Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Дејства група, Бернсајдова лема и њене примене

Јелена Стојановић

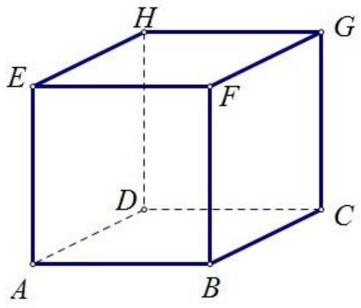
Ментор: др Драгана Тодорић

Београд, 2020.

Садржај

Увод

<u>*Пример 1.1.*</u> Одредити на колико се начина могу обојити стране коцке $ABCDEFGH$ помоћу 3 боје.



Решење:

Једноставним техникама бројања можемо утврдити, да се помоћу 3 боје, стране коцке могу обојити на $3^6 = 729$ начина. Ово није било тешко одредити.

Међутим, приметимо, нису сва бојења различита. Ротирањем коцке, од једног бојења можемо добити друго бојење. Поставља се питање како одредити број различитих бојења коцке. На то питање не можемо дати једноставан одговор.

Један од начина је упоређивање свих 729 могућности. Овај начин је прилично компликован и непрактичан, нарочито ако желимо да применимо сличну технику на неком компликованијем полиедру, као што је икосаедар.

У овом раду ћемо посебну пажњу посветити математички прихватљивијем приступу. Реч је о *Бернсајдовој леми*. Како бисмо што боље разумели поменути приступ, најпре ћемо дефинисати важне појмове који се тичу дејства група. Доказаћемо Бернсајдову лему и објаснити њену примену на више различитих примера. Интересантно је да се поменута лема не користи само на правилним полигонима и полиедрима, већ своју примену налази и у музици и хемији, што је сјајан пример повезивања математике, науке и уметности.

1. Група. Дејство групе

1.1 Основни појмови и ознаке

Дефиниција 1.1. Нека је G непразан скуп, а $\cdot$ бинарна операција на скупу G. *Група* је алгебарска структура $(G,\cdot)$ за коју важи:

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ за све $x, y, z \in G$.
2. Постоји $e \in G$ тако да за свако $x \in G$ важи $x \cdot e = x = e \cdot x$.
3. За свако $x \in G$ постоји $x' \in G$ тако да је $x \cdot x' = e = x' \cdot x$.

Наведимо дефиницију која је еквивалентна претходној.

Дефиниција 1.2. Група је алгебарска структура $(G, \cdot, ', 1)$ где је G непразан скуп, $\cdot$ бинарна операција на скупу G, $'$ унарна операција на скупу G и 1 изабрани елемент из G, за које важи:

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ за све $x, y, z \in G$,
2. $x \cdot 1 = 1 = 1 \cdot x$ за све $x \in G$,
3. $x \cdot x' = 1 = x' \cdot x$ за све $x \in G$.

Приметимо, ако језику додамо знак константе и знак унарне операције, аксиоме групе могу бити алгебарски закони.

Пример 1.1. Најједноставнији примери група су $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^{+},\cdot)$ и тако даље. Нама ће посебно бити значајни примери група које не чине бројеви.

Посматрајмо произвољан правоугаоник. Он има идентичну трансформацију и три симетрије и то, две осне рефлексије, осе су симетрале наспрамних страница, и централну рефлексију, у односу на центар правоугаоника.

Означимо са $V = \{\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2, \rho\}$ групу, где је ε идентична трансформација, σ_1 и σ_2 су осне рефлексије и , ρ је централна рефлексија.

Формирајмо таблицу множења у овој групи.

$\circ$	ε	σ_1	σ_2	ρ
ε	ε	σ_1	σ_2	ρ
σ_1	σ_1	ε	ρ	σ_2
σ_2	σ_2	ρ	ε	σ_1
ρ	ρ	σ_2	σ_1	ε

За сваки елемент x из ове групе важи $x^2 = \varepsilon$. Није тешко приметити да је дата група комутативна. Група V се зове *Клајнова група*.

<u>*Пример 1.2.*</u> Нека је Π_n правилан $n -$ тоугао у равни. Група свих изометрија правилног $n -$ тоугла, коју чине n осних симетрија и n ротација, назива се *диедарска група* и означава се краће D_n.

Дефиниција 1.3. Нека су $(G,\cdot)$ и $(H,*)$ две групе. Група $(H,*)$ представља <u>*подгрупу*</u> групе $(G,\cdot)$, уколико је:

$$H \subseteq G,$$

$$x * y = x \cdot y \text{ за све } x, y \in H.$$

Краћи запис, који често користимо је $H \leq G$.

Дефиниција 1.4. Нека је G група и X непразан скуп. <u>*Дејство групе*</u> G на скупу X је пресликавање $\theta: G \times X \to X$ такво да је:

1. $\theta(e, x) = x$, за свако $x \in X$,
2. $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$, за свако $x \in X$ и све $g, h \in G$.

Дефиниција 1.5. Нека је G група и X непразан скуп. <u>*Дејство групе*</u> G на скупу X је хомоморфизам $\varphi: G \to S_X$, где је $S_X = \{f: X \to X \mid f \text{ је бијекција}\}$.

$S_X = (S_X,\circ)$, где је са $\circ$ означена композиција функција, је једна група и зовемо је <u>*група пермутација*</u>, односно симетрија скупа X.

Често се уместо $\theta(g, x)$ користи запис $g \cdot x$. Тада својства функције θ, из *Дефиниције 1.4*. можемо записати:

1. $e \cdot x = x$, за свако $x \in X$,
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, за свако $x \in X$ и све $g, h \in G$.

Важно је напоменути да ова ознака није исто што и бинарна операција из *Дефиниције 1.1.* и *Дефиниције 1.2.*

Став 1.1. *Ако постоји бијекција између X и Y, онда је $S_X \cong S_Y$.*

Доказ:

Нека је дато пресликавање $g: X \to Y$ бијекција и нека је $S_X = \{\pi : X \to X \mid \pi \text{ је бијекција}\}$ и $S_Y = \{\sigma : Y \to Y \mid \sigma \text{ је бијекција}\}$.

Дефинишимо $f: S_X \to S_Y$ са $f(\pi) := g \circ \pi \circ g^{-1}$.

Уколико је π пермутација скупа X, тада је $g \circ \pi \circ g^{-1}$ једна пермутација скупа Y. Такође, ако је $\sigma \in S_Y$, онда је $f(g \circ \sigma \circ g^{-1}) = \sigma$. Дакле, пресликавање f је "НА". Јасно је да је функција такође и "1-1".

Уколико је $\rho, \pi \in S_X$, проверимо да ли је $f(\rho \circ \pi) = f(\rho) \circ f(\pi)$.

$$f(\rho \circ \pi) = g \circ (\rho \circ \pi) \circ g^{-1} = (g \circ \rho \circ g^{-1}) \circ (g \circ \pi \circ g^{-1}) = f(g) \circ f(\pi).$$

Функција f задовољава потребне особине, дакле, јесте изоморфизам.

⊠

Ако је $X = \{1,2, \dots , n\}$, онда ће се уместо $S_{\{1,2,..,n\}}$ писати S_n.

<u>*Пример 1.3.*</u> Нека је $n = 8$ и нека је пермутација $\pi \in S_8$ задата на следећи начин

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Елемент 1 се слика у 5, 5 се слика у 7, 7 у 8, 8 у 1. Приметимо да смо поново дошли до елемента 1 са којим смо и започели пресликавање.

$$1 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 1$$

Користићемо запис (1578) који означава пермутацију скупа $\{1,2, \dots , n\}$. Оваква пермутација се назива циклус дужине 4. Дакле, пермутација у којој

$$a_1 \mapsto a_2 \mapsto \cdots \mapsto a_{k-1} \mapsto a_k \mapsto a_1$$

при чему је $a_i \neq a_j$ за свако $i, j \in \mathbb{N}$, означава се $(a_1 a_2 \dots a_k)$ и зове се циклус дужине k или k −циклус.

Погледајмо шта се дешава са елементима које нисмо користили у претходној пермутацији. Елемент 2 се слика у 4, а 4 у 2. Оваква пермутација је цикл (24), дужине 2. Цикли дужине два се зову *транспозиције*. Преостали елементи 3 и 6 се не померају при пермутацији, они одређују идентичне пермутације. Једноставнији запис би био (3) и (6), али се често не пише.

Пермутација π се другачије може записати

$$\pi = (1578)(24).$$

Став 1.2. *Свака пермутација се може представити у облику производа транспозиција.*

То представљање није јединствено, на пример,

$$(12)(23)(34) = (14)(13)(12).$$

Али, парност броја транспозиција које се појављују у факторизацији дате пермутације јесте јединствена. Доказ препуштамо читаоцу.

Пермутације које се могу представити у облику производа парног броја транспозиција зовемо парне пермутације, док пермутације које се представљају у облику производа непарног броја транспозиција зовемо непарне пермутације. A_n представља скуп свих парних пермутација.

Дефиниција 1.6. Нека група G дејствује на скупу $X \neq \emptyset$.

а) *Орбита* елемента $x \in X$, у ознаци Ω_x, дефинише се на следећи начин:

$$\Omega_x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

б) *Стабилизатор* елемента $x \in X$, у ознаци G_x или $Stab(x)$, дефинише се на следећи начин:

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Пример 1.4. Нека је $X = \mathbb{R}^2$ и $G = \mathbb{Z}_2$. Дејство групе G на скупу X је задато са:

$$0 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$$

Одредити орбиту елемента $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Omega\big((x_1, x_2)\big) = \{(x_1, x_2), (-x_1, -x_2)\}.$$

Пример 1.5. Нека је G произвољна група и E нека њена подгрупа. Дејство групе G на $G\ /\ E$ је задато са

$$g \cdot (aE) := (ga)E.$$

У овом случају цели скуп X је једна орбита. Дејство које има само једну орбиту назива се *транзитивно* дејство.

Пример 1.6. Нека је дат скуп X чији су елементи темена квадрата. Одредити све орбите и стабилизаторе при дејству диедарске групе D_4.

Решење:

Обележимо темена квадрата бројевима 1, 2, 3 и 4 и нека је $X = \{1,2,3,4\}$. На скупу X дејствује диедарска група $D_4 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$.

ε је идентичко пресликвање, које фиксира сваки од елемената, односно, $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)$. При ротацији за 90° око центра квадрата (пресек дијагонала квадрата) долази до пресликавања $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4$, што можемо записати као $\rho = (1234)$. При ротацији за 180° добијамо пресликавање $1 \mapsto 3$ и $2 \mapsto 4$, односно $\rho^2 = (13)(24)$. Аналогно ћемо добити и остала пресликавања

$$\varepsilon = (1)(2)(3)(4)$$

$$\rho = (1234)$$

$$\rho^2 = (13)(24)$$

$$\rho^3 = (1432)$$

$$\sigma = (12)(34)$$

$$\rho\sigma = (13)(2)(4)$$

$$\rho^2\sigma = (14)(32)$$

$$\rho^3\sigma = (1)(3)(24)$$

Одредимо орбиту елемента 1:

Идентичким пресликавањем 1 се слика у 1, ρ слика 1 у 2, ρ^2 слика 1 у 3 и ρ^3 слика 1 у 4. Дакле $\Omega_1 = \{\pi \cdot 1 \mid \pi \in D_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Аналогно ћемо одредити орбите осталих елемената и добићемо да је

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4.$$

Одредимо сада стабилизаторе елемената скупа X.

Један од елемената стабилизатора сваког елемента је идентичко пресликавање. Приметимо да пресликавање $\rho^3\sigma = (1)(3)(24)$ фиксира елемент 1, стога $\rho^3\sigma$ припада стабилизатору елемента 1. Аналогно ћемо добити преостале стабилизаторе:

$$G_1 = \{\varepsilon, \rho^3\sigma\}$$

$$G_2 = \{\varepsilon, \rho\sigma\}$$

$$G_3 = \{\varepsilon, \rho^3\sigma\}$$

$$G_4 = \{\varepsilon, \rho\sigma\}$$

Дефиниција 1.7. Нека група G дејствује на скупу $X \neq \emptyset$. Дефинишемо бинарну релацију $\sim$ на X са: $x \sim y$ ако и само ако постоји $g \in G$ тако да $y = g \cdot x$.

Став 1.3. *$\sim$ је релација еквиваленције на скупу X. Класа еквиваленције елемента $x \in X$ је $x \,/ \sim = \Omega_x$.*

Доказ:

Најпре ћемо доказати да је $\sim$ заиста релација еквиваленције, односно да је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Рефлексивност:

$$x \sim x, \text{ јер } \varepsilon \cdot x = x$$

Симетричност:

$$x \sim y \ \Rightarrow \text{постоји } g \in G \text{ тако да је } y = g \cdot x$$

$$\Rightarrow \text{постоји } g \in G \text{ тако да је } g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x)$$

$$\Rightarrow \text{постоји } g \in G \text{ тако да је } (g^{-1}g) \cdot x = 1 \cdot x, \text{ па је } g^{-1} \cdot y = x$$

$$\Rightarrow y \sim x$$

Транзитивност:

$$x \sim y, y \sim z \ \Rightarrow \text{постоје } g_1, g_2 \in G \text{ тако да } y = g_1 \cdot x, z = g_2 \cdot y$$

$$\Rightarrow z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$$

$$\Rightarrow x \sim z$$

Дакле, $\sim$ јесте релација еквиваленције.

Приметимо да $y \in x \,/ \sim$ ако и само ако $x \sim y$ што ће важити ако и само ако постоји $g \in G$ тако да $y = g \cdot x$ тј. ако и само ако

$$y \in \{g \cdot x \mid g \in G\} = \Omega_x$$

⊠

Став 1.4. *Нека група G дејствује на непразном скупу X. Тада постоји бијекција између $G \,/\, G_x$ и Ω_x .*

Доказ:

Посматрајмо пресликавање $f\colon G/G_x \to \Omega_x$ које ћемо задати са

$$f(gG_x) := g \cdot x.$$

Најпре ћемо проверити добру дефинисаност функције f.

$gG_x = hG_x$

$\Rightarrow\ h^{-1}g \in G_x$

$\Rightarrow (h^{-1}g) \cdot x = x$

$\Rightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$

$\Rightarrow h \cdot (h^{-1} \cdot (g \cdot x)) = h \cdot x$

$\Rightarrow (h \cdot h^{-1}) \cdot (g \cdot x) = h \cdot x$

$\Rightarrow e \cdot (g \cdot x) = h \cdot x$

$\Rightarrow g \cdot x = h \cdot x$

Дакле, функција f јесте добро дефинисана.

Преостаје да докажемо да је функција f бијекција.

По дефиницији функције f , јасно је да је "на". Проверимо да ли је и "1-1".

$g \cdot x = h \cdot x$

$\Rightarrow\ h^{-1} \cdot (g \cdot x) = h^{-1} \cdot (h \cdot x)$

$\Rightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = (h^{-1} \cdot h) \cdot x$

$\Rightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = e \cdot x$

$\Rightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = x$

$\Rightarrow h^{-1} \cdot g \in G_x$

$\Rightarrow gG_x = hG_x$

Дакле, функција f јесте "1-1", а уједно и бијекција.

⊠

Последица 1.1. Нека је дата коначна група G која дејствује на $X \neq \emptyset$, тада ред орбите ма ког елемента $x \in X$ дели ред групе G.

Тврђење 1.1. (*Класовна једнакост*)

Ако група G дејствује на коначном скупу $X \neq \emptyset$, онда је број елемената скупа X,

$$|X| = \sum_{x \in T} |\Omega_x|,$$

где је T тзв. <u>трансверзал</u>, тј. $T \leq X$ тако да за свако $x \in X, |T \cap \Omega_x| = 1$.

Доказ:

Нека је $T \leq X$ тако да за свако $x \in X, |T \cap \Omega_x| = 1$, тада је

$$X = \coprod_{x \in T} \Omega_x.$$

Ако је X коначан, тада је $|X| = \sum_{x \in T} |\Omega_x|$.

$\boxtimes$

Дефиниција 1.8. Елемент y је <u>конјугован</u> елементу x (елемент y је <u>конјугат</u> елемента x) у групи G ако и само ако постоји $g \in G$ тако да је

$$y = gxg^{-1}.$$

Став 1.5. *Нека група G дејствује на $X \neq \emptyset$. Ако су елементи x и y из исте орбите, онда су њихови стабилизатори конјуговани.*

Доказ:

Желимо да покажемо да је

$$G_y = gG_xg^{-1}$$

$\subseteq$: Нека је $h \in G_y$. Ако су x и y из исте орбите тада постоји $g \in G$ такво да је $y = g \cdot x$, па је $x = g^{-1} \cdot y$.

Добијамо да је

$$(g^{-1}hg) \cdot x = g^{-1} \cdot \big(h \cdot (g \cdot x)\big) = g^{-1} \cdot (h \cdot y) = g^{-1} \cdot y = x.$$

Дакле, $g^{-1}hg \in G_x$, па је $h \in gG_xg^{-1}$.

$\supseteq$: Нека је $h \in G_x$

Тада добијамо да је

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot \big(h \cdot (g^{-1} \cdot y)\big) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y.$$

Закључујемо да је $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$. $\boxtimes$

Дефиниција 1.9. Нека G дејствује на $X \neq \emptyset$ и нека је $g \in G$. Скуп свих фиксних тачака елемента g, у ознаци X^g, дефинише се на следећи начин:

$$X^g = \{\, x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Став 1.6. *Нека G дејствује на непразном скупу X. Ако су елементи g и h конјуговани, тада постоји бијекција између X^g и X^h.*

Доказ:

Нека је $g = khk^{-1}$.

Посматрајмо функцију $f: X \to X$ која је дефинисана на следећи начин:

$$f(x) = k \cdot x.$$

Желимо да докажемо да f успоставља бијекцију између X^g и X^h.

$x \in X^h \;\Rightarrow h \cdot x = x$

$\Rightarrow g \cdot f(x) = g \cdot (k \cdot x) = k \cdot \left(h \cdot \left(k^{-1} \cdot (k \cdot x)\right)\right) = k \cdot \left(h \cdot \left((k^{-1}k) \cdot x\right)\right) = k \cdot \left(h \cdot (e \cdot x)\right) = k \cdot (h \cdot x) = k \cdot x = f(x).$

Дакле, $f(X^h) \subseteq X^g$.

Нека је $k \cdot x = y$, тада $f(k^{-1}y) = x$. Ако је $y \in X^g$, онда је $k^{-1}y \in X^h$.

Дакле, f успоставља бијекцију између X^g и X^h.

$\boxtimes$

2. Бернсајдова лема

2.1 Бернсајдова лема, доказ

Вилијам Бернсајд је био енглески математичар. Рођен је 2. јула 1852. године у Лондону. Ишао је у школу у Христовој болници до 1871. године и похађао је колеџе Сент Џон и Пемброк на Универзитету у Кембрицу. Следећих десет година провео је на Кембрицу, пре него што је постављен за професора математике на Краљевском поморском колеџу у Гринвичу.

У својој каријери се активно бавио истраживањима, те је објавио више од 150 истраживачких радова на многим пољима. Најбоље је остао запамћен по свом раду о теорији група. Због наглашавања апстрактног приступа, Бернсајда многи сматрају првим теоретичарем чисте групе. Иако је теорема, која је у фокусу овог рада, названа „Бернсајдова лема“ (формула која повезује број орбита пермутацијске групе која делује на скуп, са бројем фиксних тачака сваког од његових елемената), Вилијам Бернсајд није зачетник доказа. Наиме, приступ бројању јединствених пермутација доказао је 1887. године немачки математичар Фердинанд Георг Фробенијус. Приступ није постао широко познат, све док се 1911. године није појавио у књизи о теорији група Вилијама Бернсајда, познат као „Бернсајдова теорема“.

Теорема 2.1. (Бернсајдова лема) *Нека коначна група G дејствује на коначном скупу X. Тада је број различитих орбита*

$$|X / G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

** $X \ / \ G$ представља ознаку за скуп орбита скупа X при дејству групе G.

Доказ:

Означимо са k тражени број различитих орбита скупа X. Тада је

$$X = \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_k.$$

Посматрајмо скуп A који је задат на следећи начин:

$$A = \{(g, x) \in G \times X \mid \ g \cdot x = x\}$$

Приметимо да је

$$A = \coprod_{g \in G} \{g\} \times X^g$$

Тада је,

$$|A| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

Такође,

$$A = \coprod_{x \in X} G_x \times \{x\}$$

Дакле,

$$|A| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \Omega_i} |G_x|$$

Доказали смо у једном од претходних ставова да елементи x и y из исте орбите имају конјуговане стабилизаторе, па је $|G_x| = |G_y|$. Из сваке орбите Ω_i ћемо изабрати по један елемент x_i.

Тада је,

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \Omega_i} |G_{x_i}| = \sum_{i=1}^{k} |\Omega_i| \ |G_{x_i}| = \sum_{i=1}^{k} [G : \ G_{x_i}] \ |G_{x_i}| = \sum_{i=1}^{k} |G| = k|G|$$

Из $|A| = \sum_{g \in G} |X^g|$ и $|A| = k|G|$ добијамо да је

$$\sum_{g \in G} |X^g| = k|G|$$

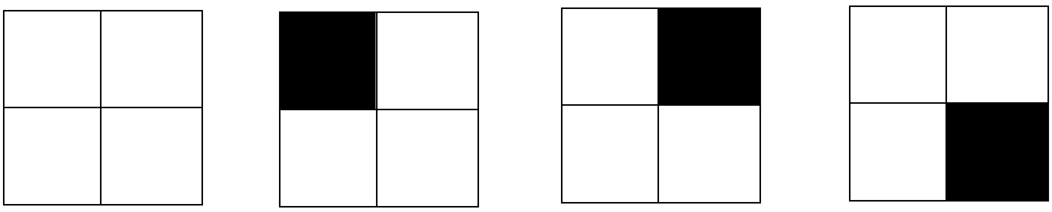
$$\text{односно,} \; k = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X^g|$$

$\boxtimes$

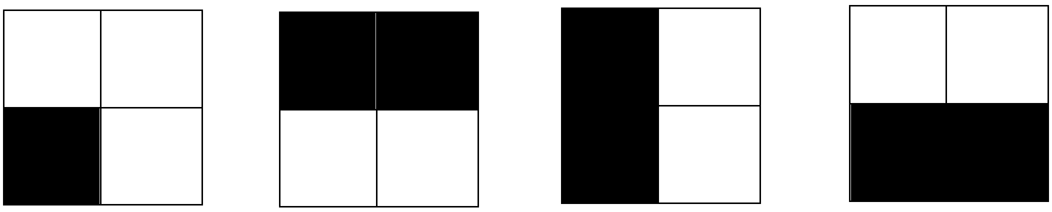
<u>*Пример 2.1.*</u> На колико различитих начина можемо обојити квадрат користећи две боје, ако је квадрат подељен на четири једнака квадрата?

Решење:

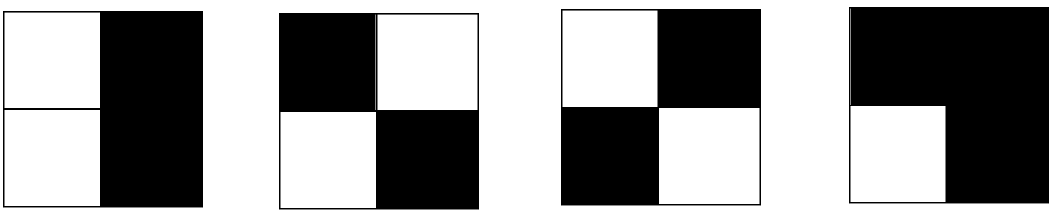
Претпоставимо да ћемо квадрате бојити белом и црном бојом. У овом случају одговор можемо добити тако што ћемо исписати сва решења. Означићемо сваки од квадрата ознаком k_i, $1 \leq i \leq 16$.



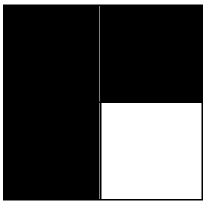
k_1 k_2 k_3 k_4



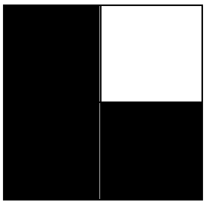
k_5 k_6 k_7 k_8



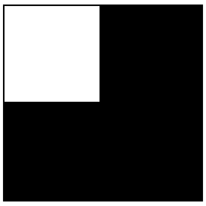
k_9 k_{10} k_{11} k_{12}



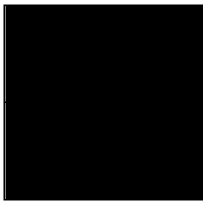
k_{13}



k_{14}



k_{15}



k_{16}

Приметимо да нису сва добијена бојења различита. Од неких се ротацијом и осном рефлексијом може добити друго бојење. Дакле $\{k_1\}$, $\{k_2, k_3, k_4, k_5\}$, $\{k_6, k_7, k_8, k_9\}$, $\{k_{10}, k_{11}\}$, $\{k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{15}\}$ и $\{k_{16}\}$ су различите класе бојења. Стога, укупан број различитих бојења није 16, већ 6.

Овакав начин решавања, исписивањем свих могућих решења, није практичан, нарочито уколико је потребно решити компликованије примере. Зато је наш задатак да овај посао упростимо користећи *Бернсајдову лему.*

Нека је $X = \{1,2,3,4\}$ скуп квадрата са слике:

1	2
3	4

И нека је $Y = \{k_1, \ldots, k_{16}\}$ скуп свих могућих бојења скупа X са две боје. Посматрајмо диедарску групу $D_4 = \{\varepsilon, a, b, c, p, q, r, s\}$ која дејствује на скупу Y. ε представља идентично пресликавање, a је ротација за угао $\frac{\pi}{2}$, b је ротација за угао π, c је ротација за угао $\frac{3\pi}{2}$, p је осна рефлексија око хоризонталне осе, q око вертикалне и, r и s око дијагонала квадрата.

Најпре желимо да пронађемо колико бојења квадрата фиксира сваки елемент из групе D_4. Очигледно је да идентитет ε фиксира сва бојења, па је $|Y^{\varepsilon}| = 16$. Ротација за угао $\frac{\pi}{2}$ фиксира 2 бојења и то $\{k_1, k_{16}\}$, ротација за $\frac{3\pi}{2}$ фиксира 4 бојења и то бојења $\{k_1, k_{10}, k_{11}, k_{16}\}$, аналогно урадимо и за преостале елементе. Напоменимо да је група D_4 реда 8.

Применом Бернсајдове леме

$$|Y \,/\, G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y^g|$$

добићемо:

$$|Y\ /\ D_4| = \frac{1}{|D_4|}(|Y^{\varepsilon}|\ +\ |Y^{a}|\ +\cdots+\ |Y^{s}|\,)$$

$$|Y\ /\ D_4| = \frac{1}{8}(16\ +\ 2+4\ +2\ +\ 4\ +4\ +8\ +8) = \frac{48}{8} = 6$$

Пример 2.2. На колико различитих начина можемо обојити темена квадрата користећи 3 боје?

Решење:

Нека је $X = \{1, 2, 3, 4\}$ скуп темена квадрата. Скуп Y ће као и у *Примеру 2.1.* представљати скуп бојења, док је група G која дејствује на скупу Y диедарска група $D_4 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$. Елементи групе D_4 су изометрије које смо детаљније објаснили у *Примеру 1.6.*

Како сада бојимо 4 темена, а на располагању имамо 3 боје, укупан број бојења је $3^4 = 81$. Па ће тако број елемената које фиксирају елементи из D_4 бити 3^i, а не 2^i као у претходном примеру .

Није тешко применити Бернсајдову лему,

$$|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Y^{g}| = \frac{1}{8}(81+3+9+3+9+9+27+27) = 21$$

Пример 2.3. На колико различитих начина можемо обојити скуп од n елемената ако нам је на располагању m боја?

Решење:

Нека је X коначан скуп од n елемената и $G \leq S_X$. Нека скуп B представља скуп m боја које користимо. Означимо са $Y = \{f \mid f\colon X \to B\}$ скуп свих бојења елемената скупа X елементима из B. Приметимо да је $|Y| = m^n$.

Дејство групе G на скупу Y дефинисано је на следећи начин:

$$\pi \cdot f = f \cdot \pi^{-1}, \text{ за свако } \pi \in G \text{ и свако } f \in Y.$$

Два бојења f и h при дејству групе G ћемо сматрати истим ако постоји $\pi \in G$ такав да је $\pi \cdot f = h$. Израчунавање броја различитих бојења елемената скупа X бојама скупа B омогућава нам *Бернсајдова лема*

$$|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Y^g|,$$

јер тај број различитих бојења одговара $|Y\ /\ G|$.

Дакле, потребно је обојити n елемената са m различитих боја. Елементи групе G ће бити пермутације скупа S_n. Једно бојење јесте и када свих n елемената обојимо једном истом бојом. Такво бојење остаје фиксирано при дејству сваког елемента групе G.

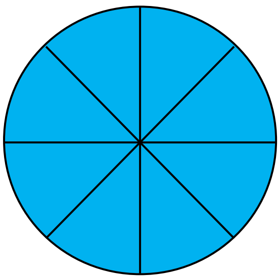
Неко бојење $f: X \to B$ из Y је фиксирано пермутацијом $\pi \in G$ тј. (у литератури се често среће и ознака $f \in Fix_Y(\pi)$) ако и само ако f остаје константно на свим циклусима пермутације π. Означимо са c број циклуса у пермутацији π, тада $|Y^\pi| = m^c$.

На основу *Бернсајдове леме* добијамо да је број различитих бојења скупа X са m боја при дејству групе G једнак

$$\boldsymbol{|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^c.}$$

Пример 2.4. Рођенданска торта у облику круга подељена је на 8 једнаких делова. У центар сваког парчета је потребно поставити по једну свећицу. На колико различитих начина је могуће поређати златне и сребрне свећице?

Решење:



Нека скуп X представља број парчади торте, $X = \{1, \dots, 8\}$, па је $|X| = 8$. С обзиром да је торта у облику круга, централни угао круга је $\frac{\pi}{4}$, па ће скуп који дејствује на скупу X бити скуп ротација $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7\}$, $|G| = 8$.

Применићемо изведену формулу из *Примера 2.3*.

$$|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^c \quad (1)$$

У следећој таблици рачунамо потребне податке за примену формуле (1).

На располагању су нам две боје, па је $m = 2$.

$\pi \in G$	пермутације	c − број циклуса	m^c
ε	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$	8	2^8
ρ	(12345678)	1	2^1
ρ^2	$(1357)(2468)$	2	2^2
ρ^3	(14725836)	1	2^1
ρ^4	$(15)(26)(37)(48)$	4	2^4
ρ^5	(16385274)	1	2^1
ρ^6	$(1753)(2864)$	2	2^2
ρ^7	(18765432)	1	2^1

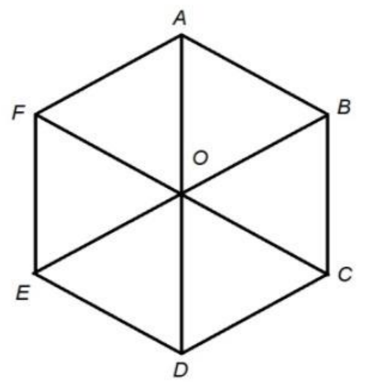
$$|Y\ /\ G| = \frac{1}{8}(2^8 + 2^1 + 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1) = 36.$$

<u>Пример 2.5.</u> Темена правилног шестоугла треба обојити са две боје. Колико има различитих бојења?

*Два бојења сматрамо истим ако се једно може добити од другог ротацијом шестоугла око центра описане кружнице.

Решење:

Посматрајмо скуп темена шестоугла $X = \{A, B, C, D, E, F\}$. Група која дејствује на темена скупа X је група ротација $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\}$.



Овај пример ћемо решити на два начина.

1. НАЧИН

Применићемо формулу изведену из Бернсајдове формуле, $|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^c$. Најпре ћемо формирати таблицу у којој рачунамо потребне податке. Шестоугао бојимо са две боје, па је $m = 2$.

$\pi \in G$	пермутације	$c -$ број циклуса	m^c
ε	$(A)(B)(C)(D)(E)(F)$	6	2^6
ρ	$(ABCDEF)$	1	2^1
ρ^2	$(ACE)(BDF)$	2	2^2
ρ^3	$(AD)(BE)(CF)$	3	2^3
ρ^4	$(ACE)(BFD)$	2	2^2
ρ^5	$(AFEDCB)$	1	2^1

Број различитих бојења темена правилног шестоугла са две боје, при дејству групе G, једнак је

$$\frac{1}{6}\,(2^6 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^2 + 2^1) = 14.$$

2. НАЧИН

Други начин је да искористимо *Бернсајдову формулу.*

Укупан број свих могућих бојења је $2^6 = 64$. Потребно је одредити различита бојења. Класе конјугованости групе $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\}$ су $\{\ \varepsilon\ \}$, $\{\ \rho,\ \rho^5\}$, $\{\rho^2, \rho^4\}$ и $\{\rho^3\}$. На овај начин смо избегли тражење $|X^\pi|$ за свако $\pi \in G$. Довољно је наћи колико различитих бојења фиксира по један елемент из сваке класе. ε фиксира свако бојење, па је $|X^\varepsilon| = 2^6 = 64$. Пресликавање ρ слика $A \to B \to C \to D \to E \to F$. С обзиром да ће бити фиксирано оно бојење у ком су сва темена обојена истом бојом, то значи да је $|X^\rho| = 2$. При пресликавању ρ^2 добијамо да је $A \to C \to E$ и $B \to D \to F$. Дакле, ρ^2 фиксира она бојења у којима су темена A, C, E обојена истом бојом, као и темена B, D, E. Таквих могућности има 4. Поступак понављамо и за ρ^3. Ова пермутација фиксира укупно 8 бојења. Применом *Бернсајдове формуле* добијамо:

$$|X\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|X^\pi| = \frac{1}{6}(2^6 + 2 + 2 + 2^2 + 2^2 + 2^3) = 14.$$

<u>Пример 2.6</u>. На колико начина можемо обојити дрвени рам облика правилног петоугла користећи 3 боје?

** Два бојења сматрамо истим ако се једно може добити од другог дејством групе изометрија правилног петоугла.

Решење:

Означимо странице петоугла бројевима 1, 2, 3, 4, 5. Нека је $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ скуп на који дејствујемо. Група G која дејствује на скупу X је група

$$D_5 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma\}.$$

И у овом примеру ћемо се послужити изведеном формулом $|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^c$.

С обзиром да рам бојимо користећи 3 боје, тада је $m = 3$ и $|D_5| = 10$.

$\pi \in D_5$	пермутације	$c -$ број циклуса	m^c
ε	$(1)(2)(3)(4)(5)$	5	3^5
ρ	(12345)	1	3^1
ρ^2	(13524)	1	3^1
ρ^3	(14253)	1	3^1
ρ^4	(15432)	1	3^1
σ	$(12)(35)(4)$	3	3^3
$\rho\sigma$	$(1)(25)(34)$	3	3^3
$\rho^2\sigma$	$(15)(24)(3)$	3	3^3
$\rho^3\sigma$	$(14)(23)(5)$	3	3^3
$\rho^4\sigma$	$(13)(45)(2)$	3	3^3

Тада, применом одговарајуће формуле добијамо,

$$\frac{1}{10}(3^5 + 4 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^3) = 39.$$

Пример 2.7. Слагалица „Изи“

Изи је слагалица коју је је дизајнирао Френк Никол. Слагалица је сачињена од 64 различито обојене квадратне плочице. Квадрат се својим дијагоналама, хоризонталним и вертикалним средњим линијама може поделити на 8 подударних троуглова. Када се добијени троуглови обоје белом и црном бојом добије се 70 различитих бојења, од којих је 6 искључено из игре. Како бисмо се уверили да је број различитих бојења заиста 70, употребићемо Бернсајдову лему.

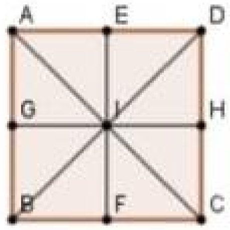
Решење:

Посматрајмо плочицу која је подељена на 8 једнаких троуглова. Коришћењем беле и црне боје, плочица се може обојити на $2^8 = 256$ начина.

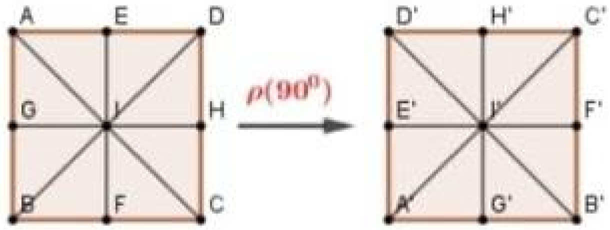
Групу, која дејствује на квадрат, чине ротационе симетрије квадрата за угао $0°, \pm 90°, 180°$, па је $G = \{\rho(0°), \rho(+90°), \rho(-90°), \rho(180°)\}$.

Јасно је да је $\rho(0°)$идентичко пресликавање које фиксира свих 256 бојења. Желимо да утврдимо колико плочица остаје фиксирано при ротацији од $+90°$.

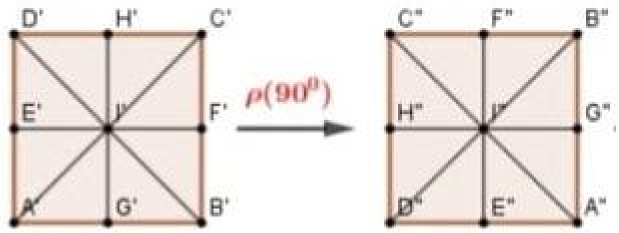
Означимо темена плочице са $ABCD$. Нека су GH и EF хоризонтална и вертикална средња линија квадрата, док је I пресечна тачка дијагонала и средњих линија.



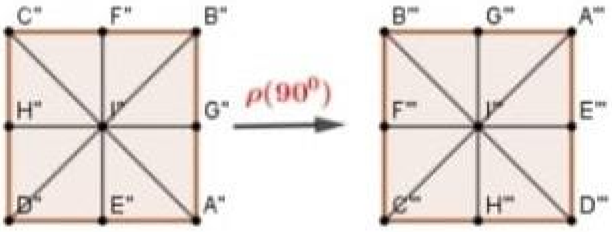
При ротацији за $+90°$ троугао AGI се слика у троугао $A'G'I'$. Да бисмо добили исту плочицу, они морају бити исто обојени.



Поново ротирамо за $+90°$, тада се троугао $A'G'I'$ слика у троугао $A''G''I''$. Добијени троугао мора бити исте боје као и троугао $A'G'I'$, а самим тим и као троугао AGI.



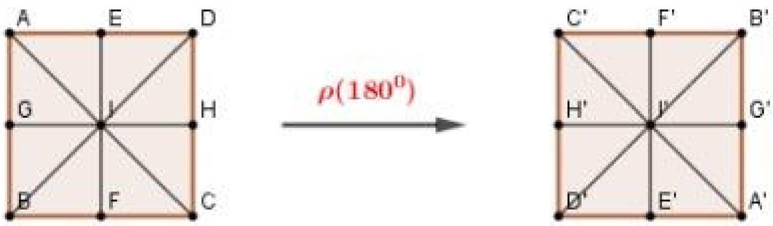
На квадрат $A''B''C''D''$ применимо исти поступак и добијамо троуглове AGI, $A'G'I'$, $A''G''I''$ и $A'''G'''I'''$ који су исте боје.



Ако бисмо на квадрат $A'''B'''C'''D'''$ поново применили ротацију, добили бисмо полазни квадрат $ABCD$. Ако бисмо квадрат ротирали 4 пута око своје осе, закључујемо да троуглови AGI, BFI, CHI и DEI морају бити исте боје. До сличног закључка долазимо и када су у питању троуглови EAI, GBI, FCI и HDI. Потребно је изабрати боју за троуглове AGI и EAI, што се може урадити на $2^2 = 4$ начина.

Аналогно се добија и при ротацији за $-90°$.

Преостаје да утврдимо колико плочица остаје фиксирано при ротацији од $180°$. Када квадрат $ABCD$ заротирамо за $180°$ троугао AGI се слика у троугао $A'G'I'$, да би плочица била ротационо симетрична ови троуглови морају бити обојени истом бојом. Аналогно важи за троуглове EAI, GBI и BFI.

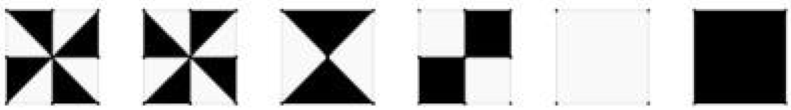


Поновном применом ротације на квадрат $A'B'C'D'$ добијамо полазни квадрат $ABCD$. Дакле, ако два пута применимо ротацију за $180°$ око осе квадрата $ABCD$ приметићемо да троуглови AGI и CHI морају бити исто обојени. Такође и троуглови EAI и FCI су исто обојени, као и троуглови GBI и HDI и BFI и DEI. У овом случају потребно је обојити троуглове AGI, EAI, GBI и BFI што се може учинити на $2^4 = 16$ начина.

Применом *Бернсајдове леме* добићемо,

$$\frac{1}{4}(256 + 4 + 4 + 16) = 70.$$

**Плочице које су искључене из „Изи“ игре су:



<u>Пример 2.8.</u> На колико различитих начина можемо обојити таблу 8×8 користећи 2 боје?

** Два бојења сматрамо истим ако се једно може добити од другог ротацијом око центра квадрата и осном рефлексијом око дијагонала и средњих линија квадрата.

Решење:

Нека скуп X представља мање квадрате на које је подељена дата табла. Ако бисмо сваки квадратић обележили ознакама као у матрици, тада је $X = \{A_{11}, \dots, A_{88}\}$.

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}
A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}
A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}	A_{38}
A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}	A_{48}
A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}	A_{58}
A_{61}	A_{62}	A_{63}	A_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}	A_{68}
A_{71}	A_{72}	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{76}	A_{77}	A_{78}
A_{81}	A_{82}	A_{83}	A_{84}	A_{85}	A_{86}	A_{87}	A_{88}

Група која дејствује на скупу X је група $G = \{\varepsilon, a, b, c, p, q, r, s\}$. Елементи групе G су исти као у *<u>Примеру 2.1</u>*. Укупно постоји 2^{64} бојења, међутим, нама су потребна различита бојења. Класе конјугованости групе $G = \{\varepsilon, a, b, c, p, q, r, s\}$ су: $\{\ \varepsilon\ \}$, $\{a\ , c\}$, $\{\ b\ ,$ $p, q\}$ и $\{\ r, s\ \}$.

Очигледно је да ε фиксира сваки елемент, па је $|X^{\varepsilon}| = 2^{64}$**.** Потребно је утврдити колико бојења фиксирају остали елементи групе G. Почнимо са елементом a. Желимо да утврдимо колико бојења остаје фиксирано при ротацији за $90°$**.** Овом пресликавању одговара пермутација $(A_{11}A_{18}A_{88}A_{81})(A_{12}A_{28}A_{87}A_{71}) \dots (A_{44}A_{45}A_{55}A_{54})$. Ова пермутација је циклус дужине 16, па је $|X^{a}| = 2^{16}$. Ротацији за $180°$ одговара пермутација $(A_{11}A_{88})(A_{12}A_{87}) \dots (A_{41}A_{58})$. Ово је циклус дужине 32, па је $|X^{b}| = 2^{32}$. До сличних запажања ћемо доћи посматрањем пермутације r, где ћемо добити да је $|X^{r}| = 2^{36}$.

Сада можемо применити *Бернсајдову лему*

$$|X\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{1}{8}(2^{64} + 2\cdot 2^{16} + 3\cdot 2^{32} + 2\cdot 2^{36}) = 2^{14}(1 + 2^{15}(3 + 2^5 + 2^{32})).$$

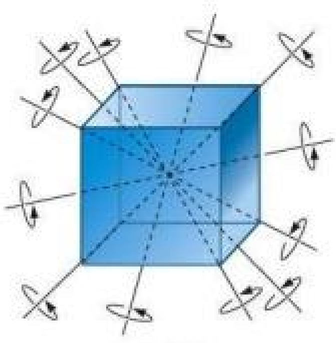
2.2 Примена Бернсајдове леме на правилне полиедре

Пример 2.9. Група ротационих симетрија коцке изоморфна је групи S_4.

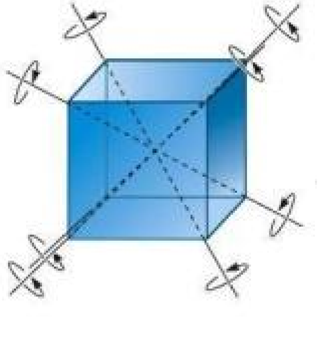
Решење:

Најпре ћемо утврдити колико има ротационих симетрија коцке.

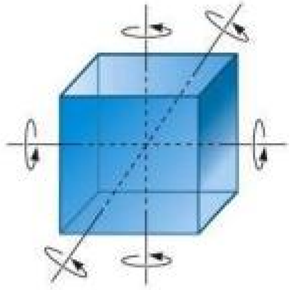
Приметимо, коцка има 12 ивица. Правих које пролазе кроз средишта наспрамних ивица има укупно 6. Једну групу ротација чине ротације око ових правих за угао π. Таквих ротација има исто колико и правих, дакле 6.



Познато је да коцка има 4 главне дијагонале и око сваке дијагонале постоје 2 ротације за углове $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Тако да ова група ротација има укупно 8 ротација.

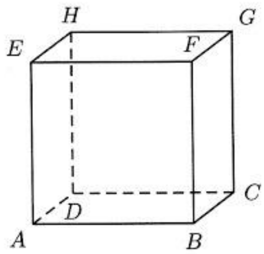


Како коцка има 6 страна, праве које пролазе кроз центре наспрамних страна представљају оце ротације за углове $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$. С обзиром да постоје 3 такве праве, укупно добијамо 9 ротација.



Ако додамо и идентичку трансформацију, добићемо укупно 24 ротације.

Означимо темена коцке словима A, B, C, D, E, F, G и H и нека X представља скуп темена коцке, $X = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.



Посматрајмо ротацију око правих које садрже средишта наспрамних ивица. Није тешко закључити да ова ротација одговара производу 4 транспозиције. Нека се ротација врши око осе која пролази кроз средишта ивица AD и FG, одговарајућа пермутација је $(AD)(BH)(CE)(FG)$.

Ако је оса ротације нека од главних дијагонала, тада ротацији одговара производ 2 трицикла, на пример, нека оса пролази кроз темена A и G, одговарајућа пермутација је $(BED)(CHF)$. Цикле дужине 1 смо искључили из записа, ако бисмо и њих записали пермутација би имала запис $(A)(BED)(CFH)(G)$.

Ротацијама око правих које пролазе кроз центре наспрамних страна одговарају циклуси дужине 4. Нека оса пролази кроз центре страна $ADHE$ и $BCGF$, тада је одговарајућа пермутација $(ADHE)(BCGF)$.

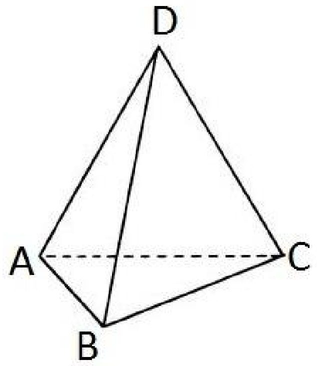
<u>*Пример 2.10.*</u> Група ротационих симетрија правилног тетраедра изоморфна је групи A_4.

Решење:

Правилан тетраедар је могуће ротирати око његових висина, којих има укупно 4. Углови ротације у овом случају су $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Дакле, ротација око висина има укупно 8.

Ротацију је могуће вршити и око правих које спајају средишта наспрамних ивица и то за угао π. Таквих ротација има колико и правих, дакле укупно 3. Када укључимо и идентичку трансформацију добијамо укупно 12 ротација.

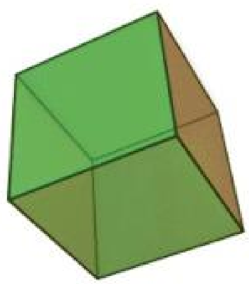
Темена правилног тетраедра ћемо означити словима A, B, C и D.



Посматрајмо ротацију око висине којој припада теме D. Јасно је да је теме D при овој ротацији фиксирано док се $A \longmapsto B \longmapsto C$ и добијамо пермутацију $(ABC)(D)$. При ротацији око праве која садржи средишта ивица AB и CD добијамо пермутацију $(AB)(CD)$. Аналогно и за преостале ротације. На овај начин формирана је функција из групе симетрија у групу A_4. Та функција није само бијекција. Она је и изоморфизам, јер је у оба случаја операција у групи композиција пресликавања.

Пример 2.11. На колико различитих начина можемо обојити стране коцке користећи 3 боје?

** Два бојења сматрамо истим ако се једно може добити од другог ротацијом око правих које смо описали у Примеру 2.9.



Решење:

Означимо скуп страна коцке $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. С обзиром да је коцка тродимензионална, елементи групе која дејствује на скупу X ће бити ротације.

Идентитет ε фиксира сва бојења, па је $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$.

1. Ротација за угао π око правих које садрже средишта наспрамних ивица. Таквих ротација има укупно 6. Једна од 6 пермутација је
$$\rho_{\pi}^{1} = (15)(24)(36).$$
2. Ротација око главних дијагонала за углове $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Таквих ротација има укупно 8. Посматрајмо ротацију за угао $\frac{2\pi}{3}$ око главне дијагонале, тада је једна пермутација
$$\rho_{\frac{2\pi}{3}}^{2} = (125)(346).$$
Таквих пермутација имамо 4. Ако бисмо посматрали ротацију за угао $\frac{4\pi}{3}$, тада је
$$\rho_{\frac{4\pi}{3}}^{2} = (152)(364).$$
Оваквих пермутација је такође 4.
3. Ротација за углове $\frac{\pi}{2}$ и π око правих које спајају средишта наспрамних страна. Нека је $\rho_{\frac{\pi}{2}}^{3}$ ротација за угао $\frac{\pi}{2}$, тада је
$$\rho_{\frac{\pi}{2}}^{3} = (1234)(5)(6).$$
$\rho_{\frac{\pi}{2}}^{3}$ се састоји од 3 циклуса и имамо укупно 6 оваквих ротација.
Нека је ρ_{π}^{3} ротација за угао π, тада је
$$\rho_{\pi}^{3} = (13)(24)(5)(6).$$
Дата ротација се састоји од 4 циклуса, и имамо их 3.
Нека скуп G представља скуп свих ротација, укључујући и идентичко пресликавање, тада је $|G| = 24$.

Ради прегледности, формираћемо таблицу са потребним подацима. Коцку је потребно обојити са 3 боје, па је $m = 3$.

$\pi \in G$	пермутације	c − број циклуса	m^c
ε	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	6	3^6
ρ_{π}^{1}	$(15)(24)(36)$	3	3^3
$\rho_{\frac{2\pi}{3}}^{2}$	$(125)(346)$	2	3^2
$\rho_{\frac{4\pi}{3}}^{2}$	$(152)(364)$	2	3^2
$\rho_{\frac{\pi}{2}}^{3}$	$(1234)(5)(6)$	3	3^3
ρ_{π}^{3}	$(13)(24)(5)(6)$	4	3^4

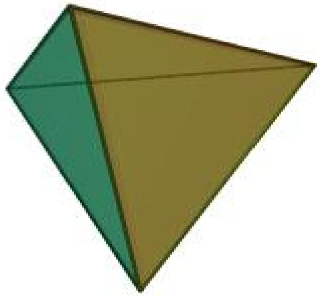
Напомена: У таблици нисмо навели све пермутације, већ по једног представника за сваки угао при датој ротацији.

Применићемо изведену формулу $|Y\ /\ G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^c$, добијамо

$$\frac{1}{24}\left(3^6 + 6\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4\right) = 57.$$

<u>Пример 2.12</u>. На колико начина можемо обојити стране правилног тетраедра користећи 4 боје?

** Два бојења сматрамо истим ако се једно може добити од другог ротацијом око правих које смо описали у Примеру 2.10.



Решење:

Означимо стране тетраедра са $1, 2, 3$ и 4 и нека скуп X представља скуп свих могућих бојења, приметимо да је тада $|X| = 4^4$. Група која дејствује на скупу $\{1, 2, 3, 4\}$ је група A_4.

Најпре ћемо одредити класе конјугованости групе A_4. То су:

$\{(123), (243), (142), (134)\}$,

$\{(132), (124), (143), (234)\}$,

$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$\{(1)\}$.

На основу Става 1.4. довољно је одредити $|X^g|$ за по један елемент g из сваке класе.

При пермутацији (123), 1 се слика у 2, 2 се слика у 3, а елемент 4 остаје фиксиран. С обзиром да тражимо фиксиране елементе, страна 4 може бити произвољно обојена, а стране 1, 2 и 3 су исте боје. Таквих могућности има укупно 4^2 тј. $\left|X^{(123)}\right| = 16$. Аналогно урадимо и за произвољну пермутацију из друге класе. Код пермутације $(12)(34)$, 1 се слика у 2, 3 се слика у 4. У овом случају нам одговарају бојења код којих су стране 1 и 2 обојене истом бојом, као и стране 3 и 4, а таквих могућности има 4^2 тј. $\left|X^{(12)(34)}\right| = 16$. Када је последња пермутација у питању, очигледно је да $\left|X^{(1)}\right| = 4^4$.

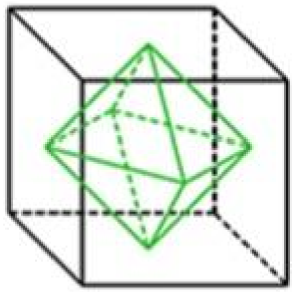
Применом *Бернсајдове леме* добијамо

$$\frac{1}{12}(4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^2 + 4^4) = 36.$$

Правилан тетраедар се помоћу 4 боје може обојити на 36 различитих начина.

Пример 2.13. На колико различитих начина се могу обојити стране правилног октаедра употребом 3 боје?

НАПОМЕНА: Коцка и правилан октаедар су дуална тела, с обзиром да се правилан октаедар конструише тако што спојимо средишта свих страна коцке.

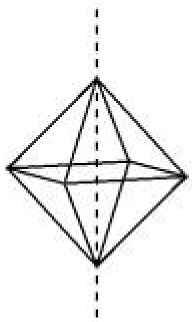


Можемо закључити да је група ротационих симетрија правилног октаедра изоморфна групи S_4.

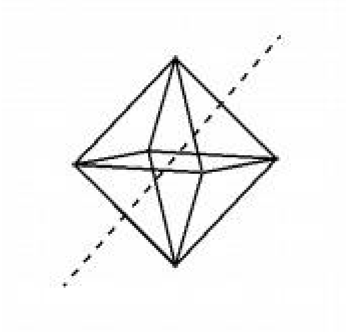
Решење:

Пре него што пређемо на решавање задатка, наведимо најпре групе симетрија над октаедром.

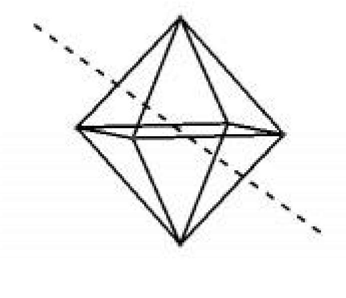
1. Прву групу симетрија чине ротације за угао $\pm\frac{\pi}{2}$ око осе која пролази кроз наспрамна темена октаедра. Таквих ротација има 6. Око исте осе имамо још 3 ротације за угао π.



2. Другу групу симетрија чине ротације за угао π око осе која пролази кроз средишта наспрамних страница. Таквих ротација има 6.



3. У трећу групу спадају ротације за угао $\frac{\pi}{3}$ око осе која пролази кроз средишта наспрамних страница. Таквих ротација има укупно 8.



Не смемо заборавити и идентичко пресликавање ε.

Означимо стране октаедра бројевима и нека је $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ скуп на који дејствујемо. Нека је G група којом дејствујемо и $|G| = 24$. Означимо са $\rho_1(\frac{\pi}{2})$ и $\rho_1(\pi)$ ротације из прве групе, са $\rho_2(\pi)$ ротације из друге групе и са $\rho_3(\frac{\pi}{3})$ ротације из треће групе, док је ε идентичко пресликавање.

Формирајмо табелу са потребним подацима. Октаедар бојима са три боје, па је $m = 3$.

$g \in G$	пермутације	$c -$ број циклуса	m^c
ε	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$	8	3^8
$\rho_1(\frac{\pi}{2})$	$(1234)(5678)$	2	3^2
$\rho_1(\pi)$	$(13)(24)(57)(68)$	4	3^4
$\rho_2(\pi)$	$(14)(23)(58)(67)$	4	3^4
$\rho_3(\frac{\pi}{3})$	$(164)(287)(3)(5)$	4	3^4

Применом изведене формуле, коју смо користили у претходним примерима, добијамо

$$\frac{1}{24}(3^8 + 6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^4) = 333.$$

Литература

[1] Гојко Калајџић, *Алгебра*, 2008.
Математички факултет, Београд

[2] Зоран Петровић, *Алгебра 1 – предавања за школску 2014/2015*
Математички факултет, Београд

[3] Зоран Петровић, *Алгебра 2 – предавања за школску 2014/2015*
Математички факултет, Београд

[4] Драгана Тодорић, белешке из Алгебре 2 са предавања за школску 2013/2014
Математички факултет, Београд

[5] Мирка Поповић, *Решавање енумеративних проблема помоћу дејства група*, Мастер рад, Математички факултет, Београд, 2018.

[6] Игор Долинка, *Предавања из теорије група*, Нови Сад, 2018.