Математички факултет
Универзитет у Београду

МАСТЕР РАД

АРХИМЕДОВ МЕХАНИЧКИ МЕТОД ИЗВОЂЕЊА ФОРМУЛА

Ментор:
проф. Небојша Икодиновић

Студент:
Милица Радојевић Тодосијевић 1017/2019

Садржај

1.Увод **3**

1.1 О Архимеду 3

1.2 Сачувана дела 5

2. Одређивање тежишта **7**

2.1 Тежиште 7

2.2 Експериментално одређивање тежишта 11

2.3 Теоријско одређивање тежишта 12

2.4 Тежиште троугла 12

2.5 Закон полуге 17

3.О кругу и сфери **21**

4. Архимедов илустративни метод **25**

4.1 Квадратура параболе 25

4.2 Значај одређивања квадратуре параболе 33

4.3 Запремина сфере 34

4.4 Значај одређивања запремине сфере 40

4.5 Одређивање тежишта параболоида 43

4.6 Значај одређивања тежишта параболоида 47

5. Закључак **48**

Литература **48**

1. Увод

1.1. О Архимеду

Архимед (слика 1.) је био старогрчки математичар који се родио 287. године пре нове ере у Сиракузи на острву Сицилији. Памтимо га као математичара и физичара, али и као великог проналазача. Архимеду је велика инспирација био његов отац Фидија, који је и сам био астроном и математичар. Фидија је био рођак владара Сиракузе, Хиере. У време Архимедовог одрастања Сиракуза је била средиште трговине, уметности и науке. Још као млад, Архимед развија радозналост и склоност ка решавању проблема, па је кроз живот ишао трагајући за знањем. Када је научио колико је могао од својих учитеља у Сиракузи, Архимед се упутио у Египат да би учио у Александрији. У то време Александрија је била престоница хеленистичке културе. Радио је у Александријској библиотеци, тада највећој ризници књига у Средоземљу. Успео је да усаврши многа знања из области науке и да на том путу упозна Ератостена који ће му постати пријатељ.

Архимеду је математика увек била на првом месту. Његови први радови били су из механике. У својим радовима из математике доста се ослањао на механику, тачније на закон полуге који је користио при решавању многих проблема. Толико је био посвећен свом раду да би заборавио чак и на јело. Познат је по причи да је, док је седео у купатилу, открио закон да свако тело потопљено у течност губи од своје тежине онолико колика је тежина њиме истиснуте течности или гаса. Толико је био узбуђен својим проналаском да је узвикнуо: *„Еурека! Еурека! Нашао сам!”*.

Слика 1. *Архимед (287. – 212. г.п.н.е.)*

Након Александрије Архимед се враћа у Сиракузу где се бавио астрономијом. Сиракуза није дуго могла уживати своју слободу па се Архимед спремао за одбрану свога града. Многе легенде говоре о његовим изумима које је коструисао у ту сврху, нпр. покретне платформе за испуштање тешког камења и кључалог материјала на непријатељске бродове, палеће огледало у облику параболоида итд.

Највећу славу Архимед је стекао у својим радовима о геометријским телима. При том се служио методама којима се данас служимо у диференцијалном и интегралном рачуну. На неки начин можемо рећи да је Архимед творац данашњег интегралног рачуна. Нашао је начин за писање врло великих бројева. Показао је како се математика може применити на механику, открио је закон полуге, одредио је тежиште тела, унапредио статику, поставио основе хидростатике и одредио приближну вредност броја π.

Геометрију је сматрао својом највећом амбицијом. Први задатак геометрије тог доба био је одређивање површине. Његове методе за решавање ових проблема биле су запањујуће имајући у виду да није познавао нити алгебру нити концепт функције. Рачунао је приближне вредности површине круга и сегмента параболе уписујући у њих полигоне са све већим бројем страница. Следећи те принципе, дошао је и до изузетно прецизне апроксимације броја π, који се данас зове и Архимедова константа.

Такође је био веома самокритичан. У неким својим критикама написао је: *„Нека то буде застрашујући пример како се људи, који тврде да тобоже знају да докажу све оно што предлажу другима, а не прилажу властита решења, морају на крају крајева уверити како су се латили да докажу оно што није могуће доказати”*. Подједнако је био успешан и у теоријском и у практичном раду и њиховом повезивању.

Слика 2. *Архимед*

Архимеда (слика 2.) је 212. године пре нове ере по легенди убио један римски војник. Овај податак појављује се у Архимедовим биографијама тек стотинама година након смрти. У њима је описано више верзија овог догађаја.

Према Валерију Максиму Архимед је мирно цртао геометријске слике, када му је војник пришао довикнуо је: „*Noli turbare circulos meos!”* („Не дирај моје кругове!*”*). Војник је, сматрајући да његове речи вређају победника, одсекао Архимеду главу. Његов гроб Сиракужани нису смели да одржавају. Пронашао га је Цицерон и то захваљујући цртежу лопте и ваљка који се налазио на споменику изнад неколико урезаних стихова.

Цицерон новоди: *„Одмах сам рекао представницима Сиракузе који су ме пратили да је пред нама без сумње Архимедов надгробни спеменик. И заиста, чим су позвали људе да исеку коров и да нам прокрче пут и чим смо се приближили овом стубу, видели смо у његовом подножју натпис. Део уклесаних стихова могао се још прочитати, све остало је сатрло време”.*

Не постоје подаци да ли је Архимед био ожењен и да ли је имао децу. Мало људи је било способно да разуме Архимеда, а многи су имали користи од његовог знања. Зато није никакво чудо што је један математичар из XVII века рекао: *„Архимеда више хвале него што га читају, више се поносе њиме него што га разумеју”.*

Његов портрет се данас налази на предњој страни Филдсове медаље, најпрестижније награде за математичка достигнућа. Мислећи о Архимеду, Исак Њутн је писао: *„Ако видим даље од осталих, то је зато што стојим на раменима џина.”* Архимед се сматра за највећег математичара и научника античког доба.

1.2 Сачувана дела

С обзиром да су дела писана грчим језиком са дијалектом који се говорио на Сиракузи, није пуно тога сачувано. За већину његових радова се зна из референци других аутора. Архитекта Изидор из Милета успео да сакупи коментаре Архимедових дела које је написао Еутокије и на тај начин су дела постала познатија ширем аудиторијуму. Архимедова дела су превођена на арапски захваљујући Табиту, на латински захваљујући Герарду а током ренесансе су први пут штампана у Баселу 1544. године.

Архимед је писао:

О равнотежи у равни (два тома) – у којој Архимед објашњава закон момента.

Квадратура параболе – у којој Архимед доказује на два начина да је површина ограничена правом и параболом једнака $\frac{4}{3}$ површине троугла чија су темена крајеви тетиве и теме параболе.

О лопти и ваљку (два тома) – у њој Архимед се бави ваљком у који је уписана лопта тврдећи да је запремина лопте $\frac{4}{3}r^3\pi$ а ваљка $2r^3\pi$, што доводи до закључка да је запремина лопте $\frac{2}{3}$ запремине ваљка. Он је чак тражио да се на његовом надгробном споменику уклеше слика лопте уписане у ваљак. У овом делу дошао је и до закључка да је површина лопте $4r^2\pi$ а ваљка описаног око ње $6r^2\pi$.

О спиралама – дело од 28 поглавља – Архимедова спирала.

О коноидама и сфероидама – дело од 32 поглавља у којем је Архимед рачунао делове површина и запремина купе, лопте и параболоида.

О плovећим телима (два тома) – у првом делу Архимед доказује да вода заузима сферни облик око центра гравитације, а у другом делу он израчунава равнотежни положај делова параболоида, што је добар модел за дно брода јер се један део налази испод нивоа воде, а други изнад нивоа воде.

О мерењу круга – дело је написано као дописивање Архимеда са Доситејем из Пелусије. Архимед у свом раду доказује да је
$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

Бројање песка – У овом делу Архимед је успео да преброји колико зрнца песка стане у свемир! Књига спомиње хелиоцентрични систем и идеје о величини Земље. Архимед је закључио да је број зрнаца у свемиру $8 * 10^{63}$.

Многа Архимедова дела, због времена у коме су настала, нису сачувана. О њима сазнајемо од других аутора или се претпоставља да су постојала.

Нека од њих су:

-Полиедри
-О полугама
-О тежишту
-Катоптрика
-Календар итд

2. Одређивање тежишта

2.1 Тежиште

Да бисмо прецизније увели појам тежишта и доказали његову јединственост, морамо се прво упознати са појмом материјалне тачке и системом материјалних тачака.

Материјална тачка је модел тела чији се облик и димензије у датом разматрању могу занемарити. Материјална тачка је идеализован модел за проучавање особина тела у мировању и кретању. У математици и физици материјалну тачку не разматрамо као тачку саму по себи, већ се приписује произвољно изабрани позитивни или негативни број у својству његове масе.

Под системом материјалних тачака подразумева се скуп материјалних тачака чија су кретања и положаји у међусобној вези, тј. кретање сваке тачке зависи од кретања и положаја осталих тачака система. Тачке у простору образују систем материјалних тачака ако је њихов распоред дискретан, тј. ако се масе налазе на коначним растојањима.

Материјалну тачку представићемо као уређен пар (m, A), где је m реалан број и представља масу тела у тачки A. Нека су $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ масе тела у тачкама $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ тада са $\{(m_1, A_1), (m_2, A_2), (m_3, A_3), \dots, (m_n, A_n)\}$
означавамо систем материјалних тачака. Маса материјалног система једнака је збиру маса свих тела које образују систем $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Дефиниција: За систем материјалних тачака
$\{(m_1, A_1), (m_2, A_2), (m_3, A_3), \dots, (m_n, A_n)\}$ центар маса (тежиште) је тачка T која задовољава једнакост:
$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} + m_3\overrightarrow{TA_3} + \cdots + m_n\overrightarrow{TA_n} = \vec{0}$.

Теорема: За сваки систем тачака постоји јединствено тежиште.

Доказ: Нека је $S = \{(m_1, A_1), (m_2, A_2), (m_3, A_3), \dots, (m_n, A_n)\}$ систем материјалних тачака такав да је маса ситема $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$. Нека је O произвољна тачка. Да би тачка T била тежиште, мора бити задовољен услов $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$.

На основу закона о сабирању вектора следи:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_i}) = m_1(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_1}) + m_2(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_2}) + \dots + m_n(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$$

одакле је

$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n} - (m_1+m_2+\dots+m_n)\overrightarrow{OT} = \vec{0}$ па је

$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n} = (m_1+m_2+\dots+m_n)\overrightarrow{OT}$, добијамо

$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i}$, где је $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Десна страна израза одређује јединствен вектор који за сваки систем тачака увек постоји. Закључујемо да је тачка T тежиште система.

■

Теорема: Ако у систему од n материјалних тачака, k тачака $(k \le n)$ заменимо њиховим тежиштем у коме је сконцентрисана сва њихова маса, добијени систем ће имати исто тежиште као и полазни.

Доказ: Нека је:

T_n тежиште система $S_n = \{(m_1, A_1), (m_2, A_2), (m_3, A_3), \dots, (m_n, A_n)\}$,

T_k тежиште система $S_k = \{(m_1, A_1), (m_2, A_2), (m_3, A_3), \dots, (m_k, A_k)\}$, а

T тежиште система $S = \{(m, T_k), (m_{k+1}, T_{k+1}), \dots, (m_n, A_n)\}$, где је $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

За тачку T_n у односу на произвољну тачку O, важи:

$$\overrightarrow{OT_n} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}$$

за тачку T_k: $\overrightarrow{OT_k} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\dots+m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1+m_2+\dots+m_k}$

и за тачку T: $\overrightarrow{OT} = \frac{m\overrightarrow{OT_k}+m_{k+1}\overrightarrow{OA_{k+1}}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m+m_{k+1}+\dots+m_n} =$

$$= \frac{\left(m\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m}\right)+m_{k+1}\overrightarrow{OA_{k+1}}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n} =$$

$$= \frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OT_n}$$

Дакле, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_n}$ односно $T \equiv T_n$.

■

Теорема: За систем од две материјалне тачке (m_1, A_1) и (m_2, A_2) важи да се њихово тежиште T налази на правој A_1A_2, при чему је $\overrightarrow{TA_1}:\overrightarrow{A_2T} = m_2:m_1$.

Доказ: Из дефиниције тежишта важи:
$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} = \vec{0}$ одакле следи $\overrightarrow{TA_1} = \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{A_2T}$,
односно $\overrightarrow{TA_1}:\overrightarrow{A_2T} = m_2:m_1$.
Из последње једнакости следи да су вектори $\overrightarrow{TA_1}$ и $\overrightarrow{A_2T}$ линеарно зависни, па су тачке A_1, A_2 и T колинеарне.

■

Морамо напоменути да су у претходном случају масе m_1 и m_2 позитивни бројеви и да се у том случају тежиште налази на правој A_1A_2, у супротном налазило би се ван ње.

Теорема: Ако се систем од n материјалних тачака
$S = \{(m_1, A_1), (m_2, A_2), \dots, (m_n, A_n)\}$ налази у једној равни, онда се и тежиште тог система налази у тој равни.

<u>Доказ:</u> Нека се тачка O налази у равни система S. Важи:
$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$. Вектор $\overrightarrow{OT}$ је линеарно зависан од вектора $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$. Пошто сви они леже у истој равни, онда је и вектор $\overrightarrow{OT}$ у тој равни па је и тачка T.

■

Архимед спомиње тежиште тела у својим делима. Међутим, у његовим постојећим радовима не постоји дефиниција самог тежишта. Она се вероватно налазила у радовима који су сада изгубљени. Из анализе његових познатих радова произилази да би дефиниција тежишта могла бити схваћена на следећи начин:

Тежиште чврстог тела је тачка таква да обешеном телу помереног из стања мировања допушта ротацију у свим смеровима а затим га поново враћа у стање мировања и чува његов првобитни положај, без обзира на почетну оријентацију тела у односу на земљу.

Пример 1: Багминтон лоптици је тежиште увек у доњем гуменом делу, па закључујемо да се тежиште налази ближе оном делу где је сконцентрисана већа маса.

Пример 2: Код секире је потпуно јасно да ће маса самог гвозденог дела бити већа од дрвеног ослонца, па ће се у том гвозденом делу наћи тежиште. Сви знамо да, кад секира пада са веће висине, прво ће на земљу пасти гвоздени део, па тек онда дрвени, што је последица деловања гравитационе силе.

Тежиште је једна посебна тачка на сваком телу. Тежиште, из угла физичара, постоји због одређене масе на телу. Маса је једно од основних својстава природе, једно од темељних својстава свемира и постојања привлачне силе између две масе. Та сила назива се гравитациона сила и она је јача уколико су масе тела веће.

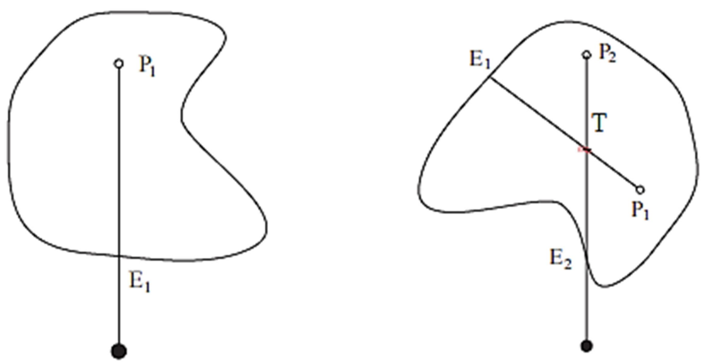
Током свог рада Архимед је у неколико наврата покушао да формулише дефиницију тежишта. Појам центра масе се често мешао са појмом тежишта. Центар масе је тачка једног објекта, односно система материјалних тачака, у којој је читава маса тог објекта сконцентрисана. Овај појам омогућава да се цело тело може посматрати као једна материјална тачка чија је маса једнака укупној маси тог тела. Центар масе постоји за било који систем материјалних тачака без обзира да ли на систем делују силе или не. Тежиште тела се поклапа са центром масе у случају да је тело хомогено. У физици се тежиште тела дефинише као нападна тачка векторског збира сила теже свих материјалних тачака истог објекта.

Из претходних примера видимо да постоје предмети чија маса није равномерно распоређена. Положај тежишта зависи од распореда масе по телу и оно се увек налази ближе оном делу на коме је сконцентрисан већа маса. Тежиште хомогених тела правилног геометријског облика налази се у геометријском средишту тела. Ако је тело неправилног облика тежиште можемо наћи експериментално.

2.2 Експериментално одређивање тежишта

Из Архимедових дела може се закључити да је први описао начин проналажења тежишта неког тела. Ево једноставне демонстрације Архимедовог огледа:

Узећемо један картон и исећи неправилан облик (слика 3.). Направићемо на њему неколико рупица (P_1 и P_2), затим узети висак, обесити картон на ексер и пустити слободно да виси. Оловком ћемо исцртати правац одређен смером конца виска. Тај правац ће представљати тежишну линију (P_1E_1 и P_2E_2). Затим картон обесимо поново кроз друге рупице и поновимо поступак. Тежиште ће се наћи у пресеку тежишних линија – означена тачка T. Ова метода се назива геометријска метода одређивања тежишта.



Слика 3. *Одређивање тежишта*

Тежиште не мора бити тачка која припада телу. Код неких предмета може бити и изван тог тела (слика 4.).
Пример за то је *хватач снова* (dreamcatcher). Ако разапнемо конце преко обода овог тела и покушамо на Архимедов начин да одредимо тежиште, видећемо да ће се он наћи изван обруча.

Слика 4. *Одређивање тежишта ван тела*

2.3 Теоријско одређивање тежишта

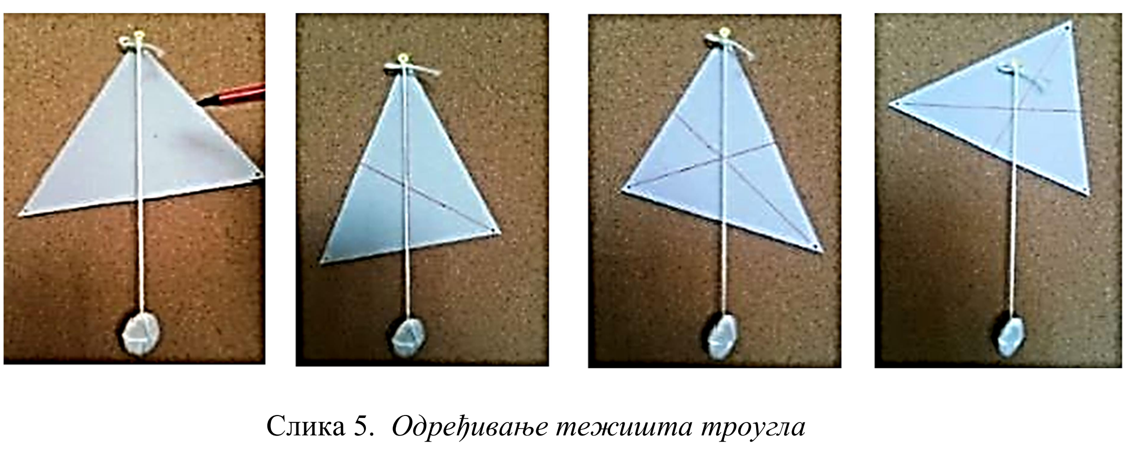
У својим делима Архимед је одредио тежиште једнодимензионих, дводимензионих и тродимензионих фигура. Да би дошао до овог резултата, користио се чувеним шестим постулатом из свог дела „О равнотежи површина'': „*Ако су величине на одређеним растојањима у равнотежи, (друге) величине једнаке њима ће такође бити у равнотежи на истој дистанци*''.

Претпоставимо да систем тела одржава полугу у равнотежи. Према овом постулату, одређено тело може се заменити другим, без нарушавања равнотеже, ако су задовољени следећи услови:
-Тежина другог тела мора бити једнака тежини првог тела.
-Тежишта оба тела морају бити на подједнаком растојању од ослонца.
У свом раду *О равнотежи равни* Архимед је искористио шести постулат да покаже закон полуге и да одреди тежиште троугла.

2.4 Тежиште троугла

Архимед се бавио одређивањем тежишта разних геометријских ликова и тела: троугла, паралелограма, трапеза, полукруга итд. Прича о тежишту троугла углавном се у основној школи наводи без икаквог образложења. Зато је ово идеална прилика да се повежу математика и физика и да се истакну дубоке везе међу њима.

Пример 1: Једна могућност је да се трагањем за тежиштем започне применом Архимедовог експеримента. За експеримент су потребни табла од плуте са шпенадлама, канап са тегом на једном крају, картон, маказе и оловка (слика 5.).

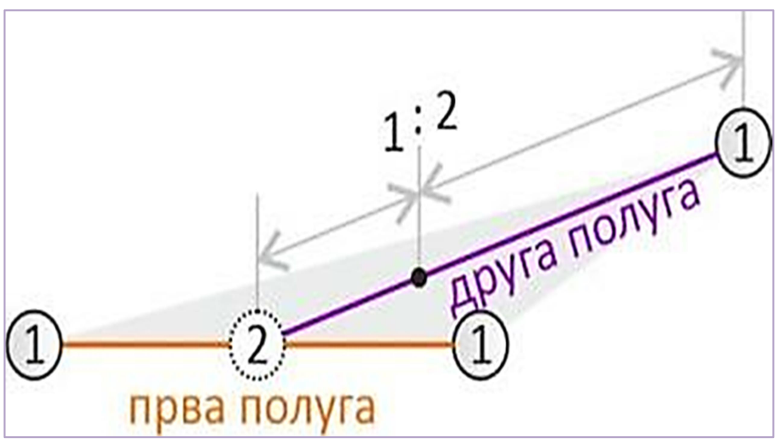


Слика 5. *Одређивање тежишта троугла*

Картон треба исећи у облику троугла и шпенадлом закачити за плуту у једној тачки и кроз ту тачку нацртати правац силе теже који одређује канап са тегом, а затим поновити поступак за бар још једну тачку. Приликом експерименталног одређивања тежишта троугла, природно се намеће појам тежишне линије. Непосредно у пресеку тежишних линија одређује се тежиште троугла. Треба имати у виду да за изузетно мале троуглове овај експеримент није прецизан.

Пример 2: Нека су на крајевима шипке причвршћене кугле од по 1kg. Масу шипке занемарујемо. Ако средиште шипке поставимо на неки ослонац, ниједна њена страна не може да претегне, па кажемо да је шипка са куглама у равнотежи. Средиште шипке називамо центром равнотеже. Ако би на једном крају шипке поставили куглу од 1kg, а на другом крају куглу од 2kg, видели бисмо да би центар равнотеже био ближи тежој кугли. Физика нас учи да ће у овом случају центар равнотеже бити два пута удаљенији од кугле мање масе него од кугле веће масе.

Пример 3: Друга могућност (слика 6.) је одговарајућим питањима водити „мисаони експеримент". Задатак је одредити центар равнотеже троугаоне плоче (чију масу занемарујемо) у чијим теменима се налазе кугле од по 1kg.



Слика 6. *Одређивање тежишта троугаоне плоче*

Замислимо шипку на чијем је једном крају причвршћена кугла од 1kg, а на другом крају је постављено средиште друге шипке на чијим се крајевима налазе кугле од по 1kg. Овај други крај оптерећен масом од 2kg, па другу шипку можемо третирати као куглу од 2kg. Центар равнотеже биће тачка прве шипке, која је два пута удаљенија од краја оптерећеног једним килограмом, него од краја оперећеног са

2kg. Једноставно се уочава да се центар равнотеже налази на линији која спаја једно теме са средиштем наспрамне странице, и при томе је центар равнотеже два пута удаљенији од темена него од средишта странице. Међутим, теме и наспрамну страницу можемо изабрати на три начина, па остаје недоречено да ли је свеједно који избор направимо.

Ученицима се на овакав начин поступно и са лакоћом уводи појам тежишне дужи и тежишта као и чињенице да се тежишне дужи секу у односу 2:1.

Код система од четири тачке дужи које спајају тачку са тежиштем троугла, кога чине преостале три, као и дужи које спајају средишта дужи, кад поделимо ове тачке на парове, оне се секу у једној тачки, уз одговрајајуће односе поделе. Знајући да је таква тачка јединствена, закључујемо да ће исто важити и кад су тачке компланарне и кад је у питању недегенерисан тетраедар.

У наставку ћемо размотрити како Архимед приликом доказивања тежишта геометријских ликова описује поступак одређивања тежишта троугла.

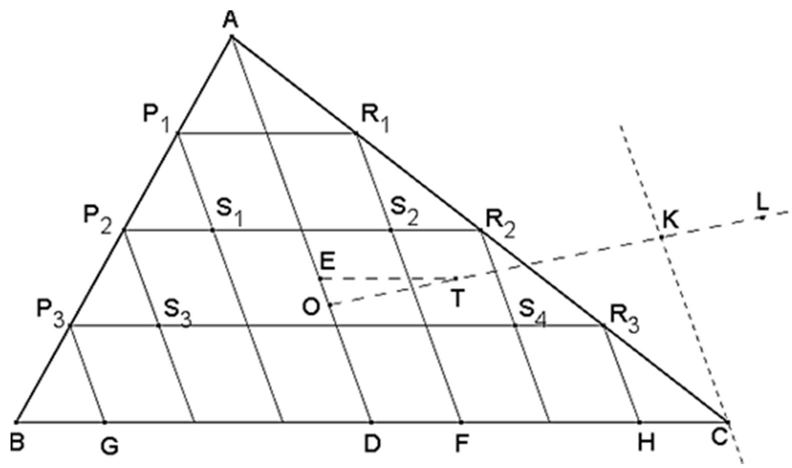
Теорема: Тежиште сваког троугла лежи на дужи која спаја било који врх са средином наспрамне странице.

Дужина која се овде наводи представља у ствари тежишну дуж. У доказу дате теореме довољно је показати да, ако се тежиште налази на једној од тежишних дужи, тада се оно поклапа са пресеком две тежишне дужи а самим тим припада и другој тежишној дужи. За извођење доказа наводимо следеће две чињенице:

1) Тежиште сваког паралелограма лежи на дужи која спаја средишта наспрамних страница.

2) Ако је А геометријски лик са тежиштем T_1, где је $A = B \cup C$, B део тог геометријског лика са тежиштем T_2, тада је тежиште преосталог дела C тачка T_3, која је колинеарна са тачкама T_1 и T_2, таква да је
$$|T_3T_1| : |T_1T_2| = P_B : P_C$$
где P_B и P_C представљају површине делова B и C.

Доказ:
Нека је дат троугао (слика 7.) ΔABC и нека је тачка D средиште странице BC, а T тежиште троугла. Дуж AD је тежишна дуж троугла (ΔABC).



Слика 7. *Тежиште троугла*

Претпоставимо супротно, да тачка T не лежи на тежишној дужи AD већ да се она налази у области ΔABC. Повуцимо праву паралелну са BC која пролази кроз тачку T и сече тежишну дуж AD у тачки E. Ако преполовимо дуж DC, а затим настале дужине, у неком моменту добићемо дуж DF која је мања од дужи ET. Поделимо затим дуж BC еквидистантним тачкама тако да је удаљеност између две суседне тачке једнака DF, а затим кроз те тачке повуцимо праве паралелне са AD које секу AB и BC редом у тачкама P_1 ,P_2,..., P_n, R_1, R_2,…, R_n којих има коначно много. У даљем излагању доказа теореме разматраћемо тачке P_1 ,P_2, P_3,R_1,R_2,R_3 као што је приказано на слици. Повуцимо затим дужи $P_1 R_1$, $P_2 R_2$ и $P_3 R_3$ које су паралелне са BC и означимо тачке пресека дужи $P_2 R_2$, $P_3 R_3$ и неких паралелних правих s са S_1, S_2, S_3 и S_4. На овај начин смо ΔABC поделили на три паралелограм $S_1S_2R_1P_1$, $S_3S_4R_2P_2$ и GHR_3P_3 и мање троуглове. Тежишта наведених паралелограма се налазе на дужи AD, стога и тежиште O скупа паралелограма припада дужи AD. Спојимо тачке O и T а затим из тачке O повуцимо полуправу OT. Означимо са K пресек полуправе OT и праве из тачке C паралелне са AD.

Нека је n број делова на које је подељена дуж AC. Троуглови који се налазе на страници AC: ΔHCR_3, $\Delta S_4R_3R_2$, $\Delta S_2R_2R_1$ слични су са ΔDCA. Аналогно, троуглови који се налазе на страници AB слични

су троуглу ΔBDA. Означимо збир свих малих троуглова са ΔT.
Из претходне сличности троуглова закључујемо:

$$P_{\Delta ABC}: \Delta T = n: 1 = |AC|: |AR_1| > |OK|: |OT|$$

при чему за збир површина паралелограма ΔP важи
$P_{\Delta ABC}: \Delta P = n: (n-1)$.

Продужимо полуправу OT преко тачке K до тачке L тако да важи
$P_{\Delta ABC}: \Delta T = |OL|: |OT| = n: 1$.

Можемо закључити да је $\Delta P: \Delta T = (n-1): 1 = |TL|: |OT|$.

Како је тежиште ΔABC у тачки T, а тежиште свих паралелограма у тачки O, тада се тежиште преосталих троуглова мора налазити на дужи OT. Али то није могуће јер се скуп свих преосталих троуглова налази ван ње. Дакле контрадикција.

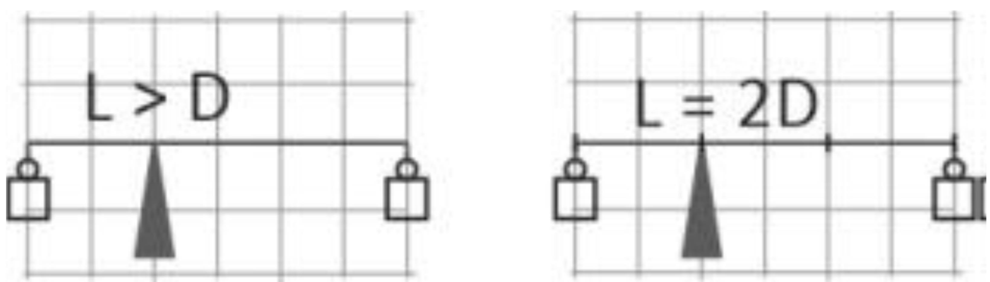
Закључујемо да је тачка T тежиште ΔABC и да се она налази на дужи AD.

■

2.5 Закон полуге

У свакодневном животу сви смо се много пута сусретали са овим законом, као једним од најједноставнијих а да тога нисмо ни свесни. Најранија полуга развила се код животиња, у унутрашњости њихових тела, као на пример код риба 400 милиона година пре нове ере. Наставком еволуције многе животиње су користиле полугу, не само због кретања, већ и због хране. На пример видре камењем отварају шкољке и на тај начин, користећи метод полуге долазе до хране, мајмуни користе танке штапиће да би отворили бодљикаве воћке. Људи су највероватније у почетку користили метод полуге да би дошли до хране, а касније су користили полугу као оруђе. Полуга је своју примену нашла нарочито у доба старог Египта. Да би се пирамиде изградиле, користио се метод полуге за подизање тешког камења и пренос воде у иригационе системе. Први писани документ потиче из древне Грчке, када је Архимед схватио њену примену. Сви знамо познату реченицу: *„Дајте ми ослонац и одговарајућу полугу и ја ћу подићи Земљу"*.

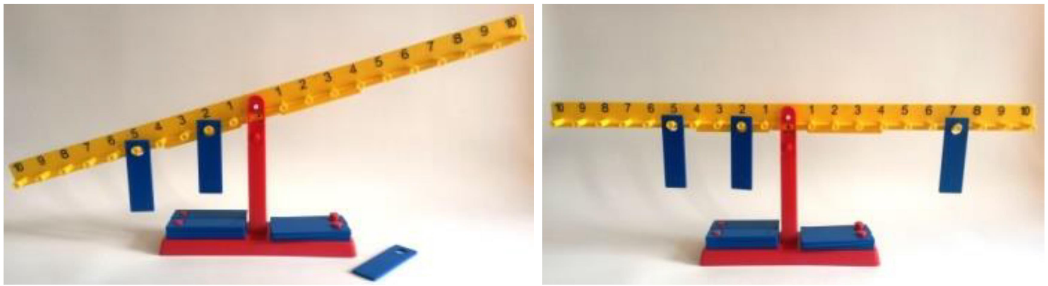
Поред строгог и формалног увођења закона полуге неопходно је навести неколико примера и на тај начин природне законитости плиближити ученицима. Теразије (слика 8.) су најпрактичнији пример за илустрацију релација „једнакости", „мање" и „веће".



Слика 8. *Теразије*

Ако L означава масу тела са леве стране, а D масу тела са десне стране, осећај за природне законитости је довољан да се закључи да је терет са леве стране већи него терет са десне. У овом примеру већи изазов представља извођење закључка о размери оптерећености на крајевима. Углавном се у основној школи та веза даје као готова.

На следећим сликама приказана је играчка која је позната под називом Математичка равнотежа (слика 9.).



Слика 9. *Математичка равнотежа*

Употреба ове играчке у почетним фазама учења потпуно је оправдана чињеницом да је дете способно да користи појмове и примењује законитости у пракси, знатно пре него што их постане свесно и што их потпуно разуме.

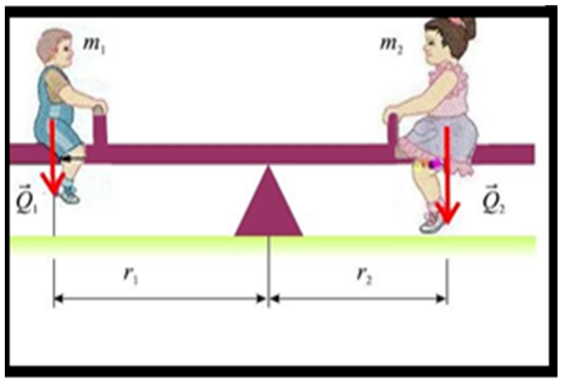
Данас су у научним парковима познате Математичке клацкалице, односно Архимедове клацкалице (слика 10.).

Слика 10. *Архимедова клацкалица*

Полуга је свако чврсто тело које може да се окреће око непокретног ослонца. Пошто има једну тачку која је непокретна, полуга око ње врши кружно кретање. На полугу најчешће делују две силе које теже да је заокрену у супротним смеровима. Полуга је једноставна машина која је превасходно служила за подизање терета. Она нам омогућава да са мањом силом подигнемо већи терет. Састоји се из четири дела: чврстог тела, ослонца, терета тј. тела које треба подићи и силе која делује на полугу.

Сада ћемо да објаснимо како силе треба да делују на полугу да би довеле до кружног кретања. За почетак, посматраћемо деловање само једне силе. Приметићемо да деловање само једне силе дуж полуге неће изазвати померање. Ако сила делује на тај начин, онда се на њеном правцу деловања налази и ослонац.

Како је ослонац непокретан, а полуга чврсто тело, при деловању силе дуж правца полуге не долази до било каквог померања (слика 11). Да би се изазвало окретање полуге око ослонца, потребно је да сила делује нормално на полугу. Таква сила доводи до кружног кретања полуге. Замишљена линија која пролази кроз ослонац и нормална је на раван у којој се полуга креће назива се оса ротације. Нормално растојање између ослонца полуге и правца деловања силе назива се крак силе r_2, а нормално растојање између ослонца полуге и правца деловања терета јесте крак терета r_1.



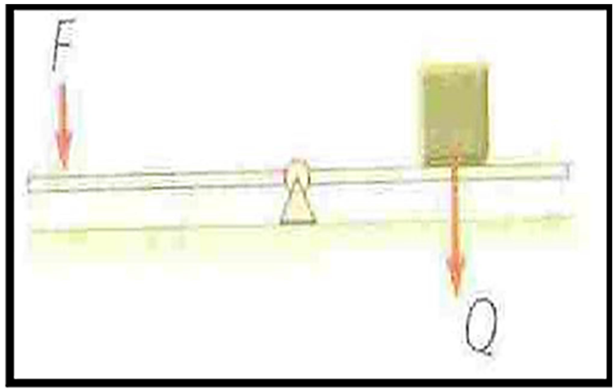
Слика 11. *Двострана полуга – клацкалица*

Производ силе и њеног крака назива се момент силе или обртни момент. Момент силе је физичка величина изведена из силе и дужине $M = F * r$.

У зависности од међусобног положаја силе, терета и ослонца, полуге могу бити једностране и двостране. Једностране полуге су оне код којих се терет и силе налазе са исте стране (хефталица, колица за превоз терета, пинцета, крцкалица за орахе, ...). Двостране полуге (слика 12.) су оне код којих се ослонац налази између терета и силе (клацкалица, вага, маказице,...).

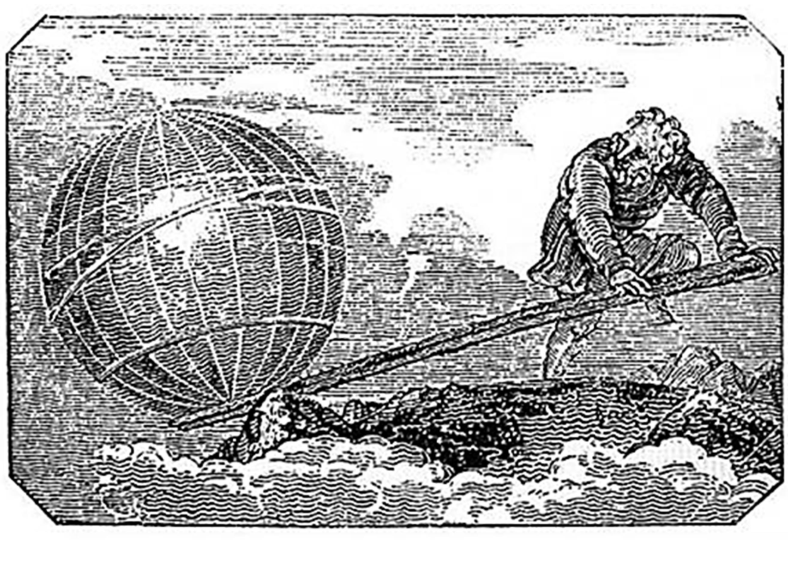
Полуга ће се наћи у равнотежи ако су моменти изједначени, момент силе и момент терета. Производ силе и дужине крака је увек исти. Ако имамо дужи крак, потребно је на њега деловати мањом силом да би се добио исти моменат.

Услов равнотеже је следећа једначина која се назива једначина равнотеже полуге (Архимедов закон полуге) $F * a = Q * b$ при чему је F сила којом се терет подиже, Q тежина терета, а a и b су краци силе и терета. Интензитет силе је онолико пута мањи колико је пута њен крак већи од крака терета. Однос крака силе и крака терета се назива коефицијент преноса полуге к и према Архимедовом закону за њега важи $k = \frac{a}{b} = \frac{Q}{F}$. Ако је к > 1, полуга делује као алатка која мањом силом подиже већи терет.



Слика 12. *Двострана полуга*

Чувена Архимедова реченица: „Дајте ми ослонац и одговарајућу полугу и ја ћу подићи Земљу" (слика 13.) изречена је имајући на уму да се довољно великом полугом може подићи произвољно велики терет снагом људских руку. Теоријски било би могуће овако нешто урадити, али практично видели бисмо да је неизводљиво.



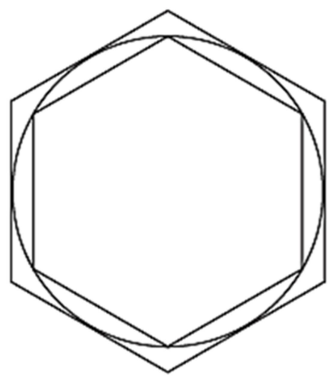
Слика 13. *„Дајте ми ослонац и одговарајућу полугу и ја ћу подићи Земљу"*

3. О кругу и сфери

Један од значајних Архимедових радова је и кратка расправа *О мерењу круга*. Расправа укључује три леме и сматра се да је део Архимедовог рада о квадратном корену. Он је у свом раду показао да се обими два круга односе као њихови полупречници, да је површина круга једнака површини правоуглог троугла (чија је једна катета полупречник а друга обим круга) и успео је да апроксимира број π.

Нека је O_1 обим круга чији је полупречник r_1 и нека је O_2 обим круга чији је полупречник r_2, онда важи да је $\frac{O_1}{O_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Вилијам Џоунс је 1706. године предложио употребу броја π као количник обима и пречника круга. Тај закључак је извео и сам Ојлер тек 1737. године, $\pi \equiv \frac{O}{2r}$.



Слика 14. *Круг у који је уписан и око кога је описан правилан шестоугао*

Из тога следи да се обим круга може наћи по формули $O = 2r\pi$. Ламбер је 1761. године доказао да је број π ирационалан број.

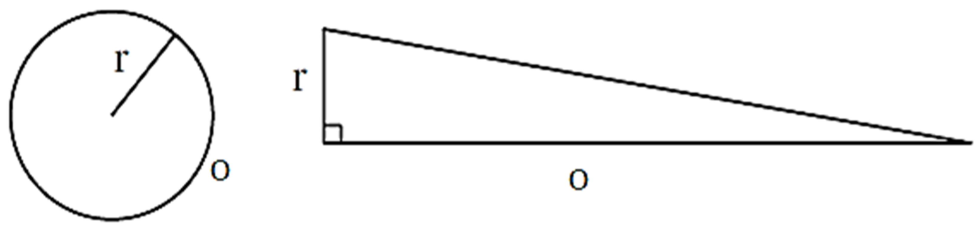
Иако сам Архимед није спомињао ирационалност броја π, он је нашао његову добру апроксимацију и то изложио у свом раду „О мерењу круга”. Он је пронашао горњу и доњу границу овог односа тако што је у круг уписао и око њега описао правилан шестоугао.

Показао је да ако се број страница правилног многоугла n повећава, обим многоугла тежи обиму круга (слика 14.).

Долазећи до многоугла који има 96 страна, закључио је да је количник обима и пречника круга мањи од $3\frac{1}{7}$ а већи од $3\frac{10}{71}$, тј.
$3\frac{10}{71} < \frac{O}{2r} < 3\frac{1}{7}$ односно $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

Овај закључак је био изванредан као и чињеница да се количник обима и пречника круга може изразити тим бројевима.
Још један од закључака био је да се површине два круга односе као квадрати њихових полупречника $\frac{P_1}{P_2} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$.

Архимед је отишао даље у свом раду „О мерењу круга". Он тврди да је површина било ког круга полупречника r једнака површини правоуглог троугла чије су катете r и O, где је O обим круга (слика 15.).



Слика 15. *Пример круга и троугла једнаких површина*

Нека је P површина круга полупречника r и обима O. Нека је P_T површина правоуглог троугла чија је једна катета дужине r а друга дужине O. Резултат који је Архимед добио у свом раду могао би да се запише на следећи начин:

$$P = P_T = \frac{O * r}{2}$$

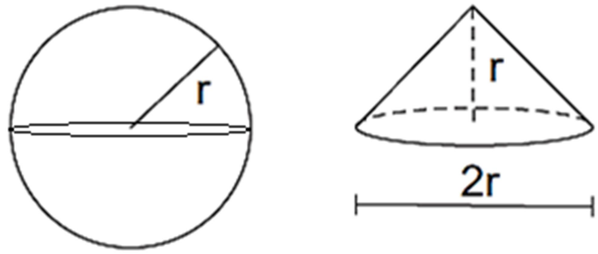
На основу овога лако се изводи закључак да се површина круга може одредити формулом:
$P = P_T = \frac{O * r}{2} = \frac{2r\pi * r}{2} = r^2\pi$.

Еуклид је у свом раду показао да се запремине две сфере односе као кубови њихових полупречника:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

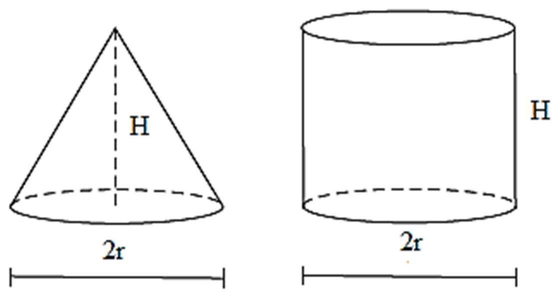
У свом раду „ О сфери и цилиндру" доказао је неколико важних теорема.
Теорема 1: Површина сфере је четири пута већа од површине круга истог полупречника, односно $P_S = 4r^2\pi$.

Теорема 2: Запремина сфере је четири пута већа од запремина купе чији су полупречник основе и висина једнаки полупречнику сфере (слика 16.).



Слика 16. *Пример купе и сфере једнаких запремина*

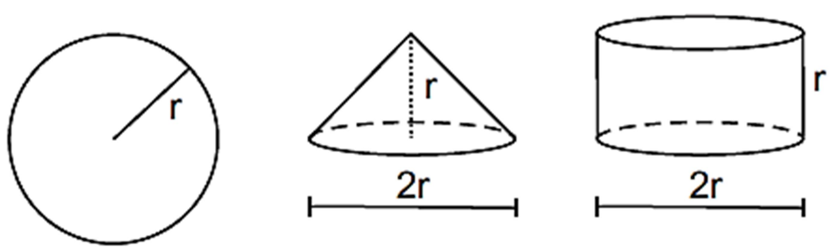
Нека је V_S запремина сфере полупречника r, а V_K запремина купе чија је база подударна великом кругу сфере, а висина купе једнака полупречнику сфере . Тада је $V_S = 4V_K$.



Слика 17. *Однос запремине купе и ваљка истих основа и висина*

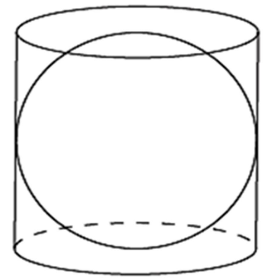
Како је запремина купе једнака трећини запремине одговарајућег ваљка (слика 17.) онда имамо да је $V_S = 4V_K = \frac{4}{3}V_V$.

У последњој формули треба нагласити да купа и ваљак имају исте основе као што је велики круг сфере и да им је висина једнака полупречнику (слика 18.).



Слика 18. *Пример купе и ваљка чије базе одговарају великом кругу сфере*

Запремина ваљка из претходне једначине је једнака половини запремине ваљка описаног око лопте полупречника r.



Слика 19. *Ваљак описан око лопте*

Ако са V_{VO} означимо запремину описаног ваљка око сфере (слика 19.) онда имамо да је

$$V_S = \frac{2}{3}V_{VO} \text{ односно } V_{VO} = \frac{3}{2}V_S \text{ .}$$

Како је $V_{VO} = (r^2\pi) * (2r)$ јер је $H = 2r$ имамо да је $V_S = \frac{2}{3}V_{VO} = \frac{2}{3}(r^2\pi) * (2r) = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Резултате да је површина круга $P = r^2\pi$, површина сфере $P_S = 4r^2\pi$ и запремина сфере $V_S = \frac{4}{3}r^3\pi$, дугујемо управо Архимеду.

Докази прве и друге теореме били су искључиво геометријски. Тек каснијим открићем његових дела постало је познато како је Архимед дошао до ових закључака.

4. Архимедов илустративни метод

У делу свог илустративног метода Архимед је користио неколико лема.

Најзначајније су:

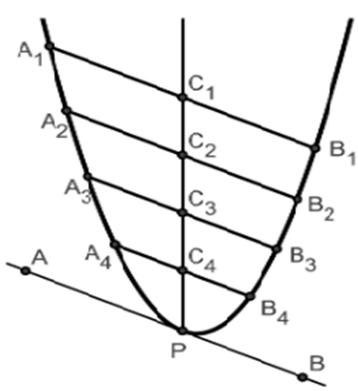
-Тежиште било које дужи је тачка пресека симетрале и те дужи.
-Тежиште троугла је тачка пресека дужи које спајају теме и средину наспрамне странице троугла.
-Тежиште круга је тачка која је уједно и центар круга.
-Тежиште правог кружног ваљка је тачка пресека равни симетрије и осе симетрије.

4.1 Квадратура параболе

Треба имати у виду да Архимед није знао за координатни систем већ је у својим доказима користио геометријску дефиницију параболе. Он параболу дефинише као скуп тачака у равни које су једнако удаљене од жиже и директрисе. Користећи „методу исцрпљивања”, Архимед успева да израчуна квадратуру параболе. Касније та метода прераста у интегрални рачун, па се Архимед сматра једним од зачетника тог рачуна.

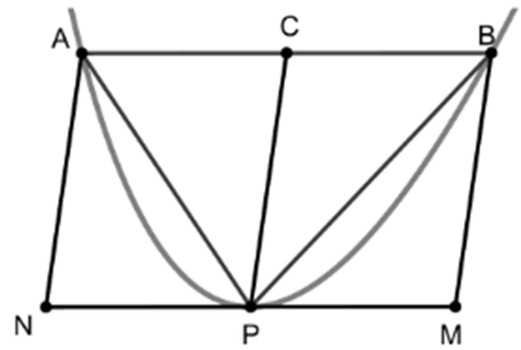
Теорема: Сваки сегмент параболе површински је $\frac{4}{3}$ троугла који има исту основу и једнаку висину.

Доказ:



Слика 20. *Парабола*

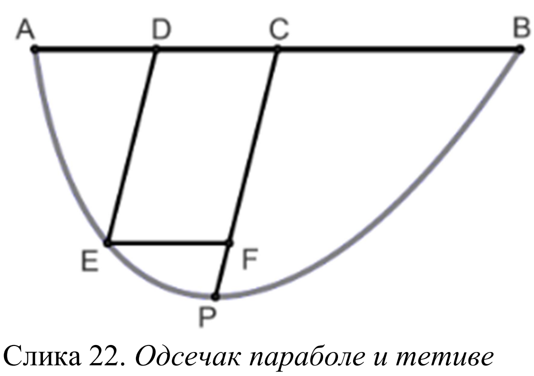
Нека је AB тангента која додирује параболу у тачки P (слика 20.), и нека су тетиве A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,… паралелне тангенти, тада средишта тих тетива, тачке C_1, C_2, C_3,… су колинеарне са тачком P. Имамо да је $\frac{{A_1C_1}^2}{PC_1} = \frac{{A_2C_2}^2}{PC_2} = \frac{{A_3C_3}^2}{PC_3} = \cdots$ итд.



Слика 21. *Одсечак параболе и тетиве*

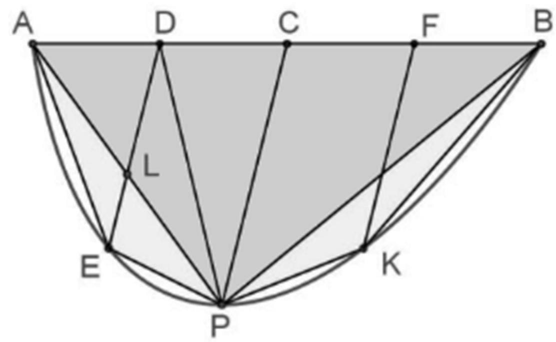
Посматрајмо сада одсечак лука параболе и тетиве AB (слика 21.). Тетиву AB називаћемо основицом, а додирну тачку P теменом параболе. Тачка C представља средину основице AB.

Из колинеарности тачака и $\frac{{A_1C_1}^2}{PC_1} = \frac{{A_2C_2}^2}{PC_2} = \frac{{A_3C_3}^2}{PC_3} = \cdots$ закључујемо да ће PC бити паралелно оси параболе. У одсечак параболе уписаћемо ΔAPB, а око ње описати паралелограм $ABMN$. Како је површина троугла једнака половини површине паралелограма , онда је већа од половине површине одсечка, а збир површина преостала два одсечка изнад тетива AP и BP мањи је од половине површине целог одсечка. Ако даље на исти начин упишемо два троугла и преостале одсечке, збир њихових површина биће већи од половине збира одсечака у којима су уписани, а збир површина четири одсечка која остану након другог уписивања троуглова биће мањи од једне четвртине површине целог одсечка. Ако још једном поновимо уписивање , остаће осам још мањих одсечака којима ће збир површина бити мањи од једне осмине целог одсечка, итд.



Слика 22. *Одсечак параболе и тетиве*

Нека је тачка D средиште дужи AC. Повуцимо дуж DE која је паралелна са CP (слика 22.). Нека је EF паралелно са AB. Из $\frac{{A_1C_1}^2}{PC_1} = \frac{{A_2C_2}^2}{PC_2} = \frac{{A_3C_3}^2}{PC_3} = \cdots$ следи да важи $\frac{AC^2}{PC} = \frac{EF^2}{PF}$. Како је $AC = 2EF$, тада је $PC = 4PF$, $FC = ED = 3PF$ из чега следи да је $PC = \frac{4}{3}ED$. Посматрајмо сада ΔAEP и ΔPKB. Површина ΔAPB је осам пута већа од површине сваког од њих. Дуж ED дели тетиву AP у тачки L на два једнака дела (слика 23.), јер је паралелна са CP, а такође дели и AC. Како је $PC = 2LD$ и $PC = \frac{4}{3}ED$следи да је $3LD = 2ED$, а одатле имамо да је $LD = 2EL$. Закључујемо да је $P_{\Delta ADL} = 2P_{\Delta AEL}$.



Слика 23.

Аналогно закључујемо да је $P_{\Delta DLP} = 2P_{\Delta LEP}$, а спајањем последње две једнакости добијамо да је $P_{\Delta ACP} = 2P_{\Delta ADP} = 4P_{\Delta AEP}$ одакле следи да је $P_{\Delta ABP} = 8P_{\Delta AEP}$. На потпуно исти начин долазимо и до закључка да је $P_{\Delta ABP} = 8P_{\Delta PKB}$.

Настављамо поступак уписивања троуглова. Површину првог троугла обележимо са S_1, збир површина троуглова описаних у другом кораку са S_2, у трећем са S_3 и тако редом. Добијамо бесконачни низ S_1, S_2, S_3,... при чему је сваки следећи члан четвороструко мањи од претходног, тј. важи да је $S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n$. Користећи ову чињеницу имамо:

$4(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots S_n) = 4S_1 + 4(S_2 + S_3 + \cdots S_n) = 4S_1 + (S_1 + S_2 + \cdots S_{n-1})$

одакле следи

$$4(S_1 + S_2 + \cdots S_{n-1}) + 4S_n = 4S_1 + (S_1 + S_2 + \cdots S_{n-1})$$

односно

$$3(S_1 + S_2 + \cdots S_{n-1}) + 4S_n = 4S_1$$

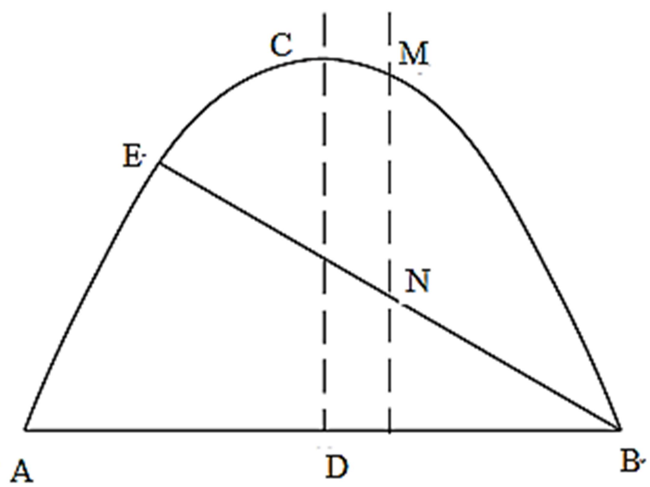
одакле дељењем са три добијамо:

$$S_1 + S_2 + \cdots S_{n-1} + \frac{4}{3}S_n = \frac{4}{3}S_1.$$

Сада можемо доказати да је повшина одсечка $S = \frac{4}{3}S_1$. Претпоставимо супротно, тј. да је $S > \frac{4}{3}S_1$. Можемо поступак уписивања троуглова понављати док не добијемо произвољно мали остатак. Изаберимо n такво да важи да је остатак мањи од $S-\frac{4}{3}S_1$,

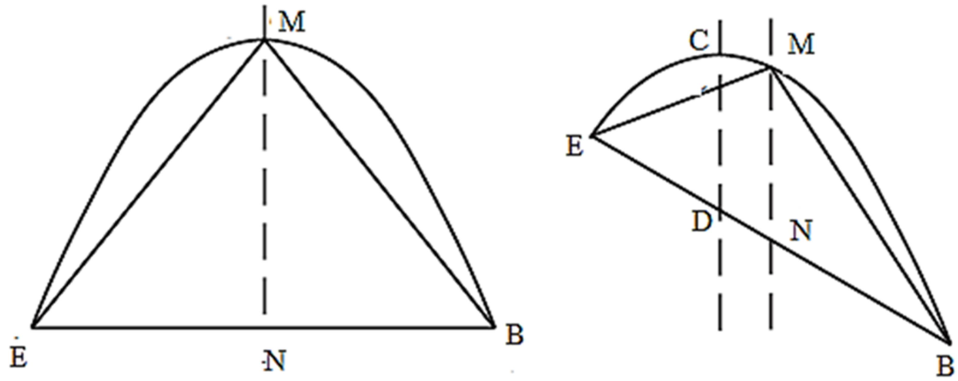
тј. $S-(S_1+S_2+\cdots S_n)<S-\frac{4}{3}S_1$ што је у контрадикцији са $S_1+S_2+\cdots S_{n-1}+\frac{4}{3}S_n=\frac{4}{3}S_1$. Тиме је доказано да је $S=\frac{4}{3}S_1$, односно да је сегмент параболе површински је $\frac{4}{3}$ троугла који има исту основу и једнаку висину.

■



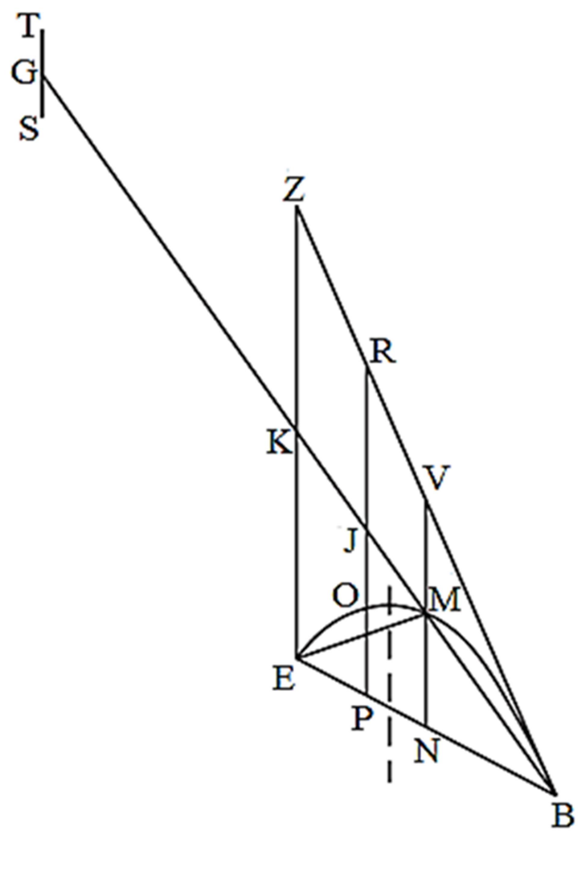
Слика 24. *Квадратура параболе*

Дат је део параболе на слици 24. који можемо обележити са ABC, где је са C обележено теме параболе а са AB основица тог одсечка која је нормална на осу параболе. Дуж CD представља осу симетрије дате параболе, па самим тим тачка D представља средиште дужи AB. Дуж BE представља тетиву параболе. Тачка N дели тетиву на два једнака дела. Кроз тачку N повучена је паралелна линија са CD која сече параболу у тачки M. У посебном случају када се тачка E поклопи са тачком А тада се дужи EB и AB поклапају, дуж EB биће под правим углом у односу на дуж CD.



Слика 25. *Општи случај одсечка параболе*

Архимед је разматрао општи случај одсечка параболе EBM са тетивом EB (слика 25). Он је показао да је површина одсечка параболе EBM једнака $\frac{4}{3}$ површине коју гради троугао EBM уписан у параболу.

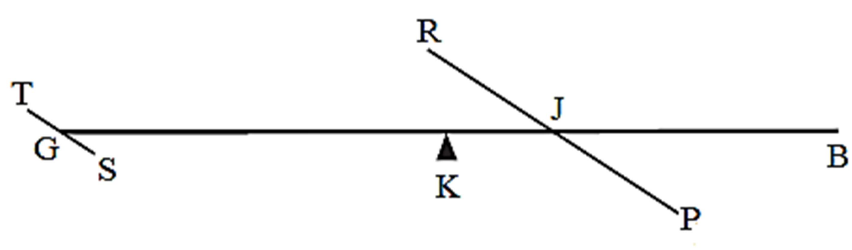


Слика 26. *Геометријски приказ квадратуре параболе*

На слици (слика 26.) означимо са EMB део параболе ограничен са тетивом EB и нека је N средиште од EB. Из N повуцимо линију NV паралелну са осом параболе (означена испрекиданом линијом). Из тачке E повлачимо праву EZ паралелну са NV. Тангента повучена у тачки B на параболу пресеца праве NV и EZ редом у тачкама V и Z. Продужетак дужи BM пресеца дуж EZ у тачки K која представља средиште дужи BG.

Посматрајмо праву PR паралелну оси параболе која је на произвољној удаљености од EZ. Са O означимо пресек дужи PR и параболе EMB, а са J означимо пресек PR и KB. У свом доказу квадратуре параболе пошао је од тога да тачка M представља средиште од NV, па је на основу сличности троуглова доказао да су тачке K и J редом средишта дужи EZ и PR. Архимед је извео закључак да је $\frac{GK}{KJ} = \frac{PR}{OP}$.

Архимед је посматрао PR и OP као полуге које имају пропорционалу тежину у односу на дужину, а GB као полугу са ослонцем у тачки K. Затим је повукао линију TS подударну са OP тако да је G њено средиште (слика 26.). Тачка J представља тачку ослонца полуге PR а тачка G ослонац полуге TS. Комбинујући закон полуге и Архимедову тврдњу, изводимо закључак да ће полуга остати у равнотежи у тачки K ако је J средиште PR и G средиште TS.
Ова равнотежа је приказана на следећој слици 27. :

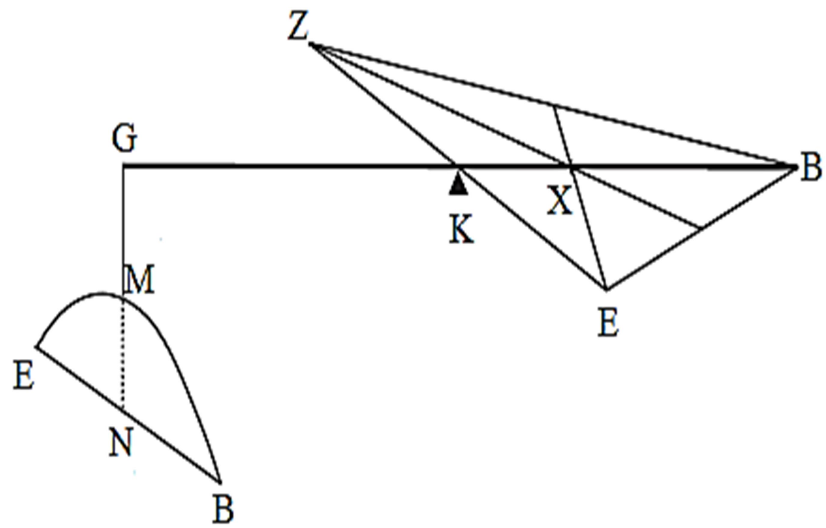


Слика 27. *Пример равнотеже полуге*

Математички, стање равнотеже се може изразити формулом $\frac{GK}{KJ} = \frac{PR}{TS}$.

Слично, одсечци свих дужи, које су паралелне са NV и које се „сусрећу" са теменом параболе, између BZ и EB (са средиштем на KB) и дужина између лука параболе и EB (постављених тако да им је средиште у тачки G) биће у равнотежи у тачки K. Добијена је полуга која је у равнотежи у тачки K, са сегментом параболе EBM на једној страни у троуглом EZB на другој.

Овај модел је представљен на следећој слици 28. параболе окачене уз помоћ бестежинске нити, са центром гравитације вертикално испод тачке G.

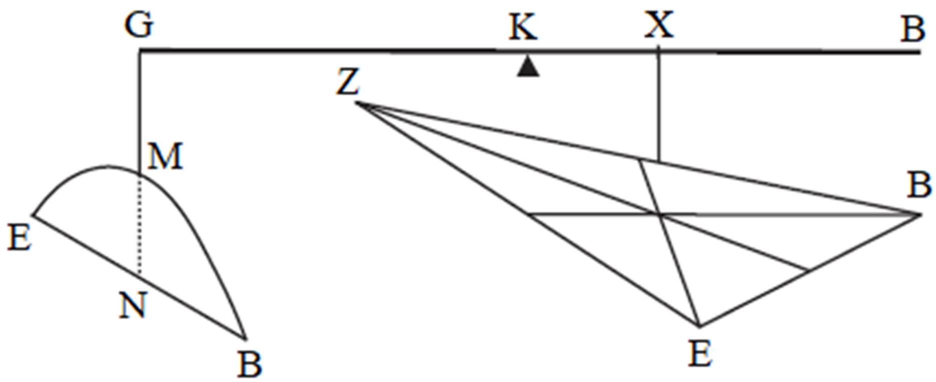


Слика 28. *Парабола окачена уз помоћ бестежинске нити, са центром гравитације која је у равниотежи када је ослоњена у тачки К*

По шестом постулату, *О равнотежи површина*, ова полуга ће остати у равнотежи у тачки K чак ако троугао EBZ заменимо само са његовим тежиштем.

У случају троугла дуж KB спаја теме троугла B и средину странице ZE. Тежиште овог троугла налази се у тачки X која дели дуж EB на којој се налази у односу 2 према 1, тј. $\frac{KB}{KX} = \frac{3}{1}$.

Према томе, полуга ће остати у равнотежи чак ако троугао EBZ окачимо бестежинском нити у тачки која представља његово тежиште (слика 29.).



Слика 29. *Модел параболе окачене уз помоћ бестежинске нити*

Користећи закон полуге и чињеницу да су дужине полуга и тежине тела обрнуто пропорционалне величине, долазимо до закључка да је:

$$\frac{P_{EBM}}{P_{EBZ}} = \frac{KX}{GK} = \frac{1}{3}$$

Са претходних слика можемо извести закључак да је $P_{EBZ} = 4P_{EBM}$ из чега следи да је количник површине дела параболе ограничене тачкама E, B, M и троугла кога граде исте те тачке 4:3, тј. $\frac{P_{PEBM}}{P_{TEBM}} = \frac{4}{3}$.

Ово је био крајњи резултат који је Архимед остварио, комбинујући геометрију и закон полуге. То је изразио следећим речима: „Сваки сегмент параболе површински је $\frac{4}{3}$ троугла који има исту основу и једнаку висину.*”*

4.2 Значај одређивања квадратуре параболе

Главни аспекти квадратуре параболе су:

Архимед је у свом писму Ератостену спомињао да је ово „прва теорема из механике". Према томе није ни чудо што је он представља као прву теорему.

Геометријски доказ ове теореме је познат веома дуго. Овај доказ се налази у његовом раду *Квадратура параболе.* У њему се налази следећа реченица:

„... Поставио сам себи задатак да комуницирам са тобом као што сам намеравао да пошаљем Конону одређену геометријску теорему која није била истраживана пре, али коју сам сада истражио, и коју сам прво открио помоћу механике и изложио је помоћу геометрије."

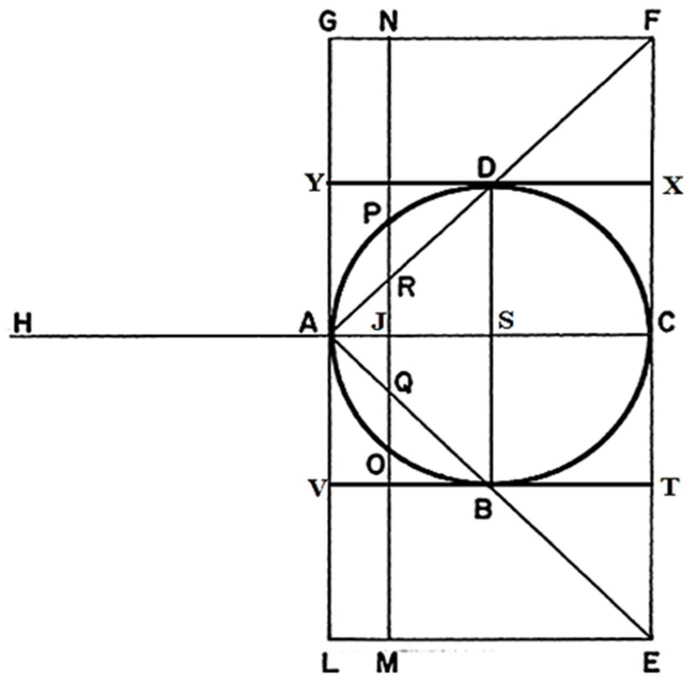
У цитату се излажу две важне ставке. Прва да је Архимед био први који је израчунао квадратуру параболе и да нико пре њега није објавио овај резултат нити приказао решење. Друга да је до резултата дошао помоћу механике. Након што је употребио механику, дошао је до геометријског доказа ове теореме. Са открићем Архимедовог записа овај механички метод је коначно објављен. Он је посебно разматрао полугу у равнотежи под дејством гравитационе силе на коју су обешени парабола и троугао на одређеним растојањима од тежишта. Када је познато тежиште троугла, онда законом полуге добијамо површину и параболе изражену преко површине троугла који има исту основу и једнаку висину. Сваки сегмент параболе површински је $\frac{4}{3}$ троугла који има исту основу и једнаку висину.

Аргумент је такође могао бити обрнут. У квадратури параболе Архимед је геометријски показао да било који део параболе површински представља $\frac{4}{3}$ површине троугла који има исту основицу и једнаку висину. Један од његових доказа овог резултата не садржи закон полуге, па је чисто геометријски и налази се у раду *О равнотежи у равни.*

У овом раду Архимед је добио квадратуру параболе у делу троугла који има исту основу и једнаку висину. Ово је веома важан закључак да би се израчунала површина дела фигуре оивичене кривом линијом унутар полигона. Сам Архимед је доказао сличан резултат везан за круг. Помоћу квадратуре параболе аналогно је добио површину фигуре оивичене закривљеном линијом унутар карактеристичног троугла.

4.3 Запремина сфере

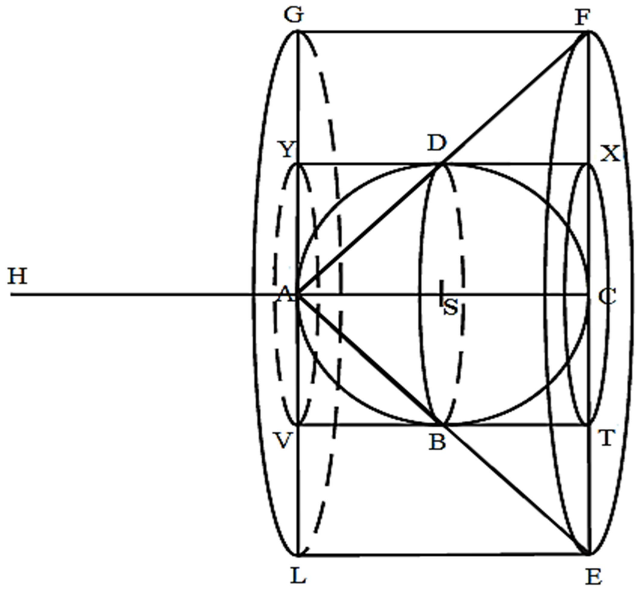
Архимедов метод односи се и на одређивање запремине сфере. У овој теореми Архимед је доказао да је запремина било које сфере четири пута већа од запремине купе која има базу једнаку великом кругу сфере и чија је висина једнака полупречнику те сфере, и да је запремина ваљка који има базу једнаку великом кругу сфере и висину једнаку пречнику сфере $\frac{3}{2}$ запремине те сфере.



Слика 30. *Пресек сфере, купе и ваљка*

На слици 30. $ABCD$ је велики круг сфере са центром S, и пречницима BD и AC који се секу под правим углом. Круг конструисан над пречником BD, који је у равни нормалан на дуж AC, представља основу купе коју ћемо означити са ABD и чији је врх у тачки А. Ако проширимо омотач купе и пресечемо га са равни која садржи тачку C и паралелна је са основом купе, део површи који се добија представљаће круг чији је пречник дуж EF.

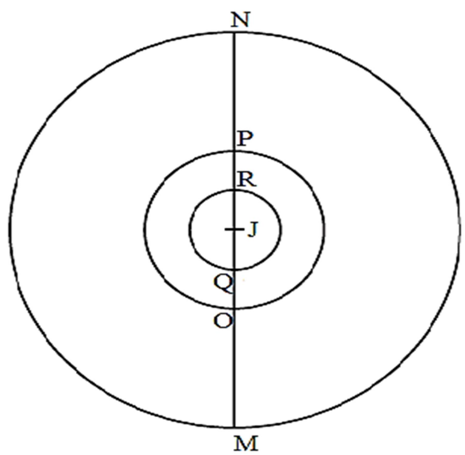
На тај начин добијамо велику купу AEF чији је врх у тачки А. Над кругом пречника EF конструисан је ваљак $GLEF$ чија висина припада оси AC, а над пречником XT мањи ваљак $YXTV$ чија висина припада оси AC. Продужићемо осу AC до тачке H тако да је $HA = AC$.



Слика 31. *Сфера, купе и ваљци из перспективе*

На горњој слици 31. је приказано пет тела: сфера $ABCD$, купе ABD и AEF, и ваљци $GLEF$ и $YXTV$.

Повлачимо дуж NM у равни круга $ABCD$ која је паралелна са BD. Нека дуж NM сече круг у тачкама O и P, пречник AC у тачки J, и дужи AF и AE редом у тачкама R и Q. Кроз дуж NM провлачимо раван нормалну на AC. Ова раван сече велики ваљак $GLEF$ дуж круга чији је пречник NM, сферу дуж круга пречника PO, и велику купу AEF дуж круга пречника RQ. Сви поменути кругови имају центар у тачки J (слика 32.).



Слика 32. *Пресек геометријских тела и равни повучене кроз дуж NM која је нормална на AC*

На основу ових слика Архимед је доказао $\frac{HA}{AJ} = \frac{NM*NM}{PO*PO+RQ*RQ}$.

Он је најпре увидео да су троуглови ΔOJA, ΔCOJ и ΔCOA слични. Сва три наведена троугла су правоугла, а $\sphericalangle AOC = 90°$ као угао над пречником AC. Како је $\sphericalangle CAO + \sphericalangle OCA = 90°$ имамо да је

$$\sphericalangle JOC = 90° - \sphericalangle OCA = \sphericalangle CAO$$
$$\sphericalangle AOJ = 90° - \sphericalangle CAO = \sphericalangle OCA.$$

Следи $\Delta OJA \sim \Delta COJ \sim \Delta COA$ па имамо $\frac{|AC|}{|AO|} = \frac{|AO|}{|AJ|}$.

Добијени однос дужина, једнакости $|MJ| = |AC|$ и $|QJ| = |AJ|$ и Питагорина теорема дају:

$$|MJ| * |JQ| = |AC| * |AJ| = |AO|^2 = |OJ|^2 + |JQ|^2 .$$

Како је $|HA| = |AC|$, следи

$$|HA|:|AJ| = |AC|:|AJ| = |MJ|:|JQ| =$$

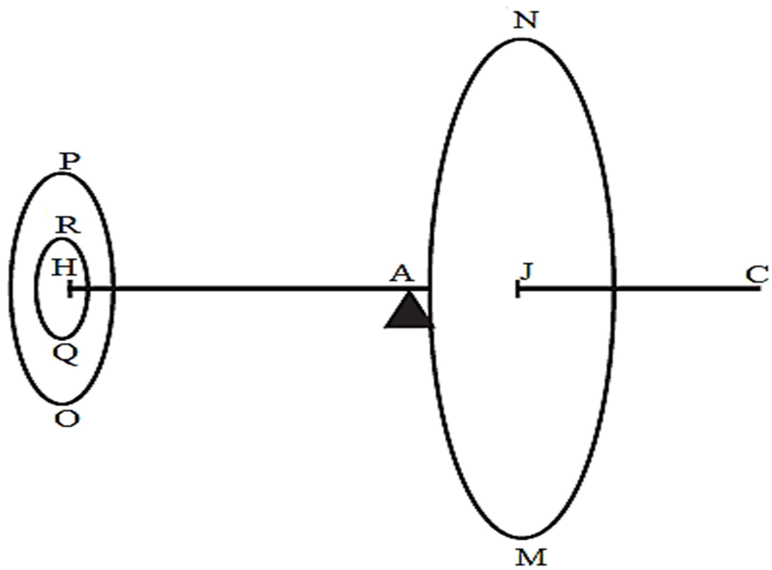
$$= \frac{|MJ|^2}{|MJ| * |JQ|} = \frac{|MJ|^2}{|OJ|^2 + |JQ|^2} = \frac{|MN|^2}{|OP|^2 + |RQ|^2}$$

односно: $|HA| * (|OP|^2 + |RQ|^2) = |AJ| * |MN|^2$.

Још од времена Еудокса и Еуклида познато је да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника. Према томе претходни Еуклидов закључак може бити написан и на следећи начин:

$$\frac{HA}{AJ} = \frac{P_{NM}}{P_{OP}+P_{QR}} .$$

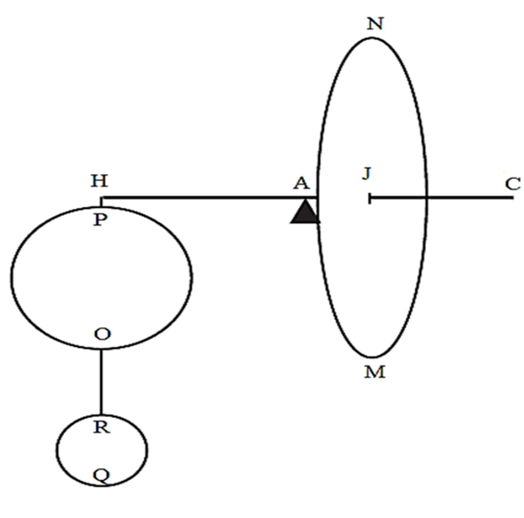
Архимед је размотрио кругове чији су пречници NM, OP и RQ попут тегова пропорционалних њиховим површинама (слика 33.). Нека HC представља полугу, а тачка A њено средиште. Комбинујући закон полуге и претходну једначину, закључујемо да ће полуга остати у равнотежи ако већи тог пречника NM остане тамо где јесте задржан својим центром гравитације тачком J, док су друга два тега чији су пречници OP и RQ померени на леви крај полуге задржани својим центром гравитације тачком H, као што је приказано на следећој слици.



Слика 33. *Кругови чији су пречници NM, OP и RQ попут тегова пропорционални њиховим површинама*

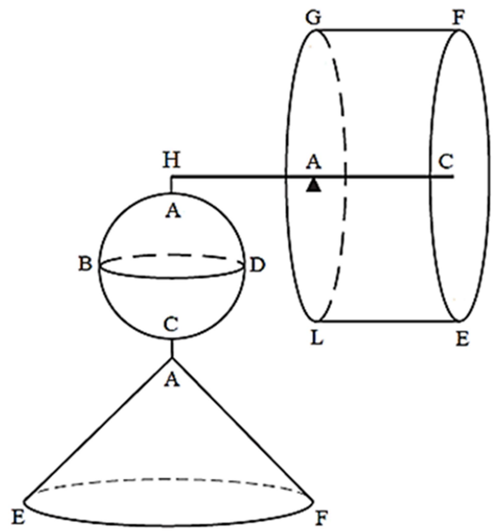
Стога, круг чији је пречник NM великог ваљка $GLEF$ чији је центар у тачки J је у равнотежи са кругом пречника OP сфере заједно са кругом пречника RQ велике купе AEF чији су центри у тачки H.

На слици 34. приказана је иста конфигурација равнотеже, али сада са два круга на левој страни који су повезана бестежинским жицама. И у том случају полуга остаје у равнотежи.
Слично је и са било која три кружна дела у равни настала повлачењем паралелне дужи са EF.



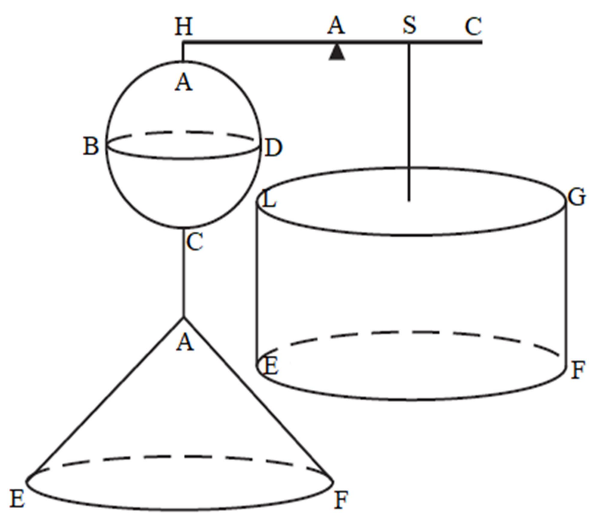
Слика 34. *Пример равнотеже са два круга на левој страни који су повезана безтежинским жицама*

Бавећи се на исти начин са свим скуповима од та три круга, где равни које су нормалне на дуж AC пресецају већи ваљак $GLEF$, сферу и већу купу AEF и који чине ове чврсте материје, произилази да ће велики ваљак бити у равнотежи у тачки A са сфером и великом купом када су обе постављене својим тежиштем у тачки H што је приказано на слици 35.



Слика 35. *Пример равнотеже сфере и велике купе окачене безтежинском нити на леви крај полуге и великог ваљка*

Као што је наведено у једној од лема овог метода, тачка S која је средиште дужи AC представља тежиште ваљка. Стога ваљак можемо окачити безтежинском нити и полуга ће и даље бити у равнотежи (слика 36.).



Слика 36. *Пример равнотеже сфере и велике купе окачене безтежинском нити на леви крај полуге и великог ваљка окаченог на десни крај полуге безтежинском нити*

Према закону полуге и равнотеже тела приказаних на слици можемо извести закључак
$\frac{V_{GLEF}}{V_{ABCD}+V_{AEF}} = \frac{HC}{AS} = \frac{2}{1}$.

Према десетој пропозицији Еуклидових елеманата важи да је запремина било које купе једнака једној трећини запремине ваљка који има исту основу и висину као и купа. Тако изводимо закључак да је запремина велике купе једнака трећини запремине великог ваљка. Упоређујући овај закључак и претходну једначину откривамо да је

$$2V_{ABCD} = V_{AEF} .$$

Како велика купа AEF има дупло већу висину него мала купа ABD и како њена основа има дупло већи полупречник, закључујемо да је $V_{AEF} = 8V_{ABD}$

Из претходне две једначине добијамо да је $V_{ABCD} = 4V_{ABD}$.

Архимед је овај закључак изразио на следећи начин: *Запремина било које сфере је четири пута већа од запремине купе чија је база једнака великом кругу сфере а висина полупречнику сфере.*

Он је наставио да доказује други део теореме показавши да је:
$V_{\ ABD} = \frac{1}{3}V_{YDBV} = \frac{1}{6}V_{YXTV}$ односно $V_{YXTV} = \frac{3}{2}V_{ABCD}$ и тиме довршио други део доказа теореме.

4.4 Значај одређивања запремине сфере

Главни аспекти одређивања запремине сфере су:

-Архимед је по први пут у историју успео да искаже запремину сфере у односу на њен полупречник. Данас је зависност тих величина исказана следећом формулом: $V_S = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

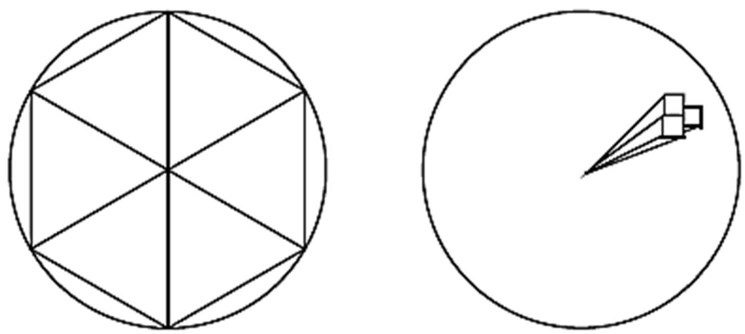
-Резултати везани за теорему били су познати само онима који су проучавали његова дела. Први пут се појављују у његовом раду *О лопти и ваљку* са геометријским доказом. Тек откривањем његових дела било је очигледно како је Архимед доказао овај резултат. У суштини он је користио пропорцију једнаку односу удаљености са односом површина, закон полуге и његов механички метод. Он је закључио да тела која су приказана на претходним сликама остају у равнотежи у односу на тачку A ако је $AS = \frac{HA}{2}$. Од Демокрита је познато да је запремина купе једнака трећини запремине одговарајућег ваљка таквог да су му база и висина исте као и код купе. Овај резултат први је ригорозно доказао Еукодс и налази се у Еуклидовим Елементима. Повезујући овај закључак са законом полуге и са конфигурацијом равнотеже приказаној на слици са ваљком, купом и сфером, Архимед је тада могао да повеже запремину сфере са запремином ваљка описаног око ње. Након што је механиком дошао до запремине сфере, успео је да пронађе и геометријски доказ који није зависио од закона полуге.

У данашње време мали број студената је свестан да је Архимед први израчунао површину сфере. Данас би та законитост била представљена формулом $P = 4r^2\pi$. У претходном поглављу видели смо како Архимед изражава површину сфере:
„Површина сфере је четири пута већа од површине њеног великог круга.”

-У свом раду *О лопти и ваљку* овај резултат се појављује као две теореме. Из тог разлога многи су сматрали да је он знао површину сфере, а да је касније из ње пронашао запремину сфере. Та претпоставка је каснијим открићем његових радова оповргнута. Данас знамо да је он први пронашао запремину сфере користећи закон полуге и да је добијањем тог резултата дошао до закључка да је површина сфере четири пута већа од површине њеног великог круга.

„Из те теореме, до ефекта да је сфера четири пута већа од купе која за базу има велики круг сфере и висину једнаку полупречнику сфере, дошао сам до записа да је површина било које сфере четири пута већа него њен велики круг, јер судећи по чињеници да је било који круг једнак троуглу који има основу једнаку обиму и висину једнаку полупречнику круга, схватио сам на исти начин, да је свака сфера једнака купи са базом једнакој површини сфере и висином која је једнака полупречнику."

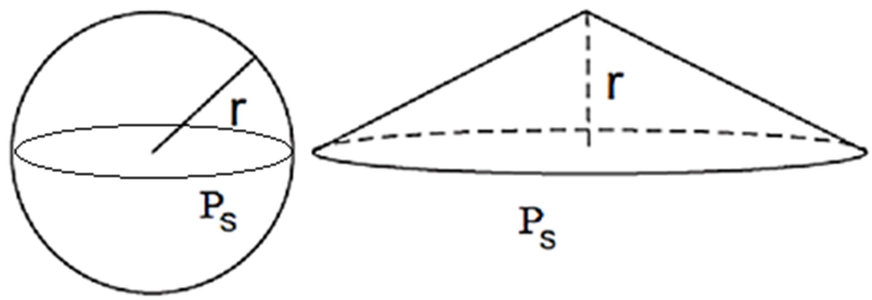
То се може илустровати следећом сликом на којој је приказан круг у који су уписани троуглови, и сфера у коју су уписане пирамиде (слика 37).



Слика 37. *Пример круга у који су уписани троуглови и сфере у коју су уписане пирамиде*

Када се основе уписаних троуглова у кругу смање, а њихов број се повећа, тада ће површина свих троуглова да се приближи површини круга. Ако имамо бесконачно много троуглова онда ће површина круга бити иста као и површина правоуглог троугла чија је једна катета обим круга а друга полупречник тог круга. Аналогно, ако смањујемо базе уписаних пирамида у сферу и њихов број ће се повећати, а запремина свих пирамида тежиће запремини сфере. У том случају запремина сфере биће једнака запремини купе чија је база једнака површини сфере, а висина једнака њеном полупречнику.

У другој теореми свог метода Архимед је успео да покаже да је запремина сфере четири пута већа од запремине купе чија је основа једнака великом кругу сфере, а висина једнака полупречнику сфере:
$V_S = 4V_K$ и $V_S = V_{VK}$ следи $V_{VK} = 4V_K$ (слика 38.)



Слика 38. *Сфера и купа истих запремина*

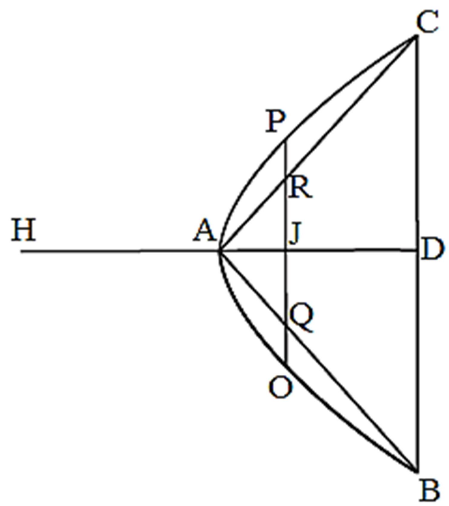
Слично, успео је да покаже да је површина сфере четири пута већа од површине његовог великог круга:
$P_S = 4P_{VK} = 4(r^2\pi)$.

-Теорема која повезује запремину сфере са описаним ваљком сматра се Архимедовим највећим делом. То се може закључити из чињенице да је тражио од своје родбине да му на надгробни споменик уклешу сферу уписану у ваљак заједно са натписом о односу ваљка и сфере.

Цицеро је пронашао његов гроб и забележио:
„Док сам истраживао Сицилију, успео сам да нађем његов гроб. Сиракужани нису ништа знали о томе и заиста су негирали да је постојало тако нешто. Али ту је био, потпуно сакривен испод мермера и сакривен грмом трња. Сетио сам се да сам чуо да су на њему исписани неки једноставни записи који су се односили на ваљак и сферу. И тако сам добро разгледао све гробнице које стоје поред Агригентинске капије. На крају сам приметио цртеж који је једва био приметан изнад грмља, то је био ваљак описан око сфере. Одмах сам рекао Сиракужанима да је то оно што сам тражио. Послали су људе да очисте пут до гроба и, када су то успели, упутили смо се право до њега. Натпис на споменику је и даље био видљив иако је скоро свака друга половина линије била исторшена.”

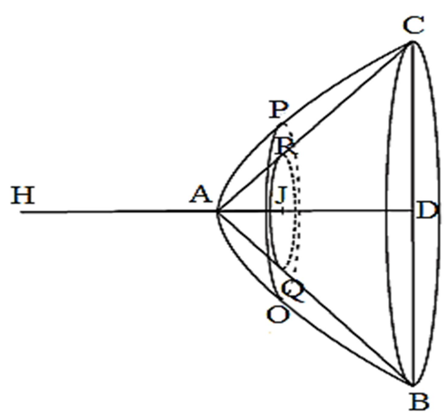
4.5 Одређивање тежишта параболоида

Теорема: Тежиште дела параболоида који се добија пресецањем равни која је нормална на његову осу симетрије налази се на оси симетрије и дели осу унутар параболоида на два дела таква да је растојање тежишта од темена параболоида дупло мање него растојање до равни која га пресеца.



Слика 39. *Пресек параболоида са равни која је нормална на његову осу симетрије*

Пресецимо параболоид са равни (слика 39. и 40.) тако да добијемо параболу ABC, затим продужимо осу параболе до тачке H тако да је $HA = AD$. Основу нека представља круг над пречником BC. На тај начин добијамо купу чија је основа управо овај круг, врх се налази у тачки A, а изводнице су јој дужи AB и AC. Нацртаћемо дуж PO такву да пресеца AB, AD и AC редом у тачкама Q, J, R. Ако дужње повучемо раван нормалну на осу AD онда ће пресек ње и параболоида бити круг пречника r.



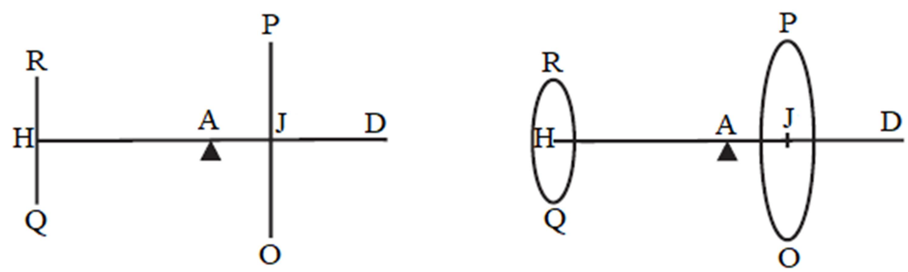
Слика 40.

Архимед је посматрајући параболу BAC која се добија у пресеку параболоида и равни увидео да, као и код доказа квадратуре параболе, важи $BD^2 : JO^2 = DA : AJ = HA : QJ = BD^2 : (BD * QJ)$.
Имамо да је $OJ^2 = BD * QJ$ $(BD : OJ = OJ : QJ)$ па је $BD : QJ = OJ^2 : QJ^2$.
Али како је $BD : QJ = AD : AJ = HA : AJ$ закључио је
$HA : AJ = OJ^2 : QJ^2 = OP^2 : QR^2$. Тиме је доказао да важи: $\frac{HA}{AJ} = \frac{JO*JO}{JQ*JQ}$.

Али знајући да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника, претходну формулу можемо записати и на следећи начин:

$$\frac{HA}{AJ} = \frac{P_{PO}}{P_{RQ}}.$$

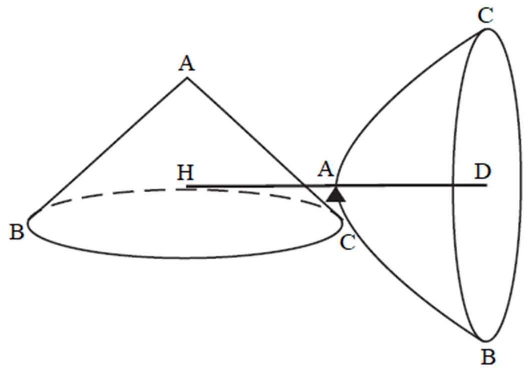
Ово је био веома важан закључак поред закона полуге који је послужио Архимеду у доказивању ове теореме.



Слика 41. *Равнотежа полуге примењена на круговима*

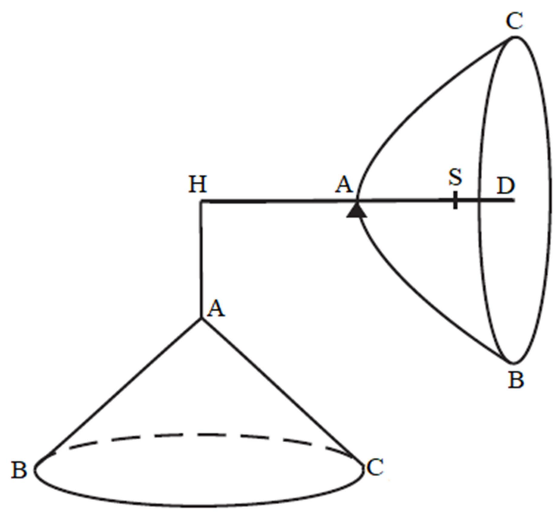
Замислимо да дуж HD представља полугу са ослонцем у тачки A која је и њено средиште (слика 41). Претпоставимо да су тегови равномерно распоређени у круговима, односно пропорционални њиховим тежинама. Круг у параболоиду са пречником PO са центром у тачки J остаје у равнотежи са кругом пречника RQ са центром у тачки H.

Слично је и са два одговарајућа кружна исечка која настају пресецањем параболоида са равни која је нормална на AD. Тада ће купа са тежиштем у тачки H бити у равнотежи са делом параболоида чије се теме налази у тачки А (слика 42.).



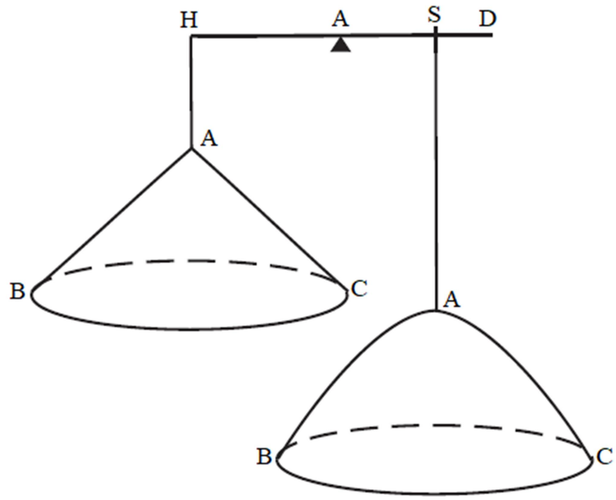
Слика 42.

На следећој слици је приказано да ће купа обешена бестежинском нити на леви крај полуге, са тежиштем испод тачке H, бити у равнотежи са делом параболоида чије је теме у тачки A (слика 43.).



Слика 43. *Пример купе обешене безтежинском нити*

Тежиште параболоида је дуж његове осе симетрије. Нека је S његово тежиште. Архимед је сам себи поставио задатак да пронађе однос између растојања AS и AD. Према шестом постулату *О равнотежи у равни* равнотежа тела неће бити нарушена ако параболоид делује само у тачки S. Односно ако би параболоид обесили бестежинском нити да на њега делује сила Земљине теже у тачки S, полуга би остала у равнотежи (слика 44.).



Слика 44.

Равнотежа би могла математички да се запише на следећи начин: $\frac{AS}{AH} = \frac{V_K}{V_P}$.

У својим радовима Архимед је показао да било који део параболоида који настане пресецањем са равни која је нормална на његову осу симетрије, представља $\frac{3}{2}$ запремине купе која има исту базу као и одсечак и исту висину као растојање темена параболоида од равни пресека $V_P = \frac{3}{2}V_K$.

Из претходне две једначине изводимо закључак да је

$$AS = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}AD$$

Али како је $AS + SD = AD$ па је $AS = 2SD$.

4.6 Значај одређивања тежишта параболида

Главни аспекти одређивања тежишта параболоида су:

-У првим теоремама Архимед је успео да повеже непознату површину параболе са познатом површином троугла, да одреди њено тежиште и примени закон полуге. Успео је на сличан начин да одреди запремину чврстог непознатог тела. Знао је запремину ваљка, купе, закон полуге и да одреди однос растојања AS и AH. Онда је успео да одреди запремину сфере преко ваљка описаног око ње и купе уписане у њу.

-У последњој теореми, по први пут користећи своју методу за одређивање тежишта, успева да одреди тежиште параболоида. У овом случају знао је да одреди однос запремина купе и дела параболоида, али није знао да одреди однос растојања AS и AH. За одређивање овог односа користио се законом полуге.

-У свом делу *О пловећим телима* Архимед је одредио тачно тежиште параболоида. Истражио је различите положаје равнотеже у којима параболоид може да плута у води. Тек са открићем његовог метода ова чињеница постаје позната.

5. Закључак

Кроз историју видели смо да су сви познати математичари старог века имали способност да са слабо развијеном алгебром и математичким језиком докажу мноштво данас јако битних тврдњи и теорема. Архимед из Сиракузе био је један од математичара који је оставио велики утисак чак и на данашње савременике. Он је своје способности показао у математици, физици, астрономији па чак и у изградњи многих справа приликом одбране свог града. Због своје свестраности Архимеда сматрамо једним од најзначајнијих научника.

У овом раду направљен је осврт на највећа Архимедова достигнућа повезана са физиком. Посебан акценат стављен је на примену закона полуге у одређивању површине и запремине тела. Приказано је коришћење механичког приступа у доказивању математичких тврдњи и поступак којим је Архимед на занимљив начин успео да повеже математички свет са стварним.

Литература

1. Ђорђевић Исидора, Мастер рад – *Конструкција знања о пливању и тоњењу тела приликом експеримената и мултимедија*, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет департман за физику, 2018.год.
2. Златановић М., Станковић В., *Елементарна геометрија*, Природно математички факултет, Ниш, 2017.год.
3. Икодиновић Небојша, *„Како одржавати равнотежу у образовању?”,* Математички факултет, Београд – сајт (https://dms.rs/wp-content/uploads/2020/02/Tema-21.pdf)
4. Ковачевић Марија, Дипломски рад – *Велики примијењени математичар у Старој Грчкој,* Осијек, 2012.год.
5. Мезеи Ивана, Мастер рад – *Полуга и момент силе*, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет департман за физику, 2012.год.
6. Радојчић Милош, *Општа математика - Математике Египта, Месопотамије и Старе Грчке,* Научна књига, 1950. год. – сајт (http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zlucic/opstamat.pdf
7. Станковић М., *Основи геометрије*, Природно математички факултет, Ниш, 2006.год.
8. Хогбен Ланселот, *Стварање математике*, Вук Караџић, Београд 1972.год.

Линкови

1. http://fizika-hemija-matematika.blogspot.com/2017/04/zakon-poluge.html
2. http://physics.weber.edu/carroll/archimedes/method1.htm (Архимедово откиће запремине сфере)
3. http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2012-02
4. https://hr.wikipedia.org/wiki/Arhimed
5. https://svejefizika.wordpress.com/video-7/poluga/
6. https://www.britannica.com/biography/Archimedes
7. https://www.ifi.unicamp.br/~assis/The-Illustrated-Method-of-Archimedes.pdf