УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ПРИРОДНО МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МОДЕЛ ЖИВОТНОГ ОСИГУРАЊА ВИШЕ ОСОБА

-МАСТЕР РАД-

Ментор: Јелена Јоцковић

Студент: Јована Протић

Београд, Фебруар 2020.

Садржај:

УВОД

Осигурање је област која обухвата елементе математике и економије и која је, у различитим облицима, веома популарна међу потрошачима овог века. Настала је из потребе да се појединци у границама могућности заштите од штетних последица неких неочекиваних догађаја којима су изложени њихова имовина, живот, здравље. Суштина осигурања је да се, на пример, власници имовине која је изложена одређеним опасностима осигурају ради подношења штете која би евентуално задесила неког од њих услед остварења неког од ризика.

Са становишта појединца осигурање је механизам којим се надокнађује трошак у случају великог неизвесног финансијског губитка који би постојао када не би било осигурања. На пример, појединци знају да је ризик од пожара у њиховој кући мали, али га се боје зато што би последице биле веома неповољне, стога су спремни да плате осигурање против пожара. Са друге стране, осигуравајућа друштва примају уплату премија зато што знају, на основу статистике, да ће се код велике групе агената догодити мали број пожара.

Присуство ризика се не може неутралисати, па појединци и предузећа траже погодна решења, што за последицу има све већи напредак у овој области. Иако друштво може помоћи да се олакша терет ризика у многим областима, ипак постоје неки ризици за које су одговорни појединци. Постојање тог ризика је извор осећања нелагодности код највећег броја људи, а пратећа неизвесност ствара страх и забринутост.

Под појмом врсте осигурања подразумевамо скуп опасности од којих се осигуравају одређене ствари. Сваку врсту осигурања одређује скуп опасности, особине, место коришћења и употребе ствари која се осигурава. Основна подела осигурања је на две велике групе:

- *животна осигурања* – осигурање живота, рентно осигурање, допунско осигурање уз осигурање живота, добровољно пензијско осигурање...
- *неживотна осигурања* – осигурање од последица незгоде, осигурање моторних возила, осигурање имовине од пожара и других опасности...

Акценат у овом раду ће бити на животном осигурању. Животно осигурање је, на неки начин, штедња за будућност појединца и његове породице.

Тема овог рада је прављење модела за животно осигурање више особа. Сам рад се састоји из два дела. У првој целини представљен је уводни део посвећен основним појмовима из области класичног животног осигурања. Појашњен је основни концепт осигурања, наведени су појмови који су неопходни за даљи рад. У оквиру другог дела описан је модел вишеструког декремента који се користи при моделирању уговора о осигурању који обухвата више различитих догађаја. При чему накнада на име суме осигурања зависи од тога који се од осигураних догађаја реализовао. Затим се разматрају полисе осигурања које се истовремено односе на више особа. У овом случају користимо модел осигурања више особа.

ПОГЛАВЉЕ 1

1. ОСИГУРАЊЕ

1.1 НАСТАНАК И ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ ОСИГУРАЊА

Човек и његова добра непрекидно су изложени бројним опасностима која му угрожавају живот, здравље, имовину. Развој науке и технике није омогућио спречавање настанка штетних догађаја, напротив, све бржи напредак технике доводе до појава нових већих опасности.

Корене осигурања налазимо још код Вавилонаца који су пре четири миленијума примењивали облик осигурања који се спроводио тако што су у случају губитка брода његовом власнику надокнађивала штета, али који је у случају да брод срећно стигне на своју дестинацију био дужан да исплати одређени део своје добити. Елементе осигурања налазимо и раније, у пракси кинеских трговаца који се пре 5000 година превозећи робу преко реке Јангце имали обичај да је поделе у више чамаца, чиме се на једноставан начин дели ризик у случају превоза преко опасних места. Потонућем појединих чамаца бива уништен само део робе, док је остатак робе укрцан на осталим чамцима био спашен. Поред тога они су заједнички сносили штету пропасти појединих чамаца. У поморским превозима се све више тражила али и добијала сигурност да ће укрцани терет велике вредности као и бродови који тај терет превозе срећно приспети на одредиште, а да ће се у противном случају за њих дати потпуна надокнада претрпљене штете.

Први трагови осигурања у Србији налазе се у законику цара Душана из 1349. и 1354. године, а осигурање у правом смислу на нашим просторима среће се тек половином XIX века, тзв. “*Кошеви”* Милоша Обреновића. Прве послове осигурања у Краљевини Југославији обављала су страна осигуравајућа друштва, док је први домаћи осигуравајући завод основан тек 1897. године који је радио као Одељење за осигурање Београдске задруге. До почетка Првог светског рата у Краљевини Србији основана су још 3 домаћа осигуравајућа друштва – “*Србија*”, “*Шумадија*” и “*Југославија*”.

За писање **Поглавља 1.1.** коришћене су књиге [2] и [3]

1.2. ПОЈАМ ОСИГУРАЊА

Осигурање представља област од посебног друштвеног и економског интереса, а сама реч осигурање указује да је реч о специфичној врсти заштите, обезбеђења, сигурности. Појмови опасност, ризик, одштета, уско су повезани с појмом осигурања, што нас доводи до закључка да је основни циљ осигурања заштита осигураника и других оштећених лица.

Осигурање не може спречити настанак штетних догађаја. Помоћу њега се само може остварити одговарајућа заштита, која заправо представља финансијску надокнаду услед настанка неког штетног догађаја. Дакле, осигурање нам не омогућава добитак, за разлику од, рецимо, игара на срећу, већ нам обезбеђује помоћ у тренутку када је људима најпотребнија, односно помаже да се изгради оно што је већ постојало или да финансијски надокнади неповратни губитак.

Осигурање је мултидисциплинарна област у којој се преплићу елементи економског, правног и актуарског аспекта, при чему свака од ових наука дефинише осигурање на себи својствен начин. Из економског угла осигурање се може дефинисати као финансијска трансакција која се обавља између осигуравајуће компаније и осигураника у условима наступања осигураног случаја. Правни вид осигурања се бави проучавањем права и обавеза уговорних страна (осигураника и осигуравача). Актуари осигурање посматрају као математичко-статистичку категорију која представља процењивање тежине ризика, односно његово распоређивање на мноштво осигураника, а не само на појединца. То се постиже груписањем ризика по различитим опасностима (пожари, поплаве, ...), имајући при томе у виду да је вероватноћа настанка одређеног штетног догађаја различита за сваког појединца. На основу тога актуари рачунају и саму премију у оквиру осигуравајуће компаније.

Логика осигурања је стварање што већег скупа у којем чланови скупа (осигураници) унапред уплаћеним износима (премијама) доприносе стварању фондова из којих се исплаћују одштете осигураницима који су претрпели штету. Основа осигурања лежи у начелу узајамности и солидарности.

Посао осигурања базира се на закључивању уговора о осигурању којим се стварају обавезе за обе уговорене стране – осигураник се обавезује да ће плаћати премију осигурања (новчана свота која се плаћа као накнада за обезбеђење осигуравајуће заштите), док се осигуравач обавезује да ће сносити последице услед наступања осигураног случаја. Предмет осигурања је оно што се осигурава, што у данашње време може бити готово све (живот, имовина, пословање, интереси...), и он мора бити јасно назначен у полиси осигурања и управо предмет осигурања служи као мерило за одређивање врсте осигурања.

1.3. ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ ОСИГУРАЊА

Предмет осигурања

Предмет осигурања је неко добро или лице на коме се може остварити ризик. Предмет може бити имовински интерес, животиње, живот, здравље. Дефинисање предмета осигурања представља кључну претпоставку постојања осигурања и он мора бити наведен у уговору, односно полиси осигурања. Као примери за предмете осигурања могу се навести ученици и студенти (осигурање од незгоде), машински уређаји, трошкови пословања предузећа и многи други. У случају животног осигурања, предмет осигурања је особа чији је живот осигуран.

Ризик

Један од битних, може се рећи основних елемената, без којег осигурање не би постојало, јесте ризик. У основном значењу, реч је о могућности настанка неког нежељеног, односно штетног догађаја који, уколико се догоди, ствара обавезу осигуравајуће компаније према осигуранику на основу закљученог уговора о осигурању или по одређеним законским одредбама. Под ризиком се често подразумева и сам догађај који ће својим наступањем изазвати неку одређену штету. Да би у осигурању постојао ризик, морају постојати следећи елементи:

- Ризик мора бити могућ
- Наступање ризика изазива одређену штету
- Ризик мора бити неизвестан, његово наступање се не зна
- Наступање ризика мора бити случајно

Полиса

Полиса осигурања је основна писмена исправа која прати посао осигурања, одређујући дужности и обавезе учесника. У неким случајевима полиса представља облик уговора о осигурању. Када то није, она редовно прати уговор о осигурању и представља најважније доказано средство за обе уговорене стране, пошто садржи најважније елементе закљученог уговора. Неки од елемената које обично садржи су уговорене стране, осигурано лице или осигурана ствар, ризици, трајање осигурања, премија.

Премија

Премија осигурања представља новчану своту коју је уговарач осиграња, односно осигураник дужан да плати као надокнаду за обезбеђење осигуравајуће заштите. У условима осигурања наших осигуравајућих организација премија се једноставно означава као износ који уговарач треба да плати за осигурање, односно представља цену ризика. Између ризика и премије осигурања постоји уска повезаност. Висина премије одређује се према просечној величини ризика, чија се свака промена мора исказати у промени премије. Премија се плаћа у уговореним роковима, а у случају када треба да се исплати одједном плаћа се приликом закључења уговора.

Накнада из осигурања

Кључни значај осигурања, по дефиницији, јесте накнада штете у случају остварења осигураног ризика код неживотних осигурања, односно исплата осигуране суме код животних осигурања. Накнада из осигурања представља основну обавезу осигуравајућег друштва према уговарачу осигурања, односно осигуранику, која се базира и произилази из закљученог уговора о осигурању.

Осигуравач

Функцију осигурања обављају осигуравајућа друштва, односно осигуравачи. Осигуравач је правно лице које се уговором о осигурању обавезује да ће надокнадити штету, тј. исплатити уговорену вредност осигурања када настане осигурани случај. Осигуравачи се разликују према величини, врсти и обиму ризика које покривају, могу се бавити с једним, с неколико или са свим гранама осигурања.

Осигураник

Као осигураник, може се појавити свако физичко или правно лице које има пословну способност и интерес за осигурањем. Лице које закључи уговор о осигурању, у своје име и за свој рачун јесте уговарач осигурања, односно осигураник, при чему се обезбеђује од нежељеног дејства покривених ризика.

Осигурани случај

Осигурани случај представља настанак околности које, на основу закона или уговора о осигурању, обавезује осигуравача да исплати одговорајућу одштету осигуранику. Није могуће извести јединствен појам осигураног случаја за све врсте осигурања јер га описују различити ризици. Међутим када су ризик и предмет осигурања јасно одређени тада је и дефинисање осигураног случаја лако, али такође постоје и ситуације када се осигурани случај не остварује само у једном тренутку, већ може обухватити краћи или дужи период (рецимо, у случају болести) и тада је важно одредити који тренутак у наступању штете треба узети као осигурани случај.

Осигурана сума

Новчани износ који се исплаћује осигуранику уколико наступи осигурани догађај. Осигурана сума представља горњу границу основне осигуравачеве обавезе. Свота осигурања је важан елемент уговора о осигурању који служи као основица за обрачун премије. Сума осигурања по правилу означава износ на који је осигурана нека ствар или нека корист од имовине. Осигуравач је обично укључен у одређивање ове суме, али је коначна одлука и сношење могућих последица због неодговарајуће висине суме искључиво на страни осигураника.

Трајање осигурања

Трајање осигурања представља временску дужину дејства осигурања. Трајање осигурања се, према потреби, може уговорити на одређени рок или на неодеђено време. Најчешће је то годину дана, али може бити и дужа или краћа, на пример, у случају неких краткотрајних путовања. Од зависности трајања осигурања разликују се краткорочна осигурања у трајању од једне године, вишегодишња осигурања са трајањем више од једне године као и дугорочна осигурања са неодређеним роком трајања при чему се уговара само почетак осигурања.

Уговори о осигурању

Односи осигурања се, по правилу, заснивају уговором као правним послом, било да је реч о добровољном или обавезном осигурању. Уговори о осигурању стварају обавезе за обе уговорене стране: осигураник се обавезује да ће плаћати премију осигурања, док се осигуравач обавезује ће сносити последице оствареног ризика. Засновани су на закону и закључени су на добровољној основи уговарача.

У овом поглављу су наведени кључни појмови који су неопходни за наставак детаљнијег разрађивања теме о животном осигурању уз помоћ књиге која је у литератури наведена под редним бројем [7]. Надаље ће, кроз цео рад, литература бити наведена на исти начин.

Када смо разумели основни концепт осигурања, прелазимо на следеће поглавље у ком се боље упознајемо првенствено са појмом класичног животног осигурања, а касније тај модел проширујемо и на модел животног осигурања више особа.

ПОГЛАВЉЕ 2

2. ЖИВОТНО ОСИГУРАЊЕ

Животно осигурање се односи на сва осигурања код којих престанком или трајањем живота једног или више лица долази до исплате осигуране суме од стране осигуравача. На овај начин човек се обезбеђује од ризика смрти.

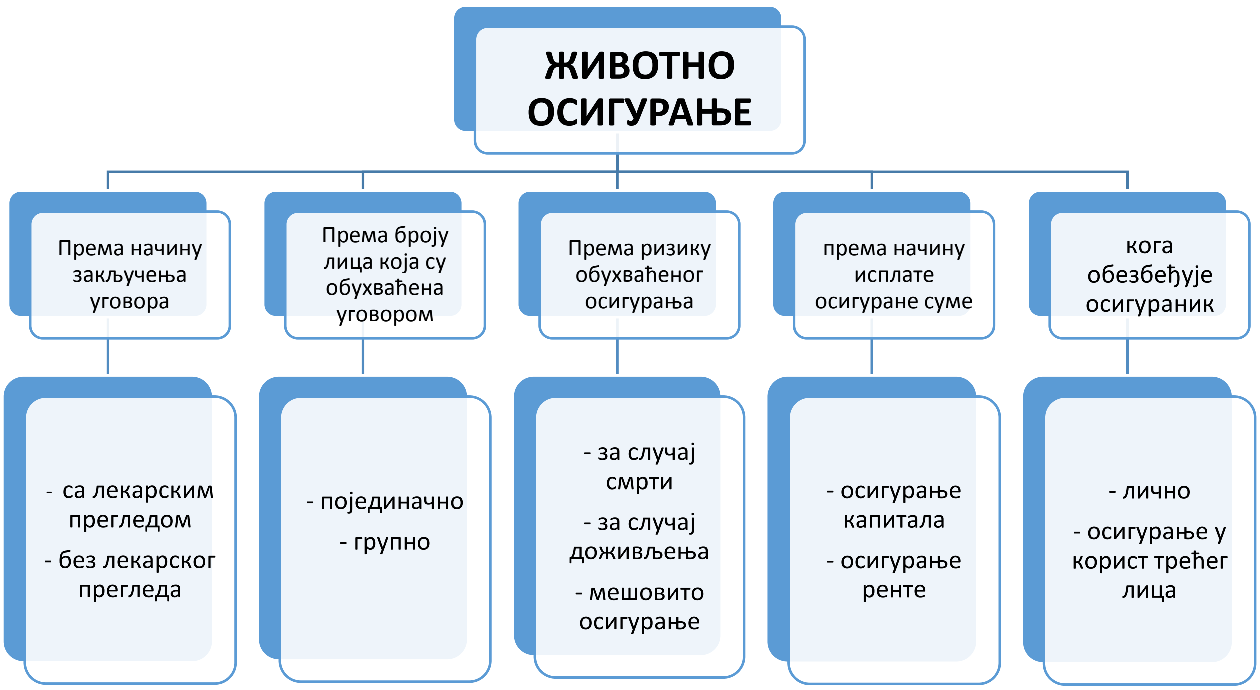
Животно осигурање се најједноставније може дефинисати као уговор којим се осигуравач обавезује да ће сходно наплаћеним премијама од осигураника, исплатити осигураном лицу одређену суму у случају смрти или у случају његовог доживљења. Посматрано из перспективе осигураника, осигурање живота, обезбеђује заштиту од ризика и представља облик штедње. Животно осигурање је узајамна гаранција великог броја људи исте угрожености, где је та угроженост случајна. Гаранција се огледа у стварању одређеног новчаног фонда који се формира од уплата угрожених лица, при чему том уплатом лица постају чланови заједнице ризика животног осигурања. Ова уплаћена средства се користе искључиво за исплату уговореног износа члану заједнице којег је задесио одређени осигурани случај. Ова финансијска својства једним делом чине математичку резерву која заправо служи за покриће будућих ризика. Пошто су уговори о осигурању живота вишегодишњи, неопходно је да се штедња премија издваја и преноси из године у годину и заједно са каматом формира математичку резерву, која служи за исплату осигуране суме. [4]

Приликом рачунања животног осигурања јавља се непозната случајна величина која представља тренутак смрти осигураника. Сам рад са овом случајном величином се поједностављује увођењем закона великих бројева и самим тим можемо рећи да се заправо осигурање живота базира на овом закону. Дакле, суштина овог закона је у томе да се, уколико се посматра велики број случајева, могу уочити одређене правилности у наступању једног догађаја. Што је већи број посматраних случајева, правилност у наступању једног догађаја је већа, а одступања су мања. Што заправо значи да, приликом рачунања одговарајуће премије, потребно је заправо израчунати вероватноћу настанка неког штетног догађаја. Углавном вредност премије добијамо на основу неког искуства из прошлости, при чему имамо у виду да, уколико је вероватноћа настанка неког штетног догађаја већа и премија у том случају мора бити већа.

На пример, познато је да сваки човек мора умрети, али се не зна када ће то бити, јер је смрт једног лица будући неизвестан догађај. Уколико се, међутим, посматра велика група људи, може се са великим процентом тачности утврдити да ће годишње у тој групи умрети одређени број људи. Из наведених разлога закон великих бројева има велики утицај у осигурању, јер омогућава тачније предвиђање наступања осигураног случаја. Што је број осигураних предмета већи и захвата шире подручје и што је трајање осигурања дуже, реализација одређених случајева биће ближа очекиваном. [5]

2.1. ВРСТЕ ЖИВОТНОГ ОСИГУРАЊА

Животно осигурање пружа велики број могућности и комбинација за осигурање тако да сваки човек може да нађе свој интерес у њему. На следећем графику приказаћемо врсте и подврсте животног осигурања: [1]



Шема 1

Најчешће врсте су:

- Осигурање за случај смрти
- Осигурање за случај доживљења
- Мешовито осигурање
- Одложено осигурање

У односу на осигурану суму, животно осигурање се може поделити на два случаја:

- осигурана сума је фиксирана
- осигурана сума није фиксирана:
  - дискретно
  - непрекидно

Код дискретних осигурања се осигурана сума исплаћује на крају године смрти, док код непрекидних осигурања осигурана суме се исплаћује у тренутку смрти осигураника.

ПОГЛАВЉЕ 3

3. КАМАТНЕ СТОПЕ

Као што смо и раније споменули, осигурање нам пружа одређени вид заштите, сигурности, поверења. С обзиром да са собом носи и одређени ризик, можемо га упоредити са играма на срећу. Међутим, за разлику од игара на срећу које нам нуде могућност добитка или губитка који нас чак може довести и до уништења имовине или самог играча, сврха осигурања је да обезбеди финансијску надокнаду у тренутку када је људима најпотребнија, непосредно после несреће или одређеног губитка. Решење проблема сигурности омогућила је актуарска математика или техника осигурања, која је заправо саставни и нераскидиви део осигурања. Наиме, некада се на несрећне случајеве гледало као на судбински предодређене, чија појава се не може предвидети, а од краја XVII века захваљујући достигнућима математике и статистике, пре свега открићем закона великих бројева и рачуна вероватноће уопште, на случај се гледа као на догађај који се не само са одређеном сигурношћу може узети у обзир већ који се захваљујући извесним правилностима може чак и предвидети. Актуарска математика је у тесној вези и са финансијском математиком. Основни принцип финансијске математике – принцип еквиваленције, по коме је збир свих уплата сведених на исти временски тренутак једнак збиру свих исплата сведених такође на тај временски тренутак, представља основни принцип и актуарске математике. Својим методама: дисконтом, перпетуитетом, ануитетом и другим, финансијска математика даје финансијску оцену одређених финансијских средстава. [10]

Често нас, приликом склапања уговора о осигурању, занима колика ће бити вредност осигуране суме у тренутку када наступи штетни догађај наведен у уговору. У тим случајевима главну улогу има управо финансијска математика, па ћемо у наставку увести основне појмове који ће нам помоћи да лакше схватимо процес камаћења.

Детаљнији опис самог процеса се може наћи у књигама [1] и [6].

Скуп финансијских трансакција се назива ***ток новца***

$$(x_{t_1}, x_{t_2} \ldots x_{t_n})$$

који представља низ уређених парова реалних бројева

$$(t_k, x_k),\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

таквих да $\boldsymbol{t_k}$ представља временске тренутке, а $\boldsymbol{x_k}$ новчани износ.

Камата

Камата је накнада коју особа плаћа повериоцу за коришћење позајмљеног новца на одређено време. Камата се обрачунава у одређеним временским интервалима, најчешће су то годишњи интервали. Поступак обрачунавања камате називамо ***камаћење*** и постоје два типа:

- просто камаћење
- сложено камаћење

Просто камаћење

Код простог камаћења сума коју је особа уложила расте линеарно са временом. Дакле, ако са G означимо уложену суму новца на период од t година и нека је i годишња каматна стопа, тада простим камаћењем након t година на рачуну имамо

$$G\,(1 + t * i)$$

Сложено камаћење

У случају када се камата обрачунава једном годишње, код сложеног камаћења након сваког периода вредност камате се додаје главници, па се нова камата рачуна на ову, увећану вредност главнице. Односно, ако је G уложена сума и i годишња каматна стопа, након n година на рачуну имамо

$$G(1 + i)^n$$

Сложено камаћење може бити и променљиво, тј. камаћење не мора бити обрачунато на период од годину дана. На пример, ако се камата обрачунава *m пута годишње,* тада ћемо након једне године на рачуну имати

$$G(1 + \frac{i}{m})^m$$

ефективна каматна стопа

Под ефективном каматном стопом подразумевамо ону каматну стопу која би при простом камаћењу дала исти резултат као полазна каматна стопа при сложеном камаћењу. Ако годину поделимо на m година, за сваки период каматна стопа је $\frac{i^{(m)}}{m}$, док је $i^{(m)}$ годишња каматна стопа. Тада:

$$G(1 + i) = G(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m$$

$$i = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1$$

$$i^{(m)} = m((1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1)$$

Садашња вредност новца

Каматни рачун, који смо до сада разматрали, даје правило по коме се новац који уложимо у банку, или дуг за кредит који смо позајмили од банке, увећава у будућности. Међутим, некада нас занима и обрнут проблем: колика је садашња вредност новца кроз годину дана. Ако знамо да ћемо кроз годину дана добити износ G при каматној стопи i тада је његова садашња вредност

$$\frac{G}{1 + i}$$

Видимо да је садашња вредност будуће суме мања од саме вредности те будуће суме, тј. будућу суму умањујемо како бисмо добили садашњу вредност. Фактор за који будућу суму умањујемо назива се ***дисконтни фактор***

$$v = \frac{1}{1+i}$$

где је i годишња каматна стопа.

Дисконтни фактор за један период приликом сложеног камаћења који се обрачунава m пута годишње:

$$v^{(m)} = \frac{1}{1+\frac{i^{(m)}}{m}}$$

3.1. ПЕРПЕТУИТЕТИ И АНУИТЕТИ

Перпетуитети представљају бесконачни низ плаћања одређених износа у једнаким временским интервалима. Обично је то на годину дана.

1. годишње уплате од једне новчане јединице
   - уколико је прво плаћање у тренутку $t=0$ тада се тај перпетуитет назива ***трајни перпетуитет*** и важи:
   $$\ddot{a}_{\infty\rceil} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v}$$
   - уколико је прво плаћање на крају прве године, тада тај перпетуитет називамо ***тренутни перпетуитет*** за који важи:
   $$a_{\infty\rceil} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$
2. Ако се уплате од $\frac{1}{m}$ врше m пута годишње:
   - трајни перпетуитет:
   $$\ddot{a}_{\infty\rceil}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \cdots = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{1/m}}$$
   - тренутни перпетуитет:
   $$a_{\infty\rceil}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \frac{1}{m}v^{3/m} + \cdots = \frac{1}{m}\frac{v^{1/m}}{1-v^{1/m}}$$
3. непрекидни перпетуитет ($m \to +\infty$):
   $$\bar{a}_{\infty\rceil} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta}$$

Ануитети представљају низ плаћања ограниченог трајања *n*

1. годишња плаћања од једне јединице

   - прво плаћање је у тренутку *t=0*

$$\ddot{a}_{n\rceil} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

   - прво плаћање на крају прве године

$$a_{n\rceil} = v + v^2 + \cdots + v^n = v\frac{v^n - 1}{v - 1}$$

2. Ако се уплате од $\frac{1}{m}$ врше m пута годишње *n* година:

   - прво плаћање у тренутку *t=0*

$$\ddot{a}_{n\rceil}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \cdots + \frac{1}{m}v^{(nm-1)/m} = \frac{1}{m}\frac{v^n - 1}{v^{1/m} - 1}$$

   - прво паћање на крају године:

$$a_{n\rceil}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \cdots + \frac{1}{m}v^n = \frac{1}{m}v^{1/m}\frac{v^n - 1}{v^{1/m} - 1}$$

Ануитет може да се изрази и као разлика два перпетуитета:

$$\ddot{a}_{n\rceil} = \ddot{a}_{\infty\rceil} - \ddot{a}_{\infty\rceil}v^n$$

Под условима осигурања наших осигуравајућих организација премија представља износ који уговарач треба да плати за осигурање. Премија се може исплатити одједном приликом закључења уговора или у одређеним ратама, што је доста чешћи случај. Како је задатак финансијске математике квантитивна анализа отплате зајмова, у овом поглављу смо разматрали случај постепеног исплаћивања одређених износа, било да је низ плаћања рата бесконачан или је пак ограниченог трајања. Увођењем перпетитета и ануитета добијамо јаснију слику самог процеса исплаћивања премија, односно одређивање висине премије која мора бити сразмерна дужини одсека времена у коме се покрива ризик.

ПОГЛАВЉЕ 4

4. МОДЕЛ ПРЕОСТАЛЕ ДУЖИНЕ ЖИВОТА

Било да разматрамо случај добровољног или обавезног осигурања, уговор представља неопходност у дефинисању односа осигурања. У случају животног осигурања неизвесност је везана само за време реализације ризичног догађаја. Тачније, ризични догађаји који су обухваћени уговорима о животном осигурању зависе од преосталог животног века осигураника. Осигурање се најчешће нуди особама доброг здравља, некада се врши и лекарски преглед. Ако се претпостави да је особа здрава у тренутку куповине осигурања, тада се очекује да је особа која је управо купила осигурање здравија него она особа која је купила осигурање пре неколико година. Наравно, ово очекивање важи уколико су остали фактори једнаки код обе особе. С обзиром да није унапред познато колико ће нека особа живети, њену старост ћемо представити ненегативном случајном променљивом уз помоћ које ћемо надаље приказати како се рачунају вероватноће смрти или доживљења осигураника у неком одређеном тренутку, као и рачунање вероватноће настанка штетног догађаја уз коју лакше одређујемо и вредност саме премије.

Дакле, за особу старости x преосталу дужину живота ћемо представити случајном променљивом T(x)=T која има непрекидну расподелу на $[0,+\infty)$.

Функција расподеле случајне променљиве T(x):

$$G(t) = P\{T \leq t\}, t \geq 0$$

представља вероватноћу да ће преостали животни век особе старости x бити мањи од t година, за неко фиксирано t. Претпоставља се да је функција $G(t)$ непрекидна и диференцијабилна по t, тако да постоји њена густина:

$$g(t) = G'(t), \forall t \geq 0$$

Тада:

$$P\{t < T < t + dt\} = G(t + dt) - G(t) = \int_{t}^{t+dt} g(s)ds \approx g(t)dt$$

представља вероватноћу да ће се смрт догодити у интервалу од t до $t + dt$, за довољно мало dt.

- Вероватноћа да особа чија је старост x година умре у оквиру t година:

$${}_tq_x = P\{T(x) \leq t\}=G(t)$$

- Слично, вероватноћа да особа која тренутно има x година доживи још t година

$$_tp_x = P\{T(x) > t\}$$

$$_tp_x = 1 - G(t)$$

- Вероватноћа да особа чија је старост *x* година доживи *s* година и умре у оквиру *t* година

$$_{s|t}q_x = P\{s < T < s+t\} = G(s+t) - G(s) = {}_{t+s}q_x - {}_sq_x$$

- Условна вероватноћа да особа након напуњених *x*+*s* година преживи још *t* година:

$$_tp_{x+s} = P\{T > s+t | T > s\} = \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)} =$$
$$= \frac{_{t+s}p_x}{_sp_x}$$

- Слично, условна вероватноћа да ће особа након напуњених *x*+*s* година умрети у оквиру *t* година:

$$_tq_{x+s} = P\{T \leq s+t | T > s\} = \frac{P\{T > s, T \leq s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} = \frac{_{s|t}q_x}{_sp_x}$$

- Очекивани животни век особе старости *x*:

$$\dot{e}_x = E(T) = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} \big(1 - G(t)\big)dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt$$

- Интензитет смртности особе старости *x* у тренутку *x*+*t:*

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}\ln\big(1 - G(t)\big) = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_x)$$

- Интеграцијом последњег израза добијамо:

$$\int_0^t \mu_{x+s} ds = -ln_tp_x + {}_0p_x = -ln_tp_x,$$

одакле следи:

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

$$g(t)dt = P\{t < T < t + dt\} = \big(1 - G(t)\big) \cdot \frac{g(t)dt}{1 - G(t)} = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$\dot{e}_x = E(T) = \int_0^{+\infty} t \cdot g(t)dt = \int_0^{+\infty} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$${}_{s|t}q_x = P\{s < T < s + t\} = \big(1 - G(s)\big) \cdot \frac{P\{s < T < s + t\}}{1 - G(s)} = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+t}$$

Слично,

$${}_{t|s}q_x = {}_tp_x \cdot {}_sq_{x+t}$$

Показали смо да је

$${}_{t|s}q_x = P\{t < T < t + s\} = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot s$$

Одакле добијамо да је

$${}_sq_{x+t} \approx \mu_{x+t} \cdot s$$

4.1. ЦЕЛОБРОЈНИ ЖИВОТНИ ВЕК

Увешћемо случајну величину К= К(x) која се дефинише К=[T], тј. целобројна преостала дужина живота особе која у садашњем тренутку има x година. Расподела вероватноће случајне променљиве К:

$$P\{K = k\} = P\{k \le T < k + 1\} = G(k + 1) - G(k) = {}_{k+1}q_x - {}_kq_x, \text{ за к = 0,1,...}$$

$$P\{K = k\} = P\{k \le T < k + 1\} = \big(1 - G(k)\big) \frac{P\{k \le T < k + 1\}}{1 - G(k)} = {}_kp_x \cdot {}_1q_{x+k} = {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

Очекивана вредност случајне променљиве К:

$$e_x = E(K) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP\{K = k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, {}_kp_x\, q_{x+k}$$

или

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} P\{K \geq k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_k p_x$$

Ако посматрамо још једну случајну промењљиву S, која ће представљати део године током ког је особа старости *x* жива у години умирања, тада видимо да важи:

T=K+S

S има непрекидну расподелу на интервалу $[0,1)$. Апроксимирањем њене очекиване вредности са $\frac{1}{2}$, тј. $E(S) \approx \frac{1}{2}$ добијамо апроксимацију

$$\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}$$

која представља очекивану преосталу дужину живота особе старости *x.*

Ако претпоставимо да су S и K међусобно независне, тада

$$P\{S \leq u|K = k\} = \frac{P\{S \leq u, K = k\}}{P\{K = k\}} = \frac{P\{T \geq k, T \leq k + u\}}{P\{K = k\}}$$
$$= \frac{P\{T \leq k + u|T \geq k\} \cdot P\{T \geq k\}}{P\{K = k\}} = \frac{{}_u q_{x+k}\, {}_k p_x}{{}_k p_x\, q_{x+k}} = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}}$$

и условна расподела за S, при услову $K = k$, не зависи од *к,* па можемо написати и да важи

${}_u q_{x+k} = H(u) \cdot \ q_{x+k}$, за неко k=0,1,…; 0 ≤ u <1, и неку функцију $H(u)$

Ако претпоставимо да $H(u) = u$ има равномерну расподелу између 0 и 1 и уз претпоставку да су S и K међусобно независне, тада важе и следеће једнакости:

$$T = K + S \ \Rightarrow \ E(T) = E(K) + E(S)$$

$$T = K + S \ \Rightarrow D(T) = D(K) + D(S) = D(K) + \frac{1}{12}$$

ПОГЛАВЉЕ 5

5. ВРСТЕ ЖИВОТНОГ ОСИГУРАЊА

Животно осигурање можемо посматрати као један вид опкладе – осигураваjућа кућа се клади да нећемо доживети то од чега се осигуравамо, а ми се кладимо да бисмо се осигурали у случају да нам се баш то догоди. Улагање у сопствено осигурање нам обезбеђује финансијску подршку у каснијим годинама живота, односно заштиту када је то најпотребније. Дакле, животно осигурање подразумева да се корист осигураника састоји из исплате осигуране суме прописане уговором о осигурању. У зависности од потреба које имамо, постоје различите врсте животних осигурања које смо приказали у *Шеми 1.* У овом поглављу ћемо се детаљније упознати са поделом према ризику обухваћеног осигурања, која се уједно и највише примењује у пракси.

Садашњу вредност исплате означаваћемо са Z, која се израчунава на основу ефективне каматне стопе i, док ћемо са T означавати преостали животни век осигураника. Очекивану садашњу вредност исплате $E(Z)$ називамо још и једнократном нетом премијом. Првенствено ћемо посматрати животна осигурања која имају јединицу за осигурану суму за случај смрти уз помоћ књиге [1].

ОСИГУРАЊЕ ЗА СЛУЧАЈ СМРТИ

- ***Доживотно*** осигурање предвиђа исплату једне јединице на крају године смрти. Вредност исплате је фиксирана, док је време исплате *К+1,* случајно.

Садашња вредност исплате је:

$$Z = v^{k+1}$$

тако да је $v = \frac{1}{1+i}$ одговарајући дисконтни фактор и i одговарајућа ефективна каматна стопа.

Видимо да случајна промењлива узима вредности v, v^2, v^3 ... за *k=0,1,2, …,* а за њену функцију расподеле важи:

$$P\{Z = z\} = P\{Z = v^{k+1}\} = P\{K = k\} = {}_kp_x q_{x+k}$$

Једнократну нету премију означаваћемо са A_x и важи:

$$A_x = E(Z) = E(v^{k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

- ***Привремено*** осигурање од n година подразумева да се исплата врши само ако се смрт догоди у току од n година.

Расподела у овом случају:

$$Z = \begin{cases} v^{k+1} & , k = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & , k = n \end{cases}$$

Једнократна нето премија:

$$A^1_{x:n]} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

ОСИГУРАЊЕ ЗА СЛУЧАЈ ДОЖИВЉЕЊА

Осигурање за случај доживљења у *n* година, подразумева да ће се осигурана сума исплатити само уколико је осигураник жив на крају *n-те* године. Дакле,

$$Z = \begin{cases} 0 & , \ k = 0,1, \ldots, n-1 \\ v^n & , \ k = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Једнократна нето премија за случај доживљења:

$$A_{x:n]}{}^1 = E(Z) = v^n {}_n p_x$$

МЕШОВИТО ОСИГУРАЊЕ

Мешовито осигурање подразумева да се осигурана сума исплаћује на крају године смрти уколико се смрт догоди у току од првих *n* година, иначе се исплаћује на крају *n-те* године.

$$Z = \begin{cases} v^{k+1} & , k = 0,1, \ldots, n-1 \\ v^n & , k = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Дакле, видимо да за једнократну нето премију мешовитог осигурања важи следећа једнакост:

$$A_{x:n]} = A^1{}_{x:n]} + A_{x:n]}{}^1$$

ОДЛОЖЕНО ОСИГУРАЊЕ

Код одложеног осигурања у периоду од *m* година, осигуравајућа компанија се обавезује да ће исплатити осигурану суму само уколико осигураник умре после *m* година од почетка осигурања.

$$Z = \begin{cases} 0 & , k = 0,1, \ldots, m-1 \\ v^{k+1} & , k = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

Једнократну нето премију код одложеног осигурања означавамо ${}_{m|}A_x$ и за њу важи:

$${}_{m|}A_x = A_x - A_{x:m\rceil}$$

Ако желимо пак да поједноставимо причу, можемо рећи да постоје само две врсте: класично осигурање од нежељеног догађаја и штедно животно осигурање. На пример, мешовито осигурање заправо представља комбинацију осигурања и штедње, јер се уговор односи на осигурани случај услед смрти осигураника и осигурани случај његовог доживљења. Премије које се уплаћују за мешовито осигурање су управо и врста штедње јер у случају доживљења истека полисе која је прописана уговором новац који смо уплаћивали ће нам бити враћен уз одређену добит која зависи од осигуравајуће куће код које имамо полису. Са друге стране, класично осигурање од нежељеног догађаја је специфично по томе што осигуравајућа кућа у случају да се догоди несрећни случај исплаћује осигурану суму кориснику полисе, али у случају да полиса истекне, а тај несрећни случај се није догодио, не добијамо ништа.

Дакле, ако кренемо од неке најгоре претпоставке, у случају смрти, корисници ваше полисе које сте ви пријавили приликом склапања уговора о осигурању живота добиће осигурану суму која им гарантује неку финансијску сигурност. Међутим, уколико се овај случај заобиђе, при истеку осигурања добићете уговорену осигурану суму увећану за добит. Како покрива обе ситуације, за овај тип осигурања се може рећи да је најзаступљенији.

ПОГЛАВЉЕ 6

6. ОСИГУРАЊЕ РЕНТЕ

Рента представља ток новца који се састоји од периодичних испата унапред одређене суме током трајања живота особе. Што значи да се рента може представити као доживотни ануитет који зависи од преосталог животног века *T,* док садашња вредност исплата је случајна величина коју ћемо обележавати са *Z.*

Подела ренте:

1. ***Лична рента*** коју осигураник сам прима, и ***рента у корист трећег лица*** када осигураник обезбеђује корисника ренте
2. У односу на то када је почетак исплате ренте, разликујемо:
   - ***непосредну ренту:*** почетак исплате је одмах по закључивању уговора
   - ***одложена рента:*** треба да протекне неки број година до почетка исплате
3. У односу на то колико дуго се исплаћује рента:
   - ***доживотна рента:*** исплаћује се до тренутка смрти осигураника
   - ***рента ограниченог трајања:*** рента се исплаћује ограничен временски период
4. У односу на то када се исплате рента врше, имамо:
   - ***рента платива унапред:*** исплате се врше на почетку године
   - ***рента платива накнадно:*** исплате су на крају године
5. У односу на то колико пута годишње су исплате ренти:
   - ***годишња:*** исплата се врши једном годишње
   - ***m пута годишње:*** исплате се врше m пута годишње
   - ***непрекидна:*** добијамо из претходног случаја када $m \to \infty$
6. У односу на промењљивост износа ренте:
   - ***стална рента:*** увек се исплаћује исти износ
   - ***промењљива рента:*** износ ренте се мења из периода у период

У свим случајевима претпостављамо да је осигураник у тренутку закључивања уговора имао *x* година. Детаљније ћемо проћи само кроз пример доживотне личне ренте који ћемо надаље користити у раду, док се остали типови ренти могу наћи у књизи [1].

Претпоставимо да се исплате врше једном годишње:

-непосредна доживотна лична рента-

а) платива унапред

Ако се исплате врше у тренуцима *t=0,1,…,k,* тј. док је осигураник још жив, садашња вредност исплата је

$$Z = 1 + v + v^2 + \cdots + v^k = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$

Расподела случајне величине Z је

$$P\{Z = \ddot{a}_{k+1]}\} = P\{K = k\} = {}_kp_x q_{x+k}$$

Једнократна нето премија (фер цена):

$$\ddot{a}_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ddot{a}_{k+1]\,k}p_x q_{x+k}$$

Случајну величину Z можемо записати и у облику

$$Z = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k I\{K \geq k\}$$

одакле добијамо да је једнократна нето премија једнака

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k P\{K \geq k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k\, {}_kp_x$$

Такође важи

$$Z = \frac{1 - v^{k+1}}{1 - v} = \frac{1 - v^{k+1}}{d}, \qquad d = 1 - v$$

тако да за једнократну нето премију важи и следећа једнакост

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

b) ***платива накнадно***

У овом случају исплате се врше у тренуцима *t=1,2,…,k* и тада је случајна величина Z представљена као

$$Z = v + v^2 + \cdots + v^k = a_{k]}$$

Једнократна нето премија:

$$a_x = \sum_{k=1}^{+\infty} v^k I\{K \geq k\}$$

и

$$a_x = \frac{1 - A_x}{d} - 1$$

ПОГЛАВЉЕ 7

До сада смо се упознавали са првим делом овог рада, односно неким основним дефиницијама, релацијама које су нам значајне за даљи рад, односно за проширење основног модела. Сада ћемо започети други део, односно случај модела животног осигурања више особа уз помоћ књиге [1].

Проширићемо наш основни модел на модел вишеструког декремента код кога се прекид уговора не мора нужно десити због смрти осигураника. Дакле, за почетак ћемо и даље посматрати осигурање за једну особу, али случај када до истека уговора долази због више рачличитих узрока.

7. ВИШЕСТРУКИ ДЕКРЕМЕНТ

Модел вишеструког декремента је уопштење стандардног модела смртности, који се користи за моделирање уговора о осигурању који обухвата више различитих догађаја, не обавезно смрти осигураника.

На пример, може се претпоставити да осигураник жели да закључи уговор о осигурању који ће покривати случај смрти, смрт услед несреће, трајни инвалидитет, при том накнада која се исплаћује зависи од основа по коме је стечено право на накнаду. У претходном примеру је наведен случај ***вишеструког осигурања***, а модел у ком се разматрају такви случајеви се назива ***модел вишеструког осигурања***.

Нека се израђује полиса осигурања за особу старости x која покрива m осигураних случајева, при чему сума осигурања која ће бити исплаћена осигуранику уколико неки од осигураних случајева наступи за време трајања уговора, зависи управо од тога који осигурани случај је наступио. Тада можемо рећи да је осигураник припадник m група, при чему *j-ту* групу чине особе које имају право на накнаду уколико се рализује *j-ти* осигурани случај, при чему је $j= 1,2 ,..., m$. У тренутку када наступи *j-ти* осигурани случај, осигураник напушта *j-ту* групу, односно *j-та* група је изложена негативном прираштају – ***декременту.*** Тада кажемо да је наступио декремент по *j-том* основу, где је $j= 1,2 ,..., m$. Из овог разлога се модел који се користи за полисе које покривају више осигураних сучајева назива ***модел вишеструког декремента.*** Битно је нагласити да декремент не означава нужно смрт осигураника, већ наступање неког од осигураних случајева након чега уговор о осигурању више не важи.

7.1. МОДЕЛ ПРЕОСТАЛЕ ДУЖИНЕ ЖИВОТА ВИШЕСТРУКОГ ДЕКРЕМЕНТА

Предмет разматрања ће бити популација коју чине осигураници старости *x* година, чије полисе покривају m осигураних случајева. Дата популација се састоји од m група, при чему *j-ту* групу чине она лица која су се осигурала од *j-тог* осигураног случаја, при чему је j= *1,2 ,…,* m.

Узрок декремента *J* је дискретна случајна величина таква да представља скуп међусобно дисјунктних узрока

$$J \in \{1, \dots, m\}$$

Преостало време до декремента означаваћемо са *T,* односно тренутак када особа напушта статус због једног од m међусобно искључивих узрока декремента.

Наш циљ је да нађемо заједничку расподелу за случајне величине *J* и *T,* као и одговарајуће условне и маргиналне расподеле.

Заједничка расподела вероватноћа случајних величина *J* и *T* може бити записана помоћу функција густине $g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)$ тако да је

$$g_j(t)dt = P\{t < T < t + dt, J = j\}$$

вероватноћа да је до декремента дошло због узрока *j* у бесконачно малом интервалу $(t, t + dt)$.

Очигледно важи и

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + \dots + g_m(t),$$

као и

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = 1$$

Условне вероватноће:

- условна вероватноћа за узрок декремента *j* који се јавља у тренутку t:
$$P\{J = j | T = t\} = \frac{g_j(t)}{g(t)}$$
- вероватноћа да до декремента дође због узрока *j* то до тренутка t:
$$_t q_{j,x} = P\{T < t, J = j\} = \int_0^t g_j(u)du$$

- вероватноћа да до декремента дође због узрока j то до тренутка $t+s$, под условом да до декремента није дошло до тренутка s:

$$_{t}q_{j,x+s} = P\{T < t+s, J = j | T > s\} = \frac{P\{s < T < t+s, J = j\}}{P\{T > s\}} = \frac{\int_{s}^{s+t} g_j(u)du}{1 - G(s)}$$

- вероватноћа да до декремента због узрока j дође било када у буђности:

$$_{\infty}q_{j,x} = \int_{0}^{+\infty} g_j(u)du$$

Уколико обухватимо све случајеве узрока декремента, можемо изразити $_{t}q_x$ и $_{t}p_x$ из основног модела на следећи начин:

$$_{t}q_x = P\{T < t\} = G(t) = \int_{0}^{t} g(u)du$$

$$_{t}p_x = P\{T \geq t\} = 1 - G(t) = 1 - {}_{t}q_x$$

Такође, очекивано време декремента када узмемо у обзир све случајеве узрока декремента:

$$E(T) = \int_{0}^{+\infty} {}_{t}p_x dt$$

Цеобројни животни век:

Код основног модела смо дефинисали промењљиву K=[T] као целобрјну преосталу дужину живота особе која у садашњем тренутку има x година.

У случају да је једногодишња вероватноћа декремента

$$q_{x+k} = q_{1,x+k} + q_{2,x+k} + \cdots + q_{m,x+k}$$

позната за *k=0, 1, … и j=1, …, m,* заједничка расподела вероватноћа случајне промењљиве K=[T] и узрока декремента *J* може се извести.

Најпре можемо израчунати $_{k}p_x$ из чињеница да важи

$$q_{x+k} = q_{1,x+k} + q_{2,x+k} + \cdots + q_{m,x+k}$$

и

$$_{k}p_x = {}_{1}p_x \; {}_{k-1}\cdot p_{x+1} =$$
$$= p_x \cdot {}_{1}p_{x+1} \cdot {}_{k-2}p_{x+2} = \cdots = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} = (1-q_x)(1-q_{x+1}) \ldots (1-q_{x+k-1})$$

Добијамо

$$P\{K = k, J = j\} = {}_kp_x q_{j,x+k}, \text{ за } k=0,\ 1,\ \dots\ и\ j=1,\ \dots,\ m.$$

Стопа (интензитет) декремента:

Стопа декремента у години $x+t$ за особу старости x због узрока декремента j је:

$$\mu_{j,x+t} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} + \cdots + \mu_{m,x+t}$$

Такође, раније смо показали да важи и

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln\big(1 - G(t)\big) = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_x) \;\; \Rightarrow \;\; {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}$$

Уколико су све стопе декремента познате, најпре можемо израчунати ${}_tp_x$, а затим и заједничку густину расподеле за *T и J*:

$$g_j(t)dt = P\{t < T < t + dt, J = j\} = {}_tp_x \mu_{j,x+t}dt$$

Слично

$$P\{J = j|T = t\} = \frac{P\{J = j, T = t\}}{P\{T = t\}} = \frac{{}_tp_x\mu_{j,x+t}}{{}_tp_x\mu_{x+t}} = \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}}$$

ПОГЛАВЉЕ 8

Од тренутка када одлучите да свој живот поделите са неким, почињу године заједничке радости, планова, али и размишљања о будућности. Живот са собом носи лепе и оне мање лепе тренутке за које се треба на време припремити. Тада се и јавља потреба за групним осигурањем за које ће, по истеку уговора, осигурана сума бити исплаћена по једнаким деловима сваком осигуранику, а у случају смрти ће комплетна осигурана сума бити исплаћена другој осигураној особи. Наравно, групна осигурања не важе нужно само за супружнике, те групе често могу бити доста веће. На пример, приликом отварања фирме најчешће послодавци желе да обезбеде својим запосленима финансијску заштиту од непредвиђених животних ситуација. У том случају, послодавац плаћа премију за све запослене, док осигуравач своју обавезу извршава појединачно према сваком члану групе.

У овом поглављу ћемо основни модел, који је разматран у првом делу рада, проширити на модел више особа.

8. МОДЕЛ ОСИГУРАЊА ВИШЕ ОСОБА

Претпоставимо да посматрамо групу од m особа чије су почетне старости $x_1, x_2, \dots, x_m$ T_k, $k = 0,1, \dots, m$ је преостала дужина живота за сваку особу из те групе. У случају када посматрамо два или више живота истовремено, преживљавање под унапред дефинисаним условима називамо ***статус интереса(статус)*** и означавамо га са $\boldsymbol{u}$. Сходно томе, ${}_tp_u$ ће представљати вероватноћу да статус u још увек постоји у тренутку t. Дакле, све ознаке су дефинисане на сличан начин као и код основног модела. (${}_tq_u, \mu_{u+t}$, ...)[1]

8.1. СТАТУС ЗАЈЕДНИЧКОГ ДОЖИВЉЕЊА

Статус заједничког доживљења је статус који опстаје онолико дуго колико су свих m живота из групе живи. Означавамо га

$$u = x_1 : x_2 : \dots : x_m$$

где су $x_1, x_2, \dots, x_m$ почетне старости особа.[1]

Преостало време до окончавања статуса заједничког доживљења је

$$T(u) = \min\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$$

где су $T_1, T_2, \dots, T_m$ преостале дужине живота за сваку особу из групе.

Статус заједничког доживљења је један пример статуса доживљења, тј. статуса за који постоји случајна величина $T(u)$ која представља преостало време до смрти (преостали животни век) и за који можемо да дефинишемо функцију доживљења. За $T(u)$ важе исте релације као и за преостали животни век код основног модела, само је расподела другачија, тј. примењујемо расподелу за статус доживљења.

Претпоставићемо да су случајне величине $T_1, T_2, \dots, T_m$ независне.

Функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса доживљења је

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{x_1:x_2:\dots:x_m} &= P\{T(u) > t\} = P\{\min\{T_1, T_2, \dots, T_m\} > t\} = P\{T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_m > t\} \\
&= \prod_{k=1}^{m} P\{T_k > t\} = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k}
\end{aligned}
$$

Дакле добијамо и да важи:

$$
{}_tq_{x_1:x_2:\dots:x_m} = 1 - {}_tp_{x_1:x_2:\dots:x_m} = 1 - \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k}
$$

Вероватноћа да се тренутак окончања статуса заједничког доживљења догоди у интервалу $(n, n+1]$, односно вероватноћа да се прва смрт догоди у том интервалу означавамо са

$$
{}_{n|}q_{x_1:x_2:\dots:x_m}
$$

и важи

$$
{}_{n|}q_{x_1:x_2:\dots:x_m} = P\{n < T(u) \le n+1\} = P\{T(u) \le n+1\} - P\{T(u) \le n\} =
$$

$$
(1 - P\{T(u) > n+1\}) - (1 - P\{T(u) > n\}) = 1 - {}_{n+1}p_{x_1:x_2:\dots:x_m} - \left(1 - {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m}\right)
$$

Раније смо показали да важи

$$
{}_{s+t}p_x = {}_sp_x \, {}_tp_{x+s}
$$

што значи да важи и

$$
{}_{n+1}p_{x_1:x_2:\dots:x_m} = {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m} \cdot {}_1p_{x_{1+n}:x_{2+n}:\dots:x_{m+n}}
$$

Дакле

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}q_{x_1:x_2:\dots:x_m} &= 1 - {}_{n+1}p_{x_1:x_2:\dots:x_m} - \left(1 - {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m}\right) \\
&= 1 - {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m} \cdot {}_1p_{x_{1+n}:x_{2+n}:\dots:x_{m+n}} - 1 + {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m} \\
&= {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m}\left(1 - p_{x_{1+n}:x_{2+n}:\dots:x_{m+n}}\right) = {}_np_{x_1:x_2:\dots:x_m} q_{x_{1+n}:x_{2+n}:\dots:x_{m+n}}
\end{aligned}
$$

Односно, вероватноћа да се тренутак окончања статуса заједничког доживљења догоди у интервалу $(n, n+1]$ једнака је производу вероватноће да статус још увек постоји у n-тој години и вероватноће да се прва смрт догодила у $(n+1)$-ој години.

Тренутна стопа окончања статуса заједничког доживљења

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_u) = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m}\ln\left({}_tp_{x_k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\mu_{x_k+t}$$

при чему и у овом случају претпостављамо да су случајне величине $T_1, T_2, \dots, T_m$ независне.

Очекивани будући животни век модела заједничког доживљења

$$\dot{e}_{x_1:x_2:\dots:x_m} = E\big(T(u)\big) = \int_0^{+\infty} {}_tp_{x_1:x_2:\dots:x_m}dt$$

За целобројни животни век *K(u)* статуса заједничког доживљења важи

$${}_{n|}q_{x_1:x_2:\dots:x_m} = P\{K(u) = n\} = P\{K(x_1 : x_2 : \dots : x_m) = n\}$$

Очекивани целобројни животни век статуса заједничког доживљења:

$$e_{x_1:x_2:\dots:x_m} = E\big(K(u)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_kp_{x_1:x_2:\dots:x_m}$$

Раније смо показали да, у случају основног модела, једнократна нето премија за доживотно осигурање је

$$A_x = \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}$$

као и да је једнократна нето премија за ануитетни дуг:

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:\dots:x_m} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k{}_kp_{x_1:x_2:\dots:x_m}$$

Дакле, сада лако можемо видети да једнократна нето премија за доживотно осигурање у складу са моделом заједничког доживљења је једнака

$$A_{x_1:x_2:\dots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{x_1:x_2:\dots:x_m}q_{x_1+k:x_2+k:\dots:x_m+k}$$

Слично добијамо и једнократну премију ануитета

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:\dots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k{}_kp_{x_1:x_2:\dots:x_m}$$

Све дефиниције овог поглавља се могу пронаћи у књизи [1]. Ради лакшег разумевања статуса заједничког доживљења, смањићемо број осигураника на 2 особе и детаљнију рачуницу ћемо приказати следећим примером:

Пример:

Посматраћемо брачни пар почетних старости *x* и *y,* таквих да је

$$T_{xy} = T(u) = \min\{T_x, T_y\}$$

Тада функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса доживљења је

$$_tp_{x:y} = P\{T(u) > t\} = P\{\min\{T_x, T_y\} > t\} = P\{T_x > t, T_y > t\} = \prod_{k=x}^{y} P\{T_{x_k} > t\} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y$$

Слично добијамо и да важи

$$_tq_{x:y} = 1 - {}_tp_{x:y} = 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y$$

Логично се намеће и питање да ли из претпоставке независности T_x и T_y важи и

$$_tq_{x:y} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y?$$

Из једнакости

$$\begin{aligned} {}_tq_{x:y} &= 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y = 1 - (1 - {}_tq_x)(1 - {}_tq_y) = 1 - (1 - {}_tq_y - {}_tq_x + {}_tq_{xy}) \\ &= 1 - 1 + {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy} \end{aligned}$$

добијамо

$$_tq_{x:y} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy}$$

односно

$$_tq_{x:y} \neq {}_tq_x \cdot {}_tq_y$$

Тренутна стопа окончања статуса заједничког доживљења

$$\mu_{x:y}(t) = \mu_{x+t:y+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_{x:y}) = -\frac{d}{dt}\sum_{k=x}^{y}\ln({}_tp_k) = \sum_{k=x}^{y}\mu_{k+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

Целобројни животни век особа старости *x* и *y* за модел заједничког доживљења K=$[T_{xy}]$

$$_{n|}q_{x:y} = P\{K = n\} = P\{n \le T_{xy} < n+1\} = P\{T_{xy} < n+1\} - P\{T_{xy} < n\} = {}_{n+1}q_{xy} - {}_nq_{xy}$$

Надаље ћемо одредити једнократне нето премије, при чему нам Z представља садашњу вредност осигурања, $0 < \vartheta < 1$ одговарајући фактор дисконтовања и T_{xy} представља преостало време до окончања статуса заједничког доживљења особа старости *x* и *y*.

1. ***доживотно осигурање***

Аналогно уговору о доживотном осигурању у класичном животном осигурању, могуће је креирати и уговор о доживотном осигурању статуса заједничког доживљења. Уколико се осигурана сума исплаћује на крају календарске године у којој је дошло до окончања статуса, садашња вредност суме осигурања је $Z = v^{K_{xy}+1}$, а одговарајућа једнократна нето премија:

$$A_{xy} = E(Z) = E(v^{K_{xy}+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_{xy}$$

2. ***привремено осигурање***

Можемо креирати и уговор о осигурању који подразумева исплату суме осигурања уколико до окончања статуса заједничког доживљења дође у току првих n година од тренутка склапања уговора. Уколико осигурану суму исплаћујемо на крају календарске године у којој је дошло до окончања статуса, имамо да за садашњу вредност осигурања важи

$$Z = \begin{cases} v^{K_{xy}+1} & K_{xy} < n \\ 0 & K_{xy} \geq n \end{cases}$$

а одговарајућа једнократна нето премија је:

$$A^{1}_{xy:n]} = E(Z) = \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_{xy}$$

3. ***осигурање за случај доживљења***

У овом случају се закључује уговор о осигурању који подразумева исплату суме осигурања уколико статус опстане у наредних n година од тренутка склапања уговора. Дакле, у случају статуса заједничког доживљења сума осигурања ће бити исплаћена ако у наредних n година од тренутка склапања уговора не дође до смрти ни особе *x* ни особе *y*. Садашња вредност осигуране суме:

$$Z = \begin{cases} 0 & K_{xy} < n \\ v^{n} & K_{xy} \geq n \end{cases}$$

и једнократна нето премија у овом случају је:

$$A_{xy:n]}{}^{1} = E(Z) = v^{n} P\{K_{xy} \geq n\} = v^{n}\ {}_{n}p_{xy}$$

4. ***мешовито осигурање***

Као и код класичног животног осигурања и код статуса заједничког доживљења мешовитно осигурање подразумева да се осигурана сума исплаћује на крају године смрти уколико се смрт догоди у првих n година од тренутка склапања уговора, иначе се исплаћује на крају n-$те$ године. Садашња вредност и једнократна нето премија, редом:

$$Z = \begin{cases} v^{K_{xy}+1} & K_{xy} < n \\ v^n & K_{xy} \geq n \end{cases}$$

$$A_{xy:n]} = A^1_{xy:n]} + A_{xy:n]}{}^1$$

5. ***одложено осигурање***

Код одложеног осигурања статуса заједничког доживљења у периоду од m година, осигуравајућа компанија се обавезује да ће исплатити осигурану суму само уколико осигураник умре после m година од тренутка склапања уговора.

$$Z = \begin{cases} 0 & K_{xy} < m \\ v^{K_{xy}+1} & K_{xy} \geq m \end{cases}$$

представља садашњу вредност одложеног осигурања, док

$$_{m|}A_{xy} = A_{xy} - A_{xy:m]}$$

представља једнократну нето премију.

8.2. СТАТУС ПОСЛЕДЊЕГ ПРЕЖИВЕЛОГ

Статус последњег преживелог траје док све особе не умру. [1] Означавамо га са

$$u = \overline{x_1 : x_2 : \ldots : x_m}$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_m$ почетне старости свих m особа и преостало време до окончања статуса је

$$T(u) = \max\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$$

У односу на међусобну зависност случајних величина $T_1, T_2, \ldots, T_m$ разматраћемо два случаја:

- **Случајне променљиве $\boldsymbol{T_1, T_2, \ldots, T_m}$ су независне**:

Функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса последњег преживелог је

$$_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = 1 - {}_tq_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}$$

где имамо да је

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} &= P\{T(u) \le t\} = P\{\max\{T_1, T_2, \ldots, T_m\} \le t\} = P\{T_1 \le t, T_2 \le t, \ldots, T_m \le t\} \\
&= P\{T_1 \le t\}P\{T_2 \le t\} \ldots P\{T_m \le t\} = \prod_{k=1}^{m} P\{T_k \le t\} = \prod_{k=1}^{m} {}_tq_{x_k}
\end{aligned}
$$

Очекивани животни век за статус последњег преживелог је

$$\mathring{e}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = E\big(T(u)\big) = \int_0^{+\infty} {}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}dt$$

- **Случајне променљиве $\boldsymbol{T_1, T_2, \ldots, T_m}$ су зависне:**

Како би успели да изведемо расподелу за $T(u)$ прво ћемо увести ***формулу о укључењу и искључењу*** која ће нам бити корисна за даљи рад.

- ***формула о укључењу и искључењу*** [1], [8]

Принцип укључења и искључења је техника бројања која генерализује познати метод добијања броја елемената у унији два или више коначних скупова.

Претпоставимо да су $B_1, B_2, \ldots, B_m$ случајни догађаји. Вероватноћа њихове уније је:

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m) = S_1 - S_2 + S_3 + \cdots + (-1)^{m-1}S_m$$

где је

$$S_k = \sum_{*} P(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_k})$$

тако да (*) иде по свих $\binom{m}{k}$ подскупова од k догађаја, при чему претпостављамо да је B_k догађај да је k – та особа жива у тренутку t

■

Сада можемо одредити функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса последњег преживелог у случају када су $T_1, T_2, \ldots, T_m$ зависне:

$${}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m) = S_1^t - S_2^t + \cdots + (-1)^{m-1}S_m^t$$

таквих да

$$S_k^t = \sum P(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_k}) = \sum {}_tp_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_k}}$$

Када ${}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}$ помножимо са v^t и сумирањем по t добијамо формулу за ренту до истека статуса последњег преживелог, односно

$$\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} + \cdots + (-1)^{m-1}S_m^{\ddot{a}}$$

таквих да је

$$S_k^{\ddot{a}} = \sum \ddot{a}_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_k}}$$

Размотрићемо сада случај доживотног осигурања са осигураном сумом од 1 јединице која се исплаћује по окончању статуса последњег преживелог, тј. након смрти последњег преживелог. Једнократна нето премија:

$$A_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}$$

где је $d=1-v$.

Односно

$$A_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = 1 - d(S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - \cdots)$$

Дефинишемо симетричну суму тако да важи

$$S_k^{A} = \sum A_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_k}}$$

Раније смо показали да важи

$$a_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

одакле можемо видети да важи и следећа једнакост

$$S_k^{\ddot{a}} = \frac{\binom{m}{k} - S_k^{A}}{d}$$

Замењујући последњу једнакост у једнакост

$$A_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = 1 - d(S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - \cdots)$$

добијамо

$$A_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = S_1^{A} - S_2^{A} + S_3^{A} - \cdots + (-1)^{m-1} S_m^{A}$$

Слично можемо извести и формуле за једнократну нето премију и у случају непрекидних или целобројних ануитета, као и за осигурања где се осигурана сума исплаћује одмах након смрти последњег живог.[1]

Пример:

И у овом случају ћемо посматрати брачни пар почетних старости *x* и *y,* таквих да је

$$T_{xy} = T(u) = \max\{T_x, T_y\}$$

при чему су T_x и T_y независне случајне променљиве.

Тада функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса последњег преживелог је

$$ {}_tp_{\overline{x:y}} = 1 - {}_tq_{\overline{x:y}} $$

при чему важи

$$ {}_tq_{\overline{x:y}} = P\{T(u) \leq t\} = P\{\max\{T_x, T_y\} \leq t\} = P\{T_x \leq t, T_y \leq t\} = P\{T_x \leq t\}P\{T_y \leq t\} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y $$

Сходно томе, остаје још да проверимо да ли важи и

$$ {}_tp_{\overline{x:y}} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y? $$

Из једнакости

$$ {}_tp_{\overline{x:y}} = 1 - {}_tq_{\overline{x:y}} = 1 - {}_tq_x \cdot {}_tq_y = 1 - (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) = 1 - (1 - {}_tp_y - {}_tp_x + {}_tp_x \cdot {}_tp_y) = 1 - 1 + {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y $$

добијамо

$$ {}_tp_{\overline{x:y}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y $$

односно

$$ {}_tp_{\overline{x:y}} \neq {}_tp_x \cdot {}_tp_y $$

Тренутна стопа окончања статуса заједничког доживљења

$$ \mu_{x:y}(t) = \mu_{x+t:y+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_{x:y}) = -\frac{d}{dt}\sum_{k=x}^{y}\ln({}_tp_k) = \sum_{k=x}^{y}\mu_{k+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} $$

Целобројни животни век особа старости x и y за модел заједничког доживљења K=$[T_{xy}]$

$$ {}_{n|}q_{x:y} = P\{K = n\} = P\{n \leq T_{xy} < n+1\} = P\{T_{xy} < n+1\} - P\{T_{xy} < n\} = {}_{n+1}q_{xy} - {}_nq_{xy} $$

Надаље ћемо одредити једнократне нето премије, при чему нам Z представља садашњу вредност осигурања, $0 < \vartheta < 1$ одговарајући фактор дисконтовања и T_{xy} представља преостало време до окончања статуса заједничког доживљења особа старости x и y.

1. ***доживотно осигурање***

Аналогно уговору о доживотном осигурању у класичном животном осигурању, могуће је креирати и уговор о доживотном осигурању статуса заједничког доживљења. Уколико се осигурана сума исплаћује на крају календарске године у којој је дошло до окончања статуса, садашња вредност суме осигурања је $Z = v^{K_{xy}+1}$, а одговарајућа једнократна нето премија:

$$ A_{xy} = E(Z) = E(v^{K_{xy}+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1} {}_{k|}q_{xy} $$

2. ***привремено осигурање***

Можемо креирати и уговор о осигурању који подразумева исплату суме осигурања уколико до окончања статуса заједничког доживљења дође у току првих n година од тренутка склапања уговора. Уколико осигурану суму исплаћујемо на крају календарске године у којој је дошло до окончања статуса, имамо да за садашњу вредност осигурања важи

$$Z = \begin{cases} v^{K_{xy}+1} & K_{xy} < n \\ 0 & K_{xy} \geq n \end{cases}$$

а одговарајућа једнократна нето премија је:

$$A^{1}_{xy:n]} = E(Z) = \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_{xy}$$

3. ***осигурање за случај доживљења***

У овом случају се закључује уговор о осигурању који подразумева исплату суме осигурања уколико статус опстане у наредних n година од тренутка склапања уговора. Дакле, у случају статуса заједничког доживљења сума осигурања ће бити исплаћена ако у наредних n година од тренутка склапања уговора не дође до смрти ни особе x ни особе y. Садашња вредност осигуране суме:

$$Z = \begin{cases} 0 & K_{xy} < n \\ v^{n} & K_{xy} \geq n \end{cases}$$

и једнократна нето премија у овом случају је:

$$A_{xy:n]}{}^{1} = E(Z) = v^{n}P\{K_{xy} \geq n\} = v^{n}{}_{n}p_{xy}$$

4. ***мешовито осигурање***

Као и код класичног животног осигурања и код статуса заједничког доживљења мешовито осигурање подразумева да се осигурана сума исплаћује на крају године смрти уколико се смрт догоди у првих n година од тренутка склапања уговора, иначе се исплаћује на крају *n-те* године. Садашња вредност и једнократна нето премија, редом:

$$Z = \begin{cases} v^{K_{xy}+1} & K_{xy} < n \\ v^{n} & K_{xy} \geq n \end{cases}$$

$$A_{xy:n]} = A^{1}_{xy:n]} + A_{xy:n]}{}^{1}$$

5. ***одложено осигурање***

Код одложеног осигурања статуса заједничког доживљења у периоду од m година, осигуравајућа компанија се обавезује да ће исплатити осигурану суму само уколико осигураник умре после m година од тренутка склапања уговора.

$$Z = \begin{cases} 0 & K_{xy} < m \\ v^{K_{xy}+1} & K_{xy} \geq m \end{cases}$$

представља садашњу вредност одложеног осигурања, док

$$_{m|}A_{xy} = A_{xy} - A_{xy:\overline{m|}}$$

представља једнократну нето премију.

Пример:

Сада ћемо посматрати модел који чине два осигураника чији су животни векови стохастички зависне случајне величине. Такође ћемо претпоставити да на преостале животне векове осигураника утичу исти фактори. На пример, за брачни пар би то били исти услови живота. [9]

Дефиниција:

Случајни догађаји $A_1, A_2, \ldots$ су стохастички независни ако

$$(\forall n \in N)(\forall 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n) \text{ важи}$$

$$P\{A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_n}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot P\{A_{i_2}\} \cdot \ldots \cdot P\{A_{i_n}\}$$

Дефиниција:

Случајне променљиве $X_1, X_2, \ldots$ су стохастичке независне ако за све Борелове скупове $(S_1, S_2, \ldots)$ догађаји

$$X_1^{-1}(S_1), X_2^{-1}(S_2), ..$$

стохастички независни.

Тврђење:

Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случајне променљиве, потребан и довољан услов да случајне променљиве $X_1, X_2, \ldots, X_n$ буду независне је да важи

$$F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

■

Нека су T(x) и T(y) преостали животни векови особе старости *x* и старости *y* и нека случајни вектор ε представља случајни фактор под чијим утицајем су T(x) и T(y) стохастички зависне случајне променљиве. Претпоставља се да су случајне променљиве T(x) и T(y) стохастички независне под условом ε. Тада за било која два произвољна догађаја $B_1, B_2 \in \mathcal{R}$ важи

$$P\{T(x) \in B_1, T(y) \in B_2 | \varepsilon\} = P\{T(x) \in B_1 | \varepsilon\} P\{T(y) \in B_2 | \varepsilon\}$$

Случајне променљиве за које важи претходна једнакост зовемо *условно независне случајне променљиве.* Из особина математичког очекивања имамо:

$$E(P\{T(x) \in B_1, T(y) \in B_2 | \varepsilon\}) = E\left(E\left(I_{\{T(x)\in B_1, T(y)\in B_2\}} \middle| \varepsilon\right)\right) = E\left(I_{\{T(x)\in B_1, T(y)\in B_2\}}\right) = \\ = P\{T(x) \in B_1, T(y) \in B_2\}$$

односно

$$P\{T(x) \in B_1, T(y) \in B_2\} = E(P\{T(x) \in B_1, T(y) \in B_2 | \varepsilon\})$$

8.3. ОСИГУРАЊЕ ЗА КОЈЕ ЈЕ РЕЛЕВАНТАН РЕДОСЛЕД НАСТУПАЊА СМРТИ ОСИГУРАНИКА

Актуари настоје да развију што је могуће више модела и тиме обезбеде техничку подршку за закључење различитих врста уговора о осигурању. У овом поглављу ће бити разматрани неки типови осигурања код којих једнократне нето премије зависе од редоследа наступања смрти осигураника. Односно, једнократна нето премија зависи од вероватноће наступања смрти осигураника пре смрти другог.

Посматраћемо две особе старости x и y година и израдићемо полису која обезбеђује исплату суме осигурања, под условом да смрт осигураника старости x година наступи пре смрти осигураника старости y година уз помоћ књиге [9]. Вероватноћу догађаја да смрт осигураника старости x наступи пре смрти осигураника старости y означавамо са ${}_{\infty}q_{xy}^{1}$ и важи:

$${}_{\infty}q_{xy}^{1} = P\{T_x < T_y\} = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(t,s)dsdt$$

где је $f_{T(x)T(y)}$ заједничка густина расподеле случајних променљивих $T(x)$ и $T(y)$. Ако претпоставимо да су случајне променљиве $T(x)$ и $T(y)$ независне претходна једнакост се своди на:

$${}_{\infty}q_{xy}^{1} = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(t,s)dsdt = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} f_{T(x)}(t) f_{T(y)}(s)dsdt \\ = \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} f_{T(y)}(s)ds\right) f_{T(x)}(t)dt = \int_0^{\infty} f_{T(x)}(t) S_{T(y)}(t)dt$$

при чему $S_{T(y)}(t) = {}_{t}p_y$ представља вероватноћу да особа старости y година доживи $y+t$ година. Раније смо показали да је $f_{T(x)}(t) = {}_{t}p_x \mu_x(t)$, дакле

$${}_{\infty}q_{xy}^{1} = \int_0^{\infty} {}_{t}p_x \mu_x(t) {}_{t}p_y dt = \int_0^{\infty} {}_{t}p_{xy} \mu_x(t)dt$$

Са ${}_{\infty}q_{xy^2}$ означавамо вероватноћу да је смрт особе старости y година наступила након смрти особе x година. Закључујемо да важи ${}_{\infty}q_{xy}^{1} = {}_{\infty}q_{xy^2}$ јер представљају вероватноће реализација истих догађаја.

Лако можемо одредити и вероватноћу да је смрт особе старости y година наступила пре смрти особе старости x година:

$$_{\infty}q_{xy^1} = P\{T_y < T_x\} = \int_0^{\infty} {}_tp_y \mu_y(t) {}_tp_x dt = {}_{\infty}q_{x^2y}$$

где је $_{\infty}q_{x^2y}$ вероватноћа да се смрт особе x година догодила након смрти особе старости y година.

Индекс ∞ означава да нема временског ограничења у ком ће се реализовати догађај да смрт осигураника старости x наступи пре смрти осигураника старости y година. Међутим, потребно је израчунати и вероватноћу реализације поменутог догађаја у току првих n година од тренутка закључења уговора о осигурању.

Ту вероватноћу означавамо $_nq^1_{xy}$ и важи:

$$_nq^1_{xy} = \int_0^n {}_tp_x \mu_x(t) {}_tp_y dt = \int_0^n {}_tp_{xy} \mu_x(t) dt$$

уз претпоставку независности случајних промењивих $T(x)$ и $T(y)$.

У овом случају се не зна да ли ће смрт осигураника старости y година наступити у току тих n година. Као и у претходном случају, $_nq_{xy^2}$ представља вероватноћу да се смрт осигураника старости y година догодила након смрти осигураника старости x година и то у току ових n година. Дакле, у овом случају ће се у току n година догодити смрт оба осигураника.

$$_nq_{xy^2} = \int_0^n {}_tp_y\, \mu_y(t) {}_tq_x dt = \int_0^n {}_tp_y\, \mu_y(t)(1 - {}_tp_x) dt = \int_0^n {}_tp_y\, \mu_y(t) dt - \int_0^n {}_tp_y\, \mu_y(t) {}_tp_x dt$$
$$= \int_0^n f_{T(y)}(t) dt - \int_0^n {}_tp_{xy} \mu_y(t) dt = {}_nq_y - {}_nq_{xy^1}$$

Односно

$$_nq_y = {}_nq_{xy^1} + {}_nq_{xy^2}$$

У случају када $n \to \infty$ имамо

$$_{\infty}q_y = {}_{\infty}q_{xy^1} + {}_{\infty}q_{xy^2}$$

Како нам $_{\infty}q_y$ представља вероватноћу да особа старости y година не доживи бесконачну старост, то је $_{\infty}q_y = 1$, односно

$$_{\infty}q_{xy^1} = 1 - {}_{\infty}q_{xy^2}$$

Нека је уговором о осигурању прецизирано да се осигурана сума исплаћује непосредно након наступања смрти осигураника старости x година и то ако његова смрт наступи пре смрти осигураника старости y година, тада је једнократна нето премија

$$A_{x^1y} = E\left(v^{T(x)} I_{\{T(x)<T(y)\}}\right) = \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t) \int_t^\infty f_{T(y)}(s) ds dt = \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t) S_{T(y)}(t) dt$$
$$= \int_0^\infty v^t \,{}_tp_x \mu_x(t) \,{}_tp_y dt$$

Слично, једнократна нето премија која се исплаћује непосредно након наступања смрти осигураника старости *x* година, и то ако његова смрт наступи након смрти осигураника од *y* година је

$$A_{x^2y} = E\left(v^{T(x)} I_{\{T(x)>T(y)\}}\right) = \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t) \int_0^t f_{T(y)}(s) ds dt$$
$$= \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t)(1 - S_{T(y)}(t))\, dt = \int_0^\infty v^t \,{}_tp_x \mu_x(t) \,{}_tq_y dt$$

Одакле сабирањем добијамо:

$$A_{x^1y} + A_{x^2y} = \int_0^\infty v^t \,{}_tp_x \mu_x(t) dt = \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t) dt = A_x$$

где A_x представља очекивану садашњу вредност јединичне суме доживотног осигурања особе старости *x* која се исплаћује непосредно након наступања смрти осигураника.

8.4. ОПШТИ СИМЕТРИЧНИ СТАТУС

Општи симетрични статус је статус који траје док је живо k од почетних m особа, тј. прекида се након *(m-k+1)*-ве смрти. [1] Ознака коју ћемо користити за општи симетрични статус:

$$u = \overline{x_1 : x_2 : \ldots : x_m}^{k}$$

Раније смо размотрили случајеве статуса заједничког доживљења и статуса последњег преживелог одакле можемо заључити да су то специјални случајеви општег симетричног статуса. Односно:

- када је k=m добијамо да је $u = x_1 : x_2 : \ldots : x_m$ - модел заједничког доживљења
- када је k=*1* видимо да важи $u = \overline{x_1 : x_2 : \ldots : x_m}^{1}$ - модел последњег преживелог

Такође, можемо дефинисати и статус који траје док је живо тачно k од почетних m особа, тј. који почиње да постоји после (*m-k*)-те смрти и престаје после *(m-k+1)*-ве смрти. Ознаку коју користимо у овом случају је

$$u = \overline{x_1 : x_2 : \ldots : x_m}^{[k]}$$

За даље рачунање ће нам бити потребна следећа теорема:

<u>Теорема:</u> *[Schuette – Nesbitt formula]* [1]

Претпоставимо да су $B_1, B_2, \dots, B_m$ произвољни догађаји. Број догађаја који се остварују означићемо са N, при чему је N случајна промењлива таква да важи

$$N \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

Тада за произвољне коефицијенте $c_0, c_1, \dots, c_m$ важи следећа једнакост:

$$\sum_{n=0}^{m} c_n P\{N = n\} = \sum_{n=0}^{m} \Delta^k c_0 S_k$$

при чему смо S_k дефинисали помоћу формуле искључења и укључења тако да:

$$S_k = \sum P(B_{j_1} \sqcup B_{j_2} \sqcup \dots \sqcup B_{j_k})$$

где сумирамо по свим $\binom{m}{k}$ подскуповима *k* догађаја. Такође важи и да је $S_0 = 1$.

Δ представља симетричну разлику, тј. $\Delta: c_n \to c_{n+1} - c_n$

<u>Доказ:</u>

Са *E* ћемо означити *оператор шифтовања,* тј. оператор померања унапред, тако да важи

$$Ec_k = c_{k+1}$$

Дакле, добијамо следећу везу:

$$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k = Ec_k - c_k = c_k(E-1) \Rightarrow \Delta = E - 1$$

Ако претпоставимо да је I_{B_j} индикатор догађаја B_j, тада 1-I_{B_j} представља индикатор догађаја комплементарног догађају B_j.

Добијамо да је:

$$\sum_{n=0}^{m} I_{\{N=n\}} E^n = \prod_{j=1}^{m} (1 - I_{B_j} + I_{B_j} E) = \prod_{j=1}^{m} (1 - I_{B_j} \Delta) = \sum_{n=0}^{m} (\sum I_{B_{j1} \cap B_{j2} \cap \dots \cap B_{j_k}}) \Delta^k$$

Када применимо математичко очекивање на претходну једнакост добијамо:

$$E\left(\sum_{n=0}^{m} I_{\{N=n\}} E^n\right) = \sum_{n=0}^{m} P\{N = n\} E^n = E\left(\sum_{n=0}^{m} \left(\sum I_{B_{j1} \cap B_{j2} \cap \dots \cap B_{j_k}}\right) \Delta^k\right) = \sum_{k=0}^{m} S_k \Delta^k$$

Када применимо овај оператор на низ коефицијената c_k:

$$\sum_{n=0}^{m} P\{N = n\} E^n c_0 = \sum_{k=0}^{m} S_k \Delta^k c_0$$

Како важи $E^n c_0 = c_n$ добијамо

$$\sum_{n=0}^{m} P\{N = n\}c_n = \sum_{k=0}^{m} S_k \Delta^k \, c_0$$

■

У наставку ћемо израчунати вредности ренте и осигурања за општи симетрични статус помоћу формуле коју смо управо доказали. Дакле, за произвољне коефицијенте $c_0, c_1, \dots, c_m$ важи:

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \; {}_t p_{\overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}}^{[k]} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 S_j^t$$

као и

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \ddot{a}_{\overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}}^{[k]} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 S_j^{\ddot{a}}$$

где су

$$S_k^t = \sum {}_t p_{x_{j_1} : x_{j_2} : \dots : x_{j_k}}$$

$$S_k^{\ddot{a}} = \sum \ddot{a}_{x_{j_1} : x_{j_2} : \dots : x_{j_k}}$$

за *j=1,2,…,m.* Дефинишемо и $S_0^t = 1$ и $S_0^{\ddot{a}} = \ddot{a}_{\infty]}$.

Нека су дефинисани произвољни коефицијенти $d_1, d_2, \dots, d_m$ и претпоставимо да је

$$c_0 = 0 \text{ и } c_k = d_1 + \dots + d_k$$

Сада лако видимо да се претходне две једнакости своде на:

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \, {}_t p_{\overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}}^{k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^t$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \, \ddot{a}_{\overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}}^{k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^{\ddot{a}}$$

Уколико желимо да уопштимо причу за животна осигурања добијамо следећу једнакост:

$$\sum_{k=1}^{m} d_k A_{\overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}}^{k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^A$$

8.5. ДОЖИВОТНА РЕНТА ПРЕЖИВЕЛОГ ОСИГУРАНИКА

Нека су особе старости x и y година закључиле уговор о осигурању који гарантује исплату суме осигурања у облику доживотне ренте, за особу старости x година, чија исплата почиње непосредно након смрти особе старости y година. Описан начин исплате суме осигурања у актуарству се назива *рента преживелог осигураника*.

На пример, у свету пензија налазе се уобичајени ануитети – пензионер прима пензију од рецимо \$10,000 годишње, при чему након његове/њене смрти ће супружник примати рецимо \$5,000 годишње до краја само у случају када пензионер умре пре супружника, у обрнутом случају неће доћи до исплаћивања накнаде.

Дакле, претпостаљамо да је уговором о осигурању одређено да се, непосредно након смрти осигураника старости y година, исплаћује осигурана сума особи старости x година, и то у виду непрекидне јединичне доживотне ренте. Ако случајна величина Z представља садашњу вредност описане ренте, тада је

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{T_x\rceil} - \bar{a}_{T_y\rceil} & , T_y \leq T_x \\ 0 & , T_y > T_x \end{cases}$$

Претпоставља се да су случајне променљиве T_x и T_y стохастики независне. Како се густина расподеле преосталог животног века може представити као производ функције доживљења и интензитета смртности, одговарајућа једнократна нето премија је:

$$\bar{a}_{y|x} = E(Z) = \int\int_{u>v} (\bar{a}_{u\rceil} - \bar{a}_{v\rceil})\, {}_u p_x \mu_x(u)\, {}_v p_y \mu_y(v)\, du dv$$

Приметимо да важи:

$$Z + \bar{a}_{\min\{T_x,T_y\}\rceil} = \begin{cases} \left(\bar{a}_{T_x\rceil} - \bar{a}_{T_y\rceil}\right) + \bar{a}_{T_y\rceil} & , T_y \leq T_x \\ \bar{a}_{T_x\rceil} & , T_y > T_x \end{cases}$$

при чему је $\bar{a}_{\min\{T_x,T_y\}\rceil}$ садашња вредност јединичне непрекидне ренте трајања $\min\{T_x, T_y\}$ година. Односно видимо да је

$$Z + \bar{a}_{\min\{T_x,T_y\}\rceil} = \bar{a}_{T_x\rceil}$$

Такође можемо приметити да важи $\bar{a}_{\min\{T_x,T_y\}\rceil} = \bar{a}_{T_{xy}\rceil}$, јер се у случају статуса заједничког доживљења сума осигурања исплаћује након прве смрти унутар разматраног статуса, тј. $T_{xy} = \min\{T_x, T_y\}$. Дакле добијамо да важи

$$\bar{a}_{y|x} = E(Z) = E\left(\bar{a}_{T_x\rceil} - \bar{a}_{\min\{T_x,T_y\}\rceil}\right) = E\left(\bar{a}_{T_x\rceil}\right) - E\left(\bar{a}_{T_{xy}\rceil}\right) = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy}$$

Како ${}_t q_y$ представља вероватноћу да особа старости y година не доживи старост од $y + t$ година, то је

$$ {}_tq_y = \int_0^t f_{T_y}(t)dt = \int_0^t {}_tp_y\mu_y(t)dt $$

одакле добијамо да важи

$$ \frac{\partial}{\partial t}\,{}_tq_y = {}_tp_y\mu_y(t) $$

Уколико исплата осигуране суме особи старости x година почиње након t година од тренутка закључења уговора о осигурању, тада је очекивана садашња вредност такве одложене ренте

$$ {}_{t|}\bar{a}_x = \int_t^\infty v^u\,{}_up_x du $$

па је

$$ \frac{\partial}{\partial t}\left(-{}_{t|}\bar{a}_x\right) = v^t\,{}_tp_x $$

Још примера се може наћи у књизи [9].

8.6. МОДЕЛ ЗАЈЕДНИЧКОГ СЛУЧАЈНОГ ШОКА

Основна претпоставка модела заједничког случајног шока је да су преостали животни векова особе старости x и особе старости y година стохастички независни уколико под утицајем неког случајног шока не дође до смрти оба осигураника истовремено. На пример, природна катастрофа попут земљотреса или урагана, саобраћајна несрећа са смртним исходом у којој учествују оба осигураника се може сматрати случајним шоком.

Нека случајна променљива Z означава тренутак заједничког случајног шока, док случајне променљиве T_x^* и T_y^* представљају преостале животне векове осигураника у одсуству случајног шока. Претпоставка модела је да су случајне променљиве Z, T_x^* и T_y^* узајамно стохастички независне. Дакле, преостали животни векови особе старости x и особе старости y су, редом:

$$ T_x = \min\{T_x^*, Z\} $$

$$ T_y = \min\{T_y^*, Z\} $$

Заједничка функција доживљења за две особе може се представити у следећем облику:

$$ {}_tp_{xy} = S_{T_xT_y}(u,v) = P\{T_x > u, T_y > v\} = P\{\min\{T_x^*, Z\} > u, \min\{T_y^*, Z\} > v\} = $$
$$ = P\{T_x^* > u, Z > u, T_y^* > v, Z > v\} = P\{T_x^* > u, T_y^* > v, Z > \max\{u,v\}\} $$

а како смо претпоставили да су Z, T_x^* и T_y^* узајамно стохастички независне добијамо

$$ {}_tp_{xy} = P\{T_x^* > u\}P\{T_y^* > v\}P\{\max\{u,v\}\} = S_{T_x^*}(u)S_{T_y^*}(v)S_Z(\max\{u,v\}) $$

Функцију доживљења особе старости x година рачунамо као маргиналну функцију доживљења на основу заједничке функције доживљења, тј.

$$ {}_tp_x = S_{T_x}(t) = S_{T_xT_y}(t,0) = S_{T_x^*}(t)S_{T_y^*}(0)S_Z(\max\{t,0\}) = S_{T_x^*}(t)S_z(t) $$

Слично добијамо функцију доживљења и за особу старости y

$$ {}_tp_y = S_{T_y}(t) = S_{T_y^*}(t)S_z(t) $$

Јасно је да

$$ {}_tp_{xy} \neq {}_tp_x \cdot {}_tp_y $$

што нам показује да су T_x и T_y зависне случајне промењиве.

Интензитет смртности особе старости x

$$ \mu_x(t) = -\frac{d}{dt}\ln\left(S_{T_x}(t)\right) = -\frac{d}{dt}\ln\left(S_{T_x^*}(t)S_z(t)\right) = -\frac{d}{dt}\ln\left(S_{T_x^*}(t)\right) - \frac{d}{dt}\ln\left(S_z(t)\right) $$
$$ = \mu_x^*(t) + \mu_Z(t) $$

таквих да је $\mu_x^*(t)$ интензитет смрности особе старости x година у одсуству заједничког случајног шока, а $\mu_Z(t)$ представља интензитет смртности под утицајем заједничког случајног шока.

Слично добијамо да важи и

$$ \mu_y(t) = \mu_y^*(t) + \mu_Z(t) $$

Често се модел случајног шока повезује са претпоставком да случајна промењива Z има експоненцијалну расподелу са параметром λ. У том случају добијамо да важе следеће једнакости:

$$ S_z(t) = e^{-\lambda t} $$

што даље имплицира да важи

$$ {}_tp_x = S_{T_x^*}(t)e^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; S_{T_x^*}(t) = e^{\lambda t}\,{}_tp_x = e^{\lambda t}S_{T_x}(t) $$

као и

$$ {}_tp_y = S_{T_y^*}(t)e^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; S_{T_y^*}(t) = e^{\lambda t}\,{}_tp_y = e^{\lambda t}S_{T_y}(t) $$

Претходне дефиниције овог поглавља су уведене по књизи [9].

ПОГЛАВЉЕ 9

9. ПРИМЕРИ

Пример 1. Претпоставимо да су *T(50)* и *T(75)* независне случајне величине.

Израчунати:

а) ${}_tp_{50:75}$ и ${}_tq_{50:75}$

б) ${}_tp_{\overline{50:75}}$ и ${}_tq_{\overline{50:75}}$

Решење:

а) Знамо да важи

$$ {}_tp_{50} = 1 - \frac{t}{50}, 0 \le t \le 50 $$
$$ {}_tp_{25} = 1 - \frac{t}{25}, 0 \le t \le 25 $$

Из формуле

$$ {}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k} $$

добијамо:

$$ {}_tp_{50:75} = {}_tp_{50}\,{}_tp_{75} = \left(1 - \frac{t}{50}\right)\left(1 - \frac{t}{25}\right) = \frac{(50-t)(25-t)}{1250} = \frac{1250 - 50t - 25t + t^2}{1250} $$
$$ = \frac{1250 - 75t + t^2}{1250} = 1 - \frac{75t + t^2}{1250}, 0 \le t \le 25 $$

$$ {}_tq_{50:75} = 1 - {}_tp_{50:75} = 1 - \left(1 - \frac{75t + t^2}{1250}\right) = \frac{75t + t^2}{1250} $$

б) Слично као у првом делу знамо да важи

$$ {}_tq_{50} = \frac{t}{50}, 0 \le t \le 50 $$
$$ {}_tq_{75} = \begin{cases} \frac{t}{25} & 0 \le t \le 25 \\ 1 & 25 \le t \le 50 \end{cases} $$

Користећи формулу

$$ {}_tq_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = \prod_{k=1}^{m} {}_tq_{x_k} $$

добијамо

$$ {}_tq_{\overline{50:75}} = {}_tq_{50}\,{}_tq_{75} = \begin{cases} \dfrac{t^2}{1250} & 0 \le t \le 25 \\ \dfrac{t}{50} & 25 \le t \le 50 \end{cases} $$

као и

$$ {}_tp_{\overline{50:75}} = 1 - {}_tq_{\overline{50:75}} = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{1250} & 0 \le t \le 25 \\ 1 - \dfrac{t}{50} & 25 \le t \le 50 \end{cases} $$

■

<u>Пример 2:</u> Одредити везу између $T(xy)$ и $\mathrm{T}(\overline{xy})$.

<u>Решење:</u>

Посматрамо две особе старости *x* и *y* таквих да је

$$ \mathrm{T}_{xy} = \min\{T_x, T_y\} $$

преостало време до окончања статуса заједничког доживљења и

$$ T_{\overline{xy}} = \max\{T_x, T_y\} $$

преостало време до окончања статуса последњег преживелог, при чему су T_x и T_y независне случајне величине и представљају преостале дужине живота особе *x* и особе *y*.

Можемо закључити да важе следеће једнакости:

$$ \mathrm{T}_{xy} + T_{\overline{xy}} = T_x + T_y $$

као и

$$ \mathrm{T}_{xy} \cdot T_{\overline{xy}} = T_x \cdot T_y $$

Сада можемо израчунати и њихову коваријансу:

$$ \begin{aligned} cov\left(T_{xy}, T_{\overline{xy}}\right) &= E\left(T_{xy} \cdot T_{\overline{xy}}\right) - E\left(T_{xy}\right)E\left(T_{\overline{xy}}\right) = E\left(T_x \cdot T_y\right) - E\left(T_{xy}\right)E\left(T_x + T_y - \mathrm{T}_{xy}\right) \\ &= E(T_x)E\left(T_y\right) - E\left(T_{xy}\right)E\left(T_x + T_y - \mathrm{T}_{xy}\right) = \dot{e}_{\mathrm{x}}\dot{e}_{\mathrm{y}} - \dot{e_{xy}}\left(\dot{e}_{\mathrm{x}} + \dot{e}_{\mathrm{y}} - \dot{e}_{\mathrm{xy}}\right) \\ &= \dot{e}_{\mathrm{x}}\dot{e}_{\mathrm{y}} - \dot{e_{xy}} \cdot \dot{e}_{\mathrm{x}} - \dot{e_{xy}} \cdot \dot{e}_{\mathrm{y}} + \left(\dot{e_{xy}}\right)^2 = \dot{e}_{\mathrm{x}}\left(\dot{e}_{\mathrm{y}} - \dot{e_{xy}}\right) - \dot{e_{xy}}\left(\dot{e}_{\mathrm{y}} - \dot{e_{xy}}\right) \\ &= \left(\dot{e}_{\mathrm{y}} - \dot{e_{xy}}\right)\left(\dot{e}_{\mathrm{x}} - \dot{e_{xy}}\right) \end{aligned} $$

<u>Пример 3:</u> Посматрамо животно осигурање за 4 особе почетних старости *w,x,y,z*. Осигурана сума која се исплаћује после прве смрти има коефицијент 1, после друге коефицијент 3, после треће 5 и после четврте коефицијент је 6. Одредити једнократну нето премију.

Решење:

Једнократна нето премија за ово осигурање је

$$A_{\overline{w:x:y:z}}{}^{4} + 3A_{\overline{w:x:y:z}}{}^{3} + 5A_{\overline{w:x:y:z}}{}^{2} + 6A_{\overline{w:x:y:z}}{}^{1}$$

Увешћемо коефицијенте:

$$d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5, d_4 = 6$$

Сада ћемо представити одговарајуће симетричне разлике:

k	d_k	Δd_k	$\Delta^2 d_k$	$\Delta^3 d_k$
1	1	2	0	-1
2	3	2	-1	
3	5	1		
4	6			

Из табеле видимо да је једнократна нето премија за ово осигурање

$$S_1^A + 2S_2^A - S_4^A$$

при чему важи

$$S_1^A = A_x + A_y + A_z + A_w$$
$$S_2^A = A_{x:y} + A_{x:z} + A_{x:w} + A_{y:z} + A_{y:w} + A_{z:w}$$
$$S_4^A = A_{w:x:y:z}$$

■

10. ЗАКЉУЧАК

Циљ овог рада је објаснити вишеструко животно осигурање, односно осигурање више особа. Може се рећи да је рад подељен у два дела: први део чине првих шест поглавља који представљају уводни део и уводне дефиниције, док смо у другом делу, који обухвата преостала поглавља, детаљније описали вишеструки модел осигурања више особа.

Дакле, у првом делу смо се упознали са основним појмовима из осигурања, као и најосновнијим појмовима из финансијске математике. Упознали смо се са терминима осигуране суме, осигураника и осигуравача, као и њиховим обавезама приликом склапања уговора о осигурању. Објаснили смо врсте животног осигурања, рачунање једнократних нето премија за сваку врсту понаособ, рачунање вероватноће доживљења и вероватноће у случају смрти осигураника. Детаљније смо приказали и рачунање ренте доживотног осигурања који нам је значајан за даљи рад, односно за проучавање вишеструког модела осиурања за више особа.

Даље стижемо до другог дела овог рада, у оквиру ког смо обрадили два модела која се често користе у пракси: модел вишеструког декремента и модел осигурања више особа. Проширили смо основни модел на модел вишеструког декремента код ког узрок прекида уговора не мора бити само због смрти осигураника, већ узрок може бити и услед несреће, трајног инвалидитета... Претпоставља се да су узроци декремента међусобно искључиви, што нас доводи до прекида уговора о осигурању приликом наступања декремента по било ком основу. Приказали смо рачунање неких основних вероватноћа за произвољан узрок декремента који се догодио у неком тренутку.

Други модел који смо описали је модел осигурања за више особа где смо посматрали три статуса: статус заједничког доживљења, статус последњег преживелог и општи симетрични статус. Приказали смо функције расподеле вероватноћа за време окончања одговарајућег статуса, рачунање тренутне стопе окончања статуса, као и очекивани будући животни век. Током анализе статуса заједничког доживљења претпоставили смо независност случајних промењљивих које описују преостале животне векове особа које су се осигурале, при чему статус траје све док су живе све особе из групе. Уколико статус траје све до смрти последњег живог члана из групе јасно је да се ради о статусу последњег преживелог, код кога смо разматрали два случаја у односу на зависност случајних промењљивих које описују преостале животне векове одговарајућих особа. Поменути статуси су заправо специјални случајеви општег симетричног статуса, који траје све док је живо k од почетних m особа. Увели смо и *Schuette – Nesbitt* формулу која нам је од великог значаја приликом рачунања премија за општи симетрични статус.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hans U. Gerber, "Life Insurance Mathematics", third edition 1997.*

[2] *Šulejić, P. (2005). Pravo osiguranja, Beograd, Dosije*

[3] *Istorijski razvoj osiguranja u Srbiji i region bivše Jugoslavije, dostupno na:*

https://centarzaosiguranje.com/wp-content/uploads/2014/10/istorijski-razvoj-osiguranja-u-srbiji-dr-vladimir-njegomir.pdf

[4] *Marović, B., Kuzmanović, B., Njegomir, V., "Osnovi osiguranja i reosiguranja"*

[5] *Kočović, J., "Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica"*

[6] *Slobodanka Janković,* "*Elementi finansijske matematike*"

[7] http://sveoosiguranju.rs

[8] file:///C:/Users/korisnik/Downloads/predavanjeV.pdf

[9] *A Reading of the Theory of Life Contingency, dostupno na:*

https://faculty.atu.edu/mfinan/actuarieshall/MLCbook2.pdf

[10] http://osiguranje.tripod.com/id3.html