Универзитет у Београду
Математички факултет

Карактеризација Левијеве расподеле и нови тест сагласности заснован на њој

мастер рад

Жикица Лукић

септембар 2020.

Предговор

Карактеризације расподела и тестови сагласности засновани на њима играју важну улогу у непараметарској статистици. Тестови сагласности засновани на карактеризацијама су важни јер су такви тестови често слободни од параметра расподеле, што омогућава тестирање сложених хипотеза. Прве карактеризације расподела јављају се двадесетих година XX века и у последње време постоји велики број радова на ту тему.

Рад се састоји од три међусобно повезане целине. У првој целини пажња је посвећена увођењу појмова и доказивању теорема које су коришћене у даљем раду. Овој целини одговарају прва два поглавља рада. У другој целини пажња је посвећена постојећим карактеризацијама расподела и тој целини одговара један део трећег поглавља рада. Последња целина посвећена је тестовима сагласности са Левијевом расподелом. Конструисани су тестови сагласности, испитана асимптотска својства неких тестова и израчунате емпиријске моћи ради поређења њихове ефикасности. Такође, наведена је једна примена нових тестова. Ова целина заузима другу половину треће главе, четврту, пету и шесту главу рада.

Изјаве захвалности

Највећу захвалност за израду овог рада дугујем својој менторки, доц. др Бојани Милошевић. Несебично залагање, непрестана подршка и бројне сугестије одиграле су кључну улогу у настанку овог рада. Такође, дугујем јој захвалност и на мотивисању за бављење математиком као науком, као и за прилику да се током мастер студија бавим актуелним проблемом.

Посебну захвалност дугујем и члановима комисије, доц. др Марку Обрадовићу и Марији Цупарић на многим корисним сугестијама које су допринеле квалитету овог рада.

Захваљујем се и бившим и садашњим члановима катедре за вероватноћу и статистику Математичког факултета, којима дугујем многа математичка знања.

Захвалност на исказаној подршци током израде овог рада дугујем многобројним пријатељима, а посебно Милени и Далибору.

На концу, захваљујем се својој породици, мами Наталији, сестри Софији и баки Стојки, којима и посвећујем овај рад.

Садржај

1 О Левијевој расподели

1.1 Својства Левијеве расподеле

У овом поглављу изложићемо добро познате чињенице о Левијевој расподели.

Постоји више начина да се дефинише Левијева расподела. Како постоји густина у затвореном облику (што за стабилне расподеле најчешће и није случај), најједноставнији начин је следећи:

Дефиниција 1. *Левијева расподела са параметром размере λ и положаја μ задаје се густином*

$$f(x;\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\frac{\exp\Big\{-\dfrac{\lambda}{2(x-\mu)}\Big\}}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Левијеву расподелу са параметрима $\mu=0$ и $\lambda=1$ називамо стандардном Левијевом расподелом.

Једноставније је увести следећу дефиницију стандардне Левијеве расподеле:

Дефиниција 2. *За случајну величину U кажемо да има стандардну Левијеву расподелу уколико је $U=\frac{1}{Z^2}$, при чему случајна величина Z има стандардну нормалну расподелу.*

Интеграљењем густине расподеле добијамо да је функција расподеле случајне величине U задата са

$$F_U(t)=2\Big[1-\Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{2t}}\Big)\Big].$$

Одавде се диференцирањем добија израз за густину стандардне Левијеве расподеле, што показује да су дефиниције за стандардну Левијеву расподелу еквивалентне.
Одавде можемо, на пример, показати да је математичко очекивање случајне величине U бесконачно. Напишимо по дефиницији

$$EU=\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{u^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2u}}du.$$

Приметимо да је функција $f(x)=e^{-\frac{1}{2x}}$ растућа по x, па важи следеће:

$$EU\geq\int\limits_{[1,\infty)}\frac{u^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}du=\infty.$$

Функција генератриса момената стандардне Левијеве расподеле није коначна за сваку позитивну вредност аргумента, а дисперзија такође не постоји. Моменти негативног реда постоје и могуће их је израчунати. Преносимо резултат из [35]. Нека је $n>0$. Тада

$$E(U^{-n})=\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{u^{-n-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2u}}du.$$

Увођењем смене $t=\frac{1}{u}$ записани интеграл постаје

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{u^{-n-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2u}}du=\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t}{2}}dt.$$

Увођењем смене $x=\frac{u}{2}$ записани интеграл добија познати облик:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t}{2}}dt=\frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}x^{n-\frac{1}{2}}e^{-x}dx.$$

Коначно, имамо да важи следећа формула:

$$E(U^{-n}) = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big),$$

где је $\Gamma(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^{t-1}e^{-x}dx$ ознака за стандардну гама функцију. Такође из својстава гама функције можемо приметити да важи да је

$$EU^{-(n+1)} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\Big(n+\frac{3}{2}\Big) = 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)EU^{-n}.$$

Више информација може се пронаћи у раду [2].

Појам стабилне расподеле увео је Пол Леви у [31]. У том смислу је следећа дефиниција од значаја (на исти начин формулисана као у [34]):

Дефиниција 3. *За случајну величину (њену расподелу, њену функцију расподеле) X кажемо да је стабилна ако за две независне копије $X_1 \stackrel{d}{=} X$ и $X_2 \stackrel{d}{=} X$ и произвољне константе $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ постоје реални бројеви $a \geq 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такви да важи*

$$c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{d}{=} aX + b.$$

Касније ће нам бити потребан и појам строго стабилне случајне величине.

Дефиниција 4. *За случајну величину (њену расподелу, њену функцију расподеле) X кажемо да је строго стабилна ако за две независне копије $X_1 \stackrel{d}{=} X$ и $X_2 \stackrel{d}{=} X$ и произвољне константе $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ постоји реалан број $a \geq 0$ такав да важи*

$$c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{d}{=} aX.$$

Може се увести и следећа дефиниција:

Дефиниција 5. *Случајна величина X (њена расподела, њена функција расподеле) је стабилна ако за сваки природан број $n \geq 2$ постоје константе $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ такве да важи следећа једнакост:*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} a_nX + b_n,$$

где су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне копије случајне величине X.

Левијева расподела је стабилна (в. на пример [51] за монографски приступ). У раду [25] дата је следећа теорема за карактеристичну функцију стабилне расподеле:

Теорема 1. *Стабилна случајна величина X и њена расподела имају карактеристичну функцију следећег облика:*

$$\varphi_X(t) = \exp\Big\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha(1-i\beta\mathrm{sgn}(t)\omega(t,\alpha)) + i\mu t\Big\},$$

при чему је $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \alpha \in [0,2), \beta \in [-1,1]$ и при чему је

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\dfrac{\pi\alpha}{2}, & \text{ако је } \alpha \neq 1, \\ -\dfrac{2}{\pi}\log|t|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } t > 0, \\ -1, & \text{ако је } t < 0, \\ 0, & \text{ако је } t = 0. \end{cases}$$

Напомена 1. *Доказ је могуће наћи у [18].*

За случајну величину X која је стабилна, а чија се карактеристична функција може написати у облику датом у претходној теореми уводимо следећу ознаку $X \in \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. За случајну величину X са Левијевом расподелом са параметром скалирања σ и параметром размере μ може се показати да важи да је $X \in \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu)$. Одатле и из теореме о облику карактеристичне функције стабилних расподела директно следи да је карактеристична функција случајне величине X дата са

$$\varphi_X(t) = \exp\{i\mu t - \sigma^{\frac{1}{2}}|t|^{\frac{1}{2}}(1 - i \cdot sgn(t))\}.$$

Одавде можемо извести нека битна својства.

Напомена 2. *Нека је $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Ако X има стандардну Левијеву расподелу, тада $\sigma X + \mu$ има Левијеву расподелу са параметром скалирања σ и параметром положаја μ.*

Одавде и из својства стабилности следи да је класа Левијевих расподела затворена за трансформације промене параметра размере и положаја. Такође можемо закључити да је очекивање произвољне Левијеве расподеле бесконачно (што се могло показати и евалуирањем првог извода карактеристичне функције у нули). Додатно, важи својство да је класа Левијевих расподела затворена за конволуције.

1.2 Оцене параметара Левијеве расподеле

Како смо у претходном одељку видели да је Левијева расподела стабилна, прецизније припада класи $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu)$, то се за оцене непознатих параметара $\sigma > 0$ и μ могу користити методе оцењивања параметара стабилних расподела, при чему се познатим сматрају вредности $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = 1$. Детаљан преглед оваквих оцена може се наћи у [46]. Од интереса су такође и [7], [4] за апроксимативну оцену максималне веродостојности. За оцену квантилима су од значаја и [17],[32]. За оцену помоћу фракционалног метода нижих момената (енг. fractional lower order moment method) видети [43] и [50]. За оцену методом логаритамске кумуланте видети [37]. За оцену методом логаритамских момената видети [27]. Решавање проблема оцене параметра Левијеве расподеле обрађено је и у радовима који се баве применама (видети на пример [48] за примену у медицини или [6] за примену у финансијама).

За потребе овог рада довољно је извести оцену методом максималне веродостојности параметра скалирања $\sigma > 0$. Нека је дат прост случајан узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из Левијеве расподеле са параметром скалирања $\sigma > 0$ и нека је параметар положаја μ познат. Без умањења општости можемо претпоставити да је $\mu = 0$ (уместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ посматрамо узорак $X_1 - \mu, X_2 - \mu, \ldots, X_n - \mu$). Формирамо стандардним поступком логаритмовану функцију веродостојности као

$$\begin{aligned}
\ell(x_1, \ldots, x_n; \sigma) &= \log\Big(\prod_{k=1}^{n} f(x_k; \sigma)\Big) \\
&= \log\Big(\prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{\sigma}{2x_k})}{x_k^{\frac{3}{2}}}\Big) \\
&= \log\Big(\sigma^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma}{2x_i}\Big) \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\frac{3}{2}}\Big) \\
&= \frac{n}{2}\log\sigma - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma}{2x_i} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i.
\end{aligned}$$

Одавде диференцирањем по σ добијамо следеће:

$$\frac{d\ell}{d\sigma} = \frac{n}{2\sigma} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Изједначавањем овог израза са нулом и решавањем по σ добијамо да је оцена параметра σ дата са

$$\hat{\sigma} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k}}.$$

Двоструким диференцирањем функције веродостојности добијамо

$$\frac{d^2\ell}{d\sigma} = -\frac{n}{2\sigma^2} < 0.$$

Закључујемо да је $\hat{\sigma}$ заиста оцена методом максималне веродостојности јер је $\hat{\sigma}$ максимум функције веродостојности.

Позната су својства ове оцене (видети [3]) и важи да је:

$$E\hat{\sigma} = \frac{n}{n-2}\sigma,$$

$$D\hat{\sigma} = \frac{2n^2}{(n-2)^2(n-4)}\sigma^2, \text{ за } n > 4.$$

Одавде добијамо да је $\hat{\sigma}$ асимптотски непристрасна и постојана. Пошто из L^2 конвергенције следи конвергенција у вероватноћи, применом Чебишовљеве неједнакости, добија се да је оцена постојана. Такође важи следеће:

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{I(\sigma)}\Big),$$

при чему је $I(\sigma) = E\Big[-\frac{d\log(f(X;\sigma))}{d\sigma}\Big]^2$ информациона функција Фишера.Имамо да је

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= E\Big[-\frac{d\log(f(X;\sigma))}{d\sigma}\Big]^2 = E\Big(\frac{1}{2\sigma} - \frac{1}{2X}\Big)^2 \\ &= E\Big(\frac{1}{4\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma X} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma}E\frac{1}{X} + \frac{1}{4}E\Big(\frac{1}{X}\Big)^2. \end{aligned}$$

Напомена 3. *Ако X има Левијеву расподелу са параметром скалирања σ, важи да $\frac{1}{X} \in \gamma(\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{2})$[3], а из својстава гама расподеле имамо да је $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k} \in \gamma(\frac{n}{2}, \frac{\sigma}{2})$.*

Сада је јасно да важи

$$E\frac{1}{X} = \frac{1}{\sigma},$$

$$E\Big(\frac{1}{X}\Big)^2 = \frac{2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} = \frac{3}{4\sigma^2}.$$

Коначно, имамо да је

$$I(\sigma) = \frac{1}{4\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{3}{4\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Одавде добијамо асимптотску расподелу

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, 2\sigma^2).$$

Такође, оцену $\hat{\sigma}$ можемо записати као статистички функционал на следећи начин:

$$\hat{\sigma} = T(\hat{F}_n) = \Big(\int \frac{1}{X} d\hat{F}_n(X)\Big)^{-1},$$

при чему смо са $\hat{F}_n$ означили емпиријску функцију расподеле. Сада означимо са

$$g(t; F, x) = T((1-t)F + \delta_x t),$$

при чему је δ_x Диракова мера сконцентрисана у x. Сада је

$$g(t; F, x) = \Big(\int \frac{1}{X} d((1-t)F + \delta_x t)\Big)^{-1} = \Big((1-t)\int \frac{1}{X} dF + \frac{t}{x}\Big)^{-1}$$
$$= \Big((1-t)T(F) + \frac{t}{x}\Big)^{-1}.$$

Ако пронађемо извод ове функције по t добијамо израз

$$h(t) = -\frac{-T(F) + \frac{1}{x}}{((1-t)T(F) + \frac{t}{x})^2}.$$

Имамо да је утицајна функција по дефиницији дата са $h(0)$, односно

$$IF(x; T, F) = \frac{1}{T(F)} - \frac{1}{xT^2(F)}.$$

Такође, важи и следећа Бахадурова репрезентација:

$$\sqrt{n}(T(\hat{F}_n) - T(F)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} IF(X_j; T, F) + R_n,$$

при чему је $R_n = o_P(1)$ при $n \to \infty$.

1.3 О Лапласовој трансформацији

У овом делу навешћемо дефиницију и важна својства Лапласове трансформације случајне величине која ће касније бити кориштена у раду.

Дефиниција 6. *Нека је X ненегативна случајна величина са густином f_X. Лапласова трансформација случајне величине X дефинише се као*

$$L_X(s) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-sx} f_X(x) dx = E(e^{-sX}) = f_X^*(s).$$

Напомена 4. *[14] За свако $s > 0$ $L(s)$ има изводе свих редова и сваки извод се добија диференцирањем под знаком интеграла. Ово својство користимо у доказу својства 4. из наредне леме.*

Лема 1. *Лапласова трансформација има следећа својства:*

1. $L_X(0) = 1$,
2. $0 \le L_x(s) \le 1$, *за* $s \ge 0$,
3. *Ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне случајне величине, тада важи*

$$L_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} L_{X_i}(s),$$

4. $EX^n = (-1)^n L_X^{(n)}(0)$ *ако постоји и коначно је математичко очекивање.*

Доказ. 1. Важи $L_X(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = 1$.

2. За доњу границу уочимо да је $e^{-sx}f(x)$ ненегативна функција за свако $s, x \geq 0$, док је за горње ограничење потребно уочити да је функција $e^{-sx}f(x)$ опадајућа по s, те важи $e^{-sx}f(x) \leq f(x)$ и интеграљењем добијамо и горњу границу.

3. Поступамо по дефиницији.

$$L_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(s) = Ee^{-s\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = E\prod_{i=1}^{n} e^{-sX_i} = \prod_{i=1}^{n} L_{X_i}(s),$$

при чему је последња једнакост оправдана независношћу случајних величина $X_1, \ldots, X_n$.

4. Имамо да важи

$$L_X^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds}Ee^{-sX} = E(-1)^n X^n e^{-sX},$$

одакле је

$$(-1)^n L_X^{(n)}(0) = EX^n,$$

чиме је доказ завршен.

□

Лема 2. *Лапласова трансформација је линеарна, односно*

$$(af + bg)^*(s) = af^*(s) + bg^*(s).$$

Доказ.

$$(af + bg)^*(s) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}(af(x) + bg(x))dx = a\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}f(x)dx + b\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}g(x)dx = af^*(s) + bg^*(s).$$

□

Наводимо још једну битну теорему која говори о томе да Лапласова трансформација једнозначно одређује расподелу случајне величине уз услов да је f експоненцијалног реда b, односно да за неко $b > 0$ важи $\sup\limits_{t>0} \frac{f(t)}{e^{bt}} < \infty$:

Теорема 2 (Пост-Видерова формула инверзије)**.** *Нека је f непрекидна и ограничена функција на $(0, \infty)$. Тада важи*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\Big(\frac{n+1}{t}\Big)^{n+1}\frac{d^n}{dt}f^*\big(\frac{n+1}{t}\big).$$

Напомена 5. *Доказ теореме може се наћи нпр. у [14] или у раду [8].*

Пошто смо раније видели да за случајну величину X са Левијевом расподелом са параметром скалирања σ важи $X \in \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, 0)$, можемо да искористимо следећи резултат из [10]:

Теорема 3. *Ако $X \in \mathcal{S}_\alpha(\sigma, 1, 0)$, тада $L_X(s) = e^{as^\alpha}$, при чему $a = -\frac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$.*

Уврштавањем $\alpha = \frac{1}{2}$ имамо

$$a = -\frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\pi\frac{1}{2}}{2}} = -\frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2\sigma}.$$

Овиме смо добили израз за Лапласову трансформацију случајне величине X која има Левијеву расподелу са параметром скалирања σ, односно

$$L_X(s) = e^{-\sqrt{2\sigma s}}.$$

1.4 О применама Левијеве расподеле

Поред већ наведених примена, Левијева расподела је од значаја у физици (видети нпр. [22], [36], [16]). У финансијама игра значајну улогу јер Левијева расподела има тешке репове. Користи се углавном за моделовање цена опција заједно са осталим α-стабилним расподелама, али је од посебног значаја јер је једна од три α-стабилне расподеле којима се густина може представити у затвореном облику (видети нпр. [1]). Такође игра значајну улогу у биологији [49], теорији игара [40] и сл. За монографски приступ видети нпр. [47].

2 Интермецо о U и V-статистикама

2.1 Дефиниција и основна својства

Уведимо појам U-статистика и неке познате резултате који ће касније бити кориштени у раду. Нека је $\Theta = h(F)$ статистички функционал. Нека постоји функција од m аргумената $\phi(X_1, \ldots, X_m)$ за коју важи $E\phi(X_1, \ldots, X_m) = \Theta$. Без умањења општости можемо претпоставити да је ϕ симетрична функција својих аргумената.

Дефиниција 7. *Функцију*

$$U = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_m} \phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$$

називамо U-статистиком. Број m називамо редом U-статистике, а ϕ њеним језгром.

Добро су позната својства U и $V-$статистика (видети нпр. [41]). Дефинишимо појам i-те пројекције U-статистике који ће бити од значаја за формулисање даљих резултата.

Дефиниција 8. *Нека је ϕ језгро U-статистике. i-ту пројекцију ове U-статистике дефинишемо као*

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_i) = E(\phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, X_{i+1}, \ldots X_m) \text{ за } 1 \leq i \leq m,$$

или еквивалентно преко условног математичког очекивања

$$\phi(x_1, \ldots, x_i) = E(\phi(X_1, \ldots, X_m) \mid X_1 = x_1, \ldots, X_i = x_i) \text{ за } 1 \leq i \leq m.$$

Пројекције имају следећа својства:

Теорема 4. *Нека је $\phi_i(x_1, \ldots, x_i)$ i-та пројекција U-статистике. Важи*

$$E\phi_i(X_1, \ldots, X_i) = \Theta.$$

Ако постоји $D\phi_i(X_1, \ldots, X_i) = \sigma_i^2$ и коначна је, тада важи

$$\mathrm{cov}(\phi(X_{i_1}, \ldots, X_i, X_{i+1}, \ldots X_{i_m}), \phi(X_{i_1}, \ldots, X_i, X'_{i+1}, \ldots, X'_{i_m})) = \sigma_i^2,$$

при чему су $X_1, \ldots, X_m, X'_{i+1}, \ldots, X'_m$ случајне величине са функцијом расподеле F.

Доказ. Послужићемо се познатим својством условног математичког очекивања

$$E\phi_i(X_1, \ldots, X_i) = E(E(\phi(X_1, \ldots, X_m) \mid X_1, \ldots, X_i)) = E\phi(X_1, \ldots, X_n) = \Theta.$$

Сада ставимо

$$\begin{aligned} E\phi_i^2(X_1, \ldots, X_i) = \int \Big[\int \phi(x_1, \ldots, x_m) f(x_{i+1}) \ldots f(x_m) dx_{i+1} \ldots dx_m \\ \times \int \phi(x_1, \ldots, x_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_m) f(x'_{i+1}) \ldots f(x'_m) dx'_{i+1} \ldots dx'_m \Big] dx_1 \ldots dx_i \\ = \int \int \Big[\phi(x_1, \ldots, x_m) \phi(x_1, \ldots, x_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_m) \\ \times f(x_1) \ldots f(x_m) f(x'_{i+1}) \ldots f(x'_m) dx_{i+1} \ldots dx_m dx'_{i+1} \ldots dx'_m \Big] dx_1 \ldots dx_i \\ = E(\phi(X_1, \ldots, X_m) \phi(X_1, \ldots, X_i, X'_{i+1}, \ldots, X'_m)). \end{aligned}$$

Сада распишемо чему је једнака дисперзија:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = E(\phi_i(X_1, \ldots, X_i)^2) - (E\phi_i(X_1, \ldots, X_i))^2 \\ = E(\phi(X_1, \ldots, X_m)\phi(X_1, \ldots, X_i, X'_{i+1}, \ldots, X'_m)) - E\phi(X_1, \ldots, X_m) E\phi(X_1, \ldots, X_i, X'_{i+1}, \ldots, X'_m) \\ = \mathrm{cov}(\phi(X_1, \ldots, X_m) \phi(X_1, \ldots, X_i, X'_{i+1}, \ldots, X'_m)), \end{aligned}$$

што је и требало показати. □

Кориштењем ове теореме могуће је извести и следећи резултат о дисперзији U-статистике:

Теорема 5. *Претпоставимо да постоје и коначне су величине σ_i^2 за $i = 1, 2, \ldots, n$ дефинисане као у претходној теореми. Тада важи*

$$DU = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \sigma_k^2.$$

Доказ. Због компактности записа извешћемо доказ теореме у случају $m = 2$. За $m > 2$ тврђење теореме такође важи.

$$DU = D\Big(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i<j} \phi(X_i, X_j)\Big) = \frac{1}{\binom{n}{2}^2} \sum_{i<j,k<l} \operatorname{cov}(\phi(X_i, X_j)\phi(X_k, X_l))$$

$$= \binom{n}{2}^{-1} 2(n(n-1))^{-1} \Big(\frac{n(n-1)}{2}\sigma_2^2 + \binom{n}{2}(n-2)\sigma_1^2\Big) = \binom{n}{2}^{-1} (2(n-2)\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Тада важи

$$DU = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} \binom{n-2}{2-k} \sigma_k^2.$$

□

Последица 1. *Уколико је језгро недегенерисано, тј. важи $\sigma_1^2 > 0$ и при томе је за свако $k = 1, 2, \ldots, m$ $\sigma_k^2 < \infty$, тада је*

$$D(\sqrt{n}U) \xrightarrow{n\to\infty} m^2\sigma_1^2.$$

Доказ. Довољно је направити процену израза $\binom{n-m}{m-k}$, уврстити га у израз за дисперзију $U-$ статистике и наћи граничну вредност при $n \to \infty$. Процењујемо на следећи начин:

$$\binom{n-m}{m-k} = \frac{(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

Сада уврштавањем ове процене у израз за дисперзију U-статистике добијамо

$$DU = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \sigma_k^2 \sim \binom{n}{m}^{-1} \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \frac{n^{m-i}}{(m-i)!} \sigma_i^2 \sim \frac{\sigma_1^2 m^2}{n}.$$

Одавде пуштањем лимеса при $n \to \infty$ завршавамо доказ. □

2.2 Асимптотско понашање U и $V-$статистика

При условима недегенерисаности језгра и коначности сваке пројекције важи и јаки закон великих бројева за U-статистике.

Теорема 6 (в. [21])**.** *При претпоставкама недегенерисаности језгра и ако је за свако $k = 1, 2, \ldots, m$ $\sigma_k^2 < \infty$, тада је при $n \to \infty$*

$$U \xrightarrow{cc.} \Theta.$$

Познато је да из јаког закона великих бројева следи слаби, односно да важи следећа последица:

Последица 2. *При претпоставкама претходне теореме важи и слаби закон великих бројева, односно при $n \to \infty$ важи*

$$U \xrightarrow{\mathbb{P}} \Theta.$$

Наводимо и следећу важну теорему коју је такође први показао Василиј Хефдинг у [20]:

Теорема 7 (Хефдингова теорема)**.** *При претпоставкама недегенерисаности језгра и ако за свако* $k = 1, 2, \ldots, m$ *важи* $\sigma_k^2 < \infty$, *тада је при* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(U - \Theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, m^2\sigma_1^2).$$

Доказ. Уведимо следећу ознаку ради краћег записа:

$$\eta(X_i) = (\phi_1(X_i) - \Theta) \text{ за свако } 1 \le i \le n.$$

Низ $\eta(X_i)$ је низ независних једнако расподељених случајних величина и при томе за $\phi_1(X_i)$ важи да су непристрасне оцене Θ, као и коначност дисперзије. Можемо применити централну граничну теорему на низ $\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta(X_i)$ и добити

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\eta(X_i) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, m^2\sigma_1^2).$$

Напишимо

$$\sqrt{n}(U - \Theta) = \frac{m}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\eta(X_i) + \sqrt{n}R_n.$$

За израз

$$\sqrt{n}R_n = \sqrt{n}(U - \Theta) - \frac{m}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\eta(X_i)$$

треба показати да тежи нули у средњем реда 2. Јасно је да је $ER_n = 0$. Сада је $ER_n^2 = DR_n$, па важи

$$\begin{aligned}
D\left(\sqrt{n}R_n\right) = nDR_n &= nD\left((U - \Theta) - \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta\left(X_i\right)\right)\\
&= nD\left((U - \Theta) - \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\phi_1\left(X_i\right) - \Theta\right)\right)\\
&= nD\left(U - \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(X_i\right) - (m-1)\,\Theta\right)\\
= nD\left(U - \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(X_i\right)\right) &= nDU + nD\left(\frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(X_i\right)\right) - 2n\mathrm{cov}\left(U, \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(X_i\right)\right).
\end{aligned}$$

Прва два сабирка теже ка $m^2\sigma_1^2$ (за други сабирак важи једнакост). За последњи сабирак имамо да важи

$$\begin{aligned}
n\mathrm{cov}\left(U, \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(X_i\right)\right) &= n\mathrm{cov}\left(\binom{n}{m}^{-1}\sum_{i_1<\cdots<i_n}\phi\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}\right), \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(X_i\right)\right)\\
&= m^2\mathrm{cov}\left(\phi\left(X_1, \ldots, X_m\right), \phi_1\left(X_i\right)\right).
\end{aligned}$$

Ако покажемо да важи

$$E\left(\phi\left(X_1, \ldots, X_m\right)\phi_1\left(X_i\right)\right) = E\left(\phi_1\left(X_i\right)^2\right)$$

доказ је завршен. Приметимо да је

$$E(\phi(X_1, \ldots, X_m)\phi_1(X_i)) = \int\phi(x_1, \ldots, x_m)\Big(\int\phi(x_1, \ldots, x_m)dF(x_i)\Big)dF(x_1)\ldots dF(x_m)$$

$$= \int \Big(\int \phi(x_1,\dots,x_m)dF(x_i)\Big)\Big(\int \phi(x_1,\dots,x_m)dF(x_i)\Big)dF(x_1)\dots dF(x_{i-1})dF(x_{i+1})\dots dF(x_m)$$
$$= E\phi_1(X_i)^2.$$

и сада имамо $\mathrm{cov}(\phi(X_1,\dots,X_m),\phi_1(X_i)) = D\phi_1(X_i) = \sigma_i^2$, односно $\sqrt{n}R_n \xrightarrow{L^2} 0$, те применимо теорему Слуцког што завршава доказ. $\square$

Могуће је и следеће релаксирање услова теореме:

Теорема 8 (видети [26])**.** *При претпоставци* $\sigma_1^{\frac{4}{3}} < \infty$ *и ако за свако* $k = 1,2,\dots,m$ *важи* $\sigma_k^2 < \infty$, *тада је при* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(U - \Theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, m^2\sigma_1^2).$$

Напомена 6. *Леман је први уопштио ову теорију на k-узорачки случај, али он овде није од значаја, в. [29].*

За детаљан приказ теорије U-статистика видети монографије [13] и [28]. Такође од значаја могу бити и 6. поглавље у [19], 5. поглавље у [42], као и 6. поглавље у [30].

Посматрајмо сада статистички функционал интегралног типа

$$\Theta = h(F) = \int \phi(x_1,x_2,\dots,x_m)dF(x_1)\dots dF(x_m).$$

Нека је ϕ симетрична функција. Оцена функционала Θ од посебног је значаја и то нас мотивише да уведемо следећу дефиницију:

Дефиниција 9. *Функцију*

$$V = \frac{1}{n^m}\sum_{i_1,\dots,i_m}\phi(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_m})$$

називамо V-статистиком, а функцију ϕ њеним језгром.

V-статистике имају слична асимптотска својства као U-статистике. За V-статистике важи јаки закон великих бројева.

Теорема 9. *Уколико важи* $0 < \sigma_i^2 < \infty$ *за* $i = 1,2,\dots,m$, *тада је*

$$V \xrightarrow{cc.} \Theta.$$

Напомена 7. *За доказ погледати одељак 6.4.2 у [42].*

Такође важи и варијанта теореме Хефдинга, односно важи да U и V-статистике имају исту граничну расподелу:

Теорема 10. *Уколико важи* $0 < \sigma_i^2 < \infty$ *за* $i = 1,2,\dots,m$, *тада је при* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(V - \Theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, m^2\sigma_1^2).$$

2.3 О емпиријским Лапласовим трансформацијама

Раније смо дефинисали Лапласову трансформацију на следећи начин:

$$L_X(s) = Ee^{-sX} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}dF(x).$$

Методом замене функције расподеле F емпиријском функцијом расподеле $\hat{F}_n$ добијамо емпиријску Лапласову трансформацију, односно уводимо следећу дефиницију:

Дефиниција 10. *Емпиријском Лапласовом трансформацијом називамо следећу функцију:*

$$L_X^n(s) = \int e^{-sx} d\hat{F}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-sX_k}$$

за $s > 0$ *и прост случајан узорак* $X_1, \ldots, X_n \in F$.

Теорема 11. *За емпиријску Лапласову трансформацију важи јаки закон великих бројева уколико је испуњен услов коначности дисперзије, односно ако је* $De^{-tX_1} < \infty$, *односно при* $n \to \infty$ *је за фиксирано* $t > 0$

$$L_X^n(t) \xrightarrow{cc.} L_X(t).$$

Напомена 8. *Ово тврђење је последица Колмогоровљевог јаког закона великих бројева (видети нпр. [44]) и чињенице да су при независности* $X_1, \ldots, X_n$ *и случајне величине* $e^{-tX_1}, \ldots, e^{-tX_n}$ *такође независне, па ред*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{De^{-tX_k}}{k^2}$$

конвергира.

Из горњег тврђења следи и слаби закон великих бројева, али можемо формулисати и следеће тврђење за емпиријске Лапласове трансформације:

Теорема 12. *Нека је дат низ независних једнако расподељених случајних величина* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *такав да је* $EX_1^2 < \infty$. *Тада важи слаби закон великих бројева за емпиријске Лапласове трансформације, односно при* $n \to \infty$ *за фиксирано* $t > 0$ *важи*

$$L_X^n(t) \xrightarrow{P} L_X(t).$$

Напомена 9. *Тврђење се директно изводи из Чебишовљевог слабог закона великих бројева. Коначност првог момента (а самим тиме и дисперзије) следи из Хелдерове неједнакости.*

Од значаја ће нам такође бити и следеће две дефиниције:

Дефиниција 11. *Нека је* $\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ *симетрична функција својих аргумената и нека је* $t > 0$.*Тада дефинишемо* U*-емпиријску Лапласову трансформацију на следећи начин*

$$L_X^U(t) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_m} \exp(-t\psi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})).$$

Јасно је из дефиниције да је за свако $t > 0$ $L_X^U(t)$ једна $U-$ статистика са језгром

$$\phi(X_1, \ldots, X_m; t) = \exp(-t\psi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})),$$

те за њу важи теорија везана за $U-$ статистике. Увешћемо и следећу дефиницију на аналоган начин:

Дефиниција 12. *Нека је* $\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ *симетрична функција својих аргумената и нека је* $t > 0$.*Тада дефинишемо* V*-емпиријску Лапласову трансформацију на следећи начин*

$$L_X^V(t) = \frac{1}{n^m} \sum_{i_1=1, i_2=1, \ldots, i_m=1}^{n} \exp(-t\psi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})).$$

Такође примећујемо да је L_X^V једна $V-$статистика са језгром

$$\phi(X_1, \ldots, X_m; t) = \exp(-t\psi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})),$$

те за њу важи теорија везана за $V-$статистике.

3 Карактеризације Левијеве расподеле и тестови сагласности засновани на њима

3.1 О карактеризацијама Левијеве расподеле

У литератури се појављује неколико карактеризација Левијеве расподеле. Наводимо их овде (приближно) хронолошким редом како су се појављивале у радовима.

Теорема 13 (Карактеризација преко гама расподеле)**.** *Случајна величина X има Левијеву расподелу са параметром скалирања σ ако и само ако $Y = \frac{1}{X} \sim \frac{U}{\sigma}$, при чему за случајну величину U важи $U \in \chi^2_1$.*

Јасно је из претходне теореме да је свеједно да ли посматрамо узорак $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из Левијеве расподеле са параметром скалирања σ или узорак $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ из гама расподеле са параметрима $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sigma}{2}$.

Наводимо сада и нека својства инверзне Гаусове расподеле. Она је важна зато што је њена веза са Левијевом расподелом коришћена у литератури за конструкцију теста сагласности (видети [39]). У литератури се најчешће налази следећа дефиниција:

Дефиниција 13. *Случајна величина Z са инверзном Гаусовом расподелом са параметром размере $\lambda > 0$ и параметром положаја $\mu > 0$ задаје се густином*

$$f_Z(z;\mu,\sigma) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi z^3}\Big)^{\frac{1}{2}} \exp\Big(-\frac{\lambda(z-\mu)^2}{2\mu^2 z}\Big).$$

Сада увођењем смене $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$ и $\sigma = \lambda$ густина добија следећи облик:

$$f_Z(z;\theta,\sigma) = \Big(\frac{\sigma}{2\pi z^3}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{\theta} \exp\Big(-\frac{\theta^2 z}{2\sigma} - \frac{\sigma}{2z}\Big).$$

Одавде граничним процесом кад $\theta \to 0$ добијамо густину Левијеве расподеле са параметром скалирања σ. Ова релација није карактеризација, али је искоришћена за тестирање, па је овде наводимо. Од значаја су и следеће две карактеризације Невзорова и Ахсанулаха.

Теорема 14 (Теорема 3.1 у [2])**.** *Нека су X_1, X_2, X_3 случајне величине које су независне и једнако расподељене са густином $f(x)$ и функцијом расподеле F таквом да важи $F(0) = 0, F(x) > 0$ за свако $x > 0$. Тада су X_1 и $\frac{X_2+X_3}{4}$ једнако расподељене ако и само ако X_1 има Левијеву расподелу са параметром скалирања σ.*

Такође нам је од значаја и карактеризација Невзорова и Ахсанулаха дата следећом теоремом:

Теорема 15 (Теорема 2.1 у [35])**.** *Нека су X, Y и Z независне и једнако расподељене случајне величине са густином $f(x)$ дефинисаном на $(0,\infty)$. Тада су*

$$cZ \text{ и } \frac{c(aX+bY)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b)^2}},\ 0 < a,b < \infty, c \neq 0 \text{ је константа,}$$

једнако расподељене ако и само ако је $f(x)$ густина стандардне Левијеве расподеле.

Предлажемо следећу теорему уместо Теореме 15:

Теорема 16. *Нека су X, Y, Z једнако расподељене независне случајне величине са густином $f(x)$ дефинисаном на интервалу (μ,∞). Тада су dZ и $d\dfrac{aX+bY}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$, $d \neq 0, 0 < a,b < \infty$, једнако расподељене ако и само ако је $\mu = 0$ и $f(x)$ је густина Левијеве расподеле дата са*

$$f(x;\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{\exp\Big\{-\dfrac{\lambda}{2x}\Big\}}{x^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

при чему је λ параметар скалирања.

Напомена 10. *У [5] наводи се ово тврђење у специјалном случају $a = b$, но не даје се потпун доказ. Наводи се да се теорема може показати помоћу следеће теореме:*

Теорема 17. *[Теорема 3 из [18] на страни 172] Нека су X, X_1, X_2 независне и једнако расподељене случајне величине које имају строго стабилну расподелу са експонентом α. Тада важи*

$$s^{\frac{1}{2}} X_1 + t^{\frac{1}{2}} X_2 \stackrel{d}{=} (s+t)^{\frac{1}{2}} X, \text{ за свако } s, t > 0.$$

Није наведено како из ове релације следи карактеризација, тј. зашто се карактеризација односи само на $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\lambda, 1, 0)$, а то је нетривијално. Такође, теорема 2.2 у [5] није добро пренета јер се односи на строго стабилне расподеле, а реч строго у формулацији недостаје.

На овоме месту дајемо и потпун доказ теореме 16:

Доказ. Како је d константа и не утиче на расподелу, можемо без умањења општости претпоставити да је $d = 1$.Ако X, Y и Z имају густину (2) треба показати

$$\varphi_{\frac{aX+bY}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}}\Big(t\Big) = \varphi_Z\Big(t\Big), \tag{3}$$

за свако $t \in (0, \infty)$. Лева страна једнакости (3) је због независности X и Y дата са

$$\varphi_{\frac{aX+bY}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}}\Big(t\Big) = \varphi_X\Big(\frac{at}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big)\varphi_Y\Big(\frac{bt}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big)$$

$$= \exp\left\{i\mu\frac{at}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} - \sqrt{-2i\lambda\frac{at}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}}\right\}\exp\left\{i\mu\frac{bt}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} - \sqrt{-2i\lambda\frac{bt}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}}\right\}$$

$$= \exp\left\{i\mu\frac{(a+b)t}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} - \sqrt{-2i\lambda t}\right\}.$$

Десна страна једнакости (3) је дата са

$$\varphi_Z(t) = \exp\left\{i\mu t - \sqrt{-2i\lambda t}\right\}.$$

Једнакост важи само ако је $\mu = 0$.

Доказ у супротном смеру прати онај дат у [35]. Ако су dZ и $d\frac{aX+bY}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$, $d \neq 0, 0 < a, b < \infty$ једнако расподељене, онда можемо без губитка општости претпоставити $d = 1$ и да важи следећа функционална једначина:

$$\varphi_{\frac{aX+bY}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}}\Big(t\Big) = \varphi_X\Big(\frac{at}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big)\varphi_Y\Big(\frac{bt}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big) = \varphi_Z\Big(t\Big),$$

за свако $t \in (0, \infty)$. Аналогно као у [35], сменимо t са $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 t$, па горњи израз постаје

$$\varphi(at)\varphi(bt) = \varphi((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 t).$$

Логаритмовањем добијамо следећу једначину:

$$\log\varphi(at) + \log\varphi(bt) = \log\varphi((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 t).$$

Означимо са $z(t) = \log\varphi(t)$. Добијамо следећу функционалну једначину:

$$z(at) + z(bt) = z(at + bt + 2\sqrt{ab}t),$$

односно ако ставимо $at = x$, $bt = y$ једначина постаје

$$z(x) + z(y) = z(x + y + 2\sqrt{xy}).$$

Сменом $g(t^2) = z(t)$ ова једначина поприма познати облик Кошијеве функционалне једначине

$$g(x^2) + g(y^2) = g((x + y)^2).$$

Враћањем натраг добијамо да су једина решења полазне функционалне једначине дата са

$$\log\varphi(t) = \pm\sqrt{ct}, c \in \mathbb{C}.$$

Како је $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$, то закључујемо да је $\varphi(t) = exp\left\{-\sqrt{ct}\right\}$.

Како је φ карактеристична функција, следећа једнакост важи: $\varphi(-t) = \bar{\varphi}(t)$, при чему је са $\bar{a}$ означен комплексни конјугат броја $a \in \mathbb{C}$. Можемо одабрати $c = -2i\lambda$, где $\lambda > 0$. Овај део захтева додатно објашњење:

Нека је $c = re^{i\theta}$, тада је главна вредност корена $\sqrt{c} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Одавде је

$$\varphi(t) = e^{-\sqrt{rt}e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{-\sqrt{rt}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}.$$

Сада како важи $\varphi(-t) = \bar{\varphi}(t)$, имамо да мора важити

$$\varphi(-t) = e^{-i\sqrt{rt}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})} = e^{-\sqrt{rt}(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2})} = \bar{\varphi}(t),$$

јер је познато да је $e^{\bar{iz}} = e^{-iz}$. Из горње једначине мора бити

$$i\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}.$$

Одавде добијамо $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, односно $\theta = \frac{\pi}{2}$. Коначно,

$$c = r\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = ir,$$

то јест c је чисто имагинаран, па је могућ одабир $c = -2i\lambda$.

Треба још прокоментарисати зашто морамо бирати решење функционалне једначине као $\varphi(t) = e^{-\sqrt{ct}}$. Претпоставимо супротно, нека је $\varphi(t) = e^{\sqrt{ct}}$. Тада је

$$\varphi(t) = e^{\sqrt{rt}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})},$$

одакле је

$$|\ \varphi(t)\ | = \Re\varphi(t) = e^{\sqrt{rt}\cos\frac{\theta}{2}},$$

што је реална функција која није ограничена јер важи $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$.

Са друге стране, одабиром негативног решења функционалне једначине, имамо да је

$$\varphi(t) = e^{-\sqrt{rt}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})},$$

односно

$$|\ \varphi(t)\ | = e^{-\sqrt{t}}e^{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Израз $e^{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}$ је константа у односу на t, а за функцију $s(t) = e^{-\sqrt{t}}$ важи следеће:

- s је глатка, $s(0) = 1$.
- $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$.
- $\frac{ds}{dt} < 0$ за све $t > 0$.

Из наведеног следи $s(t) \leq 1$. Додатно, како мора бити и $\mid \varphi(t) \mid \leq 1$, то је из $\varphi(0) = 1$ и

$$e^{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} = 1,$$

што може бити тачно само ако је $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ово је још један начин да се види да c мора бити чисто имагинаран. Такође је јасно из облика карактеристичне функције да мора бити $\mu = 0$. Овиме је доказ комплетиран. □

Такође, наводимо још један резултат:

Теорема 18 (Теорема 2.2 у [35]). *Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне једнако расподељене случајне величине са густином $f(x)$ дефинисаном на $(0, \infty)$. Тада су cX и $\frac{c(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n^2}$, при чему је $c \neq 0$ константа, једнако расподељене ако и само ако је $f(x)$ густина стандардне Левијеве расподеле.*

Предлажемо следећу теорему уместо теореме 2.2:

Теорема 19. *Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ независне и једнако расподељене случајне величине са густином $f(x)$ дефинисаном на интервалу (μ, ∞). Тада су dX и $\dfrac{d(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2}$, при чему је $d \neq 0$ константа, једнако расподељене ако и само ако је $f(x)$ дата са (2) и $\mu = 0$.*

Даћемо два доказа овог тврђења. Један прати доказ дат у [35], док други није познат у литератури.

Доказ. Без смањења општости можемо претпоставити да је $d = 1$. Слично као у претходном доказу може се показати да је карактериситчна функција израза $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n^2}$ дата са:

$$\exp\left\{\frac{i\mu t}{n} - n\sqrt{-2\lambda\frac{t}{n^2}}\right\} = \exp\left\{\frac{i\mu t}{n} - \sqrt{-2\lambda t}\right\}.$$

Одавде имамо да једнакост са карактеристичном функцијом случајне величине X важи ако је $\mu = 0$.

Други део тврђења може се показати аналогно као у [35]. Ако су X и $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n^2}$ једнако расподељене, онда важи следећа једнакост за карактеристичне функције:

$$\varphi(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)^n,$$

где је φ карактеристична функција случајне величине X јер су X и $X_1, \ldots, X_n$ једнако расподељене случајне величине. Увођењем смене (као у [35]): $\psi(t) = (\log\varphi(t))^2$, добијамо једначину:

$$\psi(t) = n^2\psi\left(\frac{t}{n^2}\right).$$

Решење ове једначине је $\psi(t) = ct$. Из ове релације добијамо $\varphi(t) = \exp\left\{\pm\sqrt{ct}\right\}$ и како је $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$, закључујемо да $\varphi(t) = \exp\left\{-\sqrt{ct}\right\}$. Како је φ карактеристична функција, важи да је $\varphi(-t) = \varphi^*(t)$ и може се одабрати $c = -2i\lambda$ (исти аргумент као у доказу претходне теореме). Сада је

$$\varphi(t) = \exp\left\{-\sqrt{-2i\lambda t}\right\}$$

и одатле је јасно да $\mu = 0$, што завршава доказ. □

Напомена 11. *Теорему можемо доказати директно из претходног тврђења применом математичке индукције.*

Доказ. Нека је $d \neq 0$ константа.

Теорема 17 примењена на dX, dX_1 и dX_2 уз избор константи $a = b = 1$ даје базу индукције. Претпоставимо да тврђење важи за dX и $\dfrac{d(X_1 + \cdots + X_{n-1})}{(n-1)^2}$. Применимо теорему 17 на dX и $\dfrac{d(X_1 + \cdots + X_{n-1})}{(n-1)^2}$ и dX_n, где су $X, X_1, \ldots, X_n$ независне и једнако расподељене случајне величине са функцијом густине $f(x)$ дефинисаном на (μ, ∞). Погодан избор константи $a = 1, b = (n-1)^2$ даје да карактеризација важи за dX и

$$d\frac{X_n + (n-1)^2 \dfrac{X_1 + \cdots + X_{n-1}}{(n-1)^2}}{(1 + n - 1)^2} = d\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n^2},$$

што је и требало показати. □

3.2 Тестови сагласности засновани на карактеризацијама Левијеве расподеле

Посматраћемо следеће тест статистике засноване на разлици између емпиријске функције расподеле F_n и функције расподеле F:

- Колмогоров - Смирновљеву тест статистику дату са

$$KS_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

- Крамер - фон Мизесову тест статистику дату са

$$CVM_n = \int (F_n(x) - F(x))^2 dF(x),$$

- Андерсон - Дарлингову тест статистику дату са

$$AD_n = \int \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x).$$

Такође, на основу карактеризације из [2] аутори су у [5] конструисали џекнајф емпиријски тест количника веродостојности који се базира на U-статистици

$$T_n = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i<j<k} h(X_i, X_j, X_k) - \frac{1}{2},$$

при чему је $h(X_i, X_j, X_k)$ симетрично језгро дато са

$$h(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{3}\Big(I\Big(\frac{X_i + X_j}{4} \leq X_k\Big) + I\Big(\frac{X_k + X_j}{4} \leq X_i\Big) + I\Big(\frac{X_i + X_k}{4} \leq X_j\Big)\Big).$$

Покажимо да је ова тест статистика слободна од параметра скалирања при $\mathcal{H}_0$. Нека је $(X_1, \ldots, X_n)$ узорак из Левијеве расподеле са параметром скалирања λ. Тада је $(Y_1, \ldots, Y_n)$ узорак из стандардне Левијеве расподеле при чему је $Y_i = \lambda^{-1} X_i$ за свако i. Имамо да је

$$h(Y_i, Y_j, Y_k) = \frac{1}{3}\Big(I\Big(\frac{Y_i + Y_j}{4} \leq Y_k\Big) + I\Big(\frac{Y_k + Y_j}{4} \leq Y_i\Big) + I\Big(\frac{Y_i + Y_k}{4} \leq Y_j\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(I\Big(\frac{\lambda^{-1}X_i+\lambda^{-1}X_j}{4} \le \lambda^{-1}X_k\Big) + I\Big(\frac{\lambda^{-1}X_k+\lambda^{-1}X_j}{4} \le \lambda^{-1}X_i\Big) + I\Big(\frac{\lambda^{-1}X_i+\lambda^{-1}X_k}{4} \le \lambda^{-1}X_j\Big)\Big)$$
$$= \frac{1}{3}\Big(I\Big(\frac{X_i+X_j}{4} \le X_k\Big) + I\Big(\frac{X_k+X_j}{4} \le X_i\Big) + I\Big(\frac{X_i+X_k}{4} \le X_j\Big)\Big) = h(X_i,X_j,X_k).$$

Показано је да ова статистика има асимптотску нормалну $\mathcal{N}(0,\sigma_0^2)$ расподелу при $\mathcal{H}_0$, при чему је σ^2 дато са

$$\sigma_0^2 = D\Bigg(\int\limits_{\mathbf{R}_+} 2\Big(1-F\Big(\frac{X+y}{4}\Big)\Big)dF(y)+F(X)\Bigg).$$

Сада кориштењем чињенице да је при $\mathcal{H}_0$ F функција расподеле стандардне Левијеве расподеле, овај израз је могуће нумеричким методама израчунати. Јасно је из облика функције расподеле случајне величине X са стандардном Левијевом расподелом да важи да је

$$F_X(t) = 2\Big[1-\Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{2t}}\Big)\Big],$$

при чему је $\Phi(t)$ функција расподеле стандардне нормалне расподеле. Према томе, горњи интеграл није могуће експлицитно израчунати.

У недостатку тачне вредности израза за σ_0^2 аутори посежу за тестом џекнајф емпиријског количника веродостојности, односно поправљеног џекнајф емпиријског количника веродостојности (енг. jackknife empirical likelihood ratio test, adjusted jackknife empirical likelihood ratio test). Дефинишимо џекнајф псеудо-вредности на следећи начин:

$$\nu_n^i = nT_n - (n-1)T_n^{(-i)},\ i=1,2,\ldots,n,$$

при чему је $T_n^{(-i)}$ вредност тест статистике добијена када се из узорка изостави i-та опсервација. Вредност тест статистике JEL_n добијамо након решавања следећег оптимизационог проблема:

$$JEL_n(p) = \max\left\{\prod_{i=1}^{n}(np_i) : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n}\nu_n^i p_i = 0\right\}.$$

Означимо са $F(p) = \prod\limits_{i=1}^{n}(np_i)$. Максимизујмо функцију $\tilde{F}(p) = \log F(p)$ (то је довољно јер је логаритам растућа функција на $\mathbb{R}_+$) при задатим ограничењима $g(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1,\ h(p) = \sum\limits_{i=1}^{n}\nu_n^i p_i = 0$. Методом Лагранжевих множилаца добијамо следећи систем једначина:

$$\nabla\tilde{F} = \lambda\nabla g + \mu\nabla h,$$
$$g(p) = 1,$$
$$h(p) = 0.$$

Из прве једначине имамо да мора важити

$$\frac{d\tilde{F}}{dp_i} = \lambda\frac{dg}{dp_i} + \mu\frac{dh}{dp_i}, \text{за свако } i=1,2,\ldots,n,$$

па диференцирањем добијамо

$$\frac{1}{p_i} = \lambda + \mu\nu_n^i, \text{за свако } i=1,2,\ldots,n.$$

Сада је
$$1 = \lambda p_i + p_i \mu \nu_n^i, \text{за свако } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$
Сумирањем ових једначина добијамо
$$n = \lambda g(p) + \mu h(p) = \lambda. \tag{5}$$
Такође имамо из (4) и (5) да је
$$p_i = \frac{1}{\lambda + \mu \hat{\nu}_n^i} = \frac{1}{n + \mu \hat{\nu}_n^i}.$$
Сада из $h(p) = 0$ имамо да важи
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{\nu}_n^i}{\lambda + \mu \nu_n^i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{\nu}_n^i}{1 + \frac{\mu}{n} \hat{\nu}_n^i} = 0.$$
Другачије записано, ако ставимо $\frac{\mu}{n} = \lambda_1$ тада λ_1 тражимо из једначине
$$f(\lambda_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{\nu}_n^i}{1 + \lambda_1 \hat{\nu}_n^i} = 0,$$
што има смисла ако је
$$\min_{1 \leq k \leq n} \nu_n^i \leq T_n \leq \max_{1 \leq k \leq n} \nu_n^i.$$
Према томе, важи и
$$\log JEL_n(p) = -\sum_{i=1}^{n} \log(1 + \lambda_1 \hat{\nu}_n^i),$$
што је вредност тест статистике коју треба израчунати. Такође, одбацујемо нулту хипотезу у корист алтернативе са нивоом значајности α ако важи
$$-2 \log JEL(p) > \chi^2_{1,\alpha},$$
где смо са $\chi^2_{1,\alpha}$ означили горњи α-ти квантил χ^2 расподеле са једним степеном слободе.

У раду [12] је предложен нови метод оцењивања, поправљени џекнајф емпиријски тест количника веродостојности. Вредност тест статистике $AJEL_n$ добијамо након решавања следећег оптимизационог проблема:
$$AJEL_n(p) = \max \left\{ \prod_{i=1}^{n+1} (np_i) : \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} {}^{ad}\nu_n^i p_i = 0 \right\},$$
при чему је
$$ {}^{ad}\nu_n^i = \begin{cases} \nu_n^i, & \text{за } \ i = 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{-a_n}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_n^i, & \text{за } \ i = n+1, \end{cases} \tag{6}$$
где је $a_n = \max(1, \frac{\log n}{2})$ (видети [11]). Сада се потпуно аналогно, методом Лагранжевих множилаца, добија следеће:
$$\log AJEL_n(p) = -\sum_{i=1}^{n+1} \log(1 + \lambda_2 \, {}^{ad}\hat{\nu}_n^i).$$
где λ_2 задовољава
$$f(\lambda_2) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{{}^{ad}\hat{\nu}_n^i}{1 + \lambda_2 \, {}^{ad}\hat{\nu}_n^i} = 0.$$

Такође, одбацујемо нулту хипотезу у корист алтернативе са нивоом значајности α ако важи

$$-2\log AJEL(p) > \chi^2_{1,\alpha},$$

где смо са $\chi^2_{1,\alpha}$ означили горњи α-ти квантил χ^2 расподеле са једним степеном слободе.

Аутори даље дају (део 3 у [5]) и емпиријске моћи тестова и емпиријске грешке прве врсте на 10 000 понављања за обиме узорака $n = 25, 50, 75, 100$ и 200. У табелама 3 и 4 наводимо неке вредности.

За остале вредности видети [5].

У постојећој литератури нису наведени специфични тестови сагласности са Левијевом расподелом. У овом раду надаље подразумевамо да је специфичан тест тест конструисан искључиво за испитивање сагласности са једном конкретном, у овом случају Левијевом, расподелом. Универзалним зовемо оне тестове који се могу користити за испитивање сагласности са произвољном расподелом.

У том светлу, природно је конструисати тест на основу разлике између U-емпиријских функција расподеле $\omega_1(X_1, X_2) = \frac{X_1+X_2}{4}$ и $\omega_2(X_1) = X_1$ датих са

$$G_n(t) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i<j} \mathrm{I}\left\{\frac{X_i + X_j}{4} \le t\right\}$$

и

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\left\{X_i \le t\right\}$$

редом. Овако конструишемо статистику (видети нпр. [38],[33])

$$\bar{T}_n = \int_0^\infty (G_n(t) - F_n(t))dF_n(t).$$

Ова статистика је хибридна U-статистика која је асимптотски еквивалентна статистици

$$T_n = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i<j<k} h(X_i, X_j, X_k),$$

при чему је $h(X_i, X_j, X_k)$ симетрично језгро дато са

$$h(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{3}\Big(I\Big(\frac{X_i + X_j}{4} \le X_k\Big) + I\Big(\frac{X_k + X_j}{4} \le X_i\Big) + I\Big(\frac{X_i + X_k}{4} \le X_j\Big)\Big) - \frac{1}{2}.$$

Испитаћемо емпиријске моћи и грешке прве врсте. У даљем тексту биће показано да је ова тест статистика при $\mathcal{H}_0$ слободна од параметра скалирања. Такође, коришћењем програма Wolfram Mathematica добијено је да је вредност асимптотске дисперзије $\sigma_0^2 = 0.0235028$.

Искористићемо карактеризацију дату у теореми 16 за конструкцију тест статистике. Идеја је да посматрамо разлику између U-емпиријских функција расподеле од $\xi_1(X_1, X_2) = \frac{aX_1+bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ и $\xi_2(X_1) = X_1$ које су дате са

$$A_n(t) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\ne j} \mathrm{I}\left\{\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le t\right\}$$

и

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\left\{X_i \le t\right\}$$

редом. Одавде слично као раније добијамо статистику

$$\bar{W}_{n,a,b} = \int_0^\infty (A_n(t) - F_n(t))dF_n(t).$$

Ова статистика је хибридна U статистика асимптотски еквивалентна са

$$W_{n,a,b} = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i<j<k} \psi(X_i, X_j, X_k),$$

при чему је $\psi(X_i, X_j, X_k)$ симетрично језгро U статистике дато са

$$\psi(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{6}\Big(I\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_k\Big) + I\Big(\frac{aX_j + bX_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_k\Big)$$

$$+I\Big(\frac{aX_k + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_i\Big) + I\Big(\frac{aX_j + bX_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_i\Big) + I\Big(\frac{aX_i + bX_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_j\Big) + I\Big(\frac{aX_k + bX_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_j\Big)\Big) - \frac{1}{2}.$$

Покажимо да је, при $\mathcal{H}_0$, $EW_n = 0$. Довољно је показати да је

$$EI\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_k\Big) = \frac{1}{2}.$$

Међутим, то следи из

$$EI\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_k\Big) = P\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_k\Big) = \int P\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le t\Big)dF(t).$$

Сада искористимо карактеризацију из теореме 16, односно да је при $\mathcal{H}_0$

$$P\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le t\Big) = P(X \le t) = F(t),$$

па је коначно

$$\int F(t)dF(t) = \frac{1}{2}.$$

Показаћемо и да је статистика $W_{n,a,b}$ слободна од параметра скалирања при $\mathcal{H}_0$. Слично као раније, нека је $(X_1, \dots, X_n)$ узорак из Левијеве расподеле са параметром скалирања λ. Тада је $(Y_1, \dots, Y_n)$ узорак из стандардне Левијеве расподеле при чему је $Y_i = \lambda^{-1}X_i$ за свако i. Имамо да је

$$\psi(Y_i, Y_j, Y_k) = \frac{1}{6}\Big(I\Big(\frac{aY_i + bY_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le Y_k\Big) + I\Big(\frac{aY_j + bY_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le Y_k\Big)$$

$$+I\Big(\frac{aY_k + bY_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le Y_i\Big) + I\Big(\frac{aY_j + bY_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le Y_i\Big) + I\Big(\frac{aY_i + bY_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le Y_j\Big) + I\Big(\frac{aY_k + bY_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le Y_j\Big)\Big) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(I\Big(\frac{a\lambda^{-1}X_i + b\lambda^{-1}X_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \lambda^{-1}X_k\Big) + I\Big(\frac{a\lambda^{-1}X_j + b\lambda^{-1}X_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \lambda^{-1}X_k\Big)$$

$$+I\Big(\frac{a\lambda^{-1}X_k + b\lambda^{-1}X_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \lambda^{-1}X_i\Big) + I\Big(\frac{a\lambda^{-1}X_j + b\lambda^{-1}X_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \lambda^{-1}X_i\Big)$$

$$+I\Big(\frac{a\lambda^{-1}X_i + b\lambda^{-1}X_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \lambda^{-1}X_j\Big) + I\Big(\frac{a\lambda^{-1}X_k + b\lambda^{-1}X_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le \lambda^{-1}X_j\Big)\Big) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(I\Big(\frac{aX_i + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_k\Big) + I\Big(\frac{aX_j + bX_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_k\Big)$$

$$+I\Big(\frac{aX_k + bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_i\Big) + I\Big(\frac{aX_j + bX_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_i\Big)+$$

$$I\Big(\frac{aX_i + bX_k}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_j\Big) + I\Big(\frac{aX_k + bX_i}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_j\Big)\Big) - \frac{1}{2} = \psi(X_i, X_j, X_k).$$

Приметимо да ако ставимо $a = b$ у низу горњих једнакости, следиће да је и статистика T_n слободна од параметра скалирања.

Сада ћемо при $\mathcal{H}_0$ испитати асимптотско понашање тест статистике $W_{n,a,b}$. Идеја је да израчунамо дисперзију прве пројекције језгра и након тога се позовемо на теорему Хефдинга из главе 2. Имамо да је прва пројекција језгра дата са $E(\psi(X_1, X_2, X_3|X_1)$. Како је

$$E(\psi(X_1, X_2, X_3|X_1 = x) = \frac{1}{6}\Big(P\Big(\frac{ax + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3\Big) + P\Big(\frac{aX_2 + bx}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3\Big)$$

$$+P\Big(\frac{aX_3 + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq x\Big) + P\Big(\frac{aX_2 + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq x\Big) + P\Big(\frac{ax + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_2\Big)$$

$$+P\Big(\frac{aX_3 + bx}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_2\Big)\Big) - \frac{1}{2},$$

те је одавде једноставно

$$E(\psi(X_1, X_2, X_3|X) = \frac{1}{6}\Big(P\Big(\frac{aX + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2 + bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3|X\Big)$$

$$+P\Big(\frac{aX_3 + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2 + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X|X\Big) + P\Big(\frac{aX + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_2|X\Big)$$

$$+P\Big(\frac{aX_3 + bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_2|X\Big)\Big) - \frac{1}{2}.$$

Међутим, како су X_2 и X_3 једнако расподељене, то важи да су

$$P\Big(\frac{aX + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3|X\Big) = P\Big(\frac{aX + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_2|X\Big),$$

$$P\Big(\frac{aX_2 + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X|X\Big) = P\Big(\frac{aX_3 + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X|X\Big),$$

$$P\Big(\frac{aX_2 + bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3|X\Big) = P\Big(\frac{aX_3 + bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_2|X\Big)\Big).$$

Сада добијамо да је

$$E\psi(X_1, X_2, X_3|X)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(P\Big(\frac{aX + bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2 + bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2 + bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq X|X\Big)\Big) - \frac{1}{2}.$$

Имамо да важи следећа теорема која је директна последица теореме Хефдинга:

Теорема 20. *При $\mathcal{H}_0$, важи следеће:*

$$\sqrt{n}W_{n,a,b} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,\sigma_0^2),$$

при чему је σ_0^2 дато са

$$\sigma_0^2 = D\Big(P\Big(\frac{aX+bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2+bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2+bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X|X\Big)\Big).$$

Приметимо да за $a = b$ ова теорема постаје Теорема 2.3 из [5]. Коришћењем карактеризације, можемо добити следеће:

$$P\Big(\frac{aX_i+bX_j}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le t\Big) = P(X \le t) = F(t).$$

Додатно, из једнаке расподељености X, X_2, X_3 добијамо следећи облик за σ_0^2 који се такође може користити за израчунавања:

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= D\Big(P\Big(\frac{aX+bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2+bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X_3|X\Big) + P\Big(\frac{aX_2+bX_3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \le X|X\Big)\Big)\\
&= D\Big(2 - P\Big(\frac{aX+bX_2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \ge X_3|X\Big) - P\Big(\frac{aX_2+bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \ge X_3|X\Big) + P(X_2 \le X|X))\\
&= D\Big(2 - \int P\Big(\frac{aX+by}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \ge X_3|X\Big)dF(y) - \int P\Big(\frac{ay+bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \ge X_3|X\Big)dF(y) + F(X)\Big)\\
&= D\Big(\Big(2 - \int F\Big(\frac{aX+by}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big)dF(y) - \int F\Big(\frac{ay+bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big)\Big)dF(y) + F(X)\Big)\\
&= D\Big(2 - \int \Big(F\Big(\frac{aX+by}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big) + F\Big(\frac{ay+bX}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\Big)\Big)dF(y) + F(X)\Big).
\end{aligned}$$

Приметимо да ако ставимо $a = b$ добијамо Последицу 2.4 из [5]. Такође, израз у претходној теореми симетричан је по a и b. Коришћењем програма Wolfram Mathematica добијене су вредности σ_0^2 за различите a и b и те резултате наводимо у наставку у табели 1.

Прегледности ради додајемо у табели 2 и емпиријске оцене дисперзије из табеле 1 направљене Монте Карло методом на узорку обима 100 са 10 000 понављања.

Табела 1: Преглед вредности σ_0^2 за $a, b = 1, 2, \ldots, 10, a \leq b$

a	b	σ_0^2	a	b	σ_0^2
1	2	0.025414	3	10	0.025035
1	3	0.025109	4	5	0.025602
1	4	0.024832	4	6	0.025551
1	5	0.024586	4	7	0.025486
1	6	0.024369	4	8	0.025414
1	7	0.024177	4	9	0.025338
1	8	0.024005	4	10	0.025262
1	9	0.023851	5	6	0.025609
1	10	0.023711	5	7	0.025574
2	3	0.025551	5	8	0.025526
2	4	0.025414	5	9	0.025472
2	5	0.025262	5	10	0.025414
2	6	0.025109	6	7	0.025613
2	7	0.024968	6	8	0.025587
2	8	0.024832	6	9	0.025551
2	9	0.024705	6	10	0.025509
2	10	0.024586	7	8	0.025616
3	4	0.025587	7	9	0.025596
3	5	0.025509	7	10	0.025567
3	6	0.025414	8	9	0.025618
3	7	0.025313	8	10	0.025602
3	8	0.025208	9	10	0.026191
3	9	0.025109	10	10	0.025624

Табела 2: Преглед емпиријских вредности $\hat{\sigma}^2$ за $a, b = 1, 2, \ldots, 10, a \leq b$

a	b	$\hat{\sigma}_0^2$	a	b	$\hat{\sigma}_0^2$
1	1	0.024492	4	5	0.024639
1	2	0.023857	4	6	0.023758
1	3	0.022335	4	7	0.024015
1	4	0.021154	4	8	0.023684
1	5	0.019545	4	9	0.023338
1	6	0.018977	4	10	0.022488
1	7	0.018347	5	6	0.025028
1	8	0.017915	5	7	0.024643
1	9	0.016685	5	8	0.024095
1	10	0.016721	5	9	0.023975
2	3	0.02415	5	10	0.024154
2	4	0.024203	6	1	0.019334
2	5	0.02274	6	2	0.022561
2	6	0.022631	6	3	0.024086
2	7	0.021815	6	4	0.024115
2	8	0.020699	6	5	0.024636
2	9	0.020181	6	7	0.025214
2	10	0.020598	6	8	0.024999
3	4	0.023887	6	9	0.024894
3	5	0.023189	6	10	0.023862
3	6	0.024241	7	6	0.0246
3	7	0.023149	7	8	0.024708
3	8	0.023202	7	9	0.024495
3	9	0.022089	7	10	0.02417
3	10	0.022329	8	9	0.024881
9	10	0.024563	8	10	0.025846

4 Тестови сагласности са Левијевом расподелом засновани на V-емпиријским Лапласовим трансформацијама

4.1 Предложене тест статистике

Искористићемо карактеризацију из теореме 16 да конструишемо тест статистику базирану на разлици две V-емпиријске Лапласове трансформације.

Нека је $Y_k = \frac{X_k}{\hat{\lambda}}$, уз

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k}}$$

и при чему је $(X_1, \ldots, X_n)$ узорак међусобно независних једнако расподељених случајних величина. Посматрамо тест статистику

$$Q_{n,a} = \sup_{t>0} \left| \Big(\frac{1}{n} \sum_{i_1=1}^{n} e^{-tY_{i_1}} - \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} e^{-\frac{t}{4}(Y_{i_1}+Y_{i_2})} \Big) \Omega(a,t) \right|,$$

при чему је $\Omega(a,t)$ тежинска функција. У овом раду биће разматране две тежинске функције:

- $\Omega(t) = e^{-at}$, за $a > 0$. За тест статистику са овом тежинском функцијом биће дате емпиријске моћи тестова при $a \in \{0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10\}$.
- $\Omega(t) = t^{\frac{3}{2}} e^{-at}$, за $a > 0$. За тест статистику са овом тежинском функцијом биће дате емпиријске моћи тестова при $a \in \{0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10\}$, као и асимптотско понашање за $a > 0$.

Означимо са

$$J_{n,a} = \sup_{t>0} \left| \Big(\frac{1}{n} \sum_{i_1=1}^{n} e^{-tY_{i_1}} - \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} e^{-\frac{t}{4}(Y_{i_1}+Y_{i_2})} \Big) e^{-at} t^{\frac{3}{2}} \right|.$$

Посматрајмо сада следећу тест статистику:

$$L_{n,a} = \sup_{t>0} \left| \Big(\frac{1}{n} \sum_{i_1=1}^{n} e^{-tY_{i_1}} - \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} e^{-\frac{t}{4}(Y_{i_1}+Y_{i_2})} \Big) e^{-at} \right|.$$

При $\mathcal{H}_0$, интуитивно је да вредност тест статистике $L_{n,a}$ буде блиска нули.

4.2 Нека својства тест статистике $L_{n,a}$ при $\mathcal{H}_0$

Уочимо да можемо да напишемо

$$L_{n,a} = \sup_{t>0} |V_n(t; a, \hat{\lambda}_n)|,$$

при чему је V_n V-статистика са симетричним језгром дата са

$$V_n(t; a, \hat{\lambda}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1, i_2=1}^{n} \Psi(X_{i_1}, X_{i_2}, t; a, \hat{\lambda}). \tag{7}$$

Сада, како је функција $\Psi(x_1, x_2, t; a, \nu)$ глатка по ν, то можемо применити теорему о средњој вредности и развити V_n на следећи начин:

$$V_n(t; a, \hat{\lambda}) = V_n(t; a, \lambda) + (\lambda - \hat{\lambda}) \frac{\partial V_n(t; a, \nu)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=\lambda_1},$$

при чему је λ_1 вредност између λ и $\hat{\lambda}$. Сада је на основу закона великих бројева за V-статистике

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial V_n(t;a,\nu)}{\partial\nu}=E\Big(\Big(tX_1e^{-t\nu X_1}-\frac{t}{4}(X_1+X_2)e^{-\frac{t\nu}{4}(X_1+X_2)}\Big)e^{-at}\Big).$$

Не морамо директно рачунати ово очекивање (али се директним рачуном показује да је једнако нули), довољно је показати да постоји и да је коначно за свако $t,\nu>0$. Искористимо линеарност математичког очекивања и имамо

$$e^{-at}\Big(E\Big(tX_1e^{-t\nu X_1}\Big)-E\Big(\frac{t}{4}(X_1+X_2)e^{-\frac{t\nu}{4}(X_1+X_2)}\Big)\Big).$$

Посматрајмо $E(tX_1e^{-t\nu X_1})$. Имамо да је по дефиницији Лапласове трансформације $\mathcal{L}_X(t)=Ee^{-tX}$. Такође је познато својство да ако постоји Лапласова трансформација $\mathcal{L}_X(t)$, то постоје и коначни су изводи свих редова (по t) који се добијају диференцирањем под знаком интеграла. Сада је из претходног

$$E\Big(tX_1e^{-t\nu X_1}\Big)=t\frac{d}{d(t\nu)}\mathcal{L}_{X_1}(t\nu),$$

те ово очекивање постоји и коначно је за свако $t,\nu>0$. Даље имамо да је

$$E\Big(\frac{t}{4}(X_1+X_2)e^{-\frac{t\nu}{4}(X_1+X_2)}\Big)=t\frac{d}{d(t\nu)}\mathcal{L}_{X_1+X_2}\Big(\frac{t\nu}{4}\Big),$$

те и ово очекивање постоји и коначно је за свако $t,\nu>0$. Сада како $\hat{\lambda}\xrightarrow{P}\lambda$, то добијамо да су асимптотски једнако расподељене тест статистике $\sqrt{n}V_n(t;a,\hat{\lambda})$ и $\sqrt{n}V_n(t;a,\lambda)$, а на овом месту треба показати да је при $\mathcal{H}_0$ V_n слободна од параметра. Показујемо на сличан начин као раније. Нека је $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ узорак из стандардне Левијеве расподеле. Тада је $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ узорак из Левијеве расподеле са параметром скалирања $\lambda>0$, при чему је $Y_i=\lambda X_i$. Тада важи за језгро $\psi(Y_i,Y_j,t,a)$ V-статистике V_n:

$$\psi(Y_i,Y_j,t,a\lambda)=\Big(\frac{1}{2}e^{-t\frac{Y_i}{\lambda}}+\frac{1}{2}e^{-t\frac{Y_j}{\lambda}}-e^{-\frac{t(Y_i+Y_j)}{4\lambda}}\Big)e^{-at}=$$
$$\Big(\frac{1}{2}e^{-t\frac{\lambda X_i}{\lambda}}+\frac{1}{2}e^{-t\frac{\lambda X_j}{\lambda}}-e^{-\frac{t(\lambda X_i+\lambda X_j)}{4\lambda}}\Big)e^{-at}=$$
$$\Big(\frac{1}{2}e^{-tX_i}+\frac{1}{2}e^{-tX_j}-e^{-\frac{t(X_i+X_j)}{4}}\Big)e^{-at}=\psi(X_i,X_j,t,a).$$

Сада је $V_n(t;a,\lambda)$ асимптотски једнако расподељена као рецимо $V_n(t;a,1)$.

Такође, за статистику V_n важи следеће:

$$EV_n(t;a,1)=e^{-at}E\Big(\frac{1}{2}e^{-tX_1}+\frac{1}{2}e^{-tX_2}-e^{-\frac{t(X_1+X_2)}{4}}\Big)=0.$$

Имамо да важи

$$E(\psi(X,X_2;t,a|X=x))=e^{-at}\Big(\frac{1}{2}e^{-tx}+\frac{1}{2}Ee^{-tX_2}-Ee^{-\frac{t(x+X_2)}{4}}\Big)=e^{-at}\Big(\frac{1}{2}e^{-tx}+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2t}}-e^{-\frac{\sqrt{2t}}{2}-\frac{xt}{4}}\Big).$$

Одавде је вредност прве пројекције

$$\varphi(X,t,a)=E(\psi(X,X_2;t,a|X))=e^{-at}\Big(\frac{1}{2}e^{-tX}+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2t}}-e^{-\frac{\sqrt{2t}}{2}-\frac{Xt}{4}}\Big).$$

Сада је очекивање ове случајне величине дато са

$$E(E(\psi(X,X_2;t,a|X))=0.$$

Добијамо рачуном и да важи

$$E(E(\psi(X,X_2,t,a|X)^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sqrt{2\pi}e^{-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{t}}$$

$$-2.50663e^{-\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{t}}{\sqrt{2}}} + 0.626657e^{-2\sqrt{t}} - 0.626657e^{-2\sqrt{2}\sqrt{t}}\Big)e^{-at},$$

што је уједно и дисперзија прве пројекције, односно важи да је

$$\sigma^2(t,a) = \frac{\left(\sqrt{2\pi}e^{-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{t}} - 2.50663e^{-\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{t}}{\sqrt{2}}} + 0.626657e^{-2\sqrt{t}} - 0.626657e^{-2\sqrt{2}\sqrt{t}}\right)e^{-at}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ова функција је за свако $a, t > 0$ различита од нуле. Њен график за различите одабире параметра $a > 0$ дајемо на слици 1.

Показаћемо нормалност у једнодимензионом случају, док ће доказ у вишедимензионом случају следити из вишедимензионе централне граничне теореме и теореме Слуцког.

Имамо да важи

$$\sqrt{n}V_n(t;a,1) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i,t,a) + R_n,$$

при чему је $R_n = o_P(1)$. Сада добијамо применом теореме Хефдинга тражени резултат.

4.3 Асимптотско понашање тест статистике $J_{n,a}$ при $\mathcal{H}_0$

Може се написати

$$J_{n,a} = \sup_{t>0}|V_n(t;a,\hat{\lambda}_n)t^{\frac{3}{2}}|,$$

где је V_n већ дефинисана у (7). Одавде, ако означимо са $S_n(t;a,\hat{\lambda}) = V_n(t;a,\hat{\lambda})t^{\frac{3}{2}}$ и како је $t^{\frac{3}{2}}$ неслучајна функција, можемо да изнесемо следећи аргумент:

Статистике $V_n(t;a,\hat{\lambda})$ и $V_n(t;a,\lambda)$ су асимптотски једнако расподељене, па одатле добијамо да су асимптотски једнако расподељене и статистике $S_n(t;a,\hat{\lambda})$ и $S_n(t;a,\lambda)$. Даље, како је при $\mathcal{H}_0$ статистка V_n слободна од параметра, односно важи $V_n(t;a,\lambda) \overset{D}{=} V_n(t;a,1)$, то важи и $t^{\frac{3}{2}}V_n(t;a,\lambda) \overset{D}{=} t^{\frac{3}{2}}V_n(t;a,1)$, односно $S_n(t;a,\lambda) \overset{D}{=} S_n(t;a,1)$.

Дакле, статистика S_n је слободна од параметра при $\mathcal{H}_0$. Коришћењем тесне везе између S_n и V_n, тј. $S_n(t;a,\lambda) \overset{D}{=} t^{\frac{3}{2}}V_n(t;a,\lambda)$ и теореме Слуцког, добијамо да су коначнодимензионе расподеле статистике $\sqrt{n}S_n(t;a,1)$ нормалне. Дисперзија асимптотске расподеле статистике $\sqrt{n}S_n(t;a,1)$ за разне одабире параметра $a > 0$ дата је на слици 2.

Формулишимо следећу теорему:

Теорема 21. *Нека је $X_1, X_2, \dots, X_n$ прост случајан узорак из Левијеве расподеле. Тада важи*

$$J_{n,a}(t) \xrightarrow{D} \sup_{t>0}|\eta(t)|$$

при чему је $\eta(t)$ центриран Гаусов процес за чију коваријациону функцију важи следеће:

$$K(s,t) = \frac{4(st)^3 e^{-a(s+t)}}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \Big(e^{-tx} - e^{-\frac{t}{4}(x+y)}\Big)\Big(e^{-sx} - e^{-\frac{s}{4}(x+y)}\Big)\frac{e^{-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$= \frac{2(st)^3 e^{-a(s+t)}}{\pi}\Big(\frac{2}{e^{\sqrt{2(s+t)}}} - e^{-\frac{\sqrt{4s+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{\sqrt{s+4t}+\sqrt{s}}{\sqrt{2}}}\Big).$$

Доказ. Раније смо доказали да су асимптотски једнако расподељене $\sqrt{n}S_n(t;a,\hat{\lambda})$ и $\sqrt{n}S_n(t;a,1)$. Важи теорема (в. [45]) уколико проверимо два услова:

Прво ћемо проверити да су коначнодимензионе асимптотске расподеле $\sqrt{n}(S_n(t;a,1) - ES_n(t;a,1))$ и $\eta(t)$ једнаке. Први услов је проверен на крају претходног одељка јер су коначнодимензионе расподеле Гаусовог процеса нормалне (по дефиницији Гаусовог процеса).

Треба још показати да је низ $\{\sqrt{n}S_n(t;a,1)\}$ збијен низ (енг. tight sequence). То ћемо показати коришћењем следеће теореме:

Теорема 22 (Задатак 4.11 у [23], стр. 64)**.** *Нека је $\{X^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ низ непрекидних случајних процеса таквих да је $X^{(m)} = \{X^{(m)}(t), 0 \le t \le \infty\}$ дефинисаних на истом простору вероватноћа $(\Omega,\mathcal{F},P)$ који задовољава следећа два услова:*

1. $\sup\limits_{m\ge 1} E|X^{(m)}(0)|^{\nu} = M < \infty,$

2. $\sup\limits_{m\ge 1} E|X^{(m)}(t) - X^{(m)}(s)|^{\alpha} \le C_T|t-s|^{1+\beta}$, *за свако $T > 0$ и $0 \le s,t \le T$*

   за неке позитивне константе α,β,ν које су универзалне и C_T функција (која зависи од $T > 0$). Тада вероватносне мере индуковане овим процесима чине збијен низ.

Напомињемо на овоме месту да је можда адекватнији термин густ низ, али како не постоји адекватан термин у српскохрватском језику, користићемо, по ауторској слободи, реч *збијен*. Означимо са

$$S_n(a,t) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\Upsilon(X_i,X_j;a,t),$$

при чему смо са Υ означили симетрично језгро V-статистике. Сада важи

$$S_n(a,t+u) - S_n(a,t) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\Big(\Upsilon(X_i,X_j;a,t+u) - \Upsilon(X_i,X_j;a,t)\Big).$$

Одавде имамо да важи да је

$$E\Big(\sqrt{n}S_n(a,t+u) - \sqrt{n}S_n(a,t)\Big)^2$$

$$= E\Big(\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,k,l}(\Upsilon(X_i,X_j;a,t+u) - \Upsilon(X_i,X_j;a,t))(\Upsilon(X_k,X_l;a,t+u) - \Upsilon(X_k,X_l;a,t))\Big).$$

Разликујемо неколико случајева:

- Уколико су сви индекси i,j,k,l различити, тада из независности случајних величина X_i, X_k, X_j, X_l и карактеризације, добијамо да је

$$E\Big(\frac{1}{n^3}\sum_{i\neq j\neq k\neq l}(\Upsilon(X_i,X_j;a,t+u) - \Upsilon(X_i,X_j;a,t))(\Upsilon(X_k,X_l;a,t+u) - \Upsilon(X_k,X_l;a,t))\Big) = 0.$$

- Уколико су три индекса у суми једнака, имамо да је

$$\frac{24}{n^3}\binom{n}{3}E(\Upsilon(X_1,X_2;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_2;a,t))(\Upsilon(X_1,X_3;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_3;a,t))$$

$$=\frac{4(n-1)(n-2)}{n^2}E(\zeta(X_1;a,t+u)-\zeta(X_1;a,t))^2,$$

  при чему је $\zeta(X;a,t)=t^{\frac{3}{2}}\varphi(X;a,t)$ прва пројекција језгра Υ и јер имамо да важи да је

  –
  $$E(\Upsilon(X_1,X_1;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_1;a,t))(\Upsilon(X_2,X_3;a,t+u)-\Upsilon(X_2,X_3;a,t))=0,$$

  –
  $$E(\Upsilon(X_1,X_2;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_2;a,t))(\Upsilon(X_1,X_3;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_3;a,t))\neq 0.$$

- У случају да су два индекса у суми једнака имамо да је због коначности дисперзије језгра овај део асимптотски занемарљив. Формално,

$$\frac{4}{n^3}\binom{n}{2}E(\Upsilon(X_1,X_2;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_2;a,t))^2$$

$$=\frac{2(n-1)}{n^2}E(\Upsilon(X_1,X_2;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_2;a,t))^2\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

  али и јер је због независности и карактеризације

$$E(\Upsilon(X_1,X_1;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_1;a,t))(\Upsilon(X_2,X_2;a,t+u)-\Upsilon(X_2,X_2;a,t))=0.$$

- Могуће је још једино да су сви индекси једнаки. Међутим, како је

$$E(\Upsilon(X_1,X_1;a,t+u)-\Upsilon(X_1,X_1;a,t))^2<\infty,$$

  тај је члан асимптотски занемарљив.

Добили смо да је при $n\to\infty$

$$E\Big(\sqrt{n}S_n(a,t+u)-\sqrt{n}S_n(a,t)\Big)^2\to 4E(\zeta(X_1;a,t+u)-\zeta(X_1;a,t))^2.$$

Применом теореме о средњој вредности је

$$E(\zeta(X_1;a,t+u)-\zeta(X_1;a,t))^2\leq E\Big(\frac{d\zeta(X_1,a,t_1)}{dt}\Big)^2u^2,$$

за $t_1\in[t,t+u]$. Како је

$$E\Big(\frac{d\zeta(X_1,a,t_1)}{dt}\Big)^2$$

$$=0.25te^{-\frac{1}{2}\sqrt{t}\left(4a\sqrt{t}+4\sqrt{2}+\sqrt{10}+4\right)}\Big(e^{\frac{\left(\sqrt{5}+4\right)\sqrt{t}}{\sqrt{2}}}\Big(t(0.25\ -3.a)+1.a^2t^2+1.at^{3/2}-1.375\sqrt{t}+2.25\Big)$$

$$+e^{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\right)\sqrt{t}}\Big(t(1.4571\ -12.a)+4.a^2t^2+4.82842at^{3/2}-6.99264\sqrt{t}+9.\Big)$$

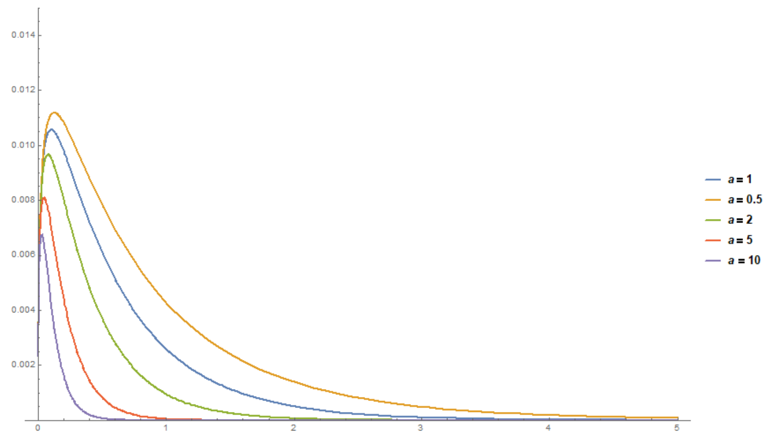
$$+e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+4\right)\sqrt{t}}\Big(-1.a^2t^2-1.41421at^{3/2}+(3.a-0.499999)t+2.12132\sqrt{t}-2.25\Big)+e^{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{t}}$$

$$\times\Big(-4.a^2t^2 - 4.57649at^{3/2} + (12.a - 1.29443)t + 6.61175\sqrt{t} - 9.\Big)\Big),$$

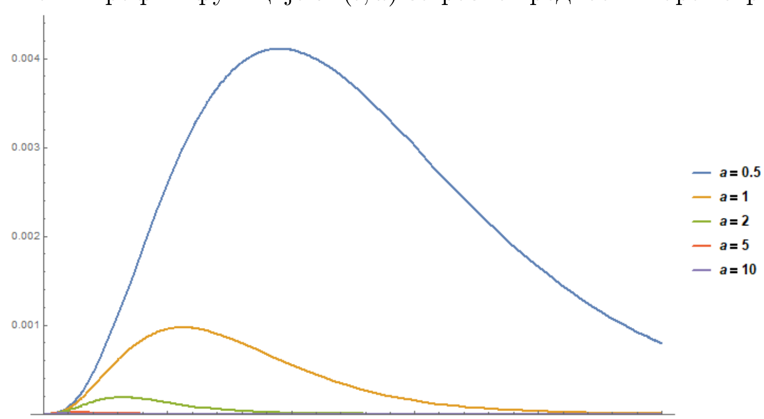
што је за свако $t \in [0,T]$ непрекидна функција, па како је $[0,T]$ компакт, то постоји и коначан је

$$C_T = \max_{t\in[0,T]} E\Big(\frac{d\zeta(X_1,a,t)}{dt}\Big)^2.$$

Треба још приметити да је $S_n(a,0) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $a > 0$, чиме смо показали да су испуњени услови из теореме за $\alpha = \beta = \nu = 1$ и $C_T = 4 \max_{t\in[0,T]} E\Big(\frac{d\zeta(X_1,a,t)}{dt}\Big)^2$, па је низ S_n збијен, чиме је доказ завршен. $\square$



Слика 1: График функције $\sigma^2(t, a)$ за разне вредности параметра a.



Слика 2: График функције $t^3\sigma^2(X; a, t)$ за разне вредности параметра a.

5 Емпиријске моћи тестова

У овом поглављу разматраћемо емпиријске моћи неких тестова наведених у овом раду. Емпиријске моћи тестова биће рачунате Монте Карло методом за неке тестове, а за неке и користећи апроксимацију расподеле при нултој хипотези. Уведимо ознаке за расподеле које ће даље бити коришћене:

- Levy(μ, λ) односи се на Левијеву расподелу са параметрима положаја μ и размере λ, односно на расподелу апсолутно непрекидног типа задану густином

$$f(x;\mu,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{\exp\Big\{-\dfrac{\lambda}{2(x-\mu)}\Big\}}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Burr(a, b, c) односи се на Бурову расподелу са параметрима (a, b, c), односно расподелу апсолутно непрекидног типа задану густином

$$f(y;a,b,c) = cb\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^{b-1}}{\left(a\left(1+\left(\frac{y}{a}\right)^{b}\right)^{c+1}\right)}.$$

- ln(a, b) односи се на логнормалну расподелу са параметрима (a, b), односно на расподелу апсолутно непрекидног типа задану густином

$$f(x;a,b) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)bx}e^{\frac{-((\log x-a)^2}{(2b^2))}}}.$$

- χ^2_n представља χ^2 расподелу апсолутно непрекидног типа задану густином

$$f(x;n) = \frac{1}{\left(2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)x^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-x}{2}}}.$$

- HN(a, b) означава полунормалну расподелу (усечену нормалну расподелу) са параметрима (a, b), односно расподелу апсолутно непрекидног типа задану густином

$$f(x;a,b) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}}{\sqrt{2\pi b^2}} + \frac{e^{-\frac{(x+a)^2}{2b^2}}}{\sqrt{2\pi b^2}}.$$

- W(a, b) означава Вејбулову расподелу са параметрима (a, b), односно расподелу апсолутно непрекидног типа задану густином

$$f(x;a,b) = \frac{a}{b}\Big(\frac{x}{b}\Big)^{a-1}\exp\Big(-\frac{x}{b}\Big)^{a}.$$

У сваком случају који је наведен тест је двостран, односно критична област за тест T је облика

$$\{|T| > c\}.$$

У табелама које следе наведене су емпиријске моћи неких тестова. Уколико није другачије назначено, емпиријске моћи тестова добијене су Монте Карло методом.

Табела 3: Емпиријске моћи и грешке прве врсте за тест статистику JEL_n

	n=25	n=50
Levy(0, 0.5)	0.0582	0.0544
Levy(0, 1)	0.0545	0.0532
Levy(0, 2)	0.0513	0.0502
Burr(1.5, 0.5, 0.5)	0.3259	0.4124
ln(0, 1)	0.2912	0.6224
$\chi^2(3)$	0.5235	0.6673
HN(0,1)	0.5275	0.7632
$\Gamma(3,2)$	0.8325	0.9922
W(2, 1)	0.7923	0.9884

Табела 4: Емпиријске моћи и грешке прве врсте за тест статистику $AJEL_n$

	n=25	n=50
Levy(0, 0.5)	0.0412	0.0445
Levy(0, 1)	0.0419	0.0432
Levy(0, 2)	0.0433	0.0451
Burr(1.5, 0.5, 0.5)	0.2122	0.3512
ln(0, 1)	0.2421	0.5693
$\chi^2(3)$	0.3928	0.7237
HN(0,1)	0.4225	0.7312
$\Gamma(3,2)$	0.7633	0.9792
W(2, 1)	0.7713	0.9742

Табела 5: Емпиријске моћи тест статистика за обим узорка $n = 25$.

$n = 25$	$\bar{W}_{25,1,1}$	$\bar{W}_{25,2,3}$	$\bar{W}_{25,5,9}$	$\bar{W}_{25,9,6}$	$\bar{W}_{25,10,4}$	KS	CVM	AD
$Levy(0,0.5)$	0.0455	0.056	0.0509	0.0482	0.0508	0.0528	0.0478	0.0554
$Levy(0,1)$	0.0444	0.0555	0.0549	0.0524	0.0504	0.0467	0.0499	0.0543
$Levy(0,2)$	0.0461	0.0588	0.0536	0.0498	0.0489	0.0421	0.0458	0.0459
$Burr(1.5,0.5,0.5)$	0	0	0	0	0	0.9961	0.999	**0.9996**
$ln(0,1)$	0.9908	**0.9947**	0.994	0.9942	0.9954	0.8562	0.8819	0.9097
$\chi^2(3)$	**1**	**1**	0.9999	**1**	0.9998	0.9533	0.9735	
$HN(0,1)$	0.9994	**1**	**1**	**1**	0.9999	0.9539	0.9465	0.9732
$\Gamma(3,2)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(2,1)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(0.5,1)$	0.0504	0.0611	0.059	0.0578	0.0569	0.9398	**0.9472**	0.9387
$W(0,8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$ln(0,8)$	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
$\Gamma(0.5,2)$	0.382	0.3758	0.3768	0.3561	0.3669	0.9014	0.908	**0.9142**

Табела 6: Емпиријске моћи тест статистика за обим узорка $n = 50$.

$n = 50$	$\bar{W}_{50,1,1}$	$\bar{W}_{50,2,3}$	$\bar{W}_{50,5,9}$	$\bar{W}_{50,9,6}$	$\bar{W}_{50,10,4}$	KS	CVM	AD
$Levy(0, 0.5)$	0.05	0.0514	0.0503	0.0518	0.0554	0.051	0.045	0.0556
$Levy(0, 1)$	0.0494	0.0557	0.0547	0.0546	0.0545	0.0497	0.0478	0.046
$Levy(0, 2)$	0.049	0.0519	0.0528	0.0473	0.0565	0.0471	0.0518	0.0566
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
$ln(0, 1)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0.9974	0.9984	0.9998
$\chi^2(3)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0.9998	**1**	**1**
$HN(0, 1)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$\Gamma(3, 2)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(2, 1)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(0.5, 1)$	0.0654	0.0696	0.0616	0.0653	0.0689	0.9975	**0.9986**	**0.9986**
$W(0, 8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$ln(0, 8)$	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
$\Gamma(0.5, 2)$	0.6737	0.6652	0.6732	0.679	0.6918	0.9953	0.995	**0.9964**

Табела 7: Емпиријске моћи добијене нормалном апроксимацијом

$n = 25$	$\bar{W}_{25,1,1}$	$\bar{W}_{25,2,3}$	$\bar{W}_{25,5,9}$	$\bar{W}_{25,9,6}$	$\bar{W}_{25,10,4}$
$Levy(0, 1)$	0.0392	0.0415	0.0402	0.0382	0.0404
$Levy(0, 0.5)$	0.0386	0.0389	0.0392	0.0414	0.0416
$Levy(0, 2)$	0.0398	0.0399	0.0388	0.0396	0.0375
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	0	0	0	0	0
$ln(0, 1)$	0.9564	0.9575	**0.9584**	0.9571	0.9655
$\chi^2(3)$	0.9966	0.9976	**0.9985**	0.9981	0.9983
$W(0, 0.5)$	0.0577	0.0598	0.058	0.057	**0.062**
$HN(0, 1)$	0.9958	0.9964	0.9953	0.9948	**0.9968**
$\Gamma(3, 2)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(2, 1)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$ln(0, 8)$	0	0	0	0	0
$W(0, 8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$\Gamma(0.5, 2)$	0.2792	0.2756	0.2829	0.2778	**0.2942**

Табела 8: Емпиријске моћи добијене нормалном апроксимацијом

$n = 50$	$\bar{W}_{50,1,1}$	$\bar{W}_{50,2,3}$	$\bar{W}_{50,5,9}$	$\bar{W}_{50,9,6}$	$\bar{W}_{50,10,4}$
$Levy(0, 1)$	0.036	0.0382	0.0377	0.0376	0.0358
$Levy(0, .5)$	0.035	0.0365	0.0342	0.0388	0.0401
$Levy(0, 2)$	0.0365	0.0385	0.0363	0.0365	0.0358
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	0	0	0	0	0
$ln(0, 1)$	0.9999	0.9999	**1**	**1**	**1**
$\chi^2(3)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(0, .5)$	0.0663	0.0661	0.0668	0.069	**0.0712**
$HN(0, 1)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$ln(0, 8)$	0	0	0	0	0
$W(0, 8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$\Gamma(0.5, 2)$	0.5283	0.5314	0.5351	0.5296	**0.5657**

Табела 9: Обими узорка за које се достиже $\alpha = 0.05$ при нормалној апроксимацији

a	b	n	a	b	n
1	2	75	4	6	79
1	3	80	4	7	100
1	4	80	4	8	100
1	5	87	4	9	101
1	6	92	4	10	113
1	7	98	5	6	56
1	8	98	5	7	72
1	9	105	5	8	73
1	10	108	5	9	74
2	3	62	5	10	87
2	4	76	6	7	63
2	5	107	6	8	87
2	6	108	6	9	91
2	7	119	6	10	97
2	8	122	7	8	75
2	9	132	7	9	76
2	10	133	7	10	77
3	4	64	8	9	72
3	5	69	8	10	96
3	6	73	9	10	80
3	7	78	10	10	87
3	8	96	3	10	105
3	9	103	4	5	66

Табела 10: Емпиријске моћи и грешке прве врсте V-емпријске Лапласове трансформације $L_{n,a}$ за различите изборе параметра a

$n = 25$	$a = 0.2$	$a = 0.5$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 5$	$a = 10$
$Levy(0, 1)$	0.0483	0.0515	0.0514	0.0444	0.0473	0.0524
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	0.8236	0.8631	0.8987	0.9136	**0.9426**	0.4151
$ln(0, 1)$	**0.9861**	0.9797	0.9678	0.837	0.0472	0.9169
$\chi^2(3)$	0.97	0.9721	**0.9737**	0.9726	0.2228	0.8561
$HN(0, 1)$	0.8298	0.8337	0.8371	**0.857**	0.4171	0.6132
$\Gamma(3, 2)$	**1**	**1**	**1**	0.908	0.0043	0.9997
$W(2, 1)$	0.9993	**0.9996**	0.9991	0.911	0.0216	0.995
$W(0.5, 1)$	0.3049	0.3275	0.3436	0.3373	**0.387**	0.2867
$W(0, 8)$	0.9103	0.9387	0.959	0.9733	**0.995**	0.255
$ln(0, 8)$	**1**	**1**	**1**	0	0	**1**
$\Gamma(0.5, 2)$	0.5558	0.5980	0.6441	0.7193	0.7631	**0.7337**

Табела 11: Емпирицске моћи и грешке прве врсте V-емпрцјске Лапласове трансформације $L_{n,a}$ за различите изборе параметра a

$n = 25$	$a = 0.2$	$a = 0.5$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 5$	$a = 10$
$Levy(0,1)$	0.0557	0.0489	0.0486	0.0488	0.0497	0.048
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	0.9682	0.9805	0.9823	0.9878	**0.9919**	0.5711
$ln(0,1)$	**1**	**1**	**1**	0.9997	0.9189	0.9954
$\chi^2(3)$	0.9841	0.9826	**0.9862**	0.986	0.9519	0.9312
$HN(0,1)$	0.8308	0.8331	0.8384	0.8553	**0.8828**	0.6475
$\Gamma(3,2)$	**1**	**1**	**1**	**1**	0.1132	**1**
$W(2,1)$	0.9995	0.9998	**0.9999**	0.9997	0.241	0.9987
$W(0.5,1)$	**0.6981**	0.6888	0.6758	0.6541	0.6158	0.5235
$W(0,8)$	0.9915	0.9957	0.9975	0.999	**0.9993**	0.3206
$ln(0,8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	0	**1**
$\Gamma(0.5,2)$	0.8133	0.8386	0.8515	0.8676	0.8793	**0.8785**

Табела 12: Емпирицске моћи и грешке прве врсте V-емпрцјске Лапласове трансформације $J_{n,a}$ за различите изборе параметра a

$n = 25$	$a = 0.2$	$a = 0.5$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 5$	$a = 10$
$Levy(0,1)$	0.0497	0.0467	0.051	0.0466	0.0512	0.0471
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	**0.9484**	0.9288	0.5504	0.4066	0.4306	0.4963
$ln(0,1)$	0.3165	0.4292	0.7116	0.881	0.9847	**0.9903**
$\chi^2(3)$	0.9907	0.9984	**1**	**1**	**1**	**1**
$HN(0,1)$	0.2996	0.3405	0.4007	0.5892	0.8364	**0.9262**
$\Gamma(3,2)$	0.8537	0.9597	0.997	**0.9997**	**1**	**1**
$W(2,1)$	0.7338	0.897	0.9773	0.996	0.9998	**0.9999**
$W(0.5,1)$	**0.875**	0.8493	0.4627	0.2896	0.2405	0.2278
$W(0,8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$ln(0,8)$	**0.998**	0.9936	0.4376	0.2947	0.2658	0.3238
$\Gamma(0.5,2)$	**0.8301**	0.8050	0.3951	0.2639	0.1759	0.1953

Табела 13: Емпирицске моћи и грешке прве врсте V-емпрцјске Лапласове трансформације $J_{n,a}$ за различите изборе параметра a

$n = 25$	$a = 0.2$	$a = 0.5$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 5$	$a = 10$
$Levy(0,1)$	0.0541	0.0513	0.0541	0.0499	0.0468	0.0491
$Burr(1.5, 0.5, 0.5)$	**0.7945**	0.7587	0.6683	0.5648	0.5777	0.6522
$ln(0,1)$	0.4451	0.6582	0.9268	0.9919	**0.9999**	**1**
$\chi^2(3)$	0.9991	0.9999	**1**	**1**	**1**	**1**
$HN(0,1)$	0.379	0.3405	0.4915	0.6741	0.8887	**0.9505**
$\Gamma(3,2)$	0.9723	0.9597	**1**	**1**	**1**	**1**
$W(2,1)$	0.8891	0.897	0.9959	0.9991	**1**	**1**
$W(0.5,1)$	**0.7887**	0.7628	0.6512	0.5394	0.4869	0.4954
$W(0,8)$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$ln(0,8)$	**0.644**	0.5943	0.4916	0.3136	0.289	0.3326
$\Gamma(0.5,2)$	**0.7780**	0.7507	0.6120	0.4835	0.3762	0.3634

6 Примена на реалне податке

У овом поглављу биће израчунате p вредности предложених тест статистика на подацима изложеним у [5]. Аутори представљају следеће податке:

Табела 14: Животни век бојлера.

274	28.5	1.7	20.8	871	363	1311	1661	236	828
458	290	54.9	175	1787	970	0.75	1278	776	126

Табела 15: Просек падавина у милиметрима у јануару у Индији.

Година	Падавине	Година	Падавине
1981	29.3	1996	22.9
1982	23.8	1997	14.3
1983	18.5	1998	16.4
1984	19	1999	13.7
1985	23.2	2000	18.4
1986	15.5	2001	7.3
1987	13.2	2002	15.7
1988	10.4	2003	7.6
1989	15.4	2004	25.7
1990	16	2005	28.1
1991	14.3	2006	17.7
1992	16	2007	1.7
1993	18.2	2008	18.4
1994	25	2009	12
1995	31.3	2010	7.5
2011	6.8		

Табела 16: Количина воде у бунару која може бити испумпана у јединици времена (у галонима по минуту по стопи).

0.22	1.33	0.75	0.18	0.01	0.16	0.28	0.87	0.02	0.1
0.03	0.05	0.86	5	0.04	4	0.37	0.38	0.11	0.1
0.02	0.01	0.05	0.17	0.46	0.16	1.33	0.14	2.86	0.13
7.5	4.5	0.03	0.003	0.05	0.02	0.04	0.75	0.52	5
0.35									

1. Податке из табеле 14 наводе Китинг и остали у раду [24] и моделују их користећи гама расподелу са оцењеним параметром облика блиским 0.5. Због тога у [5] аутори за инвертоване податке тестирају сагласност са Левијевом расподелом и добијају резултат да не могу одбацити нулту хипотезу да инвертовани подаци имају Левијеву расподелу.

2. Податке из табеле 15 аутори наводе у [5] и тестирају сагласност са Левијевом расподелом. Дошли су до закључка да не могу одбацити нулту хипотезу да подаци припадају Левијевој расподели.

3. Податке из табеле 16 наводе у оригиналној форми Двиган и Купер у раду [15] у коме су испитивали доступност земних вода у оближњим бунарима за домаћинства у Бел Еру, округ

Харфорд, савезна држава Мериленд, САД. Податке наводе и Чанг и други у раду [9] где су их моделовали гама расподелом за коју су утврдили да јој је параметар облика близак вредности 0.5. Бати и Катуманил преносе ове податке у [5] и утврђују да могу инвертоване податке моделовати Левијевом расподелом.

Табела 17: p вредности за тестове сагласности са Левијевом расподелом.

	$\bar{W}_{1,1}$	$\bar{W}_{2,3}$	$\bar{W}_{5,9}$	$\bar{W}_{9,6}$	$\bar{W}_{10,4}$	L_{10}	$J_{0.2}$	$J_{0.5}$	J_1	J_2
1	0.2764	0.2625	0.2738	0.264	0.2429	0.4957	0.818	0.7972	0.6589	0.4829
2	1	1	1	1	1	0.4485	0.9949	1	1	1
3	0.2009	0.1499	0.2198	0.1485	0.258	0.9545	0.9956	0.995	0.9829	0.9384
	$L_{0.2}$	$L_{0.5}$	L_1	L_2	L_5	J_5	J_{10}	KS	CVM	AD
1	0.2208	0.2536	0.3026	0.3657	0.4515	0.1374	0.1284	1	1	1
2	1	1	0.9991	0.9826	0.764	1	1	0.5921	0.3117	1
3	0.8604	0.8815	0.9012	0.923	0.9411	0.723	0.4003	0.8543	0.9545	0.9447

За предложене тест статистике у овом раду добијене су p-вредности наведене у табели 17. У сваком од три примера не бисмо могли одбацити хипотезу о припадности података Левијевој расподели, чиме смо потврдили познате резултате из ранијих радова.

7 Закључак

Сви резултати на које се у овом закључку реферише као на нове или оригиналне добијени су у коауторству са доц. др Бојаном Милошевић, као плод наше заједничке сарадње.

У раду је предложена нова формулација теорема датих у [35], као и потпун доказ тих тврђења, при чему је један доказ оригиналан. Потом се уопштава једна теорема и употпуњују резултати из [5], уз одређене корекције. Предложен је и нови тест заснован на тест статистици $\bar{W}_{n,a,b}$, одређена је асимптотска расподела и испитане емпиријске моћи тестова. Четврта глава садржи до сада непознате тестове сагласности базиране на V-емпиријским Лапласовим трансформацијама, те су сви резултати наведени у тој глави оригинални. Посматраним тест статистикама су одређене емпиријске моћи тестова, док је за статстику $J_{n,a}$ одређена и асимптотска расподела.

Нови тестови су примењени на реалним подацима и добијени су резултати конзистентни са онима већ постојећим у литератури.

За сваку предложену алтернативу сем за Бурову расподелу тест заснован на тест статистици $\bar{T}_n$ значајно је моћнији од оних предложених у [5]. Такође, тест наведен у [5] је једини специфични тест сагласности са Левијевом расподелом познат у литератури. Тестови засновани на емпиријским Лапласовим трансформацијама имају високе моћи за све предложене алтернативе и моћнији су од оних предложених у [5] за $n = 25$ и $n = 50$. Напомињемо да су универзални тестови сагласности (Колмогоров - Смирновљев, Андерсон - Дарлингов, Крамер - фон Мизесов) углавном моћнији од специфичних. Ипак, циљ рада представљало је налажење најбољег специфичног теста сагласности са Левијевом расподелом, те зато предлажемо тестове засноване на тест статистикама $\bar{W}_{n,a,b}$, $J_{n,a}$ и $L_{n,a}$ као најмоћније тренутно познате тестове сагласности са Левијевом расподелом.

Литература

[1] J.-P. Aguilar, C. Coste, H. Kleinert, and J. Korbel. Regularization and analytic option pricing under α-stable distribution of arbitrary asymmetry, 2016.

[2] M. Ahsanullah and V. B. Nevzorov. Some inferences on the Levy distribution. Journal of Statistical Theory and Applications, 13(3):205, 2014.

[3] M. Ali and J. Woo. Inference on reliability $P(Y < X)$ in the Levy distribution. Mathematical and Computer Modelling, 41:965–971, 04 2005.

[4] O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. I. Resnick. Lévy processes: theory and applications. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] D. Bhati and S. K. Kattumannil. Jackknife empirical likelihood test for testing one-sided Lévy distribution. Journal of Applied Statistics, 47(7):1208–1219, 2020.

[6] A. Bielinskyi, V. Soloviev, S. O. Semerikov, and V. Solovjova. Detecting stock crashes using Levy distribution. In Proceedings of the Selected Papers of the 8th International Conference on Monitoring, Modeling & Management of Emergent Economy (M3E2-EEMLPEED 2019), Odessa, Ukraine, pages 420–433. CEUR Workshop Proceedings, 2019.

[7] B. Brorsen and S. Yang. Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters. Communications in Statistics Part B: Simulation and Computation, 19(4):1459–1464, 1990.

[8] K. Bryan. Elementary inversion of the Laplace transform, 2006.

[9] C.-H. Chang, J.-J. Lin, and N. Pal. Testing the equality of several gamma means: a parametric bootstrap method with applications. Computational Statistics, 26(1):55–76, 2011.

[10] H. Chen and Y. Zhang. Laplace transform for stable random variables. In 2015 3rd International Conference on Computer and Computing Science (COMCOMS), pages 32–36, 2015.

[11] J. Chen, A. M. Variyath, and B. Abraham. Adjusted empirical likelihood and its properties. Journal of Computational and Graphical Statistics, 17(2):426–443, 2008.

[12] Y.-J. Chen and W. Ning. Adjusted jackknife empirical likelihood. arXiv preprint arXiv:1603.04093, 2016.

[13] M. Denker. Asymptotic distribution theory in nonparametric statistics. Springer, 1985.

[14] G. Doetsch. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Springer Science & Business Media, 2012.

[15] M. T. Duigon and B. F. Cooper. Impact of a public water supply well on availability of ground water to neighboring domestic wells near Bel Air, Maryland. Technical report, Interim Technical Report, Department of Natural Resources, Maryland . . . , 1999.

[16] W. Ebeling, M. Romanovsky, and I. Sokolov. Velocity distributions and kinetic equations for plasmas including Levy type power law tails. Contributions to Plasma Physics, 49:704 – 712, 12 2009.

[17] E. F. Fama and R. Roll. Parameter estimates for symmetric stable distributions. Journal of the American Statistical Association, 66(334):331–338, 1971.

[18] V. Feller. An introduction to probability theory and its applications, vol 2. John Wiley & Sons, 2008.

[19] D. A. S. Fraser. Nonparametric methods in statistics. John Wiley & Sons Inc, 1956.

[20] W. Hoeffding. A non-parametric test of independence. The annals of mathematical statistics, pages 546–557, 1948.

[21] W. Hoeffding. The strong law of large numbers for U-statistics. Technical report, North Carolina State University. Dept. of Statistics, 1961.

[22] A. Jurlewicz and K. Weron. A relationship between asymmetric Levy-stable distributions and the dielectric susceptibility. Journal of Statistical Physics, 73(1-2):69–81, oct 1993.

[23] I. Karatzas and S. E. Shreve. Brownian motion. In Brownian Motion and Stochastic Calculus, pages 47–127. Springer, 1998.

[24] J. P. Keating, R. E. Glaser, and N. S. Ketchum. Testing hypotheses about the shape parameter of a gamma distribution. Technometrics, 32(1):67–82, 1990.

[25] A. Y. Khinchine and P. Lévy. Sur les lois stables. CR Acad. Sci. Paris, 202:374–376, 1936.

[26] V. S. Korolyuk and Y. V. Borovskich. Theory of U-statistics, volume 273. Springer Science & Business Media, 2013.

[27] E. E. Kuruoglu. Density parameter estimation of skewed α-stable distributions. IEEE Transactions on signal processing, 49(10):2192–2201, 2001.

[28] A. J. Lee. U-statistics: Theory and Practice. Routledge, 2019.

[29] E. L. Lehmann. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests. The annals of mathematical statistics, pages 165–179, 1951.

[30] E. L. Lehmann. Elements of large-sample theory. Springer Science & Business Media, 2004.

[31] P. Lévy. Calcul des probabilités. J. Gabay, 1925.

[32] J. H. McCulloch. Simple consistent estimators of stable distribution parameters. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 15(4):1109–1136, 1986.

[33] B. Milošević. Asymptotic efficiency of new exponentiality tests based on a characterization. Metrika, 79(2):221–236, 2016.

[34] P. Mladenović. Elementi aktuarske matematike. Matematički fakultet, Beograd, 2014.

[35] A. Mohammad and N. V. B. On Some Characterizations of the Levy Distribution. Stochastics and Quality Control, 34(1):53–57, June 2019.

[36] E. W. Montroll and M. F. Shlesinger. Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and 1/f noise: a tale of tails. Journal of Statistical Physics, 32(2):209–230, 1983.

[37] J.-M. Nicolas and S. N. Anfinsen. Introduction to second kind statistics: Application of log-moments and log-cumulants to the analysis of radar image distributions. Trait. Signal, 19(3):139–167, 2002.

[38] M. Obradović, M. Jovanović, and B. Milošević. Goodness-of-fit tests for Pareto distribution based on a characterization and their asymptotics. Statistics, 49(5):1026–1041, 2015.

[39] F. O'Reilly and R. Rueda. A note on the fit for the Levy distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, 27(7):1811–1821, 1998.

[40] M. Perc. Transition from gaussian to Levy distributions of stochastic payoff variations in the spatial prisoner's dilemma game. Physical Review E, 75(2), feb 2007.

[41] R. Randles and D. A. Wolfe. Introduction to the theory of nonparametric statistics. New York : Wiley, 1979. Bibliography : p.430-439. Includes index.

[42] R. J. Serfling. Approximation theorems of mathematical statistics, volume 162. John Wiley & Sons, 2009.

[43] M. Shao and C. L. Nikias. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications. Proceedings of the IEEE, 81(7):986–1010, 1993.

[44] A. Shiryaev. Probability Springer-Verlag, 1988.

[45] B. Silverman et al. Convergence of a class of empirical distribution functions of dependent random variables. The Annals of Probability, 11(3):745–751, 1983.

[46] G. Tian. Parameter Estimation for Stable Distribution: Spacing based and Indirect Inference. PhD thesis, UC Santa Barbara, 2016.

[47] V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev. Chance and Stability. DE GRUYTER, jan 1999.

[48] A. Valencia-Orozco and J. R. Tovar-Cuevas. Parametric survival model based on the Lévy distribution. Communications for Statistical Applications and Methods, 26(5):445–461, 2019.

[49] B. J. West, P. Allegrini, and P. Grigolini. Dynamical generators of Lévy statistics in biology. In Fractals in Biology and Medicine, pages 17–29. Birkhäuser Basel, 1998.

[50] Xinyu Ma and C. L. Nikias. Joint estimation of time delay and frequency delay in impulsive noise using fractional lower order statistics. IEEE Transactions on Signal Processing, 44(11):2669–2687, 1996.

[51] V. M. Zolotarev. One-dimensional stable distributions, volume 65. American Mathematical Soc., 1986.

8 Кратка биографија

Жикица Г. Лукић рођен је 25. октобра 1996. године у Ужицу. Ту је завршио основну и средњу школу. 2015. је уписао основне студије математике на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Статистика, актуарска и финансијска математика, које је окончао 2019. године са просечном оценом 9,47.

2019. године уписао је мастер студије на истом смеру и положио све испите предвиђене програмом студија са просечном оценом 10. Посебно га интересује теоријска статистика, као и теорија екстремних вредности.