^2 \\ &= \|F(x) - F(y)\|_2^2 + \|((I - F)x - (I - F)y)\|_2^2 - \|R(x) - R(y)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\|x - y\|_2^2 + \|R(x) - R(y)\|_2^2 \right) - \|R(x) - R(y)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\|x - y\|_2^2 - \|R(x) - R(y)\|_2^2 \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из једнакости (2.7) следи тражена еквиваленција. Наиме, ако је оператор R неекспанзиван, десна страна израза (2.7) је ненегативна, па је на основу услова (2.2) оператор F чврсто неекспанзиван. Са друге стране, ако је оператор F чврсто неекспанзиван, односно важи (2.2), тада је израз у последњој загради ненегативан па је сходно дефиницији оператора R неекспанзиван. \square

Теорема 2.5. *Ако су $F_1, F_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ упросечени оператори, тада је оператор $F_2 \circ F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такође упросечен.*

Доказ. Како су оператори F_1 и F_2 по претпоставци упросечени, постоје неекспанзивни оператори $R_1, R_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и параметри $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, такви да важи $F_1 = \alpha_1 I + (1 - \alpha_1)R_1$ и $F_2 = \alpha_2 I + (1 - \alpha_2)R_2$. Користећи ове репрезентације оператора F_1 и F_2 следи:

$$\begin{aligned} F_2(F_1(x)) &= \alpha_2 F_1(x) + (1 - \alpha_2)R_2(F_1(x)) \\ &= \alpha_2(\alpha_1 x + (1 - \alpha_1)R_1(x)) + (1 - \alpha_2)R_2(F_1(x)) \\ &= \alpha_2 \alpha_1 x + (\alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1)R_1(x) + (1 - \alpha_2)R_2(F_1(x)). \end{aligned}$$

Ако је $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, тада важи:

$$F_2(F_1(x)) = \alpha x + (1 - \alpha) \left(\frac{\alpha_2 - \alpha}{1 - \alpha} R_1(x) + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha} R_2(F_1(x)) \right).$$

Како су и композиција и конвексна комбинација два неекспанзивна оператора такође неекспанзивни оператори, тада је оператор $\frac{\alpha_2 - \alpha}{1 - \alpha} R_1(x) + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha} R_2(F_1(x))$ неекспанзиван, одакле се закључује да је и оператор $F_1 \circ F_2$ упросечен. \square

2.3 Асимптотски регуларни оператори

Дефиниција 2.5. Оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ је асимптотски регуларан ако за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (x_{r+1} - x_r) = 0,$$

где је низ (x_r) одређен рекурентном формулом: $x_{r+1} = F(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема 2.6. Нека је $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ упросечен оператор и нека је скуп непокретних тачака оператора F непразан. Тада је F асимптотски регуларан.

Доказ. Нека је $s \in \mathbb{R}^n$ непокретна тачка оператора F и нека је (x_r) низ одређен са $x_{r+1} = F(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, где је $x_0 \in \mathbb{R}^n$ произвољан вектор. На основу (1) из теореме 2.3, F је неекспанзиван оператор, па важи:

$$\|x_{r+1} - s\|_2 = \|F(x_r) - F(s)\|_2 \leq \|x_r - s\|_2,$$

одакле следи:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|x_r - s\|_2 = d \geq 0. \quad (2.8)$$

Како је по претпоставци теореме оператор F упросечен, он се може представити као: $F = \alpha I + (1 - \alpha)R$, где је $\alpha \in (0, 1)$ и R неекспанзиван оператор. Такође важи да се скуп непокретних тачака оператора F поклапа са скупом непокретних тачака оператора R , па је s такође непокретна тачка оператора R . Будући да је R неекспанзиван оператор, следи:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \|R(x_r) - s\|_2 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \|R(x_r) - R(s)\|_2 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|x_r - s\|_2 = d. \quad (2.9)$$

Под претпоставком да је:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|x_{r+1} - x_r\|_2 \neq 0, \quad (2.10)$$

постоји $(x_{r_l})_{l \in \mathbb{N}}$ такав да $\|x_{r_l+1} - x_{r_l}\|_2 \geq \varepsilon$, где је $\varepsilon > 0$. Сада, користећи (2.8), следи да је $(x_{r_l})_{l \in \mathbb{N}}$ ограничен и да постоји конвергентан подниз $(x_{r_{l_j}})_{j \in \mathbb{N}}$, односно:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x_{r_{l_j}} = a, \quad a \in S(s, d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - s\|_2 = d\}. \quad (2.11)$$

Како је R неекспанзиван оператор, он је и непрекидан. Користећи (2.9) следи:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R(x_{r_{l_j}}) = b, \quad b \in B(s, d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - s\|_2 \leq d\}. \quad (2.12)$$

Такође важи:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|x_{r_{l_j}+1} - x_{r_{l_j}}\|_2 = \|F(x_{r_{l_j}}) - x_{r_{l_j}}\|_2 \\ &= \|(\alpha - 1)x_{r_{l_j}} + (1 - \alpha)R(x_{r_{l_j}})\|_2. \end{aligned}$$

Пуштањем лимеса када $j \rightarrow +\infty$ са обе стране последње неједнакости и користећи (2.11) и (2.12) следи да $a \neq b$. Користећи непрекидност оператора F и (2.8) следи:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F(x_{r_{l_j}}) = c, \quad c \in S(s, d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - s\|_2 = d\}. \quad (2.13)$$

Користећи (2.11), (2.12) и строгу конвексност функције норме добија се:

$$\begin{aligned}
\|c - s\|_2 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|F(x_{r_{l_j}}) - s\|_2^2 \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \|\alpha(x_{r_{l_j}} - s) + (1 - \alpha)(R(x_{r_{l_j}}) - s)\|_2^2 \\
&= \|\alpha(a - s) + (1 - \alpha)(b - s)\|_2^2 \\
&< \alpha\|a - s\|_2^2 + (1 - \alpha)\|b - s\|_2^2 \leq d^2,
\end{aligned}$$

што је контрадикција са (2.13). Стога претпоставка (2.10) није добра, одакле се закључује да је оператор F асимптотски регуларан.

□

Теорема 2.7. *Нека је $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ неекспанзиван, асимптотски регуларан оператор који има бар једну непокретну тачку. Тада за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}^n$, низ (x_r) , дефинисан са $x_{r+1} = F(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ конвергира ка непокретној тачки оператора F .*

Доказ. Нека је s непокретна тачка оператора F . Због претпоставке да је F неекспанзиван оператор важи:

$$\|x_{r+1} - s\|_2 = \|F(x_r) - F(s)\|_2 \leq \|x_r - s\|_2.$$

Одавде следи да је низ (x_r) ограничен те постоји подниз $(x_{r_l})_{l \in \mathbb{N}}$ који конвергира ка некој тачки $t \in \mathbb{R}^n$. Из претпоставке теореме, F је асимптотски регуларан, па важи:

$$(F - I)(x_{r_l}) = x_{r_{l+1}} - x_{r_l} \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Како је F непрекидан, следи да је $(F - I)t = 0$, односно $F(t) = t$. Одавде се закључује да је t непокретна тачка оператора F и да низ (x_r) конвергира ка t .

□

Коначно, комбинујући резултате теорема 2.4, 2.6 и 2.7 следи главни резултат у овом делу рада, односно теорема која говори о конвергенцији упросеченог оператора ка непокретној тачки.

Теорема 2.8. Нека је $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ упросечен оператор и нека је скуп непокретних тачака оператора F непразан. Тада за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}^n$ важи да низ (x_r) , дефинисан са $x_{r+1} = F(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ конвергира ка непокретној тачки оператора F .

3 Проксимални алгоритми

У овом делу рада су изложени проксимални алгоритми. Централни проблем при примени проксималних алгоритама представља одређивање проксималног оператора. Иако на први поглед може деловати једноставно и увек применљиво, имплементирање проксималних алгоритама је могуће само у оним случајевима где се проксимални оператор посматране функције може експлицитно одредити.

3.1 Проксимални алгоритам минимизације

Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ права, затворена конвексна функција. Тада на основу (2) из теореме 1.18 следи да је тачка у којој се достиже минимум функције f непокретна тачка оператора $prox_{\lambda f}$. На основу теорема 2.3 и 2.4, $prox_{\lambda f}$ припада класи упросечених оператора. Стога, на основу теореме 2.8, следи да низ (x_{r+1}) дефинисан за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}^n$ са $x_{r+1} = prox_{\lambda f}(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, конвергира ка непокретној тачки оператора $prox_{\lambda f}$, односно минимуму функције f (ако постоји). Одговарајући алгоритам помоћу којег је генерисан низ (x_{r+1}) је познат као **проксимални алгоритам минимизације** (енгл. *proximal minimization algorithm*):

Алгоритам 1: Проксимални алгоритам минимизације

Улаз: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$

Итеративни r -ти корак: $x_{r+1} = prox_{\lambda f}(x_r)$

Критеријум заустављања: $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ или $r = k$

Излаз: x_{r+1}

Постоје различите верзије овог алгоритма зависно од одабира параметра λ . Чест приступ је да се у сваком итеративном кораку изабере λ^i , где је i редни број итеративног корака. Може се показати да је конвергенција гарантована ако је $\lambda^i > 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i = \infty$. Овај алгоритам је најчешће коришћен у домену нумеричке линеарне алгебре при решавању лоше условљених система једначина [4].

Постоји аналогија између проксималних алгоритама минимизације и решавања одређеног типа диференцијалних једначина. Наиме, проксимални алгоритам минимизације се може интерпретирати као дискретизовани метод за решавање одређеног типа диференцијалних једначина. У наставку рада следи преглед основних појмова из теорије диференцијал-

них једначина који ће бити неопходни за даљи рад. Више детаља се може пронаћи у [9].

Дефиниција 3.1. Нека је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп и нека је $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ векторско поље. Систем диференцијалних једначина је векторска једначина:

$$\frac{d}{dt}x(t) = V(x(t)), \quad (3.1)$$

где је $t \in I$ реална променљива, а $x(t)$ непозната вектор-функција.

Дефиниција 3.2. Нека је почетни услов у систему (3.1) вектор $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Трајекторија система (3.1) је крива $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ која пролази кроз x_0 и чији је тангентни вектор у свакој тачки једнак векторском пољу V .

Дефиниција 3.3. Стационарна тачка или еквилибријум система (3.1) је тачка x^* у којој је $V(x^*) = 0$.

Дефиниција 3.4. Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна, конвексна функција и нека је $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Систем диференцијалних једначина:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\nabla f(x(t)) \quad (3.2)$$

се назива градијентни проток функције f .

Како је функција f по претпоставци конвексна и диференцијабилна, стационарне тачке градијентног протока (3.2) су нуле градијента ∇f , односно тачке у којима се достиже минимум функције f . Градијентни проток се може посматрати и као непрекидна аналогија са методом градијентног спуста. Наиме, почевши од неког иницијалног вектора $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, решавањем система (3.2) проналази се трајекторија $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ за коју важи $f(x(t)) \rightarrow f^*$, где је f^* минимум функције f . Ова идеја се може генерализовати и на случај када конвексна функција f није диференцијабилна. У том случају, уместо градијентног протока, био би посматран следећи систем једначина:

$$\frac{d}{dt}x(t) \in -\partial f(x(t)).$$

Без умањења општости, даља дискусија ће бити ограничена на случај

када је f конвексна и диференцијабилна. Већина нумеричких метода за решавање система диференцијалних једначина заснована је на дискретизацији, односно одређивању приближних вредности решења у низу еквидистантних тачака. Нека је x^k ознака за апроксимацију трајекторије $x(t)$ система (3.2) у $t = kh$, где је $k = 1, 2, \dots$ и $h \in \mathbb{R}^n$ довољно мало у смислу норме да би се систем (3.2) могао дискретизовати. У том случају, систему (3.2) се може придружити систем једначина чије решење представља приближно решење почетног система (3.2) и задат је на следећи начин:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{h} = -\nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Прецизније, извод трајекторије $x(t)$ у $t = kh$ је замењен подељеном разликом унутар временског интервала $[kh, (k+1)h]$, односно:

$$\frac{d}{dt}x(t) \approx \frac{x((k+1)h) - x(kh)}{(k+1)h - kh}.$$

Овај метод је познат као експлицитни Ојлеров метод [19], а одговарајући алгоритам за решавање (3.3) је дат итеративно:

$$x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.4)$$

где је $x^0 \in \mathbb{R}^n$ произвољно и $h > 0$.

Алгоритмом (3.4) је управо дефинисан метод градијентног спуста. Стога овај метод се може интерпретирати и као експлицитни Ојлеров метод за решавање одређеног система диференцијалних једначина.

Имплицитни Ојлеров метод је заснован на дискретизацији:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{h} = -\nabla f(x^{k+1}), \quad (3.5)$$

где је извод трајекторије $x(t)$ у $t = (k+1)h$ замењен подељеном разликом унутар интервала $[kh, (k+1)h]$. Може се показати да овај метод даје бољу апроксимацију него експлицитни Ојлеров метод. Међутим, мана је што се итеративни корак за проналажење x^{k+1} не може експлицитно представити у зависности од x^k , односно дат је у следећој форми:

$$x^{k+1} + h\nabla f(x^{k+1}) = x^k. \quad (3.6)$$

Користећи теорему (1.20), следи да је (3.6) еквивалентно са:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{hf}(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.7)$$

где је $x^0 \in \mathbb{R}^n$ произвољно и $h > 0$.

Стога, проксимални алгоритам минимизације може бити и интерпретиран као имплицитни Ојлеров метод за решавање одговарајућег система диференцијалних једначина. Параметар λ у проксималном минимизирајућем алгоритму одговара дужини временског интервала h коришћеног у дискретизацији.

3.2 Проксимални градијентни алгоритам

Нека су $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ праве, затворене, конвексне функције, при чему је f диференцијабилна и има Липшиц-непрекидан градијент, односно за све $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $L > 0$ важи:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2. \quad (3.8)$$

Услов (3.8) за свако $x, a \in \mathbb{R}^n$ повлачи следећу неједнакост:

$$f(x) \leq \hat{f}_{L,a}(x), \quad (3.9)$$

где је:

$$\hat{f}_{L,a}(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \frac{L}{2}\|x - a\|_2^2. \quad (3.10)$$

Нека је дат следећи проблем:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + g(x)). \quad (3.11)$$

На основу теореме 1.9, x^* је решење проблема (3.11) ако и само ако важи:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial g(x^*), \quad (3.12)$$

односно:

$$x^* - \lambda \nabla f(x^*) \in x^* + \lambda \partial g(x^*). \quad (3.13)$$

Израз (3.13) је еквивалентан са:

$$x^* = (I + \lambda \partial g)^{-1}(x^* - \lambda \nabla f(x^*)). \quad (3.14)$$

Користећи интерпретацију проксималног оператора помоћу резолвенте субдиференцијалног оператора (теорема 1.20) следи:

$$x^* = \text{prox}_{\lambda g}(x^* - \lambda \nabla f(x^*)). \quad (3.15)$$

На основу (3.15), дефинисан је **проксимални градијентни алгоритам** (енгл. *proximal gradient algorithm*). Помоћу овог алгоритма може се генерисати низ (x_r) који конвергира ка решењу проблема (3.11). Важно је напоменути да постоји још један начин помоћу којег се може интерпретирати овај алгоритам. Наиме, користећи услов (3.9), може се дефинисати низ (x_r) помоћу произвољног $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma = \frac{1}{L}$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}(x) + g(x) \right) \\ &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2\gamma} \|x - x_r + \gamma \nabla f(x_r)\|^2 + g(x) \right) \\ &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \|x - (x_r - \gamma \nabla f(x_r))\|^2 + \gamma g(x) \right) \\ &= \text{prox}_{\gamma g}(x_r - \gamma \nabla f(x_r)), \end{aligned}$$

где је функција $\hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}(x)$ дефинисана помоћу (3.10). За довољно мало γ важи:

$$\begin{aligned} f(x_{r+1}) + g(x_{r+1}) &\leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}(x) + g(x) \right) \\ &\leq \hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}(x_r) + g(x_r) \\ &= f(x_r) + g(x_r), \end{aligned} \quad (3.16)$$

одакле следи да низ (x_r) конвергира ка решењу проблема (3.11). Стога, у свакој итерацији је потребно пажљиво бирати параметар $\gamma \in \mathbb{R}$ како би се обезбедила монотоност дефинисана изразом (3.16). Један од начина да се испуни услов (3.16) је да се у свакој итерацији r проверава да ли важи $f(x_{r+1}) \leq \hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}(x_{r+1})$. У случају да је овај услов испуњен, задржава се параметар γ из претходне итерације, а у супротном се смањује. Псеудокод проксималног градијентног алгоритма се може представити на

следећи начин:

Алгоритам 2: Проксимални градијентни алгоритам

Улаз: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$,
 $\beta \in (0, 1)$.

Итеративни r -ти корак:

1. $x_{r+1} = \text{prox}_{\gamma g}(x_r - \gamma \nabla f(x_r))$
2. Прекинути ако је: $f(x_{r+1}) \leq \hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}^{\wedge}(x_{r+1})$
3. $\gamma = \beta \gamma$

Критеријум заустављања: $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ или $r = k$

Излаз: x_{r+1}

Специјално, када је $f = 0$, проксимални градијентни алгоритам се своди на проксимални минимизирајући алгоритам, а у случају када је $g = 0$, своди се на методу градијентног спуста. У случају $g = I_C$, дефинисан је тзв. **пројектовани градијентни алгоритам** (енгл. *projected gradient algorithm*):

Алгоритам 3: Пројектовани градијентни алгоритам

Улаз: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $\beta \in (0, 1)$

Итеративни r -ти корак:

1. $x_{r+1} = P_C(x_r - \gamma \nabla f(x_r))$
2. Прекинути ако је: $f(x_{r+1}) \leq \hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}^{\wedge}(x_{r+1})$
3. $\gamma = \beta \gamma$

Критеријум заустављања: $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ или $r = k$

Излаз: x_{r+1}

Теорема 3.1. (Теорема Baillon-Haddad) Нека је функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Фреше-диференцијабилна и конвексна. Ако постоји $\alpha > 0$ такво да је оператор $\alpha \nabla f$ неекспанзиван, тада је оператор $\alpha \nabla f$ чврсто неекспанзиван.

Доказ теореме 3.1 може се наћи у [11].

Теорема 3.2. Нека су $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ праве, затворене, конвексне функције. Поред тога, f је диференцијабилна и има Липшиц-непрекидан градијент. Ако решење проблема (3.11) постоји, тада за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in (0, \frac{2}{L})$, низ (x_r) , где $r = 1, 2, \dots, n$, генерисан проксималним градијентним алгоритмом конвергира ка решењу x^* проблема (3.11).

Доказ. На основу теорема 2.3 и 2.4, оператор $prox_{\lambda g}$ је упросечен. Такође, на основу теореме 3.1, функција $\frac{1}{L}\nabla f$ припада класи чврсто неекспанзивних оператора. Са друге стране, на основу теореме 2.4 функција $\frac{1}{L}\nabla f$ припада и класи упросечених оператора са параметром $\frac{1}{2}$. Стога, постоји неекспанзивни оператор R , тако да важи $\frac{1}{L}\nabla f = \frac{1}{2}(I + R)$, односно:

$$I - \lambda\nabla f = I - \frac{\lambda L}{2}(I + R) = (1 - \frac{\lambda L}{2})I + \frac{\lambda L}{2}(-R). \quad (3.17)$$

На основу (3.17) и дефиниције 2.4, следи да је оператор $I - \lambda\nabla f$ упросечен за $\lambda \in (0, \frac{2}{L})$. Користећи теорему 2.5 може се закључити да је и оператор $prox_{\lambda g}(I - \lambda\nabla f)$ упросечен, па на основу теореме 2.8 низ $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ генерисан проксималним градијентним алгоритмом конвергира ка решењу x^* проблема (3.11). \square

Може се показати (видети у [12]) да је конвергенција низа $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ генерисаног проксималним градијентним алгоритмом линеарна, тј. важи:

$$f(x_r) - f(x^*) = O(1/r).$$

Проксимални градијентни алгоритам такође може бити интерпретиран помоћу градијентног протока (види дефиницију 3.4). Градијентни проток придружен проблему (3.11) је дат са:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\nabla f(x(t)) - \nabla g(x(t)), \quad (3.18)$$

где су, по претпоставци, f и g диференцијабилне функције. Поново, идеја је заснована на дискретизацији посматраног система диференцијалних једначина. Нека је извод трајекторије $x(t)$ замењен са: $(x^{k+1} - x^k)/h$. За довољно мало h , вредности $x((k+1)h)$ и $x(kh)$ су приближно једнаке, те се на десној страни (3.18) различита појављивања $x(t)$ могу заменити са x^k и x^{k+1} . Комбиновањем експлицитне и имплицитне Ојлерове методе дискретизације може се формулисати следећи систем једначина:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{h} = -\nabla f(x^k) - \nabla g(x^{k+1}), \quad (3.19)$$

односно:

$$x^{k+1} = (I + h\nabla g)^{-1}(I - h\nabla f)x^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.20)$$

где је $x_0 \in \mathbb{R}^n$ произвољно и $h > 0$.

3.3 Убрзани проксимални градијентни алгоритам

Користећи идеју о екстраполацији, одабиром одговарајућег параметра τ_r у свакој итерацији, конвергенција проксималних градијентних алгоритама може бити убрзана на следећи начин:

$$y_r = x_r + \tau_r(x_r - x_{r-1}), \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.21)$$

$$x_{r+1} = \text{prox}_{\lambda g}(y_r - \lambda \nabla f(y_r)), \quad r = 0, 1, \dots, \quad (3.22)$$

за $\lambda > 0$ и произвољне $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Итеративни кораци (3.21) и (3.22) дефинишу **убрзани проксимални градијентни алгоритам** (енгл. *accelerated proximal gradient algorithm*).

Показано је да се за одговарајуће вредности параметара τ_r достиже квадратна конвергенција. Испоставља се да се не може постићи бржа конвергенција од квадратне, што је доказано у [13, 14]. Постоји више начина на који се може одабрати параметар τ_r у циљу постизања брже конвергенције. Један од приступа у његовом одабиру (види детаљније у [5]) предлаже да се за τ_r у свакој итерацији изабере $(r-1)/(r+2)$. У циљу прегледнијег записа одговарајућих итерација у оквиру алгоритма, нека је $\theta_r \in \mathbb{R}$ изабрано тако да важи:

$$\tau_r = \frac{\theta_r(1 - \theta_{r-1})}{\theta_{r-1}}.$$

У том случају је $\theta_r = 2/(r+2)$ и одговарајући алгоритам је представљен на следећи начин:

Алгоритам 4: Убрзани проксимални градијентни алгоритам

Улаз: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$,
 $\varepsilon > 0$, $\beta \in (0, 1)$

Итеративни г-ти корак:

1. $\theta_r = \frac{2}{r+2}$
2. $y_r = (1 - \theta_r)x_r + \theta_r z_r$
3. $x_{r+1} = \text{prox}_{\gamma g}(y_r - \gamma \nabla f(y_r))$
4. $z_{r+1} = x_r + \frac{1}{\theta_r}(x_{r+1} - x_r)$
5. Прекинути ако је: $f(x_{r+1}) \leq \hat{f}_{\frac{1}{\gamma}, x_r}(x_{r+1})$
6. $\gamma = \beta\gamma$

Критеријум заустављања: $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ или $r = k$

Излаз: x_{r+1} .

Теорема 3.3. Нека је дата функција $h = f + g$, где је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна и Липшиц-диференцијабилна, са Липшицовом константом $L > 0$, а $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ затворена, права и конвексна функција. Даље, нека се минимум функције h достиже у тачки x^* и нека је низ (x_r) , где $r = 1, 2, \dots, n$, генерисан убрзаним проксималним градијентним алгоритмом. Тада за свако $r \in \mathbb{N}$ важи:

$$f(x_r) - f(x^*) = O(1/r^2).$$

Доказ. Користећи (3.9) и услов $\lambda < \frac{1}{L}$ добија се:

$$f(x_{r+1}) \leq f(y_r) + \langle \nabla f(y_r), x_{r+1} - y_r \rangle + \frac{1}{2\lambda} \|x_{r+1} - y_r\|_2^2. \quad (3.23)$$

Такође, користећи варијациону неједнакост (1.16) из теореме (1.18) следи:

$$\begin{aligned} g(x_{r+1}) &\leq g(u) + \frac{1}{\lambda} \langle y_r - \lambda \nabla f(y_r) - x_{r+1}, x_{r+1} - u \rangle \\ &\leq g(u) - \langle \nabla f(y_r), x_{r+1} - u \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle y_r - x_{r+1}, x_{r+1} - u \rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

Сабирањем неједнакости (3.23) и (3.24) следи:

$$\begin{aligned} h(x_{r+1}) &\leq h(u) - f(u) + f(y_r) + \langle \nabla f(y_r), u - y_r \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda} \|x_{r+1} - y_r\|_2^2 + \frac{1}{\lambda} \langle y_r - x_{r+1}, x_{r+1} - u \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Због конвексности функције f , на основу теореме (1.3) важи:

$$f(y_r) - f(u) + \langle \nabla f(y_r), u - y_r \rangle \leq 0. \quad (3.26)$$

Комбинујући неједнакости (3.25) и (3.26) следи:

$$h(x_{r+1}) \leq h(u) + \frac{1}{2\lambda} \|x_{r+1} - y_r\|_2^2 + \frac{1}{\lambda} \langle y_r - x_{r+1}, x_{r+1} - u \rangle. \quad (3.27)$$

Заменом $u = x^*$ и $u = x_r$ у (3.27), а затим комбиновањем добијених неједнакости, добија се:

$$\begin{aligned} &h(x_{r+1}) - h(x^*) + (1 - \theta_r)(h(x^*) - h(x_r)) \\ &= \theta_r(h(x_{r+1}) - h(x^*)) + (1 - \theta_r)(h(x_{r+1}) - h(x_r)) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} \|x_{r+1} - y_r\|_2^2 + \frac{1}{\lambda} \langle y_r - x_{r+1}, x_{r+1} - \theta_r x^* - (1 - \theta_r)x_r \rangle \\ &= \frac{1}{2\lambda} (\|y_r - \theta_r x^* - (1 - \theta_r)x_r\|_2^2 - \|x_{r+1} - \theta_r x^* - (1 - \theta_r)x_r\|_2^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta_r^2}{2\lambda} (\|z_r - x^*\|_2^2 - \|z_{r+1} - x^*\|_2^2).$$

Дакле, за две суседне итерације важи неједнакост:

$$\frac{\lambda}{\theta_r^2} (h(x_{r+1}) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_{r+1} - x^*\|_2^2 \leq \frac{\lambda(1 - \theta_r)}{\theta_r^2} (h(x_r) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_r - x^*\|_2^2 \quad (3.28)$$

Рекурзивно понављајући (3.28) и користећи: $\frac{1 - \theta_r}{\theta_r^2} \leq \frac{1}{\theta_{r-1}^2}$, следи:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\theta_r^2} (h(x_{r+1}) - h(x^*)) &\leq \frac{\lambda(1 - \theta_r)}{\theta_r^2} (h(x_r) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_r - x^*\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z_{r+1} - x^*\|_2^2 \\ &\leq \frac{\lambda}{\theta_{r-1}^2} (h(x_r) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_r - x^*\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z_{r+1} - x^*\|_2^2 \\ &\leq \frac{\lambda(1 - \theta_{r-1})}{\theta_{r-1}^2} (h(x_{r-1}) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_{r-1} - x^*\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z_r - x^*\|_2^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \|z_r - x^*\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z_{r+1} - x^*\|_2^2 \\ &= \frac{\lambda(1 - \theta_{r-1})}{\theta_{r-1}^2} (h(x_{r-1}) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_{r-1} - x^*\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z_{r+1} - x^*\|_2^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq \frac{\lambda(1 - \theta_0)}{\theta_0^2} (h(x_0) - h(x^*)) + \frac{1}{2} \|z_0 - x^*\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2, \end{aligned}$$

одакле следи тврђење теореме:

$$h(x_{r+1}) - h(x^*) \leq \frac{2}{\lambda(r+2)^2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

□

3.4 Douglas - Rachford раздвајајући алгоритам

Нека је дат проблем:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + g(x)), \quad (3.29)$$

при чему су обе функције $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ затворене, праве и конвексне без додатних претпоставки о диференцијабилности, а претпоставка је да је једна од њих непрекидна у некој тачки из $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$. Нека

је тачка x^* решење проблема (3.29). Тада на основу теореме 1.9 важи:

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*). \quad (3.30)$$

На основу теореме 1.20, (3.30) је еквивалентно са:

$$x^* = \text{prox}_{\lambda g}(x^* - \xi), \quad (3.31)$$

где је $\xi \in \lambda \partial f(x^*)$. Нека је помоћни оператор T дефинисан на следећи начин:

$$T = \text{prox}_{\lambda g}(2\text{prox}_{\lambda f} - I) - \text{prox}_{\lambda f} + I. \quad (3.32)$$

Може се показати да постоји веза између решења проблема (3.29) и фиксне тачке t оператора T . Нека је $y = \text{prox}_{\lambda f}(t)$, односно $t \in y + \lambda \partial f(y)$, и нека је $\xi = t - y \in \lambda \partial f(y)$. Тада важи:

$$t = T(t) = \text{prox}_{\lambda g}(2y - t) - y + t,$$

односно:

$$\begin{aligned} \xi + y &= \text{prox}_{\lambda g}(y - \xi) + \xi \\ y &= \text{prox}_{\lambda g}(y - \xi). \end{aligned} \quad (3.33)$$

На основу (3.31) и (3.33), следи да је y решење проблема (3.29). На овој чињеници заснован је алгоритам под називом **Douglas - Rachford раздвајајући алгоритам** (енгл. *Douglas - Rachford splitting algorithm*). Псеудокод овог алгоритма може бити представљен на следећи начин:

Алгоритам 5: Douglas - Rachford раздвајајући алгоритам

Улаз: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0, t_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$,
 $\beta \in (0, 1)$

Итеративни r -ти корак:

1. $t_{r+1} = \text{prox}_{\lambda g}(2x_r - t_r) + t_r - x_r$
2. $x_{r+1} = \text{prox}_{\lambda f}(t_{r+1})$
3. $\lambda = \beta \lambda$

Критеријум заустављања: $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ или $r = k$

Излаз: x_{r+1}

Теорема 3.4. Нека су $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ праве, затворене, конвексне функције од којих је једна непрекидна у некој тачки из $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$. Ако постоји решење проблема (3.29), тада за произвољно $x_0, t_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$,

низ $(t_r)_{r \in \mathbb{N}}$ генерисан Douglas - Rachford раздвајајућим алгоритмом конвергира ка фиксној тачки оператора T из (3.32), а низ $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ генерисан истим алгоритмом ка решењу проблема (3.29).

Доказ. Нека су оператори $R_1, R_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ дефинисани на следећи начин:

$$R_1 = 2\text{prox}_{\lambda f} - I, R_2 = 2\text{prox}_{\lambda g} - I.$$

Тада важи:

$$2T = 2\text{prox}_{\lambda g}(2\text{prox}_{\lambda f} - I) - (2\text{prox}_{\lambda f} - I) + I = R_2 \circ R_1 + I,$$

односно:

$$T = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}R_2 \circ R_1.$$

Оператори $\text{prox}_{\lambda f}$ и $\text{prox}_{\lambda g}$ су чврсто неекспанзивни (теорема 2.3), односно неекспанзивни (теорема 2.2). Према начину конструкције, следи да и оператори R_1 и R_2 припадају класи неекспанзивних оператора. Следи да је и $R_2 \circ R_1$ је неекспанзиван, па је оператор T упросечен и на основу теореме 2.8 следи доказ. \square

Може се показати (видети у [15]) да је конвергенција низа $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ генерисаног Douglas - Rachford раздвајајућим алгоритмом линеарна, тј. да за свако $r \in \mathbb{N}$ важи:

$$f(x_r) - f(x^*) = O(1/r).$$

4 Примене проксималних алгоритама

У овом делу рада изложени су основни појмови из теорије обраде сигнала. Такође, представљена су и два проблема из ове области, као и њихова решења уз помоћ проксималних алгоритама.

4.1 Обрада сигнала

У општем случају, сигнал представља функцију једне или више независних променљивих. У већини случајева независна променљива је време, па је уобичајено да се сигнали посматрају као функције времена и у случајевима када независна променљива не представља време. Према томе, сигнал се може дефинисати као функција времена која носи информацију о некој величини од интереса. Параметар који одређује ниво значајности те информације се назива амплитуда сигнала. У овом раду ће бити разматрани дискретни временски сигнали који су дефинисани само за дискретне вредности независне променљиве времена. Дискретни сигнал се математички може представити као низ реалних бројева (x_r) , где је r цео број из интервала $[R_1, R_2]$, а границе R_1 и R_2 су цели бројеви из $[-\infty, +\infty]$. За разлику од дискретних, постоје и непрекидни временски сигнали. Специјално, дискретни временски сигнали се добијају као вредности непрекидних временских сигнала у одређеним тренуцима. У том случају, временски интервал између две узастопно одабране вредности се назива период узорковања. Више детаља се може пронаћи у [17, 18].

Пример 1. *Јединични импулс је најједноставнији дискретни сигнал чији је општи члан дефинисан следећим изразом:*

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & , r = 0 \\ 0 & , r \neq 0. \end{cases}$$

Помоћу јединичног импулса се може изразити било који дискретни сигнал, односно низ (x_r) . Ако су дати одговарајући елементи низа: x_0, x_1, \dots , тада се r -ти члан низа (x_r) може представити у следећем облику:

$$x_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{r-k}. \quad (4.1)$$

У анализи дискретних сигнала користе се следеће операције са низовима: сабирање и множење низова, множење низова константом и померање низа.

Дефиниција 4.1. За низ (y_r) се каже да је померен у односу на низ (x_r) за r_0 одабирака ако за свако $r \in \mathbb{Z}$ важи релација $y_r = x_{r-r_0}$. Померај низа r_0 је најчешће позитиван број и у том случају операција померања низа се назива кашњење низа.

Дефиниција 4.2. Дискретни временски сигнал (x_r) је периодичан са периодом $T \in \mathbb{N}$ ако важи $x_{r+T} = x_r$ за свако $r \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Дискретни косинусни низ (f_r) се дефинише на следећи начин:

$$f_r = \cos(\omega r),$$

где је са ω означена кружна фреквенција у радијанима. За разлику од непрекидног косинусног низа који је увек периодичан, дискретни косинусни сигнал да би био периодичан мора да задовољава услов:

$$\cos(\omega_1 r) = \cos(\omega_1 r + \omega_1 T),$$

што је испуњено ако је $\omega_1 = 2k\pi/T$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $T \in \mathbb{N}$.

Косинусни и синусни сигнали представљају важну класу периодичних сигнала. Наиме, периодичне функције, под одређеним условима, могу бити произвољно добро апроксимирани помоћу линеарних комбинација функција синуса и косинуса различитих фреквенција. На овај начин је омогућена анализа сигнала у односу на фреквенције које су у њему заступљене, што често омогућава лакши рад у поређењу са анализирањем сигнала у временском домену.

Дефиниција 4.3. Нека је дата периодична функција $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Тада се тригонометријски Фуријеов ред функције f дефинише на следећи начин:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)), \quad (4.2)$$

где се одговарајући Фуријеови коефицијенти a_k и b_k могу одредити помоћу

следећих формула:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2 \dots$$

Фуријеов ред се може и компактније представити помоћу комплексне репрезентације на следећи начин:

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-ikt}$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt$$

У овој репрезентацији, \hat{f}_k се називају Фуријеовим коефицијентима и представљају интензитете одговарајућих фреквенција у сигналу.

Треба напоменути да је тригонометријски Фуријеов ред (4.2) одређен у односу на ортонормирани систем тригонометријских функција:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (4.3)$$

Развој у Фуријеов ред представља једну врсту Фуријеове трансформације, а поред Фуријеовог реда постоје и непрекидна и дискретна Фуријеова трансформација. Зависно од особина функције, одређује се одговарајућа Фуријеова трансформација помоћу које се могу извући додатне информације о посматраној функцији.

Дефиниција 4.4. Периодичној функцији $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ се може придружити непрекидна Фуријеова трансформација на следећи начин:

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i ut} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) e^{2\pi i ut} du.$$

Дефиниција 4.5. Нека су вредности функције $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, у ознаци $f_j = f(t_j)$ познате само у тачкама $t_j = t_0 + jh$, за $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $h > 0$

и нека је функција периодична са периодом nh , где $n \in \mathbb{N}$. Тада је дискретна Фуријеова трансформација одређена са:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi k j/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k e^{2\pi k j/n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Као што је и поменуто, Фуријеова трансформација омогућава једноставнију интерпретацију сигнала, што омогућава ефикасније решавање проблема из области обраде сигнала.

Лема 4.1. Нека су дате периодичне функције $f, g : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Тада важи:

$$\widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f + g}.$$

Доказ. На основу дефиниције 4.4 за свако $u \in (-\infty, \infty)$ важи:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(u) + \widehat{g}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i u t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{2\pi i u t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f + g)(t) e^{2\pi i u t} dt \\ &= \widehat{f + g}(u), \end{aligned}$$

одакле следи тврђење леме. □

У случају множења Фуријеових трансформација не постоји одговарајућа аналогија са лемом 4.1, што је дало мотивацију за дефинисање нове операције која се показала веома значајном у теорији обраде сигнала.

Дефиниција 4.6. Конволуција непрекидних временских сигнала f и g , у ознаци $f * g$ се дефинише као:

$$(f * g)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(v - x) dx.$$

Теорема 4.2. (Теорема о конволуцији сигнала) За непрекидне временске сигнале f и g важи:

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g},$$

где је са $\widehat{}$ означена Фуријеова трансформација, а са $*$ операција конволуције.

Конволуцију је могуће дефинисати и у дискретном случају заменом интеграла сумама.

Дефиниција 4.7. Нека су дати дискретни временски сигнали f и g . Тада се њихова конволуција дефинише помоћу следеће формуле:

$$(f * g)_i = \sum_{j=0}^{n-1} f_j g_{i-j}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поред дискретне Фуријеове трансформације, значајну примену у обради сигнала има и дискретна косинусна трансформација.

Дефиниција 4.8. Нека су вредности функције $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, у ознаци $f_j = f(t_j)$ познате само у тачкама $t_j = t_0 + jh$, за $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $h > 0$ и нека је функција периодична са периодом nh , где $n \in \mathbb{N}$. Тада је дискретна косинусна трансформација одређена са:

$$\hat{f}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f_j c_k \cos \pi \frac{k(2j+1)}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$f_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k c_k \cos \pi \frac{k(2j+1)}{2n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , k = 0 \\ 1 & , k \neq 0. \end{cases}$$

Дефиниција 4.9. Дискретни систем се дефинише као поступак пресликавања који трансформише један дискретни сигнал (улаз) у други дискретни сигнал (излаз). Нека су улаз и излаз означени са (x_r) и (y_r) , респективно. Тада се помоћу израза

$$y_r = \Phi\{x_r\} \tag{4.4}$$

може приказати како се израчунава r -ти члан излаза на основу улаза помоћу оператора придруженог дефинисаном дискретном систему, у ознаци $\Phi\{\cdot\}$.

Ознака $\Phi\{\cdot\}$ имплицира да се за израчунавање једног члана низа (y_r) помоћу трансформације $\Phi\{\cdot\}$ користе сви чланови низа (x_r) .

Дефиниција 4.10. Импулсни одзив система, у ознаци (h_r) , је одзив си-

стема одређеног оператором $\Phi\{\cdot\}$ на јединични импулс (δ_r), односно:

$$h_r = \Phi\{\delta_r\}.$$

У зависности од различитих особина оператора $\Phi\{\cdot\}$, могу се дефинисати различите врсте дискретних система.

Дефиниција 4.11. Нека су (a_r) и (b_r) улазни низови у систем дефинисан оператором $\Phi\{\cdot\}$, а (c_r) и (d_r) одговарајући излазни низови добијени трансформацијама:

$$c_r = \Phi\{a_r\},$$

$$d_r = \Phi\{b_r\}.$$

Систем одређен оператором $\Phi\{\cdot\}$ је линеаран ако задовољава принцип суперпозиције, односно ако важи:

$$\Phi\{\alpha a_r + \beta b_r\} = \alpha c_r + \beta d_r,$$

где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 4.12. Систем је временски инваријантан ако померај улазног низа (x_r) за $r_0 \in \mathbb{Z}$ проузрокује исти такав померај излазног низа (y_r) . Нека је низ на улазу означен са (x_r) и нека му одговара излазни низ (y_r) . Ако је помоћу оператора $\Phi\{\cdot\}$ дефинисан посматрани систем, тада се временска инваријантност система може изразити помоћу релација:

$$\Phi\{x_r\} = y_r,$$

$$\Phi\{x_{r-r_0}\} = y_{r-r_0}.$$

Дефиниција 4.13. Дискретни систем $\Phi\{\cdot\}$ је казуалан ако сигнал на излазу за $n = n_0 \in \mathbb{N}$ зависи само од оних чланова низа улазног сигнала за које је $n \leq n_0$.

У практичним применама од највећег значаја су линеарни временски инваријантни системи. Наиме, комбинација ових особина их чини погодним за представљање и интерпретацију. Једна од најзначајнијих особина је да се излазни низ може изразити помоћу улазног низа и импулсног одзива система.

Теорема 4.3. Нека је линеарни, временски инваријантни дискретни систем одређен оператором $\Phi\{\cdot\}$. Ако улазном низу (x_r) одговара излазни низ (y_r) , тада важи:

$$y_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{r-k}, \quad (4.5)$$

где је са (h_r) означен импулсни одзив посматраног дискретног система.

Доказ. На основу (4.1) важи:

$$y_r = \Phi\{f_r\}, \quad (4.6)$$

где је $f_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{r-k} x_k$. Користећи особине линеарности и временске инваријантности посматраног система важи:

$$\Phi\{\delta_{r-k} x_k\} = x_k h_{r-k}. \quad (4.7)$$

Примењујући (4.7) и особину линеарности система одређеног оператором $\Phi\{\cdot\}$ на (4.6) следи коначно тврђење. \square

Може се приметити да је помоћу израза (4.5) одређен низ (y_r) који представља дискретну конволуцију низова (x_r) и (h_r) .

Дискретни системи се могу класификовати и према дужини импулсног одзива. Према овој класификацији, разликујемо системе са коначним импулсним одзивом (енгл. *Finite Impulse Response, FIR*) и системе са бесконачним импулсним одзивом (енгл. *Infinite Impulse Response, IIR*). Репрезентација из теореме 4.3 има примену само код *FIR* система, јер у том случају сума (4.5) има коначан број сабирака. За *IIR* системе је карактеристична репрезентација помоћу линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Општи облик линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима гласи:

$$\sum_{k=0}^N b_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k},$$

где $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$, а $\max(M, N)$ представља ред система. У општем случају ова једначина нема јединствено решење, те је неопходно дефинисати почетни услов како би решење било једнозначно одређено. Једна од најчешћих претпоставки у пракси је да посматрани систем буде кауза-

лан. Тада је уобичајено да се одговарајућа линеарна диференцна једначина представи на погоднији начин:

$$y_n = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k} - \sum_{k=0}^N b_k y_{n-k}, \quad (4.8)$$

при чему је, без умањења општости, претпостављено да је $b_0 = 1$. Сходно оваквој интерпретацији, *IIR* системи се често називају и рекурзивним системима.

4.2 Проблем ретке деконволуције сигнала

Проблем деконволуције сигнала (енгл. *signal deconvolution*) се може дефинисати као проблем проналажења улазног сигнала ако су познати излазни сигнал и одговарајући дискретни систем. Овај проблем се може једноставно математички формулисати (нпр. линеарним системом једначина), али поступак проналажења решења није увек тривијалан. Иако је одговарајућа матрица из система инвертибилна, због евентуалне лоше условљености, добијено решење може доста одступати од тачног решења. У циљу проналажења решења што ближег тачним, потребно је укључити и додатне информације које говоре о природи улазног сигнала.

Ако је познато да је улазни сигнал редак, односно ако улазни низ садржи велики број нула у поређењу са његовом дужином, проблем реконструкције овог сигнала се назива ретком деконволуцијом (енгл. *sparse deconvolution*). Информацију о реткости сигнала могуће је искористити додавањем одговарајућег регуларизационог дела функцији циља. У наставку секције је прво изложена математичка формулација овог проблема а потом је приказан ефикасан начин решавања овог проблема.

4.3 Математичка формулација проблема ретке деконволуције сигнала

Нека је дат излазни сигнал (y_r) , одређен на следећи начин:

$$(y_r) = (h_r) * (x_r) + (w_r), \quad (4.9)$$

где (h_r) означава импулсни одзив линеарног временски инваријантног дискретног система $\Phi\{\cdot\}$, (x_r) представља улазни сигнал, а са (w_r) је представљен Гаусов бели шум. Коришћењем репрезентације (4.8), дискретни систем $\Phi\{\cdot\}$ се може представити и у матричној форми помоћу одговарајућих матрица $A, B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$Ay = Bx. \quad (4.10)$$

На пример, ако је дата диференцна једначина првог реда:

$$a_1 y_{r-1} + y_r = b_1 x_{r-1} + b_0 x_r,$$

одговарајуће дводијагоналне матрице A и B се могу представити на следећи начин:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & a_1 & 1 & \\ & & & & a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & & & & & \\ b_1 & b_0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & b_1 & b_0 & \\ & & & & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Према томе, излазни сигнал $y \in \mathbb{R}^n$ се може представити и у следећој форми:

$$y = Hx + w,$$

где је са $H \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ означена матрица $A^{-1}B$, $x \in \mathbb{R}^n$ представља улазни сигнал, а $w \in \mathbb{R}^n$ вектор шума. У циљу што прецизније реконструкције сигнала x , требало би искористити чињеницу да је x редак сигнал. Ова претпоставка се може искористити тако што се у придруженом проблему минимизације укључи и норма сигнала x , што се постиже додавањем одговарајућег регуларизационог дела. Стога, у циљу проналаска

улазног сигнала, формулисан је следећи проблем:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|x\|_1. \quad (4.13)$$

Проблем (4.13) је познат и као ласо проблем (енгл. *lasso – least absolute shrinkage and selection operator*).

Треба напоменути да се проблем (4.13) може формулисати и на следећи начин:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|x\|_2. \quad (4.14)$$

Испоставља се да се решавањем проблема (4.14) не добијају задовољавајући резултати. У проблему (4.14), регуларизациони део је представљен у l_2 норми. На овај начин се постиже да се апсолутне вредности коефицијената смање и приближе нули, али не и да постану тачно нула. Међутим, ретки сигнали имају особину да им је већина коефицијената једнака нули, па представљање регуларизационог дела у l_1 норми у овом проблему даје боље резултате.

4.4 Алгоритам мајоризације - минимизације

Проблем (4.13) се може решити помоћу проксималног градијентног алгоритма и његове побољшане варијанте у смислу брзине извршавања. У циљу поређења резултата добијених помоћу проксималних алгоритама са резултатима других метода, у овом делу рада ће бити представљен алгоритам мајоризације-минимизације помоћу којег се такође проблем (4.13) може решити.

Главна идеја алгоритама мајоризације-минимизације (енгл. *majorization - minimization*) је да се пронађе функција која представља горње ограничење функције циља и затим посматра нови оптимизациони проблем. Циљ је у томе да нова функција има погоднија својства од посматране функције циља, у смислу да је нови проблем лакши за решавање од почетног. Прецизније, ако се посматра проблем:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} (F(x)), \quad (4.15)$$

тада би одговарајући алгоритам мајоризације - минимизације могао бити

представљен на следећи начин:

$$x_{r+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} G_r(x), \quad (4.16)$$

где је $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r = 0, 1, 2, \dots$, а функција G_r представља било које горње ограничење функције F . Прецизније, за функцију $G_r(x)$ важи:

$$G_r(x) \geq F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.17)$$

$$G_r(x_r) = F(x_r). \quad (4.18)$$

Конкретно, у проблему (4.13) функција циља се може модификовати тако што се пронађе горње ограничење регуларизационог дела. Наиме, може се показати да за свако $v \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$\|x\|_1 \leq \frac{1}{2} x^T \Phi x + \frac{1}{2} \|v\|_1, \quad (4.19)$$

где је са Φ означена дијагонална матрица димензије $n \in \mathbb{N}$, за коју важи $[\Phi]_{i,i} = \frac{1}{|v(i)|}$ и $|v(i)| \neq 0$, при чему $i = 1, 2, \dots, n$. Стога се, горње ограничење функције $\frac{1}{2} \|y - Hx\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$, може представити помоћу функције $G_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$G_r(x) = \frac{1}{2} \|y - Hx\|_2^2 + x^T \Phi_r x + \frac{\lambda}{2} \|x_r\|_1, \quad (4.20)$$

где је са Φ_r означена дијагонална матрица, $[\Phi_r]_{i,i} = \frac{\lambda}{|x_r(i)|}$, где је $|x_r(i)| \neq 0$ и $i = 1, 2, \dots, n$. Сада се, уместо проблема (4.13), може посматрати еквивалентан проблем:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \|y - Hx\|_2^2 + \frac{1}{2} x^T \Phi_r x \right). \quad (4.21)$$

Важно је напоменути да је последњи члан од G_r изостављен у (4.21) јер не зависи од x . Одговарајући алгоритам се може представити на следећи начин:

$$x_{r+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \|y - Hx\|_2^2 + \frac{1}{2} x^T \Phi_r x \right), \quad (4.22)$$

где је $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r = 0, 1, 2, \dots$. Након одређивања првог извода десне стране у (4.22) и изједначавањем са нулом, x_r се може експлицитно одредити

на следећи начин:

$$x_{r+1} = (H^T H + \Phi_r)^{-1} H^T y, \quad (4.23)$$

односно помоћу матрица A и B :

$$x_{r+1} = (B^T (AA^T)^{-1} B + \Phi_r)^{-1} B^T A^{-T} y. \quad (4.24)$$

Итеративни алгоритам представљен помоћу (4.24) није најпогоднији за решавање проблема (4.13). Сигнал, односно вектор x садржи велики број нула, па би у том случају елементи матрице Φ_r тежили ка $+\infty$. Такође, овај начин захтева множење матрица великих димензија што би било прихватљиво у случају да су одговарајуће матрице ретке. Међутим, у (4.24) то није случај (матрица $(AA^T)^{-1}$ није ретка иако матрица A јесте). Описани проблеми се могу надоместити помоћу Вудбуријевог матричног идентитета (енгл. *Woodbury matrix identity*), односно ако би матрицу $(B^T (AA^T)^{-1} B + \Phi_r)^{-1}$ представили на други начин:

$$(B^T (AA^T)^{-1} B + \Phi_r)^{-1} = W_r - W_r B^T (AA^T + B W_r B^T)^{-1} B W_r, \quad (4.25)$$

где је $W_r = \Phi_r^{-1}$ дијагонална матрица димензије $n \in \mathbb{N}$, одређена са: $[W_r]_{i,i} = \frac{|x_r(i)|}{\lambda}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Псеудокод описаног алгоритма се може представити на следећи начин:

Алгоритам 6: Алгоритам мајоризације - минимизације

Улаз: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Итеративни r -ти корак: За $r = 0, 1, \dots$ одредити:

1. $g = B^T (A^{-1})^T y$;
2. дијагоналну матрицу W_r за коју је: $[W_r]_{i,i} = \frac{|x_r(i)|}{\lambda}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
3. $x_{r+1} = W_r (g - B^T (AA^T + B W_r B^T)^{-1} B W_r g)$.

Критеријум заустављања: $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ или $r = k$.

Излаз: Решење је: x_{r+1} .

У наредној подсекцији су представљени експериментални резултати добијени решавањем проблема (4.13) помоћу проксималног градијентног алгоритма (ПГД), његове побољшане верзије у смислу брзине извршавања (УПГД), Douglas - Rachford раздвајајућег алгоритма (ДР) и алго-

ритма мајоризације-минимизације (ММ).

4.5 Нумерички експеримент 1

Нека је улазни сигнал $\{x(n)\}$ одређен на следећи начин:

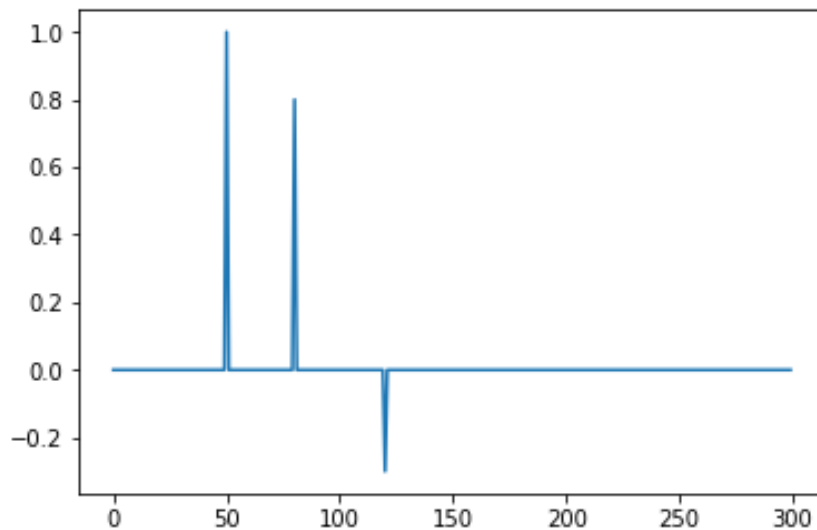
$$x_n = \delta_{n-50} + 0.8\delta_{n-80} - 0.3\delta_{n-120}.$$

Одговарајући дискретни конволуциони систем је другог реда и одређен је диференцом једначином са следећим коефицијентима:

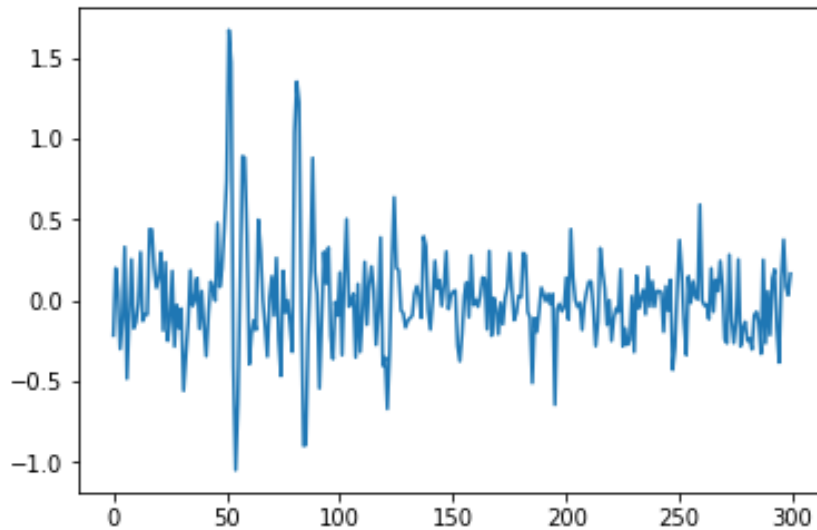
$$b_0 = 1, b_1 = 0.9$$

$$a_0 = 1, a_1 = -0.98, a_2 = 0.72.$$

Излазни сигнал поред конволуције импулсног одзива и улазног сигнала, садржи и бели Гаусов шум са стандардном девијацијом $\sigma = 0.2$. На сликама 7 и 8 приказани су улазни и излазни сигнал.



Слика 7: Улазни сигнал



Слика 8: Излазни сигнал

Пре примене било којег од поменутих алгоритама, потребно је дефинисати улазне параметре. Прво, познати су излазни сигнал y и одговарајућа матрица конволуционог система $H = A^{-1}B$. Такође, да би се проблем (4.13) могао ефикасно решити помоћу алгорита мајоризације-минимизације, неопходно је пажљиво одабрати параметар λ . У раду [20] је детаљније изложен овај алгоритам. Посебно, у овом раду је показано да алгоритам конвергира ка решењу под условом да важи: $\lambda \geq 3\sigma\sqrt{\sum_n |h_n|^2}$, где је са $h(n)$ означен импулсни одзив одговарајућег дискретног система. На основу улазних података, може се израчунати да $\lambda \geq 1.9$ задовољава овај услов, те је ова гранична вредност изабрана за вредност параметра λ . Посебно, проксимални градијентни алгоритам и његова убрзана верзија захтевају улазни параметар γ . Овај параметар зависи од Липшицове константе L која одговара квадратној функцији $\frac{1}{2}\|y - Hx\|_2^2$. Може се показати (детаљније у [12]) да је у овом случају $L = \lambda_{max}(H^T H)$, где је са λ_{max} означена максимална сопствена вредност одговарајуће матрице.

У циљу упоређивања ефикасности примењених алгоритама на проблем (4.13), разматран је потребан број итерација који је неопходан да бисмо добили решење са одређеном прецизношћу, одговарајуће време извршавања и грешка у смислу колико добијено приближно решење одступа од тачног у l_1 и l_2 норми. Прецизност је мерена тако што су посматране сваке две узастопне итерације, те када разлика између њих буде мања од одређеног прага толеранције (у овом случају 0.01), алгоритам

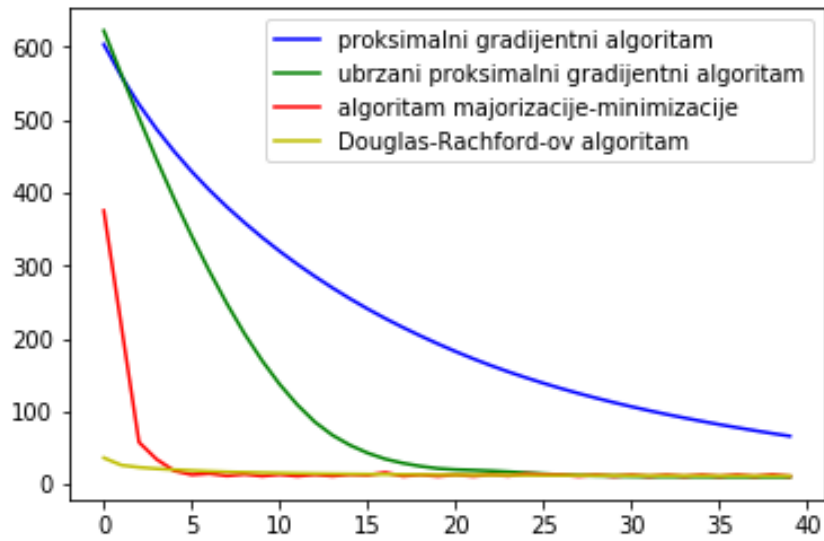
би се зауставио. Резултати су сумирани у следећој табели:

Табела 1: Поређење резултата након примене алгоритама (ПГД), (УПГД), (ММ) и (ДР) за решавање проблема (4.13)

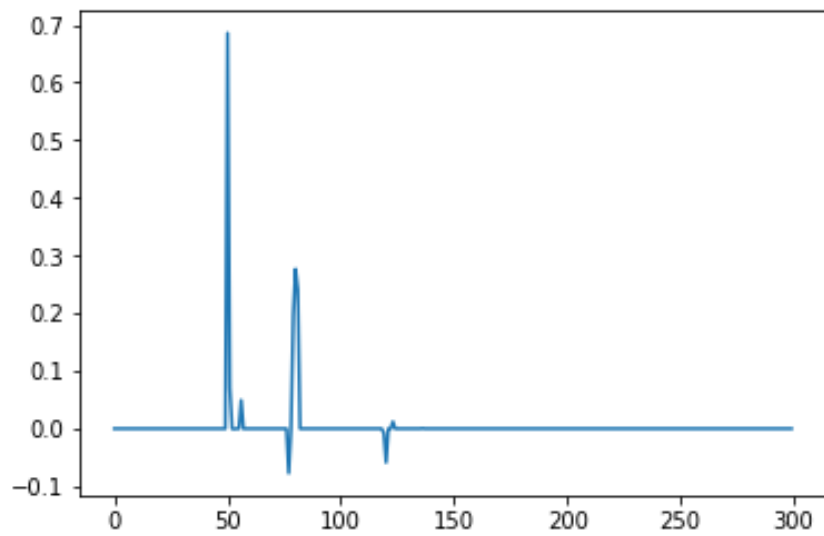
Алгоритам	Број итерација	Време извршавања (s)	Грешка у l_2 норми	Грешка у l_1 норми
ПГД	112	0.0193	0.7359	0.5233
УПГД	40	0.0072	0.3833	0.2427
ММ	124	1.0823	0.7053	0.5698
ДР	87	0.2267	0.3220	0.2180

Као што се може приметити из Табеле 1, у погледу брзине, убрзани проксимални градијентни алгоритам даје најбоље резултате. Најбољу реконструкцију полазног сигнала даје Douglas-Rachford-ов раздвајајући алгоритам. Такође, грешка добијена применом убрзаног проксималног градијентног алгоритма је јако блиска грешци добијеној применом Douglas-Rachford-овог раздвајајућег алгоритма.

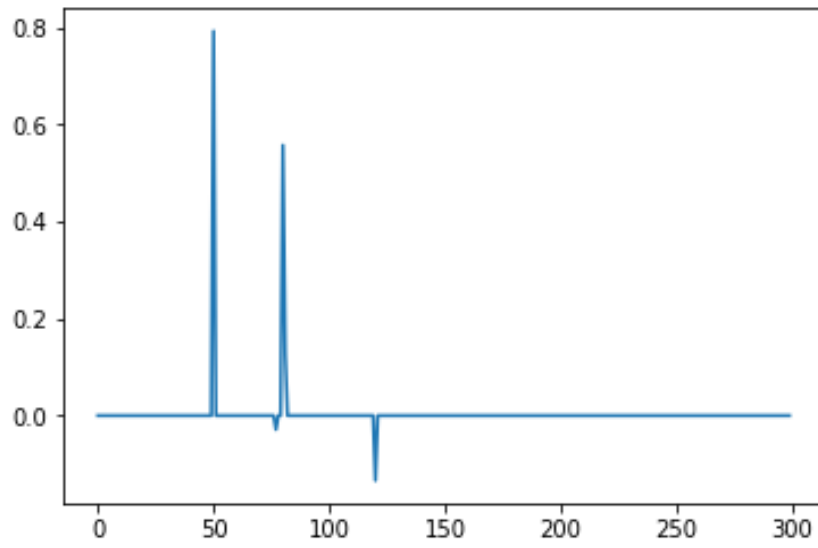
На Слици 9 дат је график који илуструје колико се брзо сваки од алгоритама приближава решењу проблема, односно приказује зависност функције циља од редног броја итерације. Може се уочити да је алгоритам мајоризације-минимизације прилично нестабилан (видети секцију 4.4). Од преостала три разматрана алгоритма у погледу брзине конвергенције, побољшана верзија проксималног градијентног алгоритма и Douglas - Rachford раздвајајући алгоритам дају најбоље резултате. Сlike 10-13 илуструју реконструисани сигнал након примене сваког од разматраних алгоритама.



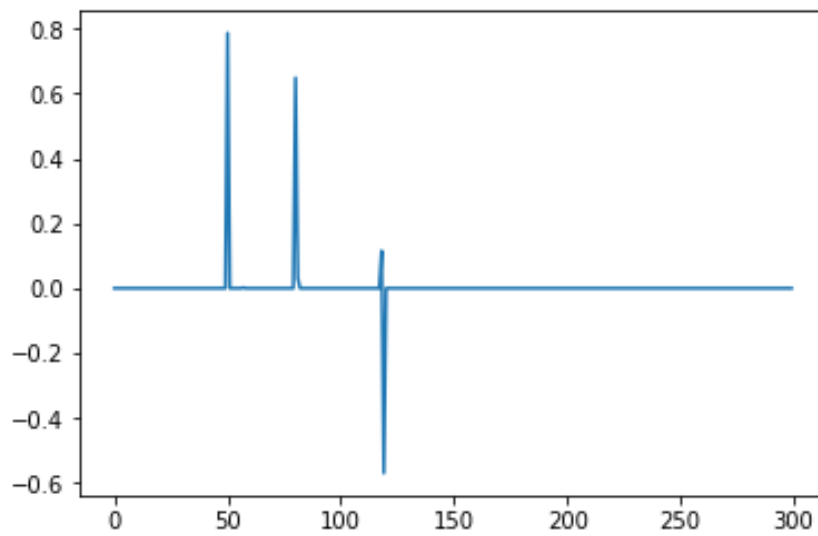
Слика 9: Зависност функције циља од редног броја итерације



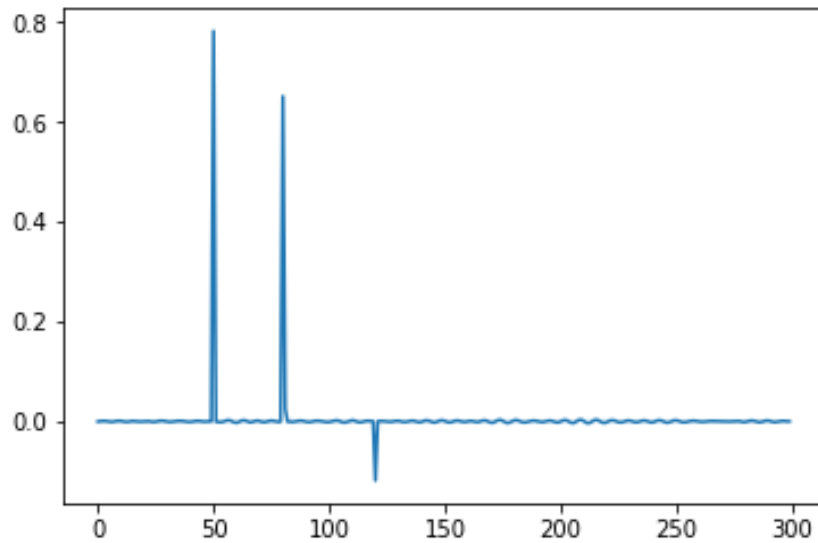
Слика 10: Реконструисани сигнал добијен након примене проксималног градијентног алгоритма



Слика 11: Реконструисани сигнал добијен након примене убрзаног проксималног градијентног алгоритма



Слика 12: Реконструисани сигнал добијен након примене алгоритма мајоризације-минимизације



Слика 13: Реконструисани сигнал добијен након примене Douglas-Rachford-овог алгоритма

4.6 Проблем компресованог детектовања

У данашњем свету се, више него икада раније, сусрећемо са огромном количином информација. Истовремено, значај компресије слика и звучних фајлова добија на још већем значају. На пример, истраживања су показала да је у 2017. години сваког минута постављено више од 400 сати видеа на *Youtube*-у, 136000 слика на *Facebook*-у и 46740 слика на *Instagram*-у. Многи алгоритми компресије (енгл. *compression algorithms*), али и други проблеми из области обраде сигнала су засновани на операцијама у фреквенцијском домену (Фуријеова трансформација, дискретна косинусна трансформација, трансформација таласићима). Неки од најпознатијих алгоритама компресије су JPEG, MPEG, MP3 који омогућавају ефикасно чување фотографија, видео и аудио фајлова. Један од новијих метода који даје на великом значају при решавању описаних проблема је тзв. компресовано детектовање (енгл. *compressed sensing*). Овај метод омогућава реконструкцију сигнала користећи мањи број информација у поређењу са неким другим популарним методама. У овом раду ће бити изложен проблем реконструкције једнодимензионог сигнала који се може представити као проблем компресованог детектовања и одговарајуће решење уз помоћ проксималног градијентног алгоритма.

Код стандардних алгоритама компресије, основна идеја је да се сиг-

нал подели на мање делове, а затим се сваки део засебно обрађује, односно трансформише у фреквенцијски домен како би се што прецизније утврдило који делови сигнала су најзначајнији. На крају, мање значајне информације из свих делова се групишу и применом посебних метода заједно компресују. Код проблема компресованог детектовања, основна идеја је да се на почетку издвоји само један део сигнала, а потом из тог мањег сигнала извлачи најважнија информација. Једна од првих претпоставки овог алгорита је да се сигнал у некој бази може представити у реткој форми, односно да има доста нула у поређењу са својом дужином. Иако делује да је ова претпоставка присутна само у специјалним случајевима, ипак није неуобичајена ствар. Наиме, фотографије и аудио фајлови представљени нпр. у Фуријеовој трансформацији имају ретку репрезентацију. Друга претпоставка се тиче тзв. инкохерентности, односно матрица у којој одговарајући сигнал има ретку репрезентацију и матрица помоћу које се издваја мањи сигнал од почетног сигнала би требало да буду ниско корелисане. На тај начин, када на почетку издвајамо мањи сигнал, гарантује се да ће управо бити бирани они делови који носе информацију од највећег значаја.

4.7 Математичка формулација проблема компресованог детектовања

Нека је оригиналан сигнал означен са $x \in \mathbb{R}^n$, а мањи сигнал који је добијен узорковањем оригиналног сигнала са $y \in \mathbb{R}^m$, где је $m < n$. Између ових сигнала постоји одговарајућа веза:

$$y = \Phi x, \quad (4.26)$$

где је са Φ означена матрица помоћу које је сигнал y случајно узоркован. Систем линеарних једначина (4.26) има мање једначина него непознатих, одакле следи да има бесконачно много решења. Додавањем посебних услова о непознатим, скуп могућих решења се може сузити. Конкретно, у проблему компресованог детектовања једна од претпоставки је да је сигнал у некој бази редак, односно садржи k не-нула коефицијената, где је $k \ll n$, па ће та претпоставка бити искоришћена. Као што је већ поменуто, многи сигнали у Фуријеовој, косинусној или репрезентацији помоћу таласића имају ретку репрезентацију. Нека важи претпоставка

да сигнал x има ретку репрезентацију у косинусној трансформацији и нека је матрица која одговара косинусној трансформацији означена са Ψ . Тада важи:

$$x = \Psi a, \quad (4.27)$$

где је са a означена ретка репрезентација сигнала x у косинусној трансформацији. Комбинујући (4.26) и (4.27), следи:

$$y = \Phi \Psi a. \quad (4.28)$$

Слично као у проблему ретке деконволуције сигнала, информација о реткости сигнала a се може искористити додавањем одговарајућег регуларизационог дела, односно представљању проблема на следећи начин:

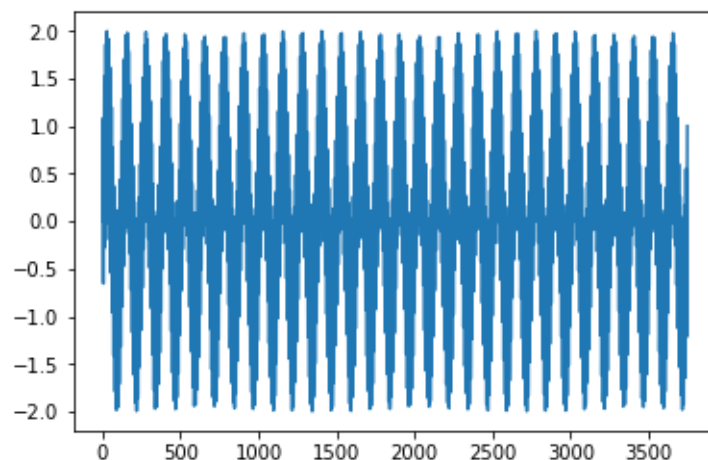
$$\arg \min_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - \Phi \Psi a\|_2^2 + \lambda \|a\|_1. \quad (4.29)$$

4.8 Нумерички експеримент 2

Нека је задат сигнал у временском домену на следећи начин:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 240t) + \sin(2\pi \cdot 3250t), \quad (4.30)$$

где је укупна дужина трајања сигнала $T = 0.125s$ и нека је узоркован фреквенцијом од $F = 30000Hz$. Сигнал задат изразом (4.30) је редак и у Фуријеовој и у косинусној трансформацији (издвајају се само две фреквенције). Слика 14 је илустрован сигнал $x(t)$ у временском домену.



Слика 14: Оригинални сигнал

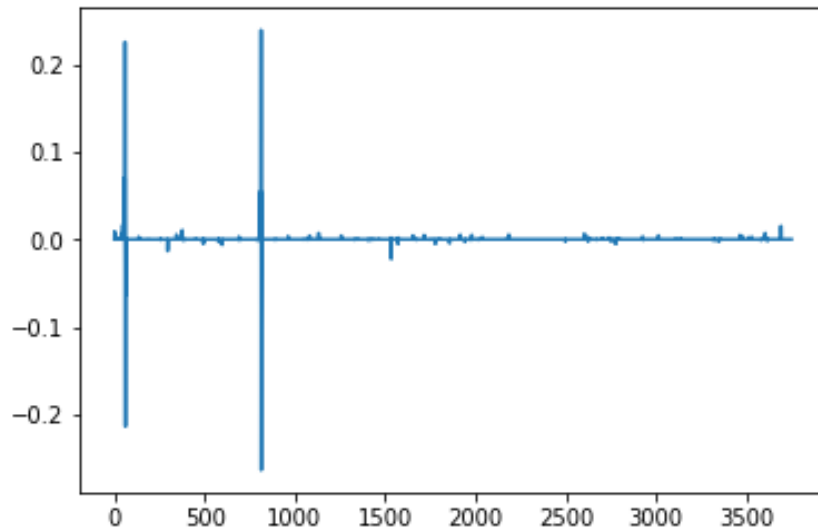
Задатак је да на основу одређеног броја насумично узетих узорака, овај сигнал поново буде реконструисан. Нека је изабрано 190 произвољних узорака (што представља 5% од укупног броја узорака, $N = F \cdot T = 3750$ узорка) из сигнала x и нека је нови сигнал означен са y . Даље, нека је са A означена матрица која представља репрезентацију сигнала y у дискретној косинусној трансформацији. Стога, у формулисаној проблему (4.29), $\Phi\Psi$ заправо представља матрица A , а проблем који одговара ознакама које су коришћене конкретно у овом проблему се може представити као:

$$\min_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - Aa\|_2^2 + \lambda \|a\|_1. \quad (4.31)$$

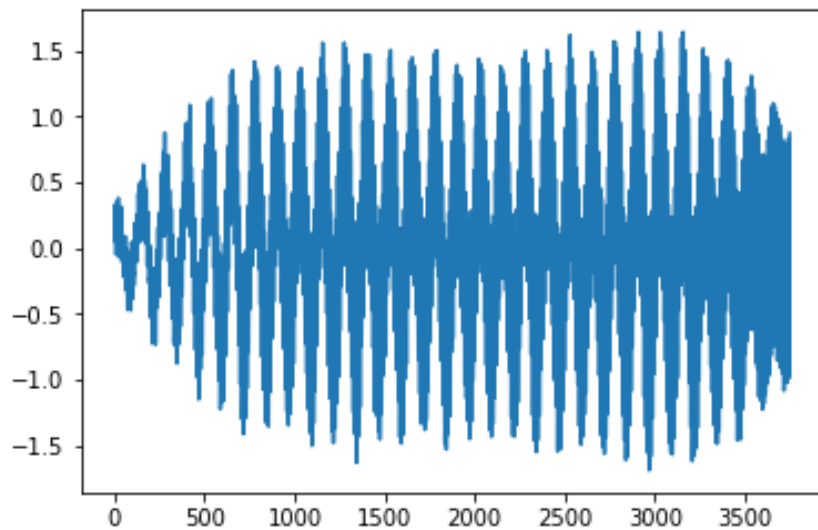
Иако у пракси није могуће одредити оптималну вредност параметра λ , у овом раду је то урађено у показне сврхе. Приступ који је коришћен за одабир регуларизационог параметра λ се заснива на мрежном претраживању. Прво је посматрано око 100 различитих вредности између 0 и 500 са кораком 5, док је критеријум за одабир најпогоднијег параметра λ била грешка у l_2 норми између почетног и реконструисаног сигнала у временском домену. Након ове анализе, утврђено је да се минимална грешка достиже када параметар λ узима вредност 20. На крају је посматрано 40 различитих вредности у распону између 10 и 30 са кораком 0.5 и тада се минимална грешка достигала када параметар λ узима вредност 18.5.

Проблем (4.31) је решен уз помоћ убрзаног проксималног градијентног алгоритма. Решење проблема (4.31) води до сигнала a који представља репрезентацију оригиналног сигнала x у дискретној косинусној трансформацији. Сликом 15 је илустрован реконструисани сигнал a .

У циљу реконструкције оригиналног сигнала x , неопходно је применити инверзну дискретну косинусну трансформацију на сигнал a . Добијени резултати су приказани на Слици 16.



Слика 15: Реконструисани сигнал у дискретној косинусној трансформацији



Слика 16: Реконструисани сигнал након примене инверзне дискретне косинусне трансформације

Nyquist-Shannon-ова теорема гарантује да је могуће једнозначно реконструисати полазни сигнал ако би узимали узорке 2 пута већом фреквенцијом од највеће фреквенције у спектру полазног сигнала. Конкретно, у овом случају гранична фреквенција је 3250Hz , па би требало узети $0.125\text{s} \cdot 2 \cdot 3250\text{Hz} = 812.5$ узорака. Стога, користећи принцип компресованог детектовања, могуће је довољно добро реконструисати сигнал користећи доста мањи број узорака у поређењу са стандардним приступом.

Важно је напоменути да при приступу заснованом на компресованом детектовању постоји одређена грешка, односно реконструисани сигнал и полазни сигнал нису идентични. Међутим, описаним приступом се може остварити довољно добра реконструкција ослањајући се на доста сиромашнију информацију полазног сигнала и у томе лежи основна предност над стандардним приступом. Због ове чињенице, многи инжењерски проблеми се могу једноставније и брже решити, те компресовано детектовање проналази сваким даном све више примена.

5 Закључак

У раду су представљени неки од најпознатијих проксималних алгоритама. Приказано је како се одређени проблеми из области обраде сигнала могу формулисати као ласо проблеми, али и како се могу решити користећи проксималне алгоритме. У том циљу, илустровани су резултати након примене проксималних алгоритама на проблем ретке деконволуције сигнала. Такође, у циљу поређења са другим алгоритмима, представљени су и резултати након примене алгоритма мајоризације-минимизације. Анализом имплементираних експеримената и добијених резултата може се доћи до закључка да, побољшана варијанта у смислу брзине извршавања проксималног градијентног алгоритма (УПГД), даје најбоље резултате. Поред овог проблема, представљен је и проблем компресованог детектовања на примеру једнодимензионог сигнала који је ефикасно решен коришћењем УПГД алгоритма. Експериментални резултати добијени решавањем овог проблема показују да се, на овај начин, сигнал може успешно реконструисати користећи вишеструко мањи број узорака него што предлаже Nyquist-Shannon-ова теорема.

Будућа истраживања би се могла концентрисати на примену проксималних алгоритама за решавање проблема из области вишедимензионих сигнала.

Литература

- [1] S. Vrećica, *Konveksna analiza*. Matematički fakultet u Beogradu, 1999.
- [2] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] A. Beck, *First order method in optimization*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017.
- [4] S. Boyd and N. Parikh, "Proximal Algorithms", *Foundations and Trends in Optimization*, vol. 1, pp. 127 - 239, 2014.
- [5] M. Burger, A. Sawatzky and G. Steidl, "First Order Algorithms in Variational Image Processing" in *Splitting Methods in Communication, Imaging, Science and Engineering*, G. Roland, O. Stanley, Y. Wotao, pp. 345 - 407, 2016.
- [6] T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [7] D. Adnadjević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza 2*. Zavod za udžbenike - Beograd, 1991.
- [8] J. Aubin, *Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1993.
- [9] J. Katić, Diferencijalne jednačine, Matematički fakultet u Beogradu, 2018. [E-Book] Available: <http://poincare.matf.bg.ac.rs/jelenak/>
- [10] H. Bauschke and P. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Springer, 2017.
- [11] J. Baillon, G. Haddad, "Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés et n -cycliquement monotones", *Israel Journal of Mathematics*, vol. 26, no. 2, pp. 137 - 150, 1977.
- [12] A. Beck and M. Teboulle, "A Fast Iterative Shrinkage - Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems", *SIAM Journal on Imaging Science*, vol. 2, no. 1, pp. 183 - 202, 2009.
- [13] A. Nemirovski and D. Yudin, *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization*. New York: Wiley, 1983.

- [14] Y. Nesterov, "A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(\frac{1}{k^2})$ ", Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 269. no. 3, pp. 543 - 547, 1983.
- [15] P. Giselsson and S. Boyd, "Linear Convergence and Metric Selection for Douglas-Rachford Splitting and ADMM", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 2, pp. 532 - 544, 2017.
- [16] C. Planiden and X. Wang, "Strongly convex functions, Moreau Envelopes and the generic nature of convex functions with strong minimizers", *SIAM Journal on Optimization*, vol. 26, no. 2, pp. 1341 - 1364, 2015.
- [17] Lj. Milić, Z. Dobrosavljević, *Uvod u digitalnu obradu signala*. Akademski Misao, 1999.
- [18] M. Nikolić, A. Zečević, *Naučno izračunavanje*, Matematički fakultet u Beogradu, 2019. [E-Book] Available: <http://ni.matf.bg.ac.rs/>
- [19] D. Radunović, *Numeričke metode*. Akademski Misao, 2004.
- [20] I. Selesnick, "Sparse deconvolution (an MM algorithm)", *Connexions*, 2012.