Математички факултет
Универзитет у Београду

МАСТЕР РАД

Комбинаторика у средњој школи

Студент:
Ивана Мајсторовић
1130/2016

Ментор:
Александар Липковски

Београд,
децембар 2020.

Sadržaj

1 Увод **2**

2 Комбинаторика у настави математике за први разред средње школе **4**

2.1 Скуповне операције 4
2.2 Елементи комбинаторике 5
2.2.1 Уопштење принципа збира 5
2.2.2 Уопштење принципа производа 10
2.2.3 Дирихлеов принцип 12
2.3 Задаци 13

3 Комбинаторика у настави математике за четврти разред средње школе **16**

3.1 Основна правила 16
3.2 Варијације 19
3.2.1 Варијације без понављања 19
3.2.2 Варијације са понављањем 22
3.3 Пермутације 23
3.3.1 Пермутације без понављања 23
3.3.2 Пермутације са понављањем 25
3.4 Комбинације 27
3.4.1 Комбинације без понављања 27
3.4.2 Комбинације са понављањем 30
3.5 Биномни образац 31
3.5.1 Биномни коефицијенти 31
3.5.2 Развој бинома $(a + b)^n$ 33

4 Закључак **37**

1 Увод

Овај рад је намењен широком кругу читалаца, али највише ученицима и наставницима средњих школа како је циљ овог рада обрада комбинаторике у средњошколској настави. У настави математике за средње школе комбинаторика се уводи у првом и четвртом разреду средње школе. Прво поглавље прати наставни план и програм за први разред средње школе, док друго поглавље прати наставни план и програм за четврти разред средње школе.

Комбинаторика је грана математике чије прве идеје потичу још из времена Старих Грка, тј. из Питагорине епохе. У Грчкој је Плутарх написао да је Ксенократ открио број различитих слогова који су могући на грчком језику. Иако је мало вероватно, ово је једно од ретких спомињања комбинаторике у Грчкој. Број који су пронашли, $1.002 \cdot 10^{12}$, такође се чини превише округао да би био нагађање. Иако је Кина имала веома мало напретка у комбинаторици, и код њих се око 100. године јавља комбинаторно решење магичног квадрата. [6] Комбинаторика се током историје развијала заједно са другим гранама математике прожимајући се са њима.

И поред овако дуге историје комбинаторику треба сматрати математичком дисциплином двадесетог века, јер је у овом веку доживела значајан развој. То је дисциплина која је уско повезана са практичним потребама савременог живота. Степен примене комбинаторике данас постаје мерило технолошке развијености друштва. Данас се она користи у алгебри, геометрији, теорији вероватноће, статистици, рачунарству, економији, физици, хемији и многим другим наукама.[5]

Комбинаторика је област математике која се бави распоређивањем елемената у коначним скуповима.

Проблеми који се проучавају у оквиру комбинаторике могу бити разврстани у три основне групе:

i **проблеми егзистенције** комбинаторних елемената са унапред утвр- ђеним особинама;

ii **проблем пребројавања** елемената са задатим својствима;

iii **проблем генерисања**, односно конструкције комбинаторних елемената са утврђеним особинама.

Посебно је значајан део комбинаторике који се бави пребројавањем у циљу решавања различитих проблема. Због тога је веома битно проналажење ефикасних метода за пребројавање коначних скупова. Приликом решавања проблема пребројавања користе се четири елементарна принципа.

Принцип 1. ***(принцип једнакости)*** *Два коначна непразна скупа A и B имају једнак број елемената, тј. важи да је $|A| = |B|$, ако и само ако постоји бијекција $f : A \to B$.*

Принцип 2. ***(принцип већег броја)*** *Нека су A и B коначни скупови и $f : A \to B$ функција таква да за сваки елемент $b \in B$ постоји тачно k елемената $a \in A$ чије су слике при пресликавању f једнаке елементу b, тј. $|\{a | a \in A, f(a) = b\}| = k$. Тада је*

$$|A| = k \cdot |B|$$

.

Принцип 3. ***(принцип збира)*** *Ако су A и B коначни дисјунктни скупови, тада је*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

.

Принцип 4. ***(принцип производа)*** *Ако су A и B коначни скупови при чему је $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$, тада је*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

.

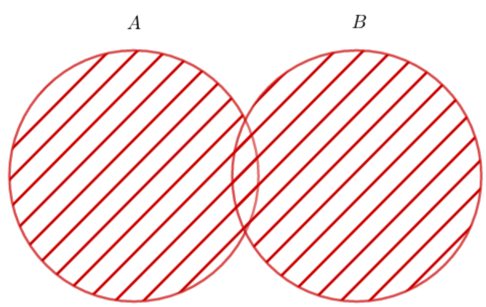
2 Комбинаторика у настави математике за први разред средње школе

У првом разреду ученицима се комбинаторика уводи кроз појам скупа и скуповних операција. Скуп је основни математички појам који се не дефинише и можемо га разумети као колекцију различитих елемената који чине целину.

2.1 Скуповне операције

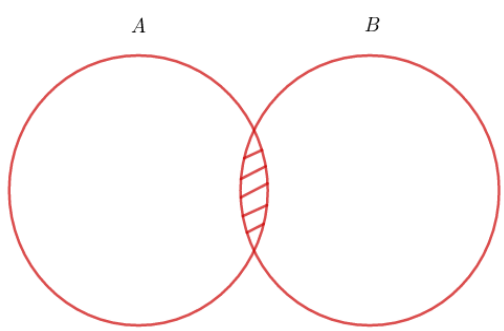
Скуповне операције дефинишу шта све можемо да радимо са скуповима. Скуповне операције се најједноставније представљају Веновим дијаграмима.

Унија скупова A и B је скуп свих елемената скупа A и скупа B.



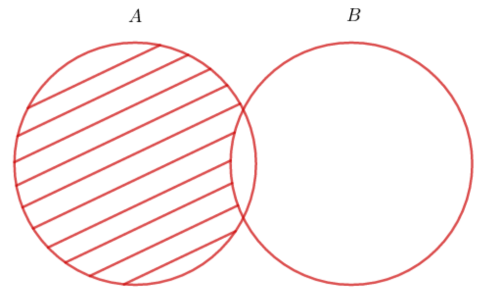
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Пресек скупова A и B је скуп заједничких елемената скупова A и B.



$$A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

Разлика скупова A и B је скуп елемената скупа A који нису елементи скупа B.



$$A \setminus B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

Партитивни скуп скупа A је скуп свих подскупова скупа A.

Декартов производ скупова A и B је скуп уређених парова где је први елемент уређеног пара из скупа A, а други елемент уређеног пара из скупа B.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \land b \in B\}$$

2.2 Елементи комбинаторике

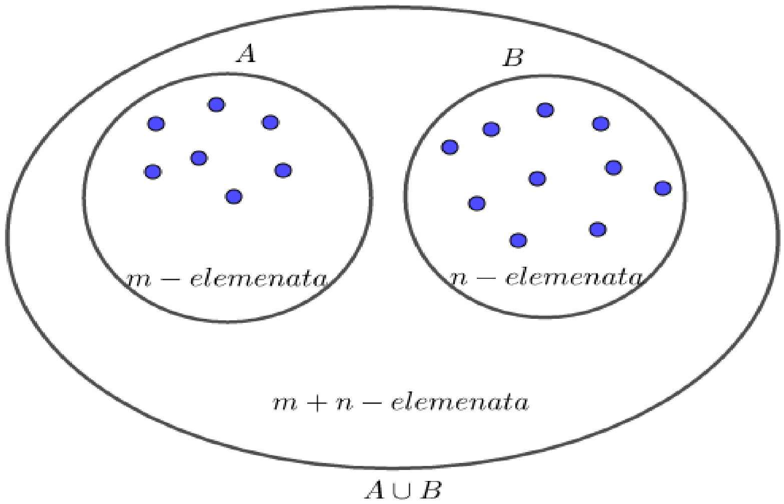
Овде ће бити приказано како се решавају неки једноставнији проблеми комбинаторике, имајући у виду да ће се ученици тек у четвртом разреду упознати са основним појмовима комбинаторике, као што су варијације, пермутације и комбинације. Пре самих проблема ученицима је потребно објаснити елементарне принципе који се користе приликом решавања проблема пребројавања, који су наведени у уводу.

2.2.1 Уопштење принципа збира

Проблем 1. *Дати су скупови A и B такви да скуп A има m елемената ($|A| = m$), док скуп B има n елемената ($|B| = n$). Колико елемената има скуп $A \cup B$? ($|A \cup B| = ?$)*

Овај проблем има два случаја:

1. Скупови и B немају заједничких елемената (дисјунктни су).

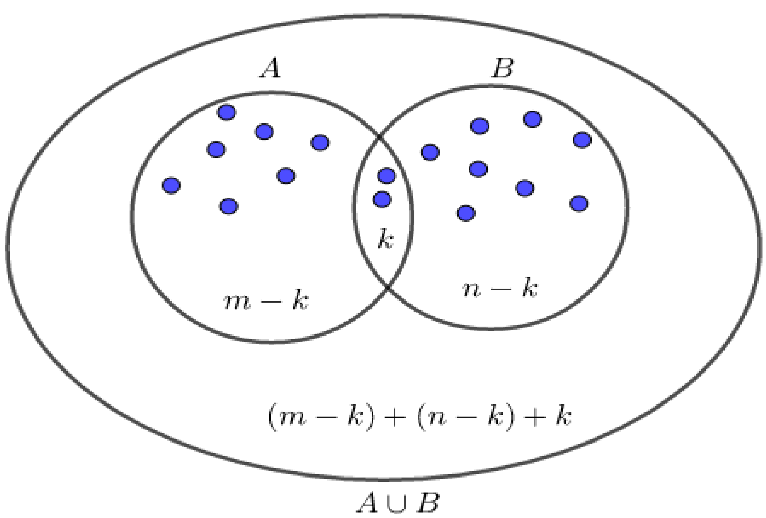


У овом случају број елемената скупа $A \cup B$ је:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = m + n$$

.

2. Скупови и B имају заједничких елемената, тј $A \cap B \neq \emptyset$. Нека скупови и B имају k заједничких елемената.

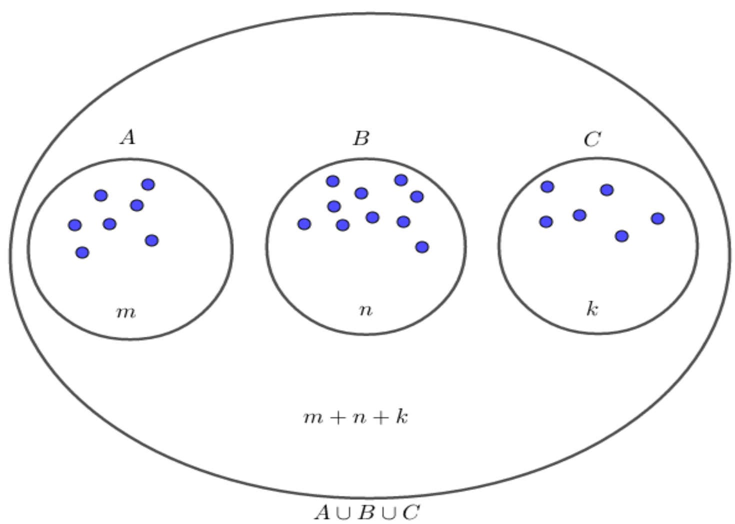


У овом случају број елемената скупа $A \cup B$ је:
$|A \cup B| = (m-k) + (n-k) + k = m - k + n - k + k = m + n - k =$
$= |A| + |B| - |A \cap B|$.

Проблем 2. *Дати су скупови A, B и C такви да је $|A| = m$, $|B| = n$, $|C| = k$. Колико елемената има скуп $A \cup B \cup C$?*

Овај проблем такође има два случаја:

1. Скупови A, B и C немају заједничких елемената, односно скупови су међусобно дисјунктни.

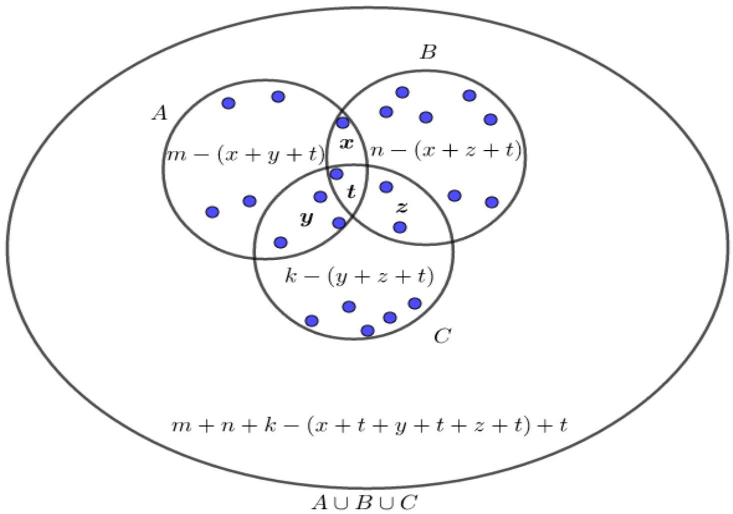


Број елемената скупа $A \cup B \cup C$ је:

$$|A \cup B \cup C| = m + n + k$$

.

2. Скупови A, B и C се међусобно секу.
Нека је $|A \cap B \cap C| = t$,
$|A \cap B| = x + t$,
$|A \cap C| = y + t$ и
$|B \cap C| = z + t$.



Тада је број елемената скупа $A \cup B \cup C$:
$|A \cup B \cup C| = m-(x+y+t)+n-(x+z+t)+k-(y+z+t)+x+y+z+t =$
$= m-x-y-t+n-x-z-t+k-y-z-t+x+y+z+t =$
$= m+n+k-x-y-z-2\cdot t =$
$= m+n+k-(x+t+y+t+z+t)+t =$
$= |A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$

Оно што можемо закључити из ових проблема је уопштење принципа збира за коначно много скупова.

Уопштење принципа збира: Ако је A коначан скуп такав да важи једнакост $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, где је $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, онда је $|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.

Пример 1. *На полици се налази 5 различитих књига из математике, 4 различите књиге из физике и 3 различите књиге из биологије. На колико различитих начина можемо изабрати једну књигу?*

Решење:

Означимо са M, F и B редом скуп књига из математике, физике и биологије. Ми заправо бирамо књигу из скупа $M \cup F \cup B$. Скупови M, F и B су дисјунктни према принципу збира. Према томе, број различитих начина је:

$$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| = 12.$$

▲

Пример 2. *Бацају се две коцкице истовремено. На колико начина се може добити 9 или 11?*

Решење:

Збир 9 се може добити на следеће начине: $(3,6),(6,3),(4,5)$ и $(5,4)$. Збир 11 се може добити на следеће начине: $(5,6)$ и $(6,5)$. Први број представља добијени број на првој коцки, док други број представља број добијен на другој коцки. Означимо да је скуп $A = \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$ и скуп $B = \{(5,6),(6,5)\}$. Скупови A и B су дисјунктни, и важи да је $|A| = 4$ и $|B| = 2$. На основу принципа збира важи да је

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 4 + 2 = 6.$$

Дакле, закључујемо да 9 или 11 можемо добити на 6 начина.

▲

Пример 3. *У групи од 100 ученика, 60 ученика тренира пливање, 75 кошарку, а 45 ученика тренира и пливање и кошарку. Колико ученика тренира пливање или кошарку (бар један од ова два спорта)?*

Решење:

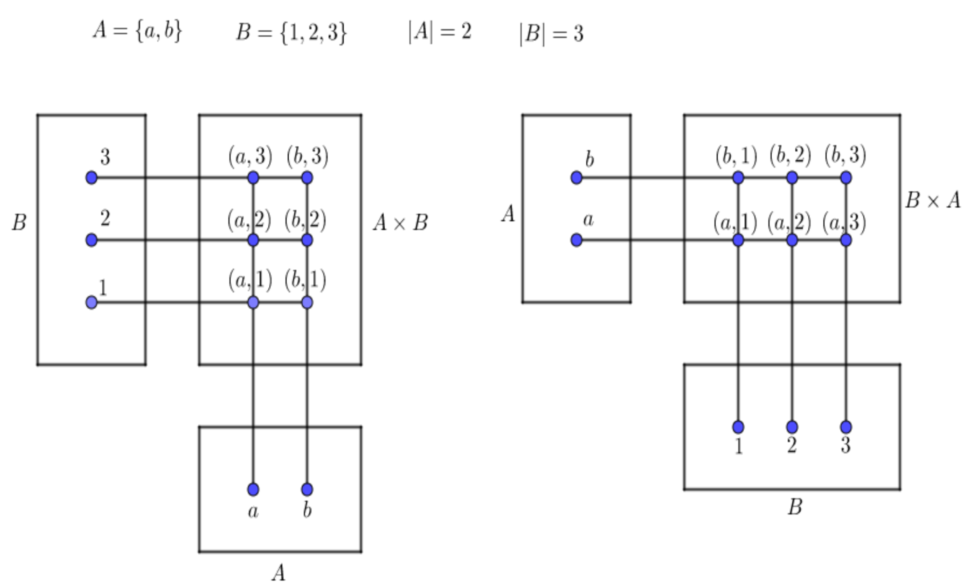
Означимо са P и K редом скуп ученика који тренирају пливање и кошарку. Скупови P и K нису дисјунктни. Број ученика који тренира бар један од ова два спорта одређујемо на следећи начин:

$$|P \cup K| = |P| + |K| - |P \cap K| = 60 + 75 - 45 = 90.$$

▲

2.2.2 Уопштење принципа производа

Проблем 3. *Дати су скупови A и B такви да је $|A| = 2$ и $|B| = 3$. Колико елемената има скуп $A \times B$?*



Дакле, на основу слике можемо закључити да је $|A \times B| = 6 = 2 \cdot 3 = |A| \cdot |B|$ или $|B \times A| = 6 = 3 \cdot 2 = |B| \cdot |A|$.

Слично важи и за три скупа A, B и C. Тада је $|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$. Оно што можемо закључити је да важи и уопштење принципа производа за коначно много скупова.

Уопштење принципа производа: Претпоставимо да скупови A_1, A_2, ..., A_n садрже редом $k_1, k_2, \cdots, k_n$ елемената. Тада Декартов производ $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ садржи $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$ елемената, односно важи

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$$

.

Пример 4. *Шифра се састоји од 2 симбола, од којих је први симбол слово азбуке, а други цифра. Колико таквих различитих шифара постоји?*

Решење:

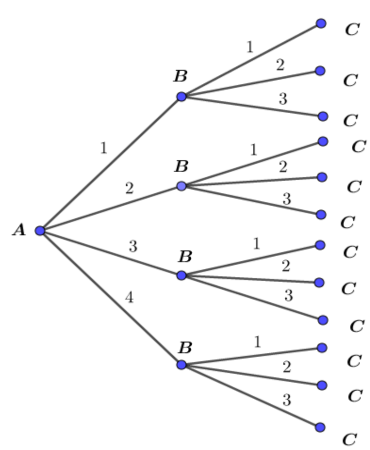
Избор слова се може урадити на 30 начина, а избор цифре на 10 начина. Ако са A облежимо скуп слова азбуке, а са C скуп цифара, тада je $|A| = 30$ и $|C| = 10$. Тако да на основу принципа производа имамо да je $|A \times C| = |A| \cdot |C| = 30 \cdot 10 = 300$.

▲

Пример 5. *Од места до места B воде 4 различита пута, а од места B до места C воде 3 различита пута. Колико различитих путева води од места A до места C?*

Решење:

Да бисмо пребројали све путеве послужићемо се следећом сликом:



Ако из места A стигнемо путем 1 у место B, тада из места B имамо 3 могућности да стигнемо у место C и те могућности обележимо са $(1,1),(1,2),(1,3)$. Ако исти поступак урадимо за све путеве од A до B, добијамо све могуће путеве $(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)$. Тако да закључујемо да од A до C има укупно $4 \cdot 3 = 12$ различитих путева.

▲

Пример 6. *У ресторану се може добити супа, главно јело и колач. Ако имамо 3 врсте супе, 4 врсте главног јела и 5 врста колача, на колико различитих начина можемо наручити ручак? Подразумева се да је обавезно наручити и супу и главно јело и колач.*

Решење:

Обележимо са $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ супе, са $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ главна јела и са $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ обележимо колаче. Како је $|S| = 3$, $|G| = 4$ и $|K| = 5$, на основу принципа производа добијамо да је

$$|S \times G \times K| = |S| \cdot |G| \cdot |K| = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

.

▲

2.2.3 Дирихлеов принцип

Дирихлеов принцип је веома корисно тврђење чија формулација каже: Ако $n \cdot m + 1$ предмет треба распоредити у n кутија, онда се најмање у једној кутији мора налазити бар $m + 1$ предмет.

Пример 7. *Ако у школи има 735 ученика, онда најмање 3 ученика славе рођендан истог дана.*

Решење:

Обележимо са $n = 365$ број дана у години. Следећи корак је да 735 поделимо са 365 и добијемо количник 2 и остатак 5. Ставимо да је $m = 2$, тада је $735 = n \cdot m + 5 = 365 \cdot 2 + 5$, па на основу Дирихлеовог принципа следи да бар 3 ученика слави рођендан истог дана.

▲

Пример 8. *У сваком скупу од 8 или више особа, постоје бар две које су рођене истог дана у недељи.*

Решење:

Број дана у недељи је 7, па ја $8 = 7 \cdot 1 + 1$. На основу Дирихлеовог принципа следи да су бар две особе рођене истог дана у недељи.

▲

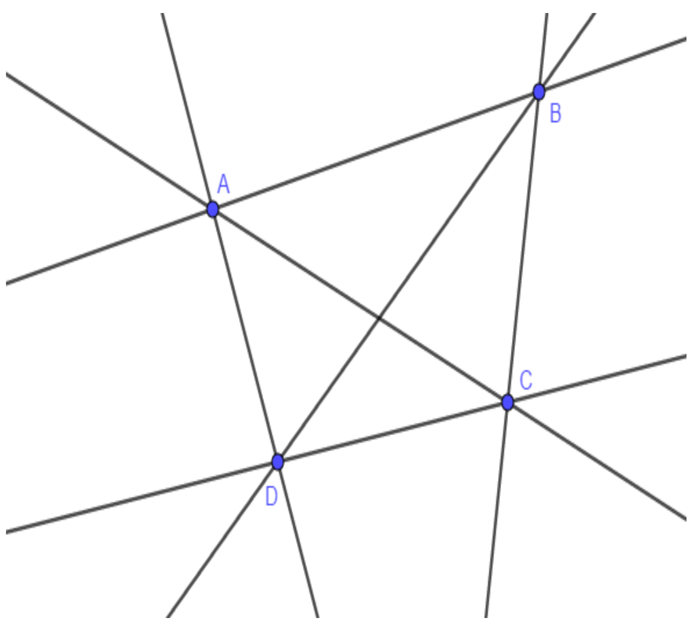
2.3 Задаци

У првом разреду средњих школа се решавају и сложенији комбинаторни задаци логичким размишљањем (без примене формула).

Задатак 1. *Колико је правих одређено са 4 неколинеарне тачке?*

Решење:

Овде је лако утврдити колико је правих одређено са 4 неколинеарне тачке. Једноставно их пребројимо:



Логичким размишљањем задатак би се решавао на следећи начин. Знамо да је права одређена са две различите тачке. Из тачке A могу да се повуку 3 праве: AB, AC и AD. Из тачке B такође 3 праве: BA, BC и BD. Из тачке C такође 3 праве: CA, CB и CD. И из тачке D такође 3 праве: DA, DB и DC. Имамо да AB и BA представљају исту праву. Иста слова у различитом распореду представљају исту праву. Тако да је укупан број правих: $\frac{4\cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

▲

Задатак 2. *Колико је правих одређено са 15 различитих тачака међу којима не постоји ниједна тројка колинеарних тачака?*

Решење:

По сличном принципу као у претходном задатку, укупан број правих је $\frac{15\cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$.

▲

Задатак 3. *Колико правих је одређено са 15 различитих тачака међу којима има две четворке колинеарних тачака?*

Решење:

Укупан број правих од 15 различитих тачака је $\frac{15\cdot 14}{2} = 15\cdot 7 = 105$. Од овог броја одузимамо број правих које се добијају од колинеарних тачака. Четири различите тачке одређују $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ правих, али ако су колинеарне оне одређују једну праву. Па је укупан број правих $\frac{15\cdot 14}{2} - 2 \cdot \frac{4\cdot 3}{2} + 2 = 105 - 12 + 2 = 95$.

▲

Задатак 4. *Колико се петоцифрених бројева, без понављања цифара, може написати од цифара* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

Решење:

На прво место можемо поставити било коју цифру различиту од нуле, што значи да имамо 9 могућности. На друго место можемо поставити било коју цифру, осим оне која је постављена на прво место, што значи да поново имамо 9 могућности. На трећем месту можемо поставити било коју цифру од преосталих 8 цифара. На четврто место можемо поставити било коју цифру од преосталих 7 цифара. И на пето место можемо поставити било коју цифру од преосталих 6 цифара.

9	9	8	7	6

Дакле укупан број тражених петоцифрених бројева је $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$.

▲

3 Комбинаторика у настави математике за четврти разред средње школе

У четвртом разреду ученици уче напредније начине решавања проблема распоређивања елемената у коначним скуповима и одређивање броја таквих распореда. Сваки коначан скуп може имати веома велики број различитих распореда елемената, па није могуће урадити исписивање свих распореда и њихово једноставно пребројавање. Тако да је циљ упознати ученике са основним типовима распоређивања и општим методама пребројавања распореда.

3.1 Основна правила

Нека је $S = \{A, B, C\}$, решаваћемо следећа три проблема:

1. Колико се трочланих низова, са међусобно различитим елементима, може формирати од елемената скупа S?
   Решење:

   Имамо следеће трочлане низове са различитим елементима: $(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)$. Као што можемо видети има их 6.

2. Колико се двочланих низова, са међусобно различитим елементима, може формирати од елемената скупа S?
   Решење:

   Постоје следећи двочлани низови са међусобно различитим елементима: $(A, B), (A, C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B)$. Као што видимо, и њих има 6.

3. Ако су A, B и C три тачке равни које не припадају истој правој, колико је дужи одређено овим тачкама?
   Решење:

   Знамо да сваке две тачке одређују једну дуж, па су $(A, B), (A, C)$ и (B, C) могуће дужи. Дакле, има их 3.

У случају 1. реч је о **пермутацијама**, у случају 2. је реч о **варијацијама**, док је у случају 3. реч о **комбинацијама**. Кроз ова три једноставна проблема представљени су основни типови распоређивања који се могу јавити: пермутације, варијације и комбинације. При решавању комбинаториних задатака највећи проблем је препознати о ком типу распоређивања се ради.

У следећој табели је приказано како препознати о ком типу распоређивања се ради:

Tabela 1: Тип распоређивања

Да ли се користе сви елементи почетног скупа?	Да ли различит распоред елемената има исто значење?	Тип распоређивања
ДА	НЕ	Пермутације
НЕ	НЕ	Варијације
НЕ	ДА	Комбинације

Како би разумели формуле за пребројавање, потребно је увести ознаку за производ првих n узастопних природних бројева:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

и читамо је **"n факторијел"**. Тако да имамо:

$$\begin{gathered} 0! = 1, \\ 1! = 1, \\ 2! = 2 \cdot 1 = 2, \\ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \\ 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \\ 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, \\ \ldots \end{gathered}$$

Битно је напоменути и разумети да постоји и следећа веза:

$$\begin{gathered} n! = n \cdot (n-1)! = \\ = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \cdots = \\ = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!. \end{gathered}$$

Пример 9. *Одредити n ако је $\frac{n!}{(n-1)!} = 9$.*

Решење:

$\frac{n!}{(n-1)!} = 9 \iff \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = 9$, а после скраћивања са $(n-1)!$ у бројиоцу и имениоцу добијамо да је $n = 9$.

▲

Пример 10. *Одредити n ако је $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 120$.*

Решење:

$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 120 \iff \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = 120$, а после скраћивања са $(n-1)!$ у бројиоцу и имениоцу добијамо да је

$$(n+2)\cdot(n+1)\cdot n = 120.$$

Дакле, $(n+2), (n+1)$ и n су три узастопна броја чији је производ 120. Како је $120 = 6\cdot 5\cdot 4$, онда је $(n+2)\cdot(n+1)\cdot n = 6\cdot 5\cdot 4$. Следи да је $n = 4$.

▲

Поред факторијела потребно је увести још једну ознаку. Нека $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \leq n$. Број $\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ означавамо са $\binom{n}{k}$ и читамо "n **над** k". По дефиницији важи:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Пример 11. *Применом формуле израчунати $\binom{4}{2}, \binom{6}{4}, \binom{15}{3}$.*

Решење:

$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$

$\binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15$

$\binom{15}{3} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455$

▲

Згодно је приметити да за

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

у бројиоцу имамо k чинилаца, а у имениоцу $k!$.

3.2 Варијације

3.2.1 Варијације без понављања

Дефиниција 1. *Варијације без понављања k-те класе скупа A, који има n елемената ($k \leq n$) јесте сваки низ k међусобно различитих елемената скупа A.*

Теорема 1. *Број варијација без понављања k-те класе скупа A, који има n елемената је:*

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Доказ: У k-торки $(A_1, A_2, ..., A_k)$ различитих елемената скупа A, први члан A_1 може бити било који од n елемената скупа A, други члан A_2 може бити било који од $(n-1)$ елемената скупа A, ..., k-ти члан A_k може бити било који од $n-k+1$ елемената скупа A. Према томе, број k-торки различитих елемената скупа A једнак је $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$.

□

Специјално, ако је $k = n$, добијамо да је:

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

Како је $n! = n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1$, а такође имамо да је $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1$, тада формулу за варијације можемо записати у следећем облику:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример 12. *Написати све варијације без понављања друге и треће класе елемената a, b, c, d.*

Решење:

Варијације друге класе без понављања су:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Број варијација друге класе за дати скуп је:
$V_2^4 = 4 \cdot 3 = 12.$

Варијације треће класе без понављања су:

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

Број варијација треће класе за дати скуп је:
$V_3^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

▲

Пример 13. *Дат је скуп $A = \{2, 4, 5, 8\}$:*

1. *Колико има варијација без понављања треће класе елемената скупа A?*
2. *Која је по реду варијација без понављања 482?*
3. *Како гласи 20. варијација без понављања класе 3?*

Решење:

1. $V_3^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$
2. Са 2 почиње $V_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$, са 42 почиње $V_1^2 = 2$, што је укупно 8 варијација. Са 45 почињу $V_1^2 = 2$ варијације, тако да је то укупно 10 варијација. Како је 482 прва варијација која почиње са 48, закључујемо да је она 11. варијација по реду.

3. Са 2 почиње $V_2^3 = 3 \cdot 2 = 6$ варијација, са 4 почиње $V_2^3 = 3 \cdot 2 = 6$ варијација и са 5 почиње $V_2^3 = 3 \cdot 2 = 6$ варијација. Тако да их је до сада укупно 18. Према томе тражена 20. варијација се налази међу 6 варијација које почињу са 8. Од њих са 82 почињу 2 варијације, и управо друга од њих је тражена варијација. Дакле 20. варијација је 825.

▲

Пример 14. *Колико има троцифрених бројева чије су све цифре различите и чије су све цифре елементи скупа*
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*?*

Решење:

Први корак је да одредимо да ли су у питању пермутације, варијације или комбинације (са или без понављања).
Да ли се користе сви елементи почетног скупа? **НЕ.**
Да ли различит распоред истих елемената има исто значење? Број 123 и 321 немају исто значење (то су различити бројеви), па је одговор и овде **НЕ**.
Из овога следи да се ради о варијацијама. С обзиром да су све цифре различите ради се о **варијацијама без понављања**. Укупан број варијација без понављања скупа A је :

$$V_3^{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Међутим број не може да почне нулом, па одузимамо све варијације које почињу нулом $V_2^9 = 9 \cdot 8 = 72$. Дакле укупан број троцифрених бројева је:

$$V_3^{10} - V_2^9 = 720 - 72 = 648.$$

▲

3.2.2 Варијације са понављањем

Дефиниција 2. *Варијације са понављања k-те класе скупа A, који има n елемената, јесте сваки низ од k елемената скупа A, при чему се елементи могу понављати.*

Теорема 2. *Број варијација k-те класе скупа A, који има n елемената је:*

$$\overline{V}_k^n = n^k$$

Доказ: У k-торки $(A_1, A_2, ..., A_k)$ елемената скупа A, који могу да се понављају, први члан A_1 може бити било који од n елемената скупа A и сваки следећи члан може бити било који од n елемената скупа A. То значи да k-ти члан A_k може бити било који од n елемената скупа A. Према томе број k-торки елемената скупа A једнак је $\overline{V}_k^n = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.

□

Пример 15. *Нека је $A = \{a, b\}$. Написати све варијације треће класе са понављањем од елемената скупа A.*

Решење:

Све могуће варијације скупа A треће класе са понављањем су: $aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb$. Дакле има их 8.

$$\overline{V}_3^2 = 2^3 = 8.$$

▲

Пример 16. *На тикету спортске прогнозе налази се 13 парова фудбалских екипа, који ће међусобно одиграти утакмице. На колико начина се може прогнозирати исход свих утакмица ако се поред сваког пара може уписати један од бројева $0, 1$ или 2, који редом означавају нерешен резултат, победа домаће екипе и победа гостујуће екипе.*

Решење:

У овом задатку од 3 елемента скупа $A = \{0, 1, 2\}$ праве се низови од 13 елемената, што значи да елементи скупа A могу да се понављају. Да ли различит распоред истих елемената има исто значење? Не. Значи да је реч о варијацијама са понављањем, па прогноза може да се изврши на $\overline{V}_{13}^{2} = 2^{13} = 1594323$ начина.

▲

Пример 17. *Колико има троцифрених бројева од цифара* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Решење:

Овде је реч о варијацијама треће класе са понављањем од 10 елемената. Од укупног броја варијација треће класе са понављањем треба одузети оне који почињу нулом. Њих добијамо када варијацијама друге класе са понављањем од елемената $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ допишемо нулу на првом месту. Дакле укупан број троцифрених бројева је:

$$\overline{V}_{10}^{3} - \overline{V}_{10}^{2} = 10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900.$$

▲

3.3 Пермутације

3.3.1 Пермутације без понављања

Дефиниција 3. *Пермутације без понављања скупа A, који има n елемената, јесте сваки низ у коме се тачно једанпут појављују сви елементи скупа A.*

Теорема 3. *Број пермутација скупа A који има n елемената је:*

$$P(n) = n!$$

Пример 18. *За дати скуп* $A = \{a, b, c, d\}$ *написати све пермутације скупа.*

Решење:

Пермутације датог скупа су:

$abcd$	$bacd$	$cabd$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

Број пермутација за дати скуп је $P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

▲

Пример 19. *Одреди:*

1. *На колико начина можемо поређати у низ елементе* $1, 2, 3, 4, 5$*?*
2. *На колико начина можемо поређати у низ елементе* $1, 2, 3, 4, 5$*, тако да на прва два места стоје парни бројеви?*

Решење:

1. $P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
2. Бројеве 2 и 4 можемо распоредити на прва два места на 2! начина, док преостале бројеве $1, 3, 5$ можемо распоредити на остала 3 места на 3! начина. Па је укупан број распореда $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$.

▲

Пример 20. *Одредити* 57 *пермутацију елемената* $1, 2, 3, 4, 5$.

Решење:

Са 1 почињу $4! = 24$ пермутације.
Са 2 почињу $4! = 24$ пермутације, до сада 48 пермутација.
Са 31 почиње $3! = 6$ пермутација, до сада 54 пермутације.
Са 321 почињу $2! = 2$ пермутације, што је укупно 56 пермутација.
Па је 32415 тачно 57-ма пермутација.

▲

Пример 21. *Одредити која је пермутација по реду реч ПЕТАР, где за прву пермутацију узимамо азбучни ред АЕПРТ.*

Решење:

Са А почињу $4! = 24$ пермутације.
Са Е почињу $4! = 24$ пермутације, до сада 48 пермутација.
Са ПА почиње $3! = 6$ пермутација, до сада 54 пермутације.
Са ПЕА почињу $2! = 2$ пермутације, до сада 56 пермутација.
Са ПЕР почињу $2! = 2$ пермутације, што је укупно 58 пермутација.
ПЕТАР је прва пермутација која долази после свих пермутација које почињу са ПЕР. Дакле, ПЕТАР је 59-та пермутација.

▲

3.3.2 Пермутације са понављањем

У скупу $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ постоји $3! = 6$ пермутација. То су следеће пермутације:

$$a_1a_2a_3, a_1a_3a_2, a_2a_1a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2, a_3a_2a_1 \ (*).$$

Претпоставимо сада да је $a_1 = a_2$. Пермутације (*) тада постају:

$$a_1a_1a_3, a_1a_3a_1, a_1a_1a_3, a_1a_3a_1, a_3a_1a_1, a_3a_1a_1,$$

односно имамо само три различите пермутације.

У овом примеру елемент a_1 понавља се два пута, па се по $2! = 2$ пермутација спајају у једну. Тако да као крајњи резултат не добијамо више $3! = 6$, већ $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$ пермутације.

Уопштено, ако са $P_k(n)$ означимо број свих пермутација од n елемената међу којима има k једнаких, онда је број таквих пермутација:

$$P_k(n) = \frac{n!}{k!}.$$

Ово се може даље генерализовати на следећи начин. Нека $P_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n)$ означава број пермутација n елемената међу којима има k_1 једнаких, затим k_2 једнаких, ..., k_m једнаких. Тада је:

$$P_{k_1,k_2,\ldots,k_3}(n) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!}.$$

Пример 22. *Одредити број свих пермутација елемената* $\{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1\}$.

Решење:

Уколико имамо $n = 7$ елемената, међукојима се 0 појављује $k_1 = 4$ пута, а 1 појављује $k_2 = 3$ пута, број свих пермутација је

$$P_{4,3}(7) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

▲

Пример 23. *Одредити* 15. *пермутацију елемената из претходног примера.*

Решење:

Са 0 почиње $P_{3,3}(6) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ пермутација, што значи да је 15. пермутација међу њима са 00 почиње $P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3! \cdot 3!} = 10$ пермутација, а са 01 такође почиње 10 пермутација. Можемо закључити да је тражена пермутација међу онима које почињу са 01. Са 010 почиње 6 пермутација, што значи да се 15. пермутација налази међу њима. Како са 0100 почињу $P_2(3) = \frac{3!}{2!} = 3$ пермутације, значи да 15. пермутација почиње са 0101 и гласи 0101010.

▲

Пример 24. *Одредити која је по реду премутација реч ТАБЛА, ако је прва пермутација ААБЛТ.*

Решење:

Са А почињу $P(4) = 4! = 24$ пермутације.
Са Б почиње $P_2(4) = \frac{4!}{2!} = 12$ пермутација, до сада 36 пермутација.
Са Л почиње $P_2(4) = \frac{4!}{2!} = 12$ пермутација, до сада 48 пермутација.
Сада долазе на ред пермутације које почињу са ТАА и таквих је две.Пермутација које почињу са ТАБ је такође две, а реч ТАБЛА је друга. Дакле, ТАБЛА је 52. премутација.

▲

Пример 25. *Одредити колико се различитих речи може добити пермутацијом слова речи КОМБИНАТОРИКА.*

Решење:

Како се слова К, О, И и А појављују по два пута у речи КОМБИНАТОРИКА, а реч има укупно 13 слова, у питању су пермутације са понављањем. Према томе, укупан број различитих речи које се могу добити од ових слова је:

$$P_{2,2,2,2}(13) = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$P_{2,2,2,2}(13) = 389188800.$$

▲

3.4 Комбинације

3.4.1 Комбинације без понављања

Дефиниција 4. *Комбинације без понављања k-те класе n-чланог скупа A ($k \leq n$) је сваки k-члани подскуп скупа A где различит распоред истих елемената има исто значење.*

Теорема 4. *Број комбинација без понављања k-те класе n-чланог скупа A једнак је:*

$$C_k^n = \binom{n}{k}$$

Доказ: Од једне комбинације без понављања класе k, рецимо $x_1, x_2, ..., x_k$ променом поретка чланова, ћемо добити $P(k) = k!$ пермутација скупа $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, односно $k!$ варијација класе k полазног скупа A од n елемената. Ако је C_k^n укупан број комбинација без понављања класе k од n елемената, тада је:

$$C_k^n \cdot k! = V_k^n,$$

одакле се добија:

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Пример 26. *На колико различитих начина од* 10 *различитих сувенира туриста може купити* 3 *различита сувенира.*

Решење:

Овде се не користе сви елементи полазног скупа, а различит распоред елемената има исто значење. Нпр. редослед магнет, привезак и отварач за флаше има исто значење као редослед привезак, магнет и отварач за флаше. Дакле, ради се о комбинацијама. Елементи се не понављају јер је потребно да буду различити сувенири, тако да су у питању комбинације без понављања. Па је одговор: $C_3^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

▲

Пример 27. *У одељењу има* 12 *ученица и* 8 *ученика. Треба изабрати* 3 *ученице и* 2 *ученика који ће представљати одељење на такмичењу младих математичара. На колико начина се то може урадити?*

Решење:

Од 12 ученица можемо изабрати њих три на C_3^{12} начина.

$$C_3^{12} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

Од 8 ученика можемо изабрати двојицу на C_2^8 начина.

$$C_2^8 = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

На основу принципа производа добијамо да је тражени број једнак

$$C_3^{12} \cdot C_2^8 = \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} = 220 \cdot 28 = 6160.$$

▲

Пример 28. *Нека је A скуп од 9 тачака у простору, од којих никоје три нису на једној правој и никоје четири нису у једној равни. Одредити колико је:*

1. *троуглова*

2. *правих*

3. *тетраедара*

једнозначно одређено елементима скупа A.

Решење:

1. Било које три неколинеарне тачке одређују троугао. Према томе одређено је $C_3^9 = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$ троуглова.

2. Сваке две различите тачке одређују једну праву. Дакле одређено је $C_2^9 = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot8}{2\cdot1} = 36$ правих.

3. Како никоје четири тачке нису у једној равни, сваки скуп од четири тачке одређује један тетраедар. Одређено је $C_4^9 = \binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126$ тетраедара.

▲

Пример 29. *Колико комбинација има игра на срећу "Лото"(извлачи се 7 од 39 бројева)?*

Решење:

Овде се ради о комбинацијма без понављања седме класе од 39 елемената, тако да је решење:

$$C_7^{39} = \binom{39}{7} = \frac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 15380937.$$

▲

3.4.2 Комбинације са понављањем

Нека је $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Комбинације са понављањем класе k од n елемената скупа A јесу оне варијације са понављањем класе k од тих елемената, које се сматрају једнаким ако су састављене од истих елемената (различит распоред истих елемената има исто значење).

Као и у случају комбинација без понављања, она варијација из скупа варијација које сматрамо једнаким која је прва по лексикографском уређењу означава и одговарајућу комбинацију. На пример све варијације са понављањем класе 2 елемената скупа $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ су:

$$\begin{gathered} a_1a_1,\ a_2a_1,\ a_3a_1, \\ a_1a_2,\ a_2a_2,\ a_3a_2, \\ a_1a_3,\ a_2a_3,\ a_3a_3. \end{gathered}$$

Међутим, сматрамо једнаким следеће парове: a_1a_2 и a_2a_1; a_1a_3 и a_3a_1; a_2a_3 и a_3a_2, па су све комбинације са понављањем класе 2:

$$a_1a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_2a_2,\ a_2a_3,\ a_3a_3.$$

Нека је $a_1a_2\cdots a_k$ комбинација са понављањем класе k од n елемената $a_1, a_2, ..., a_n$. Тој комбинацији са понављањем можемо придружити следећу комбинацију без понављања $a_1a_{2+1}a_{3+2}a_{4+3}\cdots a_{k+k-1}$ од елемената $a_1, a_2, ..., a_n, ..., a_{n+k-1}$. На тај начин видимо да комбинацији са понављањем класе k од n елемената одговара комбинација без понављања класе k од $n+k-1$ елемената. Стога, ако са $\overline{C}_k^n$ означимо број свих комбинација са понављањем класе k од n елемената долазимо до једнакости:

$$\overline{C}_k^n = C_k^{n+k-1},$$

одакле непосредно следи формула:

$$\overline{C}_k^n = \tbinom{n+k-1}{k}.$$

Пример 30. *Нека је* $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. *Одредити:*

1. 66. *комбинацију са понављањем класе* 4 *елемената скупа* A,
2. *Која је по реду комбинација* 1224.

Решење:

1. Са 0 почиње $\overline{C}_3^5 = \binom{7}{3} = 35$ комбинација, са 1 почиње $\overline{C}_3^4 = \binom{6}{3} = 20$, са 2 почиње $\overline{C}_3^3 = \binom{5}{3} = 10$ комбинација, што укупно износи 65 комбинација. Прва следећа комбинација је тражена 66. комбинација и она гласи 3333.

2. Са 0 почиње 35 комбинација, са 11 почиње $\overline{C}_2^4 = \binom{5}{2} = 10$ комбинација, а са 122 почињу $\overline{C}_1^2 = \binom{3}{1} = 3$ комбинације. Последња од те три комбинације је 1224, тако да је онда 48. по реду.

▲

Пример 31. *Решити једначину* $\overline{C}_2^n = 276$ *по непознатом природном броју* n.

Решење:

Како је $\overline{C}_2^n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2!}$, дата једначина постаје $\frac{(n+1)\cdot n}{2} = 276$, односно $(n+1)\cdot n = 2\cdot 276$ одакле добијамо $(n+1)\cdot n = 552$. Ова једначина може да се решава као квадратна једначина $n^2 + n - 552 = 0$, али је једноставније урадити на другачији начин. Како $(n+1)\cdot n$ представља производ два узастопна броја, а број 552 запишемо као $552 = 24 \cdot 23$, добијамо да је $(n+1)\cdot n = 24\cdot 23$, односно, $n = 23$.

▲

3.5 Биномни образац

3.5.1 Биномни коефицијенти

Дефиниција 5. *Биномним коефицијентом, у ознаци* $\binom{n}{k}$ *(читамо "n над k"), где је* $k, n \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leq k \leq n$ *називамо број* $\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, *односно*

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

.

По дефиницији узимамо да је $\binom{n}{0} = 1$. Такође, имамо да је

$$\binom{n}{n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-n+1)}{n!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

.

Основне особине биномних коефицијената дате су следећом теоремом.

Теорема 5. *За биномне коефицијенте важи:*

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Доказ:

1. За $k = 1$ и $k = n$, једнакост је тачна јер је то по дефиницији $\binom{n}{0} = 1$ и $0! = 1$, док је $\binom{n}{n} = 1$. Нека је $1 \leq k \leq n$ тада је према дефиницији биномних коефицијената

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

2. Коришћењем својства под 1., знамо да је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Онда распишемо $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$, па је заиста $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ово је својство симетричности биномних коефицијената.

3. Ако применимо једнакост под 1. и чињеницу да је $k! = k \cdot (k-1)!$ добијамо:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot (\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1) \cdot (n-k)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Овим смо доказали правило сабирања биномних коефицијената.

$\square$

Пример 32. *Применом формуле израчунати* $\binom{8}{3}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$.

Решење:

$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56;$

$\binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = n;$

$\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2};$

$\binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}.$

$\blacktriangle$

3.5.2 Развој бинома $(a+b)^n$

За $n = 2$ знамо да је $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$, као и за $n = 3$ да је $(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$. Њих можемо записати у облику:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}\cdot a^2 + \binom{2}{1}\cdot a\cdot b + \binom{2}{2}\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}\cdot a^3 + \binom{3}{1}\cdot a^2\cdot b + \binom{3}{2}\cdot a\cdot b^2 + \binom{3}{3}\cdot b^3$$

Поставља се питање развоја бинома за $n > 3$. Одговор на ово питање даје следећа теорема.

Теорема 6. *За сваки природан број n важи формула:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \cdots + \binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n}\cdot b^n$$

.

Општи члан у развијеном облику бинома $(a+b)^n$ *дат је формулом:*

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

.

Биномна формула може се и краће записати као:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \cdot b^k, n \in \mathbb{N}$$

.

Биномна формула се назива још и Њутнова биномна формула.

Доказ: Биномни образац доказаћемо математичком индукцијом. За $n = 1$ имамо $(a+b)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1 + \binom{1}{1} \cdot b^1 = a + b$. На почетку поглавља видели смо да је формула тачна и за $n = 2$ и $n = 3$, али то нам није неопходно за доказ. Претпоставимо да је формула тачна за n, тада је $(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \cdots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n} \cdot b^n$. Хоћемо да покажемо да је формула тачна за $n+1$. Дакле, имамо:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \\
&= [\tbinom{n}{0} \cdot a^n + \tbinom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \tbinom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \\
&\quad \tbinom{n}{n} \cdot b^n] \cdot (a+b) = \\
&= \tbinom{n}{0} \cdot a^{n+1} + [\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}] \cdot a^n \cdot b + [\tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2}] \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \\
&\quad [\tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n}] \cdot a \cdot b^n + \tbinom{n}{n} \cdot b^{n+1} = \\
&= \tbinom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} + \tbinom{n+1}{1} \cdot a^n \cdot b + \tbinom{n+1}{2} \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \tbinom{n+1}{n} \cdot a \cdot b^n + \\
&\quad \tbinom{n+1}{n+1} \cdot b^{n+1},
\end{aligned}$$

што значи да је формула тачна и за $n+1$.

□

Пример 33. *Написати развој бинома* $(a+b)^4$ *и* $(a+b)^5$.

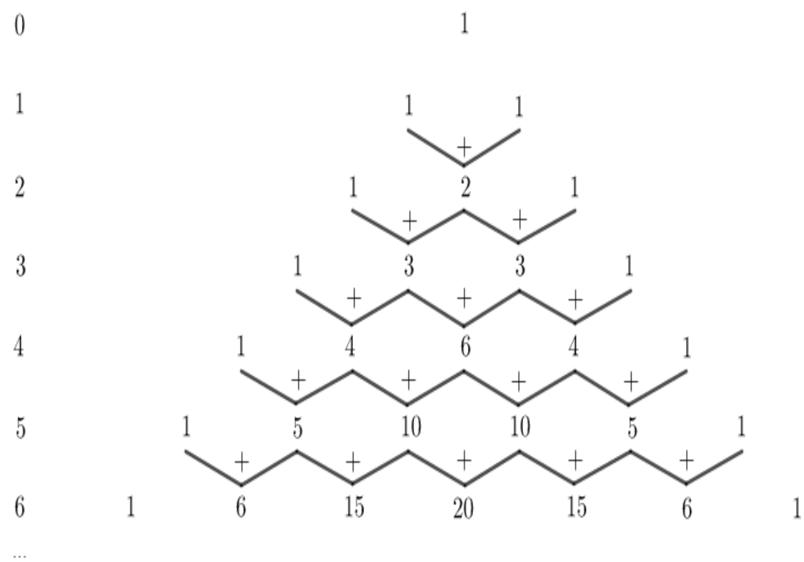
Решење:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \tbinom{4}{0} \cdot a^4 + \tbinom{4}{1} \cdot a^3 \cdot b + \tbinom{4}{2} \cdot a^2 \cdot b^2 + \tbinom{4}{3} \cdot a \cdot b^3 + \tbinom{4}{4} \cdot b^4 = \\
&= a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \tbinom{5}{0} \cdot a^5 + \tbinom{5}{1} \cdot a^4 \cdot b + \tbinom{5}{2} \cdot a^3 \cdot b^2 + \tbinom{5}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 + \\
&\quad \tbinom{5}{4} \cdot a \cdot b^4 + \tbinom{5}{5} \cdot b^5 = \\
&= a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5
\end{aligned}$$

▲

За лакше израчунавање биномних коефицијената можемо користити Паскалов троугао:



Из Паскаловог троугла јасна је особина симетричности биномних коефицијената.

Пример 34. *Доказати да важи* $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

Решење:

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0}\cdot 1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2+\cdots+\binom{n}{n}\cdot 1^n = \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n\end{aligned}$$

▲

Пример 35. *Збир биномних коефицијената у развоју бинома* $(2\cdot n\cdot x+\frac{1}{2\cdot n\cdot x^2})^{3\cdot n}$ *једнак је* 64. *Одредити члан таквог развоја који не садржи* x.

Решење:

Збир биномних коефицијената је $2^{3\cdot n}=64$, одакле имамо $2^{3\cdot n}=2^6 \Rightarrow 3\cdot n=6\Rightarrow n=2$. Тако да наш бином постаје $(4\cdot x+\frac{1}{4\cdot x^2})^6$. Како знамо да је општи члан бинома $T_{k+1}=\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$, у нашем случају је то:

$T_{k+1} = \binom{6}{k} \cdot (4 \cdot x)^{6-k} \cdot (\frac{1}{4 \cdot x^2})^k = \binom{6}{k} \cdot 4^{6-k} \cdot x^{6-k} \cdot (4 \cdot x^2)^{-k} =$
$= \binom{6}{k} \cdot 4^{6-1} \cdot x^{6-k} \cdot 4^{-k} \cdot x^{-2 \cdot k} = \binom{6}{k} \cdot 4^{6-k} \cdot 4^{-k} \cdot x^{6-k-2k} =$
$= \binom{6}{k} \cdot 4^{6-2k} \cdot x^{6-3k}$.
Како овај члан не би садржао x мора да важи $6 - 3k = 0$, односно, $3k = 6 \Rightarrow k = 2$. Дакле, за $k = 2$ имамо да је $T_{k+1} = T_{2+1} = T_3$ члан развоја који не садржи x. Можемо и проверити:

$$T_3 = \binom{6}{3} \cdot 4^{6-4} \cdot x^0 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4^2 = 6 \cdot 5 \cdot 8 = 240.$$

▲

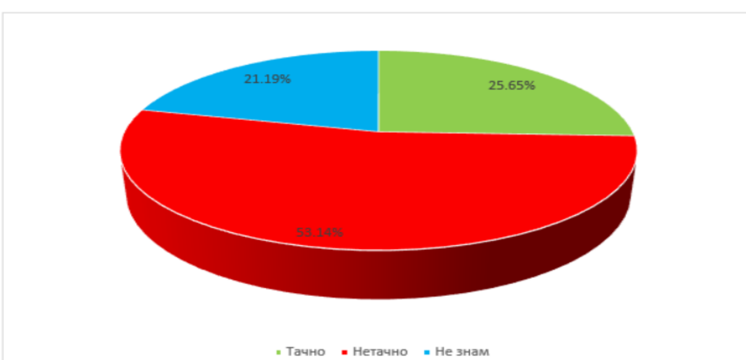
4 Закључак

На основу вишегодишњег искуства држања приватних часова средњо- школцима стекла сам утисак да се мало значаја придаје комбинаторици у средњој школи. Без обзира на све већу практичну потребу за логичким размишљањем и расуђивањем, редовна настава математике у средњим школама сиромашна је наставним темама које подстичу логичко - комбинаторни приступ приликом решавања задатака. Поред тога, многи наставници не посвећују довољно времена и труда како би ученици што боље разумели ову област и упознали важне аспекте њене примене у реалном животу, док је неки наставници чак и прескачу. Последица тога је та да ученици слабо разумеју комбинаторику или уопште и нису упознати са овом темом. Како се комбинаторика у четвртој години ради као последња област, један од разлога прескакања ове области је недостатак часова, јер су исти искоришћени за утврђивање других наставних тема.

На пријемном испиту за Математички факултет 2020-те године био је следећи задатак из комбинаторике:

Задатак: *У учионици се налази 6 клупа са по два места (лево и десно), које су поређане у ред, једна иза друге. На колико начина се на овим 12 места могу распоредити Пера, Мика и Лаза, тако да ни у једној клупи не седе два ученика и да не постоје две узастопне клупе у којима се налази ученик?*

На графикону испод је приказано како су пријављени кандидати урадили овај задатак.

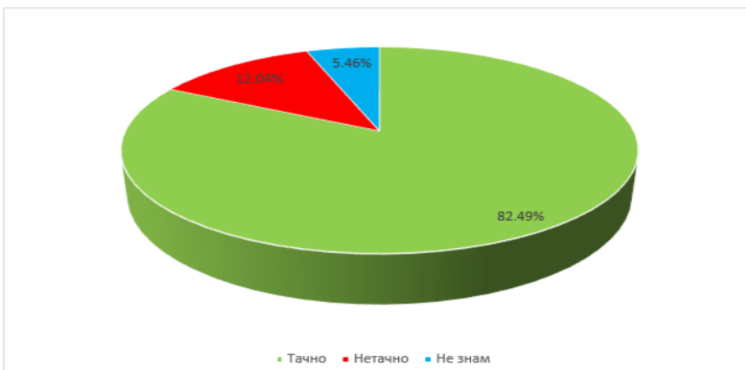


Пријемни испит 2020-те године је полагао 651 кандидат. Као што се види на графикону, само $25,65\%$ кандидата је успело тачно да уради задатак, док је $53,14\%$ кандидата нетачно урадило задатак, и $21,19\%$ није знало да уради задатак.

На пријемном испиту за математички факултет 2019-те године био је следећи задатак из комбинаторике:

Задатак: *Колики је збир* $\binom{34}{32} + \binom{33}{31}$*?*

На графикону испод је приказано како су пријављени кандидати урадили овај задатак.



Пријемни испит 2019-те године је полагало 714 кандидата. Као што се види на графикону, $82,49\%$ кандидата је тачно урадило задатак, док је само $12,04\%$ кандидата нетачно урадило задатак, и $5,46\%$ није знало да уради задатак.

Задатак из 2019-те године који се решава рутински применом формуле за биномни коефицијент је успео тачно да реши велики број кандидата. Са друге стране, задатак из 2020-те године је мало кандидата успело тачно да уради јер је било потребно логички приступити решавању овог задатка и уочити да ли се ради о варијацијама, пермутацијама, или комбинацијама. На основу ових података можемо закључити да је мало ученика у средњој школи добро и са разумевањем савладало комбинаторику.

Како би се донекле овај проблем решио, мој предлог је да се наставна тема "Комбинаторика"заједно са "Вероватноћом", ради одмах на почетку четврте године, а да се за крај остави наставна тема "Интеграли". Ни на једном пријемном испиту за факултете није био задатак везан за интеграле, док се комбинаторни задаци често појављују. Тако да сматрам да је мања штета уколико наставник не стигне да испредаје све наставне јединице везане за интеграле, него уколико не стигне да испредаје комбинаторику. Овим предлогом нежелим да умањим вредност наставне теме Интеграли, јер се они детаљно уче и на факултетима. Такође, други предлог је да се формула за биномни образац спомене и у првој години када се ради квадрат и куб бинома, с тим да се биномни коефицијенти рачунају преко Паскаловог троугла. Верујем да би ово ученицима прве године било корисно, јер би научили још један начин на који могу да развију веће степене бинома (четврти степен, пети степен...)

Овај рад бих завршила цитатом из књиге ”*The art of conjecturing*” познатог математичара Јакоба Бернулија: "Бесконачна разноликост која се показује, како у креацијама природе, тако и у људским делима, и која чини необичну лепоту универзума, очигледно нема ни у чему другом свој узрок, осим у разним једињењима, мешавинама или груписању појединих делова. Како је број ствари које утичу на стварање неке појаве или догађаја често толико велик и толико разнолик, да знати све начине на које се може, односно не може извршити то спајање, мешање или груписање, наилази на највеће тешкоће, није ни чудо што и најмудрији и најобразованији људи не праве тако често неку грешку, колико праве грешку која се у логици назива недовољним набрајањем делова. Стога се не устручавам да кажем да је ова грешка готово једини извор многих, најзначајнијих заблуда у које свакодневно упадамо посматрајући појаве, ако их покушамо упознати и искористити. Због тога бих ову вештину, која се назива комбинаторика, с правом требало сматрати посебно корисном, јер нам може помоћи у недостатку сензорних перцепција. Учи нас како да применимо све начине и поступке помоћу којих се више објеката може мешати, груписати или међусобно повезати, како се лако могу са сигурношћу избројати, а да нисмо избацили ниједан од њих. Иако овај метод припада шпекулацијама само ако се може израчунати, он је универзалан због своје корисности и неопходности и такве вредности да без њега не могу постојати ни мудрост филозофа, ни тачност историчара, ни дијагноза лекара, ни резоновање политичара. Да бисмо то потврдили, споменимо само да се деловање свих њих ослања на мишљење и да се свако мишљење заснива на комбинацијама узрока који делују."[12]

Literatura

[1] Небојша Икодиновић, Математика - Уџбеник са збирком задатака за први разред гимназија и средњих стручних школа, Klett, Београд, 2014.

[2] Павле Миличић, Владимир Стојановић, Зоран Каделбург, Бранислав Боричић, Математика за први разред средње школе, Завод за уџбенике, Београд, 2013.

[3] Јован Д. Кечкић, Математика са збирком задатака за 4. разред гимназије, Рубикон, Београд, 2006.

[4] Милутин Обрадовић, Душан Георгијевић, Математика за 4. разред средње школе, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[5] Раде Дацић, Елементарна комбинаторика, Математички институт, Београд, 1977.

[6] *https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_combinatorics*

[7] Павле Младеновић, Комбинаторика, Друштво математичара Србије, Београд, 2013, четврто издање.

[8] Вене Т. Богославов, Збирка решених задатака из математике 1, Завод за уџбенике, Београд, 2013.

[9] Вене Т. Богославов, Збирка решених задатака из математике 4, Завод за уџбенике, Београд, 2016.

[10] Срђан Огњановић, Живорад Ивановић, Збирка задатака и тестова за 4. разред гимназија и техничкох школа, Круг, Београд, 2010.

[11] Велимир Сотировић, Душан Липовац, Владимир Стојановић, Збирка задатака из математике за 1. разред средње школе, Завод за уџбенике, Београд, 2007.

[12] *Jacobi Bernoulli*, *Ars conjectandi*, *BASILEE*, *Impenfis THURNISIORUM*, *Fratrum.* 1713