

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Зоран Ч. Видовић

РЕКОРДИ НИЗА ЈЕДНАКО РАСПОДЕЉЕНИХ
СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА С ПРИМЕНАМА

докторска дисертација

Београд, 2020.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Zoran Č. Vidović

**RECORD VALUES FROM A SEQUENCE OF
IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM
VARIABLES WITH APPLICATIONS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020.

Ментор:

др Марко Обрадовић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Павле Младеновић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Милан Меркле, редовни професор,
Електротехнички факултет, Универзитет у Београду

др Бојана Милошевић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Овом приликом изражавам велику захвалност свом ментору доц. др Марку Обрадовићу на пријатељском ставу, охрабрујућој мотивацији и конструктивним сугестијама и саветима које ми је пружао током трајања студија. Посебну захвалност дугујем и доц. др Бојани Милошевић на корисним саветима и несебичној подршци током школовања. Хвала и осталим уваженим члановима комисије, проф. др Павлу Младеновићу и проф. др Милану Мерклеу.

Специјалну захвалност дугујем проф. др Весни Јевремовић која је дала значајан подстрек мом математичком образовању.

Велико хвала свим пријатељима и сарадницима на непоколебљивој подршци и разумевању.

Својој породици дугујем безусловну љубав и подршку коју су ми пружали током свих ових година. Њима посвећујем ову дисертацију.

Београд, фебруар 2020.

Зоран Видовић

Наслов докторске дисертације: *Рекорди низа једнако расподељених случајних величина с применама*

Резиме: Из низа опсервације истичу се оне које превазилазе све претходне. Њих зовемо рекорди. Чандлер [39] се сматра пионирским радом и зачетком теорије рекорда. Ова теорија временом постаје све занимљивија истраживачима, пре свега, због пажње коју шира јавност посвећује рекордима. Доказ томе је велики број објављених радова из ове области.

Улога рекорда је веома значајна у статистици. Њихова примена се прожима кроз различите оквире статистике. Као примере наводимо оцењивање непознатих параметара расподеле, карактеризационе проблеме, тестове сагласности и тестове стационарности итд. Поред тога, рекорди су се показали изузетно важним у теорији вероватноће и у теорији случајних процеса.

Циљеви ове дисертације су изражени кроз примену рекорда при одређивању оцена максималне веродостојности параметара вишепараметарских расподела, представљањем нових рекурентних веза момената расподеле на основу рекорда, одређивање Бајесових оцена других статистика на основу рекорда, применом рекорда при карактеризацији допустивих расподела за дужину случајне тетиве у кругу и проучавању асимптотског понашања екстрема низа дужина случајних тетива. Дисертација се састоји из шест поглавља.

Прво поглавље садржи примере рекорда.

У другом поглављу су представљене формулације рекорда из низа независних и једнако расподељених случајних величина. Њихова примена при разним проблемима и њихове уопштене схеме из низа независних и једнако расподељених случајних величина. Истакнути су неки занимљиви резултати из ове области који проширују сазнања о рекордима.

Разматрање довољних услова при којима се потврђује егзистенција и јединственост оцена максималне веродостојности параметра допустивих расподела, на основу рекорда, је дато у трећем поглављу. Поред познатих расподела, приказани су резултати који потврђују егзистенцију и јединственост ових оцена код неких тропараметарских екстензија Вејбулове расподеле. Делимични резултати из овог поглавља су објављени у [135].

Четврто поглавље је посвећено рекурентним везама момената тропараметарске екстензије Вејбулове расподеле на основу рекорда и њиховим могућим применама. Ови резултати су објављени у [137].

Пето поглавље истиче оквире Бајесовог оцењивања статистика поретка на основу рекорда. Тиме се, на неки начин, употпуњује слика о могућим применама рекорда и

њиховом значају. Поједини резултати представљени у овом поглављу се могу пронаћи у [136].

У шестом поглављу разматрају се примене теорије рекорда код низа независних случајних величина са функцијом расподеле дужине случајне тетиве у кругу. Нови начини избора случајне тетиве у кругу су представљени у овом поглављу, као и асимптотско понашање максимума дужина случајних тетива и одговарајуће брзине конвергенција. Представљене су карактеризације функције расподеле дужина случајних тетива на основу низа момената рекорда. Поједини резултати из овог поглавља су објављени у [134].

Кључне речи: рекорди, Експоненцијална расподела, оцене максималне веродостојности, егзистенција и јединственост, моменти, Бајесова оцена, случајна тетива, асимптотска расподела

Научна област: Математика

Ужа научна област: Вероватноћа и статистика

АМС класификација: 62F10, 62H05, 62G30, 62E15, 62N02, 60D05, 60G70

Doctoral Dissertation Title: *Record values from a sequence of identical distributed random variables with applications*

Abstract: From a sequence of observations, the ones that exceed previous ones in a time series are called records. The pioneer paper of record theory is considered to be Chandler [39]. This theory gained its popularity due to significant public interest towards records. As a result, large number of papers are published on this topic.

Record values are very important in statistics. Record values are applied in parameter estimation issues, characterization issues, hypothesis and stationarity tests, etc. Also, their usefulness in probability theory and in theory of random process is tremendous.

This dissertation discusses applications of records through numerical evaluations of maximum likelihood estimators of parameters of the three-parameter extensions of Weibull distribution family, new recurrence relations of record moments, records in Bayesian inference, applications of records in characterization issues for random chord length distributions as well with the asymptotic behaviour of extremes of random chord lengths. This dissertation consists on six chapters.

Several examples of records are presented in the first chapter.

Second chapter discusses the strict formulations of records from a sequence of independent and identically distributed random variables. Their application and their extensions from the same model are presented, as well with several interesting results.

The problem of existence and uniqueness of maximum likelihood estimators based on records is elaborated in the third chapter. In this chapter, we present sufficient conditions that confirm the existence and uniqueness of maximum likelihood estimators for a three-parameter extensions of Weibull distributions. Also, several well known results are presented as examples. Several results from this chapter could be found in [135].

The fourth chapter is dedicated to moment recurrence relations of a three-parameter extension of Weibull distribution based on records with possible applications. These results are published in [136].

Fifth chapter deals with Bayesian prediction of order statistics based on record values. Here, we expand the applicability of records in real problems and provide a better understanding of their significance. Several results presented in this chapter could be found in [136].

In the sixth chapter the random chord length issue is considered through the record value theory. A new generation method of random chords is presented. The study of limit behaviour of maximum length of random chords for all cases of generation is also conducted. Characterization results for random chord length distributions based on record moments are obtained.

Several results presented in this chapter could be found in [134].

Keywords: records, Exponential distribution, maximum likelihood estimator, existence and uniqueness, moments, Bayesian estimators, random chord, asymptotic distribution

Scientific Area: Mathematics

Scientific Sub-area: Probability and Statistics

AMS Classification: 62F10, 62H05, 62G30, 62E15, 62N02, 60D05, 60G70

Садржај

1	Увод	1
1.1	Примери	1
2	Појам рекорда, особине и важнији резултати	3
2.1	Узорковање рекорда	8
2.2	Уопштене схеме рекорда	11
2.3	Теорема дуалности	16
2.4	Значај рекорда	19
2.4.1	Карактеризације на основу рекорда	19
2.4.2	Фишерава информација	20
3	Егзистенција и јединственост оцена параметара на основу рекорда	23
3.1	Метода максималне веродостојности и мотивација	23
3.2	Егзистенција и јединственост оцена	27
3.3	ХОК расподеле	30
3.3.1	<i>TTT</i> график	31
3.3.2	<i>WPP</i> график	31
3.4	Примери	32
3.4.1	Експоненцијална расподела	32
3.4.2	Униформна расподела	34

3.4.3	Вејбулова расподела	34
3.4.4	Паретова расподела	35
3.4.5	Логистичка расподела	36
3.4.6	Генерализована експоненцијална расподела	38
3.4.7	Бурова расподела X типа	39
3.4.8	Бурова расподела XII типа	39
3.4.9	Кумарасвамијева расподела	40
3.4.10	Линдлијева расподела	41
3.4.11	Експонована Гумбелова расподела	42
3.4.12	LXM модификација Вејбулове расподеле	42
3.4.13	Пенг-Јан екстензија Вејбулове расподеле	49
4	Рекурентне везе рекордних момената	59
4.1	Увод	59
4.2	Рекордни моменти из Пенг-Јан екстензије Вејбулове расподеле	60
4.3	Примена на ННЛ оцене	63
5	Бајесова оцена статистика поретка на основу рекорда	67
5.1	Увод	67
5.2	Генерализована експоненцијална расподела	68
5.2.1	Случај $j = m$ (максимум будућег узорка)	71
5.2.2	Бајесове оцене статистика поретка на основу рекорда	71
5.3	НАГ интервал	74
5.4	Илустрација Бајесових оцена	75
5.5	Сарханова модификација Вејбулове расподеле	80

6	Случајна тетива: Генерисање, екстремно понашање и моменти	85
6.1	Бертранов догађај и мотивација	85
6.2	Методe избора случајне тетиве	86
6.3	Нови начини избора случајне тетиве	88
6.4	Граничне расподеле максимума и рекорда случајних тетива	90
6.5	Моменти рекордних случајних тетива	100
	Даљи правци истраживања	106
	Литература	108
	Биографија аутора	118

Глава 1

Увод

Рекордом¹ се сматра достигнуће које у низу догађаја превазилази све претходне. Скоро свакодневно можемо да чујемо да је нови рекорд постигнут. Рекорди имају своје природно место у климатологији, хидрологији, спорту, инжењерству, медицини итд. Њихова основна примена је представљање екстремних догађаја широј јавности.

1.1 Примери

Ради илустрације наводимо неколико примера.

Пример 1 *Сведоци смо честих појава рекордних вредности просечних дневних температура. Сматра се да просечна дневна температура представља стационарну временску серију. Честе појаве рекорда у временској серији сматрају се индикатором нестационарности. Према Бенестаду [35], сматра се да је то последица глобалног загревања. Реднер и Петерсен [109], због недовољно доказа, одбацују овакве тврдње.*

Пример 2 *Рекорди у спорту су увек важили као изузетни догађаји за које постоји специјалан интерес шире јавности. Тркачке способности, дужина скока у даљ, као и дистанца баченог копља су значајно унапређене претходних деценија. Честа појава рекорда у овим спортовима указује на напредак спортиста и појаву растућег тренда, према [50].*

Пример 3 *Поплаве маја 2014. године у Србији су затекле многе грађане и оставиле разорне последице. Сматрају се најразорнијим од када се води евиденција о поплавама на територији Србије.*

¹Реч рекорд потиче од латинске речи *recordare*, што значи памтити или подсећати се.

Пример 4 *Најснажнији земљотрес са епицентром на територији Србије, од када се води евиденција, десио се у Лазаревцу 1922. године са магнитудом 5.9 по Рихтеровој скали.*

Пример 5 *Највећи број освојених титула на тврдој подлози има наш тенисер Новак Ђоковић. Ово је само један од рекорда који је овај тенисер постигао.*

Пример 6 *Крагујевчанин Срђан Ристић оборио је Гинисов рекорд у дисциплини извођења згибова и склекова за 60 минута. Он је у хали "Гордана Богојевић" урадио 420 комбинација згибова и склекова, што је за осам више у односу на стари рекорд².*

Пример 7 *Гинисова књига рекорда само потврђује колику пажњу рекорди привлаче од стране шире јавности. Сматра се, такође, да и Гинисова књига рекорда има рекордну продају у свету, тј. да и она чини рекорд(в. [19]).*

Интересантно је поменути да је 17. новембар светски дан рекорда. Додатни примери рекорда се могу пронаћи у прегледом раду [51].

²www.guinnessworldrecords.com

Глава 2

Појам рекорда, особине и важнији резултати

Следећа дефиниција адекватно описује појам рекорда у вероватносном смислу (в. [19]).

Дефиниција 2.1 *Нека је дат низ независних и једнако расподељених случајних величина X_1, X_2, \dots са непрекидном функцијом расподеле F . Кажемо да је X_j горњи рекорд ако важи да је $X_j > X_i$ за свако $i < j$. Аналогно дефинишемо и доње рекорде. Претпостављамо увек да је прва опсервација и горњи и доњи рекорд.*

Разматраћемо случај да је функција расподеле F непрекидна како бисмо избегли понављања вредности у низу и поједноставили теоријску позадину.

Као зачетак математичке теорије рекорда сматра се пионирски рад Чандлера [39] у коме су, по први пут, објављене функције густине расподеле првих n , доњих рекорда и расподела времена остваривања рекорда из низа независних и једнако расподељених случајних величина X_1, X_2, \dots са функцијом расподеле F и густином f , за $n \geq 1$. У даљем тексту се сматра да се екстракција рекорда врши из овог вероватносног модела. Уколико се одступи од овог модела, у смислу нарушавања неке од особина независности или једнаке расподељености, вероватносне особине екстракованих рекорда се доста усложњавају при чему се, неретко, резултати из стандардног модела не могу уопштити или би евентуално уопштење зависило од додатних детаља. Велики број резултата теорије рекорда је представљен у књигама [19], [98] и [14], које представљају сажете монографије теорије рекорда.

Низ времена $\{T_n, n \geq 1\}$ остваривања рекорда и низ рекорда $\{R_n, n \geq 1\}$ из низа X_1, X_2, \dots се дефинишу на следећи начин.

Дефиниција 2.2 За низ времена $\{T_n, n \geq 1\}$ остваривања рекорда у низу X_1, X_2, \dots важи

$$T_1 = 1 \text{ са вероватноћом } 1,$$

и

$$T_n = \min\{j : X_j > X_{T_{n-1}}\}, \text{ за } n \geq 2.$$

За низ рекорда $\{R_n, n \geq 1\}$ важи

$$R_n = X_{T_n}, \text{ за } n \geq 1.$$

Издвојимо узорак X_1, X_2, \dots, X_n из низа независних случајних величина X_1, X_2, \dots . Из датог узорка увек можемо да извучемо максимум $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Тривијално важи да је $M_1 = X_1$, као и да је сваки нови строги максимум уједно и нови рекорд. Односно, рекорди се могу интерпретирати као $X_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \dots$ у случајевима где је испуњена строга неједнакост $M_i < M_{i+1}$, односно где је $X_{i+1} > M_i$ (в. [56]). Добро би било напоменути да се у литератури рекорди из дефиниције 1.1 сматрају јаким рекордима (енг. *strong records*), док се slabим рекордима (енг. *weak records*) сматрају они рекорди који потичу из дискретне расподеле, односно они рекорди за које постоји могућност да је $M_{n-1} = X_n$, за неко $n \geq 2$.

Према претходном, алтернативна дефиниција за времена остваривања рекорда као и за саме рекорде из низа X_1, X_2, \dots гласи

Дефиниција 2.3 За низ $\{T_n, n \geq 1\}$, времена остваривања рекорда у низу X_1, X_2, \dots , важи

$$T_1 = 1 \text{ са вероватноћом } 1,$$

и

$$T_n = \min\{j : X_j > M_{T_{n-1}}\}, \text{ за } n \geq 2.$$

За низ рекорда $\{R_n, n \geq 1\}$ важи

$$R_n = M_{T_n}, \text{ за } n \geq 1.$$

Такође, интересантно је посматрати и низ прираштаја рекорда $\{J_n, n \geq 1\}$, као и низ прираштаја времена остваривања рекорда који се дефинишу на следећи начин.

Дефиниција 2.4 Низ прираштаја рекорда $\{J_n, n \geq 1\}$ у низу X_1, X_2, \dots се дефинише као

$$\begin{aligned} J_1 &= R_1, \\ &u \\ J_n &= R_n - R_{n-1}, \text{ за } n \geq 2. \end{aligned}$$

Низ прираштаја времена остваривања рекорда $\{\Delta_n, n \geq 2\}$, из низа X_1, X_2, \dots , дефинише се као

$$\Delta_n = T_n - T_{n-1}, \text{ за } n \geq 2.$$

Нека је I_i индикатор догађаја да је i -та случајна величина, X_i , нови рекорд из низа X_1, X_2, \dots , односно

$$I_i = \begin{cases} 1, & X_i = \max\{X_1, X_2, \dots, X_i\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пошто је F непрекидна функција расподеле, случајне величине I_1, I_2, \dots су независне и представљају Бернулијеве случајне величине са расподелом $I_n \sim \text{Ver}(\frac{1}{n})$ за $n \geq 1$. Штавише, важи да су индикатори I_1, I_2, \dots, I_n и максимум M_n независне случајне величине, за свако $n \geq 1$ (в. [110]). Овај резултат, као и наредни резултати, произилазе из непрекидности функције расподеле одакле низ X_1, X_2, \dots потиче. Даље можемо да дефинишемо и низ $\{N_n, n \geq 1\}$, чији чланови представљају број регистрованих рекорда из узорка величине n низа X_1, X_2, \dots .

Дефиниција 2.5 Број рекорда $\{N_n, n \geq 1\}$ у низу X_1, X_2, \dots се дефинише као

$$\begin{aligned} N_1 &= 1, \\ &u \\ N_n &= \{\text{број рекорда у } X_1, X_2, \dots, X_n\} = \sum_{i=1}^n I_i. \end{aligned}$$

Важе следећа тврђења (в. [110]).

Теорема 2.1 (Рењи, 1962) Закон расподеле за низ $\{N_n, n \geq 1\}$ је одређен са

$$P\{N_n = k\} = \frac{|S_n^k|}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где S_n^k представља број пермутација од n елемената које имају k циклора. S_n^k се назива и Стирлингов број прве врсте (в. [124, Поглавље 1]).

Теорема 2.2 (Рењи, 1962) За низ $\{N_n, n \geq 1\}$ важи јаки закон великих бројева

$$\frac{N_n}{\ln n} \rightarrow 1 \text{ са вероватноћом } 1 \text{ када } n \rightarrow \infty,$$

као и централна гранична теорема

$$(N_n - \ln n) / \sqrt{\ln n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ у расподели при } n \rightarrow \infty.$$

Лема 2.2 директно имплицира да број рекорда стално расте када се обим узорка повећава. Сматра се да је одговарајућа апроксимација нормалном расподелом слаба у случају када је обим узорка $n \leq 1000$. Интересантно је да се број рекорда међу случајним величинама X_i које потичу из непрекидне расподеле F , где је $an < i < bn$, за $0 < a < b$, може представити реализацијом Пуасоновог процеса са интензитетом $\ln \frac{b}{a}$, при $n \rightarrow \infty$ (в. [46]).

Веза између броја регистрованих рекорда и њихових времена остваривања је директна. За $n \geq r \geq 1$, догађаји $\{T_r \leq n\}$ и $\{N_n \geq r\}$ имају исту вероватноћу, тј.

$$P\{T_r \leq n\} = P\{N_n \geq r\},$$

и важи

$$P\{T_r = n\} = P\{N_{n-1} = r - 1, N_n = r\}.$$

Наредна теорема директно користи овај резултат.

Теорема 2.3 (Рењи, 1962) Закон расподеле за T_n је дат са

$$P\{T_r = n\} = \frac{|S_{n-1}^{r-1}|}{n!}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad n = r, r + 1, \dots,$$

где је, као и пре, S_n^k Стирлингов број прве врсте.

У [110] граничне теореме за низ $\{T_n, n \geq 1\}$ су третиране као дуалне теореме низа $\{N_n, n \geq 1\}$.

Теорема 2.4 (Рењи, 1962) За низ $\{T_n, n \geq 1\}$ важи јаки закон велики бројева

$$\frac{\ln T_n}{n} \rightarrow 1 \text{ са вероватноћом 1 при } n \rightarrow \infty,$$

односно

$$T_n^{1/n} \rightarrow e \text{ са вероватноћом 1 при } n \rightarrow \infty.$$

Важи и централна гранична теорема за низ $\{T_n, n \geq 1\}$, тј.

$$(T_n - n)/\sqrt{n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ у расподели при } n \rightarrow \infty.$$

За низ $\{T_n, n \geq 1\}$ важи да је заједничка расподела тренутака остваривања првих n рекорда (T_1, T_2, \dots, T_n) облика

$$P\{T_1 = 1, T_2 = j_2, \dots, T_n = j_n\} = \frac{1}{(j_2 - 1) \cdots (j_n - 1)j_n}, \quad (2.1)$$

за било који низ бројева $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_n$ и $n \geq 1$, док је условни закон расподеле за $T_{n+1}|T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ облика

$$P\{T_{n+1} = m|T_n = j_n, T_{n-1} = j_{n-1}, \dots, T_1 = 1\} = \frac{j_n}{m(m-1)}. \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) се може закључити да је

$$P\{T_{n+1} = m|T_n = j_n\} = \frac{j_n}{m(m-1)},$$

одакле важи да низ тренутака $\{T_n, n \geq 1\}$ формира ланац Маркова.

Када је реч о количнику T_n/T_{n+1} , занимљив резултат је представљен у [130]. Наиме, важи да је асимптотска расподела количника T_n/T_{n+1} стандардна униформна расподела, тј.

$$P\{T_n/T_{n+1} < x\} \rightarrow x \text{ за } 0 < x < 1 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Додатно важи да су $T_n/T_{n+1}, T_{n+1}/T_{n+2}, \dots$ асимптотски независне случајне величине са стандардном униформном расподелом (в. [112]). Уопштење овог резултата може се наћи у (в. [46]).

Можда најважнији и донекле неочекиван резултат тиче се просечног времена чекања између два узастопна рекорда $\{\Delta_n, n \geq 1\}$. Показано је у [39] да ова вредност није коначна.

Наредна теорема истиче асимптотско понашање низа $\{\Delta_n, n \geq 1\}$ (в. [96]).

Теорема 2.5 (Неутс, 1967) *За низ $\{\Delta_n, n \geq 1\}$ важи централна гранична теорема*

$$(\Delta_n - n)/\sqrt{n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ у расподели при } n \rightarrow \infty,$$

и јаки закон великих бројева

$$\frac{\ln \Delta_n}{n} \rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Асимптотска расподела за Δ_{n+1}/Δ_n одређена је са (в. [119])

$$P \left\{ \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} > x \right\} \rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ за свако } x > 0.$$

2.1 Узорковање рекорда

Према претходном, ако је функција расподеле F непрекидна онда у законима расподеле за N_n, T_n и Δ_n , за $n \geq 1$, не фигурише F . Међутим, то није случај код рекорда.

Постоје два приступа узорковања рекорда из низа опсервација, у литератури познати као инверзна схема (енг. *inverse sampling scheme*) и схема простог случајног узорка (енг. *random sampling scheme*). Код првог приступа опсервације су представљене у низу и узорковање се прекида кад се n -ти рекорд оствари. У овом случају, број опсервација је случајна величина.

При другом приступу, случајан узорак обима n се извлачи из расподеле F и рекорди се региструју. У овом случају, број рекорда је случајна величина.

Нека је дат вектор $(\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{K}) = (R_1, K_1, R_2, K_2, \dots, R_m, K_m)$, где је R_i i -ти рекорд а K_i број опсервација од тренутка остваривања рекорда R_i до тренутка остваривања следећег рекорда R_{i+1} , укључујући и тренутак остваривања рекорда R_{i+1} , где су опсервације представљене са X_1, X_2, \dots, X_n . Стога, важи да је $\sum_{i=1}^m K_i = n$, где је $n, n \geq 1$, број свих опсервација. Тада је вероватноћа реализације узорка $(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{k})$ дата са

$$L(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{k}) = \prod_{i=1}^m f(r_i) \{F(r_i)\}^{k_i-1} I_{(r_i, \infty)}(r_i), \quad (2.4)$$

где је $r_0 = -\infty$, $k_m \equiv 1$ и $I_A(x)$ индикатор скупа A (в. [116]).

Уколико је број рекорда из узорка случајан, односно ако имамо вектор $(\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{K}, N_n) = (R_1, K_1, \dots, R_{N_n}, K_{N_n}, N_n)$, вероватноћа реализације узорка $(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{k}, n_n)$ је облика

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{k}, n_n) = \prod_{i=1}^{n_n} f(r_i) \{F(r_i)\}^{k_i-1} I_{(r_i, \infty)}(r_i), \quad (2.5)$$

где је $r_0 = -\infty$, n_n број рекорда у првих n , $n \geq 1$, опсервација и $k_{n_n} \equiv n - \sum_{i=1}^{n_n-1} k_i$ (в. [63]).

Сумирањем по свим временима чекања функције веродостојности (2.4) добијамо заједничку густину расподеле првих m , $m \geq 1$, горњих рекорда као

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_m}(r_1, r_2, \dots, r_m) = \prod_{i=1}^m f(r_i) / \prod_{i=1}^{m-1} [1 - F(r_i)], \quad (2.6)$$

$$-\infty < r_1 < r_2 < \dots < r_m < \infty.$$

Итерираном интеграцијом (2.6) у односу на $(r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_{m-1})$ добијамо и функцију густине расподеле пара (R_k, R_m) за $1 \leq k < m$, као и маргиналну функцију густине m -тог горњег рекорда као

$$f_{R_k, R_m}(r_k, r_m) = \frac{[-\ln(1 - F(r_k))]^k}{k!} \frac{\left[-\ln\left(\frac{1-F(r_m)}{1-F(r_k)}\right)\right]^{m-k-1}}{(m-n-1)!} \frac{f(r_k)f(r_m)}{1-F(r_k)}, \quad (2.7)$$

$$-\infty < r_k < r_m < \infty,$$

$$f_{R_m}(r) = f(r) \{-\ln(1 - F(r))\}^{m-1} / (m-1)!, \quad (2.8)$$

$$-\infty < r < \infty,$$

редом. Даље се директно могу одредити условне функције густине расподеле

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_{m-1} | R_m}(r_1, r_2, \dots, r_{m-1} | r_m) = \frac{(m-1)! \prod_{i=1}^{m-1} \frac{f(r_i)}{1-F(r_i)}}{[-\ln(1 - F(r_m))]^{m-1}}, \quad (2.9)$$

$$-\infty < r_1 < r_2 < \dots < r_{m-1} < r_m,$$

и

$$f_{R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+j} | R_m}(r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_{m+j} | r_m) = \prod_{i=1}^{j-1} \frac{f(r_{m+i+1})}{1 - F(r_{m+i})}, \quad (2.10)$$

$$r_m < r_{m+1} \cdots < r_{m+j} < \infty.$$

Функција расподеле n -тог рекорда се, на основу (2.8), може одредити као

$$F_{R_n}(x) = P\{R_n \leq x\} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^x f(r) \{-\ln(1 - F(r))\}^{n-1} dr$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\ln(1-F(x))} v^{n-1} e^{-v} dv, \quad -\infty < x < \infty,$$

за $n \geq 1$. Даље, условна вероватноћа $P\{R_{n+1} > x | R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n\}$ има облик

$$P\{R_{n+1} > x | R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n\} = \frac{1 - F(x)}{1 - F(r_n)}, \quad x > r_n, \quad (2.11)$$

па самим тим, условна функција густине расподеле од R_{n+1} , при $R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n$, има облик

$$f_{R_{n+1} | R_1, R_2, \dots, R_n}(x | r_1, r_2, \dots, r_n) = f_{R_{n+1} | R_n}(x | r_n) = \frac{f(x)}{1 - F(r_n)}, \quad x > r_n, \quad (2.12)$$

што уједно говори да и низ рекорда $\{R_n, n \geq 1\}$ чини ланац Маркова. Према [102], и низ $\{(\Delta_n, R_n), n \geq 1\}$ чини ланац Маркова, такође.

Многобројне особине рекорда из непрекидне расподеле F следе из трансформације

$$G(x) = -\ln(1 - F(x)).$$

Одговарајући први извод функције G , $G'(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ је познат у литератури као хазардна функција. Како су функције F и G строго растуће, постоје њихови одговарајући инверзи G^{-1} и F^{-1} и важи да

$$G^{-1}(x) = F^{-1}(1 - e^{-x}).$$

Одавде можемо да закључимо да уколико екстракујемо рекорде из низа независних случајних величина X_1, X_2, \dots које имају стандардну експоненцијалну расподелу, имамо да је $G(x) = -\ln(1 - F(x)) = x$ и закључујемо да функција густине расподеле m -тог горњег рекорда има облик $x^{m-1}e^{-x}/(m-1)!I\{x > 0\}$, односно m -ти горњи рекорд има гама расподелу са параметрима m и 1, за $m \geq 1$ (в. [111]). Важи и следеће. Ако случајна величина X има непрекидну функцију расподеле F тада случајна величина $G(X)$ има стандардну експоненцијалну расподелу. Самим тим, ако имамо рекорде R_1, R_2, \dots, R_m из

расподеле F онда су

$$G(R_1), G(R_2), \dots, G(R_m)$$

рекорди из стандардне експоненцијалне расподеле, за $m \geq 1$. Ова чињеница је основа асимптотског понашања рекорда. То је и искоришћено у [113], одакле имамо и наредну теорему.

Теорема 2.6 (Ресник, 1973ц) *Нека су R_1, R_2, \dots , рекорди из непрекидне расподеле F и нека је $G(x) = -\ln(1-F(x)) = x$. Тада за низ $G(R_1), G(R_2), \dots$ важи централна гранична теорема*

$$\frac{G(R_n) - n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ у расподели при } n \rightarrow \infty.$$

За исти низ $G(R_1), G(R_2), \dots$ важи јаки закон великих бројева

$$\frac{G(R_n)}{n} \rightarrow 1 \text{ са вероватноћом 1 при } n \rightarrow \infty.$$

Треба истаћи и директну везу између рекорда и времена остваривања нехомогеног Пуасоновог процеса. Важи да низ рекорда $\{R_n, n \geq 1\}$ има идентичну расподелу као низ времена остваривања нехомогеног Пуасоновог процеса са функцијом интензитета $\lambda(t) = -\ln \bar{F}(t)$, где је $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ (в. нпр. [112]).

2.2 Уопштене схеме рекорда

Према горе наведеним резултатима, показано је да се у узорцима обима n може очекивати око $\ln n$ рекорда, као и да просечно време чекања између два рекорда дивергира. Самим тим, њихова улога при статистичком закључивању има скромну примену. Према томе, од интереса је представити схеме рекорда које превазилазе ове рестрикције и које садрже обичне рекорде као специјални случај.

k -ти рекорди

Нека је $X_{i:m}$ i -та статистика поретка из простог случајног узорка величине m , где је $1 \leq i \leq m$. Дефинишемо низ тренутака остваривања k -тих горњих рекорда $\{T_{m(k)}, m \geq 1\}$ и низ k -тих горњих рекорда $\{R_{m(k)}, m \geq 1\}$ на следећи начин (в. [47]).

Дефиниција 2.6 Низ тренутака остваривања k -тих горњих рекорда $\{T_{m(k)}, m \geq 1\}$ и низ k -тих горњих рекорда $\{R_{m(k)}, m \geq 1\}$ из низа X_1, X_2, \dots се дефинишу као

$$\begin{aligned} T_{1(k)} &= k, R_{1(k)} = X_{1:k}, \\ &\text{за } m \geq 2 \\ T_{m(k)} &= \min\{j : j > T_{m-1(k)}, X_j > X_{T_{m-1(k)}-k+1:T_{m-1(k)}}\} \\ &\text{и} \\ R_{m(k)} &= X_{T_{m(k)}-k+1:T_{m(k)}}, \end{aligned}$$

где је $k \geq 1$ фиксирана вредност.

Слично се дефинишу и k -ти доњи рекорди. У [47] се истиче да је низ $\{R_{n(k)}, n \geq 1\}$ из расподеле F идентичан у расподели низу обичних рекорда $\{R_n, n \geq 1\}$ из расподеле $F_{1:k} = 1 - (1 - F)^k$. За $k \geq 1$ и $m \geq 1$, директно се може одредити функција расподеле за $R_{m(k)}$ као

$$F_{R_{m(k)}}(x) = P\{R_{m(k)} \leq x\} = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{-k \ln(1-F(x))} u^{m-1} e^{-u} du, \quad (2.13)$$

као и заједничка функција расподеле првих n k -тих рекорда $\tilde{\mathbf{R}}_{(k)} = (R_{1(k)}, R_{2(k)}, \dots, R_{n(k)})$, при њиховој реализацији $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)} = (r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dots, r_{n(k)})$, као

$$\begin{aligned} f(r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dots, r_{n(k)}) &= k^n \prod_{i=1}^n \frac{f(r_{i(k)})}{1 - F(r_{i(k)})} (1 - F(r_{n(k)}))^k, \\ &r_{1(k)} < r_{2(k)} < \dots < r_{n(k)}, n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Лако се да приметити да k -ти рекорди представљају благо уопштење обичних рекорда (за $k = 1$, k -ти рекорди се свде на обичне рекорде). Неретко изрази који важе за обичне рекорде се могу просто уопштити за k -те рекорде. Сагласно томе, њихова имплементација у пракси је доста директна. Наслеђене су све особине обичних рекорда. Тако, на пример, важи да низ времена остваривања k -тих рекорда заједно са низом k -тих рекорда чине ланац Маркова. Међутим, оно што је интересантно за k -те рекорде је то да за $k \geq 2$ просечно време чекања између узастопних k -тих рекорда је коначно (в. [62]).

Пример 8 Регистровање k -тих рекорда из узорка је предочено примером који се може наћи у [19], задатак 2.36. Видети уједно и [5]. Подаци су представљени у Табели 2.1.

Табела 2.1: Просечне дневне температуре у Јулу у Нојенбургу (Швајцарска) у периоду од 1864–1883.

19.0, 20.1, 18.4, 17.4, 19.7, 21.0, 21.4, 19.2, 19.9, 20.4,
20.9, 17.2, 20.2, 17.8, 18.1, 15.6, 19.4, 21.7, 16.2, 16.4.

За $k = 3$, горњи k -ти рекорди и одговарајућа времена остваривања су представљени као

i	1	2	3	4	5	6	7
$R_{i(3)}$	18.4	19.0	19.7	20.1	20.4	20.9	21.0
$T_{i(3)}$	3	5	6	7	10	11	18

Слично, за $k = 3$, доњи k -ти рекорди и одговарајућа времена остваривања су представљени као

i	1	2	3	4	5	6	7
$L_{i(3)}$	20.1	19.0	18.4	17.8	17.4	17.2	16.4
$T_{i(3)}$	3	4	12	14	16	19	20

Рекорди са потврдом

Претпоставимо да заједнички узорак (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) чине опсервације из \mathbf{X} које су независне и једнако расподељене са непрекидном расподелом F , опсервације из \mathbf{Y} су, такође, независне и једнако расподељене али са другом непрекидном расподелом G и где важи да је $X_i \stackrel{st}{<} Y_j$, при чему се под $\stackrel{st}{<}$ подразумева стохастичко поређење засновано на релацији $P\{X_i \geq x\} < P\{Y_j \geq x\}$ која је испуњена за свако $x \in \mathbf{R}$. Ово уједно имплицира да је у мешовитом узорку опсервација X_i и Y_j , већа вероватноћа да опсервације Y_j буду регистроване као горњи рекорди. Мотивисани проблемом контаминације узорка са аутлајерима, Невзоров и Степанов су у [100] су дефинисали рекорде са потврдом и њихова времена остваривања на следећи начин. Ознаке су исте као у [100].

Дефиниција 2.7 Нека су m, k фиксирани позитивни цели бројеви такви да $1 \leq m \leq k$. Нека је

$$\begin{aligned}\tilde{L}(1) &= 1, & \tilde{X}(1) &= X_1, \\ & \text{и за } n \geq 1 \\ \tilde{L}(n+1) &= \min \left\{ j : j > \tilde{L}(n), \sum_{i=\tilde{L}(n)+1}^j I_{\{X_i > \tilde{X}(n)\}} = k \right\}, \\ \tilde{X}(n+1) &= X_{m,k}^{(n)},\end{aligned}$$

где је I_A индикатор функција догађаја A и $X_{m,k}^{(n)}$ статистика поретка из узорка

$$I_{\{X_{\tilde{L}(n)+1} > \tilde{X}(n)\}} X_{\tilde{L}(n)+1}, I_{\{X_{\tilde{L}(n)+2} > \tilde{X}(n)\}} X_{\tilde{L}(n)+2}, \dots, I_{\{X_j > \tilde{X}(n)\}} X_j.$$

Низ $\{\tilde{L}(n), n \geq 1\}$ се сматра низом тренутака остваривања рекорда са потврдом док се низ $\{\tilde{X}(n), n \geq 1\}$ сматра низом рекорда са потврдом, редом.

Заједничка функција густине првих n горњих рекорда са потврдом има облик

$$\begin{aligned}& f_{\tilde{X}(1), \tilde{X}(2), \dots, \tilde{X}(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= m^{n-1} \binom{k}{m}^{n-1} f(x_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(F(x_{i+1}) - F(x_i))^{m-1} (1 - F(x_{i+1}))^{k-m} f(x_{i+1})}{(1 - F(x_i))^k}, \\ & x_1 < x_2 < \dots < x_n, n \geq 1.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Уколико је F непрекидна функција расподеле, онда је маргинална расподела за $\tilde{X}(n)$ дата са

$$\begin{aligned}P\{\tilde{X}(n) \leq x\} &= \frac{1}{\Gamma(1 + (n-1)[1/k + \dots + 1/(k-m+1)])} \\ &\times \int_0^{-\ln(1-F(x))} e^{-u} u^{(n-1)[1/k + \dots + 1/(k-m+1)]} du,\end{aligned}\tag{2.16}$$

где је Γ гама функција и $n \geq 1$.

Рекорди са потврдом чине ланац Маркова. Исто важи и за њихова времена остваривања.

Тренутни рекорди

Уколико истовремено пратимо највећу и најмању опсервацију из низа X_1, X_2, \dots заједно са њиховим временима остваривања рекорда, онда такве величине зовемо тренутни рекорди. Ови рекорди први пут су представљени у [66].

Дефиниција 2.8 Нека је дат низ независних и једнако расподељених опсервација X_1, X_2, \dots са функцијом расподеле F и функцијом густине расподеле f . Тренутни рекорд (енг. *current record*) се појављује у времену j ако важи $X_j > \max\{X_1, \dots, X_{j-1}\}$ или $X_j < \min\{X_1, \dots, X_{j-1}\}$, за $j \geq 1$. Нека R'_n и R_n означе најмању и највећу опсервацију после n тренутних рекорда, редом, и $R'_0 = R_0 = X_1$.

Интервал (R'_n, R_n) се у литератури обележава као рекордни интервал толеранције, док статистика $W_n = R_n - R'_n$ представља рекордни ранг.

Заједничка функција густине расподеле за R'_n и R_n је дата са

$$f_{R'_n, R_n}(r', r) = 2^n f(r') f(r) \frac{\{-\ln(1 - F(r) + F(r'))\}^{n-1}}{(n-1)!}, \quad -\infty < r' < r < \infty, \quad (2.17)$$

док су одговарајуће маргиналне функције густине облика

$$f_{R'_n}(r') = 2^n f(r') \left[1 - F(r') \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-\ln F(r'))^j}{j!} \right], \quad -\infty < r' < \infty, \quad (2.18)$$

и

$$f_{R_n}(r) = 2^n f(r) \left[1 - (1 - F(r)) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-\ln(1 - F(r)))^j}{j!} \right], \quad -\infty < r < \infty. \quad (2.19)$$

Једна могућа примена тренутних рекорда се огледа у представљању граница толеранције квантила популације који не зависе од непрекидне расподеле F (в. нпр. [6]).

δ -рекорди

Приликом рада са случајним величинама из непрекидне расподеле, мора се имати у виду да се њихове вредности представљају са одређеном прецизношћу. У приликама где су могућа изједначавања, посматрају се само они рекорди који превазилазе претходне рекорде за унапред задату константу δ . Ова схема рекорда је представљена у [29].

Дефиниција 2.9 Нека је дат низ $\{X_n, n \geq 1\}$ независних и једнако расподељених случајних величина са непрекидном функцијом расподеле F и функцијом густине расподеле f . Опсервација X_j је δ -горњи рекорд (енг. δ -exceedance upper record) ако превазилази претходне рекорде за фиксирану и унапред одабрану позитивну константу δ . У овом случају важи да је низ тренутака остваривања рекорда дат са

$$T_1 = 1 \text{ и } T_{n+1} = \min\{j : j > T_n, X_j > X_{T_n} + \delta\}, n \geq 1.$$

Лако се види да када је $\delta = 0$ имамо обичне рекорде.

Заједничка функција густине расподеле првих n δ -рекорда (R_1, R_2, \dots, R_n) , $n \geq 1$, је дата са

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_n}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{f(r_j)}{1 - F(r_j + \delta)} f(r_n), \quad (2.20)$$

$$r_j > r_{j-1} + \delta, j = 2, 3, \dots, n.$$

Уколико је F стандардна експоненцијална расподела, онда је маргинална функција густине расподеле за R_n дата са

$$f_{R_n}(r_n) = \frac{1}{\Gamma(n)} (x - n\delta)^{n-1} e^{-(x-n\delta)}, x > n\delta, \quad (2.21)$$

где је Γ гама функција.

Асимптотске особине ових рекорда, као и њихова примена при оцењивању непознатих параметара се могу пронаћи у [54]. Схеме рекорда блиске овој су и рекорди са рестрикцијама (в. [99]).

2.3 Теорема дуалности

Као што је речено у уводу, постоји блиска веза између максимума узорка обима n и n -тог рекорда. Самим тим, интуитивно има смисла да постоји веза између граничне расподеле нормираног максимума M_n и граничне расподеле нормираног рекорда R_n .

У [52] су представљена три типа граничних недегенерисаних расподела нормираних максимума првих n случајних величина са истом расподелом F из низа независних случајних величина, при $n \rightarrow \infty$. Оне су истог типа као нека од расподела екстремних

вредности:

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty;$$
$$G_{1,\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{за } x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & \text{за } x > 0 \text{ и } \alpha > 0. \end{cases}$$
$$G_{2,\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{за } x \geq 0, \\ e^{-(-x)^\alpha}, & \text{за } x < 0 \text{ и } \alpha > 0. \end{cases}$$

Функције $G_0, G_{1,\alpha}$ и $G_{2,\alpha}$ носе назив Гумбелова, Фрешеова и Вејбулова расподела екстремних вредности, редом. У последње две расподеле екстремних вредности фигурише позитиван параметар облика α .

Наредне две дефиниције су од изузетног значаја.

Дефиниција 2.10 Функција расподеле F припада области привлачења максимума функције расподеле \hat{G} , и користимо нотацију $F \in D_M(\hat{G})$, ако постоје нормирајуће константе $b_n > 0$ и $a_n, n \in \mathbf{N}$, такве да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{(M_n - a_n)/b_n \leq x\} = \hat{G}(x)$$

за сваку тачку непрекидности функције \hat{G} .

Дефиниција 2.11 Функција расподеле F припада области привлачења за рекорде са функцијом расподеле \hat{H} , и користимо нотацију $F \in D_R(\hat{H})$, ако постоје нормирајуће константе $b_n > 0$ и $a_n, n \in \mathbf{N}$, такве да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{(R_n - a_n)/b_n \leq x\} = \hat{H}(x)$$

за сваку тачку непрекидности функције \hat{H} .

Потребни и довољни услови да функција расподеле припада области привлачења максимума функција $G_0, G_{1,\alpha}$ и $G_{2,\alpha}$ се могу пронаћи у нпр. [82] и [89].

Нека Φ означава стандардну нормалну расподелу. Граничне расподеле адекватно нормираних рекорда су

$$\begin{aligned} & \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty; \\ \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & \text{за } x < 0, \\ \Phi(\log x^\alpha), & \text{за } x \geq 0 \text{ и } \alpha > 0; \end{cases} \\ \tilde{\Phi}_\alpha(x) &= \begin{cases} 1, & \text{за } x \geq 0, \\ \Phi(\log(-x)^{-\alpha}), & \text{за } x < 0 \text{ и } \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Може се приметити да одговарајуће граничне расподеле нормираних рекорда су облика $\hat{H}(\cdot) = \Phi(-\ln(-\ln \hat{G}(\cdot)))$, где функција \hat{G} представља један од три типа граничних функција расподела за нормиране максимуме (в. [111]). Граничне вредности нормираних рекорда са функцијом расподеле F одговара граничној расподели нормираних максимума првих n случајних величина из низа независних и једнако расподељених случајних величина са асоцираном функцијом расподеле

$$F_a(\cdot) = 1 - \exp\{-\sqrt{-\ln(1 - F(\cdot))}\}.$$

Односно, важи следећа теорема (в. [112]).

Теорема 2.7 (Ресник, 1973б) *Нека је F непрекидна функција расподеле и $F_a(x) = 1 - \exp\{-\sqrt{-\ln(1 - F(x))}\}$. Тада*

(i) $F \in D_R(\Phi_\alpha)$ ако и само ако $F_a \in D_M(G_{1,\alpha/2})$. У овом случају нормирајуће константе се могу одабрати као

$$a_n = 0, \quad b_n = G^{-1}(n).$$

(ii) $F \in D_R(\tilde{\Phi}_\alpha)$ ако и само ако $F_a \in D_M(G_{2,\alpha/2})$. У овом случају је неопходно да F^{-1} буде коначно. Нормирајуће константе се могу одабрати као

$$a_n = F^{-1}, \quad b_n = F^{-1} - G^{-1}(n).$$

(iii) $F \in D_R(\Phi)$ ако и само ако $F_a \in D_M(G_0)$. У овом случају нормирајуће константе се могу одабрати као

$$a_n = G^{-1}(n), \quad b_n = G^{-1}(n + \sqrt{n}) - G^{-1}(n).$$

Ова теорема је позната у литератури као Теорема дуалности. Битно је истаћи и то да у зависности од схеме рекорда низа независних и једнако расподељених случајних величина

нормирајуће константе мењају своју презентацију. За k -те рекорде видети [47], за рекорде са потврдом видети [115], за δ -рекорде видети [53], док за тренутне рекорде видети [31].

2.4 Значај рекорда

На основу првих n , $n \geq 1$, рекорда (R_1, R_2, \dots, R_n) из популације са расподелом F , која припада фамилији допустивих расподела $\{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, могуће је извести различите статистичке закључке. Карактеризације расподела на основу рекорда представља истакнути део теорије рекорда. Поред тога, количина информација коју рекорди поседују представља основу за примену рекорда у статистици. У наставку ћемо представити сажете детаље о овим резултатима.

2.4.1 Карактеризације на основу рекорда

Карактеризацијом се може сматрати скуп особина случајне величине X које идентификују одговарајућу функцију расподеле F . Под овим особинама можемо да подразумевамо независност различитих функција случајне величине X , неке регресионе карактеристике, задовољавање адекватних функционалних једначина итд. У великом броју случајева ове особине се међусобно допуњују и надовезују чиме је онемогућено издвајање дисјунктних класа карактеризације.

Први резултати карактеризација на основу рекорда се тичу Експоненцијалне расподеле. Разлог је њена утицајна теоријска примена при имплементацији базичних резултата из теорије рекорда. Показано је у [130] да независност статистика R_1 и $R_2 - R_1$ у класи апсолутно непрекидних расподела карактерише експоненцијалну расподелу. Временом су се појавила и уопштења овог резултата (в. [12] и [13]).

Истичу се, такође, карактеризације експоненцијалне расподеле на основу условног очекивања и дисперзије рекорда (в. нпр. [56], [48] и [140]).

Занимљива је и карактеризација експоненцијалне расподеле на основу максималне корелације између рекорда. Важи следећа теорема (в. [97]).

Теорема 2.8 (Невзоров, 1992) *Нека је F непрекидна расподела и $n > m \geq 0$. Нека су $D(R_n)$ и $D(R_m)$ коначне. Тада корелација између R_n и R_m не превазилази $\sqrt{(m+1)/(n+1)}$. Штавише, ова граница је достигнута ако и само ако је F експоненцијална расподела.*

Број радова који истичу нове карактеризације расподела на основу рекорда сваке године расте, што потврђује заинтересованост научника за ову област. Карактеризације Вејбулове и Паретове расподеле на основу рекорда су најчешће у литератури (в. нпр. [15] и [23]).

Наредна теорема представља општу карактеризацију непрекидних расподела на основу низа момената рекорда (в. [83]).

Теорема 2.9 (*Лин, 1987*) *За било која два фиксирана цела броја $N \geq 0$ и $l > 0$, низ момената рекордних вредности $\{E(R_n)^l\}_{n=N}^{\infty}$ карактерише непрекидну расподелу F ако важи да је $E|X|^{l+\epsilon} < \infty$ за неко $\epsilon > 0$.*

Овде је битно истаћи да услов непрекидности функције расподеле из Теореме 2.9 није могуће ослабити. Важи, такође, да низ момента прираштаја рекорда карактерише непрекидну функцију расподеле до на параметар положаја (в. [56]).

Регресиона функција рекорда $E(R_{n+1}|R_n)$ је довољна за идентификацију непрекидне расподеле F , као што је наглашено у наредној теорему (в. [94]). Релација (2.12), у овом случају, игра кључну улогу.

Теорема 2.10 (*Нагараја, 1977*) *Нека је F непрекидна расподела. Ако важи да је $E(R_{n+1}|R_n = x) = K(x)$, где $K(x)$ зависи скоро сигурно од F и где је $K(x)$ неоппадајућа функција на $(F^{-1}(0), F^{-1}(1))$, тада је F јединствено одређена.*

У овом случају, услов да је функција $K(x)$ неоппадајућа није могуће ослабити. Могуће је Теорему 2.10 уопштити и за k -те рекорде. Овај тип карактеризације се може сматрати последицом повезаности рекорда и максимума узорка (в. [56]). Потребно је напоменути да Кошијева функционална једначина представља основу за доказ великог броја карактеризација на основу рекорда. Неки примери се могу пронаћи у [40] и [120].

2.4.2 ФишEROVA ИНФОРМАЦИЈА

Наредна дефиниција користи услове регуларности. Видети нпр. [90, стр. 255] за детаље о њима.

Дефиниција 2.12 ([61]) *При условима регуларности, ФишEROVA информација о непознатом параметру θ садржана у случајној величини X са функцијом густине расподеле $f(x, \theta)$ се дефинише као $I_X(\theta) = E\left(\frac{\partial \log(X, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2 \log(X, \theta)}{\partial^2 \theta}\right)$.*

Фишерава информација игра значајну улогу у статистици при Рао-Крамер-овој неједнакости, асимптотском понашању дисперзије оцена МВ, као и при испитивању релативне ефикасности и оптималности оцене.

Од значаја је прикупити информације о параметру који фигурише у фамилији расподела на основу рекорда, где непознати параметар можемо да видимо и кроз вишедимензионални оквир. Занимљиво је размотрити Фишерову информацију о параметру садржаном у првих n рекорда, као и упоредити је са Фишеровом информацијом о параметру садржаном у n независних случајних величина које потичу из исте расподеле, за $n \geq 1$. Интересантан је Пример 9 који се може да пронађе у [3].

Пример 9 *Рекорди имају посебно место у механици. Као пример истичемо случај рада вишекомпонентног електричног система, где највећи трошак настаје при замени компоненте услед њеног изненадног престанка рада. У таквим случајевима можемо да заменимо компоненту новом пре престанка рада ако њен живот није нови доњи рекорд, односно ако њен живот превазилази минимум дужина живота претходних компоненти. У оваквим ситуацијама, број прегорелих компоненти је једнак броју регистрованих доњих рекорда. Реалне ситуације датог типа настају у случајевима када је замена компоненти система веома скупа.*

Како је истакнуто у Ахмади и Аргхами [3], уколико фамилија расподела $F(x; \theta)$ припада експоненцијалној фамилији расподела, при услову да је $\bar{F}(x; \theta)$ строго конвексна, линеарна или строго конкавна, рекорди поседују више, једнако или мање Фишерове информације, редом, него што је то случај са независним и једнако расподељеним низом случајних величина. Наредни примери то и илуструју.

Пример 10 *Нека случајна величина X има нормалну расподелу са параметрима μ и σ^2 . Ако сматрамо да је параметар μ непознат а параметар σ^2 познат, закључујемо да n независних и једнако расподељених случајних величина поседује више Фишерове информације него првих n горњих рекорда из ове расподеле, за $n \geq 1$. Обрнуто важи у случају када сматрамо да је параметар σ^2 непознат, а параметар μ познат.*

Пример 11 *Нека случајна величина X има гама расподелу са густином*

$$f(x, \theta) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > 0, \quad (2.22)$$

где сматрамо да је параметар α познат.

Првих n горњих рекорда из дате фамилије расподеле поседује више, једнако или мање Фишерове информације у односу на првих n независних и једнако расподељених случајних величина са (2.22) ако важи да је $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$, редом.

Међутим, на основу Фишерове информације из доњих рекорда са (2.22) важи да n независних и једнако расподелених случајних величина поседује већу Фишерову информацију него првих n доњих рекорда, за $n \geq 1$.

Наредни пример се односи на фамилију расподела која не припада фамилији расподела експоненцијалног типа.

Пример 12 Нека случајна величина X има Гумбелову расподелу са функцијом расподеле

$$F(x, \mu, \sigma) = \exp\{-e^{-(1/\sigma)(x-\mu)}\}, \quad -\infty < x < \infty, \sigma > 0, -\infty < \mu < \infty. \quad (2.23)$$

За случај када је параметар σ познат, а параметар μ непознат, показано је да n независних случајних величина са (2.23) поседују више Фишерове информације него првих n горњих рекорда из дате фамилије расподеле, док за првих n доњих рекорда важи да поседују исту количину Фишерове информације као и n независних случајних величина са (2.23), за $n \geq 1$.

У случају када је параметар σ непознат, а параметар μ познат, првих n доњих (горњих) рекорда садрже више (мање) Фишерове информације о непознатом параметру него n независних случајних величина са (2.23).

Веза између Фишерове информације садржане у n горњих рекорда и њиховим временима остваривања, ознака I_{RT}^U , и Фишерове информације садржане у максимуму парцијалног узорка X_1, X_2, \dots, X_i , ознака $I_M^U(i)$, је дата са (в. [63])

$$I_{RT}^U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^U(i). \quad (2.24)$$

Треба нагласити да је у великом броју случајева Фишерово информација рекорда и њихових времена остваривања већа од Фишерове информације садржане у самим рекордима, што интуитивно има смисла. Ово је и показано у радовима [61] и [4].

Интуитивно је пожељно да се израз (2.24) може уопштити у случају k -тих рекорда. Међутим, то није случај (в. [62]). Резултати овог типа нису публиковани за случајеве осталих уопштења рекорда.

Глава 3

Егзистенција и јединственост оцена параметара на основу рекорда

3.1 Метода максималне веродостојности и мотивација

Нека је дато првих n рекорда $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$, $n \geq 1$, из фамилије допустивих расподела $\{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$. За реализацију $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $n \geq 1$, при фиксираној вредности параметара θ , важи да (2.6) представља вероватноћу реализације $\tilde{\mathbf{r}}$ и одређује расподелу од $\tilde{\mathbf{R}}$. Уколико је функција веродостојности диференцијабилна по параметру θ , оцењена вредност параметра θ , ознака $\hat{\theta}$, следи из решења једначине веродостојности

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta; \tilde{\mathbf{r}}) = 0.$$

Уколико је параметар θ вишедимензионалан и облика $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, $p \geq 1$, и ако постоје парцијални изводи функције веродостојности по свакој појединачној координати параметра θ , онда за налажење параметра θ неопходно је решити следећи систем једначина

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} L(\theta; \tilde{\mathbf{r}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} L(\theta; \tilde{\mathbf{r}}) &= 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} L(\theta; \tilde{\mathbf{r}}) &= 0. \end{aligned}$$

Функције L и $\ln L$ достижу максимум у истој тачки. Узрок томе је монотоност функције $\ln x$. Тиме је омогућено да се, при компликованим изразима функције расподеле, вредност

параметра θ може лакше наћи као решење једначине

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; \tilde{\mathbf{r}}) = 0.$$

Случај када је параметар θ вишедимензионалан је аналоган (в. [84]).

Метода максималне веродостојности (надаље ММВ) представља најпопуларнији метод тачкастог одређивања оцена параметра θ обележја популације с расподелом $F(\cdot; \theta)$, на основу реализације узорка, који може да буде и вишедимензионални параметар. Та популарност следи из квалитета добијених оцена. При одређеним условима регуларности, овако добијене оцене имају асимптотску нормалну расподелу, постојане су и често су ефикасније од оцена добијених помоћу других метода (в. нпр. [90] и [64]).

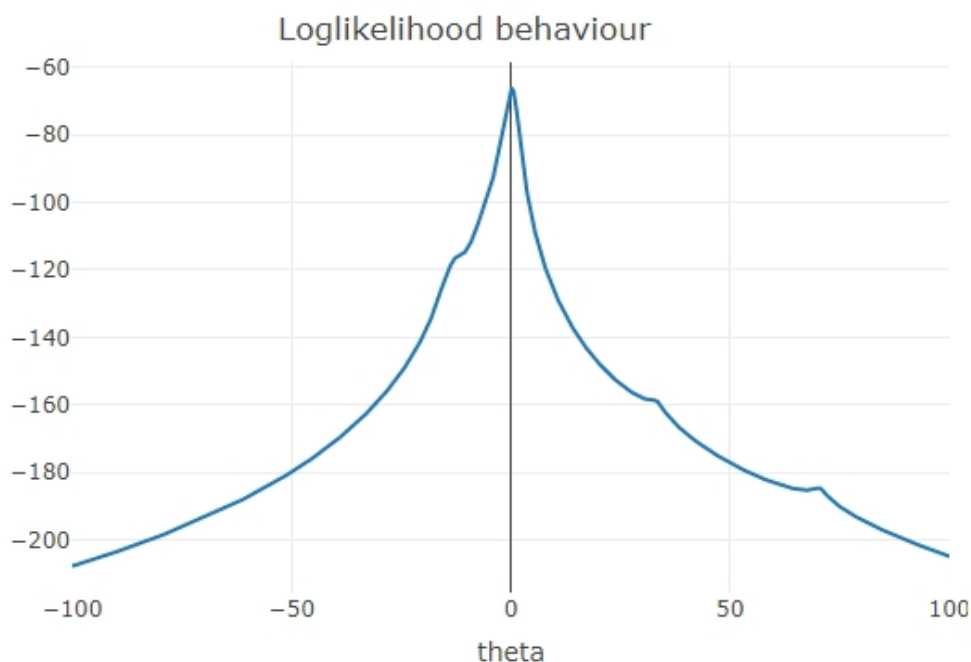
Како је истакнуто у [34], при условима регуларности, у случајевима када је познато да јединствене оцене МВ параметара постоје, није редак случај да експлицитни облик решења није могуће добити. Поред тога, при раду са коначним узорком нема гаранције да постоји само једно решење једначине веродостојности. Као помоћни алат, нумеричка анализа је пронашла своју примену при одређивању наведених тачкастих оцена на основу коначних узорака. Међутим, приликом њене примене резултати итерација зависе од избора почетних вредности, те може доћи до дивергенције итерација или конвергенције ка погрешним резултатима. Сходно томе, увек је пожељно графички представити функцију веродостојности на њеном домену, уколико је то могуће. На тај начин је могуће открити евентуалне локалне и глобалне максимуме функције веродостојности.

Пример 13 Нека је $\tilde{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \geq 1$, прост случајан узорак из популације са Кошијевом расподелом са функцијом густине расподеле

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

и логаритмом функције веродостојности

$$\ln L(\theta; \tilde{\mathbf{x}}) = -n \ln(\pi) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + (x_i - \theta)^2), \quad -\infty < \theta < \infty.$$



Слика 3.1: Логаритам функције веродостојности за параметар $\theta \in (-100, 100)$ при простом случајном узорку величине 20 из Кошијеве расподеле.

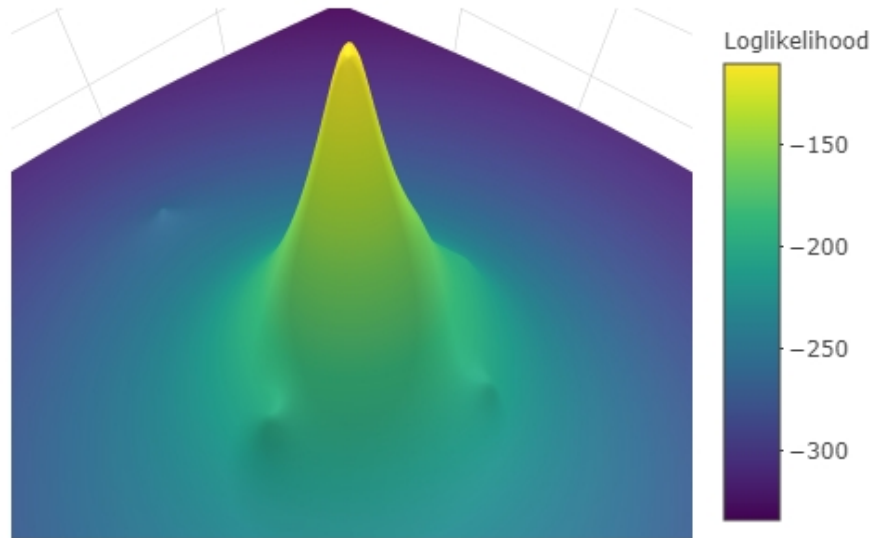
Услед појаве више потенцијалних локалних екстрема, у овом случају постоји више потенцијалних решења једначине веродостојности.

Пример 14 Нека је $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) = ((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n))$, $n \geq 1$, прост случајан узорак из популације са димензионом Кошијевом расподелом са функцијом густине расподеле

$$f(x, y; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi(1 + (x - \theta_1)^2 + (y - \theta_2)^2)^{3/2}} \quad -\infty < x, y < \infty, \quad -\infty < \theta_1, \theta_2 < \infty,$$

и логаритмом функције веродостојности

$$\ln L(\theta_1, \theta_2; \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = -n \ln(2\pi) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(1 + (x_i - \theta_1)^2 + (y_i - \theta_2)^2), \quad -\infty < \theta_1, \theta_2 < \infty.$$



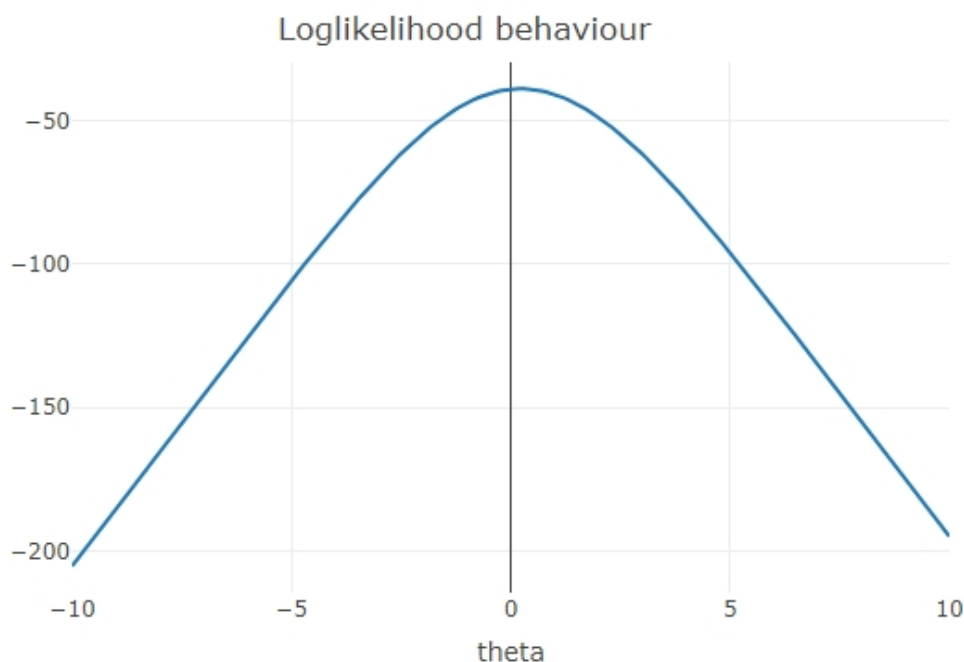
Слика 3.2: Логаритам функције веродостојности за параметар $(\theta_1, \theta_2) \in (-100, 100) \times (-100, 100)$ при простом случајном узорку величине 20 из дводимензионе Кошијеве расподеле.

Пример 15 *Случај где је познато да постоји јединствена оцена МВ параметра, али да је није могуће представити у експлицитном облику и за чије одређивање је неопходно коришћење нумеричке анализе, је прост случајан узорак $\tilde{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ из популације са логистичком расподелом са функцијом густине расподеле*

$$f(x; \theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1 + e^{-(x-\theta)})^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

и логаритмом функције веродостојности

$$\ln L(\theta; \tilde{\mathbf{x}}) = n\theta - \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{-(x_i - \theta)}), \quad -\infty < \theta < \infty.$$



Слика 3.3: Логаритам функције веродостојности за параметар $\theta \in (-10, 10)$ при простом случајном узорку величине 20 из Логистичке расподеле.

За додатне примере видети [86].

У наредном одељку су представљени довољни услови за постојање јединствених оцена МВ на основу рекорда.

3.2 Егзистенција и јединственост оцена

Проблем одређивања одговарајућих оцена параметара при вишедимензионим расподелама је усложнено питање. Потребно је да уведемо нове појмове који нам могу помоћи да боље разумемо понашање одговарајућих функција веродостојности.

Појам *константности на рубу домена* (енг. *constant on the boundary*) функције веродостојности је један од њих (в. [86]).

Дефиниција 3.1 Нека је Θ отворен подскуп од $\tilde{\mathbf{R}}^p$. Низ реалних бројева $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$, у Θ конвергира ка граници $\partial\Theta$ од Θ , ако за сваки компактни скуп $K \subset \Theta$ постоји број $k_0 \geq 1$ тако да $\theta^{(k)} \notin K$ за свако $k \geq k_0$. Ако је $\Theta \subset \tilde{\mathbf{R}}^p$, овај услов је еквивалентан са $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\theta^{(k)}\| = \infty$, при одговарајућој норми. Реална функција f дефинисана на Θ је константна на граници простора $\partial\Theta$ ако постоји реални број c такав да за сваку околну \mathcal{N} тачке c постоји компактни подскуп $K \subset \Theta$ такав да $\{\theta : f(\theta) \notin \mathcal{N}\} \subset K$. Овај услов је еквивалентан са $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\theta^{(k)}) = c$ за сваки низ $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$, из Θ који конвергира

ка $\partial\Theta$. Користићемо нотацију $\lim_{\theta \rightarrow \partial\Theta} f(\theta^{(k)}) = c$ да нагласимо да f поседује својство константности на рубу домена.

Значај овог својства истиче наредна теорема која пружа довољне услове за потврду егзистенције и јединствености оцена МВ вишедимензионих функција расподеле.

Теорема 3.1 (Макелаинен и остали, 1981) Нека је Θ повезан, отворен подскуп од \mathcal{R}^p , $p \geq 1$, и нека је f реално вредносна функција на Θ са непрекидним другим парцијалним изводима и $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \partial\Theta} f(\mathbf{x}) = 0$. Нека је надаље матрица других парцијалних извода $\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\theta) \right\}$ негативно дефинитна за сваку тачку $\mathbf{x} \in \Theta$ за коју вектор градијента $\nabla f = \{ \partial f / \partial x_i \}$ постаје нула вектор. Тада f има јединствени локални (и уједно и глобални) максимум без осталих стационарних тачака. Штавише, важи да је $f(\mathbf{x}) > 0$ за свако $\mathbf{x} \in \Theta$.

Следећа теорема је последица Теореме 3.1.

Теорема 3.2 (Макелаинен и остали, 1981) Нека је $L(\theta)$ функција веродостојности са непрекидним другим парцијалним изводима, где θ припада отвореном скупу $\Theta \subset \mathcal{R}^p$. Нека је даље

(i) $\lim_{\theta \rightarrow \partial\Theta} L(\theta) = 0$,

и

(ii) Матрица других парцијалних извода $\left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta) \right\}$ је негативно дефинитна за сваку тачку $\theta \in \Theta$ за коју вектор градијента

$$\nabla L = \{ \partial L / \partial \theta_i \}$$

постаје нула вектор.

Тада важи да

(1) постоји јединствена оцена максималне веродостојности $\hat{\theta} \in \Theta$, и

(2) за функцију максималне веродостојности важи да

(a) нема других максимума у Θ ,

(b) нема минимум или неке друге стационарне тачке у Θ ,

(c) има инфимум нула на граници $\partial\Theta$ и нигде више.

Услов (i) потврђује да се све тачке екстремних вредности (локални максимуми) функције веродостојности налазе унутар параметарског простора, а не на његовом рубу, док услов (ii) гарантује јединствену тачку екстремне вредности (глобални максимум) функције веродостојности.

Уколико је матрица других парцијалних извода из Теореме 3.2 негативно дефинитна у свакој тачки $\theta \in \Theta$, тада услов (i) се може ослабити. Односно, важи следећа теорема

Теорема 3.3 (Макеланин и остали, 1981) *Нека је $l(\theta)$ логаритам функције максималне веродостојности са непрекидним другим парцијалним изводима и θ из повезаног и отвореног подскупа $\Theta \subset \mathcal{R}^p$. Поред тога,*

- (i) *вектор градијента ∇l постаје нула вектор у бар једној тачки $\theta \in \Theta$ и*
- (ii) *матрица других парцијалних извода од $l(\theta)$ је негативно дефинитна у свакој тачки $\theta \in \Theta$.*

Тада

- (a) *$l(\theta)$ је строго конкавна функција од θ ,*
- (b) *постоји јединствена оцена максималне веродостојности $\hat{\theta} \in \Theta$, и*
- (c) *$l(\theta)$ нема других максимума или минимума или других стационарних тачака у Θ .*

Нека је $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^p$, где је $p \geq 2$. У [44] је представљен још један учинковит метод који се заснива на сужавању параметарског простора на коме је функција веродостојности дефинисана, уколико оцене за $\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \dots, \theta_p$, $1 \leq k \leq p$, могу да се представе у експлицитном облику и да зависе од параметара $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Примене овог алата се могу пронаћи у нпр. [69] и [27].

Такође, могуће је извршити репараметризацију параметарског простора у циљу проналажења решења једначина веродостојности, као и ослабити услов конкавности на услов квази-конкавности (в. нпр. [38]).

У наставку представићемо оцене МВ за параметре познатих као и мање познатих расподела на основу рекорда за које је питање јединствености потврђено. У том циљу, дефинишемо расподеле с хазардном функцијом облика корита (надаље ХОК) и алате неопходне за њихову идентификацију.

3.3 ХОК расподеле

Поред расподела са монотоним хазардним функцијом, постоји општа потреба за расподелама које имају хазардну функцију која, у зависности од параметара расподеле, располаже ширем спектром моделовања. Како је истакнуто у [104], [78] и [103], у многим практичним ситуацијама, хазардна функција у почетку опада, затим настаје период у коме је константна, да би затим опет расла. За овакве хазардне функције кажемо да поседују облик корита (енг. *bathtub shape*). Могуће је да хазардна функција узима облик и обрнутог корита (енг. *upside bathtub shape*). У радовима [104], [88] и [78], представљене су дефиниције ХОК расподела и довољни услови да би се функција расподеле сматрала ХОК расподелом.

Наредна дефиниција адекватно описује ХОК расподеле у класи ненегативних и апсолутно непрекидних расподела (в. [104]).

Дефиниција 3.2 *За ненегативну апсолутно непрекидну функцију расподеле F са хазардном функцијом $h(t)$ кажемо да је ХОК расподела ако постоји $t_0 \geq 0$ тако да је $h(t)$ нерастућа на $[0, t_0]$ и неопадајућа на $[t_0, \infty)$.*

Као примере популација где се расподеле обележја сматрају ХОК расподелама можемо навести компоненте електричног система и биолошких организама. За моделовања ХОК расподеле обележја популације истичу се два приступа у литератури.

Као примарно решење, као адекватне моделе расподеле обележја популације предлажу се комбинације коначног броја расподела. Примери могу да се пронађу у [70] и [71]. Међутим, основни проблем при раду са оваквим моделима је оцењивање великог броја параметара. ММВ у великом броју случајева није од помоћи, те се често користи графички приступ за њихово оцењивање.

Као напредније решење, користе се модели расподела уопштења или екстензија двопараметарских фамилија расподела. Овакви модели користе знатно мањи број параметара него кад су у питању мешавине расподела. Даље, ММВ доминира као најефикаснија метода за оцењивање параметара модела. Због ефикасне примене, ове екстензије постају све атрактивнија решења за истраживаче. Као примере наводимо екстензије двопараметарске фамилије Вејбулових расподела. Истичу се модификована Вејбулова расподела (в. [79]), експонована Вејбулова расподела (в. [91]), продужена Вејбулова расподела (в. [141]) итд.

За потврђивање ХОК расподела података користе се углавном графичке методе због своје једноставности. Навешћемо *TTT* и *WPP* графике.

3.3.1 TTT график

TTT (енг. *Total Time on Test*) график представља визуелни метод који има различите примене. За карактеризације расподела видети нпр. [74], за тестирање хипотеза видети нпр. [32], [33] и [1] итд.

Нека су $0 = x_{(0)} \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ статистике поретка из расподеле F , где је $F(0-) = 0$ и $\bar{F} = 1 - F$, са коначним очекивањем $\mu_F = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$. *TTT* статистике дефинишемо као $T_i = \sum_{j=1}^i (n - j + 1)(x_{(j)} - x_{(j-1)})$ за $i = 1, 2, \dots, n$ и скалиране *TTT* статистике као $u_i = T_i/T_n$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

Уколико је F експоненцијална расподела, тада статистике $u_i = T_i/T_n$ за $i = 1, 2, \dots, n-1$ имају исту расподелу као статистике поретка из униформне расподеле на интервалу $[0, 1]$. Скицирањем тачака $(i/n, u_i)$ за $i = 1, 2, \dots, n$ генерише се крива коју зовео *TTT* график и која се за велике вредности n приближава дијагонали јединичног квадрата.

Нека је $F^{-1}(t) = \inf\{x : G(x) \geq t\}$, тада за сваку расподелу F , можемо да представимо статистике T_i као $T_i = \int_0^{F_n^{-1}(i/n)} \bar{F}_n(x) dx$, где је F_n емпиријска функција расподеле дефинисана на основу уређеног узорка $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. На основу Гливенко-Кантелијеве теореме и јаког закона великих бројева можемо да закључимо да са вероватноћом 1, $T_i \rightarrow \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(x) dx$ униформно на $[0, 1]$, при $n \rightarrow \infty$ и $i/n \rightarrow t$. Такође, функција $H_F(t) = \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(x) dx$, дефинисана на $[0, 1]$, се назива *TTT*-трансформација функције F . Сматра се да су $\mu_F = \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(x) dx$ и трансформација $\phi_F(t) = H_F^{-1}(t)/\mu_F$ за $t \in [0, 1]$ скаларно инваријанте и зову се скалиране *TTT*-трансформације од F . Када је F експоненцијална расподела, онда важи да је $\phi_F(t) = t$ за $t \in [0, 1]$.

Наредна теорема представља директну везу између *TTT* графика и ХОК расподела (в. [59]).

Теорема 3.4 (*Хаунт и Шабе, 1997*) F је ХОК расподела ако и само ако за скалирану *TTT* трансформацију $\phi_F(t)$ постоји тачка u_0 таква да $0 < u_0 < 1$, при чему је $\phi_F(t)$ конвексна на $[0, u_0]$ и конкавна на $[u_0, 1]$.

3.3.2 WPP график

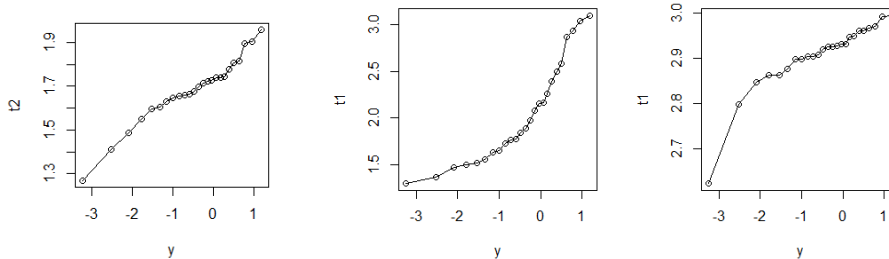
WPP (енг. *Weibull Probability Plot*) график представља визуелни тест сагласности двопараметарске Вејбулове расподеле. При томе, сматрамо да имамо узорак независних и једнако расподељених случајних величина. У супротном, постоје модификације овог метода (в. нпр. [95]).

На основу простог случајног узорка $\tilde{\mathbf{t}} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ обима n , $n \geq 1$, и варијационог низа $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, трансформацијама

$$x_i = \log(t_i) \text{ и } y_i = \log\left(-\log\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right), \text{ за } i = 1, 2, \dots, n,$$

конструишемо *WPP* график, који је одређен тачкама (x_i, y_i) . Уместо $i/n + 1$ можемо да користимо и $(i - 0.3)/(0.4 + n)$ (в. [78]).

Уколико не постоје аутлајери и ако тачке (x_i, y_i) нису значајно удаљене од праве $y = \beta x - \beta \ln \alpha$, можемо да сматрамо да узорак потиче из двопараметарске Вејбулове фамилије расподела (3.15), са параметрима α и β . Слика 3.4 илуструје разлику у облику графика на подацима из двопараметарске Вејбулове расподеле и података из тропараметарских модификација Вејбулових расподела са хазардном функцијом облика корита.



Слика 3.4: Примери *WPP* графика за узорак величине 25 из двопараметарске Вејбулове расподеле (леви график) и узорке исте величине из тропараметарских модификација Вејбулове расподеле са хазардном функцијом облика корита (средњи и десни график).

3.4 Примери

У овом поглављу представљамо функције веродостојности за различите фамилије расподела, као и одговарајуће оцене непознатих параметара на основу рекорда. Резултати за првих неколико расподела су опште познати, и могу се пронаћи у [19].

3.4.1 Експоненцијална расподела

Случајна величина X има експоненцијалну расподелу са једним параметром σ , односно $X \sim E(\sigma)$, ако је њена функција расподеле облика

$$F(x; \sigma) = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}}, \quad x \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad (3.1)$$

као и функција густине расподеле

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y}{\sigma}}, \quad y \geq \mu, \quad \sigma > 0. \quad (3.2)$$

Нека је дат вектор $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$ првих n горњих рекорда из (3.1) и нека је $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n)$ једна реализација. Тада је функција веродостојности (2.6), на основу $\tilde{\mathbf{r}}$, дата са

$$L(\sigma|\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{r_n}{\sigma}}, \quad 0 < r_1 < \dots < r_n, \quad (3.3)$$

одакле директно можемо да одредимо оцену МВ за параметар σ као

$$\hat{\sigma} = \frac{R_n}{n}. \quad (3.4)$$

Јединственост је очигледна, као што ће бити у наредних неколико примера.

Случајна величина Y има двопараметарску експоненцијалну расподелу, $Y \sim E(\mu, \sigma)$, ако има функцију расподеле облика

$$F(y; \mu, \sigma) = 1 - e^{-\frac{1}{\sigma}(y-\mu)}, \quad y \geq \mu, \quad \sigma > 0, \quad (3.5)$$

и одговарајућу функцију густине расподеле

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{\sigma}(y-\mu)}, \quad y \geq \mu, \quad \sigma > 0. \quad (3.6)$$

Нека је дат вектор $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$ првих n горњих рекорда из (3.5) и нека је $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n)$ једна њихова реализација. Тада је функција веродостојности (2.6), на основу рекорда, дата са

$$L(\mu, \sigma|\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{\sigma}(r_n-\mu)}, \quad \mu < r_1 < \dots < r_n. \quad (3.7)$$

Надаље се лако закључује да су оцене МВ параметара μ и σ , са ознакама $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, дате са

$$\hat{\mu} = R_1 \text{ и } \hat{\sigma} = \frac{R_n - R_1}{n}. \quad (3.8)$$

3.4.2 Униформна расподела

Ако је дат вектор $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$ првих n , $n \geq 1$, горњих рекорда протеклих из једнопараметарске униформне расподеле са функцијом густине расподеле

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sigma}, \quad 0 < x < \sigma, \quad (3.9)$$

тада, одговарајућа функција веродостојности, на основу реализације $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, постаје

$$L(\sigma|\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\sigma - r_i)}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \sigma, \quad (3.10)$$

одакле можемо да закључимо да је оцена МВ за параметар σ дата са

$$\hat{\sigma} = R_n. \quad (3.11)$$

За вектор $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$ првих n , $n \geq 1$, горњих рекорда из двопараметарске униформне расподеле са функцијом густине расподеле

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma}, \quad \mu < x < \mu + \sigma, \quad (3.12)$$

важи да је функција веродостојности, на основу реализације $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, облика

$$L(\sigma|\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\mu + \sigma - r_i)}, \quad \mu < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \mu + \sigma, \quad (3.13)$$

одакле можемо да закључимо да су оцене МВ за параметаре μ и σ дате са

$$\hat{\mu} = R_1 \text{ и } \hat{\sigma} = R_n - R_1. \quad (3.14)$$

3.4.3 Вејбулова расподела

Ако случајна величина X има функцију расподеле и функцију густине расподеле облика

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp \{-\alpha x^\beta\} \quad (3.15)$$

и

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\beta-1} \exp \{-\alpha x^\beta\}, \quad (3.16)$$

редом, где је $x \geq 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, онда кажемо да случајна величина X има двопараметарску Вејбулову расподелу. Параметри α и β се сматрају параметрима размере и облика, редом.

Према [122], функција веродостојности (2.6), заснована на реализацији $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n)$ првих n , $n \geq 1$, горњих рекорда $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$, је облика

$$L(\alpha, \beta | \tilde{\mathbf{r}}) = \alpha^n \beta^n e^{-\alpha r_n^\beta} \prod_{i=1}^n r_i^{\beta-1}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n. \quad (3.17)$$

Уколико је параметар β познат, оцена МВ на основу рекордних вредности за параметар α , ознака $\hat{\alpha}$, је дата са

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{R_n^\beta}. \quad (3.18)$$

У случају да су оба параметра непозната, оцене МВ су облика

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n \ln(R_n) - \sum_{i=1}^n \ln(R_i)} \quad \text{и} \quad \hat{\alpha} = \frac{n}{R_n^{\hat{\beta}}}. \quad (3.19)$$

3.4.4 Паретова расподела

Случајна величина X има двопараметарску Паретову расподелу ако је њена функција расподеле облика

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \beta \quad (3.20)$$

и одговарајућа функција густине расподеле

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta^\alpha x^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq \beta, \quad (3.21)$$

где су параметри α и β позитивни.

Функција веродостојности за првих n , $n \geq 1$, рекорда $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$ са (3.20) има облик (в. [8] и [107])

$$L(\alpha, \beta | \tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\alpha^n \beta^n}{r_n^\alpha \prod_{i=1}^n r_i}, \quad \beta < r_1 < r_2 < \dots < r_n, \quad (3.22)$$

где је $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n)$ једна реализација од $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_n)$. Оцене МВ за параметре β и α су, редом, $\hat{\beta} = R_1$ и

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\ln R_n - \ln R_1}. \quad (3.23)$$

3.4.5 Логистичка расподела

За случајну величину Y кажемо да има Логистичку расподелу са параметрима (μ, σ) ако има функцију густине расподеле и функцију расподеле

$$g(y; \mu, \sigma) = \frac{e^{-(y-\mu)/\sigma}}{\sigma(1 + e^{-(y-\mu)/\sigma})^2}, \quad -\infty < y < \infty, \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0, \quad (3.24)$$

$$G(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{-(y-\mu)/\sigma}}, \quad -\infty < y < \infty, \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0, \quad (3.25)$$

редом.

Логистичка расподела ефикасно моделира обележја биолошке популације. Познато је њено понашање које је веома слично нормалној расподели, с израженом разликом која се односи на тежину репова расподеле. Примену налази и у логистичкој регресији, по којој је ова регресија добила име.

Међутим, коришћењем (2.6), директно се може уочити да једначине веродостојности функције веродостојности $L(\mu, \sigma | \tilde{\mathbf{y}})$, на основу реализованог узорка $\tilde{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ горњих m рекорда $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, \dots, R_m)$, $m \geq 1$, из (3.24), не пружају експлицитне оцене МВ за параметре μ и σ .

Користећи трансформацију $X = (Y - \mu)/\sigma$, редукујемо (3.24) и (3.25) као

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.26)$$

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.27)$$

где важи функционална веза

$$f(x) = F(x)(1 - F(x)), \quad f'(x) = f(x)(1 - 2F(x)). \quad (3.28)$$

Самим тим, редукована функција веродостојности $L(\mu, \sigma|\tilde{\mathbf{r}})$ постаје

$$L(\mu, \sigma|\tilde{\mathbf{r}}) = \sigma^{-m} f(r_m) \prod_{i=1}^m F(r_i), \quad r_1 < r_2 < \dots < r_m, \quad (3.29)$$

где је $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ и $r_i = (y_i - \mu)/\sigma$ за $i = 1, 2, \dots, m$.

Једначине веродостојности од (3.29) су

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma|\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma} \left[m - F(r_m) - \sum_{i=1}^m F(r_i) \right] = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma|\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} \left[m + \sum_{i=1}^m r_i - r_m F(r_m) - \sum_{i=1}^m r_i F(r_i) \right] = 0. \quad (3.31)$$

Оцене $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ за параметре μ и σ редом, се једино могу пронаћи нумеричким путем. Самим тим, избор почетних вредности при нумеричким итерацијама је од великог значаја. У [21] су разматране апроксимативне оцене параметара μ и σ , у ознаци $\hat{\mu}^*$ и $\hat{\sigma}^*$, редом, као коректне почетне вредности при одређивању оцена МВ $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$.

Нека је $E(R_i) = \delta_i$ и $F(R_i) \stackrel{d}{=} U_i$, где је U_i i -ти рекорд из стандардне униформне расподеле. Одавде је $R_i \stackrel{d}{=} F^{-1}(U_i)$. Надаље, важи да је $\delta_i = E(R_i) \approx F^{-1}(E(U_i))$, где је $E(U_i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ за $i = 1, \dots, n$, и $F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$. Следи да је $\delta_i \approx F^{-1}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\right] = \ln(2^{i+1} - 1)$. Даље важи $F(r_i) \approx F(\delta_i) + (r_i - \delta_i)f(\delta_i) = \alpha_i + \beta_i r_i$, где је $\alpha_i = F(\delta_i) - \delta_i f(\delta_i)$ и $\beta_i = f(\delta_i) \geq 0$ за $i = 1, \dots, n$. Вредности апроксимативних оцена МВ за параметре μ и σ се могу добити као

$$\hat{\sigma}^* = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4mB}}{2m} \quad \text{и} \quad \hat{\mu}^* = C + D\hat{\sigma}^*, \quad (3.32)$$

где је

$$A = \left(\sum_{i=1}^m y_i - \alpha_m y_m - \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right) + \frac{(\beta_m y_m + \sum_{i=1}^m \beta_i y_i)(\alpha_m + \sum_{i=1}^m \alpha_i - m)}{\beta_m + \sum_{i=1}^m \beta_i},$$

$$B = - \left(\beta_m y_m^2 + \sum_{i=1}^m \beta_i y_i^2 \right) + \frac{(\beta_m y_m + \sum_{i=1}^m \beta_i y_i)^2}{\beta_m + \sum_{i=1}^m \beta_i},$$

$$C = \frac{\beta_m y_m + \sum_{i=1}^m \beta_i y_i}{\beta_m + \sum_{i=1}^m \beta_i} \quad \text{и} \quad D = \frac{\alpha_m + \sum_{i=1}^m \alpha_i - m}{\beta_m + \sum_{i=1}^m \beta_i}.$$

У [131] је показано да ове оцене поседују, у асимптотском смислу, исте особине као оцене МВ. Поред избора коректних почетних вредности итерација, неопходно је показати да је матрица других парцијалних извода за (3.29) негативно дефинитна. На тај начин се може закључити да су оцене МВ јединствене (в. [21]).

3.4.6 Генерализована експоненцијална расподела

За случајну величину кажемо да има двопараметарску Генерализовану експоненцијалну расподелу, коју ћемо означити са $GE(\alpha, \lambda)$ (в. [57]), ако је њена функција расподеле облика

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \quad (3.33)$$

где је α параметар облика и λ параметар размере.

Нека је дат вектор $(\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{K}) = (R_1, K_1, R_2, K_2, \dots, R_m, K_m)$, $m \geq 1$, првих m горњих рекорда из $GE(\alpha, \lambda)$ расподеле са адекватним прираштајима времена остваривања и где је $(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{k}) = (r_1, k_1, r_2, k_2, \dots, r_m, k_m)$ једна њихова реализација. Тада је функција веродостојности (2.4) дата са

$$L(\alpha, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{k}) = \alpha^m \lambda^m \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^m r_i + \alpha \sum_{i=1}^m k_i \ln(1 - e^{-\lambda r_i}) - \sum_{i=1}^m \ln(1 - e^{-\lambda r_i}) \right\}, \quad (3.34)$$

$$-\infty < r_1 < r_2 < \dots < r_m < \infty.$$

Оцена МВ за параметар α је

$$\hat{\alpha} = \frac{m}{U_{\hat{\lambda}}}, \quad (3.35)$$

при чему је $U_{\hat{\lambda}} = -\sum_{i=1}^m K_i \ln(1 - e^{-\hat{\lambda} R_i})$ и оцена МВ параметра λ , $\hat{\lambda}$, изражена као решење нелинеарне једначине

$$\frac{m}{\lambda} - \sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^m \frac{R_i e^{-\lambda R_i}}{1 - e^{-\lambda R_i}} \left(K_i \frac{m}{U_{\hat{\lambda}}} - 1 \right) = 0. \quad (3.36)$$

Према [72], оцене (3.35) и (3.36) су јединствене.

Уколико сматрамо да је број рекорда из простог случајног узорка из (3.33) везан за случајну величину N_n , за λ познато, $\hat{\alpha}$ има облик

$$\hat{\alpha} = \frac{N_n}{U_1^*}, \quad (3.37)$$

где је $U_1^* = -\sum_{i=1}^{N_n} K_i \ln(1 - e^{-R_i})$.

3.4.7 Бурова расподела X типа

Ако случајна величина има Бурову расподелу X типа, онда је њена функција расподеле и функција густине расподеле облика

$$F(x; \theta) = \left(1 - e^{-x^2}\right)^\theta, \quad x > 0, \theta > 0, \quad (3.38)$$

и

$$f(x; \theta) = 2\theta x e^{-x^2} \left(1 - e^{-x^2}\right)^{\theta-1}, \quad x > 0, \theta > 0, \quad (3.39)$$

редом. Нека је дат вектор $\tilde{\mathbf{L}} = (L_1, \dots, L_n)$ првих n , $n \geq 1$, доњих рекорда из (3.38) и нека је $\tilde{\mathbf{I}} = (l_1, \dots, l_n)$ једна њихова реализација. Тада можемо да одредимо функцију веродостојности, на основу $\tilde{\mathbf{I}}$, као

$$L(\theta|\tilde{\mathbf{I}}) = (2\theta)^n \left(1 - e^{-l_n^2}\right)^\theta \prod_{i=1}^n \left(\frac{l_i e^{-l_i^2}}{1 - e^{-l_i^2}}\right), \quad 0 < l_n < \dots < l_1. \quad (3.40)$$

Може се директно показати да је оцена МВ за параметар θ , са ознаком $\hat{\theta}$, дата са $\hat{\theta} = -\frac{n}{\ln(1 - e^{-l_n^2})}$ (в. [129]). Ова оцена је и јединствена оцена.

3.4.8 Бурова расподела XII типа

За случајну величину кажемо да има Бурову расподелу XII типа (в. [37]), коју ћемо означити са $Burr(\alpha, \beta)$, ако су њене функција расподеле и функција густине расподеле дате са

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 + x^\alpha)^{-\beta}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3.41)$$

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} (1 + x^\alpha)^{-(\beta+1)}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3.42)$$

редом. Параметри α и β су параметри облика.

Нека је дат вектор $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ првих n , $n \geq 1$, горњих рекорда из $Burr(\alpha, \beta)$ расподеле и нека је $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n)$ једна њихова реализација. Тада је функција веродостојности, на основу $\tilde{\mathbf{r}}$, дата са

$$L(\alpha, \beta|\tilde{\mathbf{r}}) = h(\tilde{\mathbf{r}}; \alpha) \alpha^n \beta^n e^{-\beta T(r_n; \alpha)}, \quad 0 < r_1 < \dots < r_n, \quad (3.43)$$

где су

$$h(\alpha; \tilde{\mathbf{r}}) = \prod_{i=1}^n \frac{r_i^{\alpha-1}}{1+r_i^\alpha} \text{ и } T(r_n; \alpha) = \ln(1+r_n^\alpha). \quad (3.44)$$

Оцена МВ параметра β , $\hat{\beta}$, је представљена преко формуле

$$\hat{\beta} = \frac{n}{T(R_n; \hat{\alpha})}, \quad (3.45)$$

где се оцена параметра α , $\hat{\alpha}$, налази итеративним путем као решење нелинеарне једначине

$$\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln R_i}{1+R_i^\alpha} - \left(\frac{n}{\ln(1+R_n^\alpha)} \right) \frac{R_n^\alpha \ln R_n}{1+R_n^\alpha} = 0. \quad (3.46)$$

Дате оцене су јединствене уколико је бар једна реализација r_i , $i = 1, \dots, n$ мања од један (в. [73]).

3.4.9 Кумарасвамијева расподела

Случајна величина X има Кумарасвамијеву расподелу, $X \sim Kum(a, b)$, ако има функцију расподеле дату са

$$F(x; a, b) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad 0 < x < 1, \quad (3.47)$$

и функцију густине расподеле

$$f(x; a, b) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}, \quad 0 < x < 1, \quad (3.48)$$

где су параметри $a, b > 0$ параметри облика.

Обележимо реализацију $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n)$ првих n , $n \geq 1$, горњих рекорда $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ из $Kum(a, b)$ расподеле. Тада функција веродостојности, на основу $\tilde{\mathbf{r}}$, је дата са

$$L(a, b|\tilde{\mathbf{r}}) = a^n b^n h(\tilde{\mathbf{r}}; a) e^{-bT(r_n; a)}, \quad 0 < r_1 < \dots < r_n < 1, \quad (3.49)$$

где је

$$h(a; \tilde{\mathbf{r}}) = \prod_{i=1}^n \frac{r_i^{-1}}{1-r_i} \text{ и } T(r_n; a) = -\ln(1-r_n^a). \quad (3.50)$$

Стога, оцена МВ за параметар b , \hat{b} , је дата са

$$\hat{b} = \frac{n}{T(R_n; \hat{a})}, \quad (3.51)$$

док оцена за параметар a , \hat{a} , може да се одреди као решење нелинеарне једначине

$$\frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln R_i}{1 - R_n^a} + \left(\frac{n}{\ln(1 - R_n^a)} \right) \frac{R_n^a \ln R_n}{1 - R_n^a} = 0. \quad (3.52)$$

Дате оцене су јединствене (в. [92]).

3.4.10 Линдлијева расподела

За случајну величину X кажемо да има Линдлијеву расподелу ако је њена функција расподеле облика

$$F(x; \theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1} x \right) e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0, \quad (3.53)$$

и одговарајућа функција густине расподеле облика

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0. \quad (3.54)$$

У случају када експоненцијална расподела не пружа довољну флексибилност, онда се Линдлијева расподела може сматрати одговарајућим моделом. Наравно, постоје модели Линдлијеве расподеле са два или више параметра који утичу на побољшање перформанси моделирања.

На основу реализације $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ првих n , $n \geq 1$, горњих рекорда $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ из (3.53), функција веродостојности је облика

$$L(\theta | \tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\theta^{2n}}{1 + \theta} e^{-\theta r_n} \prod_{i=1}^n (1 + r_i) \left(\prod_{i=1}^n (1 + \theta(1 + r_i)) \right)^{-1}, \quad 0 < r_1 < \dots < r_n. \quad (3.55)$$

На основу [20], оцена МВ за параметар θ постоји и њена јединственост је потврђена аналитичким путем. Њено одређивање проистиче из итеративног решавања нелинеарне

једначине $g(\theta) = \theta$, где је

$$g(\theta) = 2n \left[\frac{1}{\theta + 1} + r_n + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1 + r_i}{1 + (1 + r_i)\theta} \right]^{-1}. \quad (3.56)$$

3.4.11 Експонована Гумбелова расподела

Случајна величина X која има Експоновану Гумбелову расподелу има, редом, функцију расподеле и функцију густине расподеле облика

$$F(x; \alpha) = \left(e^{-e^{-x}} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.57)$$

и

$$f(x; \alpha) = \alpha e^{-x} \left(e^{-e^{-x}} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.58)$$

Ова расподела је представљена у [93] као потенцијални модел за моделирање широке лезе климатских догађаја. Реализација првих n , $n \geq 1$, доњих рекорда $\tilde{\mathbf{L}} = (L_1, \dots, L_n)$ који прате (3.57), $\tilde{\mathbf{I}} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, генерише функцију веродостојности облика

$$L(\alpha | \tilde{\mathbf{I}}) = \alpha^n \left(e^{-e^{-l_n}} \right)^\alpha \prod_{i=1}^n e^{-l_i}, \quad 0 < l_n < \dots < l_1. \quad (3.59)$$

На основу (3.59), у [20] је представљена јединствена оцена параметра α на основу рекорда као

$$\hat{\alpha} = n e^{L_n}. \quad (3.60)$$

Наредни одељци представљају резултате аутора који се односе на потврду јединствености оцена за познате примере ХОК расподела, модификоване Вејбулове расподеле, и обрнуте ХОК расподеле, тзв. *Пенг-Јан* екстензије Вејбулове расподеле. Неки од њих се могу пронаћи у [135].

3.4.12 LXM модификација Вејбулове расподеле

Једна од познатијих екстензија двопараметарске Вејбулове фамилије расподела је фамилија LXM модификованих Вејбулових расподела. Представљена је од стране Лаија, Сија и Муртија (в. [78]). Функција расподеле и функција густине расподеле ове фамилије

су дате, редом, као

$$F(x; a, b, \lambda) = 1 - e^{-ax^b e^{\lambda x}}, \quad (3.61)$$

$$f(x; a, b, \lambda) = a(b + \lambda x)x^{b-1}e^{\lambda x - ax^b e^{\lambda x}} \quad (3.62)$$

за $x > 0$ и $a > 0, b > 0$ и $\lambda \geq 0$. Параметри a и λ су параметри облика, док параметар b представља параметар размере.

Карактеристични облик хазардне функције, фамилија двопараметарске Вејбулове расподеле као и фамилија расподела екстремних вредности, као специјални случајеви модификоване Вејбулове фамилије, чине је занимљивијом у применама у односу на остале екстензије Вејбулове расподеле.

Овај модел је представљен као потенцијални модел за узорке са хазардном функцијом са монотоним карактером или обликом корита. Њене широке могућности за моделовање су реализоване са само три параметра, чиме привлачи пажњу многобројних истраживача. Према томе, сматра се да ова фамилија расподела може наћи своју улогу у осигурању, контроли квалитета, као и у теорији поузданости.

Нека је дата реализација $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)} = (r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dots, r_{n(k)})$ првих n k -т горњим рекордима $\tilde{\mathbf{R}}_{(k)} = (R_{1(k)}, R_{2(k)}, \dots, R_{n(k)})$, где је $n \geq 2$ и $k \geq 1$ фиксирано. Функција веродостојности, заснована на $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, и њен логаритам су представљени са

$$L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = k^n a^n e^{-akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}} \prod_{i=1}^n (b + \lambda r_{i(k)}) r_{i(k)}^{b-1} e^{\lambda r_{i(k)}}, \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \ln L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) &= n \ln a + n \ln k + \sum_{i=1}^n \ln(b + \lambda r_{i(k)}) + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^n r_{i(k)} - ak r_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}, \quad 0 < r_{1(k)} < r_{2(k)} < \dots < r_{n(k)}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

редом.

Једначине веродостојности су дате са

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}{\partial a} &= \frac{n}{a} - kr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}} = 0, \\ \frac{\partial \ln L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ln(b + \lambda r_{i(k)})} + \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} - ak r_{n(k)}^b \ln r_{n(k)} e^{\lambda r_{n(k)}} = 0, \\ \frac{\partial \ln L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{\ln(b + \lambda r_{i(k)})} + \sum_{i=1}^n r_{i(k)} - ak r_{n(k)}^{b+1} e^{\lambda r_{n(k)}} = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Надаље, на основу $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, дефинишимо функцију $a(b, \lambda)$ као

$$a(b, \lambda) = \frac{n}{kr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}}. \quad (3.66)$$

Можемо да уочимо да се оцена МВ за параметар a , уколико сматрамо да су оцене МВ за параметре b и λ , у ознаци \hat{b} и $\hat{\lambda}$, познате, може одредити као

$$\hat{a} = a(\hat{b}, \hat{\lambda}) = \frac{n}{kR_{n(k)}^{\hat{b}} e^{\hat{\lambda} R_{n(k)}}}. \quad (3.67)$$

Треба истаћи и то да, због прецизности и смислености оцена МВ, број рекорда треба да буде бар три.

Користећи неједнакост $\ln t \leq t - 1$, $t > 0$ и (3.66), имамо да

$$\ln L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) \leq L^*(b, \lambda) \text{ за свако } b, \lambda > 0, \quad (3.68)$$

где је једнакост успостављена ако важи да је $a = a(b, \lambda)$, и где је

$$\begin{aligned} L^*(b, \lambda) &= n \ln n - n - nb \ln r_{n(k)} - n\lambda r_{n(k)} + \sum_{i=1}^n \ln(b + \lambda r_{i(k)}) \\ &+ (b-1) \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} + \lambda \sum_{i=1}^n r_{i(k)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Неједнакост (3.68) директно следи из тога што се израз $n \ln a + n \ln k - akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}$ може представити као

$$\begin{aligned} &n \ln a + n \ln k - akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}} \\ &= n \left(\ln ak - \frac{akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}}{n} \right) \\ &= n \left(\ln \left(\frac{akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}}{n} \frac{n}{r_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}} \right) - \frac{akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}}{n} \right) \\ &= n \left(\ln \left(\frac{akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}}{n} \right) - \frac{akr_{n(k)}^b e^{\lambda r_{n(k)}}}{n} + \ln n - b \ln r_{n(k)} - \lambda r_{n(k)} \right). \end{aligned}$$

Слично је урађено и у [26].

Очигледно је да се максимизирањем функције $L^*(b, \lambda)$ постиже максимум функције $L(a, b, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})$. Такође, значајно је приметити да функција $L^*(b, \lambda)$ не зависи од параметра k .

Проширићемо параметарски простор на основу добијеног узорка k -тих горњих рекорда тако да је услов позитивности функције (3.62) задовољен. Слично је урађено у [69].

Нека је дата $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)} = (r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dots, r_{n(k)})$ реализација величине n горњих k -тих рекорда. Обележићемо проширени параметарски простор као $\Theta^* = \{(a, b, \lambda) : a > 0, b + \lambda r_{i(k)} > 0, i = 1, \dots, n\} = (0, \infty) \times \Theta_0^*$, где је $\Theta_0^* = \{(b, \lambda) : b + \lambda r_{i(k)} > 0, i = 1, \dots, n\}$. Оваква нотација имплицира да руб простора Θ^* , који обележавамо са $\partial\Theta^*$, је уједно и руб простора Θ_0^* , тј. $\partial\Theta^* = \partial\Theta_0^* = \{b = \infty\} \cup \{\lambda = \infty\} \cup \{(b, \lambda) : b > 0, \lambda > -\frac{b}{r_{n(k)}}\} \cup \{(b, \lambda) : \lambda > 0, b > -\lambda r_{1(k)}\}$.

Диференцирањем (3.69) на основу параметара b и λ добијамо следеће једначине веродостојности:

$$\frac{\partial L^*}{\partial b} = -n \ln r_{n(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{b + \lambda r_{i(k)}} + \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = -nr_{n(k)} + \sum_{i=1}^n r_{i(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{b + \lambda r_{i(k)}}. \quad (3.71)$$

Матрица других парцијалних извода за функцију L^* је дата са

$$H(b, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L^*}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial b \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L^*}{\partial \lambda \partial b} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

где су

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial b^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(b + \lambda r_{i(k)})^2}, \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial b \partial \lambda} = - \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{(b + \lambda r_{i(k)})^2}, \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \lambda^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}^2}{(b + \lambda r_{i(k)})^2}. \quad (3.75)$$

На основу Теорема 3.1, 3.2 и 3.3, довољно је доказати, у циљу потврђивања егзистенције и јединствености оцена МВ за параметре (b, λ) на Θ_0^* , да важи

1. $\lim_{(b, \lambda) \rightarrow \partial\Theta_0^*} L^*(b, \lambda) = -\infty$,
2. матрица других парцијалних извода $H(b, \lambda)$ је негативно дефинитна при свакој тачки $(b, \lambda) \in \Theta_0^*$.

Први услов истиче познавање понашања функције L^* . Наредна лема описује понашање функције L^* на $\partial\Theta_0^*$.

Лема 3.1 *За $k \geq 1$ и $n \geq 2$ важи да*

$$(1) \lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{\lambda > -b/r_{n(k)}} L^*(b, \lambda) = -\infty,$$

$$(2) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{b > -\lambda r_{1(k)}} L^*(b, \lambda) = -\infty,$$

$$(3) \lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{\lambda = -b/r_{n(k)}} L^*(b, \lambda) = -\infty,$$

$$(4) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{b = -\lambda r_{1(k)}} L^*(b, \lambda) = -\infty.$$

Доказ. За фиксирано позитивно b и $k \geq 1$, имамо

$$L^*(b, \lambda) < g_b(\lambda)$$

где је

$$g_b(\lambda) = n \ln n - nb \ln r_{n(k)} - n\lambda r_{n(k)} - n + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} + \lambda \sum_{i=1}^n r_{i(k)} + n \ln(b + \lambda r_{n(k)}). \quad (3.76)$$

За фиксирано $n \geq 2$, функција $g_b(\lambda)$ достиже максимум у тачки λ^* , где је

$$\lambda^* = \frac{n}{nr_{n(k)} - \sum_{i=1}^n r_{i(k)}} - \frac{b}{r_{n(k)}}.$$

и

$$g_b(\lambda^*) = b \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}} + 1 - \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}} \right) + C, \quad (3.77)$$

где је

$$C = n \ln n - n - \frac{n^2 r_{n(k)}}{nr_{n(k)} - \sum_{i=1}^n r_{i(k)}} + n \ln \frac{nr_{n(k)}}{nr_{n(k)} - \sum_{i=1}^n r_{i(k)}} - \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} + \frac{n}{nr_{n(k)} - \sum_{i=1}^n r_{i(k)}} \sum_{i=1}^n r_{i(k)}.$$

Дефинишемо функцију $h(x) = \ln x + 1 - x$ за $x \in (0, 1]$. Њен извод $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$ је ненегативан за $x \in (0, 1]$, те имамо $h(x) \leq h(1) = 0$ за $x \in (0, 1]$. Даље, важи да је

$h\left(\frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}}\right) \leq 0$ за $i = 1, \dots, n$ и

$$\sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}} + 1 - \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}} \right) < 0.$$

Самим тим, $\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{\lambda > -\frac{b}{r_{n(k)}}} g_b(\lambda) = -\infty$, што комплетира први део доказа леме. Други део леме следи аналогно. Трећи и четврти део произилазе директно из особина логаритамске функције. Тиме је доказ леме завршен. Самим тим, доказана је наредна теорема.

Теорема 3.5 *Ако је $\lim_{(b,\lambda) \rightarrow \partial\Theta_0^*} L^*(b, \lambda) = -\infty$, за $n \geq 2$ и $k \geq 1$, функција (3.69) је константна на рубу $\partial\Theta_0^*$ параметарског простора Θ_0^* .*

Лема 3.2 *Матрица других парцијалних извода је негативно дефинитна за сваку тачку $(b, \lambda) \in \Theta^*$.*

Доказ. Да бисмо доказали да је матрица других парцијалних извода негативно дефинитна, наредни услови морају бити испуњени:

1. члан $\frac{\partial^2 L^*}{\partial b^2}$ од $H(b, \lambda)$ мора бити негативан;
2. $\det H(b, \lambda)$ мора да буде позитивна за свако $(b, \lambda) \in \Theta^*$.

Лако се види да је први услов задовољен. Што се тиче другог услова, резонуваћемо на следећи начин. Нека је дата случајна промењива Z са законом расподеле $p_j = P\{Z = r_{j(k)}\}$, $j = 1, \dots, n$, где је $p_j = (b + \lambda r_{j(k)})^{-2} / \sum_{i=1}^n (b + \lambda r_{i(k)})^{-2}$. Лако се може уочити да је случајна величина Z недегенерисана, што као последицу има да $D(Z) > 0$. Због тога важи да је $\det H(b, \lambda)$ позитивна за све тачке (b, λ) . Тиме је доказ леме завршен.

Теорема 3.5 и Лема 3.2 доказују наредну теорему.

Теорема 3.6 *Оцене MB параметра a, b и λ , на основу k -тих рекорда, у популацији са функцијом расподеле обележја (3.61) постоје и јединствене су на параметарском простору $\Theta^* = \{(a, b, \lambda) : a > 0, b + \lambda r_{i(k)} > 0, i = 1, \dots, n\}$.*

Пример са симулираним подацима

У наредном одељку генерисаћемо прост случајан узорак величине 20 из расподеле (3.61) са параметрима $(a, b, \lambda) = (1, 1, 1)$. Ове опсервације су представљене у Табели 3.1.

Табела 3.1: Реализације случајне величине са расподелом (3.61) и параметрима $(a, b, \lambda) = (1, 1, 1)$.

0.5067	0.284	0.8083	0.6262	0.169	0.3246	0.7154	0.673	0.0358	0.6298
0.0273	0.8151	0.254	0.5241	0.6426	0.4661	0.4322	0.1228	1.5262	0.1226

Реализовани k -ти рекорди из узорка са симулираним подацима су:

i	1	2	3	4	5	6	7
$R_{i(1)}$	0.5067	0.8083	0.8151	1.5262			
$R_{i(2)}$	0.284	0.5067	0.6262	0.7154	0.8083	0.8151	
$R_{i(3)}$	0.284	0.5067	0.6262	0.673	0.7154	0.8083	
$R_{i(4)}$	0.284	0.3246	0.5067	0.6262	0.6298	0.673	0.7154

У наредном делу размотрићемо случајеве када је $k = 1$ и $k = 2$ и обележићемо их као случај I и II, редом.

За случај I, коришћењем рестриктивне оптимизације добијамо евалуације оцена MB $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}) = (1.956909, 1.691013, 0)$ са одговарајућим максимумом 4.9836 од (3.69). Међутим, у овој тачки систем вероватносних једначина (3.65) није коректно дефинисан. Проширивањем параметарског простора на Θ^* добија се нова тачка $(\hat{b}_1, \hat{\lambda}_1) = (2.9687, -1.2343)$ у којој функција (3.69) достиже максимум који износи 5.5812. Пошто су параметри (b, λ) модификоване Вејбулове расподеле дефинисани у првом квадранту параметарског простора $b - \lambda$, закључак је да расподела са оцењеним параметрима $(\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{\lambda}_1) = (7.5005, 2.9687, -1.2343)$ не чини адекватан модел. Самим тим, прихватају се вредности оцена MB

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}) = (1.9569, 1.691, 0).$$

Фамилија двопараметарске Вејбулове расподела тиме чини допустиву фамилију расподела за дати узорак. Напоменуто је раније да је двопараметарска Вејбулова расподела представљена као специјални случај модификоване Вејбулове расподеле.

Слично важи и за случај II. Сходно томе, прихватамо вредности оцена MB

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}) = (0.3297, 1.3197, 3.04)$$

као одговарајуће. Вредност функције (3.69) при овим оценама параметара је 21.2448.

Пример са реалним подацима

У наставку представљамо низ података који представљају узорак од 30 јединица већег електронског система. Током рада ових јединица два различита типа квара, који чине

узрок њиховог престанка рада, су детектована. Први тип квара настаје акумулацијом случајних прекида у електричној мрежи, док други тип квара настаје након 100000 обртаја и за њих једино знамо да су кварови прве врсте настали после пређеног броја обртаја (в. [26]). Подаци су представљени у Табели 3.2.

Табела 3.2: Времена отказа компоненти већег електричног система.

275	13	147	23	181	30	65	10	300	173
106	300	300	212	300	300	300	2	261	293
88	247	28	143	300	23	300	80	245	266

У [17] је установљено да се фамилија модификованих Вејбулових расподела може регистровати као допустив модел за дати узорак. Такође, оцене параметара модификоване Вејбулове расподеле су $\hat{a} = 0.018$, $\hat{b} = 0.454$ и $\hat{\lambda} = 7.133 \times 10^{-3}$.

Надаље, издвојићемо из датог узорка k -те рекорде:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_{i(1)}$	275	300								
$R_{i(2)}$	13	147	181	275	293					
$R_{i(3)}$	13	23	147	181	212	261	275			
$R_{i(4)}$	13	23	30	65	147	173	181	212	261	266

Размотрићемо два случаја: $k = 2$ и $k = 3$, и обележимо ове случајеве са I и II, редом.

Оптимизацијом у односу на Θ_0^* , добијамо вредности оцена МВ $(\hat{b}, \hat{\lambda}) = (0.4762, 0.0053)$ и $(\hat{b}, \hat{\lambda}) = (0.5397, 0.0004)$ са достигнутим максимумима 13.8465 и -24.5397 од (3.69) за случајеве I и II, редом. Самим тим, оцене МВ су јединствене и одређене са

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}) = (0.0357, 0.4762, 0.0053)$$

и

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}) = (0.0371, 0.5397, 0.0004),$$

редом, за случајеве I и II.

3.4.13 Пенг-Јан екстензија Вејбулове расподеле

Једна од екстензија двопараметарске Вејбулове фамилије је фамилија расподела са карактеристичном функцијом расподеле облика

$$F(x; \alpha, \beta, \lambda) = 1 - e^{-\alpha x^\beta e^{-\frac{\lambda}{x}}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \quad (3.78)$$

и одговарајућом функцијом густине

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \alpha(\lambda + \beta x)x^{\beta-2}e^{-\frac{\lambda}{x}-\alpha x^\beta e^{-\frac{\lambda}{x}}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \quad (3.79)$$

као и хазардном функцијом

$$h(x; \alpha, \beta, \lambda) = \alpha(\lambda + \beta x)x^{\beta-2}e^{-\frac{\lambda}{x}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0. \quad (3.80)$$

Параметри α и λ чине параметре облика док параметар β представља параметар размере. Ова фамилија расподела је представљена у раду Пенга и Јанга [101]. На основу иницијала аутора, користићемо нотацију $PYEW(\alpha, \beta, \lambda)$. Када параметар β узима вредности из $(0, 1)$, хазардна функција ове фамилије расподела има облик обрнутог корита, док за $\beta \geq 1$ ова фамилија расподела поседује монотону хазардну функцију. Због експлицитног облика функције расподеле, њена примена у реалним ситуацијама постаје доста директна.

Нека је дата реализација $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)} = (r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dots, r_{n(k)})$ првих n k -тих горњих рекорда $\tilde{\mathbf{R}}_{(k)} = (R_{1(k)}, R_{2(k)}, \dots, R_{n(k)})$ из (3.78), где је $n \geq 2$ и $k \geq 1$ фиксирано. На основу $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, функција веродостојности, заједно са њеним логаритмом су, редом,

$$L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \alpha^n k^n h(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) e^{-\alpha T(\beta, \lambda; \mathbf{r}_{(k)})}, \quad (3.81)$$

$$\ln L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = n \ln \alpha + n \ln k + \ln h(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) - \alpha T(\beta, \lambda; \mathbf{r}_{(k)}), \quad (3.82)$$

за $0 < r_{1(k)} < r_{2(k)} < \dots < r_{n(k)}$, где је

$$h(\alpha, \beta, \lambda; | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \prod_{i=1}^n (\lambda + \beta r_{i(k)}) r_{i(k)}^{\beta-2} e^{-\frac{\lambda}{r_{i(k)}}}$$

и

$$T(\beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = k r_{n(k)}^\beta e^{-\frac{\lambda}{r_{n(k)}}}.$$

Оцене МВ за параметре α, β и λ , означене као $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ и $\hat{\lambda}$, редом, се одређују као решења одговарајућих једначина веродостојности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - T(\beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}{\partial \beta} &= -\alpha r_{n(k)}^\beta \ln r_{n(k)} e^{-\frac{\lambda}{r_{n(k)}}} + \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{(\lambda + \beta r_{i(k)})} + \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}{\partial \lambda} &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i(k)}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda + \beta r_{i(k)})} + \alpha k r_{n(k)}^{\beta-1} e^{-\frac{\lambda}{r_{n(k)}}} = 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

На основу $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, дефинишемо функцију $\alpha(\beta, \lambda)$ као

$$\alpha(\beta, \lambda) = \frac{n}{T(\beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})}. \quad (3.84)$$

Коришћењем (3.84), оцена МВ за параметар α , када су одговарајуће оцене $\hat{\beta}$ и $\hat{\lambda}$ познате, има облик

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{T(\hat{\beta}, \hat{\lambda} | \mathbf{R}_{(k)})}. \quad (3.85)$$

Слично као у претходном случају, из неједнакости $\ln t \leq t - 1$, $t > 0$, и (3.84) важи

$$\ln L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) \leq L^*(\beta, \lambda) \text{ за свако } \beta, \lambda > 0,$$

где је једнакост успостављена ако важи да је $\alpha = \alpha(\beta, \lambda)$, где је

$$\begin{aligned} L^*(\beta, \lambda) = & n \ln n - n - n\beta \log r_{n(k)} + \frac{n\lambda}{r_{n(k)}} + \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + \beta r_{i(k)}) \\ & + (\beta - 2) \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i(k)}}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Максимизирањем функције $L^*(\beta, \lambda)$ врши се максимизирање функције $L(\alpha, \beta, \lambda | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})$. Односно, можемо директно да одредимо оцене МВ за параметре (β, λ) , а затим директно и за (α, β, λ) . Као и пре, функција $L^*(\beta, \lambda)$ не зависи од параметра k .

Параметарски простор на коме је функција густине расподеле (3.79) позитивна обележићемо са Θ_0 . На основу првих n k -тих рекорда, дефинишемо његово проширење као $\Theta^* = \{(\alpha, \beta, \lambda) : \alpha > 0, \lambda + \beta r_{i(k)} > 0, i = 1, \dots, n\} = (0, \infty) \times \Theta_0^*$, где је $\Theta_0^* = \{(\beta, \lambda) : \lambda + \beta r_{i(k)} > 0, i = 1, \dots, n\}$, и његов руб са $\partial\Theta^* = \partial\Theta_0^* = \{\beta = \infty\} \cup \{\lambda = \infty\} \cup \{(\beta, \lambda) : \beta > 0, \lambda > -\beta r_{1(k)}\} \cup \{(\beta, \lambda) : \lambda > 0, \beta > -\frac{\lambda}{r_{n(k)}}\}$.

На основу Теорема 3.1, 3.2 и 3.3, довољно је доказати, у циљу потврђивања егзистенције и јединствености оцена МВ за параметре (β, λ) на Θ_0^* , да важи

1. $\lim_{(\beta, \lambda) \rightarrow \partial\Theta_0^*} L^*(\beta, \lambda) = -\infty$,
2. матрица других извода $H(\beta, \lambda)$ је негативно дефинитна при свакој тачки $(\beta, \lambda) \in \Theta_0^*$

Наредна лема детаљније описује понашање функције (3.86) на $\partial\Theta_0^*$.

Лема 3.3 За фиксирано $k \geq 1$ и $n \geq 2$ важи да

- (1) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{\beta > -\frac{\lambda}{r_{n(k)}}} L^*(\beta, \lambda) = -\infty,$
- (2) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup_{\lambda > -\beta r_{1(k)}} L^*(\beta, \lambda) = -\infty,$
- (3) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{\beta = -\lambda/r_{n(k)}} L^*(\beta, \lambda) = -\infty,$
- (4) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup_{\lambda = -\beta r_{1(k)}} L^*(\beta, \lambda) = -\infty.$

Доказ. Слична је процедура као у Леми 3.1.

За фиксирано λ и k , имамо

$$L^*(b, \lambda) < n \ln n - n\beta \ln r_{n(k)} + \frac{n\lambda}{r_{n(k)}} - n + (\beta - 2) \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i(k)}} + n \ln(\lambda + \beta r_{n(k)}),$$

где је

$$g_\lambda(\beta) = n \ln n - n\beta \ln r_{n(k)} + \frac{n\lambda}{r_{n(k)}} - n + (\beta - 2) \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i(k)}} + n \ln(\lambda + \beta r_{n(k)}). \quad (3.87)$$

За фиксирано $n \geq 2$, функција $g_\lambda(\beta)$ достиже свој максимум у тачки β^* , где је

$$\beta^* = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}}} - \frac{\lambda}{r_{n(k)}}.$$

Стога,

$$g_\lambda(\beta^*) = \frac{\lambda}{r_{n(k)}} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{r_{n(k)}}{r_{i(k)}} + 1 - \frac{r_{n(k)}}{r_{i(k)}} \right) + n \ln n - n + \frac{n^2 \ln r_{n(k)}}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}}} - 2 \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)} + n \ln \frac{nr_{n(k)}}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{r_{n(k)}}{r_{i(k)}}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{r_{i(k)}}{r_{n(k)}}} \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)}.$$

Дефинишимо функцију $h(x) = 1 - x + \ln x$, за $x > 1$. Њен први извод $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$ је негативан за $x > 1$, одакле закључујемо да је $h(x) < h(1) = 0$ за $x > 1$. Даље, пошто важи да је $r_{1(k)} < \dots < r_{n(k)}$, имамо да $h\left(\frac{r_{n(k)}}{r_{i(k)}}\right) \leq 0$ за $i = 1, \dots, n$, и

$$\sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{r_{n(k)}}{r_{i(k)}} + 1 - \frac{r_{n(k)}}{r_{i(k)}} \right) < 0.$$

Директно следи да важи $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{\beta > -\frac{\lambda}{r_{n(k)}}} g_{\lambda}(\beta) = -\infty$. Слично важи и за други случај. Као и пре, особине логаритамске функције представљају основу доказа за трећи и четврти случај. Доказ је завршен.

Диференцирањем (3.86) по параметрима β и λ добијамо

$$\frac{\partial L^*}{\partial \beta} = -n \ln r_{n(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{\lambda + \beta r_{i(k)}} + \sum_{i=1}^n \ln r_{i(k)}, \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = \frac{n}{r_{n(k)}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i(k)}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + \beta r_{i(k)}}. \quad (3.89)$$

Матрица других парцијалних извода од L^* је

$$H(\beta, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L^*}{\partial \lambda \partial \beta} & \frac{\partial^2 L^*}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

где је

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}^2}{(\lambda + \beta r_{i(k)})^2}, \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta \partial \lambda} = - \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{(\lambda + \beta r_{i(k)})^2}, \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \lambda^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda + \beta r_{i(k)})^2}. \quad (3.93)$$

Самим тим, доказана је наредна теорема.

Теорема 3.7 *Ако је $\lim_{(\beta, \lambda) \rightarrow \partial \Theta_0^*} L^*(\beta, \lambda) = -\infty$, за $n \geq 2$ и $k \geq 1$, функција (3.86) је константна на рубу $\partial \Theta_0^*$ параметарског простора Θ_0^* .*

Лема 3.4 *Матрица других парцијалних извода је негативно дефинитна за сваку тачку $(\beta, \lambda) \in \Theta^*$.*

Доказ. Да бисмо доказали да је матрица других парцијалних извода негативно дефинитна, наредни услови морају бити испуњени:

1. члан $\frac{\partial^2 L^*}{\partial \beta^2}$ од $H(\beta, \lambda)$ мора бити негативан;
2. $\det H(\beta, \lambda)$ мора да буде позитивна за свако $(\beta, \lambda) \in \Theta^*$.

На основу (3.91), први услов је испуњен. Како важи да је

$$\det H(\beta, \lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda + \beta r_{i(k)})^2} \sum_{j=1}^n \frac{r_{j(k)}^2}{(\lambda + \beta r_{j(k)})^2} - \sum_{i=1}^n \frac{r_{i(k)}}{(\lambda + \beta r_{i(k)})^2} \sum_{j=1}^n \frac{r_{j(k)}}{(\lambda + \beta r_{j(k)})^2} > 0,$$

слиеди да је и други услов испуњен. Овај резултат се, такође, могао добити и на други начин. Дефинишимо случајну величину Z са њеним законом расподеле $p_j = P\{Z = r_{j(k)}\}$, $j = 1, \dots, n$, где је $p_j = (\lambda + \beta r_{i(k)})^{-2} / \sum_{i=1}^n (\lambda + \beta r_{i(k)})^{-2}$. Случајна величина Z је недегенерисана. Као последица тога важи да је $D(Z) > 0$. Самим тим је евидентно да је $H(\beta, \lambda)$ позитивна за све тачке (b, λ) . Тиме је доказ леме завршен.

Теорема 3.7 и Лема 3.4 доказују наредну теорему.

Теорема 3.8 *Оцене MV параметра α , β и λ , на основу k -тих рекорда, у популацији са функцијом расподеле обележја (3.78) постоје и јединствене су на параметарском простору $\Theta^* = \{(\alpha, \beta, \lambda) : \alpha > 0, \lambda + \beta r_{i(k)} > 0, i = 1, \dots, n\}$.*

Пример са симулираним подацима

У овој секцији генерисаћемо прост случајан узорак величине 20 из расподеле (3.79) са параметрима $(\alpha, \beta, \lambda) = (1, 1, 1)$. Представљен је у Табели 3.3.

Табела 3.3: Генерисан узорак из $PYEW(1, 1, 1)$.

1.6140	1.4053	0.5791	1.1652	0.4257	1.2864	1.0063	2.0966	3
1.0869	4.6187	0.5521	1.3429	3.3394	2.1991	2.9478	1.6469	1.6787
1.0030	1.4239							

Издвојени k -ти рекорди из генерисаног узорка су:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$R_{i(1)}$	1.6140	2.0966	3	4.6187				
$R_{i(2)}$	1.4053	1.6140	2.0966	3	3.3394			
$R_{i(3)}$	0.5791	1.1652	1.2864	1.4053	1.6140	2.0966	3	
$R_{i(4)}$	0.5791	1.1652	1.2864	1.4053	1.6140	2.0966	2.1991	2.9478

У наредном делу размотрићемо случајеве када је $k = 1$ и $k = 2$ и обележићемо их као случајеве I и II, редом.

- **Случај I**

Рестриктивном оптимизацијом на Θ_0 , евалуације оцена МВ $(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (0, 5.1259)$ са одговарајућим максимумом -3.6131 од (3.86) су истакнуте. Међутим, у овој тачки систем вероватносних једначина (2.86) није коректно дефинисан. Стога, проширивањем параметарског простора на Θ^* добија се нова тачка $(\hat{\beta}_1, \hat{\lambda}_1) = (-0.3016, 6.0042)$ у којој функција (3.86) достиже максимум који износи -3.6036 . Пошто су параметри (β, λ) модификоване Вејбулове расподеле дефинисани у првом квадранту параметарског простора $\beta - \lambda$, валидност модела се губи. Самим тим, прихватају се вредности оцена МВ

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (9.1014, 0, 5.1259)$$

и двопараметарски модел $F(x) = 1 - e^{-\alpha e^{-\frac{\lambda}{x}}}$ као допустив модел.

- **Случај II**

Слично као у претходном случају, прихватамо оцене

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (9.7808, 0, 5.3005)$$

као одговарајуће и двопараметарски модел $F(x) = 1 - e^{-\alpha e^{-\frac{\lambda}{x}}}$ као допустиви модел. Вредност функције (3.86) при овим оценама параметара је -1.3429 .

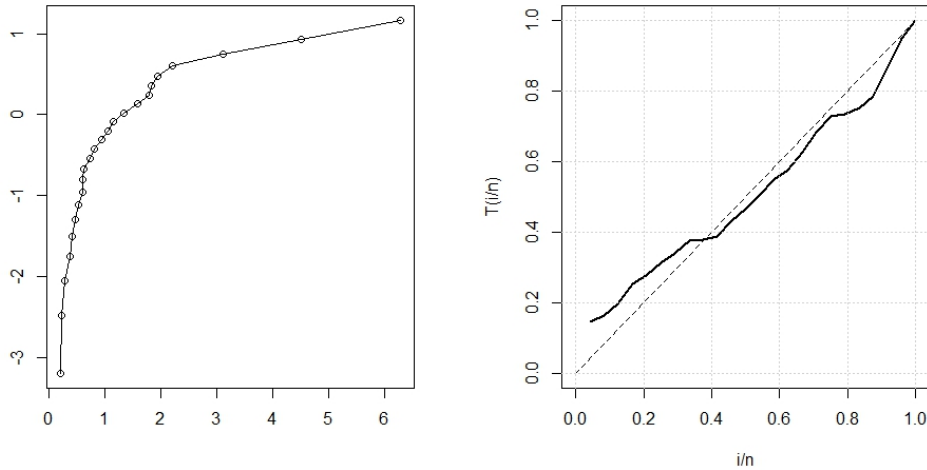
Пример са реалним подацима

Узорак са реалним подацима се састоји од 24 јединице које представљају временске интервале које су механичке компоненте неког система издржале под стресом јачине 32 (в. [81], стр. 574). Подаци су представљени у Табели 3.4.

Табела 3.4: Дужина живота механичких компоненти под стресом јачине 32.0.

1144	231	523	474	4510	3107	815	6297	1580
605	1786	206	1943	935	283	1336	727	370
1056	413	619	2214	1826	597			

TTT и WPP графици (в. Сл. 3.5) на основу узорка имлицирају да се $PYEW$ расподела може сматрати допустивим моделом (в. [101]).



Слика 3.5: WPP и TTT графици.

Уколико оценимо параметре расподеле ММВ на основу комплетног узорка, класичан Колмогоров-Смирнов (К-С) тест сагласности није примењив. Применом Монте Карло метода, у стању смо да оценимо p -вредност и вредност К-С тест статистике у случају када имамо оцењене параметре расподеле на основу комплетног узорка. Тиме смо применили тзв. кориговани К-С тест сагласности (в. [139]). У Табели 3.5 је представљена оцењена p -вредност и вредност кориговане К-С тест статистике. На основу ових резултата можемо да закључимо да $PYEW$ модел представља допустив модел за узорак из Табеле 3.4.

Табела 3.5: Оцене параметара, оцењена вредност кориговане К-С тест статистике и p -вредност.

$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$	К-С	p -вредност
$(0.0128, 0.6671, 498.1398)$	0.0757	0.9973

Издвојићемо k -те рекорде из овог узорка.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{i(1)}$	1144	4510	6297						
$R_{i(2)}$	231	523	1144	3107	4510				
$R_{i(3)}$	231	474	523	1144	3107				
$R_{i(4)}$	231	474	523	815	1144	1580	1786	1943	2214

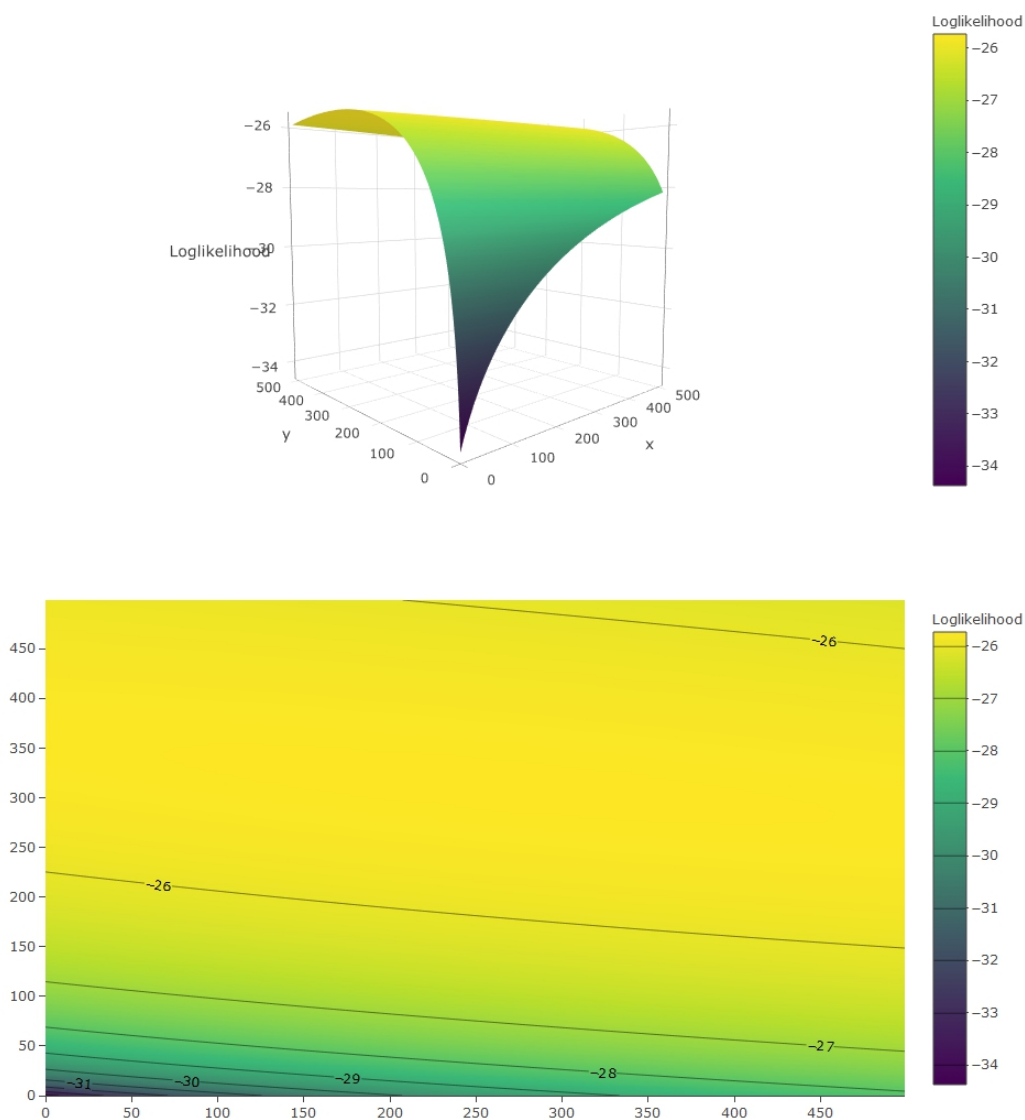
Размотрићемо случајеве када је $k = 1$ и $k = 2$, и обележићемо их као случајеве I и II, редом.

- **Случај I**

Приликом рестрикције оптимизације на простор Θ_0 , вредност оцена МВ параметара износи $(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (1.2552, 565.8382)$. Вредност оцена МВ за параметре је

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (0.0001, 1.2552, 565.8382)$$

са максимумом -25.7299 од (3.86). Понашање функције (3.86) на области $[0, 2] \times [100, 900]$ је представљено графички (в. Сл. 3.6). Вођени тиме, јединственост оцена је потврђена.



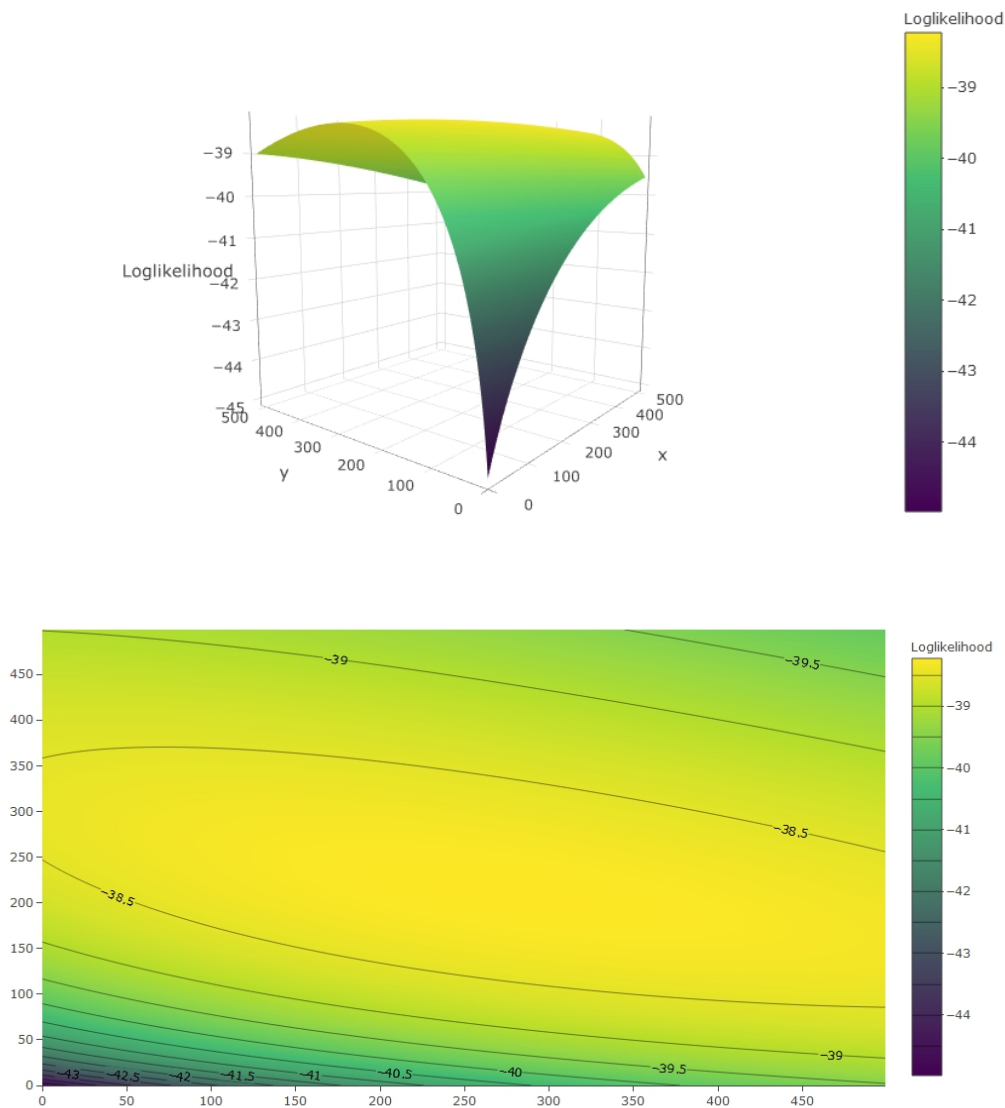
Слика 3.6: Површина и контура за случај I.

- **Случај II**

У овом случају, вредности оцена МВ параметара износе

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (0.0763, 0.423, 319.6865)$$

и достигнуте су при вредности -38.2288 од (3.86). Оне су јединствене, што је потврђено графички на области $[0, 1] \times [100, 500]$ (в. Сл. 3.7).



Слика 3.7: Површина и контура за случај II.

Глава 4

Рекурентне везе рекордних момената

4.1 Увод

У оквиру теорије рекорда специјална пажња је посвећена рекурентним везама рекордних момената расподела. Њихов значај се огледа, пре свега, у одређивању момената вишег степена на бази првих неколико рекордних момената. Ови резултати су веома погодни за одређивање вредности оцена параметара расподела методом најбољих непристрасних линеарних (надаље ННЛ) оцена.

Нека су R_1, R_2, \dots, R_n , $n \geq 1$, горњи рекорди из апсолутно непрекидне расподеле F . Моменти ових рекорда и моменти њихових производа су дати са

$$\mu_n^{(r)} = E(R_n^r) = \int_0^\infty x^r f_{R_n}(x) dx, \quad (4.1)$$

и

$$\mu_{m,n}^{(r,s)} = E(R_m^r R_n^s) = \int_0^\infty \int_0^y x^r y^s f_{R_m, R_n}(x, y) dx dy, \quad 0 < x < y < \infty, \quad (4.2)$$

за $1 \leq m < n$, где су $f_{R_n}(\cdot)$ и $f_{R_m, R_n}(\cdot, \cdot)$, редом, дати са (2.8) и (2.7).

Рекурентне везе су засноване на функционалној повезаности функције расподеле и функције густине расподеле. У неретком броју случајева, рекурентне везе момената рекорда расподеле представљају базичну основу при доказивању карактеризација расподела. Постоји велики број радова који су се бавили рекордним везама момената рекорда различитих расподела.

Пример 16 За стандардну нормалну расподелу важи (в. [25])

$$\mu_{n-1,n}^{(1,1)} = \mu_n^{(2)} - 1, \text{ за } n \geq 2.$$

За додатне примере, за Паретову и Гумбелову расподелу видети [24] и [28], редом.

У наредном одељку биће представљени резултати аутора на овом пољу. Они се могу пронаћи у [137].

4.2 Рекордни моменти из Пенг-Јан екстензије Вејбулове расподеле

Директно се може уочити да постоји функционална релација

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lambda + \beta x}{x^2} \{-\log(1 - F(x))\}. \quad (4.3)$$

између функције густине расподеле (3.79) и функције расподеле (3.78).

У наредне две теореме представимо рекурентне везе за моменте горњих рекорда из ове расподеле.

Теорема 4.1 За $r \geq 2$ и $n \geq 1$, моменти горњих рекорда из расподеле (3.78) задовољавају рекурентну везу

$$\mu_n^{(r)} = \frac{r}{r + \beta n} \left[\frac{\lambda n}{r - 1} \left(\mu_{n+1}^{(r-1)} - \mu_n^{(r-1)} \right) \right] + \frac{\beta n}{r + \beta n} \mu_{n+1}^{(r)}. \quad (4.4)$$

Доказ.

На основу (4.3) и (4.1), имамо

$$\mu_n^{(r)} = \frac{1}{\Gamma(n)} (\lambda I_{r-2} + \beta I_{r-1}), \quad (4.5)$$

где је I_r облика (в. [126])

$$I_r = \int_0^\infty x^r (-\ln(1 - F(x)))^n (1 - F(x)) dx. \quad (4.6)$$

Стога, имамо

$$\mu_n^{(r)} = \frac{\lambda n}{r-1} \left(\mu_{n+1}^{(r-1)} - \mu_n^{(r-1)} \right) + \frac{\beta n}{r} \left(\mu_{n+1}^{(r)} - \mu_n^{(r)} \right). \quad (4.7)$$

Тиме је доказ компетиран.

Последица 4.1 *Заменом $\lambda = 0$ у (3.78), добијамо рекурентне везе момената горњих рекорда из двопараметарске Вејбулове расподеле са параметрима α и β као*

$$\mu_n^{(r)} = \frac{\beta n}{r + \beta n} \mu_{n+1}^{(r)}, \quad (4.8)$$

за $r \geq 2$ и $n \geq 1$.

Последица 4.2 *Заменом $\lambda = 0$ и $\beta = 2$ у (3.78), добијамо рекурентне везе момената горњих рекорда из Рејлијеве расподеле као*

$$\mu_n^{(r)} = \frac{2n}{r + 2n} \mu_{n+1}^{(r)}, \quad (4.9)$$

за $r \geq 2$ и $n \geq 1$.

Теорема 4.2 *За $m \geq 1$, $r \geq 2$ и $s \geq 1$, моменти производа горњих рекорда из (3.78) задовољавају следеће рекурентне везе*

$$\mu_{m,m+1}^{(r,s)} = \frac{\lambda m}{r-1} \left(\mu_{m+1}^{(s+r-1)} - \mu_{m,m+1}^{(r-1,s)} \right) + \frac{\beta m}{r} \left(\mu_{m+1}^{(s+r)} - \mu_{m,m+1}^{(r,s)} \right), \quad (4.10)$$

и за $1 \leq m \leq n-1$

$$\mu_{m,n}^{(r,s)} = \frac{\lambda m}{r-1} \left(\mu_{m+1,n}^{(r-1,s)} - \mu_{m,n}^{(r-1,s)} \right) + \frac{\beta m}{r} \left(\mu_{m+1,n}^{(r,s)} - \mu_{m,n}^{(r,s)} \right). \quad (4.11)$$

Доказ. На основу (4.2), видимо да се моменти производа горњих рекорда из (3.78) могу представити као

$$\mu_{m,n}^{(r,s)} = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n-m)} \int_0^y y^s f(y) I(y) dy, \quad (4.12)$$

где је

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^y x^r (-\ln(1-F(x)))^{m-1} \\ &\quad \times (-\ln(1-F(y)) + \ln(1-F(x)))^{n-m-1} \frac{f(x)}{1-F(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Размотримо прво случај када је $n = m + 1$. Једнакост (4.13) се може представити у облику

$$I(y) = \lambda T_{r-2} + \beta T_{r-1}, \quad (4.14)$$

где је T_r облика (в. [126])

$$T_r = \frac{y^{r+1}}{r+1} (-\ln(1 - F(x)))^m - \frac{m}{r+1} \int_0^y x^{r+1} (-\ln(1 - F(x)))^{m-1} \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx. \quad (4.15)$$

Користећи (4.14), (4.15) и (4.12) добијамо тражени резултат.

Наредни случај је $1 \leq m \leq n - 1$. Овде важи да се (4.13) може представити као

$$I(y) = \lambda Q_{r-2} + \beta Q_{r-1}, \quad (4.16)$$

где је Q_r облика (в. [126])

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{n - m - 1}{r + 1} \int_0^y x^{r+1} (-\ln(1 - F(x)))^m \\ &\quad \times (-\ln(1 - F(y)) + \ln(1 - F(x)))^{n-m-2} \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx \\ &\quad - \frac{m}{r + 1} \int_0^y x^{r+1} (-\ln(1 - F(x)))^{m-1} \\ &\quad \times (-\ln(1 - F(y)) + \ln(1 - F(x)))^{n-m-1} \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Као и пре, користећи (6.28), (6.27) и (4.12) добијамо тражени резултат. Тиме је доказ завршен.

Последица 4.3 *За $r \geq 2$, заменом $\lambda = 0$ у (4.10) и (4.11), добијамо рекурентне везе производа момената горњих рекорда из двопараметарске Вејбулове расподеле са параметрима α и β као*

$$\mu_{m,m+1}^{(r,s)} = \frac{\beta m}{r} \left(\mu_{m+1}^{(s+r)} - \mu_{m,m+1}^{(r,s)} \right), \quad (4.18)$$

док за $1 \leq m \leq n - 1$ и $s \geq 1$, имамо

$$\mu_{m,n}^{(r,s)} = \frac{\beta m}{r} \left(\mu_{m+1,n}^{(r,s)} - \mu_{m,n}^{(r,s)} \right). \quad (4.19)$$

Последица 4.4 За $r \geq 2$, заменом $\lambda = 0$ и $\beta = 2$ у (4.10) и (4.11), добијамо рекурентне везе производа момената горњих рекорда из Рејлијеве расподеле као

$$\mu_{m,m+1}^{(r,s)} = \frac{2m}{r} \left(\mu_{m+1}^{(s+r)} - \mu_{m,m+1}^{(r,s)} \right), \quad (4.20)$$

док за $1 \leq m \leq n-1$ и $s \geq 1$, имамо

$$\mu_{m,n}^{(r,s)} = \frac{2m}{r} \left(\mu_{m+1,n}^{(r,s)} - \mu_{m,n}^{(r,s)} \right). \quad (4.21)$$

4.3 Примена на ННЛ оцене

Наредне дефиниције се могу пронаћи у [19].

Дефиниција 4.1 Нека су R_1, R_2, \dots, R_n рекорди из допустиве фамилије расподела облика $F(x/\sigma)$ и густином $\frac{1}{\sigma}f(x/\sigma)$. Уколико се оцена параметра σ може представити у облику

$$\sigma^* = \frac{\mu^T \Sigma^{-1}}{\mu^T \Sigma^{-1} \mu} \tilde{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n a_i R_i, \quad (4.22)$$

где је $\tilde{\mathbf{R}} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$, $\mu = (\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \dots, \mu_n^{(1)})$ и Σ^{-1} инверз коваријационе матрице

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

онда се оцена σ^* сматра најбољом непристрасном линеарном (ННЛ) оценом параметра σ . Дисперзија оцене σ^* дата је са

$$D(\sigma^*) = \frac{\sigma^2}{\mu^T \Sigma^{-1} \mu}. \quad (4.23)$$

Дефиниција 4.2 Нека су R_1, R_2, \dots, R_n рекорди из допустиве фамилије расподела облика $F(\frac{x-\mu}{\sigma})$ и густином $\frac{1}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma})$. ННЛ оцене за параметре μ и σ , редом, дате су са

$$\mu^* = \frac{\mu^T \Sigma^{-1} \mu \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} - \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \mu^T \Sigma^{-1}}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} \tilde{\mathbf{R}}, \quad (4.24)$$

$$\sigma^* = \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \mu^T \Sigma^{-1} - \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu \mathbf{1}^T \Sigma^{-1}}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} \tilde{\mathbf{R}}, \quad (4.25)$$

где је $\mathbf{1}$ вектор димензије n са јединицама, $\tilde{\mathbf{R}}$ вектор горњих рекорда из расподеле F и Σ одговарајућа коваријациона матрица горњих рекорда. Дисперзија оцена μ^* и σ^* , редом, су

$$D(\mu^*) = \frac{\sigma^2(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2},$$

$$D(\sigma^*) = \frac{\sigma^2(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2},$$

и њихова коваријација

$$Cov(\mu^*, \sigma^*) = -\frac{\sigma^2(\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2}.$$

Неки примери ННЛ оцена се могу пронаћи у [127] и [137]. Штавише, линеарна комбинација ННЛ оцена параметара са минималном средњеквадратном грешком се у литератури називају најбоље линеарне инваријантне (НЛИ) оцене (в. [19]).

Као што је наглашено пре, рекурентне везе могу да се искористе при евалуацији ННЛ оцена. На примеру ћемо илустровати њихову примену при евалуацији ННЛ оцена за непознати параметар σ из функције густине расподеле

$$f(x; \sigma, \beta, \lambda) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\sigma} + \beta \frac{x}{\sigma} \right) \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\beta-2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma} \frac{1}{\sigma} - \left(\frac{x}{\sigma} \right)^\beta} e^{-\frac{\lambda}{\sigma} \frac{1}{\sigma}}, \quad (4.26)$$

где је $x > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 0$ и $\lambda \geq 0$.

Узмимо у обзир генерисани узорак величине 20 из расподеле (4.26) са параметрима $(\sigma, \beta, \lambda) = (2, 1, 1)$. Представљен је у Табели 4.1.

Табела 4.1: Генерисани узорак из расподеле (4.26) са параметрима $(\sigma, \beta, \lambda) = (2, 1, 1)$.

2.9232	2.2642	1.5951	1.4524	4.3710	6.6785	1.0097	2.7564	1.5543	0.8859
2.2928	5.6076	4.3055	2.1090	5.2321	2.0422	1.5649	4.6087	1.0578	1.8453

Горњи рекорди из генерисаног узорака су: 2.9232, 4.371 и 6.6785.

Даље, у овом случају имамо да је $\mu = (2.7697, 4.8726, 6.9197)$ и

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.4673 & 4.3339 & 4.2948 \\ 4.3339 & 8.3382 & 8.2494 \\ 4.2948 & 8.2494 & 12.3038 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Користећи (4.22), можемо да одредимо ННЛ оцену за σ као

$$\sigma^* = 0.0268 \cdot 2.9232 + 0.0072 \cdot 4.371 + 0.1287 \cdot 6.6785 = 0.9693, \quad (4.28)$$

са дисперзијом $D(\sigma^*) = 4/3.9357 = 1.0163$.

Пожељно је напоменути и то да се прецизност резултата (4.28) може оправдати слабом прецизношћу оцена параметара базираних на рекордима.

Додатно, моменти рекордних вредности из (3.78) се могу представити у и степеном развоју. Наредна лема нам даје теоријски оквир за овакав резултат (в. [137]).

Лема 4.1 *Нека је $0 < t < 1$ и $t_0 \in [0, 1]$. Инверзна функција функције $G(x) = \alpha x^\beta e^{-\lambda/x}$ може да се представи у степеном развоју*

$$G^{-1}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t - t_0)^i \quad (4.29)$$

за параметре $\alpha > 0, \beta > 0$ и $\lambda \geq 0$.

Доказ. Доказ директно следи из Тејлоровог развоја инверзне функције аналитичких функција (тзв. Бурман-Лагранжевог развоја (енг. *Bürmann-Lagrange expansion*)) и из особина Ламбертове функције (в. нпр. [125] и [43]).

Корисна је и наредна лема.

Лема 4.2 *(Градштејн и Рајзик, 2014, в. [55])*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (4.30)$$

где је

$$c_0 = a_0^n, \quad c_m = \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^m (kn - m + k) a_k c_{m-k},$$

за $m \geq 1$ и $n \in \mathbf{N}$.

Теорема 4.3 *Нека случајна величина X има расподелу (3.78). Нека је $\{c_k\}$ низ дат са $c_0 = a_0^l$ и $c_i = (i a_0)^{-1} \sum_{j=1}^i (lj - i + j) a_j c_{i-j}$ за $i \geq 1$, где је низ $\{a_k\}$ дат из презентације (4.29). Тада је l -ти моменат горњег рекорда R_m дат са*

$$\mu_m^{(l)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-t_0)^{i-j} \frac{\Gamma(m+j)}{\Gamma(m)}. \quad (4.31)$$

Доказ. Користећи (4.1), l -ти моменат од R_m је дат са

$$\begin{aligned}\mu_m^{(l)} &= \int_0^\infty x^l \frac{\{-\log(1 - F(x; \alpha, \beta, \lambda))\}^{m-1} f(x)}{\Gamma(m)} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty x^l \{\alpha x^\beta e^{-\frac{\lambda}{x}}\}^{m-1} \alpha(\lambda + \beta x) x^{\beta-2} e^{-\frac{\lambda}{x} - \alpha x^\beta e^{-\frac{\lambda}{x}}} dx.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Трансформацијом $t = \alpha x^\beta e^{-\frac{\lambda}{x}}$, добијамо

$$\mu_m^{(l)} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \{G^{-1}(t)\}^l t^{m-1} e^{-t} dt. \quad (4.33)$$

Користећи формулу биномну формулу и Леме 4.1 и 4.2 добијамо

$$\begin{aligned}\mu_m^{(l)} &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \{G^{-1}(t)\}^l t^{m-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=0}^\infty a_i (t - t_0)^i \right\}^l t^{m-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \sum_{i=0}^\infty c_i (t - t_0)^i t^{m-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \sum_{i=0}^\infty c_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-t_0)^{i-j} t^j t^{m-1} e^{-t} dt \\ &= \sum_{i=0}^\infty c_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-t_0)^{i-j} \frac{\Gamma(m+j)}{\Gamma(m)}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Тиме је доказ завршен.

Глава 5

Бајесова оцена статистика поретка на основу рекорда

5.1 Увод

При оцењивању непознатих параметра расподеле у Глави 3 смо сматрали да су параметри који се оцењују константе из адекватног допустивног скупа вредности. Овај метод се сматра класичним методом оцењивања непознатих параметара. За разлику од класичног метода, Бајесов метод оцењивања се заснива на томе да се непознати параметар расподеле сматра реализацијом случајне величине са расподелом $\pi(\cdot)$, која се зове априорна расподела. Априорне расподеле нису познате истраживачима и њихов избор се заснива искључиво на основу претходног искуства истраживача и информација које истраживач поседује. Након реализације експеримента, расподела непознатог параметра расподеле се дефинише као апостериорна расподела и она представља скуп априорних сазнања о параметру и информација из реализованог експеримента (в. [84]).

Предикција будућих догађаја на основу датих информација се сматра једном од битнијих примена статистике. Бајесов предиктивни метод се заснива на проналажењу апостериорног закона расподеле за будући догађај. Постоје две форме предикције које су интересантне истраживачима и које се издвајају у литератури. Уколико се предикција врши за будући догађај који потиче из истог скупа догађаја и у корелацији је са њима, онда се сматра да је у питању предикција из истог скупа догађаја (енг. *one-sample prediction problem*), док у другом случају догађај за који се врши предикција потиче из другог независног скупа догађаја (енг. *two-sample prediction problem*) (в. нпр. [108]). Предикција будућих статистика поретка на основу статистика поретка, као и предикција будућих рекорда на основу рекорда, у ове две форме су окупирали велику пажњу истраживача о чему сведочи и велики број радова на ову тему. Радови [106], [108], [11], [85], [80], [7] и [9] су само неки од њих.

Бајесове оцене статистика поретка из будућег узорка на основу независних k -тих рекорда су интересантне и са теоријског и са практичног аспекта. У пионирском раду [10] пронађена је оцена уређених статистика из будућег узорка величине m на основу k -тих рекорда на примеру експоненцијалне расподеле са једним параметром $E(\theta)$. Она је облика

$$\hat{Y}_{j:m} = \frac{(b + kR_{n(k)})^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j-1}{i} \frac{1}{(m-j+i+1)^2},$$

где је $k \geq 1$, $R_{n(k)}$ горњи n -ти k -ти рекорд из $E(\theta)$, a и b позитивни параметри априорне расподеле и $\hat{Y}_{j:m}$ оцена j -те статистике поретка у узорку обима m за $m \geq 1$ и $1 \leq j \leq m$.

Међутим, опште је познато да једнопараметарски експоненцијални модел успева да моделује веома узак опсег података. Самим тим, интересантни су вероватносни модели који имају шире перформансе моделовања као и оцене статистика поретка на основу рекорда за дате моделе. Наредни резултати представљају допринос аутора на ову тему и неки од њих се могу пронаћи у [136].

5.2 Генерализована експоненцијална расподела

Интересантан случај фамилије расподеле која има шире перформансе моделовања од експоненцијалне расподеле, а задржава неке пожељне особине као што су: конкавна густина, прост експлицитан облик функције расподеле и функције густине расподеле, монотono понашање хазардне функције, лака имплементација процедуре за генерисање случајних бројева итд., је случај Генерализоване експоненцијалне расподеле са једним параметром облика θ (специјални случај расподеле (3.33) када је $\alpha = \theta$ и $\lambda = 1$). Њена функција густине расподеле и функција расподеле су дате са

$$f(x; \theta) = \theta e^{-x} (1 - e^{-x})^{\theta-1}, \quad x > 0, \quad (5.1)$$

$$F(x; \theta) = (1 - e^{-x})^\theta, \quad x > 0, \quad (5.2)$$

редом. Обележимо ову расподелу са $GE(\theta)$. Специјално, можемо да приметимо да је GE расподела уопштење стандардне експоненцијалне расподеле. Веза између експоненцијалне расподеле са једним параметром $E(\theta)$ и $GE(\theta)$ је успостављена монотоним трансформацијом $\tau(\cdot) = -\log(1 - e^{-\cdot})$.

Нека даље имамо реализацију првих n k -тих доњих рекорда $R_{1(k)} = r_{1(k)}, R_{2(k)} = r_{2(k)}, \dots, R_{n(k)} = r_{n(k)}$ из $GE(\theta)$. Користећи (5.1), (5.2) и (2.6), налазимо да је функција

максималне веродостојности за θ , при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, дата са

$$L(\theta|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = k^n \theta^n u(\mathbf{r}(\mathbf{k})) e^{-\theta k \tau(r_{n(k)})}, \quad r_{1(k)} > r_{2(k)} > \dots > r_{n(k)} > 0, \quad (5.3)$$

где је $u(\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \prod_{i=1}^n e^{-r_{i(k)}} / (1 - e^{-r_{i(k)}})$.

Даље, користећи Бајесов приступ, сматраћемо да је θ реализација случајне величине са Гама расподелом и параметрима $a, b > 0$, тј.

$$\pi_{(a,b)}(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}, \quad \theta > 0. \quad (5.4)$$

У већини случајева, ови параметри се одређују на основу реализација претходних експеримената и на основу информација које истраживач поседује. Самим тим, апостериорна расподела за θ , при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, је Гама расподела са параметрима $n+a$ и $b+k\tau(r_{n(k)})$, тј.

$$\pi_{(a,b)}(\theta|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))}, \quad \theta > 0. \quad (5.5)$$

Познато је да Бајесова оцена за θ , при квадратној функцији губитка $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$, представља очекивану вредност случајне величине са расподелом (5.5) (в. [67])

$$\hat{\theta}_{BS} = \frac{n+a}{b + k\tau(r_{n(k)})}. \quad (5.6)$$

Маргинална функција густине расподеле за j -ту статистику поретка из узорка обима m , где је $m \geq 1$, са расподелом ГЕ(θ) је дата са (в. [105])

$$f_{Y_{j:m}}(y|\theta) = \frac{1}{B(j; m-j+1)} \theta e^{-y} (1 - e^{-y})^{\theta j - 1} (1 - (1 - e^{-y})^\theta)^{m-j}, \quad y > 0. \quad (5.7)$$

Бајесова апостериорна густина за X , при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, се добија интеграцијом по θ апостериорне густине (5.5) и функције густине (5.1) (в. [19])

$$\begin{aligned} f_{X|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})}(x|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) &= \int_{\theta} f_X(x|\theta) \pi_{(a,b)}(\theta|\mathbf{r}(\mathbf{k})) d\theta \\ &= \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \int_0^{\infty} \theta^{n+a} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)})+\tau(x))} d\theta \\ &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \frac{n+a}{b + k\tau(r_{n(k)})} \left(1 + \frac{\tau(x)}{b + k\tau(r_{n(k)})} \right)^{-n-a-1}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Слично, Бајесова апостериорна густина за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, се добија интеграцијом по θ апостериорне густине (5.5) и функције густине (5.7), односно

$$\begin{aligned}
f_{Y_{j:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) &= \int_{\theta} f_{Y_{j:m}}(y|\theta)\pi_{(a,b)}(\theta|\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) d\theta \\
&= \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} (-1)^{m-j-l} \int_0^{\infty} \theta^{n+a} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)})+(m-l)\tau(y))} d\theta \\
&= \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}(n+a)}{B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} \\
&\quad \times \frac{(-1)^{m-j-l}}{(b + k\tau(r_{n(k)}) + (m-l)\tau(y))^{n+a+1}} \\
&= \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} \frac{(n+a)}{(b + k\tau(r_{n(k)}))B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} (-1)^{m-j-l} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{(m-l)\tau(y)}{b + k\tau(r_{n(k)})}\right)^{-n-a-1}, \quad y > 0. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Специјални случајеви $j = 1$ и $j = m$ одговарају редом апостериорним густинама минимума и максимума статистика поретка

$$f_{Y_{1:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} \frac{m(n+a)}{(b + k\tau(r_{n(k)}))} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} (-1)^{m-1-l} \tag{5.10}$$

$$\times \left(1 + \frac{(m-l)\tau(y)}{b + k\tau(r_{n(k)})}\right)^{-n-a-1}, \quad y > 0, \tag{5.11}$$

и

$$f_{Y_{m:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \frac{me^{-y}}{1 - e^{-y}} \frac{n+a}{b + k\tau(r_{n(k)})} \left(1 + \frac{m\tau(y)}{b + k\tau(r_{n(k)})}\right)^{-n-a-1}, \quad y > 0, \tag{5.12}$$

из будућег узорка величине m , при $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$.

Даље, можемо да конструишемо $100(1 - \alpha)\%$ Бајесов интервал прекривања за $Y_{j:m}$, при реализацији $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, за $1 \leq j \leq m$. Уколико је од интереса одредити двострани Бајесов интервал прекривања, потребно је наћи решења система једначина

$$F_{Y_{j:m}}(L|\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad F_{Y_{j:m}}(U|\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \tag{5.13}$$

где су L и U доња и горња граница интервала, редом, и где је $F_{Y_{j:m}}(x|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = P\{Y_{j:m} \leq x|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})\}$ апостериорна расподела за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, облика

$$F_{Y_{j:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \frac{1}{B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} \frac{(-1)^{m-j-l}}{m-l} \left(1 + \frac{(m-l)\tau(y)}{b+k\tau(r_{n(k)})}\right)^{-n-a}, \quad (5.14)$$

за $y > 0$. Услед компликованог облика од (5.14), решења система (5.13) се могу пронаћи само нумеричким путем.

5.2.1 Случај $j = m$ (максимум будућег узорка)

У оквиру овог специјалног случаја, (5.14) се своди на

$$F_{Y_{m:m}}(z|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \left(1 + \frac{m\tau(z)}{b+k\tau(r_{n(k)})}\right)^{-n-a}, \quad z > 0, \quad (5.15)$$

на основу чега можемо изразити доњи α квантил $\xi_{Y_{m:m},\alpha}(a,b)$ експлицитно као

$$\xi_{Y_{m:m},\alpha}(a,b) = -\log \left(1 - \exp \left\{ -\frac{b+k\tau(r_{n(k)})}{m} \left(\frac{1}{n+a\sqrt{\alpha}} - 1 \right) \right\} \right) \quad (5.16)$$

$$= \tau \left(\frac{b+k\tau(r_{n(k)})}{m} \left(\frac{1}{n+a\sqrt{\alpha}} - 1 \right) \right). \quad (5.17)$$

Стога, разумљиво је посматрати вредност $\xi_{Y_{m:m},1-\alpha}$ као горњу границу јностраног доњег $100(1-\alpha)\%$ Бајесовог интервала прекривања за $Y_{m:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$.

Такође, можемо директно да одредимо $100(1-\alpha)\%$ Бајесов двострани интервал прекривања за максимум будућег узорка величине m користећи

$$\left[\tau \left(\frac{b+k\tau(R_{n(k)})}{m} \left(\frac{1}{n+a\sqrt{\alpha/2}} - 1 \right) \right), \tau \left(\frac{b+k\tau(R_{n(k)})}{m} \left(\frac{1}{n+a\sqrt{1-\alpha/2}} - 1 \right) \right) \right]. \quad (5.18)$$

5.2.2 Бајесове оцене статистика поретка на основу рекорда

У наставку, представићемо у експлицитном облику Бајесову оцену за статистике поретка из будућег узорка обима m на основу k -тих доњих рекорда, у односу на квадратну функцију губитка. Важи да је

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}_{j:m} &= \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty y\theta^{n+a} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} e^{-y} \\
&\times (1 - e^{-y})^{\theta j-1} (1 - (1 - e^{-y})^\theta)^{m-j} dy d\theta \\
&= \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} (-1)^{m-j-l} \int_0^\infty \theta^{n+a} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} \\
&\times \int_0^\infty ye^{-y} (1 - e^{-y})^{\theta(m-l)-1} dy d\theta \\
&= \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} (-1)^{m-j-l} \int_0^\infty \theta^{n+a} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} \\
&\times \int_0^\infty ye^{-y} (1 - e^{-y})^{\theta(m-l)-1} dy d\theta \\
&= \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} (-1)^{m-j-l} \int_0^\infty \theta^{n+a} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} \\
&\times \int_0^1 (-\log(1-t)) t^{\theta(m-l)-1} dt d\theta \\
&= \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} \frac{(-1)^{m-j-l}}{m-l} \int_0^\infty \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} \\
&\times (\psi(1 + \theta(m-l)) - \psi(1)) d\theta. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

где је $\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ диγάма функција.

За случајеве $j = 1$ и $j = m$ имамо

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}_{1:m} &= \frac{m(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \frac{(-1)^{m-1-l}}{m-l} \int_0^\infty \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} \\
&\times (\psi(1 + \theta(m-l)) - \psi(1)) d\theta
\end{aligned}$$

и

$$\widehat{Y}_{m:m} = \frac{(b + k\tau(r_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \int_0^\infty \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+k\tau(r_{n(k)}))} (\psi(1 + m\theta) - \psi(1)) d\theta,$$

редом.

Обележимо са $A(m, j, n, a, b, k, R_{n(k)})$ израз

$$A(m, j, n, a, b, k, R_{n(k)}) = \quad (5.20)$$

$$\frac{(b + k\tau(R_{n(k)}))^{n+a}}{\Gamma(n+a)B(j; m-j+1)} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} \frac{(-1)^{m-j-l}}{m-l} \int_0^\infty \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+k\tau(R_{n(k)}))} \\ \times (\psi(1 + \theta(m-l)) - \psi(1)) d\theta. \quad (5.21)$$

Даље, можемо да одредимо средњеквадратну грешку оцене $\widehat{Y}_{j:m}$, за $1 \leq j \leq m$, као

$$\begin{aligned} MSE(\widehat{Y}_{j:m}) &= E(\widehat{Y}_{j:m} - Y_{j:m})^2 \\ &= E(A(m, j, n, a, b, k, R_{n(k)})^2 - 2A(m, j, n, a, b, k, R_{n(k)})Y_{j:m} + Y_{j:m}^2) \\ &= E(A(m, j, n, a, b, k, R_{n(k)})^2) - 2E(A(m, j, n, a, b, k, R_{n(k)}))E(Y_{j:m}) \\ &\quad + E(Y_{j:m}^2). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Вредност $MSE(\widehat{Y}_{j:m})$ се може једино оценити нумеричким путем.

Напомена 1. Применом апсолутне функције губитка, Бајесова оцена максимума будућег узорка величине m , при $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, је медијана апостериорне густине (5.9), односно

$$\widehat{Y}_{m:m} = \tau \left(\frac{b + k\tau(R_{n(k)})}{m} (2^{\frac{1}{n+a}} - 1) \right).$$

Напомена 2. Флексибилност априорне расподеле може да се постигне коришћењем мешавина априорних расподела. Ако разматрамо $\pi(\theta) = \sum_{j=1}^d \beta_j \pi_{(a_j, b_j)}(\theta)$ као априорну расподелу, тада апостериорна расподела узима облик $\pi(\theta | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \sum_{j=1}^d \beta_j(\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) \pi_{(a_j, b_j)}(\theta | \tilde{\mathbf{r}}_{(k)})$, где је $\beta_s(\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \beta_s w_s(\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) / \sum_{j=1}^d \beta_j w_j(\tilde{\mathbf{r}}_{(k)})$ и $w_s(\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = b_s^{a_s} \Gamma(n + a_s) / \Gamma(a_s) (b_s + k\tau(R_{n(k)}))^{n+a_s}$ за $s = 1, \dots, d$. Бајесова оцена за $\widehat{Y}_{j:m}$ је, у овом случају, дата са

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{j:m} &= \frac{1}{B(j; m-j+1)} \sum_{s=1}^d \sum_{l=0}^{m-j} \beta_s w_s(\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) \frac{\Gamma(a_s)}{b_s^{a_s}} \binom{m-j}{l} \frac{(-1)^{m-j-l}}{m-l} \\ &\quad \times \int_0^\infty \theta^{n+a_s-1} e^{-\theta(b_s+k\tau(R_{n(k)}))} (\psi(1 + \theta(m-l)) - \psi(1)) d\theta, \end{aligned}$$

где је $\psi(\cdot)$ дигама функција.

5.3 НАГ интервал

У случају када је апостериорна функција густине расподеле (5.9) једномодална, можемо, при номиналној вредности α , одредити $100(1 - \alpha)\%$ интервал прекривања за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, као

$$R(\pi_\alpha) = \{y : f_{Y_{j:m}}^*(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) \geq \pi_\alpha\}, \quad (5.23)$$

где је π_α највећа константа таква да $P(Y_{j:m} \in R(\pi_\alpha)) \geq 1 - \alpha$. Овај интервал прекривања се назива и интервал највише апостериорне густине (надаље НАГ интервал) (енг. *HPD (Highest Posterior Density)*) за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$ (в. [41]). Доња и горња граница од $100(1 - \alpha)\%$ НАГ интервала, у ознаци $(u_{Y_{j:m};1}, u_{Y_{j:m};2})$, се могу одредити као решења оптимizacionог проблема

$$\begin{aligned} \min_{u_{Y_{j:m};1} < u_{Y_{j:m};2}} & (|f_{Y_{j:m}}(u_{Y_{j:m};2}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - f_{Y_{j:m}}(u_{Y_{j:m};1}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k}))| \\ & + |F_{Y_{j:m}}(u_{Y_{j:m};2}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - F_{Y_{j:m}}(u_{Y_{j:m};1}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - (1 - \alpha)|). \end{aligned} \quad (5.24)$$

У случају да је (5.9) мултимодална, скуп (5.23) се може посматрати као одговарајући $100(1 - \alpha)\%$ НАГ интервал за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, при чему се апроксимација за π_α може одредити симулацијама.

Издвојићемо две битне особине НАГ интервала:

- вредност функције густине расподеле у свакој тачки унутар интервала је већа него вредност функције густине расподеле у било којој тачки ван интервала,
- за дату номиналну вредност α , интервал $100(1 - \alpha)\%$ има минимално растојање између граница интервала. Ова особина је посебно битна уколико је уочен мултимодални облик апостериорне функције густине расподеле.

Уколико је доња граница носача једномодалне апостериорне функције густине расподеле нула, онда се интервал $(u_{Y_{j:m};1}, u_{Y_{j:m};2})$ сматра егзактним НАГ интервалом за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$. Даље, ако се зна да је апостериорна расподела монотона на њеном носачу, у ознаци (c, d) , онда се проблем (5.24) редукује као

$$\min_{c < u_{Y_{j:m};2}} |F_{Y_{j:m}}(u_{Y_{j:m};2}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - F_{Y_{j:m}}(c|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - (1 - \alpha)|,$$

ако је (5.9) монотono опадајућа, или

$$\min_{u_{Y_{j:m};1} < d} |F_{Y_{j:m}}(d|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - F_{Y_{j:m}}(u_{Y_{j:m};1}^*|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) - (1 - \alpha)|$$

ако је (5.9) монотono растућа. Самим тим, НАГ интервал за $Y_{j:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, се сматра $(c, u_{Y_{j:m};2})$ или $(u_{Y_{j:m};1}, d)$, редом.

Када апостериорну функцију густине расподеле не можемо представити у експлицитном облику, одговарајући Бајесови интервали прекривања и НАГ интервали се могу генерисати Монте Карло методама.

5.4 Илустрација Бајесових оцена

Перформансе горе наведених Бајесових оцена су испитане у овој секцији на узорку величине 20, чији елементи представљају дужине временских интервала рада компоненти при стресу од 35.5 амплитуда већег система (в. [81]). У [22] је показано да се расподела $GE(4.1016, 0.0062)$ може сматрати адекватним моделом за овај скуп података. Подаци су представљени у Табели 5.1.

Табела 5.1: Дужине временских интервала рада компоненти система при стресу од 35.5 амплитуда.

156	173	125	852	559	442	168	286	261	227
285	253	166	133	309	247	112	202	365	702

Множењем свих елемената узорка са 0.0062, $GE(4.1016)$ модел се може сматрати допустивим за нови скалирани узорак.

k -ти доњи рекорди из скалираног узорка су

i	1	2	3	4	5	6	7
$L_{i(1)}$	0.9672	0.7750	0.6944				
$L_{i(2)}$	1.0726	0.9672	0.8246	0.775			
$L_{i(3)}$	1.0726	1.0416	1.0292	0.9672	0.8246		
$L_{i(4)}$	5.2824	3.4658	2.7404	1.0726	1.0416	1.0292	0.9672

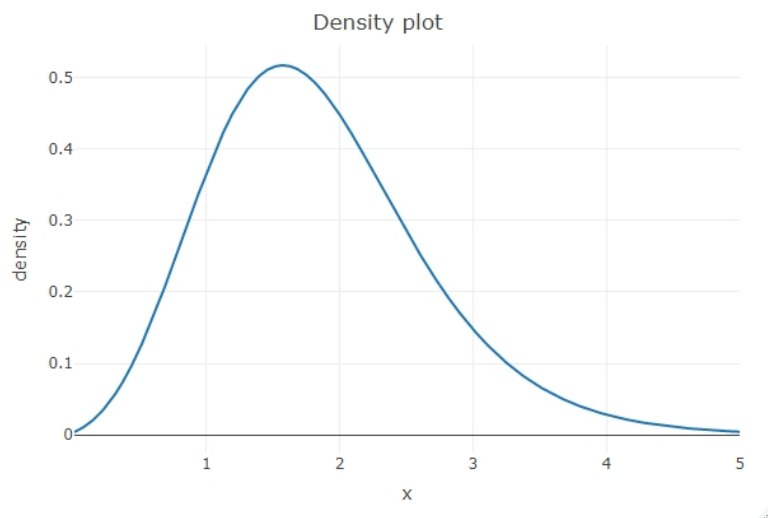
Приликом испитивања перформанси оцена, одабраћемо вредности за параметре (a, b) априорне расподеле (5.4) као

$$(a, b) = \{(0.5, 0.5), (1, 1), (2, 2), (0, 0)\}.$$

Ове случајеве обележавамо као случај I, II, III и IV, редом. Случај $(a, b) = (0, 0)$ одговара тзв. неинформативној априорној расподели. Одабрана је номинална вредност

параметра $\alpha = 0.05$ и генерисани су 95% Бајесови интервали прекривања заједно са НАГ интервалима. Представљене су вредности оцена статистика поретка из будућег узорка величине $m = 5, 10$ и 20 . У статистичком софтверу R извршена је комплетна анализа перформанси са прецизношћу од четири децимале, при вредности параметра k : $k = 1$ и $k = 2$. Важно је назначити да апостериорна густина (5.9) при различитим вредностима параметара m, j, a и b има облик сличан као на Слици 5.1. Резултати су представљени у Табелама 5.2-5.5.

Нумеричке компарације су показале да се Бајесови интервали прекривања значајно разликују при избору почетних вредности параметара априорне расподеле. Приликом раста вредности априорних параметара (расте информативност априорне расподеле) интервали прекривања се сужавају. Ово се може оправдати смањивањем дисперзије априорне расподеле при расту вредности априорних параметара. Случај III доминира у овом погледу. Интересантно је увидети да НАГ интервал има одређене недостатке при оцењивању минимума из будућег узорка. Стога, Бајесов двострани интервал прекривања се може сматрати коректним избором у пракси. Пошто израз за средњеквадратно одступање (5.22) зависи од параметра θ , оценили смо овај параметар са (5.6).



Слика 5.1: Апостериорна густина (5.9) за Случај I када је $(m, j, k) = (10, 9, 1)$.

Средњеквадратна грешка оцена расте приликом раста вредности параметра k , за разлику од дужина двостраног интервала прекривања. У већини случајева НАГ интервал је ужи и прецизнији.

Табела 5.2: 95% Бајесови интервали прекривања и $\hat{Y}_{j:m}$ када је $(a, b) = (0.5, 0.5)$.

m	j	Двострани интервал	НАГ	$\hat{Y}_{j:m}$	\widehat{MSE}	
$k = 1$	5	1	(0.0002, 0.8441)	(0, 0.4078)	0.1979	0.3539
		4	(0.1518, 2.9883)	(0.0071, 2.5511)	1.2169	1.0381
		5	(0.4213, 5.2704)	(0.1649, 4.6581)	2.1937	2.1237
	10	1	(0.0001, 0.4914)	(0, 0.152)	0.1059	0.2134
		4	(0.0229, 1.2191)	(0.0114, 0.6015)	0.4488	0.4485
		9	(0.5101, 3.7272)	(0.3605, 3.4754)	1.843	1.1235
	20	10	(0.8827, 5.9623)	(0.6198, 5.4447)	2.831	2.1681
		1	(0, 0.3007)	(1.0004, 1.9989)	0.0592	0.1422
		4	(0.0035, 0.6687)	(0.72, 2.0887)	0.1095	0.2697
		10	(0.0849, 1.3732)	(0.0194, 1.2548)	0.6277	0.4575
		18	(0.7677, 3.5322)	(0.6768, 3.4091)	2.0063	0.9099
		20	(1.4513, 6.6548)	(1.1921, 6.1853)	3.4943	2.1922
$k = 2$	5	1	(0.0004, 0.7382)	(0, 0.6065)	0.1664	0.9503
		4	(0.1544, 2.8678)	(0.021, 2.508)	1.1481	4.3966
		5	(0.4156, 5.1632)	(0.1711, 4.5431)	2.1188	7.3214
	10	1	(0.0004, 0.4006)	(0, 0.1592)	0.0833	0.5601
		4	(0.0265, 1.0913)	(0.004, 0.5882)	0.4021	1.8838
		9	(0.5153, 3.605)	(0.367, 3.3418)	1.7666	5.9481
	20	10	(0.8751, 5.8549)	(0.6159, 5.3185)	2.7516	8.4322
		1	(0, 0.2271)	(0, 0.0171)	0.043	0.4344
		4	(0.0048, 0.5561)	(0, 0.5804)	0.1776	1.001
		10	(0.0966, 1.2327)	(0, 1.831)	0.5684	2.52
		18	(0.782, 3.3997)	(0.686, 3.2627)	1.9287	6.0765
		20	(1.4425, 6.5473)	(1.1834, 6.0553)	3.4133	9.5048

Табела 5.3: 95% Бајесови интервали прекривања и $\hat{Y}_{j:m}$ када је $(a, b) = (1, 1)$.

m	j	Двострани интервал	НАГ	$\hat{Y}_{j:m}$	\widehat{MSE}	
$k = 1$	5	1	(0.0002, 0.8366)	(0, 0.4079)	0.1587	0.4678
		4	(0.1642, 2.9848)	(0.0177, 2.6214)	1.2222	1.3447
		5	(0.4395, 5.2719)	(0.1854, 4.6633)	2.2024	2.4408
	10	1	(0.0001, 0.4832)	(0, 0.1464)	0.1053	0.2956
		4	(0.0274, 1.2083)	(0.0073, 0.657)	0.4552	0.6576
		9	(0.5335, 3.7237)	(0.3848, 3.472)	1.8502	1.4587
	20	10	(0.9072, 5.9637)	(0.6453, 5.4435)	2.8392	2.5194
		1	(0, 0.2931)	(0, 0.0271)	0.0579	0.1985
		4	(0.0047, 0.6569)	(0, 0.491)	0.2146	0.4057
		10	(0.0966, 1.3597)	(0, 0.9271)	0.6309	0.694
		18	(0.7977, 3.5255)	(0.706, 3.4001)	2.0138	1.2505
		20	(1.4795, 6.6562)	(1.2203, 6.1813)	3.5031	2.5501
$k = 2$	5	1	(0.0003, 0.7386)	(0, 0.3248)	0.1682	0.9574
		4	(0.1633, 2.8722)	(0.03, 2.5178)	1.1558	4.3035
		5	(0.429, 5.1705)	(0.1853, 4.553)	2.1285	6.8663
	10	1	(0.0001, 0.3996)	(0, 0.0837)	0.0841	0.5643
		4	(0.0299, 1.0902)	(0.0021, 0.6624)	0.4062	1.8799
		9	(0.532, 3.6094)	(0.3844, 3.3467)	1.7762	5.6689
	20	10	(0.8932, 5.8623)	(0.6347, 5.3249)	2.7622	7.7939
		1	(0.0001, 0.2256)	(0, 0.0085)	0.0434	0.3443
		4	(0.0058, 0.5532)	(0, 0.3071)	0.1796	1.0142
		10	(0.1053, 1.2299)	(0, 0.9707)	0.574	2.4084
		18	(0.8032, 3.4023)	(0.707, 3.2642)	1.9387	5.6668
		20	(1.4634, 6.5547)	(1.2044, 6.06)	3.4244	9.0046

Табела 5.4: 95% Бајесови интервали прекривања и $\hat{Y}_{j:m}$ када је $(a, b) = (2, 2)$.

m	j	Двострани интервал	НАГ	$\hat{Y}_{j:m}$	\widehat{MSE}	
$k = 1$	5	1	(0.0004, 0.8245)	(0, 0.4076)	0.1983	0.5943
		4	(0.1848, 2.9793)	(0.0426, 2.6312)	1.2306	1.6946
		5	(0.4685, 5.2742)	(0.2178, 4.6699)	2.2139	2.8466
	10	1	(0.0004, 0.4698)	(0, 0.137)	0.1048	0.3808
		4	(0.0356, 1.1906)	(0.0032, 0.7704)	0.4582	0.8932
		9	(0.5709, 3.7181)	(0.4236, 3.4657)	1.8608	1.8736
		10	(0.9457, 5.9661)	(0.6855, 5.4411)	2.8521	2.9438
	20	1	(0.0001, 0.2805)	(0, 0.0218)	0.0572	0.2559
		4	(0.0072, 0.6373)	(0, 0.4761)	0.2146	0.5685
		10	(0.1172, 1.3372)	(0, 0.9402)	0.6358	0.9711
		18	(0.8455, 3.5147)	(0.7525, 3.3851)	2.0257	1.6483
		20	(1.5235, 6.6586)	(1.2645, 6.1749)	3.5167	3.0199
$k = 2$	5	1	(0.0004, 0.7391)	(0, 0.3311)	0.1712	0.9406
		4	(0.1789, 2.8797)	(0.0457, 2.5329)	1.169	3.9559
		5	(0.4517, 5.183)	(0.2092, 4.569)	2.1449	6.3233
	10	1	(0.0001, 0.3976)	(0, 0.0825)	0.0856	0.5619
		4	(0.0362, 1.0882)	(0.0003, 0.784)	0.4133	1.8005
		9	(0.5605, 3.6169)	(0.4138, 3.3547)	1.7923	5.1354
		10	(0.9235, 5.8747)	(0.6661, 5.3355)	2.78	7.1274
	20	1	(0.0001, 0.2228)	(0, 0.0076)	0.044	0.3505
		4	(0.0078, 0.5481)	(0, 0.306)	0.1831	1.001
		10	(0.1211, 1.2248)	(0, 0.9725)	0.5834	2.3601
		18	(0.8392, 3.4065)	(0.7426, 3.2664)	1.9556	5.3681
		20	(1.4982, 6.5671)	(1.2396, 6.0678)	3.4431	8.1053

Табела 5.5: 95% Бајесови интервали прекривања и $\hat{Y}_{j:m}$ када је $(a, b) = (0, 0)$.

m	j	Двострани интервал	НАГ	$\hat{Y}_{j:m}$	\widehat{MSE}	
$k = 1$	5	1	(0.0001, 0.8527)	(0, 0.4075)	0.1977	0.4131
		4	(0.1376, 2.9923)	(0.0097, 2.4327)	1.2106	0.9424
		5	(0.3998, 5.2686)	(0.1401, 4.6506)	2.1864	1.9324
	10	1	(0.0001, 0.501)	(0, 0.1583)	0.1064	0.3042
		4	(0.0184, 1.2316)	(0.0174, 0.5405)	0.4512	0.4798
		9	(0.4826, 3.7313)	(0.3315, 3.4788)	1.8341	1.0576
		10	(0.8534, 5.9605)	(0.5891, 5.4459)	2.8212	1.9971
	20	1	(0, 0.3096)	(0, 0.0349)	0.0595	0.1999
		4	(0.0025, 0.6823)	(0, 0.5055)	0.2141	0.2011
		10	(0.0723, 1.3888)	(0, 0.9072)	0.6243	0.2287
		18	(0.7322, 3.54)	(0.6422, 3.4193)	1.9972	0.8487
		20	(1.4174, 6.653)	(1.1582, 6.1899)	3.4839	1.9905
$k = 2$	5	1	(0.0001, 0.7377)	(0, 0.317)	0.1645	1.092
		4	(0.1445, 2.8628)	(0.0105, 2.4955)	1.1392	4.5601
		5	(0.4006, 5.1548)	(0.1552, 4.5314)	2.1077	7.4088
	10	1	(0.0001, 0.4018)	(0, 0.0849)	0.0823	0.5972
		4	(0.023, 1.0925)	(0.0051, 0.5453)	0.3975	1.9586
		9	(0.4964, 3.5999)	(0.3474, 3.336)	1.7557	6.4913
		10	(0.8546, 5.8465)	(0.5947, 5.3111)	2.7395	8.9099
	20	1	(0, 0.2288)	(0, 0.0097)	0.0426	0.3672
		4	(0.0038, 0.5591)	(0, 0.3072)	0.1754	1.5641
		10	(0.0873, 1.2357)	(0, 0.9673)	0.5622	2.5221
		18	(0.7579, 3.3968)	(0.6621, 3.2609)	1.9173	6.318
		20	(1.4187, 6.5389)	(1.1594, 6.0499)	3.4007	10.2724

5.5 Сарханова модификација Вејбулове расподеле

У наставку ћемо представити Бајесову приступ оцењивања статистика поретка из будућег узорка на основу рекорда за тропараметарску фамилију модификованих Вејбулових расподела, представљених од стране Сархана [117]. Као специјалне случајеве, ова фамилија садржи расподелу линеарне стопе отказа, Вејбулову и Рејлијеву расподелу. Функција густине расподеле ове фамилије расподеле има облик

$$f(x; \alpha, \theta, \beta) = (\alpha + \theta\beta x^{\beta-1})e^{-\alpha x - \theta x^\beta}, \quad x > 0, \alpha, \theta \geq 0, \beta > 0, \quad (5.25)$$

где је α параметар облика и θ и β параметри размере такви да $\theta + \beta > 0$. Функција расподеле је дата са

$$F(x; \alpha, \theta, \beta) = 1 - e^{-\alpha x - \theta x^\beta}, \quad x > 0. \quad (5.26)$$

На основу реализације првих n , $n \geq 1$, k -тих горњих рекорда $R_{1(k)} = r_{1(k)}$, $R_{2(k)} = r_{2(k)}$, ..., $R_{n(k)} = r_{n(k)}$ из (5.25), заједно са (2.6), налазимо да је функција веродостојности за α, θ и β , при $\tilde{\mathbf{r}}_{(k)}$, дата са

$$L(\alpha, \theta, \beta; \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = k^n e^{-\alpha r_{n(k)} - \theta r_{n(k)}^\beta} \prod_{j=1}^n (\alpha + \theta \beta r_{i(k)}^{\beta-1}), \quad 0 < r_{1(k)} < r_{2(k)} < \dots < r_{n(k)}. \quad (5.27)$$

Користећи идентитет (в. [60])

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (\alpha + \theta \beta r_{i(k)}^{\beta-1}) &= \prod_{j=1}^n (\alpha + \theta Z_j(\beta)) \\ &= \sum_{j=0}^n \alpha^{n-j} \theta^j \xi_j(\beta), \end{aligned}$$

где је за $j = 0$, $\xi_0(\beta) = 1$, а за $1 \leq j \leq n$,

$$\xi_j(\beta) = \sum_{b_1=1}^{n-j+1} Z_{b_1}(\beta) \sum_{b_2=b_1+1}^{n-j+2} Z_{b_2}(\beta) \times \dots \times \sum_{b_j=b_{j-1}+1}^n Z_{b_j}(\beta). \quad (5.28)$$

Користећи (5.28), можемо да представимо (5.27) као

$$L(\alpha, \theta, \beta; \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = k^n e^{-\alpha r_{n(k)} - \theta r_{n(k)}^\beta} \sum_{j=0}^n \alpha^{n-j} \theta^j \xi_j(\beta). \quad (5.29)$$

Ако поставимо да $\beta = 1 (Z_j(1) = 1)$, имамо да је

$$\xi_j(1) = \binom{n}{j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

што даље имплицира да у овом случају (5.28) има облик

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \theta) = (\alpha + \theta)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha^{n-j} \theta^j.$$

Пошто не постоје априорне расподеле за параметре α , θ и β такве да одговарајућа апостериорна расподела припада истој фамилији расподела (тзв. својство конјуговане фамилије расподела) (в. [76]), може се сматрати, користећи метод из [121], да параметар β узима дискретне вредности $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$, $\mu \geq 1$, са законом расподеле $P\{\beta = \beta_k\} = \delta_k$, при чему је $0 \leq \delta_k \leq 1$ и $\sum_{k=1}^{\mu} \delta_k = 1$. Претпостављамо надаље да су α и θ , при $\beta = \beta_k$, независне са заједничком расподелом

$$\pi(\alpha, \theta | \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}_{(k)}) = \nu_k \nu_k^* e^{-(\nu_k \alpha + \nu_k^* \theta)}, \quad \nu_k, \nu_k^* > 0. \quad (5.30)$$

Апостериорна расподела за α и θ , при $\beta = \beta_k$, је дата са

$$\pi^*(\alpha, \theta | \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} \sum_{j=0}^n \alpha^{n-j} \theta^j \xi_j(\beta_k) e^{-\alpha(\nu_k + r_{n(k)}) - \theta(\nu_k + r_{n(k)}^{\beta_k})}, \quad (5.31)$$

где је $J_1(\nu_k, \nu_k^*, \tau_1, \tau_2)$ константа дата са

$$J_1(\nu_k, \nu_k^*, \tau_1, \tau_2) = \sum_{j=0}^n \xi_j(\beta_k) \frac{\Gamma(n-j+\tau_1+1)}{(\nu_k + r_{n(k)})^{n-j+\tau_1+1}} \frac{\Gamma(j+\tau_2)}{(\nu_k^* + r_{n(k)}^{\beta_k})^{j+\tau_2}}. \quad (5.32)$$

На основу закона вероватноће $P\{\beta = \beta_k\} = \delta_k$ и (5.31), можемо да одредимо и маргиналу апостериорну вероватноћу за β_k као

$$P_k = P\{\beta = \beta_k | \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})\} = J_p^{-1} \nu_k \nu_k^* \delta_k J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1), \quad (5.33)$$

при чему је J_p константа дата са

$$J_p = \sum_{k=1}^{\mu} \delta_k \nu_k \nu_k^* J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1).$$

При средњеквадратној функцији губитка и (5.31), Бајесове оцене за параметре α , θ и β су дате као

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{BS} &= E(\alpha | \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \sum_{k=1}^{\mu} P_k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha \pi^*(\alpha, \theta | \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}) d\alpha d\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} P_k \frac{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 2, 1)}{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\tilde{\theta}_{BS} = \sum_{k=1}^{\mu} P_k \frac{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 2)}{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)}, \quad (5.35)$$

и

$$\tilde{\beta}_{BS} = \sum_{k=1}^{\mu} P_k \beta_k. \quad (5.36)$$

Уколико користимо асиметричну (линеарно-експоненцијалну) функцију губитка $L(\theta, \hat{\theta}) = e^{-c(\theta - \hat{\theta})} - c(\theta - \hat{\theta}) - 1$, $c \neq 0$, предложена у [133], Бајесова оцена за непознати параметар ϕ је дата са

$$\tilde{\phi}_{BL} = -\frac{1}{c} \ln(E_{\phi}(e^{-c\phi}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k}))).$$

Користећи претходну формулу и (5.31), Бајесове оцене при асиметричној функцији губитка за параметре α , θ и β су одређене са

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{BL} &= -\frac{1}{c} \ln \left(\sum_{k=1}^{\mu} P_k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\alpha c} \pi^*(\alpha, \theta | \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}) d\alpha d\theta \right) \\ &= -\frac{1}{c} \ln \left(\sum_{k=1}^{\mu} P_k \frac{J_1(\nu_k + c, \nu_k^*, 2, 1)}{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\tilde{\theta}_{BL} = -\frac{1}{c} \ln \left(\sum_{k=1}^{\mu} P_k \frac{J_1(\nu_k, \nu_k^* + c, 2, 1)}{J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} \right) \quad (5.38)$$

и

$$\tilde{\beta}_{BL} = -\frac{1}{c} \ln \left(\sum_{k=1}^{\mu} P_k e^{-c\beta_k} \right). \quad (5.39)$$

Функција густине r -те статистике поретка, ознака $Y_{r:m}$, из узорка обима m , $m \geq 1$, са расподелом (5.25) је дата са

$$\begin{aligned} f_{Y_{r:m}}(y|\alpha, \theta, \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) &= \frac{1}{B(r, m-r+1)} (\alpha + \theta \beta_k y^{\beta_k-1}) \sum_{p=0}^{r-1} \binom{r-1}{p} (-1)^{r-1-p} \\ &\times e^{-\alpha(m-p)y - \theta(m-p)y^{\beta_k}}, \quad y > 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где је $B(\cdot, \cdot)$ комплетна бета функција и $1 \leq r \leq m$. Користећи (5.31) и (5.40), Бајесова апостериорна густина за $Y_{r:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, је дата са

$$\begin{aligned} f_{Y_{r:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) &= \sum_{k=1}^{\mu} P_k \int_{\alpha} \int_{\theta} f_{Y_{r:m}}(y|\alpha, \theta, \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) \pi^*(\alpha, \theta | \beta_k, \tilde{\mathbf{r}}) d\alpha d\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{j=0}^n \frac{P_k}{B(r, m-r+1) J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} \binom{r-1}{p} (-1)^{r-p-1} \\ &\times \xi_j(\beta_k) (\alpha + \theta \beta_k y^{\beta_k-1}) \alpha^{n-j} \theta^j e^{-\alpha((m-p)y + \nu_k + r_{n(k)}) - \theta((m-p)y^{\beta_k} + \nu_k^* + r_{n(k)}^{\beta_k})} \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{r-1} \frac{P_k}{B(r, m-r+1) J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} \binom{r-1}{p} (-1)^{r-p-1} \\ &\times (J_1(\nu_k + (m-p)y, \nu_k^* + (m-p)y^{\beta_k}, 2, 1) \\ &+ \beta_k y^{\beta_k-1} J_1(\nu_k + (m-p)y, \nu_k^* + (m-p)y^{\beta_k}, 1, 2)), \quad y > 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

У случају када је $r = 1$ (минимум узорка), (5.41) узима облик

$$f_{Y_{1:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{P_k}{B(1, m)J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} (J_1(\nu_k + my, \nu_k^* + my^{\beta_k}, 2, 1) + \beta_k y^{\beta_k - 1} J_1(\nu_k + my, \nu_k^* + my^{\beta_k}, 1, 2)), y > 0. \quad (5.42)$$

У случају када је $r = m$ (максимум узорка), (5.41) узима облик

$$f_{Y_{m:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{P_k}{B(m, 1)J_1(\nu_k, \nu_k^*, 1, 1)} \binom{m-1}{p} (-1)^{m-p-1} \times (J_1(\nu_k + (m-p)y, \nu_k^* + (m-p)y^{\beta_k}, 2, 1) + \beta_k y^{\beta_k - 1} J_1(\nu_k + (m-p)y, \nu_k^* + (m-p)y^{\beta_k}, 1, 2)), y > 0. \quad (5.43)$$

Функција расподеле за $Y_{r:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, је дата са

$$F_{Y_{r:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = P\{Y_{r:m} \leq y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})\} = \int_0^y f_{Y_{r:m}}(t|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) dt, y > 0. \quad (5.44)$$

Користећи (5.44), двострани $100(1 - \alpha)\%$ Бајесов интервал прекривања за $Y_{r:m}$, при $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$, $1 \leq r \leq m$, у ознаци (L, U) , конструишемо решавањем система једначина насталих изједначавањем (5.44) са $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$, редом, односно

$$F_{Y_{r:m}}(L|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad F_{Y_{r:m}}(U|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (5.45)$$

На основу (5.43), Бајесова оцена за $Y_{r:m}$, за $1 \leq r \leq m$, се може одредити као

$$Y_{r:m} = E(Y_{r:m}|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) = \int_0^{\infty} y f_{Y_{r:m}}(y|\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{k})) dy. \quad (5.46)$$

На основу (5.41) и (5.46), видимо да се вредности Бајесових оцена могу одредити само нумеричким путем.

За одређивање НАГ интервала, због компликованог облика (5.41), неопходно је користити Монте Карло методе.

Глава 6

Случајна тетива: Генерисање, екстремно понашање и моменти

6.1 Бертранов догађај и мотивација

Проблем случајне тетиве или Бертранов парадокс [36] један је од најпознатијих проблема теорије вероватноће. Прозван је парадоксом од стране Поенкареа и формулисан је следећим питањем: "Бирајмо тетиву на случајан начин у кругу. Колика је вероватноћа да тетива буде дужа од странице уписаног једнакостраничног троугла у кругу?" Сматраћемо да је проблем дефинисан на кругу полупречника један и означићемо догађај да је тетива у кругу дужа од странице уписаног једнакостраничног троугла као Бертранов догађај. Поред тога, користићемо према потреби термин случајна тетива уместо тетива изабрана на случајан начин.

Сам Бертран је предложио три независна решења овог парадокса.

Прво решење се заснива на избору тетиве на такав начин да се једно теме тетиве поклапа са теменом уписаног једнакостраничног троугла у кругу, док се друго теме тетиве произвољно бира на кружности круга. Тетива је дужа од странице троугла ако се друго теме тетиве налази на кружном луку између друга два темена троугла. У овом случају вероватноћа реализације Бертрановог догађаја је $1/3$.

Фиксирајмо пречник круга тако да је нормалан на страницу уписаног једнакостраничног троугла у кругу. Одаберимо тетиву са средиштем на датом пречнику. Тетива ће бити дужа од странице троугла ако се средиште тетиве налази на мањем растојању од центра круга него страница троугла, односно, ако је растојање између центра круга и тетиве мање од $1/2$. Вероватноћа реализације Бертрановог догађаја, у овом случају, је $1/2$. Ово је друго Бертаново решење.

Треће решење се заснива на избору произвољне тачке унутар круга коју обележавамо као средиште тетиве. Тако конструисана тетива је једнозначно одређена, као и у претходним случајевима. У овом случају вероватноћа реализације Бертрановог догађаја је $1/4$.

Концептуална идеја садржана у овом парадоксу се заснива на избору тетиве у кругу на случајан начин. Према [18], уколико се тачно дефинише простор догађаја и вероватносна мера на њему, Бертанов парадокс постаје проблем са јединственим решењем. Овакво резонување потиче из Колмогоровљеве аксиоматике теорије вероватноће. Сходно томе, Бертранов парадокс нас опомиње да при раду са геометријском вероватноћом или сличним проблемима морамо тачно да дефинишемо простор свих могућих исхода и вероватносну меру на њему (в. [68]).

Радови [87], [2], [58], [16], [77], [30], [118], [65], [132], [114], [49] и [42] представљају извор за разумевање Бертановог парадокса кроз математичке и филозофске оквире.

Недефинисан појам избора тетиве на случајан начин мотивише научнике за проналазак нових метода избора тетиве у кругу. Неки су представљени у [42] и [68]. У наредном одељку представљамо функције расподела дужина тетива у кругу одабраних на случајан начин.

6.2 Методе избора случајне тетиве

У наставку на систематичан начин представљамо функције расподела дужина тетива и методе избора случајне тетиве у јединичном кругу. Не постоји једнозначна кореспонденција између њих (в. [42]).

Случај 1: Функција расподеле дужине тетиве

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} & 0 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2, \end{cases} \quad (6.1)$$

одговара методама избора тетиве:

- Тетива је одређена бирањем две независне тачке униформно на кружници круга,
- Одабиром произвољне тачке на кружници круга и тангенте круга која пролази кроз њу, тетива је одређена углом између тетиве и тангенте који је униформно расподељен на $(0, \pi)$.

- Униформним избором тачке на кружници круга и фиксирањем полупречника који садржи дату тачку, тетива је одређена углом који је ослоњен на полупречник са униформном расподелом на интервалу $(0, \pi)$.

Случај 2: Функција расподеле дужине тетиве

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases} \quad (6.2)$$

одговара методу избора тетиве која је једнозначно одређена средишном тачком која је расподељена униформно на површини круга.

Случај 3: Функција расподеле дужине тетиве

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & 0 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases} \quad (6.3)$$

одговара методу избора тетиве чије је средиште униформно расподељено на полупречнику круга.

Случај 4: Функција расподеле дужине тетиве

$$F_4(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} \right) & 0 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases} \quad (6.4)$$

одговара методама избора тетиве:

- Тетива представља случајну границу између два дисјунктна дела круга, где је мањи део униформно расподељен на $(0, 0.5\pi)$,
- Бирањем тачке R униформно на кругу и случајног угла са краком на OR , где је O центар круга,
- Тетива је одређена избором независних тачака униформно на кружници круга и на кругу.

Случај 5: Функција расподеле дужине тетиве

$$F_5(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x(6+x^2)\sqrt{4-x^2}}{12\pi} & 0 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases} \quad (6.5)$$

одговара методу избора тетиве која је одређена формирањем праве која пролази кроз две тачке које су униформно расподељене на кругу.

6.3 Нови начини избора случајне тетиве

Нови методи избора тетиве у кругу на случајан начин произвеле су нове вероватноће реализација Бертановог догађаја. У [68], коришћењем Декартових и поларних координата, тетива формирана бирањем двеју независних тачака у кругу је дужа од странице уписаног једнакостраничног троугла са вероватноћама 0.7468 и 0.9037, редом. Ови резултати су потврђени Монте Карло симулацијама.

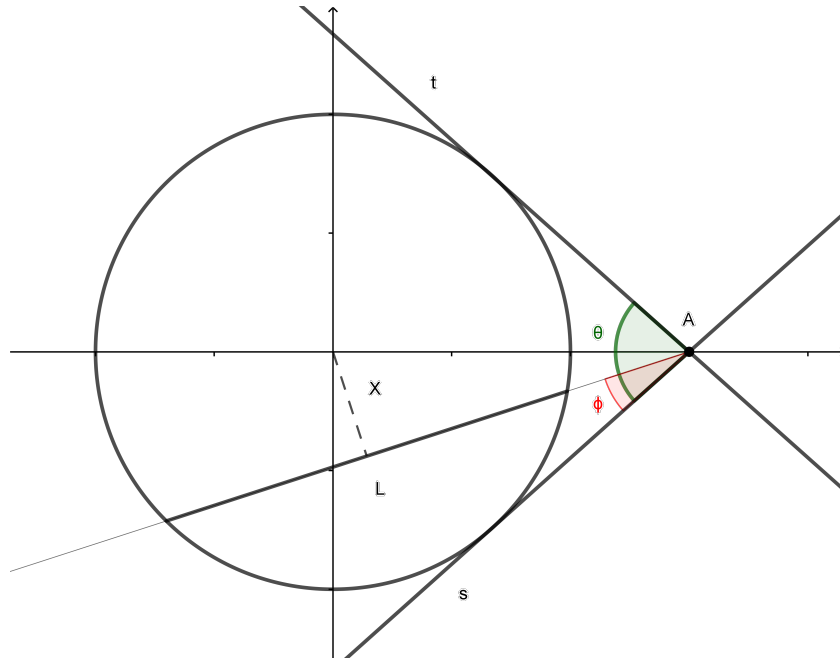
Уопштена фамилија вероватносних модела за Бертранов парадокс је представљена у [123]. Формирана је избором фиксирани тачке удаљености $h > 1$ са које се "бацају" праве које пресецајући круг формирају тетиве. Сматра се да су сви идеални услови постигнути. Ипак, фиксирањем удаљености тачке од круга се нарушава особина случајности избора тетива на кругу, што директно противуречи формулацији Бертрановог парадокса.

У наставку представљамо резултате аутора на ову тему. Резултати се састоје од исправљеног наведеног недостатка, при чему је предложен нови метод избора тетиве у кругу на случајан начин, као и представљање додатног начини избора тетиве у кругу.

Први метод избора тетиве у кругу на случајан начин прати кораке:

- Нека је $\theta \in U(0, \pi)$ угао формиран од стране тангенти t и s у случајно одабраним тачкама на кружници јединичног круга. Нека је A тачка пресека ових тангенти.
- Нека је угао $\phi \in U(0, \theta)$ такав да лежи на тангенти, рецимо, s , са теменом у тачки A .
- Нека угао ϕ одређује правац полуправе са једним теменом у тачки A . Тетива је одређена пресеком полуправе и круга (в. Сл. 6.1).

Нека је X удаљеност центра круга и тетиве, нека је L одговарајућа дужина тетиве и нека је h удаљеност тачке A од центра круга. Стога, можемо закључити да постоје два случаја: $\phi \in (0, \frac{\theta}{2})$ и $\phi \in (\frac{\theta}{2}, \theta)$. Због симетричности разматрамо само случај $\phi \in (0, \frac{\theta}{2})$. Следи да је



Слика 6.1: Случајни углови $\theta \in U(0, \pi)$ и $\phi \in U(0, \theta)$.

$X = \sqrt{1 - \frac{L^2}{4}}$, $\sin(\frac{\theta}{2} - \phi) = \frac{X}{h}$ и $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{h}$. Њиховом комбинацијом добијамо

$$\phi = \frac{\theta}{2} - \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{L^2}{4}} \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (6.6)$$

Користећи технику трансформација, можемо да одредимо функцију расподеле дужине тетиве за овај случај као

$$F_6(l) = \begin{cases} 0 & l < 0, \\ 2 \int_0^\pi \int_0^l \frac{x \sin \frac{\theta}{2}}{4\theta \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \sqrt{1 - (1 - \frac{x^2}{4}) \sin^2 \frac{\theta}{2}}} dx d\theta & 0 \leq l < 2, \\ 1 & l \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & l < 0, \\ \int_0^\pi \frac{t - 2 \arccsc \left(\frac{2 \csc(t/2)}{\sqrt{4 - l^2}} \right)}{t\pi} dt & 0 \leq l < 2, \\ 1 & l \geq 2. \end{cases} \quad (6.7)$$

Евидентно је да не можемо представити функцију расподеле (6.7) у експлицитном облику. Због тога, њене вредности можемо да одредимо само нумеричким путем. За случај кад је $l = \sqrt{3}$, вероватноћа реализације Бертрановог догађаја је

$$P \{ L > \sqrt{3} \} = 1 - F_L(\sqrt{3}) = 0.4454. \quad (6.8)$$

Користећи Монте Карло симулације, са бројем понављања $n = 100, 500, 1000$ и 10000 , можемо да потврдимо (6.8). Резултати симулација су представљени у Табели 6.1.

Табела 6.1: Монте Карло симулације за $P\{L > \sqrt{3}\}$.

Број понављања	100	500	1000	10000
Оцењена веров.	0.4455	0.4457	0.4452	0.4455

Други метод избора тетиве на случајан начин се односи на оне тетиве које су једнозначно одређене тачкама у кругу са униформно расподељеним поларним координатама. За овакав метод избора, вероватноћа реализације Бертрановог догађаја је 0.7525. Монте Карло симулације су потврдиле овај резултат (в. Табелу 6.2). Функција расподеле дужине

Табела 6.2: Монте Карло симулације за $P\{L > \sqrt{3}\}$.

Број понављања	100	500	1000	10000
Оцењена веров.	0.7525	0.7529	0.7529	0.7521

случајне тетиве у овом случају има облик

$$F_7(l) = \begin{cases} 0 & l < 0, \\ \frac{1}{\pi} \left[2 \arcsin \frac{l}{2} + \sqrt{4 - l^2} \log \frac{\cos\left(\frac{\arcsin(l/2)}{2}\right) - \sin\left(\frac{\arcsin(l/2)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\arcsin(l/2)}{2}\right) + \sin\left(\frac{\arcsin(l/2)}{2}\right)} \right] & 0 \leq l < 2, \\ 1 & l \geq 2. \end{cases} \quad (6.9)$$

6.4 Граничне расподеле максимума и рекорда случајних тетива

Следе резултати аутора на тему асимптотске расподеле нормираног максимума и рекорда низа независних случајних величина која поседују неку од расподела дужина случајне тетиве. Они се могу пронаћи у [134].

У вези с тим, наводимо неколико познатих тврђења из теорије екстремних вредности (в. нпр. [82]).

Теорема 6.1 (Лидбетер и остали, 2012) *Нека је $\{X_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина са функцијом расподеле F . Нека је $0 \leq \tau \leq +\infty$ и нека је $\{u_n\}$ низ реалних бројева. Тада важи да је*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(u_n)) = \tau,$$

ако и само ако $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{M_n \leq u_n\} = e^{-\tau}$.

Последица 6.1 (Лидбетер и остали, 2012)

(i) $M_n \rightarrow x_F (\leq \infty)$ са вероватноћом 1 кад $n \rightarrow \infty$,

(ii) Ако је $x_F < \infty$ и $F(x_F-) < 1$ и за низ $\{u_n\}$ важи да $P\{M_n \leq u_n\} \rightarrow \rho$ кад $n \rightarrow \infty$, тада је $\rho = 0$ или $\rho = 1$.

Теорема 6.2 (Лидбетер и остали, 2012) Нека је $\{X_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина. Нека је $\tau_n = n(1 - F(u_n))$, $\Delta_n = (1 - \frac{\tau_n}{n})^n - e^{-\tau_n}$ и $\Delta'_n = e^{-\tau_n} - e^{-\tau}$, тако да

$$P\{M_n \leq u_n\} - e^{-\tau} = \Delta_n + \Delta'_n.$$

Тада важи да је

$$0 \leq -\Delta_n \leq \frac{\tau_n^2 e^{-\tau_n}}{2} \frac{1}{n-1} \leq 0.3 \frac{1}{n-1},$$

где је прва граница асимптотски прецизна, у смислу да кад $\tau_n \rightarrow \tau$ важи да је $\Delta_n \sim -\tau^2 e^{-\tau} / 2$. Штавише, за $\tau - \tau_n \leq \log 2$, важи

$$\Delta'_n = e^{-\tau} \{(\tau - \tau_n) + \theta(\tau - \tau_n)^2\},$$

за $0 < \theta < 1$. Стога, можемо лако да закључимо да кад $\tau_n \rightarrow \tau$ имамо

$$\Delta_n \sim -\frac{e^{-\tau} \tau^2}{2n}, \quad \Delta'_n \sim e^{-\tau} (\tau - \tau_n),$$

када $n \rightarrow \infty$.

Теорема 6.3 (Лидбетер и остали, 2012) Нека је функција расподеле F низа независних и једнако расподељених случајних величина $\{\xi_n\}$ апсолутно непрекидна са функцијом густине f . Ако су испуњени услови $f(x) > 0$ за свако x из интервала (x_0, x_F) , $f(x) = 0$ за $x > x_F$, и

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{(x_F - x)f(x)}{1 - F(x)} = \alpha > 0, \quad (6.10)$$

онда F припада области привлачења Вејбулове расподеле.

Евидентно је да су сви услови Теореме 6.3 испуњени за низ независних величина са функцијом расподеле дужине случајне тетиве. У складу с тим, максимум низа независних случајних величина које имају неку од расподела дужина случајних тетива припада области привлачности Вејбулове расподеле. Смисленост ових резултата је у корелацији са резултатима представљеним у [75].

Даље, постоје константе $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, тако да

$$P \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right\} \xrightarrow{d} \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

при $n \rightarrow \infty$, где d означава конвергенцију у расподели. Параметар облика α се одређује преко (6.10), где је $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\} = 2 < \infty$ и где $f(\cdot)$ представља функцију густине расподеле дужина случајних тетива у кругу.

Наредна теорема истиче асимптотско понашање максимума првих n независних случајних величина из низа независних и једнако расподељених случајних величина $\{X_n^i\}$, $n \in \mathbf{N}$, са неком од расподела дужине случајне тетиве (6.1-6.5) и (6.7) (в. [134]).

Теорема 6.4 Нека је $\{X_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина са функцијом расподеле дужине случајне тетиве која се поклапа са F_i , за $i = 1, \dots, 6$. Нека је $M_{in} = \max\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$, $n \in \mathbf{N}$, максимална дужина случајне тетиве на јединичном кругу, одабрана неком од горе наведених метода. Константе $a_{in} > 0$ и $b_{in} \in \tilde{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$, такве да $P \left\{ \frac{M_{in} - b_{in}}{a_{in}} \leq x \right\}$ конвергира у расподели ка Вејбуловој расподели са неким параметром облика, су асимптотски једнаки $a_{1n} = \frac{\pi^2}{4n^2}$, $a_{2n} = 1/n$, $a_{3n} = 1/n^2$, $a_{4n} = \frac{\pi^2}{16n^2}$, $a_{5n} = \frac{9\pi^2}{256n^2}$ и $a_{6n} = \frac{\pi^2}{4C^2n^2}$, где је $C = \int_0^\pi \frac{1}{t \operatorname{csc} \frac{t}{2}} dt$ и $b_n^i = 2$ за $i = 1, \dots, 6$. Брзина конвергенције је $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$, за сваки случај понаособ.

Доказ. Наредне апроксимације биће од велике помоћи:

$$\ln x \sim x - 1, x \rightarrow 1, \quad (6.11)$$

$$\ln(1 - x) \sim -x, x \rightarrow 0, \quad (6.12)$$

и

$$\arccos x \sim \frac{\pi}{2} - x, x \rightarrow 0. \quad (6.13)$$

Означимо са $\{u_n\} = \{a_n x + b_n\}$, за $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$.

Случај 1: Функција расподеле максимума F_{M_n} са аргументом u_n има облик

$$F_{M_n}(u_n) = \left(\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u_n}{2} \right)^n = \exp \left\{ n \ln \left(\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u_n}{2} \right) \right\}. \quad (6.14)$$

Користећи (6.11), добијамо

$$n \ln \left(\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u_n}{2} \right) \sim \frac{2n}{\pi} \arcsin \frac{u_n}{2} - n, n \rightarrow \infty. \quad (6.15)$$

Параметар облика α Вејбулове расподеле је једнак $1/2$, на основу (6.10).

За свако $x < 0$, важи

$$\frac{2n}{\pi} \arcsin \frac{u_n}{2} - n \sim -(-x)^{1/2}, n \rightarrow \infty. \quad (6.16)$$

Важи и следећа апроксимација

$$\arcsin \frac{u_n}{2} = \arcsin \frac{a_n x + b_n}{2} \sim -\frac{\pi(-x)^{1/2}}{2n} + \frac{\pi}{2}, n \rightarrow \infty, \quad (6.17)$$

и користећи (6.16) добијамо

$$\frac{a_n x + b_n}{2} \sim \cos \frac{\pi(-x)^{1/2}}{2n} \sim 1 + \frac{x\pi^2}{8n^2}, n \rightarrow \infty. \quad (6.18)$$

Према томе, асимптотске константе су облика $a_n = \frac{\pi^2}{4n^2}$ и $b_n = 2$, $n \in \mathbf{N}$.

Користећи Теорему 6.2, важи да $n(1 - F(u_n)) \sim (-x)^{1/2}$, $n \rightarrow \infty$. Даље, важи

$$\arcsin \left(1 - \frac{\pi^2(-x)}{8n^2} \right) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{(-x)^{1/2}}{n} \right), n \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

Користећи (6.19) и Теорему 6.2, имамо

$$\tau_n = n \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u_n}{2} \right) = n \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{x\pi^2}{8n^2} + 1 \right) \right), n \rightarrow \infty, \quad (6.20)$$

и $\tau = (-x)^{1/2}$. Стога

$$\Delta_n + \Delta'_n \sim -\frac{e^{-(-x)^{1/2}}(-x)}{2n}, n \rightarrow \infty.$$

Случај 2: Почетак је идентичан као и пре. Користећи функцију расподеле $F_{M_n}(\cdot)$ и низ $\{u_n\}$ закључујемо да

$$F_{M_n}(a_n x + b_n) = \exp\{n(2 \ln(a_n x + b_n) - \ln 4)\}. \quad (6.21)$$

Параметар облика је 1. Стога, за свако $x < 0$, важи да

$$n(2 \ln(a_n x + b_n) - \ln 4) \sim x, n \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

и самим тим

$$2 \ln(a_n x + b_n) \sim \frac{x}{n} + \ln 4, n \rightarrow \infty, \quad (6.23)$$

што је еквивалентно са

$$\ln \frac{a_n x + b_n}{2} \sim \frac{x}{2n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

Из (6.11) следи

$$\ln \frac{a_n x + b_n}{2} \sim -1 + \frac{a_n x + b_n}{2}, n \rightarrow \infty, \quad (6.25)$$

одакле имамо да

$$a_n x + b_n \sim 2 + \frac{x}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.26)$$

Према томе, $a_n = 1/n$ и $b_n = 2$ за $n \in \mathbf{N}$. Нека је τ_n дато са

$$\tau_n = n(1 - F(u_n)) = n \left(1 - \frac{(x/n + 2)^2}{4} \right) = -\frac{x^2}{4n} - x, \quad (6.27)$$

где је

$$\tau - \tau_n = -x - \left(-\frac{x^2}{4n^2} - x \right) = \frac{x^2}{4n^2} \quad (6.28)$$

и

$$\Delta_n + \Delta'_n \sim -\frac{e^x x^2}{2n} + \frac{e^x x^2}{4n^2} = \frac{e^x x^2}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right), n \rightarrow \infty.$$

Случај 3: Као и пре,

$$F_{M_n}(u_n) = \exp \left\{ n \ln \left(1 - \frac{\sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \right\}, \quad (6.29)$$

где је $\alpha = 1/2$, према (6.10), за свако $x < 0$. За низ $\{u_n\}$ важи

$$\ln \left(1 - \frac{\sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \sim \frac{-(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.30)$$

Користећи (6.12) и (6.30), имамо

$$\ln \left(1 - \frac{\sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \sim -\frac{\sqrt{4 - u_n^2}}{2}, n \rightarrow \infty, \quad (6.31)$$

те

$$\sqrt{1 - \frac{u_n^2}{4}} \sim \frac{(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.32)$$

Даље, из (6.31) и (6.32), имамо

$$\frac{u_n}{2} \sim \sqrt{1 + \frac{x}{n^2}} \sim 1 + \frac{x}{2n^2}, n \rightarrow \infty. \quad (6.33)$$

Нормирајуће константе су облика $a_n = 1/n^2$ и $b_n = 2$ за $n \in \mathbf{N}$. Евидентно је и понашање τ_n

$$\tau_n = \frac{n}{2} \sqrt{4 - u_n^2} = \sqrt{-x} \sqrt{1 + \frac{x}{4n^2}} \sim \sqrt{-x} \left(1 + \frac{x}{8n^2} \right), n \rightarrow \infty. \quad (6.34)$$

$\tau = (-x)^{1/2}$. Одакле имамо

$$\Delta_n + \Delta'_n \sim -\frac{e^{-(-x)^{1/2}}(-x)}{2n} + \frac{e^{-(-x)^{1/2}}(-x)^{3/2}}{8n^2}, n \rightarrow \infty.$$

Случај 4: Са једним кораком унапред, са одређеним параметром облика $\alpha = 1/2$ на основу (6.10), за свако $x < 0$ и $\{u_n\}$ дефинисаним као пре, имамо

$$\ln \left[\frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{u_n}{2} - \frac{u_n \sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \right] \sim -\frac{(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.35)$$

Користећи (6.11), лева страна израза (6.35) се апроксимира са

$$\ln \left[\frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{u_n}{2} - \frac{u_n \sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \right] \sim -1 + \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{u_n}{2} - \frac{u_n \sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right), \quad (6.36)$$

када $n \rightarrow \infty$, где је

$$\frac{u_n \sqrt{4 - u_n^2}}{2} = \frac{u_n}{2} \sqrt{(2 - u_n)(2 + u_n)} \sim u_n \sqrt{2 - u_n} \sim 2\sqrt{2 - u_n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.37)$$

Даље важи

$$-1 + \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{u_n}{2} - \frac{u_n \sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \sim -\frac{4}{\pi} \sqrt{2 - u_n}, n \rightarrow \infty, \quad (6.38)$$

и за свако $x < 0$

$$-\frac{4}{\pi} \sqrt{2 - u_n} \sim -\frac{(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.39)$$

После једноставног израчунавања, добијамо

$$2 - a_n x + b_n \sim \frac{\pi^2 (-x)}{16 n^2}, n \rightarrow \infty, \quad (6.40)$$

што имплицира да су нормирајуће константе асимптотски одређене са $a_n = \frac{\pi^2}{16n^2}$ and $b_n = 2$ за $n \in \mathbf{N}$. За други део доказа, важи да

$$\begin{aligned} \tau_n &= n \left(1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{u_n}{2} - \frac{u_n \sqrt{4 - u_n^2}}{2} \right) \right) \sim \frac{2 n u_n \sqrt{4 - u_n}}{2} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{-x} \frac{\pi}{4n} n \left(\frac{\pi^2}{16n^2} x + 2 \right) \sqrt{1 + \frac{\pi^2 x}{64n^2}} \sim \sqrt{-x} \left(1 + \frac{\pi^2 x}{128n^2} \right), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Као и $\tau = (-x)^{1/2}$. Одавде

$$\Delta_n + \Delta'_n \sim -\frac{e^{-(-x)^{1/2}}(-x)}{2n} + \frac{e^{-(-x)^{1/2}}(-x)^{3/2}\pi^2}{128n^2}, n \rightarrow \infty.$$

Случај 5: Параметар облика Вејбулове расподеле је $\alpha = 1/2$. Са неколико корака унапред имамо, за свако $x < 0$, да

$$n \ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4 - u_n^2}}{2} - \frac{u_n(6 + u_n^2)\sqrt{4 - u_n^2}}{12\pi} \right) \sim -(-x)^{1/2}, n \rightarrow \infty, \quad (6.41)$$

што је еквивалентно са

$$\ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{2} - \frac{u_n(6+u_n^2)\sqrt{4-u_n^2}}{12\pi} \right) \sim -\frac{(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (6.42)$$

Користећи (6.11), (6.41), (6.42) и (6.13), имамо

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{2} - \frac{u_n(6+u_n^2)\sqrt{4-u_n^2}}{12\pi} \right) \sim \\ & -1 + \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{2} - \frac{u_n(6+u_n^2)\sqrt{4-u_n^2}}{12\pi} \sim -\frac{(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{2} - \frac{u_n(6+u_n^2)\sqrt{4-u_n^2}}{12\pi} \sim \\ & 1 - \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{\pi} - \frac{u_n(6+u_n^2)\sqrt{4-u_n^2}}{12\pi} \sim 1 - \frac{16}{3\pi} \sqrt{2-u_n}, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

За свако $x < 0$, важи

$$\frac{16}{3\pi} \sqrt{2-u_n} \sim \frac{(-x)^{1/2}}{n}, n \rightarrow \infty, \quad (6.43)$$

и

$$2 - (a_n x + b_n) \sim \frac{9\pi^2}{256n^2} (-x), n \rightarrow \infty. \quad (6.44)$$

Нормирајуће константе су облика $a_n = \frac{9\pi^2}{256n^2}$ и $b_n = 2$, $n \in \mathbf{N}$. Разматрамо надаље асимптотско понашање τ_n . Важи

$$\begin{aligned} \tau_n &= n \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{2} + \frac{u_n(6+u_n^2)\sqrt{4-u_n^2}}{12\pi} \right) \sim \\ & n \frac{\sqrt{4-u_n^2}}{\pi} \left(1 + \frac{u_n(6+u_n^2)}{12} \right) \sim \\ & (-x)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{9x\pi^2}{1024n^2}} \sim (-x)^{1/2} \left(1 + \frac{9x\pi^2}{2048n^2} \right), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Користећи $\tau = (-x)^{1/2}$, добијамо

$$\Delta_n + \Delta'_n \sim -\frac{e^{-(-x)^{1/2}}(-x)}{2n} + \frac{e^{-(-x)^{1/2}}9\pi^2(-x)^{3/2}}{2048n^2}, n \rightarrow \infty.$$

Случај 6: Вејбулова расподела екстремних вредности, у овом случају, има параметар облика $\alpha = 1/2$. Односно, постоје константе $a_n > 0$ и b_n тако да $P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

$e^{-(-x)^{1/2}}$, за $x < 0$. Ово је еквивалентно са

$$(F_L(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-(-x)^{1/2}}, \quad (6.45)$$

што се може представити и као

$$\ln F_L(a_n x + b_n) = -\frac{(-x)^{1/2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (6.46)$$

за $x < 0$. Нека је $\{u_n\} = \{a_n x + b_n\}$ и нека је дат низ функција $\{f_n(t)\}_{n \geq 1}$ дефинисаних као

$$f_n(t) = \frac{1 - \frac{2}{t} \operatorname{arccsc}\left(\frac{2 \operatorname{csc}(\frac{t}{2})}{\sqrt{4 - u_n^2}}\right)}{\pi}, \quad n \geq 1. \quad (6.47)$$

Евидентно је да

$$|f_n(t)| \leq 1 =: g(t), \quad (6.48)$$

за свако $t \in (0, \pi)$ и $n \geq 1$, где је $\int_0^\pi g(t) dt = \pi < \infty$. Поред тога, низ $\{f_n\}$ конвергира тачка по тачка кад $n \rightarrow \infty$. Стога, сви услови за примену теореме о доминантној конвергенцији су испуњени. Помоћу ове теореме и користећи следеће изразе $\operatorname{arccsc}(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ кад $x \rightarrow \infty$ и $e^x = 1 + x + o(x)$ кад $x \rightarrow 0$, добијамо

$$-\ln \pi + \ln \int_0^\pi \left(1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2}\right)^2} \frac{1}{t \operatorname{csc} \frac{t}{2}}\right) dt = -\frac{(-x)^{1/2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

за $n \rightarrow \infty$ и $x < 0$. Обележимо са $C = \int_0^\pi \frac{1}{t \operatorname{csc} \frac{t}{2}} dt$. Надаље, имамо

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{2C}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2}\right)^2}\right) &= -\frac{(-x)^{1/2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \text{i.e.,} \\ \frac{2C}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2}\right)^2} &= -\frac{(-x)^{1/2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (6.49)$$

за $n \rightarrow \infty$ и $x < 0$. Директно, константе се могу одабрати као $a_n = \frac{\pi^2}{4C^2 n^2}$ и $b_n = 2$ за $n \geq 1$.

Нека је $\tau_n = n(1 - F_L(u_n))$ и $\tau = (-x)^{1/2}$. Даље следи да је $\tau - \tau_n \sim \frac{\pi^2}{32C^2 n^2} (-x)^{3/2}$ и самим тим брзина конвергенције је $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

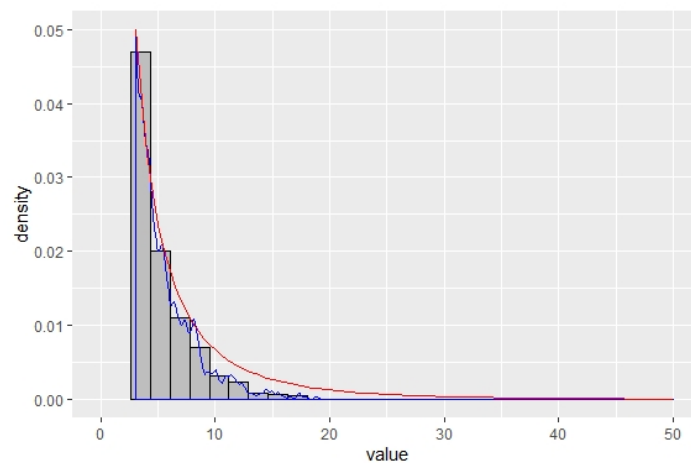
□

Због компликованог облика функције расподеле (6.9), нисмо у стању да одредимо асимптотске нормирајуће константе у експлицитном облику, као и брзину конвергенције,

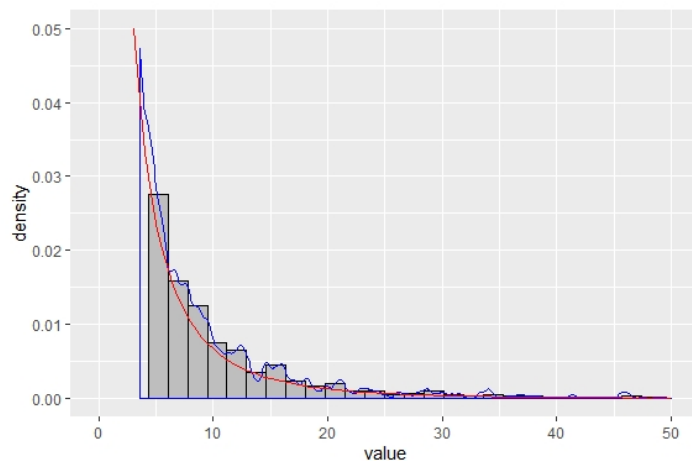
на начин као што је урађено у Теорему 6.4. Искористићемо нумеричку анализу за одређивање њихових вредности (в. Табелу 6.3), док брзину конвергенције представљамо графички за случајеве $n = 2, 5, 10$ и 25 , где можемо интуитивно да увидимо брзину поклапања теоријске и емпиријске расподеле (в. Сlike 6.2, 6.3, 6.4 и 6.5). Емпиријски је показано да константа a_n тежи нули када n расте.

Табела 6.3: Нумеричке вредности константи a_n и b_n .

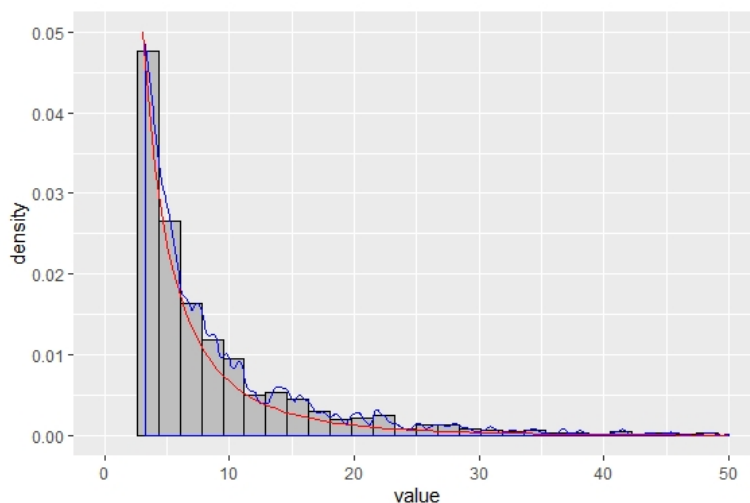
n	a_n	b_n
2	0.06784	2
3	0.02095	2
4	0.00958	2
5	0.00531	2
6	0.00332	2
7	0.00225	2
8	0.00159	2
9	0.00120	2
10	0.00087	2
15	0.00037	2
20	0.00018	2
25	0.00012	2



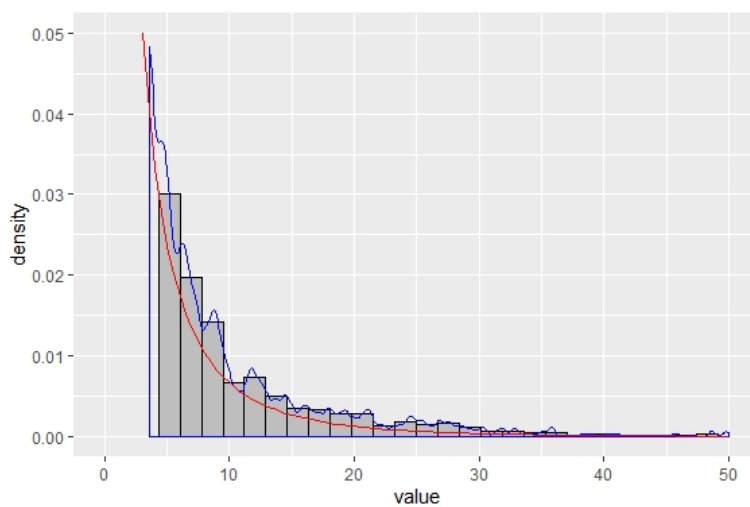
Слика 6.2: Емпиријска (плава боја) расподела нормираног максимума $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ за $n = 2$ и одговарајућа асимптотска (црвена боја) расподела.



Слика 6.3: Емпиријска (плава боја) расподела нормираног максимума $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ за $n = 5$ и одговарајућа асимптотска (црвена боја) расподела.



Слика 6.4: Емпиријска (плава боја) расподела нормираног максимума $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ за $n = 10$ и одговарајућа асимптотска (црвена боја) расподела.



Слика 6.5: Емпиријска (плава боја) расподела нормираног максимума $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ за $n = 25$ и одговарајућа асимптотска (црвена боја) расподела.

Теорема 6.5 Асимптотска расподела горњих рекорда са расподелама (6.1-6.5) и (6.7) је дегенерисана.

Доказ. Нека је $\{X_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина са расподелом $F(x)$ која одговара некој од расподела (6.1-6.5) и (6.7). Нека је $\{Y_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина са асоцираном расподелом $F_a(x) = 1 - \exp\{-\sqrt{-\log(1 - F(x))}\}$. Применом Теореме 6.1, Последице 6.1 и Теореме дуалности на низ $\{Y_n\}$, доказ леме следи. \square

6.5 Моменти рекордних случајних тетива

У овом одељку су представљени аналитички изрази за l -те моменте, где је $l \geq 1$, горњих рекорда из расподела (6.1-6.5) и (6.7).

Теорема 6.6 Нека је $\phi_1(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} (-1)^i \frac{x^j}{4^i}$ и $\phi_2(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{i} (-1)^i \frac{x^j}{4^i}$. За $n \geq 2$ и $l \geq 1$, l -ти момент рекорда дужина случајних тетива са расподелама (6.1-6.5) и (6.7), респективно, су дати са

$$\bullet \mu_{n,l}^{(1)} = \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1} x^{m+1}}{(m+1)\pi^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k} \right\}^{n-1} \phi_1(2i+l) dx, \quad (6.50)$$

где је $c_0 = b_0^{m+1}$, $c_j = \frac{1}{jb_0} \sum_{k=1}^j (k(m+1) - j + k) b_k c_{j-k}$, за $j \geq 1$ и $\{b_k, k \geq 0\} = \left\{ \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{4k+1}(2k+1)}, k \geq 0 \right\}$;

$$\bullet \mu_{n,l}^{(2)} = \frac{2^{l+1}}{\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{2m+2n+l}, \quad (6.51)$$

где је $c_0 = 1$, $c_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (k(n-1) - m + k) \frac{c_{m-k}}{k+1}$ за $m \geq 1$;

$$\bullet \mu_{n,l}^{(3)} = \frac{2^{l-n} \sqrt{\pi}}{\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{\Gamma(\frac{l}{2} + m + u)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{l}{2} + m + u)}, \quad (6.52)$$

где је $c_0 = 1$, $c_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (k(n-1) - m + k) \frac{c_{m-k}}{k+1}$ за $m \geq 1$;

$$\bullet \mu_{n,l}^{(4)} = \frac{1}{2\pi\Gamma(n)} \int_0^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1} x^{m+1}}{\pi^{m+1}(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k} \right\}^{n-1} \phi_1(2(i+1)+l) dx, \quad (6.53)$$

где же $\{d_k, k \geq 0\} = \left\{ \frac{\binom{2k}{k}}{2^{4k+1}(2k+1)} + \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}}, k \geq 0 \right\}$ $u c_0 = d_0^{m+1}, c_j = \frac{1}{jd_0} \sum_{k=1}^j (k(m+1) - j + k)d_k c_{j-k}$ за $j \geq 1$;

$$\bullet \mu_{n,l}^{(5)} = \frac{1}{6\pi\Gamma(n)} \int_0^2 \left[-\log \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k-1}(2k+1)} \phi_2(2i)^{2k+1} + \frac{(x^2+6)\phi_2(2i+1)}{6\pi} \right) \right]^{n-1} \times \phi_1(2(i+2)+l) dx; \quad (6.54)$$

$$\bullet \mu_{n,l}^{(6)} = \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^2 \left[-\log \left(1 - \int_0^\pi \frac{t - 2\operatorname{arccsc}(\csc(t/2)\phi_1(2i))}{t\pi} dt \right) \right]^{n-1} \times \left(\int_0^\pi \frac{1}{t} \frac{\phi_1(2i+1+l)}{\sqrt{4(\csc^2 \frac{t}{2} - 1) + x^2}} dt \right) dx. \quad (6.55)$$

Доказ. Током доказа неколико пута ћемо користити Лему 4.2.

• **Случај (6.50)**

Важи да

$$\begin{aligned} \mu_{n,l}^{(1)} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^2 x^l \{-\log(1 - F(x))\}^{n-1} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^2 x^l \left\{ -\log \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} \right) \right\}^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Развојем $\arcsin \frac{x}{2}$ у степени ред, имамо

$$\begin{aligned} \mu_{n,l}^{(1)} &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^2 x^l \left\{ -\log \left(1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{2^{4k+1}(2k+1)} \right) \right\}^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \\ &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^2 x^l \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1} x^{m+1}}{(m+1)\pi^{m+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k}}{2^{4k+1}(2k+1)} \right)^{m+1} \right\}^{n-1} \\ &\quad \times \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Нека је $\{b_k, k \geq 0\} = \left\{ \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{4k+1}(2k+1)}, k \geq 0 \right\}$. Користећи Лему 4.2 имамо

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x^2)^k \right)^{m+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x^2)^k, \quad (6.58)$$

где је $c_0 = b_0^{m+1}$ и $c_j = \frac{1}{j b_0} \sum_{k=1}^j (k(m+1) - j + k) b_k c_{j-k}$ за $j \geq 1$. Одавде имамо

$$\begin{aligned} \mu_{n,l}^{(1)} &= \frac{1}{\pi \Gamma(n)} \int_0^2 x^l \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1} x^{m+1}}{(m+1)\pi^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k} \right\}^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \\ &= \frac{1}{\pi \Gamma(n)} \int_0^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1} x^{m+1}}{(m+1)\pi^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k} \right\}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} (-1)^i \frac{x^{2i+l}}{4^i} dx. \end{aligned} \quad (6.59)$$

• **Случај (6.51)**

Развојем $-\log\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ у степени ред и користећи Лему 4.2, добијамо

$$\begin{aligned} \mu_{n,l}^{(1)} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^2 x^l \left\{ -\log\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \right\}^{n-1} \frac{x dx}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n-1} \Gamma(n)} \int_0^2 x^{2n+l-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \left(\frac{x^2}{4}\right)^m \right\}^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n-1} \Gamma(n)} \int_0^2 x^{2n+l-1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\frac{x^2}{4}\right)^m dx \\ &= \frac{2^{l+1}}{\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{2m + 2n + l}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

где је $c_0 = 1$, $c_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (k(n-1) - m + k) \frac{c_{m-k}}{k+1}$ за $m \geq 1$.

• Случај (6.52)

Применом биномне формуле и Леме 4.2, имамо

$$\begin{aligned}
\mu_{n,l}^{(2)} &= \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^2 x^l \left\{ -\log \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right\}^{n-1} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \int_0^2 \left\{ -\log \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) \right\}^{n-1} \frac{x^{l+1} dx}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \int_0^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+2}}{(m+1)4^{m+1}} \right\}^{n-1} \frac{x^{l+1} dx}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \int_0^2 \frac{x^{2(n-1)}}{4^{n-1}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \left(\frac{x^2}{4} \right)^m \right\}^{n-1} \frac{x^{l+1} dx}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \int_0^2 \frac{x^{2(n-1)}}{4^{n-1}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\frac{x^2}{4} \right)^m \frac{x^{l+1} dx}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{2^l \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{l}{2} + m + u)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{l}{2} + m + u)} \\
&= \frac{2^{l-n} \sqrt{\pi}}{\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{\Gamma(\frac{l}{2} + m + u)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{l}{2} + m + u)},
\end{aligned} \tag{6.61}$$

где је $c_0 = 1$, $c_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (k(n-1) - m + k) \frac{c_{m-k}}{k+1}$ за $m \geq 1$.

• Случај (6.53)

Као и пре, добијамо

$$\begin{aligned}
\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{4} \sqrt{4-x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{4k+1} (2k+1)} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\binom{2k}{k}}{2^{4k+1} (2k+1)} + \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} \right] x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k+1},
\end{aligned} \tag{6.62}$$

где је $\{d_k, k \geq 0\} = \left\{ \frac{\binom{2k}{k}}{2^{4k+1}(2k+1)} + \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}}, k \geq 0 \right\}$. Стога,

$$\begin{aligned} -\log \{1 - F(x)\} &= -\log \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k+1} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} x^{m+1} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x^2)^k \right)^{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}}{\pi^{m+1}(m+1)} x^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

где је $c_0 = d_0^{m+1}$, $c_j = \frac{1}{j d_0} \sum_{k=1}^j (k(m+1) - j + k) d_k c_{j-k}$ за $j \geq 1$.

• **Случај (6.54)**

Развојем (6.5) у степени ред, добијамо

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi} \arccos(\phi_2(2i)) - \frac{x(x^2+6)}{6\pi} \phi_2(2i) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k-1}(2k+1)} \phi_2(2i)^{2k+1} - \frac{(x^2+6)\phi_2(2i+1)}{6\pi}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Остатак доказа следи директно.

• **Случај (6.55)**

Функција расподеле (6.7) и одговарајућа функција густине расподеле се могу представити као

$$F(x) = \int_0^{\pi} \frac{t - 2 \operatorname{arccsc}(\csc(t/2)\phi_1(2i))}{t\pi} dt, \quad (6.65)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{t} \frac{\phi_1(2i+1)}{\sqrt{4(\csc^2 \frac{t}{2} - 1) + x^2}} dt. \quad (6.66)$$

Можемо да представимо l -ти моменат горњих рекорда дужине случајне тетиве са (6.7) као

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mu_{n,l}^{(6)} &= \frac{1}{\pi \Gamma(n)} \int_0^2 \left[-\log \left(1 - \int_0^{\pi} \frac{t - 2 \operatorname{arccsc}(\csc(t/2)\phi_1(2i))}{t\pi} dt \right) \right]^{n-1} \\ &\quad \times \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{t} \frac{\phi_1(2i+1+l)}{\sqrt{4(\csc^2 \frac{t}{2} - 1) + x^2}} dt \right) dx. \end{aligned} \quad (6.67)$$

□

Напомена

На основу Теореме 2.9, можемо да закључимо да низ момената рекордних вредности (6.50–6.54) једнозначно одређују одговарајуће функције расподела (6.1–6.5) и (6.7), редом.

Даљи правци истраживања

У овој дисертацији истраживани су проблеми егзистенције и јединствености оцена параметара на основу ММВ, где су рекорди базични подаци. Приказане су фамилије расподела за које се показало да рекорди одређују јединствене оцене параметара. Оригинални резултати су представљени у одељцима 3.4.12 и 3.4.13, где су питања егзистенције и јединствености оцена МВ за фамилије LXM модификованих Вејбулових расподела и фамилије екстензија Вејбулових расподела, представљених од стране Пенга и Јанга, потврђена. У глави 4 су представљене рекурентне везе момената на основу рекорда из ове фамилије екстензија Вејбулове расподеле. Глава 5 представља допринос аутора на пољу Бајесовог закључивања заснованог на рекордима, чији значај се огледа кроз теоријски и практични оквир. У глави 6 описана су асимптотска својства максимума случајних тетива и предочена је карактеризација расподела случајних тетива на основу момената рекорда.

Могући даљи развој истраживања се односи на испитивање постојања и јединствености оцене параметара других фамилија са вишедимензионалним параметром, на основу рекорда. Било би занимљиво наћи оцене параметара ММВ на основу неких других схема рекорда. Ови резултати се могу искористити и у теорији поузданости. Посебан интерес лежи у оцени параметара на основу рекорда који потичу из низа случајних величина где је потенцијално нарушена особина независности или једнаке расподељености. Овакав приступ до сад није наишао на заинтересованост истраживача, али значај оваког приступа произилази из свакодневних реалних проблема. Поједини детаљи о рекордима из вероватносних модела са нарушеном особином независности или једнаке расподељености могу да се пронађу у [138].

Остали правци истраживања могу укључивати и следеће:

1. одређивање рекурентних веза момената рекорда нових фамилија расподела,
2. анализу перформанси Бајесових оцена статистика поретка из будућег узорка на основу рекорда за Сарханов модел модификоване Вејбулове расподеле,

-
3. проналазак нових метода избора случајне тетиве,
 4. одређивање Фишерове информације рекорда и њихових времена остваривања за различите схеме рекорда,
 5. нове тестове сагласности на основу рекорда (в. нпр. [45]).

Литература

- [1] Aarset, M. V. (1987), How to identify a bathtub hazard rate, *IEEE Transactions on Reliability* 36(1), pp. 106-108.
- [2] Aerts, D. and de Bianchi, M. S. (2014), Solving the hard problem of Bertrand's paradox, *Journal of Mathematical Physics* 55(8), pp. 83503.
- [3] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2001), On the Fisher information in record values, *Metrika* 53(3), pp. 195-206.
- [4] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003), Comparing the Fisher information in record values and iid observations, *Statistics* 37(5), pp. 435-441.
- [5] Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2004), Confidence intervals for quantiles in terms of record range, *Statistics & Probability letters* 68(4), pp. 395-405.
- [6] Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2005), Distribution-free confidence intervals for quantile intervals based on current records, *Statistics & Probability letters* 75(3), pp. 190-202.
- [7] Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2010), Prediction of order statistics and record values from two independent sequences, *Statistics* 44(4), pp. 417-430.
- [8] Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2006), Bayesian estimation and prediction for some life distributions based on record values, *Statistical Papers* 47(3), pp. 373-392.
- [9] Ahmadi, J. and MirMostafaei, S. M. T. K. (2009), Prediction intervals for future records and order statistics coming from two parameter exponential distribution, *Statistics & Probability Letters* 79(7), pp. 977-983.
- [10] Ahmadi, J. and MirMostafaei, S. M. T. K. and Balakrishnan, N. (2011), Bayesian prediction of order statistics based on k-record values from exponential distribution, *Statistics* 45(4), pp. 375-387.
- [11] Ahmadi, J., Jozani, M. J., Marchand, É. and Parsian, A. (2009), Prediction of k-records from a general class of distributions under balanced type loss functions, *Metrika* 70(1), pp. 19-33.

-
- [12] Ahsanullah, M. (1978), Record values and the exponential distribution, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 30(1), pp. 429-433.
- [13] Ahsanullah, M. (1979), Characterization of the exponential distribution by record values, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B* 41(1/2), pp. 116-121.
- [14] Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B. (2015), *Records via probability theory*, Springer.
- [15] Ahsanullah, M., Nevzorov, V. B. and Nevzorova, L. (2014), Characterizations of distributions via record values with random exponential shifts, *Journal of Statistical Theory and Applications* 13(4), pp. 311-316.
- [16] Aldous, D. (1994), Triangulating the circle, *The American Mathematical Monthly* 101(3), pp. 223-233.
- [17] Al-Malki, S. J. (2014), *Statistical analysis of lifetime data using new modified Weibull distributions*, PhD thesis, University of Manchester.
- [18] Ardakani, M. K. and Wulff, S. S. (2014), An extended problem to Bertrand's paradox, *Discussiones Mathematicae* 34, pp. 23-34.
- [19] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley & Sons.
- [20] Asgharzadeh, A., Fallah, A., Raqab, M.Z. and Valiollahi, R. (2018), Statistical inference based on Lindley record data, *Statistical Papers* 59(2), pp. 759-779.
- [21] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Abdi, M. (2016), Point and interval estimation for the logistic distribution based on record data, *SORT-Statistics and Operations Research Transactions* 1(1), pp. 89-112.
- [22] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2017), Estimation of $\Pr(Y < X)$ for the two-parameter generalized exponential records, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 46(1), pp. 379-394.
- [23] Bairamov, I. G. (1997), Some distribution free properties of statistics based on record values and characterizations of the distributions through a record, *J. Appl. Statist. Sci* 5(1), pp. 17-25.
- [24] Balakrishnan, N. and Ahsanullah, M. (1994), Recurrence relations for single and product moments of record values from generalized Pareto distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods* 23(10), pp. 2841-2852.
- [25] Balakrishnan, N. and Chan, P.S. (1998), On the normal record values and associated inference, *Statistics & Probability letters* 39(1), pp. 73-80.
- [26] Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014), *The art of progressive censoring*, Springer.

-
- [27] Balakrishnan, N. and Mi, J. (2003), Existence and uniqueness of the MLEs for normal distribution based on general progressively Type-II censored samples, *Statistics & Probability Letters* 64(4), pp. 407-414.
- [28] Balakrishnan, N., Ahsanullah, M. and Chan, P.S. (1992), Relations for single and product moments of record values from Gumbel distribution, *Statistics & Probability letters* 15(3), pp. 223-227.
- [29] Balakrishnan, N., Balasubramanian, K. and Panchapakesan, S. (1996), δ -exceedance records, *Journal of Applied Statistical Society* 4, pp. 123-132.
- [30] Bangu, S. (2009), On Bertrand's paradox, *Analysis* 70(1), pp. 30-35.
- [31] Barakat, H.M. and Nigm, E.M. and Aldallal, R.A. (2014), Current records and record range with some applications, *Journal of the Korean Statistical Society* 43(2), pp. 263-273.
- [32] Barlow, R. E. and Campo, R. A. (1975), Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis, *California University Berkeley Operations Center*.
- [33] Barlow, R. E. and Doksum, K. A. (1972), Isotonic tests for convex orderings, *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 1, pp. 293-323.
- [34] Barnett, V.D. (1966), Evaluation of the maximum-likelihood estimator where the likelihood equation has multiple roots, *Biometrika* 53(1/2), pp. 151-165.
- [35] Benestad, R. E. (2004), Record-values, nonstationarity tests and extreme value distributions, *Global and Planetary Change* 44(1-4), pp. 11-26.
- [36] Bertrand, J. L. F. (1888), *Caclul des probabilités*, Paris: Gauthier-Villars.
- [37] Burr, I. W. (1942), Cumulative frequency functions, *The Annals of mathematical statistics* 13(2), pp. 215-232.
- [38] Burridge, J. (1981), A note on maximum likelihood estimation for regression models using grouped data, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 43(1), pp. 41-45.
- [39] Chandler, K. N. (1952), The distribution and frequency of record values, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 14(2), pp. 220-228.
- [40] Chang, S.-K. (2007), Characterizations of the Pareto distribution by the independence of record values, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society* 20(1), pp. 51-57.
- [41] Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 8(1), pp. 69-92.

-
- [42] Chiu, S. S. and Larson, R. C. (2009), Bertrand's paradox revisited: More lessons about that ambiguous word, random, *Journal of Industrial and Systems Engineering* 3(1), pp. 1-26.
- [43] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D. J. and Knuth, D. E. (1996), On the Lambert W function, *Advances in Computational mathematics* 5(1), pp. 329-359.
- [44] Cox, N. R. (1976), A note on the determination of the nature of turning points of likelihoods, *Biometrika* 63(1), pp. 199-201.
- [45] Doostparast, M. (2011). Goodness-of-fit tests for Weibull populations on the basis of records, arXiv:1110.5509.
- [46] Dwass, M. (1964), Extremal processes, *The Annals of Mathematical Statistics* 35(4), pp. 1718-1725.
- [47] Dziubdziela, W. and Kopociński, B. (1976), Limiting properties of the k-th record values, *Applicationes Mathematicae* 2(15), pp. 187-190.
- [48] Franco, M. and Ruiz, J.M. (1996), On characterization of continuous distributions by conditional expectation of record values, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A* 58(1), pp. 135-141.
- [49] Funkenbusch, W. W. (1962), A New Probability Model for Bertrand's Paradox, *Mathematics Magazine* 35(3), pp. 144.
- [50] Gembris, D. and Taylor, J. G. and Suter, D. (2002), Sports statistics: Trends and random fluctuations in athletics, *Nature* 6888(417), pp. 506.
- [51] Glick, N. (1972), Breaking records and breaking boards, *The American Mathematical Monthly* 85(1), pp. 2-26.
- [52] Gnedenko, B. (1943), Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire, *Annals of Mathematics* 3(44), pp. 423-453.
- [53] Gouet, R., López, F. J. and Sanz, G. (2012), Limit theorems for the counting process of near-records, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 41(6), pp. 820-832.
- [54] Gouet, R., López, F. J. and Sanz, G. (2015), On the point process of near-record values, *Test* 24(2), pp. 302-321.
- [55] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2014), *Table of integrals, series, and products*, Academic press.
- [56] Gupta, R. C. (1984), Relationships between order statistics and record values and some characterization results, *Journal of Applied Probability* 21(2), pp. 425-430.

-
- [57] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Theory & methods: Generalized exponential distributions, *Australian & New Zealand Journal of Statistics* 41(2), pp. 173-188.
- [58] Gyenis, Z. and Rédei, M. (2014), Defusing Bertrand's paradox, *British Journal for the Philosophy of Science* 66(2), pp. 349-373.
- [59] Haupt, E. and Schäbe, H. (1997), The TTT transformation and a new bathtub distribution model, *Journal of Statistical Planning and Inference* 60(2), pp. 229-240.
- [60] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. (1952), *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [61] Hofmann, G. (2004), Comparing the Fisher information in record data and random observations, *Statistical Papers* 45(4), pp. 517-528.
- [62] Hofmann, G. and Balakrishnan, N. (2004), Fisher information in k-records, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 56(2), pp. 383-396.
- [63] Hofmann, G. and Nagaraja, H.N. (2003), Fisher information in record data, *Metrika* 57(2), pp. 177-193.
- [64] Hogg, R. V. and Craig, A. T. (1995), *Introduction to mathematical statistics*, Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall.
- [65] Holbrook, J. and Soo-Kim, S. (2000), Bertrand's paradox revisited, *The Mathematical Intelligencer* 22(4), pp. 16-19.
- [66] Houchens, R.L. (1984), *Record value, theory and inference*, Ph.D. Dissertation, University of California, Riverside.
- [67] Jaheen, Z. F. (2004), Empirical Bayes inference for generalized exponential distribution based on records, *Communications in Statistics-Theory and Methods* 33(8), pp. 1851-1861.
- [68] Jevremović, V. and Obradović, M. (2012), Bertrand's paradox: Is there anything else?, *Quality & Quantity* 46(6), pp. 1709-1714.
- [69] Jiang, H., Xie, M. and Tang, L.C. (2010), On MLEs of the parameters of a modified Weibull distribution for progressively type-2 censored samples, *Journal of Applied Statistics* 37(4), pp. 617-627.
- [70] Jiang, R. and Murthy, D.N.P. (1997), Two sectional models involving three Weibull distributions, *Quality and Reliability Engineering International* 13(2), pp. 83-96.
- [71] Jiang, S. and Kececioglu, D. (1992), Graphical representation of two mixed-Weibull distributions, *IEEE Transactions on Reliability* 41(2), pp. 241-247.

- [72] Kizilaslan, F. and Nadar, M. (2015), Estimation with the generalized exponential distribution based on record values and inter-record times, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 85(5), pp. 978-999.
- [73] Kizilaslan, F. and Nadar, M. (2017), Statistical inference of $P(X < Y)$ for the Burr Type XII distribution based on records, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 46(4), pp. 713-742.
- [74] Klefsjö, B. (1982), On aging properties and total time on test transforms, *Scandinavian Journal of Statistics*, pp. 37-41.
- [75] Koroleva, E.V. and Nikitin, Y.Y. (2014), U-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons, *Journal of MultiDiate Analysis* 127, pp. 98-111.
- [76] Kotb, M. S. and Raqab, M. Z. (2017), Inference and prediction for modified Weibull distribution based on doubly censored samples, *Mathematics and Computers in Simulation* 132, pp. 195-207.
- [77] Kupczyński, M. (1987), Bertrand's paradox and Bell's inequalities, *Physics Letters A* 121(5), pp. 205-207.
- [78] Lai, C.D., Xie, M. and Murthy D.N.P. (2006), Bathtub shaped failure rate life distributions, *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, pp. 71-107.
- [79] Lai, C.D., Xie, M. and Murthy, D.N.P (2003), A modified Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability* 52(1), pp. 33-37.
- [80] Lawless, J. F. (1977), Prediction intervals for the two parameter exponential distribution, *Technometrics* 19(4), pp. 469-472.
- [81] Lawless, J. F. (2011), *Statistical models and methods for lifetime data*, John Wiley & Sons.
- [82] Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H. (2012), *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer Science & Business Media.
- [83] Lin, G.D. (1987), On characterizations of distributions via moments of record values, *Probability Theory and Related Fields* 74(4), pp. 479-483.
- [84] Petrović, Lj. (2010), *Teorijska statistika - Teorija statističkog zaključivanja*, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu.
- [85] Madi, M. T. and Raqab, M. Z. (2004), Bayesian prediction of temperature records using the Pareto model, *Environmetrics* 15(7), pp. 701-710.
- [86] Mäkeläinen, T., Schmidt, K. and Styan, G. P. H. (1981), On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimate of a vector-valued parameter in fixed-size samples, *The Annals of Statistics*, pp. 758-767.

- [87] Marinoff, L. (1994), A resolution of Bertrand's paradox, *Philosophy of Science* 61(1), pp. 1-24.
- [88] Mitra, M. and Basu, S. K. (1996), On some properties of the bathtub failure rate family of life distributions, *Microelectronics Reliability* 36(5), pp. 679-684.
- [89] Mladenović, P. (2002), *Ekstremne vrednosti slucajnih nizova*, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [90] Mladenović, P. (2005), *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd.
- [91] Mudholkar, G. S. and Srivastava, D. K. (1993), Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data, *IEEE Transactions on Reliability* 42(2), pp. 299-302.
- [92] Nadar, M. and Kizilaslan, F. (2014), Classical and Bayesian estimation of $P(X < Y)$ using upper record values from Kumaraswamy's distribution, *Statistical Papers* 55(3), pp. 751-783.
- [93] Nadarajah, S. (2006), The exponentiated Gumbel distribution with climate application, *Environmetrics* 17(1), pp. 13-23.
- [94] Nagaraja, H.N. (1977), On a characterization based on record values, *Australian Journal of Statistics* 19(1), pp. 70-73.
- [95] Nelson, W. (1982), *Lifetime data analysis*, Wiley, New York.
- [96] Neuts, M. F. (1967), Waiting times between record observations, *Journal of Applied Probability* 4(1), pp. 206-208.
- [97] Nevzorov, V. B. (1992), A characterization of exponential distributions by correlations between records, *Mathematical Methods of Statistics* (1), pp. 49-54.
- [98] Nevzorov, V. B. (2001), *Records: Mathematical theory*, American Mathematical Society.
- [99] Nevzorov, V.B. (2013), Record values with restrictions, *Vestnik of Saint Petersburg State University* 46(3), pp. 70-74.
- [100] Nevzorov, V.B. and Stepanov, A. (2014), Records with confirmation, *Statistics & Probability Letters* (95), pp. 39-47.
- [101] Peng, X. and Yan, Z. (2014), Estimation and application for a new extended Weibull distribution, *Reliability Engineering & System Safety* (121), pp. 34-42.
- [102] Pfeifer, D. (1982), Characterizations of exponential distributions by independent non-stationary record increments, *Journal of Applied Probability* 19(1), pp. 127-135.
- [103] Pham, H. and Lai, C.D. (2007), On recent generalizations of the Weibull distribution, *IEEE transactions on Reliability* 56(3), pp. 454-458.

- [104] Rajarshi, S. and Rajarshi, M.B. (1988), Bathtub distributions: A review, *Communications in Statistics—Theory and Methods* 17(8), pp. 2597-2621.
- [105] Raqab, M. Z. (2004), Generalized exponential distribution: Moments of order statistics, *Statistics*, 38(1), pp. 29-41.
- [106] Raqab, M. Z. (2006), Nonparametric prediction intervals for the future rainfall records, *Environmetrics* 17(5), pp. 457-464.
- [107] Raqab, M. Z., Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2007), Statistical inference based on record data from Pareto model, *Statistics* 41(2), pp. 105-118.
- [108] Raqab, M. Z. and Balakrishnan, N. (2008), Prediction intervals for future records, *Statistics & Probability Letters* 78(13), pp. 1955-1963.
- [109] Redner, S. and Petersen, M. R. (2006), Role of global warming on the statistics of record-breaking temperatures, *Physical Review E* 74(6), 061114.
- [110] Rényi, A. (1962), Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, *Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont-Ferrand* (8), pp. 7-13.
- [111] Resnick, S. I. (1973a), Limit laws for record values, *Stochastic Processes and Their Applications* 1(1), pp. 67-82.
- [112] Resnick, S. I. (1973b), Extremal processes and record value times, *Journal of Applied Probability* 10(4), pp. 864-868.
- [113] Resnick, S. I. (1973c), Record values and maxima, *The Annals of Probability* 1(4), pp. 650-662.
- [114] Rowbottom, D. P. (2012), Bertrand's Paradox Revisited: Why Bertrand's 'Solutions' Are All Inapplicable, *Philosophia Mathematica* 21(1), pp. 110-114.
- [115] Saghatelyan, V.K. (2013), Limit relations for records with confirmation, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis* 48(6), pp. 348-355.
- [116] Samaniego, F. J. and Whitaker, L. R. (1986), On estimating population characteristics from record-breaking observations. I. Parametric results, *Naval Research Logistics Quarterly* 33(3), pp. 531-543.
- [117] Sarhan, A. M. and Zaindin, M. (2009), Modified Weibull distribution, *Applied Sciences* 11, pp. 123-136.
- [118] Shackel, N. (2007), Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference, *Philosophy of Science* 74(2), pp. 150-175.
- [119] Shorrock, R. W. (1972), On record values and record times, *Journal of Applied Probability* 9(2), pp. 316-326.

- [120] Skřivánková, V. and Juhás, M. (2011), Characterization of standard extreme value distributions using records, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society* 24(3), pp. 401-407.
- [121] Soland, R. M. (1969), Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale and shape parameters, *IEEE Transactions on Reliability* 18(4), pp. 181-184.
- [122] Soliman, A. A., Ellah, A.H. A. and Sultan, K.S. (2006), Comparison of estimates using record statistics from Weibull model: Bayesian and non-Bayesian approaches, *Computational Statistics & Data Analysis* 51(3), pp. 2065-2077.
- [123] Soranzo, A. and Volčić, A. (1998), On the Bertrand paradox, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 47(3), pp. 503-509.
- [124] Stanley, R. P. (2000), *Enumerative combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.
- [125] Stoer, J. and Bulirsch, R. (2013), *Introduction to numerical analysis*, Springer Science & Business Media.
- [126] Sultan, K. S. (2007), Record values from the modified Weibull distribution and applications, *International Mathematical Forum* 41(2), pp. 2045-2054.
- [127] Sultan, K. S. and Moshref, M. E. (2000), Record values from generalized Pareto distribution and associated inference, *Metrika* 51(2), pp. 105-116.
- [128] Tarvirdizade, B. (2014), Estimation of $Pr(X > Y)$ for Exponentiated Gumbel Distribution based on lower record values, *İSTATİSTİK, Journal of the Turkish statistical association* 6(3), pp. 103-109.
- [129] Tarvirdizade, B. and Gharehchobogh, H. K. (2015), Inference on $Pr(X > Y)$ Based on Record Values from the Burr Type X Distribution, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* DOI: 10.15672/HJMS.2015468581
- [130] Tata, M. N. (1969), On outstanding values in a sequence of random variables, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 12(1), pp. 9-20.
- [131] Tiku, M.L. and Akkaya, A.D. (2004), Robust Estimation and Hypothesis Testing, *New Age International Publishers. Also, Oscar Publications.*
- [132] Tissier, P. E. (1984), Bertrand's paradox, *The Mathematical Gazette* 443(68), pp. 15-19.
- [133] Varian, H. R. (1975), A Bayesian approach to real estate assessment, *Studies in Bayesian econometric and statistics in Honor of Leonard J. Savage*, pp. 195-208.
- [134] Vidović, Z. (2016), Limit Distributions of Maximal Random Chord Length, *JASP* 5(2), pp. 213-220.

-
- [135] Vidović, Z. (2018), On MLEs of the modified Weibull distribution based on records, *Journal of Applied Statistics* 46(4), pp. 715-724.
- [136] Vidović, Z. (2019), Bayesian prediction of order statistics based on k-record values from a Generalized exponential distribution, *Stats* 2(4), pp. 447-456.
- [137] Vidović, Z. (2019), Moment relations of record values from a Peng-Yan extended Weibull distribution, *Matematički Vesnik* 71(1-2), pp. 162-168.
- [138] Wergen, G. (2012), *Records statistics beyond the standard model-Theory and applications*, Universität zu Köln.
- [139] Woodruff, B. W., Moore, A. H., Dunne, E. J. and Cortes, R. (1983). A modified Kolmogorov-Smirnov test for Weibull distributions with unknown location and scale parameters. *IEEE Transactions on Reliability*, 32(2), pp. 209-213.
- [140] Yanev, G. P. (2012), Characterization of exponential distribution via regression of one record value on two non-adjacent record values, *Metrika* 75(6), pp. 743-760.
- [141] Zhang, T. and Xie, M. (2007), Failure data analysis with extended Weibull distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 36(3), pp. 579-592.

Биографија аутора

Зоран Видовић је рођен 16.05.1990. године у Зворнику. Завршио је основну школу "Свети Сава" и средњу школу "Петар Кочић" у Зворнику.

Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду уписао је 2009. године и дипломирао на смеру Статистика, финансијска и актуарска математика 2013. године са просечном оценом 8,81. Мастер студије, на истом студијском програму, завршио је 2014. године са просечном оценом 9,00. Докторске студије Математичког факултета у Београду уписао је 2014. године.

На Учитељском факултету Универзитета у Београду од 2014. године држи вежбе на предметима Математика 1 и Математика 2.

Области његовог научног интересовања су теорија вероватноће и математичка статистика.

Објавио је следеће научне радове

– у часописима са SCI листе за теорију вероватноће и статистику:

1. Vidović, Z. (2018), On MLEs of the modified Weibull distribution based on records, *Journal of Applied Statistics* 46(4), pp. 715-724. **IF(2017): 0.699**

– у часописима са SCI листе за друге науке:

1. Simonović, P., Vidović, Z., Tošić, A., Škraba, D., Canak-Atlagic, J. and Nikolic, V. (2015), Risks to stocks of native trout of the genus *Salmo* (Actinopterygii: Salmoniformes: Salmonidae) of Serbia and management for their recovery, *Acta Ichthyologica et Piscatoria* 45(2), 161-173. **IF(2015): 0.622**
2. Glamuzina, B., Tutman, P., Nikolić, V., Vidović, Z., Pavličević, J., Vilizzi, L., Copp, G. H. and Simonović, P. (2017), Comparison of Taxon-Specific and Taxon-Generic Risk

Screening Tools to Identify Potentially Invasive Non-native Fishes in the River Neretva Catchment (Bosnia and Herzegovina and Croatia, *River Research and Applications* 33(5), 670-679. **IF(2017): 2.067**

– у часописима ван SCI листе:

1. Vidović, Z. (2016), Limit Distributions of Maximal Random Chord Length, *JASP* 5(2), pp. 213-220.
2. Vidović, Z. (2019), Moment relations of record values from a Peng-Yan extended Weibull distribution, *Matematički Vesnik* 71(1-2), pp. 162-168.
3. Vidović, Z. (2019), Bayesian prediction of order statistics based on k-record values from a Generalized exponential distribution, *Stats* 2(4), pp. 447-456.

Имао је следећа саопштења на научним конференцијама:

– штампано у целисти:

1. Vidović, Z., *Bertranov paradoks: Novi pogledi*, V Simpozijum Matematika i Primene, Beograd, Srbija, 2014.
2. Minić M., Vidović, Z., *Najčešće statističke greške u istraživanjima*, VI Simpozijum Matematika i Primene, Beograd, Srbija, 2015.
3. Vidović, Z., *Bertranov paradoks: Novi pristup*, VIII Simpozijum Matematika i Primene, Beograd, Srbija, 2017.

– штампано у изводу:

1. Vidović, Z., Milošević B., Obradović M. and Ilijević K., *Tests of normality and their sensitivity against particular alternatives*, 11th Applied Statistics, Ribno, Slovenija, 2014.
2. Vidović, Z., *Bayesian prediction of order statistics based on record values from generalized exponential distribution*, Approximation and computation - Theory and Applications (ACTA), Belgrade, Serbia, 2017.
3. Vidović, Z., *On MLEs of the parameters of a new extended Weibull distribution based on record values*, 14th Serbian Mathematical Congress, Kragujevac, Serbia, 2018.
4. Jovanović, M., Milošević, B., Obradović, M., Vidović, Z., *Estimation of stress-strength parameter for a new Weibull distribution*, 14th Serbian Mathematical Congress, Kragujevac, Serbia, 2018.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Зоран Видовић

број уписа 2023/2014

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Рекорди низа једнако расподељених случајних величина с применама

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 10. фебруара 2020.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Зоран Видовић

Број уписа 2023/2014

Студијски програм Вероватноћа и математичка статистика

Наслов рада **Рекорди низа једнако расподељених случајних величина с
применама**

Ментор доц. др Марко Обрадовић

Потписани Зоран Видовић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 10. фебруара 2020.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Рекорди низа једнако расподељених случајних величина с применама

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 10. фебруара 2020.

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.