UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Aleksandra Stamenković

PROBLEM BRAHISTOHRONE

master rad

Beograd, 2020.

Mentor:

dr Tijana Šukilović, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

prof. dr Srđan Vukmirović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Ivan Dimitrijević, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: 30. 09. 2020.

Želim da se zahvalim svojoj mentorki dr Tijani Šukilović na ukazanom strpljenju i poverenju, kao i svim sugestijama i predlozima tokom izrade ovog rada

Naslov master rada: Problem brahistohrone

Rezime: Problem brahistohrone predstavlja jedan od najinteresantnijih problema u istoriji fizike. Priloge rešavanju tog problema, svako na svoj način, dali su Galilej, Njutn, Lajbnic, Lopital i Bernuli. Potrebno je odrediti putanju kretanja tela u gravitacionom polju od početne do krajnje tačke tako da vreme kretanja bude najmanje moguće. Idealna putanja je mehanička kriva brahistohrona (iz antičkog grčkog $\beta\rho\alpha\chi\iota\tau$ος $\chi\rho$όνος, što znači „najkraće vreme").

U radu će biti dat istorijski osvrt na problem brahistohrone. Biće analizirani različiti pristupi rešavanju ovog problema. Ideja je da se učenicima srednjoškolskog uzrasta prikaže kako se do rešenja može doći korišćenjem različitih matematičkih pristupa: geometrijskog, mehaničkog i analitičkog. Svaki pristup će biti dodatno ilustrovan odgovarajućim zadacima i primerima koji za cilj imaju da prikažu vezu između teorijske interpretacije, matematičkog rešavanja zadataka i primene fizičkih pojmova i zakona u svakodnevnom životu.

Ključne reči: kretanje, najkraće vreme, Galileo, Bernuli, kriva

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Problem brahistohrone prvi je formulisao Johan Bernuli[1] u delu *Acta Eruditorum*[2] juna 1696. godine. On je postavio izazov matematičarima tog doba da reše sledeći zadatak: ako su date tačke A i B u vertikalnoj ravni, odrediti putanju AMB tela M koje se kreće samo pod uticajem gravitacione sile, kako bi ono od tačke A do tačke B stiglo za najkraće moguće vreme. Otuda potiče i naziv krive, od grčkih reči *brachistos*, koja znači najkraće, i *chronos*, koja znači vreme. Bernuli je nakon toga i dodao da putanja koja se traži nije prava linija i da će objaviti svoj zaključak do kraja godine, ukoliko niko još od matematičara ne dođe do rešenja. Neki od istoričara smatraju da je izazov zapravo bio direktno upućen Njutnu.

Kako je do kraja godine pribavljeno samo Lajbnicovo rešenje, sam Lajbnic[3] ubeđuje Bernulija da produži rok do isteka izazova, kako bi se matematičari širom sveta uključili i pokušali da reše problem. Ovo se posebno odnosilo na Isaka Njutna[4], sa kojim je Lajbnic tada bio u sukobu oko pripisivanja zasluga za otkriće infinitezimalnog računa. Lajbnic je smatrao da Njutn nije dorastao zadatku, te je video priliku da javno pokaže svoju superiornost i ubedi naučni svet toga doba da nije plagirao Njutnov rad na polju analize.

Na kraju je prikupljeno pet rešenja, uključujući i Bernulijevo. Naime, izazov su

[1] Johann Bernoulli (1667-1748) - švajcarski matematičar, brat Jakoba Bernulija i otac Danijela i Nikolausa II Bernulija. Obrazovao i Leonarda Ojlera u svojoj mladosti

[2] Acta Eruditorum - prvi časopis sa naučnim sadržajem za nemačko govorno područje, štampan u periodu od 1682. do 1782. godine

[3] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646-1716) - bio je nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, istoričar, diplomata i politički savetnik lužičkosrpskog porekla. Smatra se poslednjim čovekom enciklopedijskog znanja zapadne civilizacije

[4] Isaac Newton (1643-1727) - bio je engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof prirode, koji je danas za većinu ljudi jedna od najvećih ličnosti u istoriji nauke

Slika 1.1: Tri slavna matematičara, sa leve na desnu stranu: Gotfrid Vilhelm Lajbnic, Gijom de Lopital i Isak Njutn

prihvatili Njutn, Jakob Bernuli[5], Johanov stariji brat, Lajbnic i Lopital[6]. Njutn je svoj rad prvobitno objavio u *Philosophical Transactions*[7] anonimno, a nakon toga ga je poslao Bernuliju, takođe bez potpisa. No, Bernuli je prepoznao rad slavnog naučnika, dok je Lajbnic ostao u zabludi da Njutn nije uspeo da reši problem, ali samo zato što mu se nije posvetio. Anegdota takođe kaže da je Njutn sam izazov shvatio kao uvredu, ali da je ipak rešio zadatak, i to za samo jedno veče po povrtaku sa zabave.

Sva rešenja, osim Lopitalovog, objavljena su maja 1697. godine u *Acta Eruditorum*. Lopitalovo rešenje objavljeno je tek 1988. godine, skoro 300 godina kasnije.

U ovom radu daćemo istorijski razvoj problema brahistohrone i načina na koji je on rešen, kao i sam uticaj i značaj ovog pitanja na polju matematike i fizike. Naime, iako je sam problem formulisao i postavio Johan Bernuli 1696. godine, Galileo Galilej[8] se ovim pitanjem bavio još i ranije i došao do određenih rezultata.

U prvom poglavlju krenućemo od najočiglednijeg pristupa za otkrivanje tražene najkraće putanje, odnosno razmatraćemo pravolinijsku putanju koja direktno spaja početnu i krajnju tačku kretanja tela. Problem ćemo praktično svesti na izučavanje

[5]Jakob Bernoulli (1654-1705) - švajcarski matematičar, najpoznatiji po svom radu na polju teorije verovatnoće

[6]Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704) - francuski matematičar koji je izučavao infinitezimalnu analizu i objavio knjigu o diferencijalnom računu; učenik Johana Bernulija

[7]Philosophical Transactions - naučni časopis objavljen od strane Kraljevskog društva, osnovan 1665. godine

[8]Galileo Galilei (1564-1642) - italijanski astronom, fizičar, matematičar i filizof, čija su istraživanja postavila temelje modernoj mehanici i fizici

Slika 1.2: Levo Johan Bernuli, desno Jakob Bernuli

kretanja tela po strmoj ravni. Kroz nekoliko praktičnih primera razmotrićemo ovo kretanje i ispitivati potrebno vreme za prelazak ovog puta.

Drugo poglavlje biće posvećeno Galileovom pristupu ovom problemu. Naime, on je posmatrao kružnicu na kojoj su se nalazile početna i krajnja tačka, a zatim ispitivao kretanje tela duž različitih tetiva te kružnice. Došao je do zaključka da ukoliko posmatramo četvrtinu kruga, gde su početna tačka A i krajnja tačka B kretanja zapravo početak i kraj odgovarajućeg luka, telo se duže kreće duž tetive AB nego duž sistema od dve tetive AC i CB, gde je C proizvoljna tačka luka AB. On zaključuje da se sa povećanjem broja tetiva koje čine sistem zapravo približavamo luku kružnice, te da se zapravo najbrže kretanje odvija duž samog luka. Značaj Galileovog rada ogleda se u tome što je on prepoznao da najkraća putanja mora biti kriva, ali je pogrešno pretpostavio da je to četvrtina kruga. Osim geometrijskog pristupa kojim se vodio i sam Galilej, ovaj problem rešićemo i analitički.

U trećem poglavlju predstavićemo dva načina na koji su najkraću putanju otkrili Johan Bernuli, tvorac samog izazova, i Isak Njutn. Lepota Bernulijevog rešenja, pored jednostavnosti i elegancije, jeste u tome što ono predstavlja spoj matematike i fizike i analogije koja postoji između ove dve nauke. Sa druge strane, Njutn je u svom rešenju koristio neke već poznate osobine cikloide, jer mu je bilo jasno da tražena putanja mora biti tog oblika.

Glava 2

Problem strme ravni

U ovom poglavlju razmatraćemo pravolinijsko rešenje problema, odnosno ispitivaćemo vreme kretanja duž putanje koja direktno spaja početnu i krajnju tačku kretanja tela. Razmatraćemo dve situacije: prvu kada su tačke A i B na istoj vertikali, odnosno kada razmatramo slobodan pad, i drugu kada tačke nisu na istoj vertikali, gde zapravo govorimo o kretanju tela na strmoj ravni.

2.1 Slobodan pad

Pre nego što započnemo priču o slobodnom padu, podsetićemo se osnovnih formula koje se odnose na ravnomerno i ravnomerno promenljivo kretanje, a koje su nam potrebne kako bismo opisali slobodan pad.

Definicija 1. *Telo se kreće ravnomerno ako po pravoj putanji prelazi jednake puteve u jednakim vremenskim intervalima.*

Brzina je vektorska veličina. Njen intenzitet kod ravnomernog kretanja izračunavamo tako što pređeni put podelimo sa vremenom kretanja tela, odnosno

$$v = \frac{S}{t} \ .$$

Brzina je brojno jednaka pređenom putu u jedinici vremena i srazmerna je pređenom putu, a obrnuto srazmerna vremenu kretanja. Jedinica za brzinu jeste $[\frac{m}{s}]$. Na osnovu prethodne formule, vidimo da pređeni put predstavlja proizvod brzine kretanja tela i ukupnog vremena kretanja tela

$$S = vt \ ,$$

a da ukupno vreme kretanja tela predstavlja količnik pređenog puta i brzine kretanja tela

$$t = \frac{S}{v} \ .$$

Definicija 2. *Telo se kreće promenljivo ako u jednakim vremenskim intervalima prelazi različite puteve. Ravnomerno promenljivo kretanje je promenljivo kretanje kod koga se brzina ravnomerno menja. Ukoliko se brzina ravnomerno povećava govorimo o ravnomerno ubrzanom kretanju, a ukoliko se brzina ravnomerno smanjuje o ravnomerno usporenom kretanju.*

Kod ravnomerno promenljivog kretanja javlja se pojam ubrzanja, vektorske fizičke veličine, koje predstavlja promenu brzine u jedinici vremena. Intenzitet ubrzanja računamo po formuli

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \ ,$$

gde je v_2 brzina tela u trenutku t_2, a v_1 brzina tela u trenutku t_1. Ukoliko početnom trenutku merenja vremena t_1 ($t_1 = 0$) odgovara početna brzina v_0 ($v_1 = v_0$), a merenje se završava u trenutku t ($t_2 = t$) kada je brzina kretanja v ($v_2 = v$), na osnovu prethodne formule imamo da je

$$\Delta v = a\Delta t \ ,$$

$$v - v_0 = at \ ,$$

$$v = v_0 + at \ ,$$

čime smo dobili trenutnu brzinu ravnomerno ubrzanog kretanja sa početnom brzinom. Kada telo kreće iz stanja mirovanja početna brzina jednaka je nuli pa trenutnu brzinu tela bez početne brzine računamo po formuli

$$v = at \ .$$

Kod ravnomerno usporenog kretanja brzina i ubrzanje imaju suprotan smer, te trenutnu brzinu kod ravnomerno usporenog kretanja računamo po formuli

$$v = v_0 - at \ .$$

Definicija 3. *Srednja brzina predstavlja količnik ukupnog pređenog puta i ukupnog vremena kretanja. Kod ravnomerno promenljivog pravolinijskog kretanja brzina se menja ravnomerno, pa srednju brzinu možemo izračunati po formuli*

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2} \ .$$

Kada u prethodnu formulu zamenimo formulu za trenutnu brzinu $v = v_0 + at$ imamo

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = \frac{2v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2} \ .$$

Pređeni put jednak je proizvodu srednje brzine i proteklog vremena, pa pređeni put kod ravnomerno ubrzanog kretanja sa početnom brzinom računamo po formuli

$$S = v_{sr}t = (v_0 + \frac{at}{2})t = v_0 t + \frac{at^2}{2} \ .$$

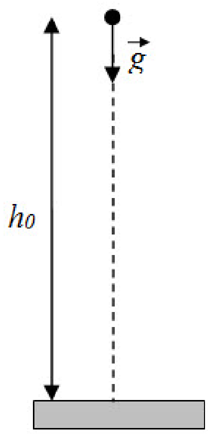
Pređeni put kod ravnomerno ubrzanog kretanja bez početne brzine ($v_0 = 0$) računamo po formuli

$$S = \frac{at^2}{2}$$

dok kod ravnomerno usporenog kretanja sa početnom brzinom

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2} \ .$$

Definicija 4. *Slobodan pad je ravnomerno ubrzano pravolinijsko kretanje bez početne brzine, u bezvazdušnom prostoru, a usled delovanja sile Zemljine teže.*



Slika 2.1: Ilustracija slobodnog pada

U bezvazdušnom prostoru (vakuumu) sva tela padaju sa jednakim ubrzanjem bez obzira na njihovu težinu i veličinu. Preciznijim merenjima utvrđeno je da ubrzanje Zemljine teže na geografskoj širini 45° i na nivou mora iznosi $g = 9,81\frac{m}{s^2}$. Kako ovde govorimo o ravnomerno ubrzanom kretanju, trenutnu brzinu tela nakon vremena kretanja t dobijamo primenom formule

$$v = gt \ ,$$

dok pređeni put nakon perioda t, imajući u vidu da je ovo ketanje bez početne brzine, računamo pomoću formule

$$S = \frac{gt^2}{2} \ .$$

Poslednju jednačinu možemo zapisati i u obliku

$$2S = gt^2 = \frac{v^2}{g}$$

odakle dobijamo vezu između brzine kretanja i pređenog puta nakon perioda t

$$v^2 = 2Sg \ .$$

Sa h_0 označavamo visinu sa koje telo započinje slobodan pad, odnosno maksimalnu visinu, dok trenutnu visinu na kojoj se telo nalazi nakon vremena kretanja t dobijamo na sledeći način

$$h = h_0 - \frac{gt^2}{2} \ .$$

2.2 Kretanje tela niz strmu ravan

Pod strmom ravni podrazumevamo ravan nagnutu pod oštrim uglom u odnosu na horizontalnu ravan. Od vremena renesanse strma ravan se, zajedno sa polugom, točkom i osovinom, koturačom i čekrkom, klinom i vijkom, ubraja u jednostavne mašine koje su omogućavale čoveku da obavi radove koji su zahtevali snagu koja je bila veća od njegove. Glavna uloga strme ravni bila je ušteda sile prilikom podizanja nekog tereta. To je posledica svojstva jednostavnih mašina koje se naziva mehanička prednost, a koje omogućava da se rad potreban za izvršenje neke akcije izvrši manjom silom. Mehanička prednost je zapravo količnik veće sile (koje bi bila potrebna bez upotrebe mašine) i manje sile (koja je dovoljna kada se koristi mašina).

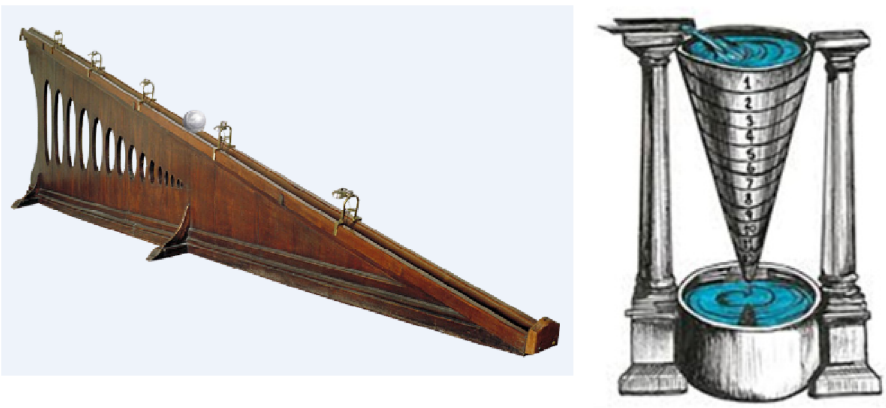
Princip strme ravni koristili su Grci i Rimljani, mada je on poznat još od praistorije. Veruje se da su kameni blokovi korišćeni za izgradnju Stounhendža[1] prenošeni pomoću rampi koje su predstavljale neki vid strme ravni, mada dokazi o njihovom postojanju nisu nikada pronađeni. Izgradnja egipatskih piramida takođe je olakšana zahvaljujući strmoj ravni. Danas se strma ravan koristi u raznim simulacijama, jer se njome opisuje klizanje, pod uticajem gravitacije, po raznim krivama. Naime, u

[1]Stonehenge - poznata građevina iz doba neolita i bronzanog doba i jedna od najpoznatijih znamenitosti Ujedinjenog Kraljevstva

računarstvu se krive uglavnom aproksimiraju poligonskim linijama, koje zapravo predstavljaju niz strmih ravni.

Ono što je zanimljivo jeste da, iako je koncept strme ravni poznat od davnina, matematički pokušaji da se ona reši i objasni bili su bezuspešni od strane antičkih matematičara. Tek za vreme renesanse, krajem 16. veka i u razmaku od desetak godina, matematička objašnjenja principa strme ravni stigla su od strane tri naučnika. Poslednji od njih bio je Galileo Galilej.

Galilej se tokom svog istraživanja naročito usmerio na proučavanje kretanja. Sprovodio je mnoge eksperimente, ali je takođe logički analizirao veze između udaljenosti, vremena i brzine. Naročito je poznat njegov eksperiment sa strmom ravni koji je izveo 1603. godine. Naime, Galilea je vrlo interesovao slobodan pad. Problem je bio kako meriti vreme u tom slučaju, s obzirom na to da se kretanje obavlja jako brzo, a preciznih instrumenata za merenje vremena tada nije bilo. Zato je došao na ideju da „uspori" kretanje, odnosno da posmatra i analizira kretanje niz strmu ravan, jer se vodio idejom da isti principi važe i kod slobodnog pada.



Slika 2.2: Galileova postavka eksperimenta (levo) i vodeni časovnik (desno)

Eksperiment je vršio pomoću veoma uglačane daske, u kojoj je izbušen kanal, niz koji se kotrljala bronzana kuglica. Dužina puta koji kuglica treba da pređe bila je unapred poznata. Daska je sa jedne strane podignuta u odnosu na horizontalnu podlogu, čime je postignut efekat strme ravni. Vreme kretanja kuglice merio je vodenim časovnikom[2].

[2]Vodeni časovnik ili klepsidra je naprava za merenje vremena uz pomoć protoka vode iz posude, obično kroz uzani otvor. Bio je u širokoj upotrebi sve do otkrića satova sa klatnom u 17. veku.

Nakon mnogo pokušaja i merenja, analizirajući podatke koje je prikupio, Galileo je uočio sledeće: vreme za koje kuglica pređe čitav put dvostruko je veće od vremena koje je potrebno kuglici da pređe četvrtinu tog puta. Odnosno, ako udvostručimo vreme kotrljanja kuglice, ona će preći četiri puta veće rastojanje od prvobitnog. Galileo je zaključio da ako telo krene iz stanja mirovanja i kreće se ravnomerno ubrzano (što je slučaj i za slobodan pad i za kretanje niz strmu ravan) onda je ukupan pređeni put, s, proporcionalan kvadratu vremena potrebnom telu da pređe taj put, odnosno

$$s \sim t^2 \ .$$

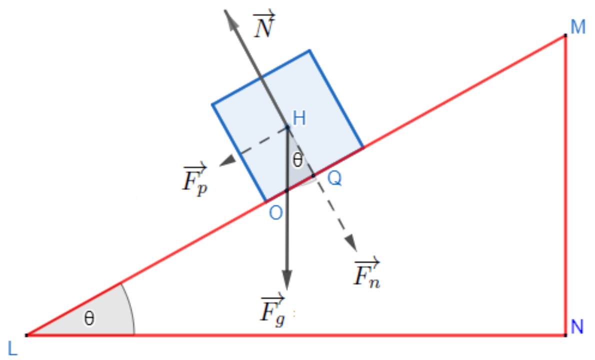
Koeficijent proporcije jednak je tačno polovini intenziteta ubrzanja a. Intenzitet ubrzanja kuglice niz strmu ravan a povezan je sa intenzitetom gravitacionog ubrzanja g na sledeći način

$$a = \frac{gh}{l} \ ,$$

gde su h i l visina i dužina strme ravni. Jednačina

$$s = \frac{gh}{2l}t^2$$

omogućila je Galileu da eksperimentalno izračuna vrednost gravitacionog ubrzanja g.



Slika 2.3: Telo na strmoj ravni i sile koje na njega deluju

Posmatrajmo sada kretanje tela niz strmu ravan sa stanovišta sila koje pritom deluju na telo, što je tipičan srednjoškolski pristup ovoj temi. Treba napomenuti da se i u ovom slučaju, kao i kod Galileja, zanemaruje uticaj sile trenja i otpora sredine. Posmatrajmo Sliku 2.3. Ugao nagiba strme ravni označili smo sa θ. Znamo da na telo deluju dve sile, gravitaciona sila, označena sa $\overrightarrow{F_g}$, i sila reakcije podloge, označena sa $\overrightarrow{N}$. Gravitacionu silu rastavljamo na dve komponente, paralelnu $\overrightarrow{F_p}$ koja je u smeru mogućeg kretanja tela i normalnu $\overrightarrow{F_n}$ koja je verikalna na smer kretanja tela.

Objasnićemo prvo zašto je ugao $\angle OHQ$ jednak nagibnom uglu strme ravni. Kako je trougao LNM pravougli, to je ugao $\angle NML = \pi/2 - \theta$. Visina strme ravni NM paralelna je pravcu delovanja gravitacione sile, te je dužina stme ravni LM transverzala koja seče ove dve prave. Otuda su uglovi $\angle NML$ i $\angle HOQ$ jednaki i iznose $\pi/2 - \theta$. Kako je i trougao HOQ pravougli, sledi da je ugao $\angle OHQ = \theta$.

Sada je vrlo jednostavno izraziti intenzitete gravitacione sile i njenih komponenti sa

$$F_g = mg \ , \ F_p = mg \sin\theta \text{ i } F_n = mg\cos\theta \ .$$

Sila reakcije podloge ima isti pravac i intenzitet kao gravitaciona sila, samo suprotan smer. Na osnovu drugog Njutnovog zakona znamo da se svako telo kreće pod dejstvom sile intenziteta ma, gde je a intenzitet ubrzanja, a m masa tog tela. Kako je u našem slučaju jedina sila koja na telo deluje u pravcu kretanja $\overrightarrow{F_p}$ vidimo da važi

$$mg\sin\theta = ma$$

odnosno $a = g\sin\theta$. Brzinu tela niz strmu ravan računamo pomoću formule za trenutnu brzinu kod ravnomerno promenljivog kretanja

$$v = at = gt\sin\theta \tag{2.1}$$

kao i pređeni put nakon vremena kretanja t

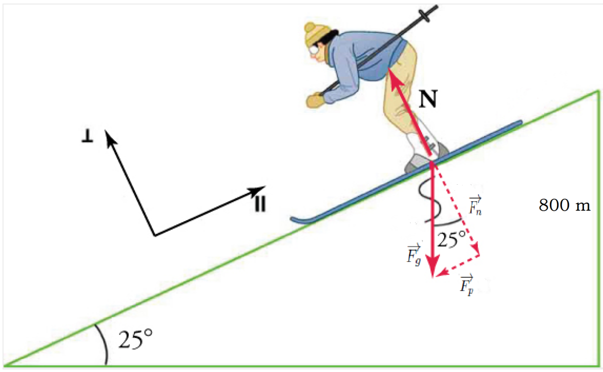
$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{g\sin\theta t^2}{2} \ . \tag{2.2}$$

2.3 Zadaci

U nastavku ćemo kroz nekoliko primera ilustrovati kretanje tela niz strmu ravan.

Primer 1. *Skijaš započinje spust niz stazu sa visine od* 250 *metara i čiji je nagib* 25°. *Za koliko vremena stiže do podnožja staze, ako kreće iz stanja mirovanja? Kolika je brzina skijaša kada završi za spustom?*

Rešenje. Zapisaćemo prvo podatke koje znamo iz samog zadatka, a to su: visina sa koje skijaš započinje spust je $h = 250$ m , a nagib staze je pod uglom $\theta = 25°$. U zadatku treba da odredimo za koje vreme skijaš stiže do podnožja staze, ako mu je početna brzina $v_0 = 0$, kao i koju brzinu ima u tom trenutku.



Slika 2.4: Ilustracija za Primer 1

Prvi korak jeste da izračunamo kolika je dužina staze koju skijaš prelazi, odnosno pređeni put S. Na osnovu Slike 2.3 vidimo da je $\frac{h}{S} = \sin\theta$, pa je otuda pređeni put

$$S = \frac{h}{\sin 25^\circ} = \frac{250}{0,42}\mathrm{m} \approx 595,24\mathrm{m} \ .$$

Na osnovu formule 2.2 možemo odgovoriti na prvo pitanje i naći traženo vreme kretanja, jer je

$$t^2 = \frac{2S}{g\sin\theta} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{g\sin\theta}} \ .$$

Zamenom svih podataka u prethodnu jednačinu dobijamo

$$t = \sqrt{\frac{2\cdot 595,24\ \mathrm{m}}{9,81\cdot\sin 25^\circ\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{\frac{1190,48\ \mathrm{m}}{9,81\cdot 0,42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{\frac{1190,48\ \mathrm{m}}{4,12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{288,95\ \mathrm{s}^2} \approx 17\mathrm{s} \ .$$

Sada kada znamo koliko je vremena skijašu potrebno da bi se spustio niz stazu, možemo na osnovu formule 2.1 izračunati koliku je brzinu imao kada je stigao do podnožja staze

$$v = gt\sin\theta = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 17\mathrm{s}\cdot\sin 25^\circ = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 17\cdot 0,42 \approx 70,04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ .$$

Primer 2. *Ana i Nikola nalaze se u zabavnom parku i diskutuju koji tobogan izabrati kako bi vožnja trajala što duže. Nikola se odlučuje za prvi tobogan, koji je na visini* $50m$ *i čiji je nagibni ugao* 45°*, dok se Ana odlučuje za drugi tobogan, čija je visina* $60m$ *i nagibni ugao* 60°*. Kolike su puteve prešli i ko se od njih dvoje duže vozio?*

Rešenje. Posmatrajmo prvo kretanje Nikole. Visina njegovog tobogana je $h = 50\mathrm{m}$, a nagibni ugao $\alpha = 45^\circ$. Kako znamo da važi $\frac{h}{S} = \sin\alpha$, pređeni put možemo

Slika 2.5: Ilustracija za Primer 2

izračunati na sledeći način

$$S = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \frac{50\mathrm{m}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{100\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}\mathrm{m} \approx 70,71\mathrm{m}\ .$$

Kako pređeni put kod ravnomerno ubrzanog kretanja računamo po formuli $S = \frac{g\sin\alpha t^2}{2}$, kada odatle izrazimo vreme kretanja i zamenimo podatke imamo

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50\sqrt{2}\mathrm{m}}{9,81\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{\frac{200\mathrm{m}}{9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{20,39\mathrm{s}^2} \approx 4,52\mathrm{s}\ .$$

Visina Aninog tobogana je $h = 60$m, a nagibni ugao $\beta = 60^\circ$. Na isti način možemo naći njen pređeni put i vreme kretanja kao u Nikolinom slučaju, pa imamo

$$S = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{60\mathrm{m}}{\sin 60^\circ} = \frac{60\mathrm{m}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{120\mathrm{m}}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}\mathrm{m} \approx 69,28\mathrm{m}\ ,$$

dok je njeno vreme kretanja

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g\sin\beta}} = \sqrt{\frac{2\cdot 40\sqrt{3}\mathrm{m}}{9,81\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{\frac{160\mathrm{m}}{9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{16,31\mathrm{s}^2} \approx 4,04\mathrm{s}\ .$$

Kako je $4,52 > 4,04$, možemo primetiti da je u ovom slučaju Nikola bio u pravu i izabrao tobogan niz koji će se duže spuštati, kao i da je prešao duži put od Ane.

Primer 3. *Sava se igra loptom ispred dvorišta, koje se nalazi u ulici čija je dužina* $300m$ *i nagib ulice* $\alpha = 15^\circ$. *Nezgodno je šutnuo loptu, koja se odbija o obližnje drvo i počinje da se kotrlja niz ulicu, početnom brzinom* $3\frac{m}{s}$. *Sava počinje da trči za loptom, krećući se ravnomerno ubrzano, iz stanja mirovanja. Loptu na kraju ulice zaustavlja Savin drug. Nakon koliko vremena je Sava stigao da preuzme loptu?*

Rešenje. Označimo vreme kretanja Save sa t_1, a vreme kretanja lopte sa t_2. Kako je Sava trčao ravnomerno ubrzano, a dužina ulice je $S = 300\text{m}$ i nagib $\alpha = 15°$, njegovo vreme možemo izračunati pomoću formule $t_1 = \sqrt{\frac{2S}{g \sin\alpha}}$. Zamenom podataka dobijamo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 300\text{m}}{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 15°}} = \sqrt{\frac{600\text{m}}{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,26}} = \sqrt{\frac{600\text{m}}{2,56\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{234,38\text{s}^2} \approx 15,31\text{s} \ .$$

Da bismo odredili vreme kretanja lopte, prvo ćemo naći visinu sa koje je ona započela kretanje. Kako je dužina ulice $S = 300\text{m}$, a nagib $\alpha = 15°$, tražena visina biće određena sa $h = S \cdot \sin\alpha$. Zamenom podataka dobijamo

$$h = 300\text{m} \cdot \sin 15° = 300\text{m} \cdot 0,26 = 78\text{m} \ .$$

Sada kada znamo visinu ulice, možemo izračunati krajnju brzinu koju je lopta imala u trenutku zaustavljanja koristeći formulu $v^2 = v_0^2 + 2gh$. Kada izrazimo visinu i zamenimo podatke dobijamo

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{(3\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 2 \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 78\text{m}} = \sqrt{9\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 1530,36\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$= \sqrt{1539,36\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 39,23\frac{\text{m}}{\text{s}} \ .$$

Kako se lopta kreće ravnomerno ubrazano sa početnom brzinom $v_0 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$, krajnju brzinu možemo dobiti i pomoću formule $v = v_0 + gt_2 \sin\alpha$, a kada odatle izrazimo vreme kretanja lopte i zamenimo podatke dobijamo

$$t_2 = \frac{v - v_0}{g \sin\alpha} = \frac{39,23\frac{\text{m}}{\text{s}} - 3\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 15°} = \frac{36,23\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,26} = \frac{36,23\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,55\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 14,21\text{s} \ .$$

Sava do lopte stiže nakon $t_1 - t_2$ vremena, tačnije za

$$t_1 - t_2 = 15,31\text{s} - 14,21\text{s} = 1,1\text{s} \ .$$

Glava 3

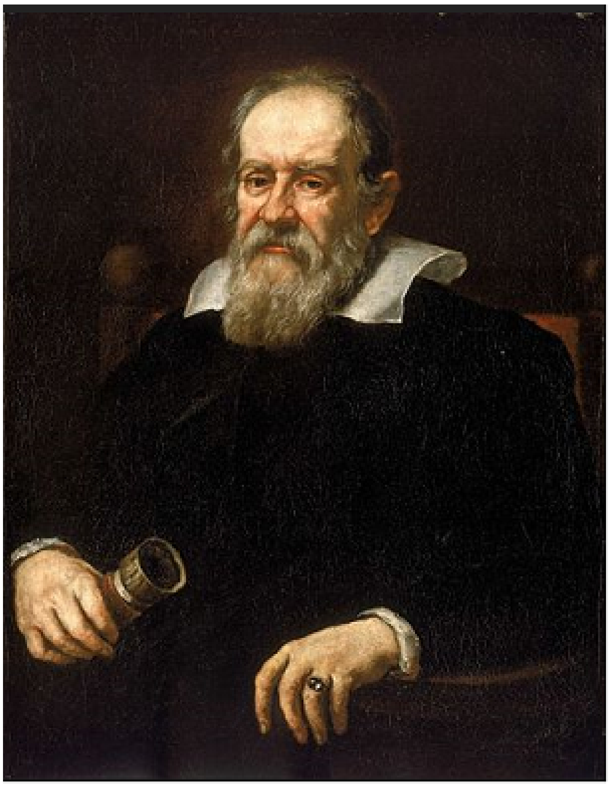
Galilejevo rešenje problema

U ovom poglavlju bavićemo se Galileovim radom po pitanju kretanja i zaključaka do kojih je on došao, a koje je izložio u svom delu [3] „Rasprave i matematički dokazi o dve nove nauke koje se bave mehanikom i lokalnim kretanjima"[1]. Delo je podeljeno na četiri dana. Treći dan posvećen je izučavanju kinematike ubrzanog kretanja i upravo ovde je Galileo došao do nekih bitnih zaključaka koji se odnose na problem kojim se bavimo. Kroz tri bitna zadatka analiziraćemo kretanje između početne i krajnje tačke kada se one nalaze na kružnici i poredićemo vremena kretanja za različite putanje. Posebno je značajan treći zadatak koji pokazuje na koji način je Galileo pretpostavio da se najmanje vreme postiže ako se kretanje odvija duž četvrtine kruga, što je bilo od značaja jer se prvi put naslućuje da je tražena putanja zapravo kriva. Pored Galileovog geometrijskog pristupa ovom pitanju, izložićemo i analitički dokaz njegovih tvrđenja.

Galileo Galilej rođen je 1564. godine u Pizi, koja je tada bila pod upravom Firence. Potiče iz poznate firentinske porodice. Otac Vinćenco bavio se muzikom, te je Galileo od malih nogu pored muzike učio i matematiku, koja se tada smatrala vrstom umetnosti. Nakon završene srednje škole pri manastiru u blizini Firence, Galileo je započeo studije medicine. No za vreme studija otkriva posebno zanimljive časove matematike koje je držao izvesni profesor Ostilio Riči. Nakon četiri godine napušta univerzitet bez diplome, a ono čime se ceo život bavio nije studirao, već je u tome bio samouk.

Tri godine radio je pri katedri za matematiku na univerzitetu u Pizi, nakon čega prelazi u Padovu i tu pronalazi isti posao. Tu se odvijao najkreativniji period Galileovog stvaralaštva, gde se osim problemima kretanja bavio i konstrukcijom

[1] U originalu naziv dela je *Discorsi* i objavljeno je 1638. godine



Slika 3.1: Galileo Galilej

raznih mernih instrumenata za vojne potrebe. Godine 1609. konstruiše teleskop, koji kasnije usavršava kako bi dobio što veće uvećanje (do čak 400 puta). To je dovelo do njegovih velikih astronomskih otkrića: utvrdio je postojanje Sunčevih pega[2], Mlečnog puta, otkrio Jupiterove satelite i postojanje kratera na Mesečevoj površini.

Ubrzo nakon njegovog prelaska u Firencu, od 1613. godine, započinje njegov sukob sa rimokatoličkom crkvom. Treba imati u vidu da u to vreme, čitav vek nakon otkrića Amerike i pustolovina moreplovaca oko čitave Zemlje, nije bilo sumnje da je Zemlja okrugla. Ipak, za običan svet i za naučnike onog doba, zvezde i planete i dalje su ostale potpuna nepoznanica. Na primer, Mesec je smatran savršenom sferom. Zemlja je, osim za mali broj prosvećenih, bila nepokretna planeta koja stoji usred svemira, a Sunce, kako je pisalo u svim svetim i svetovnim knjigama, okreće se oko Zemlje. Galilejeva istraživanja pokazivala su da se Zemlja okreće oko Sunca i da je Kopernik[3] bio upravu. Veliki bes crkve izaziva štampanjem i objavljivanjem

[2]Sunčeve pege predstavljaju oblasti sa najnižim temperaturama na Suncu

[3]Nikola Kopernik (1473-1543) bio je poljski astronom, matematičar, pravnik, lekar i ekonomi-

svog dela „Dijalog o dva glavna sistema sveta, ptolomejskom i kopernikanskom". Ptolomej je bio naučnik iz Aleksandrije koji je bio tvorac geocentričnog sistema, dok je sa druge strane bio Kopernikov heliocentrični sistem. Knjiga je pisana u vidu dijaloga tri lica: Salvijatija, Sagreda i Simplicija. Salvijati izlaže mišljenje Galileja, Sagredo je dobro obavešteni amater, a Simplicije[4] je gubitnik koji brani mišljenje Aristotela.

Sa inkvizicijom se susreće 1633. godine. Sudije su odlučile da delo „Dva sistema sveta" stave na spisak zabranjenih knjiga, dok je Galileo bio osuđen na doživotni zatvor. Galilea je u zatočeništvu izdavao vid, ali ne i volja za istraživanjem i polemisanjem. Njegova poslednja knjiga „Dve nove nauke", kojom je postavio temelje mehanike, odštampana je 1638. i doživela zasluženi uspeh. U njoj je, između ostalog, izložio zakon slobodnog pada, odredio kretanje niz strmu ravan, paraboličnu putanju kod horizontalnog hica. Ovim delom Galilej je uveo eksperimentalnu metodu istraživanja i matematičko formulisanje eksperimentom utvrđenih zakonitosti i time položio temelje modernoj fizici.

Umire 8. januara 1642. godine u svojoj kući u Arčetriju, gde će mnogo godina kasnije biti podignuta moderna astronomska opservatorija. Tek je 1757. godine skinuta zabrana sa njegovih dela. Tokom pontifikata pape Jovana Pavla II, 1992. godine, Papska Akademija nauka definisaće slučaj Galilej kao „grešku koja se sasvim iskreno priznaje". Iste godine jedna sonda NASA-e koja nosi ime Galileo, poslednji put pozdravila je Zemlju, da bi se potom uputila prema Jupiterovim satelitima i nestala duboko u beskraju svemira.

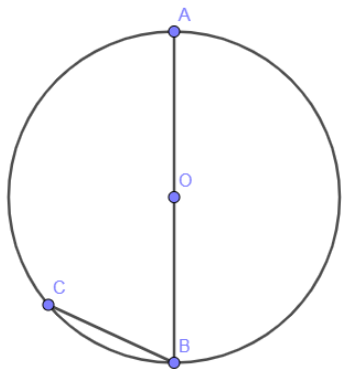
3.1 Geometrijski pristup

Zadatak 1. *Neka su dati krug sa vertikalnim prečnikom AB i tačka C na toj kružnici. Dokazati da je vreme za koje će se tačka bez početne brzine spustiti duž strmih ravni AB i CB jednako.*

Rešenje. Prvo ćemo proanalizirati Sliku 3.3. Kroz tačku C povlačimo pravu paralelnu duži AB, dok kroz tačku B povlačimo normalu na duž AB. Presek ovih dveju pravih označili smo sa K. $\angle COB$ je centralni ugao nad lukom CB i označićemo ga sa β. Ugao $\angle CAB$ je periferijski nad istim lukom CB i označićemo ga sa α,

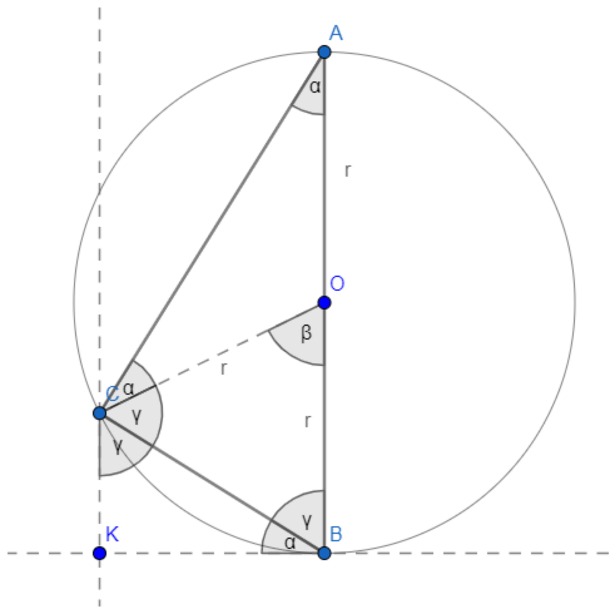
sta, prvi naučnik koji je formulisao heliocentrični model svemirskih tela

[4]Simplicije - izmišljeno muško ime. U prevodu: prost, neuk



Slika 3.2: Geometrijska postavka Zadatka 1

pri čemu znamo da važi $\beta = 2\alpha$. Ugao $\angle ACB$ je periferijski ugao nad prečnikom AB pa je on prav, što znači da je $\angle ABC = \gamma = 90 - \alpha$. Duži OC i OB jednake su poluprečniku kružnice r pa je trougao COB jednakokraki. To znači da je $\angle OCB = \angle OBC = \angle ABC = 90° - \alpha$. Takođe su i duži $OC = OA$ jednake poluprečniku kružnice r, pa je i trougao COA jednakokraki, odnosno $\angle OCA = \angle CAB = \alpha$.



Slika 3.3: Geometrijska postavka rešenja Zadatka 1

Posmatraćemo sada trougao CKB. Znamo da su uglovi $\angle CKB$ i $\angle KBA$ pravi i $\angle OBC = \gamma = 90° - \alpha$, pa je otuda $\angle CBK = \alpha$ i $\angle KCB = 90° - \alpha = \gamma$.

Odavde zaključujemo da su trouglovi ABC i CKB slični. Na osnovu sličnosti sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica, odnosno važi $CK : CB = CB : AB$.

Posmatrajmo sada kretanje tela niz strmu ravan AB. To je u stvari slobodan pad, pa pređeni put računamo pomoću jednačine:

$$AB = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{AB}^2 \ . \tag{3.1}$$

Posmatrajmo kretanje tela niz strmu ravan CB. Kako je kretanje tela u tom slučaju ravnomerno ubrzano kretanje sa početnom brzinom 0, jednačina tog kretanja jeste:

$$CB = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot t_{CB}^2 \ . \tag{3.2}$$

Iz sličnosti trouglova ACB i CKB znamo da važi:

$$CK : CB = CB : AB$$

$$CK \cdot AB = CB \cdot CB$$

Kada prethodnu jednačinu podelimo sa CB ($CB > 0$) dobijamo:

$$\frac{CK}{CB} \cdot AB = CB$$

odnosno

$$CB = AB \cdot \sin\alpha \ . \tag{3.3}$$

Zamenom jednakosti (3.1) i (3.2) u (3.3) dobijamo:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{AB}^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot t_{CB}^2$$

Kada prethodnu jednačinu podelimo sa $\frac{g}{2} \cdot \sin\alpha$ ($g \approx 9,81 m/s^2 > 0$, a kako je ugao $\alpha < 90°$ to je i $\sin\alpha > 0$, pa je i ceo razlomak > 0) dobijamo:

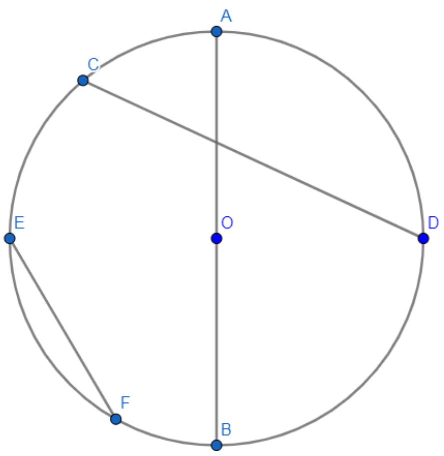
$$t_{AB}^2 = t_{CB}^2$$

odakle sledi (kako je vreme nenegativno):

$$t_{AB} = t_{CB} \ . \tag{3.4}$$

Posledica 1. *Na osnovu rezultata ovog zadatka možemo zaključiti da su jednaka vremena spusta duž svih tetiva koje su povučene iz krajeva A ili B. Osim toga, zaključujemo da ako iz iste tačke pođu vertikala i kosa ravan takvi da vremena spusta niz njih budu jednaka, vertikala i kosa ravan se mogu upisati u polukrug čiji je prečnik ta vertikala.*

Zadatak 2. *Neka je data kružnica k u ravni čiji je vertikalni prečnik AB. Neka su date tetive CD i EF kružnice, takve da CD seče AB, a EF i AB nemaju zajedničkih tačaka. Niz koju od strmih ravni AB, CD, EF će se tačka spustiti bez početne brzine za najkraće vreme? (Kako je AB vertikalni prečnik, kretanje tačke duž AB je slobodan pad).*



Slika 3.4: Geometrijska postavka Zadatka 2

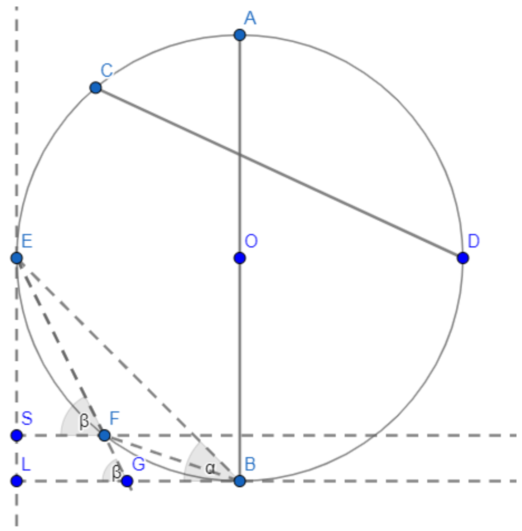
Rešenje. Posmatrajmo prvo Sliku 3.5. Označimo sa L presečnu tačku tangenti na kružnicu čije su dodirne tačke E i B. Neka je tačka G presečna tačka duži LB i prave koja sadrži tačke E i F. Neka je S podnožje normale iz tačke F na duž EL. Na osnovu Zadatka 1 znamo da su vremena kretanja tela niz strme ravni AB i EB jednaka, tj. $t_{AB} = t_{EB}$. Očigledno je stranica EB najduža stranica trougla EFB (nalazi se naspram tupog ugla $\angle EFB$), odakle važi $EF < EB$.

Možemo primetiti da su trouglovi EFS i EGL slični jer: 1) $\angle FES = \angle GEL$ (zajednički ugao) 2) $\angle ESF = \angle ELG = 90°$ 3) $\angle EFS = \angle EGL = \angle\beta$ (uglovi sa paralelnim kracima). Zato važi proporcionalnost odgovarajućih stranica $ES : EL = EF : EG$, odnosno

$$ES : EF = EL : EG \ . \tag{3.5}$$

Posmatraćemo kretanje niz strme ravni EF i EB. Videli smo da je $EF < EB$. Kretanje niz strmu ravan EF opisuje jednačina $\frac{1}{2}gt_{EF}^2 \sin\beta$, dok kretanje niz strmu ravan EB opisuje jednačina $\frac{1}{2}gt_{EB}^2 \sin\alpha$, te dobijamo nejednakost:

$$\frac{1}{2}gt_{EF}^2 \sin\beta < \frac{1}{2}gt_{EB}^2 \sin\alpha \ .$$



Slika 3.5: Prva slika za Zadatak 2

Kada prethodnu nejednakost podelimo sa $\frac{g}{2}$ (što jeste pozitivno jer je $g \approx 9,81m/s^2 > 0$) dobijamo

$$t_{EF}^2 \sin\beta < t_{EB}^2 \sin\alpha \ .$$

Kako je $t_{EB} = t_{AB}$ (na osnovu Zadatka 1) prethodna nejednakost postaje

$$t_{EF}^2 \sin\beta < t_{AB}^2 \sin\alpha \ .$$

Zamenom $\sin\beta = \frac{ES}{EF}$ i $\sin\alpha = \frac{EL}{EB}$ i koristeći jednakost (3.5) imamo

$$t_{EF}^2 \frac{ES}{EF} = t_{EF}^2 \frac{EL}{EG} < t_{AB}^2 \frac{EL}{EB} \ ,$$

što se nakon množenja sa EB i EG i deljenja sa EL ($EB, EG, EL > 0$) svodi na

$$t_{EF}^2 EB < t_{AB}^2 EG \ .$$

Zatim poslednju nejednakost delimo sa EG ($EG > 0$) i dobijamo

$$t_{EF}^2 \frac{EB}{EG} < t_{AB}^2 \ .$$

Kako je $EB > EG$ to je razlomak $\frac{EB}{EG} > 1$, pa važi:

$$t_{EF}^2 < t_{EF}^2 \frac{EB}{EG} < t_{AB}^2 \ ,$$

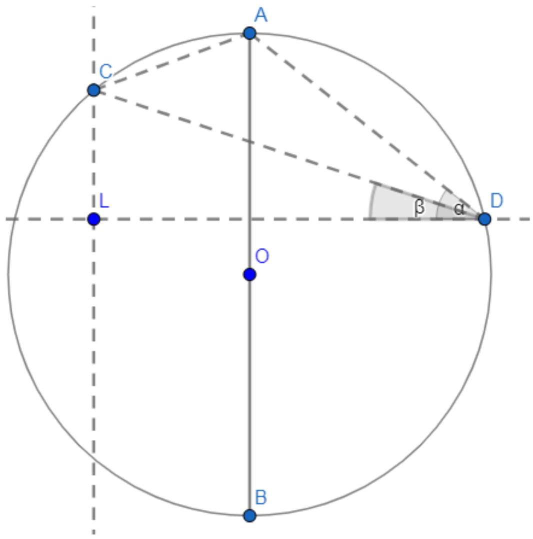
odnosno

$$t_{EF}^2 < t_{AB}^2 \ .$$

Pošto su $t_{EF} > 0$ i $t_{AB} > 0$ onda je i

$$t_{EF} < t_{AB} \ . \tag{3.6}$$

Posmatraćemo sada Sliku 3.6. Povlačimo prvo pravu paralelnu prečniku AB kroz tačku C. Zatim povlačimo pravu normalnu na prečnik AB kroz tačku D. Presek ovih dveju pravih označimo sa L. Tada je $\angle CLD$ prav ugao i označimo $\angle LDA = \alpha$ i $\angle LDC = \beta$.



Slika 3.6: Druga slika za Zadatak 2

Na osnovu Zadatka 1 znamo da su vremena kretanja niz strme ravni AB i AD jednaka, odnosno važi $t_{AB} = t_{AD}$. Očigledno je stranica CD najduža stranica trougla ACD (to je stranica naspram tupog ugla $\angle CAD$) pa je otuda $CD > AD$. Kretanje niz strmu ravan CD opisuje jednačina $\frac{1}{2}gt_{CD}^2 \sin\beta$, dok kretanje niz strmu ravan AD opisuje jednačina $\frac{1}{2}gt_{AD}^2 \sin\alpha$. Na osnovu svega navedenog dobijamo nejednakost:

$$\frac{1}{2}gt_{CD}^2 \sin\beta > \frac{1}{2}gt_{AD}^2 \sin\alpha \ .$$

Kada prethodnu nejednakost podelimo sa $\frac{g}{2}$ $(g > 0)$ dobijamo

$$t_{CD}^2 \sin\beta > t_{AD}^2 \sin\alpha \ .$$

Kako su vremena kretanja niz strme ravni AB i AD jednaka prethodna nejednakost ekvivalentna je

$$t_{CD}^2 \sin\beta > t_{AB}^2 \sin\alpha \ .$$

Kako je $\alpha > \beta$ i $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ znamo da je i $\sin\alpha > \sin\beta$ (jer je funkcija sinus pozitivna i rastuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$). Zato prethodnu nejednakost možemo podeliti sa $\sin\beta$ odakle dobijamo

$$t_{CD}^2 > t_{AB}^2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \ .$$

Kako je $\sin\alpha > \sin\beta$ to je razlomak $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > 1$ pa prethodna nejednakost postaje

$$t_{CD}^2 > t_{AB}^2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > t_{AB}^2 \ ,$$

odnosno

$$t_{CD}^2 > t_{AB}^2 \ .$$

Kako je vreme nenegativno, prethodna nejednakost se svodi na

$$t_{CD} > t_{AB} \ . \tag{3.7}$$

Kada spojimo nejednakosti (3.6) i (3.7) dobijamo

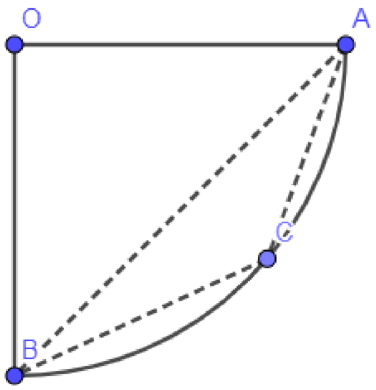
$$t_{EF} < t_{AB} < t_{CD} \tag{3.8}$$

čime smo pokazali da je vreme kretanja duž EF kraće od vremena kretanja duž AB, koje je pak kraće od vremena kretanja duž CD.

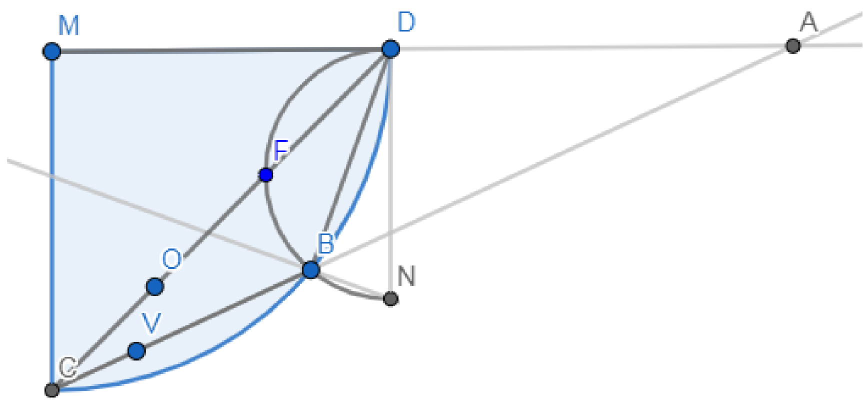
Posledica 2. *Na osnovu Zadatka 1 i Zadatka 2 možemo zaključiti da su vremena silaska po nagnutim ravnima koje seku jedan i isti krug, bilo u njegovoj najvišoj ili najnižoj tački, jednaka vremenu silaska po njegovom vertikalnom prečniku; za one ravni koje ne dopiru do tog prečnika to vreme je kraće; za one koje ga seku je duže.*

Zadatak 3. *Dokazati da je vreme za koje će se tačka spustiti niz strmu ravan AB sa slike bez početne brzine veće nego ako se spusti niz strme ravni AC i CB. Tačka kreće iz tačke A bez početne brzine. OAB je četvrtina kruga.*

Rešenje. Pokazaćemo kako je Galileo rešio ovaj problem, koji je dat u Pretpostavci XXXVI dana trećeg njegovog dela „Rasprave i matematički dokazi o dve nove nauke koje se bave mehanikom i lokalnim kretanjima". U svom dokazu on je koristio tri pomoćne leme, koje ću izložiti u nastavku. Početna geometrijska postavka data je na slikama ispod. Slika 3.8 pokazuje da telo započinje kretanje iz tačke D, kreće su duž tetiva DB i BC kojima odgovara luk DBC, koji nije veći od četvrtine kruga, i dostiže krajnji položaj u tački C. Slika 3.9 prikazuje vreme koje odgovara različitim



Slika 3.7: Geometrijska postavka Zadatka 3



Slika 3.8: Galileova postavka zadatka

Slika 3.9: Prikaz vremena koja odgovaraju različitim distancama

distancama koje telo prelazi u toku svog kretanja. Galileo je dokazao da je vreme kretanja duž tetiva DB i BC (gde je tačka B na luku između tačaka D i C) manje od vremena kretanja duž tetive DC.

Kroz tačku D provlačimo horizontalnu liniju MDA koja seče produžetak prave CB u tački A. Povlačimo prave DN i MC koje su normalne na MD tako da prava

BN bude normalna na BD. Kako je trougao DBN pravougli, oko njega se može opistai polukrug $DFBN$, gde je F presečna tačka polukružne linije i tetive DC. Zatim ćemo izabrati tačku O na tetivi CD tako da DO bude srednja proporcionala između CD i DF. Dakle važi

$$CD : DO = DO : DF \; . \tag{3.9}$$

Na isti način pronađimo tačku V tako da AV bude srednja proporcionala između CA i AB, odnosno

$$CA : AV = AV : AB \; . \tag{3.10}$$

Dužine duži predstavljenih na Slici 3.8 jesu pređeni putevi tokom kretanja tela. Na Slici 3.9 nacrtana je linija na kojoj su predstavljena vremena kretanja. Neka dužina PS predstavlja vreme kretanja duž čitave tetive DC, odnosno tetive BC (jer su ova vremena jednaka na osnovu Zadatka 1). Izabraćemo tačku R na SP takvu da važi

$$DC : DO = t_{PS} : t_{PR} \; . \tag{3.11}$$

Onda PR predstavlja vreme za koje će telo koje započinje kretanje iz tačke D preći rastojanje DF (na osnovu jednačine (3.9) i jednačine (3.11)), dok RS predstavlja vreme za koje će preostalo rastojanje FC biti pređeno. Kako je PS takođe vreme kretanja duž tetive BC, ako telo kreće iz stanja mirovanja iz tačke B, izabraćemo tačku T takvu da važi

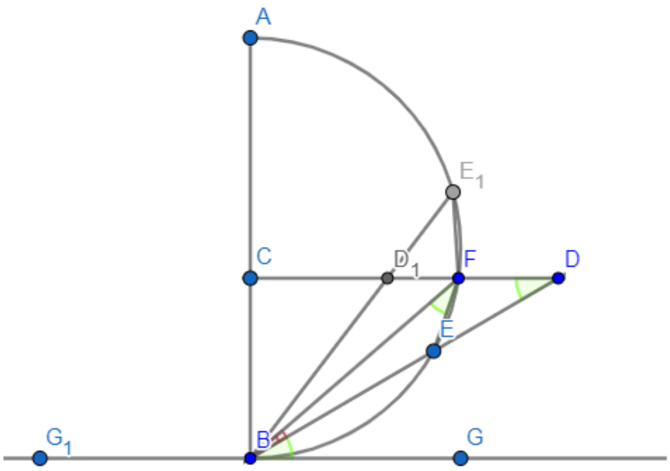
$$BC : CD = PS : PT \tag{3.12}$$

Dolazimo do prve leme koja će nam biti potrebna za nastavak dokaza.

Lema 1. *Neka je DC duž upravna na prečnik BA. Sa kraja B povucimo nasumično liniju BED i povucimo liniju FB. Tada je FB srednja proporcionala između DB i BE.*

Dokaz. Neka je prava CD normalna na vertikalni prečnik AB kruga, gde je B donja tačka. Neka prava CD seče kružnicu u tački F. Iz tačke B nasumično povucimo pravu BED. Spojimo tačke F i B. Kroz tačku B povucimo tangentu paralelnu sa CD. Prvo možemo primetiti da su uglovi $\angle FBE$ i $\angle FBD$ jednaki. Uglovi $\angle FDB$ i $\angle DBG$ takođe su jednaki (jer imaju paralelne krake). Ugao $\angle EFB$ jednak je uglu $\angle DBG$ (tangentni i periferijski ugao nad istom tetivom BE). Odavde možemo zaključiti da su trouglovi FDB i FEB slični, pa sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica

$$BD : BF = BF : BE \; .$$



Slika 3.10: Ilustracija Leme 1

Odatle vidimo da BF jeste srednja proporcionala između DB i BE.

Na isti način pokazujemo da je BF srednja proporcionala i gornjeg trougla BFE_1, odnosno da važi $BE_1 : BF = BF : BD_1$. Na osnovu poslednje dve jednačine imamo

$$BD : BE_1 = BD_1 : BE\ .$$

△

Primenom Leme 1 na trougao ADC zaključujemo da je DC srednja proporcionala između AC i CB, odnosno važi

$$AC : DC = DC : CB \tag{3.13}$$

pa iz jednačine (3.12) i jednačine (3.13) zaključujemo da će PT takođe predstavljati vreme kretanja od tačke A do dačke C.
Izabraćemo tačku G na pravoj PS takvu da važi

$$CA : AV = PT : PG \tag{3.14}$$

Tada, na osnovu jednakosti (3.10) i (3.14), sledi da PG predstavlja vreme kretanja od tačke A do B, dok će GT biti preostalo vreme kretanja od tačke B do tačke C.

Kako je prečnik DN kružnice DFN vertikalna linija vremena kretanja duž tetiva DF i DB biće jednaka (na osnovu Zadatka 1). Dakle ako pokažemo da će telo, nakon silaska po DB, preći razdaljinu BC za kraće vreme nego što će preći razdaljinu FC

posle silaska po DF, onda smo dokazali teoremu. Ali telo koje pada iz D po DB će preći BC za isto vreme kao kada bi dolazilo iz A i išlo preko AB, jer ono dobija istu brzinu ukoliko silazi po DB i AB. Ostaje jedino da se pokaže da je pad po BC nakon AB brži nego pad po FC nakon DF.

Već smo pokazali da GT predstavlja vreme silaska po BC nakon AB i da RS meri vreme silaska po FC nakon DF. Moramo dakle pokazati da je RS veće od GT. Kako je

$$SP : PR = CD : DO$$

sledi da je

$$RS : SP = OC : CD \ .$$

Takođe imamo

$$SP : PT = DC : CA$$

i pošto je

$$TP : PG = CA : AV$$

sledi da je

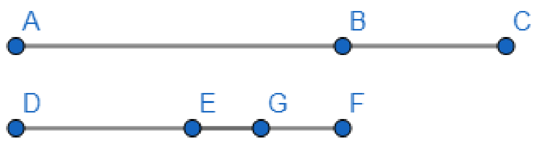
$$PT : TG = AC : CV$$

pa je otuda i

$$RS : GT = OC : CV \tag{3.15}$$

Zato da bismo pokazali da je $RS > GT$ dovoljno je pokazati da je $OC > CV$. Ovde ćemo iskoristiti drugu i treću lemu koje ćemo pokazati u prilogu.

Lema 2. *Pretpostavimo da je AC linija koja je duža od DF i da važi $AB : BC > DE : EF$. Tada je $AB > DE$.*



Slika 3.11: Ilustracija Leme 2

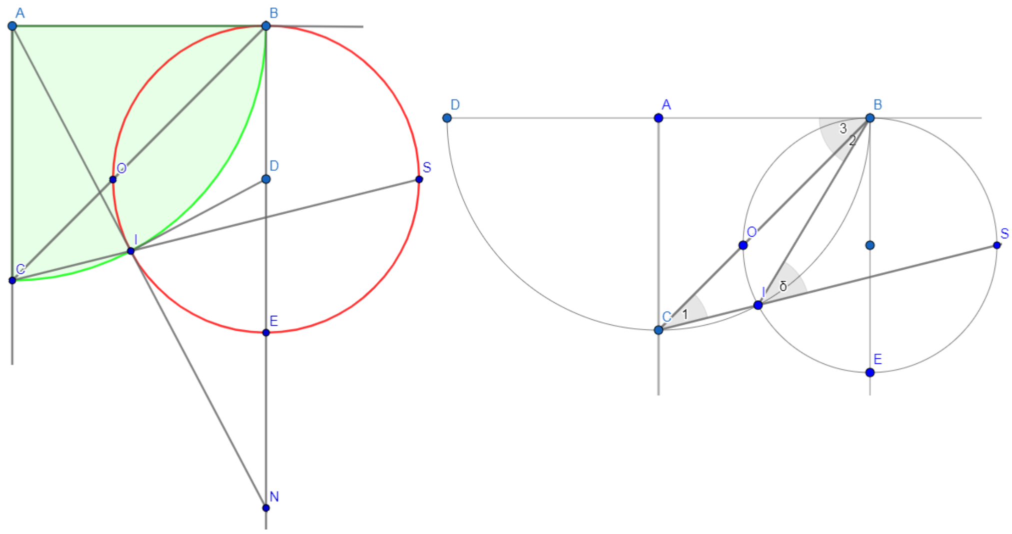
Dokaz. Ako je $AB : BC > DE : EF$, onda će odnos DE i neke dužine manje od EF biti isti kao odnos $AB : BC$. Označimo tu dužinu sa EG. Pošto je sada

$$AB : BC = DE : EG$$

odatle sledi da je

$$CA : AB = GD : DE \ .$$

Ali, kako je $CA > FD > GD$ sledi da je i $BA > ED$. $\triangle$



Slika 3.12: Dve ilustracije Leme 3

Lema 3. Neka je $ACIB$ kvadrant kruga. Povucimo iz B paralelu BE u odnosu na AC i oko bilo koje tačke na BE opišimo krug $BOES$, koji dodiruje AB u B i seče kružnicu kvadranta u I. Spojimo tačke C i B i povucimo liniju CI koju ćemo produžiti do S. Tvrdimo da je linija CI uvek manja od CO.

Dokaz. Povucimo liniju AI koja dodiruje krug BOE. Ako nacrtamo DI ona će biti jednaka DB, ali pošto DB dodiruje kvadrant, DI će takođe biti tangenta i pod pravim uglom u odnosu na AI. Na taj način AI seče krug BOE u I. Pošto je ugao $\angle AIC$ veí od ugla $\angle ABC$, jer je osnova većeg luka, sledi da je i ugao $\angle SIN$ veći od ugla $\angle ABC$ (uglovi $\angle AIC$ i $\angle SIN$ su jednaki jer su unakrsni). Luk IES je veći od luka BO, a linija CS je, pošto je bliža centru, duža od CB. Ako pokažemo i da važi $SC : CB = OC : CI$, onda će sledeti da je CO veće od CI.

Ako uporedimo Sliku 3.10 i Sliku 3.12(levo) možemo primetiti da prava COB sa Slike 3.12 odgovara pravoj BD_1E_1 sa Slike 3.10, a da pravoj CIS odgovara prava BED. Kako bismo primenili Lemu 1 ostaje još da pokažemo da je prava OS paralelna pravoj AB, a to ćemo najlakše videti ako pokažemo da je luk BO jednak luku BS. Posmatraćemo Sliku 3.12 desno. Označimo $\angle BCI$ sa 1, $\angle CBI$ sa 2 i $\angle ABC$ sa 3. Ugao $\angle BIS = \delta$ biće jednak zbiru uglova 1 i 2 zato što je to spoljašnji ugao trougla CIB. Ako pokažemo da je ugao δ (kome odgovara luk BS) jednak uglu 3 (kome odgovara luk BO) onda bismo imali jednakost ova dva luka. Dakle uglu 1 odgovara luk BI, dok uglu 2 odgovara luk CI, tako da zbiru ova dva ugla (što je zapravo ugao δ) odgovara luk BIC. Sa druge strane uglu 3 odgovara luk CD, koji je jednak luku BIC. Odatle imamo da je $\delta =$ uglu 3, lukovi BS i BO su jednaki i prava koja prolazi kroz tačke O i S paralelna sa AB. Kada primenimo Lemu 1 dobijamo

$$SC : CB = OC : CI \ .$$

Kako smo pokazali da je $SC > CB$ to znači da mora biti $OC > CI$. △

Sada se možemo vratiti na treći zadatak, gde je ostalo da pokažemo da je CO veće od CV, pa je otuda i vreme RS veće od vremena GT, što je trebalo dokazati.

Pošto je sada $CF > CB$ (na osnovu Leme 3) i $FD < BA$ (na osnovu Leme 2) sledi da

$$CD : DF > CA : AB \ .$$

S druge strane, kako je

$$CD : DF = CO : OF$$

i

$$CD : DO = DO : DF$$

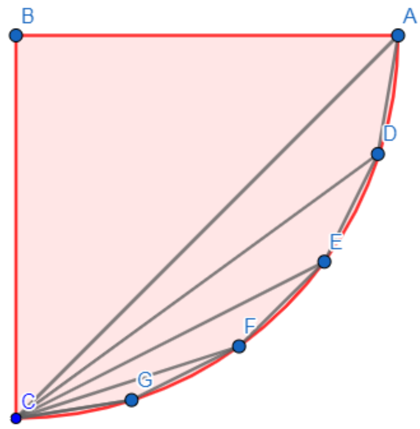
$$CA : AB = CV : VB$$

$$CO : OF > CV : VB \ .$$

Saglasno Lemi 2, ako je

$$CO : OF > CV : VB \text{ tada je } CO > CV \ .$$

Neka je $BAEC$ kvadrant čija je strana BC uspravljena na horizontalu. Podelimo luk AC na bilo koji broj jednakih delova AD, DE, EF, FG, GC, zatim iz tačke C povucimo tetive do tačaka A, D, E, F, G i na kraju povucimo tetive AD, DE, EF, FG i GC. Na osnovu onoga što smo pokazali u Zadatku 3 jasno je da se kretanje



Slika 3.13: Aproksimacija četvrtine kruga nizom strmih ravni

duž (sistema) dve tetive AD i DC obavlja brže nego duž samo AC ili kretanje duž DE i EC obavlja brže nego duž DC, odnosno važi

$$t_{AC} > t_{AD}+t_{DC} > t_{AD}+t_{DE}+t_{EC} > t_{AD}+t_{DE}+t_{EF}+t_{FC} > t_{AD}+t_{DE}+t_{EF}+t_{FG}+t_{GC}\ .$$

Zaključujemo da što se više približavamo sa upisanim poligonima kružnici toliko se brže vrši kretanje između dva obeležena kraja A i C. Na osnovu onoga što je pokazano čini se da se može zaključiti da se najbrže kretanje iz jedne u drugu tačku ne odvija duž najkraće linije, odnosno prave, već duž luka kruga.

3.2 Analitički pristup

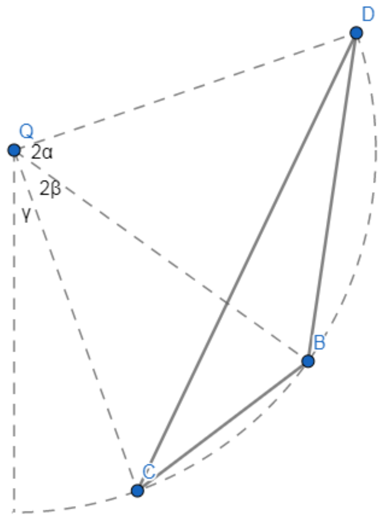
U narednom delu daćemo analitički dokaz Galileove teoreme [7]. Ono što je prethodilo otkriću ove teoreme jeste Galileov rad vezan za period oscilacije klatna, gde je on putanju kretanja klatna aproksimirao kretanjem tela po luku kružnice. Značaj njegovog otkrića je utoliko veći jer je on doveo do pojavljivanja problema brahistohrone, kojim su se kasnije bavili mnogi, o čemu će biti reči u narednom delu.

Dakle, telo započinje kretanje iz stanja mirovanja iz tačke D i kreće se bez otpora i trenja duž tetiva DC i DBC uporedo. U tački B brzina je direktno usmerena ka tački C. Za početak, izvešćemo formule za slučajeve kretanja kada se putanja ne završava obavezno u najnižoj tački kruga.

Dakle, krećemo od poluprečnika kružnice i uglova α, β, γ, prikazanih na Slici 3.14. Za uglove važi

$$\alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0 \text{ i } 2\alpha + 2\beta + \gamma \leq \pi\ .$$

Sa t_{DC} i t_{DBC} označićemo vreme kretanja niz putanje koju u prvom slučaju predstavlja tetiva DC, a u drugom tetive DB i BC, pretpostavljajući da telo zapičinje kretanje iz tačke D iz stanja mirovanja.



Slika 3.14: Geometrijska postavka Teoreme 1

Teorema 1. *(a) Ako je* $3\alpha + 4\beta + 2\gamma \leq \pi$, *onda je* $t_{DBC} < t_{DC}$.
(b) Ako je $3\alpha + 3\beta + 2\gamma \geq \pi$, *onda je* $t_{DBC} > t_{DC}$.

Ako ugao $2\alpha + 2\beta + \gamma$, koji određuje poziciju tačke D, nije veći od $\pi/2$, uslov iz dela (a) je zadovoljen. Ako je ugao $2\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2\pi/3$, zadovoljen je uslov iz dela (b). Isto važi ukoliko se celo kretanje dešava u gornjem kvadrantu. Sa druge strane, deo pod (a) pokazuje da $t_{DBC} < t_{DC}$ nije ograničeno samo na donji kvadrant. Uslov $t_{DBC} = t_{DC}$ opisuje površinu čiji su parametri između ravni $3\alpha + 4\beta + 2\gamma = \pi$ i $3\alpha + 3\beta + 2\gamma = \pi$. Kompletno rešenje za slučaj $\gamma = 0$ predstavićemo malo kasnije.

Vratimo se dokazu teoreme. Pokazaćemo da za dati poluprečnik razlika vremena $t_{DC} - t_{DBC}$ može biti predstavljena u sledećem obliku

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \cos \frac{3\alpha + 4\beta + 2\gamma}{2} + \mu(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \cos \frac{3\alpha + 3\beta + 2\gamma}{2} \tag{3.16}$$

gde su funkcije λ i μ pozitivne za dozvoljene vrednosti uglova α, β i γ. Iz ove reprezentacije direktno sledi tvrđenje Galileove teoreme, jer, ukoliko je ispunjen uslov (a), prvi kosinus je nenegativan i drugi pozitivan; ukoliko je ispunjen uslov (b) prvi kosinus je negativan a drugi nepozitivan.

Podsetićemo se i nekih bitnih formula iz kinematike koje opisuju ravnomerno ubrzano kretanje tela.

Neka je GH strma ravan, čija je najviša (početna) tačka G i krajnja tačka H. Označimo sa $|GH|$ dužinu strme ravni, sa ϑ ugao nagiba strme ravni i pretpostavimo da se telo kreće niz strmu ravan GH sa početnom brzinom υ_G. Ako vreme kretanja niz GH označimo sa $t_{GH}(\upsilon_G)$ i brzinu kretanja u tački H sa υ_H na osnovu osnovnih formula za ravnomerno ubrzano kretanje dobijamo sledeće jednakosti

$$\upsilon_H^2 = \upsilon_G^2 + 2g|GH|\sin\vartheta \tag{3.17}$$

$$t_{GH}(\upsilon_G) = \frac{2|GH|}{\upsilon_H + \upsilon_G} \tag{3.18}$$

gde je g gravitaciono ubrazanje. Telo kreće iz stanja mirovanja iz tačke G, pa je početna brzina $\upsilon_G = 0$. Označićemo i $t_{GH}(\upsilon_G) = t_{GH}(0)$ sa t_{GH}. Primetimo takođe da se formule neće promeniti ukoliko zamenimo ugao ϑ sa $\pi - \vartheta$, tako da ćemo oba ugla nazvati ugao nagiba strme ravni GH.

Dokaz. Predstavimo razliku u vremenima t_{DC} i t_{DBC} na sledeći način

$$t_{DC} - t_{DBC} = (t_{DC} - t_{DB}) - t_{BC}(\upsilon_B)\ .$$

Kako je trougao DQC jednakokraki, ugao nagiba ravni DC biće

$$\pi - (\pi/2 - \gamma) - (\pi/2 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta + \gamma =: \varphi.$$

Na sličan način dobijamo da je $\alpha + 2\beta + \gamma = \varphi + \beta$ ugao nagiba ravni DB. Primetimo takođe da je $\angle DCB = \alpha$ (kao periferijski nad lukom BD duplo je manji od odgovarajućeg centralnog ugla $\angle BQD = 2\alpha$ nad istim lukom) i da je $\angle DBC = \beta$ (kao periferijski nad lukom CB duplo je manji od odgovarajućeg centralnog ugla $\angle CQB = 2\beta$ nad istim lukom).

Kako telo kreće iz stanja mirovanja iz tačke D iz jednačina (3.17) i (3.18) imamo

$$\upsilon_C = \sqrt{2g|DC|\sin\varphi},\ \upsilon_B = \sqrt{2g|DB|\sin(\varphi+\beta)}$$

i

$$t_{DC} = \sqrt{\frac{2|DC|}{g\sin\varphi}},\ t_{DB} = \sqrt{\frac{2|DB|}{g\sin(\varphi+\beta)}}\ .$$

Otuda dobijamo da je

$$t_{DC} - t_{DB} = \sqrt{\frac{2|DC|}{g\sin\varphi}} - \sqrt{\frac{2|DB|}{g\sin(\varphi+\beta)}} = \frac{\sqrt{2|DC|\sin(\varphi+\beta)} - \sqrt{2|DB|\sin\varphi}}{\sqrt{g\sin\varphi\sin(\varphi+\beta)}}$$

$$= \frac{\tilde{v_C} - \tilde{v_B}}{g\sqrt{\sin\varphi \sin(\varphi + \beta)}} \tag{3.19}$$

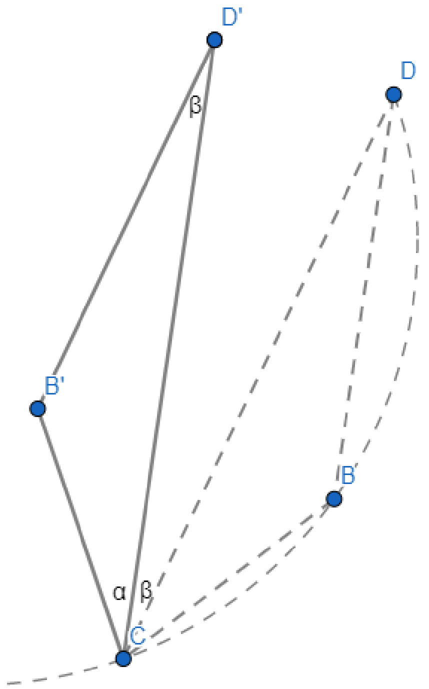
gde je

$$\tilde{v_C} = \sqrt{2g|DC|\sin(\varphi + \beta)}, \quad \tilde{v_B} = \sqrt{2g|DB|\sin\varphi} \ .$$

Mi želimo da pokažemo da važi sledeće

$$t_{DC} - t_{DB} = \frac{2|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{v_C \sin(\varphi + \beta) + v_B \sin\varphi} \tag{3.20}$$

Posmatraćemo pomoćni sistem koji dobijamo kada trougao DCB preslikamo osnom



Slika 3.15: Prikaz trougla dobijenog osnom simetrijom

simetrijom čija je osa prava koja prolazi kroz tačku C i čiji je ugao nagiba $\varphi + \beta/2$, što je prikazano na Slici 3.15. Tada se tačke B i D preslikaju redom u tačke B' i D'. Primetimo da su ugalovi nagiba ravni $D'C, D'B'$ i $B'C$ redom $\varphi + \beta$, φ i $\varphi + \alpha + \beta$. Dakle $\tilde{v_C}$ i $\tilde{v_B}$ su brzine u tačkama C i B' u preslikanom sistemu ako telo kreće iz stanja mirovanja iz tačke D'. Imamo u vidu da brzina u tački C ne zavisi od toga da li se telo kreće duž $D'C$ ili $D'B'C$. Primenom jednačine (3.17) na ravan $B'C$ dobijamo sledeće

$$\tilde{v_C}^2 - \tilde{v_B}^2 = 2g|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)$$

$$(\tilde{v_C} - \tilde{v_B})(\tilde{v_C} + \tilde{v_B}) = 2g|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)$$
$$\tilde{v_C} - \tilde{v_B} = \frac{2g|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{\tilde{v_C} + \tilde{v_B}}$$

Zamenom u jednačinu 3.19 dobijamo

$$t_{DC} - t_{DB} = \frac{\frac{2g|BC|\sin(\varphi+\alpha+\beta)}{\tilde{v_C}+\tilde{v_B}}}{g\sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi+\beta)}} = \frac{2|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{\tilde{v_C}\sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi+\beta)} + \tilde{v_B}\sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi+\beta)}}\ .$$

Imajući u vidu da važi

$$\tilde{v_C}\sqrt{\sin\varphi} = v_C\sqrt{\sin(\varphi+\beta)}, \quad \tilde{v_B}\sqrt{\sin(\varphi+\beta)} = v_B\sqrt{\sin\varphi}\ ,$$

prethodna jednakost postaje

$$t_{DC} - t_{DB} = \frac{2|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{v_C\sqrt{\sin(\varphi+\beta)}\sqrt{\sin(\varphi+\beta)} + v_B\sqrt{\sin\varphi}\sqrt{\sin\varphi}}$$

odnosno dokazali smo jednačinu (3.20)

$$t_{DC} - t_{DB} = \frac{2|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{v_C\sin(\varphi+\beta) + v_B\sin\varphi}\ .$$

Kako na osnovu jednačine (3.18) znamo da je

$$t_{BC}(v_C) = \frac{2|BC|}{v_C + v_B}$$

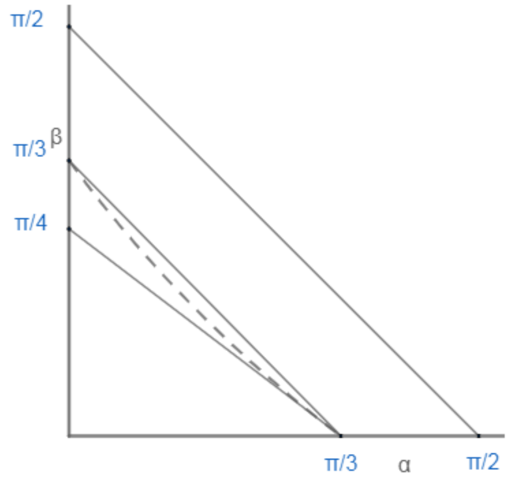
i na osnovu prethodno dobijenih jednakosti imamo da je

$$t_{DC} - t_{DBC} = (t_{DC} - t_{DB}) - t_{BC}(v_B) = \frac{2|BC|\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{v_C\sin(\varphi+\beta) + v_B\sin\varphi} - \frac{2|BC|}{v_C + v_B}$$
$$= \frac{2|BC|}{(v_C + v_B)(v_C\sin(\varphi+\beta) + v_B\sin\varphi)} \cdot \Delta$$

gde je

$$\Delta = (v_C + v_B)\sin(\varphi + \alpha + \beta) - (v_C\sin(\varphi+\beta) + v_B\sin\varphi)$$
$$= (\sin(\varphi + \alpha + \beta) - \sin(\varphi+\beta))v_C + (\sin(\varphi + \alpha + \beta) - \sin\varphi)v_B$$
$$= 2v_C\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2\varphi+\alpha+2\beta}{2} + 2v_B\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{2\varphi+\alpha+\beta}{2}.$$

Primećujemo da je $2\varphi + \alpha + 2\beta = 3\alpha + 4\beta + 2\gamma$ i $2\varphi + \alpha + \beta = 3\alpha + 3\beta + 2\gamma$ te da smo dokazali jednakost (3.16). △



Slika 3.16: Oblast kretanja parametara i kriva $t_{DBC} = t_{BC}$ za $\gamma = 0$

U ovom odeljku daćemo kompletan dokaz Galileove teoreme gde ćemo razmatrati vezu između t_{DBC} i t_{DC} za slučaj kada je $\gamma = 0$ a parametri uzimaju vrednosti koje nisu pokrivene prethodnom teoremom. Slika 16 prikazuje oblast vrednosti parametara (α, β) navedenih u prethodnoj teoremi kao i krivu $t_{DC} = t_{DBC}$ za slučaj kada je $\gamma = 0$.

Razmatramo razliku $t_{DC} - t_{DBC}$ duž pravih $\alpha + \beta = \delta$ gde je $\pi/4 < \delta < \pi/3$ (primetimo da je δ jednak polovini ugla koji odgovara luku CD i da je on jednak uglu φ iz prethodne teoreme za slučaj kada je $\gamma = 0$). Na osnovu Slike 3.16 možemo zaključiti sledeće: kada ugao δ počinje da raste od $\pi/4$ ka $\pi/3$ važi i dalje $t_{DBC} < t_{DC}$ nezavisno od položaja tačke B na luku CD. Kada prava postane tangenta u odnosu na posmatranu krivu, javlja se prelomna tačka i nastaje promena u smislu da nakon te vrednosti razlika $t_{DC} - t_{DBC}$ može biti pozitivna ili negativna u zavisnosti od položaja tačke B na luku CD. Mi želimo i da formalno pokažemo prethodni zaključak.

Ključni zadatak je da odredimo odgovarajuću reprezentaciju krive. Izvešćemo jednačinu koja će nam omogućiti da tačno odredimo koordinate te prelomne tačke.

Teorema 2. *Pretpostavimo da je $\gamma = 0$ i neka je 2δ ugao koji odgovara luku CD. Za $\delta_0 := \arccos(9/16)$ $(2\delta_0 \approx 111,54°)$ važi sledeće:*

(a1) ako je $0 < \delta < \delta_0$ onda je $t_{DBC} < t_{DC}$ za bilo koju tačku B između C i D.

(a2) Ako je $\delta_0 < \delta < \pi/3$ tada postoje tačke B_1, B_2 na luku CD takve da je

$t_{DB_iC} = t_{DC}$ $(i = 1, 2)$ *i, posmatrano suprotno kretanju kazaljke na satu,*

$$t_{DBC} \begin{cases} < t_{DC} \text{ za } B \text{ između } C \text{ i } B_1 \text{ ili } B \text{ između } B_2 \text{ i } D, \\ > t_{DC} \text{ za } B \text{ između } B_1 \text{ i } B_2. \end{cases}$$

Ako je $\delta = \delta_0$ *tačke* B_1 *i* B_2 *poklapaju se sa prelomnom tačkom, čije su koordinate* $\beta = \arccos(3/4)$ *i* $\alpha = \arccos(31/32)$ $(2\beta \approx 82,82^\circ,\ 2\alpha \approx 28,72^\circ)$.

Dokaz. Za $a, b \in R$ koji su istog znaka uvešćemo oznaku $a \sim b$. Na osnovu Teoreme 1 znamo da važi $t_{DC} - t_{DBC} \sim \Delta$ za $\alpha,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = \delta \leq \pi/2$, gde je

$$\Delta = (\sin 2\delta - \sin(\delta + \beta))\upsilon_C + (\sin 2\delta - \sin\delta)\upsilon_B$$

$$= (\sin 2\delta - \sin\delta\cos\beta - \cos\delta\sin\beta)\upsilon_C + \sin\delta(2\cos\delta - 1)\upsilon_B\ .$$

Zamenom poluprečnika kruga sa r imamo

$$\upsilon_C = \sqrt{2g|DC|\sin\delta} = 2\sqrt{gr}\sin\delta \text{ i}$$

$$\upsilon_B = \sqrt{2g|DB|\sin(\delta + \beta)} = 2\sqrt{gr\sin(\delta - \beta)\sin(\delta + \beta)} = 2\sqrt{gr(\cos^2\beta - \cos^2\delta)}\ .$$

Zamenom $\cos\beta = x$ primećujemo da važi $\Delta \sim U_1 + U_2$, gde je

$$U_1 = \sin 2\delta - (\sin\delta)x - \cos\delta\sqrt{1 - x^2},\ U_2 = (2\cos\delta - 1)\sqrt{x^2 - \cos^2\delta}\ .$$

U nastavku bavimo se parametarskom oblašću koja nije pokrivena prvom teoremom, koja je određena sa

$$\pi/4 < \delta < \pi/3,\ \pi - 3\delta < \beta < \delta$$

i koju ćemo nazvati kritična oblast. Na osnovu Teoreme 1 znamo da je U_1 negativno u kritičnj oblasti, dok je U_2 pozitivno. Odatle

$$\Delta \sim (U_2 - U_1)(U_1 + U_2) = (U_2^2 - U_1^2)$$

$$= ((2\cos\delta - 1)\sqrt{x^2 - \cos^2\delta})^2 - (\sin 2\delta - (\sin\delta)x - \cos\delta\sqrt{1 - x^2})^2$$

$$= (4\cos^2\delta - 4\cos\delta + 1)(x^2 - \cos^2\delta) - (\sin^2 2\delta + x^2\sin^2\delta + \cos^2\delta(1 - x^2)$$

$$-2x\sin\delta\sin 2\delta - 2\cos\delta\sin 2\delta\sqrt{1 - x^2} + 2x\sin\delta\cos\delta\sqrt{1 - x^2})$$

$$= 4x^2\cos^2\delta - 4\cos^4\delta - 4x^2\cos\delta + 4\cos^3\delta + x^2 - \cos^2\delta - 4(1 - \cos^2\delta)\cos^2\delta - x^2(1 - \cos^2\delta)$$

$$-\cos^2\delta(1 - x^2) + 4x\cos\delta(1 - \cos^2\delta) + 2\cos\delta\sin 2\delta\sqrt{1 - x^2} - 2x\sin\delta\cos\delta\sqrt{1 - x^2}$$

$$= 6x^2\cos^2\delta - 4x^2\delta + 4\cos^3\delta - 6\cos^2\delta + 4x\cos\delta - 4x\cos^3\delta$$

$$+2\cos\delta\sin 2\delta\sqrt{1-x^2} - 2x\sin\delta\cos\delta\sqrt{1-x^2}$$

$$= 2\cos\delta(3x^2\cos\delta - 2x^2 + 2\cos^2\delta - 3\cos\delta + 2x - 2x\cos^2\delta - (x\sin\delta - \sin 2\delta)\sqrt{1-x^2})$$

$$= 2\cos\delta(2x(1-x) - 3\cos\delta(1-x^2) + 2\cos^2\delta(1-x) - \sin\delta(x - 2\cos\delta)\sqrt{1-x^2})$$

$$= 2\cos\delta((2x - 3\cos\delta - 3x\cos\delta + 2\cos^2\delta)(1-x) - \sin\delta(x - 2\cos\delta)\sqrt{1-x^2})$$

$$= 2\cos\delta\{((2 - 3\cos\delta)x - \cos\delta(3 - 2\cos\delta))(1-x) - \sin\delta(x - 2\cos\delta)\sqrt{1-x^2}\},$$

pa je

$$\Delta \sim W_1\sqrt{1-x} - W_2\sqrt{1+x}$$

gde je

$$W_1 = (2 - 3\cos\delta)x - \cos\delta(3 - 2\cos\delta),\ W_2 = \sin\delta(x - 2\cos\delta)\ .$$

Procenom faktora W_1 i W_2 za $x = \cos\delta$ i $x = 1$ i znajući da je $1/2 < \cos\delta < x < 1$, vidimo da su oba negativna u kritičnoj oblasti. Tako da zamenom $\cos\delta = y$ dobijamo

$$\Delta \sim W_2^2(1+x) - W_1^2(1-x)$$

$$= (1-y^2)(x-2y)^2(1+x) - ((2-3y)x - y(3-2y))^2(1-x)$$

$$= (1 + x - y^2 - xy^2)(x^2 - 4xy + 4y^2) - (1-x)(2x - 3xy - 3y + 2y^2)^2$$

$$= -3x^2 + 5x^3 - 5y^2 - 8y^4 + 12y^3 + 8xy + 16x^2y^2 - 4x^2y$$

$$-13xy^2 + 4xy^3 + 8x^3y^2 - 8x^2y^3 - 12x^3y$$

$$= x^3(5 - 12y + 8y^2) - x^2(3 - y - 4y^2) + xy(5 - 12y + 8y^2)$$

$$-yx^2(5 - 12y + 8y^2) + yx(3 - y - 4y^2) - y^2(5 - 12y + 8y^2)$$

$$= (x-y)x^2(5 - 12y + 8y^2) - (x-y)x(3 - y - 4y^2) + (x-y)y(5 - 12y + 8y^2)$$

$$= (x-y)f(x,y),$$

gde je

$$f(x,y) = (5 - 12y + 8y^2)x^2 - (3 - y - 4y^2)x + y(5 - 12y + 8y^2)\ .$$

U odnosu na promenljive $x = \cos\beta$ i $y = \cos\delta$ čitava parametarska oblast određena je sa $0 \le y < 1$ i $y < x < 1$. Identitet $\cos 3u = \cos u(4\cos^2 u - 3)$ pokazuje da se $\beta = \pi - 3\delta$ transformiše u $x = y(3 - 4y^2)$, tako da je kritična oblast određena sa

$$1/2 < y < 1/\sqrt{2},\ y < x < b(y),\ \text{gde je } b(y) = y(3 - 4y^2)\ .$$

Ono što nam olakšava analizu jeste i to da našu diskriminatu

$$(3 - y - 4y^2)^2 - 4y(5 - 12y + 8y^2)^2$$

možemo zapisati

$$(y - 1)^2(4y - 1)^2(9 - 16y) \ .$$

Kako je $5 - 12y + 8y^2 > 0$, sledi da je $f(x, y) > 0$ za $\frac{9}{16} < y < 1/\sqrt{2}$ i $y < b(y)$, čime smo pokazali deo (a1).
Da bismo pokazali tvrdnju (a2), pokazaćemo da je za $y \in (1/2, 9/16]$
(i) $f(x, y)$ pozitivna za $x = y$ i $x = b(y)$ i
(ii) x koordinata $x(y)$ temena parabole $f(x, y)$ nalazi u intervalu $(y, b(y))$.
Tvrdnja (i) se već vidi iz sledeće reprezentacije

$$f(y, y) = 2y(y + 1)(2y - 1)^2 \text{ i}$$

$$f(b(y), y) = 2(y - 1)^2(8y^2 + 4y - 1)f(y, y) \ .$$

Koordinata $x(y)$ data je sa

$$x(y) = \frac{3 - y - 4y^2}{2(5 - 12y + 8y^2)} \ .$$

Odatle imamo

$$x(y) - y \sim (3 - y - 4y^2) - 2y(5 - 12y + 8y^2) = 3 - 11y + 20y^2 - 16y^3 \ .$$

Ova funkcija je rastuća na R i ima pozitivnu vrednost za $y = 9/16$, što pokazuje da je $x(y) > y$ na intervalu $(1/2, 9/16]$. Gornju granicu možemo dobiti kada potvrdimo da za $y \in (1/2, 9/16]$ važi

$$x(y) < 4/5 < b(9/16) \leq b(y) \ .$$

Kako je $x(9/16) = 3/4$ prelomna tačka ima koordinate

$$\beta = \arccos(3/4), \ \ \alpha = \arccos(9/16) - \arccos(3/4) = \arccos(31/32) \ .$$

Ovim smo dokazali drugu teoremu. △

Reprezentacija krive koju smo dobili u dokazu pokazuje da za $\delta_0 < \delta < \pi/3$ uglovi β_1, β_2 koji određuju pozicije „neutralnih” tačaka B_1, B_2 su dati sa

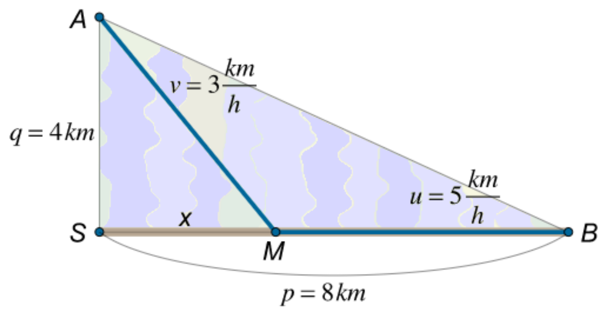
$$\arccos\left(\frac{3 - \cos\delta - 4\cos^2\delta \pm (1 - \cos\delta)(4\cos\delta - 1)\sqrt{9 - 16\cos\delta}}{2(5 - 12\cos\delta + 8\cos^2\delta)}\right) \ .$$

Ovo je dobar primer koji pokazuje kako je ponekad geometrijsko rešenje mnogo elegantnije, jednostavnije i razumljivije od računskog, tj. analitičkog. U ovom slučaju analitički pristup nije dobar za predstavljanje učenicima u školi jer se oslanja na poznavanje inverznih trigonometrijskih funkcija, a može se desiti i da se u čitavom računu lako izgubi iz vida suština problema koji se rešava.

3.3 Zadaci

U nastavku ćemo kroz nekoliko konkretnih primera pokazati potrebu za minimizacijom vremena u realnim situacijama, kao i ulustrovati Galileove zaključke kroz konkretne računske zadatke.

Primer 4. *Pretpostavimo da želite da stignete od tačke A do tačke B. Tačka A se nalazi u šumi gde se možete kretati brzinom od $v = 3\frac{km}{h}$. Međutim, putem se možete kretati brzinom $u = 5\frac{km}{h}$. Rastojanje od tačke A do puta je $q = 4km$, a rastojanje od tačke S do B je $p = 8km$. Kako odabrati tačku M tako da vreme kretanja od tačke A do tačke B bude najmanje moguće?*



Slika 3.17: Grafički prikaz Primera 4

Rešenje. Kako se ovde radi o ravnomernom kretanju ukupno vreme potrebno da stignemo od tačke A do tačke B jednako je zbiru vremena kretanja duž AM i MB. Ako traženo vreme označimo sa T to možemo zapisati

$$T = t_{AM} + t_{MB} = \frac{|AM|}{v} + \frac{|MB|}{u} = \frac{|AM|}{3} + \frac{|MB|}{5} \ .$$

Označimo dužinu SM sa x. Želimo da obe dužine puta $|AM|$ i $|MB|$ izrazimo pomoću x. Primenom Pitagorine teoreme na trogao ASM imamo da je

$$|AM| = \sqrt{|AS|^2 + x^2} = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2} \ , \text{ dok je}$$

$$|MB| = |SB| - x = 8 - x \ .$$

Zamenom dužina $|AM|$ i $|MB|$ u prvu jednačinu dobijamo

$$T = \frac{\sqrt{16 + x^2}}{3} + \frac{8 - x}{5} = T(x) \ .$$

Dakle, traženo vreme je funkcija koja nam zavisi od rastojanja x. Kako želimo da odredimo minimalno vreme, potrebno je naći izvod naše funkcije, te dobijamo

$$T'(x) = (\frac{\sqrt{16 + x^2}}{3} + \frac{8 - x}{5})' = \frac{2x}{6\sqrt{16 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 3\sqrt{16 + x^2}}{15\sqrt{16 + x^2}} \ .$$

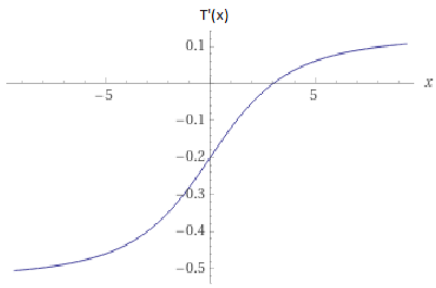
Ostaje nam da nađemo nule prvog izvoda. Kako je reč o razlomku koji je definisan na čitavom skupu realnih brojeva imamo

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x - 3\sqrt{16 + x^2}}{15\sqrt{16 + x^2}} = 0 \Rightarrow 5x - 3\sqrt{16 + x^2} = 0 \ .$$

Ostaje da rešimo poslednju jednakost

$$5x = 3\sqrt{16 + x^2} \Rightarrow \frac{25x^2}{9} = 16 + x^2 \Rightarrow \frac{16x^2}{9} = 16 \Rightarrow x^2 = 9 \ ,$$

odnosno $x = 3$, što se možemo i uveriti grafički sa Slike 3.18 da to jeste tačka lokalnog minimuma. Drugo rešenje $x = -3$ zanemarujemo, s obzirom na to da nam x predstavlja dužinu (koja je uvek pozitivna).



Slika 3.18: Grafik funkcije $T'(x)$

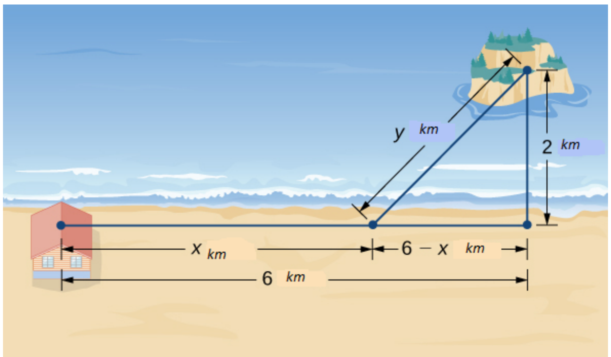
Za kraj možemo samo uporediti vremena kretanja duž puteva $|AS|, |SB|$ i $|AM|$, $|MB|$. Kako je $x = 3$, dužina $|AM|$ biće $|AM| = \sqrt{16 + 9} = 5$, a dužina $|MB| = 5$, te je vreme kretanja u prvom slučaju

$T = \dfrac{|AS|}{3} + \dfrac{|SB|}{5} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{5} = \dfrac{20}{15} + \dfrac{24}{15} = \dfrac{44}{15} =$ 2h 56min, dok je u drugom slučaju

$$T = \frac{|AM|}{3} + \frac{|MB|}{5} = \frac{5}{3} + \frac{5}{5} = \frac{25}{15} + \frac{15}{15} = \frac{40}{15} = 2\text{h } 40\text{min}$$

i zaista vidimo da nam je potrebno manje vremena, tačnije uštedećemo 16 minuta ukoliko „prelomimo" put.

Primer 5. *Ostrvo se nalazi 2km severno u odnosu na najbližu priobalnu tačku. Turista odseda u kućici na obali koja je udaljena 6km zapadno od te tačke i planira da poseti ostrvo. Pretpostavimo da on trči brzinom od* $8\frac{km}{h}$ *i pliva brzinom* $3\frac{km}{h}$. *Koliki put treba da pretrči pre nego što krene sa plivanjem kako bi za najmanje vremena stigao do ostrva?*



Slika 3.19: Grafički prikaz Primera 5

Rešenje. Označimo sa x rastojanje koje je turista pretrčao, a sa y rastojanje koje je preplivao. Neka T bude vreme potrebno da od kućice stigne do ostrva. Želimo da to vreme bude minimalno i ono predstavlja zbir vremena koje je potrebno da pretrči rastojanje x i vremena potrebnog da prepliva rastojanje y. Označimo vreme trčanja sa T_1 i pošto govorimo o ravnomernom kretanju ono je jednako $T_1 = \frac{x}{8}$. Sa T_2 označimo vreme plivanja i ono će biti $T_2 = \frac{y}{3}$, pa je ukupno vreme

$$T = \frac{x}{8} + \frac{y}{3} .$$

Sa Slike 3.19 vidimo da je rastojanje y hipotenuza pravouglog trougla čije su katete 2 km i $6 - x$ km, te na osnovu Pitagorine teoreme važi $2^2 + (6-x)^2 = y^2$, odnosno $y = \sqrt{(6-x)^2 + 4}$. Zato ukupno vreme možemo predstaviti funkcijom

$$T(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{(6-x)^2 + 4}}{3} .$$

Na osnovu Slike 3.19 vidimo da važi $0 \leq x \leq 6$, pa je ovo oblast koju uzimamo u obzir. Pošto nas interesuje minimalno vreme, da bismo našli lokalni minimum potrebno je naći nule prvog izvoda funkcije. Kako je prvi izvod

$$T'(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\frac{[(6-x)^2+4]^{\frac{-1}{2}}}{3} \cdot 2(6-x) = \frac{1}{8} - \frac{(6-x)}{3\sqrt{(6-x)^2+4}} \ ,$$

vidimo da važi

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{6-x}{3\sqrt{(6-x)^2+4}} \ .$$

Otuda imamo

$$3\sqrt{(6-x)^2+4} = 8(6-x) \ ,$$

pa kvadriranjem pethodne jednačine dobijamo

$$9[(6-x)^2+4] = 64(6-x)^2 \text{ odakle sledi}$$

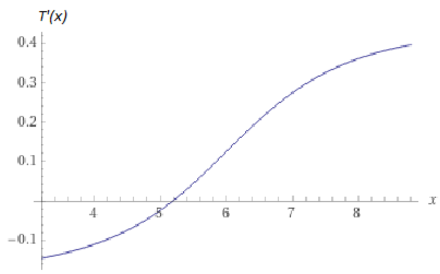
$$55(6-x)^2 = 36 \ .$$

Vidimo da ako je x lokalni minimum onda zadovoljava jednačinu

$$(x-6)^2 = \frac{36}{55} \ ,$$

odnsosno potencijalne tačke su

$$x = 6 \pm \frac{6}{\sqrt{55}} \ .$$



Slika 3.20: Grafik funkcije $T'(x)$

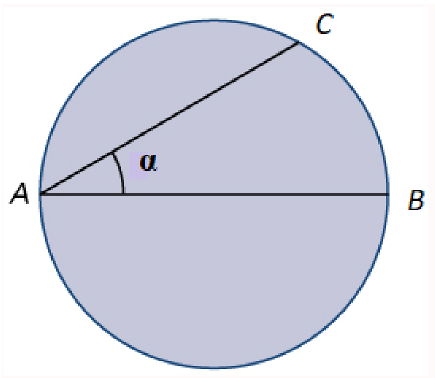
Kako tačka $x = 6 + \frac{6}{\sqrt{55}}$ nije u posmatranoj oblasti, ona nije lokalni minimum. Jedina mogućnost jeste $x = 6 - \frac{6}{\sqrt{55}}$. Ostaje samo da proverimo da li je ona rešenje jednačine $3\sqrt{(6-x)^2+4} = 8(6-x)$. Zamenom vrednosti imamo

$$3\sqrt{(6-(6-\frac{6}{\sqrt{55}}))^2+4} = 8(6-(6-\frac{6}{\sqrt{55}}))$$

$$3\sqrt{\frac{36}{55}+4}=\frac{48}{\sqrt{55}}$$
$$3\sqrt{\frac{256}{55}}=\frac{48}{\sqrt{55}}$$

odakle vidimo da jeste rešenje jednačine i lokalni minimum (što možemo proveriti i na osnovu Slike 3.20). Dakle turista najbrže stiže do ostrva ako pretrči $x \approx 5,19$km i prepliva $y = \sqrt{(6-5,19)^2+4} \approx 2,16$km za šta će mu biti potrebno $T(5,19) = \frac{5,19}{8} + \frac{\sqrt{(6-5,19)^2+4}}{3} \approx 1,39$h.

Primer 6. *Spasilac radi na bazenu kružnog oblika čiji je prečnik* $40m$*. On je na poziciji* A *i treba da stigne do plivača koji se davi i nalazi se na suprotnoj strani, na poziciji* B*. Spasilac pliva brzinom* u*, dok mu je brzina trčanja oko bazena* $v = 3u$*.*
a) Treba odrediti funkciju koja meri ukupno vreme potrebno spasiocu da stigne do davljenika u zavisnosti od ugla plivanja α*.*
b) Za koju vrednost ugla α *spasilac najbrže stiže do davljenika?*



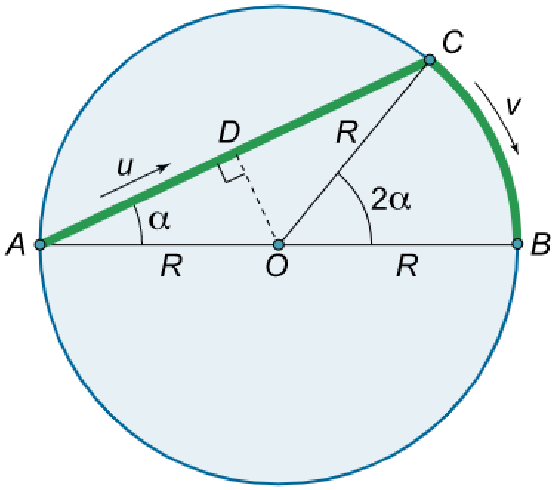
Slika 3.21: Grafički prikaz Primera 6

Rešenje. Označimo poluprečnik bazena sa R i znamo da je $R = 20$m. Razmatramo putanju spasioca koja je kombinacija plivanja i trčanja oko bazena, a koju određuje ugao plivanja $\alpha = \angle CAB$. Centralni ugao $\angle COB$ biće jednak 2α. Posmatrajmo Sliku 3.22. Spasilac treba da prepliva rastojanje AC, čija je dužina

$$|AC| = 2|AD| = 2R\cos\alpha$$

gde je D podnožje normale iz centra O na duž AC, i da pretrči deo bazena od tačke C do tačke B, čija je dužina

$$|CB| = 2\alpha R\ ,$$



Slika 3.22: Grafički prikaz rešenja za Primer 6

gde je ugao α predstavljen u radijanima i uzima vrednosti $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
a) Ukupno vreme kretanja spasioca označimo sa T i ono predstavlja zbir vremena potrebnih da prepliva AC i pretrči CB, tj. $T = T_{AC} + T_{CB}$. Kako pretpostavljamo da spasilac trči i pliva ravnomerno ukupno vreme biće

$$T = T(\alpha) = \frac{|AC|}{u} + \frac{|CB|}{v} = \frac{2R\cos\alpha}{u} + \frac{2\alpha R}{3u} = \frac{2R}{u}(\cos\alpha + \frac{\alpha}{3}) \ .$$

b) Izrazili smo vreme kretanja kao funkciju od ugla α. Da bismo našli minimalno vreme kretanja spasioca prvo ćemo naći prvi izvod te funkcije

$$T'(\alpha) = \left[\frac{2R}{u}(\cos\alpha + \frac{\alpha}{3})\right]' = \frac{2R}{u}(-\sin\alpha + \frac{1}{3}) \ ,$$

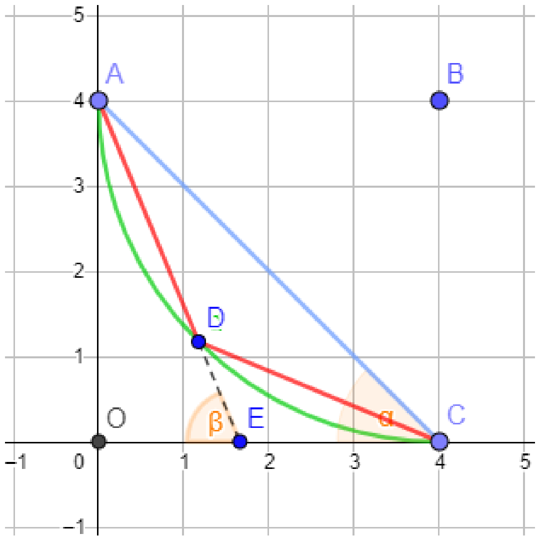
a zatim nulu prvog izvoda

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2R}{u}(-\sin\alpha + \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow -\sin\alpha + \frac{1}{3} = 0 \ .$$

Dakle, vidimo da je $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, odnosno da je lokalni minimum $\alpha = \arcsin(\frac{1}{3}) \approx 19,47^\circ$ $(= 0,34 \text{ rad})$. To znači da spasilac najbrže stiže do davljenika za vreme $T(0,34) = \frac{2R}{u}(\cos 0,34 + \frac{0,34}{3}) = \frac{40}{u}(0,94 + 0,11) = \frac{42}{u}$, koje nam zavisi od brzine plivanja.

Primer 7. *Neka su u Dekartovom koordinatnom sistemu date tačke $A(0,4)$ i $C(4,0)$. Koliko vremena je potrebno da se telo spusti niz strmu ravan AC ako kreće iz stanja mirovanja iz tačke A, a uticaj sile trenja podloge i otpora sredine je zanemarljiv?*

Uporediti ovo vreme sa vremenom kretanja niz putanju AD, DC, gde je D tačka koja polovi luk AC i čije su koordinate $D(1.17, 1.17)$ i sa vremenom kretanja niz sam luk AC (luk AC je četvrtina kruga čiji je centar $B(4,4)$ i poluprečnik 4).



Slika 3.23: Grafički prikaz Primera 7

Rešenje. Dakle, potrebno je izračunati i uporediti vremena kretanja niz tri putanje: strmu ravan AC, „izlomljenu" strmu ravan ADC i luk AC. Krenimo redom.

Označimo vreme kretanja niz AC sa t_1. Za kretanje niz strmu ravan AC znamo da se radi o ravnomerno ubrzanom kretanju sa početnom brzinom 0. Kako su koordinate tačaka $A(0,4)$ i $C(4,0)$ možemo naći dužinu pređenog puta

$$|AC| = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}\ .$$

Kako je trougao AOC jednakokrako pravougli to će nagibni ugao α biti $45°$. Iz formule za dužinu pređenog puta $|AC| = \frac{g \sin \alpha t_1^2}{2}$ imamo da je traženo vreme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2|AC|}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{9,81 \cdot \sin 45°}} = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{9,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{16}{9,81}} = \sqrt{1,63} \approx 1,28\ .$$

Označimo vreme kretanja niz „izlomljenu" strmu ravan ADC sa t_2. Vidimo da je ono jednako zbiru vremena kretanja niz strmu ravan AD i DC, tj. $t_2 = t_{AD} + t_{DC}$. Prvo ćemo izračunati vreme t_{AD}. Posmatrajmo Sliku 3.23. Ugao $\angle ABC$ je centralni nad lukom AC i iznosi $90°$. Ugao $\angle DBC$ je centralni nad lukom DC, koji je polovina luka AC, pa on iznosi $45°$. Ugao $\angle DAC$ je periferijski nad lukom DC i on je $22,5°$, koliko je i ugao $\angle OAD$. Nagibni ugao strme ravni AD je onda $\angle AEO = \beta = 67,5°$. Kako su koordinate tačaka $A(0,4)$ i $D(1.17, 1.17)$ to je pređeni put

$$AD = \sqrt{(1,17-0)^2 + (1,17-4)^2} = \sqrt{9,38} \approx 3,06 \ ,$$

pa traženo vreme možemo naći kao u prethodnom slučaju

$$t_{AD} = \sqrt{\frac{2|AD|}{g\sin\beta}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3,06}{9,81\cdot\sin 67,5°}} = \sqrt{\frac{6,12}{9,81\cdot 0,92}} = \sqrt{\frac{6,12}{9,03}} = \sqrt{0,68} \approx 0,82 \ .$$

Izračunaćemo i brzinu koje telo ima kada stigne do tačke D. Kako znamo da je $v = gt\sin\beta$, zamenom vrednosti u našem slučaju imamo da je

$$v_D = 9,81\cdot 0,82\cdot\sin 67,5° = 9,81\cdot 0,82\cdot 0,92 \approx 7,4 \ .$$

Posmatrajmo sad kretanje niz DC. Kako je trougao ADC jednakokraki, uglovi $\angle DAC$ i $\angle ACD$ su jednaki i iznose po $\alpha/2$. Samim tim je i nagibni ugao $\angle DCE$ jednak $22,5°$. Radi se ravnomerno ubrzanom kretanju sa početnom brzinom v_D. Prvo ćemo izračunati brzinu u krajnjoj tački, C, pomoću formule $v_C = \sqrt{2g(h_a - h_c)}$. Zamenom podataka imamo

$$v_C = \sqrt{2\cdot 9,81\cdot(4-0)} = \sqrt{19,62\cdot 4} = \sqrt{78,48} \approx 8,86 \ .$$

Sa druge strane, znamo da trenutnu brzinu kod ravnomerno ubrzanog kretanja sa početnom brzinom računamo po formuli

$$v_C = v_D + at_{DC} = v_D + gt_{DC}\sin\frac{\alpha}{2} \text{ odakle sledi da je } t_{DC} = \frac{v_C - v_D}{g\sin\frac{\alpha}{2}} \ .$$

Zamenom vrednosti imamo

$$t_{DC} = \frac{8,86-7,4}{9,81\cdot\sin 22,5°} = \frac{1,46}{9,81\cdot 0,38} = \frac{1,46}{3,73} \approx 0,39 \ ,$$

pa je ukupno kretanje niz strmu ravan ADC

$$t_2 = t_{AD} + t_{DC} = 0,82 + 0,39 = 1,21 \ .$$

Ostaje još da odredimo vreme kretanja niz luk AC. Označimo to vreme sa t_3. Znamo da je brzina jednaka $v = \frac{ds}{dt}$, odnosno važi $ds = vdt$. Položaj tela (kako se kreće duž kružnice) možemo opisati jednačinama

$$x = r\cos\theta \text{ i } y = r\sin\theta \ ,$$

gde je r poluprečnik kružnice, a θ opisani ugao. Pređeni put zapravo predstavlja dužinu luka kružnice. Kako je kružnica data parametarskim jednačinama, znamo da važi $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Kako je

$$dx = -r \sin\theta d\theta \text{ i } dy = r\cos\theta d\theta \ ,$$

zamenom u prethodnu jednačinu dobijamo

$$ds = \sqrt{(-r\sin\theta d\theta)^2 + (r\cos\theta d\theta)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} d\theta = r d\theta \tag{3.21}$$

Sa druge strane, na osnovu zakona o održanju energije, znamo da važi $mgy = \frac{mv^2}{2}$, odakle je $v = \sqrt{2gy}$, pa imamo

$$ds = vdt = \sqrt{2gy}dt = \sqrt{2gr\sin\theta}dt \tag{3.22}$$

Izjednačavanjem jednačina (3.21) i (3.22) dobijamo

$$rd\theta = \sqrt{2gr\sin\theta}dt \Rightarrow dt = \frac{rd\theta}{\sqrt{2gr\sin\theta}} \ ,$$

pa traženo vreme kretanja računamo na sledeći način

$$t = t_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{rd\theta}{\sqrt{2gr\sin\theta}} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} d\theta \ .$$

Vrednost poslednjeg integrala iznosi približno $2,62$, a poluprečnik kružnice je 4, pa zamenom podataka u prethodnu jednakost dobijamo da je traženo vreme

$$t_3 = \frac{2}{\sqrt{2\cdot 9,81}} \cdot 2,62 = 0,45 \cdot 2,62 \approx 1,18 \ .$$

Upoređivanjem vremena t_1, t_2 i t_3 primećujemo da se najbrže kretanje odvija duž luka kruga, a najduže duž direktne strme ravni.

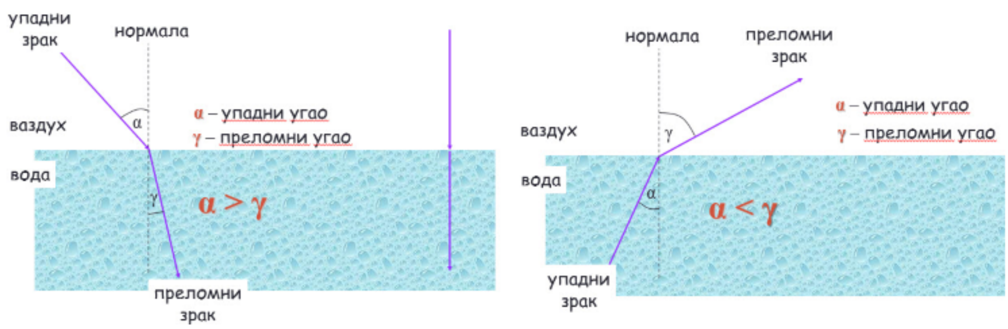
Glava 4

Brahistohrona

U ovom poglavlju opisaćemo krivu koja je rešenje postavljenog problema: putanja takva da telo pod uticajem gravitacione sile od tačke A do tačke B stigne za najmanje moguće vreme. Traženu krivu, brahistohronu, kao odgovor na Bernulijev izazov 1696. godine, otkrilo je pet matematičara. U nastavku prikazaćemo dva načina na koji je izazov rešen, Bernulijev i Njutnov.

4.1 Bernulijevo rešenje

Ideja Bernulijevog rešenja bila je u aproksimaciji vremena kretanja tela od tačke A do B sa kretanjem zraka svetlosti u različitim sredinama. Pre nego što izložimo Bernulijev način podsetićemo se nekih fizičkih pojmova i osobina svetlosti koji će nam biti potrebni.



Slika 4.1: Kretanje svetlosti iz optički ređe u gušću sredinu (levo) i iz optički gušće u ređu sredinu (desno)

Znamo da je brzina prostiranja svetlosti različita u različitim sredinama i da se kroz homogenu sredinu svetlost prostire pravolinijski. Prilikom prelaska iz jedne u drugu sredinu, koje imaju različite optičke gustine, na graničnoj površini koja razdvaja te dve sredine dolazi do promene pravca prostiranja svetlosnih zraka. Ova pojava naziva se prelamanje svetlosti. Kada svetlosni zrak prelazi iz optički ređe u gušću sredinu, upadni ugao je veći od prelomnog ugla - zrak skreće ka normali (što je prikazano na Slici 4.1 levo), a kada prelazi iz optički gušće u ređu sredinu, upadni ugao je manji od prelomnog ugla - zrak skreće od normale (što se vidi na Slici 4.1 desno).

Definicija 5. *Apsolutni indeks prelamanja neke sredine predstavlja odnos brzine svetlosti u vakuumu i u toj sredini. Označava se malim slovom n.*

$$n = \frac{c}{v} \;, \tag{4.1}$$

gde je c brzina svetlosti u vakuumu, a v brzina svetlosti u datoj sredini.

Definicija 6. *Relativni indeks prelamanja predstavlja odnos dve brzine svetlosti u različitim sredinama.*

$$n_r = \frac{v_1}{v_2} \;, \tag{4.2}$$

gde je v_1 brzina svetlosti u prvoj sredini, a v_2 brzina svetlosti u drugoj sredini.

Kako iz jednačine (4.1) sledi

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \text{ i } v_2 = \frac{c}{n_2}$$

i zamenom u jednačinu (4.2) dobijamo

$$n_r = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.3}$$

gde su n_1 i n_2 apsolutni indeksi prelamanja za prvu, odnosno drugu sredinu.

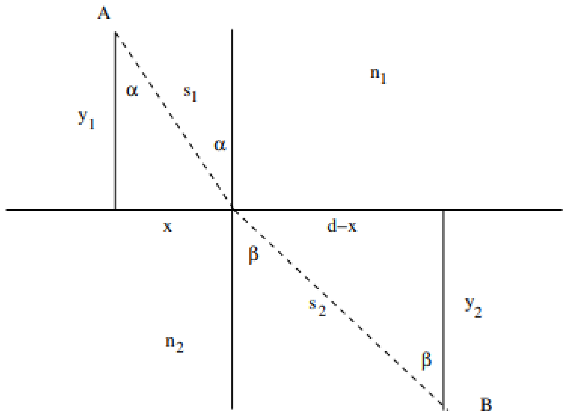
Definicija 7. *Optička dužina puta je proizvod apsolutnog indeksa prelamanja sredine i geometrijske dužine puta koju je svetlost prešla. Označićemo je malim slovom l.*

$$l = n \cdot s \;, \tag{4.4}$$

gde je n apsolutni indeks prelamanja, a s geometrijska dužina puta.

Fermaov[1] princip kaže da se svetlosni zrak prostire tako da mu je optička dužina puta najmanja moguća. Posmatrajmo Sliku 4.2. Interesuje nas kako se prostire

[1]Pierre de Fermat (1601-1665) bio je, pored Dekarta, jedan od najznačajnih matematičara Francuske XVII veka



Slika 4.2: Dužina optičkog puta između tačaka A i B

svetlosni zrak između tačaka A i B. Neka su:
$n_1,\ n_2$ - apsolutni indeks prelamanja prve, odnosno druge sredine,
$s_1,\ s_2$ - gemetrijska dužina puta u prvoj, odnosno drugoj sredini,
α - upadni ugao,
β - prelomni ugao,
d - rastojanje između x koordinata tačaka A i B.

Na osnovu jednačine (4.4) znamo da važi

$$l = n_1 s_1 + n_2 s_2$$

$$s_1^2 = x^2 + y_1^2,\ s_2^2 = (d-x)^2 + y_2^2$$
$$l = n_1\sqrt{x^2+y_1^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2+y_2^2}\ .$$

Kako je uslov za minimum optičkog puta $\frac{dl}{dx} = 0$ dobijamo

$$\frac{dl}{dx} = n_1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y_1^2}} - n_2\frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2+y_2^2}} = 0$$

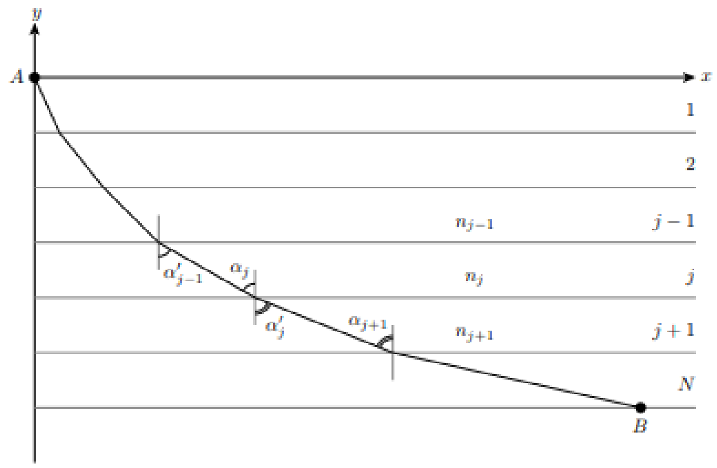
$$n_1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y_1^2}} = n_2\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+y_2^2}}$$
$$n_1\frac{x}{s_1} = n_2\frac{d-x}{s_2}$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta\ . \tag{4.5}$$

Jednačina (4.5) zapravo predstavlja zakon prelamanja svetlosti, odnosno Snelov[2] zakon i vidimo da je zakon direktna posledica Fermaovog principa. Iz jednačine (4.1) i jednačine (4.5) vidimo da Snelov zakon može biti zapisan i u sledećem obliku

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}\,. \tag{4.6}$$

Bernuli je dakle uspostavio analogiju u kojoj problem brahistohrone poistovećuje sa kretanjem svetlosnog zraka kroz beskonačan broj horizontalnih slojeva tankih sredina različitih optičkih gustina. Bitan uslov je da svaki naredni sloj ima optičku gustinu manju od prethodnog, jer se tada povećava prelomni ugao, a samim tim i brzina svetlosti. Putanja koju svetlosni zrak tada opisuje biće izlomljena linija (pogledati Sliku 4.3). Bernuli dakle poistovećuje kretanje svetlosnog zraka, čija se brzina u ovom slučaju povećava, sa kretanjem tela od tačke A do B pod uticajem gravitacione sile, čija brzina takođe ravnomerno raste. Otuda zaključuje da, ako bismo se vodili Fermaovim principom, naše telo stiže u tačku B za najmanje moguće vreme.



Slika 4.3: Grafički prikaz Bernulijeve ideje: svetlosni zrak prilikom kretanja prati izlomljenu pravu liniju. Sa desne sa $n_j,\ j = 1, 2, ..., N$ označeni su apsolutni indeksi prelamanja sredina različitih optičkih gustina

Primećujemo da u svakoj tački preloma putanje svetlosnog zraka možemo primeniti Snelov zakon, odakle dobijamo

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_1'}{v_1'} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\alpha_2'}{v_2'} = ... = \frac{\sin\alpha_{N-1}'}{v_{N-1}'} = \frac{\sin\alpha_N}{v_N} = k$$

[2]Willebrord Snell van Royen (1580-1626) bio je holandski matematičar i astronom

gde je k neka konstanta. Ono što takođe treba imati u vidu da prilikom kretanja tela od tačke A do tačke B važi zakon održanja mehaničke energije, koji kaže da je mehanička energija tela jednaka zbiru kinetičke i potencijalne energije tog tela. Ukupna mehanička energija tela koje slobodno pada jednaka je u svakom položaju, odnosno ostaje stalna tokom kretanja tela

$$E = E_k + E_p = const \ ,$$

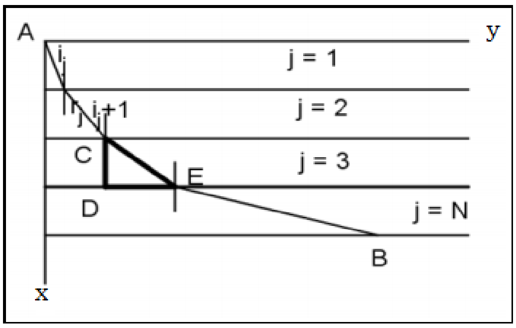
pri čemu je $E_k = \frac{1}{2}mv^2, \ E_p = mgh$.

Kako naše telo započinje kretanje iz stanja mirovanja iz tačke A zaključujemo da je u tom trenutku kinetička enegrije tela $E_k = 0$, a mehanička energija $E = E_p$. Kada stigne u tačku B telo ima kinetičku, ali više nema potencijanu enegriju pa je mehanička energija $E = E_k$. Na osnovu zakona održanja mehaničke energije sledi

$$E_p = E_k \ ,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \ ,$$

$$v^2 = 2gh = ah \ , \ a = const \ \ (a = 2g) \ . \tag{4.7}$$

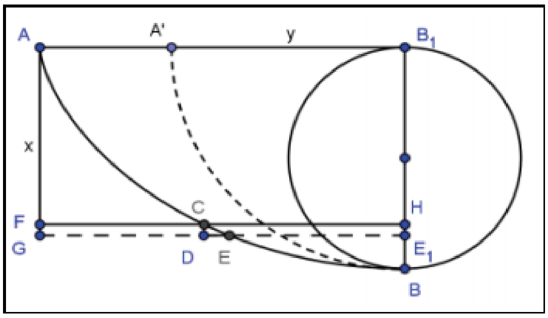


Slika 4.4: Kretanje svetlosnog zraka u jednoj od sredina

Posmatrajmo sada Sliku 4.4. Tu razmatramo kretanje svetlosnog zraka kroz samo jednu od sredina (u ovom slučaju treću po redu). Trougao CDE je pravougli. Sa druge strane, na Slici 4.5 imamo kretanje našeg tela. Kriva ACB je brahistohrona, a segment CE (iako je deo krive) poistovećujemo sa duži jer je male dužine.

Posmatranjem trougla CDE sa Slike 4.4 vidimo da je

$$CD = dx \quad , \quad DE = dy \quad , \quad CE = ds$$



Slika 4.5: Kretanje tela od A do B i analogija sa kretanjem svetlosnog zraka

i da važi

$$CE^2 = CD^2 + DE^2$$

odnosno

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ .$$

Neka je $\angle DCE = \alpha$ i to je prelomni ugao svetlosnog zraka, pa na osnovu Snelovog zakona znamo da je

$$\sin\alpha = kv$$

$$\frac{dy}{ds} = kv$$

$$dy = kvds = kv\sqrt{dx^2 + dy^2}\ .$$

Ako zamenimo konstantu k Bernulijevom konstantom $1/a$ prethodna jednačina postaje

$$dy = \frac{v}{a}\sqrt{dx^2 + dy^2}\ .$$

Zatim prethodnu jednačinu rešimo po dy

$$dy = \frac{v\sqrt{dx^2 + dy^2}}{a} = v\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{a^2}} = vdx\sqrt{\frac{1 + (\frac{dy}{dx})^2}{a^2}} = \frac{vdx}{\sqrt{\frac{a^2}{1+tg^2\alpha}}} = \frac{vdx}{\sqrt{\frac{a^2}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}}$$

$$dy = \frac{vdx}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha}} = \frac{vdx}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\alpha)}} = \frac{vdx}{\sqrt{a^2(1-k^2v^2)}}$$

$$dy = \frac{vdx}{\sqrt{a^2 - v^2}} \tag{4.8}$$

Poslednja jednakost koju smo dobili jeste diferencijalna jednačina brahistohrone. Iz jednačine (4.7) znamo čemu je jednaka brzina našeg tela i primećujemo da je visina h zapravo jednaka dužini x sa Slike 4.5 , te kad te podatke zamenimo u jednačinu (4.8) dobijamo

$$dy = \frac{\sqrt{ax}dx}{\sqrt{a^2-ax}} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx \ .$$

Poslednju jednakost možemo zapisati i na sledeći način

$$\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx = \frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2}\frac{adx-2xdx}{\sqrt{ax-x^2}} \ . \tag{4.9}$$

Integracijom prethodne jednakosti za svaki od razlomaka imamo

$$\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx = \int ydy = y \ ,$$

$$\int\frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int\frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax(1-\frac{x}{a})}} = \int\frac{a}{\sqrt{1-t^2}}dt = a\cdot\arcsin t = a\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}$$

gde smo uveli smenu $\sqrt{\frac{x}{a}} = t, \ \frac{dx}{2\sqrt{ax}} = dt$ i

$$\int\frac{1}{2}\frac{adx-2x}{\sqrt{ax-x^2}} = \int\frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int\frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}dt = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ax-x^2}$$

gde smo uveli smenu $ax-x^2 = t, \ (a-2x)dx = dt$. Dakle, integracijom jednačine 4.9 dobili smo

$$y = a\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax-x^2} \ .$$

Da bismo se uverili da je brahistohrona cikloida (što je Bernuli shvatio već na osnovu jednačine 4.8) zamenićemo $x = \frac{1}{2}a(1-\cos\theta)$, što je jedna od parametarskih jednačina cikloide, u prethodnu jednačinu. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} y &= a\cdot\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)} - \sqrt{\frac{1}{2}a^2(1-\cos\theta) - \frac{1}{4}a^2(1-\cos\theta)^2} \\ &= a\cdot\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}2\sin^2\frac{\theta}{2}} - \sqrt{\frac{2a^2-2a^2\cos\theta-a^2+2a^2\cos\theta-a^2\cos^2\theta}{4}} \\ &= a\cdot\arcsin(\sin\frac{\theta}{2}) - \sqrt{\frac{a^2-a^2\cos^2\theta}{4}} = a\frac{\theta}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta} \end{aligned}$$

odnosno

$$y = \frac{1}{2}a\theta - \frac{1}{2}a\sin\theta \ .$$

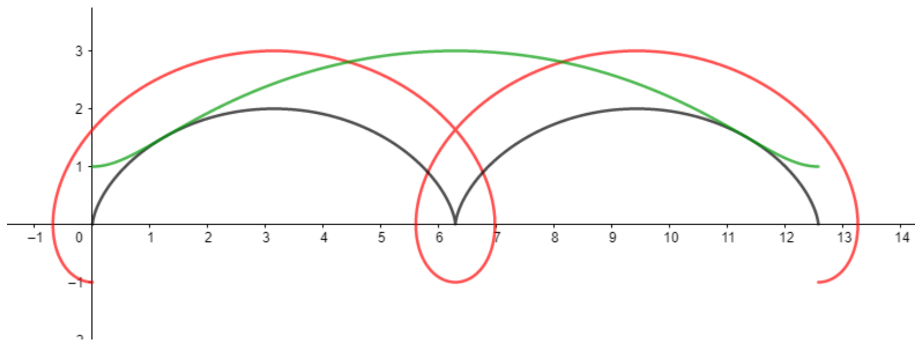
Ukoliko još zamenimo $r = \frac{a}{2}$ naše jednačine postaju

$$x = r(1-\cos\theta) \ , \ y = r(\theta-\sin\theta)$$

što su osnovne parametarske jednačine cikloide.

4.2 Njutnovo rešenje

Cikloida je kriva koja opisuje putanju kretanja jedne fiksirane tačke na obodu kruga koji se kotrlja bez klizanja po pravoj. Kroz istoriju mnogi naučnici bavili su se izučavanjem cikloide. Galileo je 1599. godine pokušao da odredi površinu ispod luka cikloide, ali je više uspeha u tome imao njegov učenik Toričeli[3], nakon koga su do rešenja došli i Dekart[4], Roberval[5] i Ferma. Roberval je 1634. godine odredio i dužinu luka cikloide. Anegdota kaže i da je Paskal odustao od matematike zbog teologije, ali je zbog svoje zubobolje počeo da razmišlja o pojedinim problemima cikloide. Osam dana nakon prestanka zubobolje, shvativši to kao znak da treba da nastavi sa istraživanjem, njegov rad bio je gotov.



Slika 4.6: Različiti tipovi cikloide u zavisnosti od pozicije tačke u odnosu na centar kruga: tačka je od centra kruga na rastojanju manjem od poluprečnika kruga (crvena cikloida) i na rastojanju većem od poluprečnika kruga (zelena cikloida)

Jednačina cikloide, koja prolazi kroz koordinatni početak, a nastaje kotrljanjem kruga poluprečnika r je

$$x = r(t - \sin t) \quad , \quad y = r(1 - \cos t) \ ,$$

gde je t parametar koji odgovara uglu rotacije kruga.

Njutnovo rešenje problema brahistohrone oslanja se na osobine cikloide koje su u to vreme bile poznate. Naime, holandski matematičar i fizičar Kristijan Hajgens[6],

[3]Evangelista Torricelli (1608-1647) bio je italijanski matematičar i astronom

[4]René Descartes (1596-1650) bio je francuski filozof, matematičar i naučnik, čije je delo *La geometrie* postavilo osnove današnjoj analitičkoj geometriji

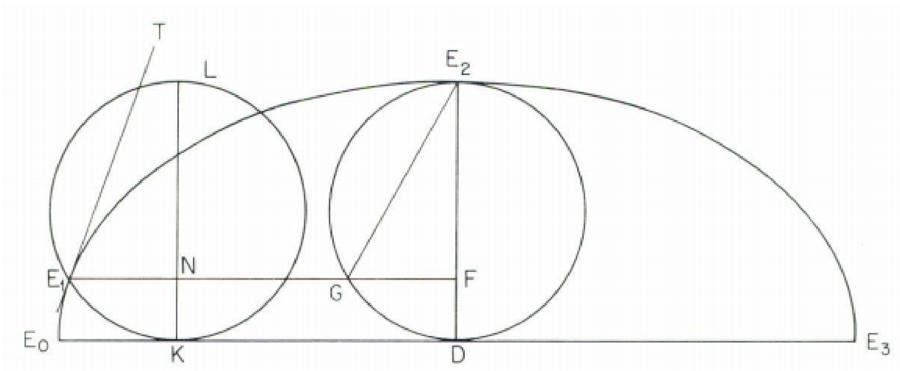
[5]Gilles Personne de Roberval (1602–1675) bio je francuski matematičar

[6]Christiaan Huygens (1629 - 1695) bio je holandski matematičar, astronom i fizičar

koji je izumeo časovnik sa klatnom, u svom delu objavljenom 1673. godine[7], između ostalog, bavio se i geometrijskim i mehaničkim svojstvima cikloide.

Posmatrajmo cikloidu koju opisuje tačka E sa kružnice koja se kotrlja, bez klizanja, duž duži E_0E_3, koju zovemo bazom cikloide. Na Slici 4.7 vidimo da kada kružnica tokom kotrljanja stigne do proizvoljne tačke K, tačka E sa kružnice čije kretanje opisuje cikloidu nalazi se na poziciji E_1; kada kružnica prilikom kotrljanja stigne do tačke D, posmatrana tačka E dolazi u poziciju E_2, koja se nalazi na prečniku DE_2 kružnice, koji se naziva osa cikloide. Luk $[E_0E_1E_2E_3]$ predstavlja konkavnu cikloidu. Primećujemo da je dužina luka $[E_1K]$ jednaka dužini duži E_0K, kao posledica kotrljanja kružnice bez klizanja. Neka je E_1NGF duž paralelna bazi cikloide E_0E_3, koja seče kružnicu DGE_2 u tački G. Nacrtajmo duž GE_2. Navešćemo dve glavne geometrijske osobine cikloide:

1. dužina luka $[GE_2]$ jednaka je dužini duži E_1G
2. da bismo konstruisali tangentu u proizvoljnoj tački E_1 cikloide dovoljno je da nacrtamo pravu E_1T koja je paralelna pravoj GE_2.



Slika 4.7: Geometrijske osobine cikloide

Neka je ABC konveksna cikloida, čija je osa AD (Slika 4.8). Izaberimo proizvoljno tačku B sa cikloide, nacrtajmo horizontalu BF, polukrug FHA i tangentu BQ, koja seče horizontalu AQ u tački Q. Neka je GE proizvoljna horizontala ispod prave BF, koja seče cikloidu u tački E, tangentu BQ u tački I, polukrug FHA u tački H i osu AD u tački G. Navešćemo najvažnija mehanička svojstva cikloide:

[7]Naziv dela u originalu je *Horologium oscillatorium sive de motu pendularium* i bilo je posvećeno Luju XIV

1. vreme $t_B(\mathrm{arc}[BE])$ potrebno da se pređe luk BE direktno je proporcionalno dužini luka $[FH]$, tačnije važi

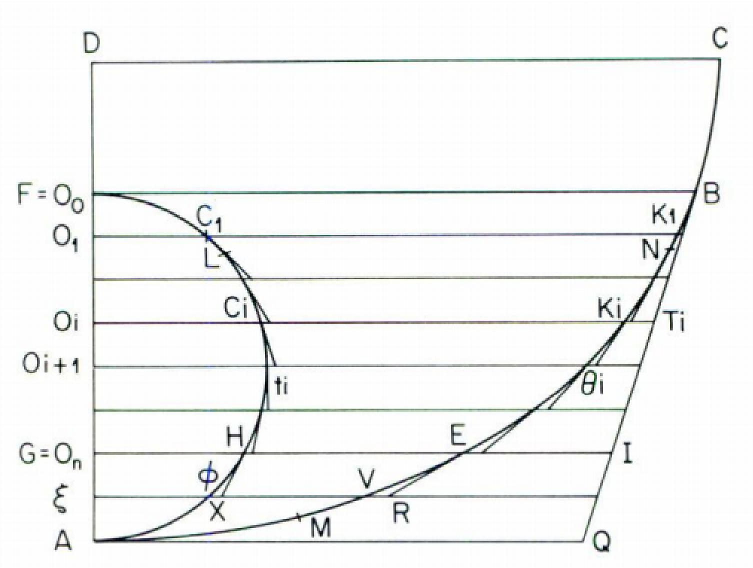
$$\frac{t_B(\mathrm{arc}[BE])}{t_{BQ}(BI)} = 2\frac{\mathrm{arc[FH]}}{|FG|} \ ,$$

gde je $t_{BQ}(BI)$ vreme potrebno da se pređe tangenta BI brzinom koja se stiče prilikom kretanja od tačke B do tačke Q

2. vreme potrebno da se pređe luk $[BA]$ ne zavisi od pozicije tačke B

3. vremena $t_B(\mathrm{arc}[BE])$ koje je potrebno da se pređe luk $[BE]$ i vremena $t_B(\mathrm{arc}[EA])$ potrebnog da se pređe luk $[EA]$, nakon kretanja niz luk $[BE]$, jednak je odnosu dužina luka $[FH]$ i $[HA]$, tj. važi

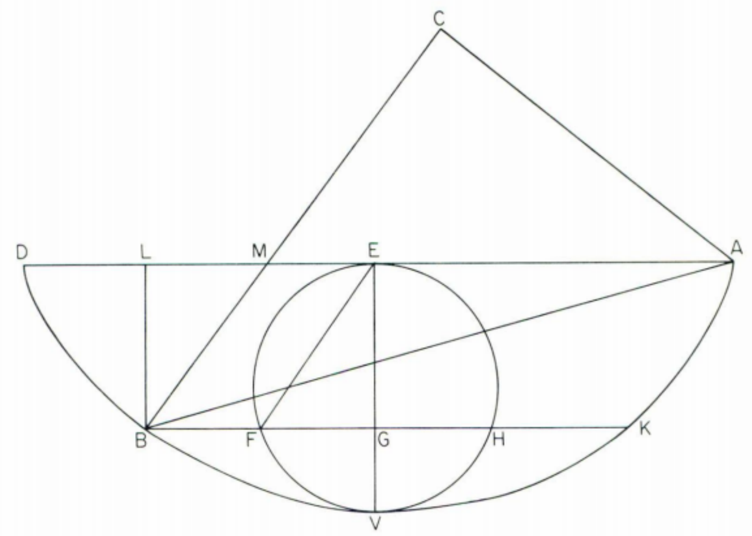
$$\frac{t_B(\mathrm{arc[BE]})}{t_B(\mathrm{arc[EA]})} = \frac{\mathrm{arc}[FH]}{\mathrm{arc}[HA]} \ .$$



Slika 4.8: Mehaničke osobine cikloide

Njutn je Bernulijev izazov rešio za kratko vreme. O tome kako je znao da je tražena putanja minimalnog vremena deo luka cikloide istoričari nisu našli konkretne zapise. Njegovom rešenju prethodi teorema o osobinama cikolide, koja će, uz rešenje, biti izložena u nastavku.

Teorema 3. *Neka je data cikloida AVD, čija baza AD je paralelna horizontu i teme V upravljeno ka gore. Neka je prava AB povučena iz A i seče cikloidu u B, prava BC povučena iz B i normalna na cikloidu u B, prava AC povučena iz tačke A normalna na BC. Tada je odnos vremena za koje telo pređe put AB, ako kreće iz stanja mirovanja, i vremena potrebnog da pređe luk [AVB] jednak odnosu dužine puteva AB i AC.*



Slika 4.9: Ilustracija Njutnove teoreme o cikloidi

Dokaz. Posmatrajmo pravu BL kroz tačku B, koja je paralelna osi cikloide VE, i pravu BK paralelnu bazi AD, koja seče osu cikloide u tački G, krug koji generiše cikloidu u tačkama F i H, i cikloidu u tački K. Povucimo pravu EF, koja je na osnovu geometrijskog svojstva 2 cikloide, paralelna sa BC. Odatle sledi da su jednake dužine duži BM i EF, kao i EM i BF, a na osnovu geometrijskog svojstva 1 cikloide znamo da je dužina duži BF jednaka dužini luka $[VF]$, pa je otuda dužina duži AM jednaka dužini luka $[EHVF]$.

Označimo vreme kretanja koje telo započinje iz stanja mirovanja duž AV sa t_{AV}, a vreme slobodnog pada duž EV sa t_{EV}. Hajgens je dokazao da za ova dva vremena važi odnos

$$\frac{t_{AV}}{t_{EV}} = \frac{[EHV]}{|EV|}\ , \tag{4.10}$$

gde je $|EV|$ dužina duži EV. Takođe znamo (na osnovu mehaničkog svojstva 3) da se vreme kretanja duž luka $[VB]$, nakon kretanja duž luka $[AV]$ (koje je svakako jednako vremenu kretanja duž luka $[KV]$ nakon kretanja duž luka $[AK]$), prema vremenu kretanja duž luka $[AV]$ odnosi kao dužina luka $[VF]$ prema dužini polukruga $[VFE]$, odnosno

$$\frac{t_{VB}}{t_{AV}} = \frac{[VF]}{[VFE]} \tag{4.11}$$

Na osnovu jednakosti (4.11) i jednakosti (4.10) sledi da važi i

$$\frac{t_{VB}}{t_{AV}} \cdot \frac{t_{AV}}{t_{EV}} = \frac{[VF]}{[VFE]} \cdot \frac{[EHV]}{|EV|}$$

odnosno

$$\frac{t_{[VB]}}{t_{EV}} = \frac{[VF]}{|EV|} \tag{4.12}$$

Sabiranjem jednačina (4.10) i (4.12) dobijamo sledeću jednakost

$$\frac{t_{[AV]} + t_{[VB]}}{t_{EV}} = \frac{[EHV] + [VF]}{|EV|}$$

$$\frac{t_{[AVB]}}{t_{EV}} = \frac{[EHVF]}{|EV|} \tag{4.13}$$

gde vidimo da je odnos vremena potrebnog da se pređe luk $[AVB]$ i vremena koje odgovara slobodnom padu duž EV jednak odnosu dužine luka $[EHVF]$ i dužine duži EV. Međutim, vreme slobodnog pada duž EV se prema vremenu slobodnog pada duž LB odnosi kao dužina duži EV prema dužini duži EF (posledica sličnosti trouglova EFG i EFV), odnosno važi

$$\frac{t_{EV}}{t_{LB}} = \frac{|EV|}{|EF|} \ . \tag{4.14}$$

Iz jednačina (4.13) i (4.14) sledi da važi i jednakost

$$\frac{t_{[AVB]}}{t_{EV}} \cdot \frac{t_{EV}}{t_{LB}} = \frac{[EHVF]}{|EV|} \cdot \frac{|EV|}{|EF|}$$

odnosno

$$\frac{t_{[AVB]}}{t_{LB}} = \frac{[EHVF]}{|EF|} \ .$$

Kako je dužina luka $[EHVF]$ jednaka dužini duži AM i dužina duži EF jednaka dužini duži MB, prethodna jednakost postaje

$$\frac{t_{[AVB]}}{t_{LB}} = \frac{|AM|}{|MB|} \ . \tag{4.15}$$

Znamo i da je odnos vremena slobodnog pada duž LB i vremena kretanja duž AB jednak odnosu dužina duži LB i AB, tj.

$$\frac{t_{LB}}{t_{AB}} = \frac{|LB|}{|AB|}\,. \tag{4.16}$$

Na osnovu jednačina (4.15) i (4.16) sledi jednakost

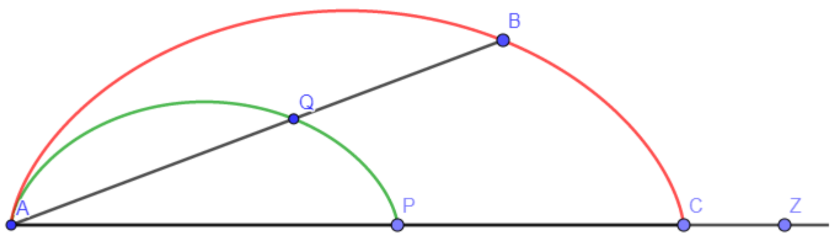
$$\frac{t_{[AVB]}}{t_{LB}} \cdot \frac{t_{LB}}{t_{AB}} = \frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|LB|}{|AB|}\,.$$

Kako je $|AM| \cdot |LB| = |MB| \cdot |AC|$ (dvostruke površine trougla MBA), prethodna jednakost postaje

$$\frac{t_{[AVB]}}{t_{AB}} = \frac{|MB| \cdot |AC|}{|MB| \cdot |BA|} = \frac{|AC|}{|AB|}\,,$$

čime je dokaz teoreme završen. △

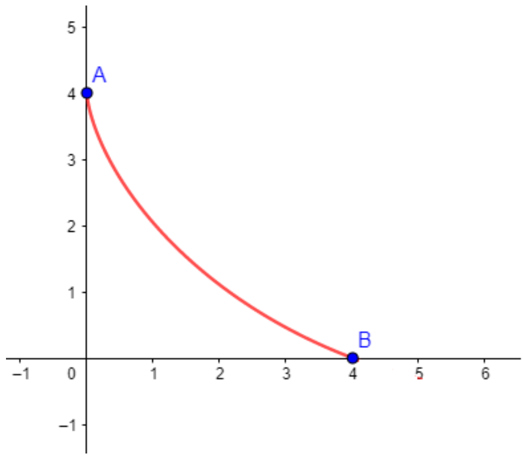
Ostaje još da odgovorimo na pitanje kako opisati cikloidu, odnosno brahistohronu, koja prolazi kroz date tačke A i B, između kojih naše telo počinje i završava kretanje. Njutnovo objašnjenje je sledeće: iz date tačke A povucimo beskonačnu pravu $APCZ$, paralelnu horizontu, nad kojom ćemo opisati proizvoljnu cikloidu AQP, koja seče duž AB u tački Q i čija je baza AP, kao i cikloidu ABC, čija se baza i visina odnose prema bazi i visini prve cikloide kao dužina duži AB prema dužini duži AQ. Druga cikloida prolazi kroz tačku B i jeste tražena putanja za koju telo najbrže stiže od tačke A do tačke B, krećući se samo pod dejstvom gravitacione sile.



Slika 4.10: Njutnovo rešenje brahistohrone

4.3 Zadaci

Primer 8. *Posmatrajmo Primer 7. Izračunaćemo još jedno vreme kretanja, po brahistohroni koja povezuje tačke* $A(0,4)$ *i* $B(4,0)$.



Slika 4.11: Brahistohrona koja povezuje tačke A i B

Rešenje. Znamo da kretanje tela po ovoj putanji opisuju jednačine $x = r(1 - \cos\theta)$, $y = r(t - \sin\theta)$, gde je r poluprečnik kružnice koja generiše cikloidu (brahistohronu), a θ pređeni ugao za dati položaj. U našem slučaju, brahistohrona koja prolazi kroz date tačke $A(0,4)$ i $B(4,0)$ data je u sledećem obliku

$$x = r(\theta - \sin\theta) \quad , \quad y = -r(1 - \cos\theta) + 4 \ .$$

Kako bismo odredili poluprečnik kružnice koja generiše ovu brahistohronu (r) i opisani ugao (θ), rešićemo prethodne jednačine za krajnji položaj, odnosno za tačku $B(4,0)$. Zamenom koordinata prethodne jednačine postaju

$$4 = r(\theta - \sin\theta) \ , \ 0 = -r(1 - \cos\theta) + 4$$

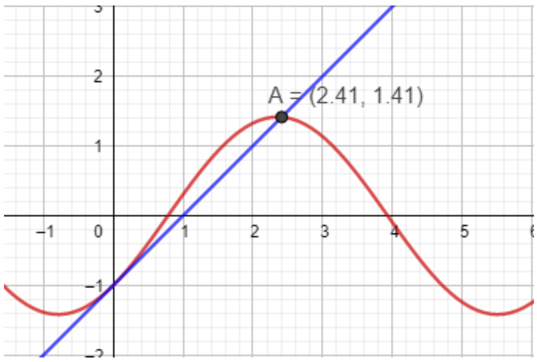
odnosno

$$4 = r(\theta - \sin\theta) \ , \ 4 = r(1 - \cos\theta) \ .$$

Zapravo, preostaje nam da rešimo jednačinu $1 - \cos\theta = \theta - \sin\theta$, odnosno

$$\sin\theta - \cos\theta = \theta - 1 \ .$$

Prethodnu jednačinu najbolje možemo rešiti grafički, gde će θ biti presek krive $\sin\theta - \cos\theta$ i prave $\theta - 1$ (Slika 4.12). Vidimo da je traženi ugao $\theta = \theta_0 = 2,41$. Sada



Slika 4.12: Presek krive $\sin t - \cos t$ i $t - 1$

možemo naći poluprečnik kružnice koja generiše brahistohronu. Zamenom vrednosti θ u jednačinu $r(1 - \cos\theta) = 4$ dobijamo

$$r = \frac{4}{1 - \cos 2,41} = \frac{4}{1 + 0,74} = \frac{4}{1,74} \approx 2,3 \ .$$

Znamo da važi $ds = vdt$. Za početak translirajmo brahistohronu tako da počinje iz koordinatnog početka (posmatramo putanju od tačke $O(0,0)$ do tačke $B'(4,-4)$, što ne utiče na promenu vrednosti poluprečnika i ugla). U tom slučaju, položaj tela prilikom kretanja opisuju jednačine

$$x = r(\theta - \sin\theta) \quad , \quad y = -r(1 - \cos\theta) \ .$$

Kako je $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ i

$$dx = r(1 - \cos\theta)d\theta \quad , \quad dy = -r\sin\theta d\theta$$

dobijamo da je

$$ds^2 = [r^2(1 - \cos\theta) + r^2\sin^2\theta]d\theta^2 = r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta^2$$

odnosno

$$ds^2 = 2r^2(1 - \cos\theta)d\theta^2 \ . \tag{4.17}$$

Na osnovu zakona o održanju energije znamo da je $mgy = \frac{mv^2}{2}$, odakle je $v = \sqrt{2gy}$ odnosno važi

$$ds = \sqrt{2gy}dt = \sqrt{-2gr(1 - \cos\theta)}dt \ . \tag{4.18}$$

Iz jednačina (4.17) i (4.18) sledi jednakost

$$2r^2(1 - \cos\theta)d\theta^2 = 2gr(1 - \cos\theta)dt^2 \ .$$

Kako je

$$r d\theta^2 = g d\theta^2 \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{r}{g}} d\theta \Rightarrow t = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{r}{g}} d\theta$$

pa je traženo vreme

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \theta_0 = \sqrt{\frac{2,29}{9,81}} \cdot 2,41 \approx 1,16 \ .$$

Ukoliko uporedimo ovo vreme sa vremenima kretanja koja smo dobili u Primeru 7 vidimo da sa najbrže kretanje zaista odvija duž brahistohrone.

Glava 5

Zaključak

Problem brahistohrone ima centralnu ulogu u istorijskom razvoju fizike. Bernulijev izazov i načini na koji je rešen, ne samo da je testirao znanja i umeća Lajbnica, Njutna, Lopitala, već je postavio osnovu i bio odskočna daska za razvoj mnogih oblasti, kako matematike, tako i fizike. Rešavanje problema brahistohrone predstavljao je začetak varijacione matematike, oblasti kojoj su najveći doprinos dali Ojler i Lagranž. Značajan doprinos bio je i u izučavanju problema kretanja u fizici, posebno kada je reč o putanjama koje su opisane takozvanim mehaničkim krivama.

Cilj ovog rada je da se tema, na razumljiv i jasan način, približi srednjoškolskom gradivu. Problem brahistohrone, pored bogate istorijske pozadine koji temu čine interesantnom, je odličan primer kako se učenicima mogu prikazati povezanost i primena matematičkog umeća i fizičkih pojava koje nas okružuju. Tema je obrađena u tri faze, koje na neki način i prate složenost materije. Svako poglavlje praćeno je realnim primerima, koji ilustruju primenu prethodno definisanih pojmova i zakonitosti.

Bibliografija

[1] Babb, Jeff and Currie, James, *The Brachistochrone Problem: Mathematics for a Broad Audience via a Large Context Problem*, The Mathematics Enthusiast: Vol. 5 : No. 2 , Article 2, 2008, dostupno na https://scholarworks.umt.edu/tme/vol5/iss2/2

[2] Henk W. Broer, *Bernoulli's light ray solution of the brachistochrone problem through Hamilton's eyes*, dostupno na https://www.math.rug.nl/ broer/pdf/ws-ijbc.pdf

[3] Galileo Galilej, *Rasprave i matematički dokazi: o dve nove nauke koje se bave mehanikom i lokalnim kretanjima*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Novi Sad, 2013.

[4] Herman Erlichson, *Galileo's Work on Swiftest Descent from a Circle and How He Almost Proved the Circle Itself Was the Minimum Time Path*, The American Mathematical Monthly, Vol. 105, No. 4, pp. 338-347, 1998

[5] Herman Erlichson, *Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time*, Eur. J. Phys., Vol. 20, pp. 299-304, 1999

[6] Mark Levi, *The mathematical mechanic using physical reasoning to solve problems*, Princeton University Press, pp. 104-108, 2009

[7] Robert Mandl, Thomas Pühringer and Maximilian Thaler, *Analytic Approach to Galileo's Theorem on the Descent Time Along Two-Chord Paths in a Circle*, The American Mathematical Monthly, Vol. 119, No. 6, pp. 468-476, 2012

[8] J J O'Connor, E F Robertson, *The brachistochrone problem*, 2002, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone/

[9] Radhakrishnamurty Padyala, *Brachistochrone – The Path of Quickest Descent*, dostupno na https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/024/02/0201-0216

[10] Douglas S. Shafer, *The Brachistochrone: Historical Gateway to the Calculus of Variations*, dostupno na http://mat.uab.cat/ matmat/PDFv2007/v2007n05.pdf

[11] *https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=MathApps2F GalileosInclinedPlaneExperiment*, pristupljeno avgusta 2020. godine

[12] *https://mathcurve.com/courbes2d.gb/brachistochrone/brachistochrone.shtml*, pristupljeno avgusta 2020. godine

[13] *https://www.myphysicslab.com/roller/brachistochrone-en.html*, pristupljeno septembra 2020. godine

[14] *http://fizis.rs*, pristupljeno avgusta 2020. godine