УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марек Ф. Светлик

ОЦЕНЕ ШВАРЦ-ПИКОВОГ ТИПА ЗА ХАРМОНИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА И ХИПЕРБОЛИЧКА МЕТРИКА

докторска дисертација

Београд, 2020.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Marek F. Svetlik

SCHWARZ-PICK TYPE ESTIMATES FOR HARMONIC MAPPINGS AND HYPERBOLIC METRIC

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020.

Ментор:

академик Миодраг Матељевић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош Арсеновић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Борислав Гајић, виши научни сарадник
Математички институт САНУ

Датум одбране: ______________________

Наслов дисертације: Оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска пресликавања и хиперболичка метрика

Резиме: У овој дисертацији разматрамо разне верзије Шварцове леме и Шварц-Пикове леме за холоморфна, хармонијска и хармонијска квазирегуларна пресликавања. Осим што су приказани нови резултати, дат је и преглед резултата који се могу сматрати класичним. Као једна од најважнијих последица Шварц-Пикове леме за холоморфна пресликавања, детаљно је приказано и увођење хиперболичког растојања d_Ω на просто повезаним областима $\Omega \subset \mathbb{C}$ (таквим да је $\Omega \neq \mathbb{C}$), као и веза тог растојања са холоморфним пресликавањима.

Верзије Шварцове и Шварц-Пикове леме за хармонијска пресликавања приказане су као тврђења аналогна одговарајућим тврђењима за холоморфна пресликавања. У доказима тих тврђења коришћена су својства хиперболичког растојања и еуклидска својства хиперболичких дискова. Размотрене су верзије Шварцове леме најпре за хармонијска пресликавања из јединичног диска у интервал $(-1, 1)$, а затим и за хармонијска пресликавања јединичног диска у себе, са изостављеном претпоставком да се одговарајућим пресликавањем тачка $z = 0$ слика у себе. При томе, показано је да су одговарајуће неједнакости оштре и нађена су екстремална пресликавања. Применом метода појаса и полуравни дати су једноставни докази Шварц-Пикове леме за реално-вредносна хармонијска пресликавања, као и њихових последица формулисаних у терминима одговарајућих хиперболичких растојања. Како за холоморфна, тако и за хармонијска пресликавања формулисане и доказане су верзије Шварцове леме за дате вредности тих пресликавања и вредности норми њихових диференцијала у тачки $z = 0$. И у овом случају доказали смо да су одговарајуће неједнакости оштре и нађена су екстремална пресликавања. Показано је и да се истим методама могу добити Харнакове неједнакости за хармонијска пресликавања, као и њихова уопштења.

Даље, дајемо и једноставне доказе верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања чији је кодомен полураван или појас. Једна верзија Шварцове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања из јединичног диска у појас добијена је захваљујући одговарајућој (помало неочекиваној) неједнакости еуклидског и хиперболичког растојања на појасу. Коришћењем својстава Гаусове кривине показујемо и да су хармонијска квазиконформна пресликавања хиперболичког домена у конвексан хиперболички домен квази-изометрије одговарајућих метричких простора.

Увођење хиперболичког растојања приказано је на два начина. Први начин јесте класичан. Полазећи од хиперболичке метрике на јединичном диску, најпре се дефинише хиперболичка дужина C^1 криве и на крају хиперболичко растојање између две тачке. Други начин базиран је на аксиоматском заснивању апсолутне геометрије равни. Полазећи од теореме која се односи на егзистенцију и јединственост (до на јединицу мере) растојања у апсолутној равни (које је сагласно са основним релацијама - између и подударно), симултано изводимо формулу за то растојање у два модела те равни. Један од тих модела јесте скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$, посматран као модел еуклидске равни, а други јединични диск посматран као Поенкареов диск модел хиперболичке равни.

Кључне речи: Шварцова лема, Шварц-Пикова лема, хармонијска пресликавања, квазирегуларна пресликавања, квазиконформна пресликавања, хиперболичка метрика, Гаусова кривина, Алфорсова лема, квази-изометрија.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Комплексна анализа

Dissertation title: Schwarz-Pick type estimates for harmonic mappings and hyperbolic metric

Abstract: In this dissertation we consider various versions of the Schwarz lemma and the Schwarz-Pick lemma for holomorphic, harmonic and harmonic quasiregular mappings. In addition, in order to present new results, an overview of the results that can be considered as classical is given. As one of the most important consequence of the Schwarz-Pick lemma for holomorphic mappings, an introduction of the hyperbolic distance d_Ω on the simply connected domains $\Omega \subset \mathbb{C}$ (such that $\Omega \neq \mathbb{C}$) is given in details, as well as the connection of that distance and holomorphic mappings.

All versions of the Schwarz lemma and the Schwarz-Pick lemma for harmonic mappings are shown as assertions analogous to the corresponding claims for holomorphic mappings. In the proofs of these assertions, the properties of the hyperbolic distance and Euclidean properties of hyperbolic disks are used. Firstly, we considered some versions of the Schwarz lemma for harmonic mappings from the unit disk to the interval $(-1, 1)$ and then for harmonic mappings of the unit disk into itself, without the assumption that $z = 0$ is mapped to itself by the corresponding map. Thereby, the corresponding inequalities were shown to be sharp and extremal mappings were found. By using the strip and half plane method, simple proofs of the Schwarz-Pick lemma for real-valued harmonic mappings are given, as well as the simple proofs of their corollaries that are formulated in terms of corresponding hyperbolic distances. For both holomorphic and harmonic mappings a version of the Schwarz lemma have been formulated and proved in the case where the values of these mappings and values of the norms of their differentials, at the point $z = 0$, are given. Also, in that case we showed that the corresponding inequalities are sharp and extremal mappings were found. It has also been shown that the same methods can be used to obtain Harnack's inequalities for harmonic mappings, as well as for their generalizations.

Furthermore, we give simple proofs of a version of the Schwarz-Pick lemma for harmonic quasiregular mappings whose codomain is a half plane or a strip. One version of the Schwarz lemma for harmonic quasiregular mappings from the unit disk into a strip is obtained thanks to the appropriate (which seems unexpected) inequality satisfied by the Euclidean and hyperbolic distances on the strip. By using the properties of the Gaussian curvature we also show that harmonic quasiconformal mappings of the hyperbolic domain into convex hyperbolic domain are quasi-isometries of the corresponding metric spaces.

The introduction of the hyperbolic distance is shown in two ways. The first way is classical one. Starting from the hyperbolic metric on the unit disk, first we define the hyperbolic length of the C^1 curve and then the hyperbolic distance between two given points. The second one is based on the axiomatic foundation of the absolute plane geometry. Starting from the theorem related to the existence and the uniqueness (up to the unit for length) of the distance in the absolute plane (which is in accordance with the basic geometry relations - between and congruence), we simultaneously derive the formula for that distance in two models of that plane. One of these models is the set of complex numbers $\mathbb{C}$, observed as a model of the Euclidean plane and the second one is the unit disk that is considered as the Poincaré disk model of hyperbolic plane.

Keywords: The Schwarz lemma, the Schwarz-Pick lemma, harmonic mappings, quasiregular mappings, quasiconformal mappings, hyperbolic metric, Gaussian curvature, the Ahlfors lemma, quasi-isometry.

Research area: Mathematics

Research sub-area: Complex Analysis

Садржај

Увод

Шварцова лема* јесте једно од основних тврђења геометријске теорије функција. Геометријским језиком речено, Шварцова лема тврди да је свако холоморфно пресликавање јединичног диска $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ у себе, које фиксира тачку 0, или ротација око тачке 0 или сваку тачку различиту од 0 пресликава у тачку која је у еуклидском смислу ближа тачки 0. Стога, Шварцова лема има многе и значајне последице. На пример, користи се у доказу чувене Риманове теореме (видети теорему 2.2), за описивање групе конформних аутоморфизама јединичног диска (а самим тим и за описивање групе аутоморфизама сваке просто повезане области $\Omega \subset \mathbb{C}$ такве да је $\Omega \neq \mathbb{C}$), затим у решавању разних екстремалних проблема у геометријској теорији функција, итд. Осим тога, геометријским језиком речено, Шварц-Пикова лема која је директна последица Шварцове леме тврди да холоморфна пресликавања не повећавају хиперболичко растојање. Та чињеница, такође има многе значајне последице.

Хармонијска пресликавања могу се посматрати као уопштења холоморфних пресликавања. Свако холоморфно пресликавање јесте и хармонијско, а за хармонијска пресликавања важе многа аналогна или иста тврђења као и за холоморфна. На пример, као и за холоморфна пресликавања тако и за хармонијска пресликавања важе принцип максимума модула, Лиувилова теорема, теорема о отклоњивом сингуларитету, итд. Између осталог, постоји и верзија Шварцове леме за хармонијска пресликавања. Прецизније, важи следеће тврђење (видети и теорему 3.1, као и [71, стр. 140], [25], [21, стр. 75-77]).

Теорема 3.2. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ хармонијско пресликавање такво да је $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|. \tag{1}$$

Како је композиција холоморфних пресликавања холоморфно пресликавање, следи да за свако холоморфно пресликавање $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ и конформни аутоморфизам $\varphi_{-f(0)}$ (видети дефиницију 2.2) важи и да је пресликавање $\varphi_{-f(0)} \circ f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, такође, холоморфно пресликавање и да је $(\varphi_{-f(0)} \circ f)(0) = 0$. Стога, једноставно се формулише и доказује верзија Шварцове леме за холоморфна пресликавања без претпоставке да одговарајуће пресликавање фиксира тачку 0. С друге стране, ако је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ хармонијско пресликавање, онда пресликавање $\varphi_{-f(0)} \circ f$ не мора бити хармонијско и то представља одређену потешкоћу за добијање верзије Шварцове леме за хармонијска пресликавања, без претпоставке да одговарајуће пресликавање фиксира тачку 0. У заједничком раду [62] аутора дисертације са ментором М. Матељевићем, који се може сматрати наставком

*Као што је добро познато, термин лема у математици користи се за помоћно тврђење, односно за неки, често технички, корак у доказивању значајнијег резултата. Иако су у почетку развоја теорије нека тврђења била превише једноставна да би гарантовала независни интерес, на крају се испоставило да су централна у тој теорији. Пример таквог трвђења јесте и Шварцова лема.

фундаменталног рада [56], показано је како се те тешкоће могу превазићи и доказано је следеће тврђење (видети и [62, Теорема 6]).

Теорема 3.4. *Нека је $u : \mathbb{U} \to (-1, 1)$ хармонијско пресликавање такво да је $u(0) = b$ и нека је $a = \operatorname{tg} \dfrac{b\pi}{4}$ и φ_a одговарајући конформни аутоморфизам (видети дефиницију 2.2). Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a - |z|}{1 - a|z|} \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a + |z|}{1 + a|z|},$$

односно, другачије записано

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(-|z|) \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(|z|). \tag{2}$$

Такође, показано је и да су неједнакости (2) оштре, а као последица може се добити и одговарајуће тврђење за комплексно-вредносна хармонијска пресликавања (видети теорему 3.5 и [60, Теорема 1]). Поменимо на овом месту да се у доказу овог тврђења користе Шварц-Пикова лема као и одговарајућа еуклидска својства хиперболичких дискова.

Током даљег истраживања аутор дисертације приметио је да су А. Ф. Бирдон и Т. Карне [8] дали интересантно побољшање Шварц-Пикове неједнакости.

Теорема 2.12. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфно пресликавање. Тада за свако $z, w \in \Omega_1$ важи*

$$d_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \leqslant \log\big(\cosh d_{\Omega_1}(z, w) + |f^h(w)| \sinh d_{\Omega_1}(z, w)\big),$$

при чему су d_{Ω_1} и d_{Ω_2} хиперболичка растојања на Ω_1 и Ω_2, а $f^h(w)$ хиперболички извод функције f у тачки w.

Мотивисан чланком [8], пропозицијом 2.2.2 у С. Г. Кранц [41] (видети теорему 2.3) и лемом 2 у Р. Осерман [65] (видети теорему 2.4), аутор дисертације доказао је теорему 2.13 која се односи на холоморфна пресликавања и која представља уопштење теорема 2.3 и 2.4, као и два тврђења (видети теореме 3.14 и 3.15) која представљају одговарајуће верзије теореме 2.13 за хармонијска пресликавања. У тим тврђењима разматрају се пресликавања која пресликавају јединични диск $\mathbb{U}$ у себе, при чему су дате њихове вредности у тачки 0 и вредности норми њихових диференцијала у тачки 0. Осим тога, теорема 3.14 представља уопштење теореме 3.4, а теорема 3.15 представља уопштење теореме 3.2. Резултати су објављени у самосталном раду аутора дисертације [78], а на овом месту дајемо само формулације одговарајућих теорема. Напоменимо да су у наредним теоремама φ_a и φ_c одговарајући конформни аутоморфизми (видети дефиницију 2.2).

Теорема 2.13. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ холоморфно пресликавање такво да је $|f(0)| = a$ и $|f'(0)| = d$, при чему је $d \leqslant 1 - a^2$ и нека је $c = \dfrac{d}{1 - a^2}$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big). \tag{3}$$

При томе, ако је $c = 1$, онда се неједнакост (3) своди на неједнакост формулисану у теореми 2.3, а ако је $a = 0$, онда се неједнакост (3) своди на неједнакост формулисану у теореми 2.4.

Теорема 3.14. *Нека је $u : \mathbb{U} \to (-1, 1)$ хармонијско пресликавање такво да је $u(0) = b$ и $|\nabla u(0)| = d$, при чему је $d \leqslant \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} b\right)$ и нека су $a = \operatorname{tg} \frac{b\pi}{4}$ и $c = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} b} d$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a\big(- |z| \varphi_c(|z|)\big) \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a\big(|z| \varphi_c(|z|)\big). \tag{4}$$

При томе, ако је $c = 1$, онда се неједнакости (4) своде на неједнакости (2), а ако је $a = 0$ и $c = 1$, онда се неједнакости (4) своде на неједнакост формулисану у теореми 3.1.

Теорема 3.15. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ хармонијско пресликавање такво да је $f(0) = 0$ и $\|df(0)\| = d$, при чему је $d \leqslant \frac{4}{\pi}$ и нека је $c = \frac{\pi}{4} d$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \big(|z| \varphi_c(|z|)\big). \tag{5}$$

При томе, ако је $c = 1$, онда се неједнакост (5) своди на неједнакост (1).

Напоменимо и да је свака од неједнакости формулисаних у теоремама 2.13, 3.14 и 3.15 оштра, као и да су неједнакости које треба да задовољи константа d у тим теоремама природне. Наиме, неједнакости које треба да задовољи константа d директно следе из Шварц-Пикове неједнакости за холоморфна пресликавања, односно из верзије Шварц-Пикове леме за реално-вредносна хармонијска пресликавања која је директна последица метода појаса и полуравни развијеног у раду [56] (видети и [19], [33], [16] и [48]).

За холоморфна пресликавања која пресликавају јединични диск $\mathbb{U}$ у појас $\mathbb{S}$, при чему је $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, важи следећа верзија Шварцове леме (видети и [62, Теорема 7]).

Теорема 2.14. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ холоморфно пресликавање такво да је $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{artanh} |z|. \tag{6}$$

Да бисмо добили аналогну верзију за хармонијска пресликавања, морамо додати још неке претпоставке. Заиста, ако је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ хармонијско пресликавање такво да је $f(0) = 0$, онда је за произвољно $c \in \mathbb{R}$ и пресликавање $g : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$, дефинисано са $g(z) = f(z) + c \operatorname{Im} z$, хармонијско пресликавање за које важи $g(0) = 0$. Отуда, без додатних претпоставки, за хармонијска пресликавања из јединичног диска $\mathbb{U}$ у појас $\mathbb{S}$ не можемо добити одговарајућу неједнакост. Међутим, ако додамо и претпоставку да је одговарајуће пресликавање квазирегуларно (видети дефиницију 1.4), добијамо следеће тврђење до ког су дошли аутор дисертације у сарадњи са ментором М. Матељевићем (видети [62, Теорема 8]).

Теорема 4.6. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ (видети дефиницију 1.5) такво да важи $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} K \operatorname{artanh} |z|. \tag{7}$$

Напоменимо да су неједнакости (6) и (7) оштре, као и да кључну улогу у доказу тих неједнакости има неједнакост $\frac{\pi}{2}d_e(z_1,z_2) \leqslant d_{\mathbb{S}}(z_1,z_2)$, која важи за свако $z_1,z_2 \in \mathbb{S}$ (са d_e обележавамо еуклидско, а са $d_{\mathbb{S}}$ хиперболичко растојање на појасу $\mathbb{S}$). Штавише, за свако $y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ важи $\frac{\pi}{2}d_e(iy_1,iy_2) = d_{\mathbb{S}}(y_1,y_2)$, тј. на правој $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$ хиперболичко и еуклидско растојање су једнаки, до на мултипликативну константу. Осим тога, у доказу неједнакости (7) користи се верзија Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања (одговарајућа тематика изучавана је у радовима [51], [39] и [18]).

Приметимо и да се за $K = 1$, а имајући у виду пропозицију 1.2, теорема 4.6 своди на теорему 2.14.

Мотивисани улогом коју хиперболичко растојање има у комплексној анализи, а посебно у геометријској теорији функција М. Матељевић, М. Кнежевић и аутор дисертације објавили су рад [61] у коме се то растојање разматра на другачији начин од уобичајеног у литератури. Наиме, полазећи од теореме (видети теорему 5.1) која се односи на егзистенцију и јединственост (до на јединицу мере) растојања d_{a} у апсолутној равни, таквог да је $d_{\mathrm{a}}(a,b) = d_{\mathrm{a}}(c,d)$ ако и само ако је пар тачака (a,b) подударан са паром тачака (c,d), односно $d_{\mathrm{a}}(a,c) = d_{\mathrm{a}}(a,b) + d_{\mathrm{a}}(b,c)$ ако и само ако је тачка b између тачака a и c, као и интерпретације основних геометријских појмова и релација у Поенкареовом диск моделу, добијамо да је хиперболичко растојање d_h на $\mathbb{U}$ дато са

$$d_h(z_1,z_2) = \log \frac{1 + \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2}\right|},\ z_1,z_2 \in \mathbb{U}. \tag{8}$$

Осим тога, у [40] полазећи од једнакости (8) дефинишемо хиперболичку дужину C^1 криве $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ као супремум хиперболичких дужина одговарајућих уписаних полигоналних линија, тј. као

$$\sup \sum_{i=1}^{n} d_h(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)),$$

при чему се супремум узима по свим поделама $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$. Затим показујемо да важи

$$\sup \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}dt = \int_\gamma \frac{2}{1 - |z|^2}|dz|,$$

при чему се супремум узима по свим поделама $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$.

Садржај дисертације подељен је у 5 глава.

У глави 1 дефинисани су основни појмови и уведене су одговарајуће ознаке. Ради комплетности дате су и дефиниције хармонијског, квазирегуларног и квазиконформног пресликавања, наведена су њихова основна својства, као и неколико примера и тврђења. При томе, наведена су само она тврђења која се непосредно користе у наставку дисертације. Нагласимо да није била намера да се та пресликавања дефинишу најопштије што је могуће, нити да се прикажу одговарајућа својства и тврђења која се не користе у наставку дисертације.

У глави 2 приказана су геометријска својства холоморфних функција, која су последице Шварцове леме и изведена су разна уопштења Шварцове леме. Доказана је и Шварц-Пикова лема и уведени су појмови хиперболичког домена у $\mathbb{C}$, хиперболичке метрике, хиперболичке дужине криве и хиперболичког растојања, уз доказе одговарајућих тврђења. Дата је дефиниција хиперболичког извода и наведена су тврђења која се односе на еуклидска својства хиперболичких дискова и конформне изоморфизме, а која су коришћена у глави 3. На крају детаљно је обрађен појам Гаусове кривине и доказане су Алфорсова лема и супротна верзија Алфорсове леме, које имају кључну улогу у доказу тврђења датих у глави 4.

У глави 3 полазимо од класичне Шварцове леме за хармонијска пресликавања и наводимо горе поменута уопштења тог тврђења која су објављена у заједничком раду [62] аутора дисертације са ментором М. Матељевићем и у самосталном раду аутора дисертације [78]. Осим тога, наведене су и верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска пресликавања. Та тврђења формулисана су и у терминима оцене норме диференцијала, односно градијента одговарајућег пресликавања, и у терминима одговарајућих хиперболичких растојања. У приказаним доказима користимо метод појаса и полуравни развијен у раду [56] и тиме систематизујемо резултате добијене у радовима [19], [33], [16] и [48]. На крају ове главе дајемо и доказ Харнакових неједнакости за хармонијска пресликавања, као и њихових уопштења, користећи методе доказивања аналогне оним које смо користили у доказивању уопштења Шварцове леме за хармонијска пресликавања.

У глави 4 најпре дајемо још нека својства хиперболичке метрике која касније користимо за добијање верзија Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања у терминима хиперболичког растојања. Затим доказујемо одговарајуће верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања хиперболичког домена у конвексан хиперболички домен, у терминима оцене норме њихових диференцијала. При томе, ако је кодомен појас или полураван дајемо веома једноставан доказ одговарајућих тврђења, који се заснива на методу појаса или полуравни. Дајемо и одговарајући контрапример у случају да кодомен није конвексан хиперболички домен. Осим тога, доказујемо већ поменуту верзију Шварцове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања јединичног диска у појас. На крају, показујемо и да су хармонијска квазиконформна пресликавања квази-изометрије хиперболичког домена и конвексног хиперболичког домена. Напоменимо да је ова глава заснована на радовима [51], [39], [18] и [62].

У глави 5, ради комплетности, прво наводимо дефиницију апсолутне равни и конструишемо два добро позната модела те равни. Затим, полазећи од одговарајуће теореме симултано изводимо формуле за израчунавање растојања између две тачке у оба та модела. Током тог извођења, природно се појављују функционалне једначине за које добијамо неколико интересантних тврђења. На крају, апроксимирајући одговарајућу криву хиперболичком полигоналном линијом, добијамо формулу за израчунавање хиперболичке дужине те криве. Ова глава заснована је на радовима [61] и [40].

***

Задовољство ми је да се на овом месту најискреније захвалим свом професору и ментору, академику Миодрагу Матељевићу, на томе што ме је увео у област из које је и тема ове докторске дисертације, затим на увек занимљивим и корисним предавањима и разговорима о математици које имамо у оквиру Семинара за комплексну анализу, као и на подршци и помоћи у формирању правилног погледа на савремену математику. Од срца се захваљујем и члану комисије др Миљану Кнежевићу, на увек и у свакој ситуацији несебичној помоћи и искреној подршци коју ми пружа од првог дана моје професионалне каријере, а самим тим и током израде ове дисертације. Са чланом комисије проф. др Милошем Арсеновићем, са великим задовољством, сарађујем од почетка својих докторских студија и овом приликом му се захваљујем на увек корисним разговорима, коментарима и сугестијама. Захваљујем се и осталим члановима комисије, др Владимиру Божину и др Бориславу Гајићу, на веома доброј професионалној сарадњи и корисним сугестијама датим током одбране теме докторске дисертације.

Захваљујем се и породици, пријатељима, колегиницама, колегама и професорима на подршци коју су ми пружали током израде ове дисертације. Посебну захвалност на подршци дугујем колегиницама и колегама пријатељима са којима делим свакодневницу Математичког факултета.

На крају, а у суштини на почетку, истакао бих да највећу захвалност дугујем својој животној сапутници Марини Јовановић Светлик, пре свега на дугогодишњој љубави, подршци и разумевању, а морам истаћи и на великој професионалној помоћи у изради докторске дисертације.

Београд, пролеће 2020. Марек Светлик

Глава 1

Хармонијска и квазирегуларна пресликавања

1.1 Основни појмови и тврђења

Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ и $z_0 \in \Omega$. Кажемо да је функција f $\mathbb{R}-$*диференцијабилна у тачки* z_0, ако постоји линеарно пресликавање (линеаран оператор), које обележавамо са $df(z_0)$, и које пресликава $\mathbb{C}$ као векторски простор над $\mathbb{R}$ у себе такво да важи

$$f(z_0+h) - f(z_0) = df(z_0)(h) + o(|h|), \qquad h \to 0.$$

Пресликавање $df(z_0)$ назива се *диференцијал функције* f *у тачки* z_0.

Из стандардних курсева комплексне анализе (видети на пример [74, 2, 53]) познато је: Ако је функција f $\mathbb{R}-$диференцијабилна у тачки z_0 онда важи

$$df(z_0)(h) = \big(u_x(z_0) + iv_x(z_0)\big)k + \big(u_y(z_0) + iv_y(z_0)\big)l, \tag{1.1}$$

при чему су $h = (k,l) = k + il \in \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ и коначно $u_x(z_0)$, $u_y(z_0)$, $v_x(z_0)$ и $v_y(z_0)$ одговарајући парцијални изводи функција u и v у тачки $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$. Користећи дефиниционе једнакости $f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ и $f_y(z_0) = u_y(z_0) + iv_y(z_0)$, једнакост (1.1) можемо записати и на следећи начин

$$df(z_0)(h) = f_x(z_0)k + f_y(z_0)l = \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - if_y(z_0)\big)h + \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) + if_y(z_0)\big)\overline{h}. \tag{1.2}$$

Коначно, на основу записа (1.2) формално дефинишемо

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - if_y(z_0)\big)$$

и

$$f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) + if_y(z_0)\big).$$

Тада, једнакост (1.2) можемо записати и као

$$df(z_0)(h) = f_z(z_0)h + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{h}. \tag{1.3}$$

Уобичајено је да се линеаран оператор $df(z_0)$ идентификује са његовом матрицом у односу на канонску базу $(1, i)$. Та матрица јесте

$$\begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}$$

и назива се *Јакобијева матрица функције* f *у тачки* z_0. Детерминанта Јакобијеве матрице функције f у тачки z_0 назива се *Јакобијан функције* f *у тачки* z_0 и обележава се са $J_f(z_0)$. Непосредно се показује да важи $J_f(z_0) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\overline{z}}(z_0)|^2$.

У тесној вези са појмом диференцијала јесте и градијент реално-вредносне функције. Ако су $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ функција која је $\mathbb{R}-$диференцијабилна у тачки $z_0 \in \Omega$, онда са $\nabla u(z_0) = (u_x(z_0), u_y(z_0))$ обележавамо *градијент функције* u *у тачки* $z_0 \in \Omega$.

Често је поред функције f која је $\mathbb{R}-$диференцијабилна у тачки z_0 погодно посматрати и функцију g дефинисану са $g(z) = \overline{f(z)}$. У том случају, функција g такође јесте $\mathbb{R}-$диференцијабилна у тачки z_0 и за свако $h \in \mathbb{C}$ важи $dg(z_0)(h) = \overline{df(z_0)(h)}$. Отуда добијамо и једнакости

$$\begin{aligned} \overline{f}_z(z_0) &= \overline{f_{\overline{z}}(z_0)} \\ \overline{f}_{\overline{z}}(z_0) &= \overline{f_z(z_0)}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ отворени скупови и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ функције које су $\mathbb{R}-$диференцијабилне редом у $z_0 \in \Omega_1$ и $w_0 = f(z_0)$. Тада је $g \circ f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ функција која је $\mathbb{R}-$диференцијабилна у z_0 и важи

$$\begin{aligned} (g \circ f)_z(z_0) &= g_w(f(z_0)) \cdot f_z(z_0) + g_{\overline{w}}(f(z_0)) \cdot \overline{f}_z(z_0), \\ (g \circ f)_{\overline{z}}(z_0) &= g_w(f(z_0)) \cdot f_{\overline{z}}(z_0) + g_{\overline{w}}(f(z_0)) \cdot \overline{f}_{\overline{z}}(z_0). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Специјално, важи

$$d(g \circ f)(z_0) = dg(f(z_0)) \circ df(z_0). \tag{1.6}$$

Ако је $J_f(z_0) \neq 0$, онда из (1.5) добијамо

$$\begin{aligned} g_w(f(z_0)) &= \frac{1}{J_f(z_0)} \cdot \big((g \circ f)_z(z_0) \cdot \overline{f}_{\overline{z}}(z_0) - (g \circ f)_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{f}_z(z_0)\big), \\ g_{\overline{w}}(f(z_0)) &= \frac{1}{J_f(z_0)} \cdot \big((g \circ f)_{\overline{z}}(z_0) \cdot f_z(z_0) - (g \circ f)_z(z_0) \cdot f_{\overline{z}}(z_0)\big). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Такође, показује се да важи $J_{g \circ f}(z_0) = J_g(f(z_0)) \cdot J_f(z_0)$.

Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ отворени скупови и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ функција која је $\mathbb{R}-$диференцијабилна у z_0 и чија је инверзна функција $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ такође $\mathbb{R}-$диференцијабилна у $f(z_0)$. Тада је $1 = J_{f^{-1} \circ f}(z_0) = J_{f^{-1}}(f(z_0)) \cdot J_f(z_0)$, па је $J_f(z_0) \neq 0$. Отуда, на основу (1.7) добијамо

$$\begin{aligned} (f^{-1})_w(f(z_0)) &= \frac{1}{J_f(z_0)} \cdot \overline{f}_{\overline{z}}(z_0), \\ (f^{-1})_{\overline{w}}(f(z_0)) &= -\frac{1}{J_f(z_0)} \cdot f_{\overline{z}}(z_0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Приликом формулисања и доказивања неких од главних резултата ове дисертације (видети, на пример теорему 3.15), од значаја ће бити чињеница да је линеаран оператор $df(z_0)$ ограничен, као и вредност његове норме. Да бисмо израчунали норму линеарног оператора, формулисаћемо и доказаћемо најпре једну лему коју ћемо користити и у наставку дисертације (видети лему 3.5).

Лема 1.1. *Нека су $z, w \in \mathbb{C}$. Тада је*

$$\max_{|\lambda|=1} |z\overline{\lambda} + w\lambda| = |z| + |w| \tag{1.9}$$

и

$$\min_{|\lambda|=1} |z\overline{\lambda} + w\lambda| = \big||z| - |w|\big|. \tag{1.10}$$

При томе, ако су z и w различити од 0 максимум се постиже за $\lambda = e^{i\frac{1}{2}(\arg z - \arg w)}$, а минимум се постиже за $\lambda = e^{i\frac{1}{2}(\arg z - \arg w + \pi)}$.

Доказ. Ако је $z = 0$ или $w = 0$ онда једнакости (1.9) и (1.10) тривијално важе.

Претпоставимо да су z и w различити од 0. Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| = 1$. Тада је

$$\begin{aligned} |z\overline{\lambda} + w\lambda|^2 &= (z\overline{\lambda} + w\lambda)(\overline{z}\lambda + \overline{w}\overline{\lambda}) \\ &= |z|^2 + z\overline{w}\overline{\lambda}^2 + \overline{z}w\lambda^2 + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z}w\lambda^2) + |w|^2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Како је

$$-|z| \cdot |w| \leqslant \mathrm{Re}\,(\overline{z}w\lambda^2) \leqslant |z| \cdot |w|,$$

следи да је

$$\big(|z| - |w|\big)^2 \leqslant |z\overline{\lambda} + w\lambda|^2 \leqslant \big(|z| + |w|\big)^2,$$

тј.

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z\overline{\lambda} + w\lambda| \leqslant |z| + |w|.$$

Ако је $\lambda = e^{i\frac{1}{2}(\arg z - \arg w)}$, онда је $\mathrm{Re}\,(\overline{z}w\lambda^2) = |z||w|$, па на основу једнакости (1.11) добијамо $|z\overline{\lambda} + w\lambda| = |z| + |w|$. Ако је $\lambda = e^{i\frac{1}{2}(\arg z - \arg w + \pi)}$, онда је $\mathrm{Re}\,(\overline{z}w\lambda^2) = -|z||w|$, па на основу једнакости (1.11) добијамо $|z\overline{\lambda} + w\lambda| = \big||z| - |w|\big|$. □

Пропозиција 1.1. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ функција која је $\mathbb{R}-$диференцијабилна у тачки $z_0 \in \Omega$. Тада је линеаран оператор $df(z_0)$ ограничен и његова норма једнака је $|f_z(z_0)| + |f_{\overline{z}}(z_0)|$.*

Доказ. На основу (1.3) и леме 1.1 важи

$$\max_{|h|=1} |df(z_0)(h)| = \max_{|h|=1} |f_z(z_0)h + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{h}| = |f_z(z_0)| + |f_{\overline{z}}(z_0)|,$$

одакле, по дефиницији, следи да је линеаран оператор $df(z_0)$ ограничен и да му је норма једнака $|f_z(z_0)| + |f_{\overline{z}}(z_0)|$. □

Норму оператора $df(z_0)$ обележаваћемо са $\|df(z_0)\|$. Специјално, ако је u реалновредносна функција онда се непосредно доказује да важи $\|du(z_0)\| = |\nabla u(z_0)|$.

Приметимо да, уз одговарајуће претпоставке за функције f и g, на основу (1.6) и својстава норме линеарног оператора важи

$$\|d(g \circ f)(z_0)\| \leqslant \|dg(f(z_0))\| \cdot \|df(z_0)\|, \tag{1.12}$$

док уз одговарајуће претпоставке за функцију f, на основу (1.8), (1.4) и пропозиције 1.1, важи

$$\|df^{-1}(f(z_0))\| = \frac{1}{J_f(z_0)}\|df(z_0)\|. \tag{1.13}$$

Ако је $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, онда је $df(z_0)$ линеаран оператор који пресликава $\mathbb{C}$ као векторски простор над $\mathbb{C}$ у себе. У том случају за функцију f кажемо да је $\mathbb{C}-$диференцијабилна у тачки z_0 и важи $f_z(z_0) = f'(z_0)$, при чему је $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп. За функцију $f : \Omega \to \mathbb{C}$, која је $\mathbb{C}-$диференцијабилна у свакој тачки неког отвореног скупа $U \subseteq \Omega$, кажемо да је *холоморфна* на скупу U. Коначно, функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ је *холоморфна у тачки* $z_0 \in \Omega$ ако постоји околина тачке z_0 у којој је функција f холоморфна.

За области $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ са $\mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$ обележаваћемо скуп свих функција које пресликавају Ω_1 у Ω_2 и које су холоморфне на Ω_1. Нагласимо да у овој дисертацији термине холоморфна функција и холоморфно пресликавање користимо као синониме.

Споменимо још да се у стандардним курсевима комплексне анализе показује да је извод холоморфне функције на отвореном скупу, холоморфна функција на том скупу, одакле произилази да је функција која је холоморфна на неком отвореном скупу и класе C^∞ на том скупу. Осим тога, неконстантна холоморфна функција јесте отворено пресликавање. Прецизније, ако је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ неконстантна функција, онда је за сваки отворен скуп $U \subseteq \mathbb{C}$ и скуп $f(U)$ отворен. Такође, за холоморфне функције важи принцип максимума модула. Прецизније, ако је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и функција $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ таква да функција $g : \Omega \to \mathbb{R}$, дефинисана са $g(z) = |f(z)|$, достиже локални максимум на Ω, онда је f константна функција.

На крају ове секције наводимо неке ознаке и дефиниције неких појмова које ћемо користити у овој дисертацији:

- са $\overline{\mathbb{C}}$ обележавамо скуп $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
- са $\mathbb{U}$ обележавамо јединични диск у $\mathbb{C}$, тј. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
- са $\mathbb{T}$ обележавамо границу јединичног диска $\mathbb{U}$, тј. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;
- за $r \in (0, +\infty)$ са U_r обележавамо диск у $\mathbb{C}$ чији је центар 0, а полупречник r, тј. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, а са $\overline{U}_r$ одговарајући затворени диск;
- за $r \in (0, +\infty)$ са T_r обележавамо границу диска U_r, тј. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$;
- са d_e обележавамо еуклидско растојање тачака у $\mathbb{C}$, односно растојање $d_e : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ дефинисано са $d_e(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$;
- са R_e обележавамо функцију $R_e : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ дефинисану са $R_e(z) = \mathrm{Re}\, z$, а са I_m функцију $I_m : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ дефинисану са $I_m(z) = \mathrm{Im}\, z$;

- под C^1 кривом подразумевамо непрекидно диференцијабилну функцију $\gamma : [a, b] \to \Omega$, при чему су $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $a < b$ и $\Omega \subseteq \mathbb{C}$;
- за C^1 криву $\gamma : [a, b] \to \Omega$ кажемо да је проста ако је γ инјективно песликавање;
- са $\operatorname{tr}\gamma$ обележавамо траг C^1 криве $\gamma : [a, b] \to \Omega$, тј. скуп $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$;
- са $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обележавамо стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^2$, тј. за $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ важи $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$;
- са $\mathbb{S}$ обележавамо вертикални појас у $\mathbb{C}$, тј. $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$;
- са $\mathbb{K}$ обележавамо десну полураван у $\mathbb{C}$, тј. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$;
- са $\mathbb{P}$ обележавамо засечену раван у $\mathbb{C}$, тј. $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.

1.2 Хармонијска пресликавања

Иако се хармонијска пресликавања могу дефинисати тако да им је домен отворен скуп у $\mathbb{R}^n$, а кодомен $\mathbb{R}^m$, а и општије као пресликавања између Риманових многострукости, у овој секцији дефинисаћемо само реално-вредносне и комплексно-вредносне хармонијске функције чији је домен отворен скуп у $\mathbb{R}^2$, тј. у $\mathbb{C}$. Разлог је тај што се главни резултати ове дисертације односе управо на таква хармонијска пресликавања, па нам у том смислу потпуна општост није потребна.

Пре него што дефинишемо појам хармонијске функције, дефинисаћемо појам Лапласијана који ћемо користити не само за дефинисање хармонијске функције, већ и за дефинисање Гаусове кривине конформне семиметрике (видети дефиницију 2.6).

Дефиниција 1.1. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ функција класе C^2 на Ω. Лапласијан функције u јесте $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.*

Лапласијан функције дефинише се и за комплексно-вредносне функције. Нека су $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ функција класе C^2 на Ω, $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$. *Лапласијан функције* f јесте $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$.

Непосредно се показује да и за реално-вредносну и за комплексно-вредносну функцију f важи $\Delta f = 4 \cdot f_{z\bar{z}}$.

Сада можемо дати дефиниције реално-вредносне и комплексно-вредносне хармонијске функције.

Дефиниција 1.2. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп. Функција $u : \Omega \to \mathbb{R}$ јесте реално-вредносна хармонијска функција на Ω ако је u класе C^2 на Ω и ако је*

$$\Delta u(x, y) = 0,$$

за свако $(x, y) \in \Omega$.

Дефиниција 1.3. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп. Функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ јесте комплексно-вредносна хармонијска функција на Ω ако су функције $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$ реално-вредносне хармонијске функције на Ω.*

Под појмом *хармонијска функција* подразумеваћемо реално-вредносну или комплексно-вредносну хармонијску функцију. Нагласимо још да у овој дисертацији термине хармонијска функција и хармонијско пресликавање користимо као синониме.

Ако су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области, онда са $\mathrm{Har}(\Omega_1, \Omega_2)$ обележавамо скуп свих хармонијских функција које пресликавају Ω_1 у Ω_2. Слично, ако је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал, онда са $\mathrm{Har}(\Omega, I)$ обележавамо скуп свих хармонијских функција које пресликавају Ω у I.

Интересантне су везе хармонијских и холоморфних функција. У стандардним курсевима комплексне анализе показује се да су реални и имагинарни део функције која је холоморфна на неком отвореном скупу, реално-вредносне хармонијске функције на том скупу. Отуда, свака функција која је холоморфна на неком отвореном скупу јесте комплексно-вредносна хармонијска функција на том скупу.

С друге стране, ако је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ просто повезана област, $z_0 \in \Omega$ и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ хармонијска функција онда постоји јединствена холоморфна функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$ и $f(z_0) = u(z_0)$. Приметимо и да је у овом тврђењу услов да је Ω просто повезана област есенцијални. Заиста, ако је на пример $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ функција дефинисана са $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, онда не постоји холоморфна функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$. Такође, непосредно из тог тврђења следи да је хармонијска функција дефинисана на отвореном скупу и класе C^∞ на том скупу.

Споменимо и да за реално-вредносне хармонијске функције важе принцип максимума и принцип минимума. Прецизније, ако је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $u \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{R})$ функција која достиже локални максимум или локални минимум на Ω, онда је u константна функција.

Даље, ако су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области, пресликавања $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$ и $g \in \mathrm{Har}(\Omega_2, \mathbb{C})$ (односно $g \in \mathrm{Har}(\Omega_2, \mathbb{R})$), онда је $g \circ f \in \mathrm{Har}(\Omega_1, \mathbb{C})$ (односно $g \circ f \in \mathrm{Har}(\Omega_1, \mathbb{R})$). Заиста, како је $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$, за произвољно $z_0 \in \Omega_1$ важи $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, па на основу (1.4) и (1.5) добијамо

$$(g \circ f)_z(z_0) = g_w(f(z_0)) \cdot f_z(z_0). \tag{1.14}$$

Како је $f_{z\overline{z}}(z_0) = 0$, јер је $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$, а самим тим и $f \in \mathrm{Har}(\Omega_1, \Omega_2)$, на основу једнакости (1.14) добијамо

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{z\overline{z}}(z_0) &= (g_w \circ f)_{\overline{z}}(z_0) \cdot f_z(z_0) + (g_{\overline{w}} \circ f)(z_0) \cdot f_{z\overline{z}}(z_0) \\ &= (g_w \circ f)_{\overline{z}}(z_0) \cdot f_z(z_0). \end{aligned} \tag{1.15}$$

На основу (1.4) и (1.5) важи

$$(g_w \circ f)_{\overline{z}}(z_0) = (g_{ww} \circ f)(z_0) \cdot f_{\overline{z}}(z_0) + (g_{w\overline{w}} \circ f)(z_0) \cdot \overline{f}_{\overline{z}}(z_0), \tag{1.16}$$

па како је $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ и $g_{w\overline{w}}(f(z_0)) = 0$, из (1.15) и (1.16), добијамо $(g \circ f)_{z\overline{z}}(z_0) = 0$.

Наведимо сада, без доказа, четири значајне теореме које се односе на хармонијска пресликавања и које ћемо користити у овој дисертацији. Прву од тих теорема доказао је Х. Леви у раду [43] из 1936. године (видети и [21, стр. 20]).

Теорема 1.1 (Левијева теорема)**.** *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $f \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{C})$. Ако је пресликавање f локално „1-1”, онда за свако $z \in \Omega$ важи $J_f(z) \neq 0$.*

Узимајући у обзир теорему о инверзној функцији, имамо и следећу непосредну последицу Левијеве теореме.

Последица 1.1. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и нека је $f \in \operatorname{Har}(\Omega, \mathbb{C})$ пресликавање које је „1-1". Тада је $f(\Omega)$ област, а пресликавање f један $C^\infty-$ дифеоморфизам области Ω и $f(\Omega)$. При томе, пресликавање f^{-1} не мора припадати класи $\operatorname{Har}(f(\Omega), \Omega)$.*

Приметимо да на основу последице 1.1 за „1-1" комплексно-вредносно хармонијско пресликавање, дефинисано на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, важи и да је отворено пресликавање. Исто важи и за свако неконстантно реално-вредносно хармонијско пресликавање, дефинисано на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. С друге стране, комплексно-вредносно хармонијско пресликавање не мора бити отворено чак и ако су реални и имагинарни део тог пресликавања неконстантна пресликавања. Заиста, пресликавање $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, дефинисано са $f(x, y) = x+i(x^2-y^2-1)$, припада $\operatorname{Har}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, пресликавања $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ нису константна, а $f(\mathbb{C}) = \{(u, v) \in \mathbb{C} : v \leqslant u^2 - 1\}$, тј. пресликавање f није отворено.

Напоменимо и да Левијева теорема не важи у просторима димензије веће од 2 (видети [81] и [21, стр. 25-27]).

Е. Хајнц [25] формулисао је и доказао 1959. године следећу значајну теорему (видети и [21, стр. 21-23 и стр. 66-72]).

Теорема 1.2 (Хајнцова теорема)**.** *Нека је $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ пресликавање које је „1-1" и „НА" и такво да је $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f_z(z)|^2 + |f_{\overline{z}}(z)|^2 \geqslant \frac{1}{\pi^2}.$$

Напоменимо само да је, у свом доказу теореме 1.2, Е. Хајнц користио Левијеву теорему и Шварцову лему за комплексно-вредносне хармонијске функције (видети теорему 3.2 ниже).

Једна од најзначајних последица Хајнцове теореме јесте и следећа теорема, у литератури (видети [21, стр. 24-25]) именована по Т. Радоу, који је 1927. године ту теорему доказао у специјалном случају.

Теорема 1.3 (Радоова теорема)**.** *Не постоји пресликавање $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$ које је „1-1" и „НА".*

Размотримо сада хармонијска пресликавања која чувају оријентацију. У том циљу, нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области. Кажемо да C^1 пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *чува оријентацију* ако за свако $z \in \Omega_1$ важи $|f_z(z)| > |f_{\overline{z}}(z)|$. Приметимо да ако је $f \in \operatorname{Har}(\Omega_1, \Omega_2)$ локално „1-1", онда на основу Левијеве теореме важи да или пресликавање f или пресликавање $\overline{f}$ чува оријентацију. Коначно, ако C^1 пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ чува оријентацију, онда тривијално за свако $z \in \Omega_1$ важи $|f_z(z)| > 0$. С друге стране, ако је $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ пресликавање које је „1-1" и „НА", које чува оријентацију и за које важи $f(0) = 0$, онда на основу Хајнцове теореме за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_z(z)| \geqslant \dfrac{1}{\pi\sqrt{2}}$.

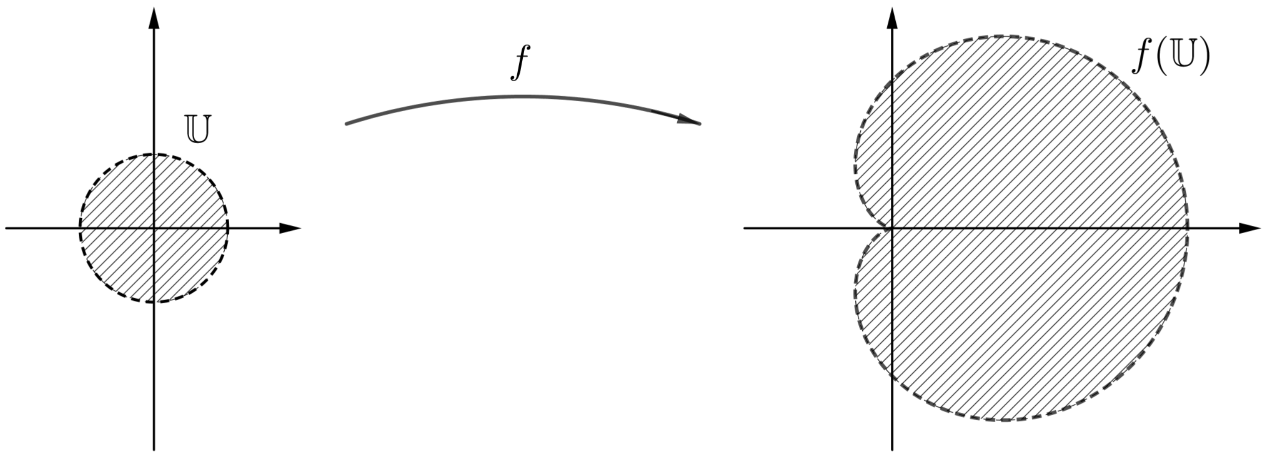
Наредна теорема у неком смислу уопштава ове констатације (видети [52], [50, Теорема 2Б], [51, Теорема 1.2], [58, Теорема 4.1] и [30]). Напоменимо и да је ова теорема есенцијална за доказе неких теорема приказаних у глави 4 (видети теорему 4.8 и теорему 4.11).

Теорема 1.4. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ конвексна област и $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \Omega)$ пресликавање које је „1-1" и „НА" и такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_z(z)| > |f_{\overline{z}}(z)|$. Тада постоји константа $c > 0$ (која зависи само од f и Ω, прецизније $c = \dfrac{d_e(f(0), \partial\Omega)}{4}$) таква да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_z(z)| \geqslant c$.*

Напомена 1.1. *Приметимо да на основу Радоове теореме и из осталих претпоставки теореме 1.4 следи да је $\Omega \neq \mathbb{C}$, а самим тим и $\partial\Omega \neq \varnothing$.*

Следећи пример (видети пример 1.3 у [58]) показује да се у теореми 1.4 претпоставка да је Ω конвексна област не може изоставити.

Пример 1.1. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ дефинисана са $f(z) = (z+1)^2$. Тада је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, f(\mathbb{U}))$ пресликавање које је „1-1" и које пресликава $\mathbb{U}$ на $f(\mathbb{U})$. Приметимо да област $f(\mathbb{U})$ није конвексна (слика 1.1) и да је $\lim\limits_{z\to -1} f_z(z) = \lim\limits_{z\to -1} 2(z+1)^2 = 0$.*



Слика 1.1: Области $\mathbb{U}$ и $f(\mathbb{U})$

1.3 Квазирегуларна пресликавања

Према [72], квазирегуларна пресликавања увео је и први почео да проучава Ј. Г. Решетњак у низу својих радова које је почео објављивати 1966. године. Иако је теорија квазирегуларних пресликавања развијена у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$, као и за Риманове многострукости, у овој дисертацији разматраћемо само квазирегуларна пресликавања у равни. Штавише, како су тема ове дисертације превасходно хармонијска квазирегуларна пресликавања, и како су хармонијска пресликавања класе C^∞, ми ћемо разматрати само квазирегуларна пресликавања која су класе C^1. У складу са овим напоменама дајемо и следећу дефиницију квазирегуларних пресликавања (видети и дефиницију на стр. 10 у [72], као и стр. 127-129 у [79]).

Дефиниција 1.4. *Нека је $K \geqslant 1$ и $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област. Пресликавање $f : \Omega \to \mathbb{C}$ класе C^1 јесте $K-$квазирегуларно на Ω ако за свако $z \in \Omega$ важи*

$$\|df(z)\|^2 \leqslant K J_f(z).$$

Пресликавање $f : \Omega \to \mathbb{C}$ класе C^1 јесте квазирегуларно на Ω ако је $K-$квазирегуларно на Ω, за неко $K \geqslant 1$.

Напомена 1.2. *Приметимо да ако је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ пресликавање које је $K-$квазирегуларно на Ω, онда је $J_f(z) \geqslant 0$ (еквивалентно $|f_z(z)| \geqslant |f_{\overline{z}}(z)|$) за свако $z \in \Omega$.*

Наводимо неколико примера квазирегуларних пресликавања.

Пример 1.2. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$. Тада је f пресликавање које је $1-$квазирегуларно на Ω.*

Пример 1.3. *Нека је $K \geqslant 1$. Пресликавање $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ дефинисано са $f(x, y) = (x + iKy)^2$ јесте $K-$квазирегуларно на $\mathbb{C}$.*

У наредној пропозицији описана су $1-$квазирегуларна пресликавања.

Пропозиција 1.2. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област. Ако је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ пресликавање које је $1-$квазирегуларно на Ω, онда је f холоморфно пресликавање на Ω.*

Доказ. Нека је $z \in \Omega$ произвољно. Како је f пресликавање које је $1-$квазирегуларно, на основу пропозиције 1.1, следи да је

$$(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|)^2 \leqslant |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2. \tag{1.17}$$

Ако је $f_z(z) \neq 0$, онда је неједнакост (1.17) еквивалентна са неједнакошћу

$$|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)| \leqslant |f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|,$$

која је тачна ако и само ако је $f_{\overline{z}}(z) = 0$.

Ако је $f_z(z) = 0$, онда на основу дефиниције 1.4 и напомене 1.2 важи $f_{\overline{z}}(z) = 0$. □

Композиција квазирегуларних пресликавања јесте квазирегуларно пресликавање. Прецизније, важи следећа пропозиција.

Пропозиција 1.3. *Нека су $K_1 \geqslant 1$ и $K_2 \geqslant 1$ и нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области. Ако је $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ пресликавање које је K_1-квазирегуларно на Ω_1 и $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ пресликавање које је K_2-квазирегуларно на Ω_2, онда је $h = g \circ f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ пресликавање које је $K_2 \cdot K_1-$квазирегуларно на Ω_1.*

Доказ. Нека је $z \in \Omega_1$. Директном провером показује се да важи

$$J_h(z) = J_g(f(z)) \cdot J_f(z). \tag{1.18}$$

Такође, на основу (1.12) важи

$$\|dh(z)\|^2 \leqslant \|dg(f(z))\|^2 \cdot \|df(z)\|^2. \tag{1.19}$$

Отуда, како је f K_1-квазирегуларно пресликавање и g K_2-квазирегуларно пресликавање, на основу (1.19) и (1.18) следи

$$\|dh(z)\|^2 \leqslant \big(K_2 J_g(f(z))\big) \cdot \big(K_1 J_f(z)\big) = K_2 \cdot K_1 \cdot J_h(z),$$

тј. пресликавање h јесте $K_2 \cdot K_1-$квазирегуларно. □

Наредна пропозиција даје везу норме диференцијала квазирегуларног пресликавања и модула градијента реалног дела тог пресликавања. Напоменимо да ова пропозиција има улогу у доказу теореме 4.1 у глави 4.

Пропозиција 1.4. *Нека је $K \geqslant 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ пресликавање које је $K-$квазирегуларно на Ω и $u = \operatorname{Re} f$. Тада за свако $z \in \Omega$ важи*

$$\|df(z)\| \leqslant K|\nabla u(z)|. \tag{1.20}$$

Доказ. Нека је $v = \operatorname{Im} f$ и нека је $z \in \Omega$ произвољно.

Ако је $\nabla v(z) = (0,0)$, онда неједнакост (1.20) тривијално важи, јер је у том случају $\|df(z)\| = |\nabla u(z)|$.

Претпоставимо да је $\nabla v(z) \neq (0,0)$. Тада је $\|df(z)\| \neq 0$ и на основу дефиниције $K-$квазирегуларног пресликавања следи

$$\|df(z)\| \leqslant K\big(|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big). \tag{1.21}$$

С друге стране, на основу леме 1.1 за свако $h \in \mathbb{C}$ такво да је $|h| = 1$ важи

$$|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)| \leqslant \|df(z)(h)\|. \tag{1.22}$$

Нека је сада $h = \dfrac{v_y(z)}{|\nabla v(z)|} - i\dfrac{v_x(z)}{|\nabla v(z)|}$. Тада је $|h| = 1$ и важи

$$\|df(z)(h)\| = \|du(z)(h)\|. \tag{1.23}$$

Како за свако $h \in \mathbb{C}$, такво да је $|h| = 1$, важи $\|du(z)(h)\| \leqslant |\nabla u(z)|$, на основу (1.22) и (1.23), добијамо

$$|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)| \leqslant |\nabla u(z)|. \tag{1.24}$$

Коначно, из (1.21) и (1.24) добијамо

$$\|df(z)\| \leqslant K|\nabla u(z)|, \tag{1.25}$$

што је и требало доказати. □

Често, ако је $f_z(z_0) \neq 0$, у раду са хармонијским и квазирегуларним пресликавањима погодно је посматрати количник

$$\mu_f(z_0) = \frac{f_{\overline{z}}(z_0)}{f_z(z_0)},$$

који се назива *комплексна дилатација функције f у тачки z_0*.

Непосредно се доказује следеће тврђење.

Пропозиција 1.5. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ пресликавање које је $\mathbb{R}-$диференцијабилно у тачки $z_0 \in \Omega$, при чему важи $f_z(z_0) \neq 0$. Тада, за $K \geqslant 1$ важи*

$$\|df(z_0)\|^2 \leqslant K J_f(z_0)$$

ако и само ако важи

$$|\mu_f(z_0)| \leqslant \frac{K-1}{K+1}.$$

Често се у истраживањима (видети на пример [51], [39]) разматрају пресликавања која су и хармонијска и квазирегуларна. Прецизније, имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.5. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области и $K \geqslant 1$. Кажемо да је пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ хармонијско $K-$квазирегуларно ако је пресликавање f и хармонијско и $K-$квазирегуларно. Скуп свих хармонијских $K-$квазирегуларних пресликавања из Ω_1 у Ω_2 обележавамо са $\mathrm{HQR}_K(\Omega_1, \Omega_2)$.*

Пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ јесте хармонијско квазирегуларно ако је хармонијско $K-$квазирегуларно, за неко $K \geqslant 1$.

Хармонијска квазирегуларна пресликавања називају се и HQR пресликавања.

Оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска квазирегуларна пресликавања у овој дисертацији биће разматране у глави 4, а у овој секцији наводимо неколико примера хармонијских квазирегуларних пресликавања.

Пример 1.4 (Пресликавање које припада $\mathrm{HQR}_K(\mathbb{S}, \mathbb{S})$)**.** *Нека је $K \geqslant 1$ и нека је пресликавање A_K дефинисано са $A_K(x, y) = x + iKy$. Тада је $A_K \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{S}, \mathbb{S})$.*

Пример 1.5 (Пресликавање које припада $\mathrm{HQR}_K(\mathbb{K}, \mathbb{K})$)**.** *Нека је $K \geqslant 1$ и нека је пресликавање B_K дефинисано са $B_K(x, y) = Kx + iy$. Тада је $B_K \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.*

Композиција хармонијског квазирегуларног пресликавања и холоморфног пресликавања јесте хармонијско квазирегуларно пресликавање. Прецизније, важи следећа пропозиција.

Пропозиција 1.6. *Нека је $K \geqslant 1$ и нека су $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \subseteq \mathbb{C}$ области. Ако су пресликавања $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$ и $g \in \mathrm{HQR}_K(\Omega_2, \Omega_3)$, онда је пресликавање $g \circ f \in \mathrm{HQR}_K(\Omega_1, \Omega_3)$.*

Доказ. Нека је $h = g \circ f$. Како је f холоморфно, а g хармонијско пресликавање, следи да је h хармонијско пресликавање.

С друге стране, пресликавање f је $1-$квазирегуларно, па како је g пресликавање које је $K-$квазирегуларно, на основу пропозиције 1.3, следи да је $g \circ f$ пресликавање које је $K-$квазирегуларно. $\square$

Пример 1.6 (Пресликавање које припада $\mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$)**.** *Нека је $K \geqslant 1$ и нека је ϕ пресликавање дефинисано у примеру 2.4 ниже и A_K пресликавање дефинисано у примеру 1.4. На основу пропозиције 1.6 важи да је пресликавање $C_K : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ дефинисано са $C_K(z) = A_K(\phi(z^n))$, при чему је $n \in \mathbb{N}$, пресликавање које припада $\mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$.*

Приметимо и да пресликавање дефинисано у примеру 1.3 није хармонијско.

1.4 Квазиконформна пресликавања

Према [4] квазиконформна пресликавања, али не називајући их тако, увео је Х. Греч 1928. године. Наводимо укратко и упрошћено проблем који је он разматрао.

Нека је $K > 1$, $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ и $R = (0, K) \times (0, 1)$. Како не постоји хомеоморфизам $f : \overline{Q} \to \overline{R}$ такав да је $f(0) = 0$, $f(1) = K$, $f(1 + i) = K + i$, $f(i) = i$ и да је рестрикција тог хомеоморфизма на отворени квадрат Q конформно пресликавање*, Греч је трагао за одговарајућим хомеоморфизмом таквим да је његова рестрикција на Q пресликавање које је у неком смислу најближе конформном пресликавању. Прецизније, Гречов проблем јесте задатак да се нађе хомеоморфизам $f : \overline{Q} \to \overline{R}$ такав да је $f(0) = 0$, $f(1) = K$,

*За дефиницију конформног пресликавања видети секцију 2.2.

$f(1+i) = K+i$, $f(i) = i$, као и да је рестрикција пресликавања f на Q пресликавање класе C^1, затим да је $|f_{\overline{z}}(z)| < |f_z(z)|$, за свако $z \in Q$, и да је

$$\sup_{z\in Q} \frac{|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|}$$

што је могуће мањи.

У том случају, величина

$$D_f(z) = \sup_{z\in Q} \frac{|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|}$$

назива се *дилатација* пресликавања f у тачки z. Из осталих услова које треба да задовољи решење f Гречовог проблема, добија се да важи $\sup\limits_{z\in Q} D_f(z) \geqslant K$ (видети стр. 8 у [4]). С друге стране, како за пресликавање $f_0 : \overline{Q} \to \overline{R}$ дефинисано са

$$f_0(z) = \frac{1}{2}(K+1)z + \frac{1}{2}(K-1)\overline{z} \tag{1.26}$$

важи $D_{f_0}(z) = K$, за свако $z \in Q$, и како пресликавање f_0 задовољава остале услове које треба да задовољи решење Гречовог проблема, следи да је то пресликавање уједно и решење Гречовог проблема. На основу дефиниције 1.6, следи да је пресликавање f_0 $K-$квазиконформно пресликавање области Q на област R.

Иако је квазиконформна пресликавања могуће дефинисати и много општије, ми наводимо дефиницију квазиконформних пресликавања која је за намене ове дисертације одговарајућа.

Дефиниција 1.6. *Нека је $K \geqslant 1$ и нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области. Пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ класе C^1 јесте $K-$квазиконформно ако је хомеоморфизам области Ω_1 и Ω_2 и ако је $K-$квазирегуларно на Ω_1.*

Пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ класе C^1 јесте квазиконформно ако је $K-$квазиконформно, за неко $K \geqslant 1$.

Напомена 1.3. *Ми ћемо разматрати само квазиконформна пресликавања која чувају оријентацију. Јакобијан таквих пресликавања јесте позитиван. Дакле, ако су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ квазиконформно пресликавање, подразумеваћемо да за свако $z \in \Omega$ важи $|f_z(z)| > |f_{\overline{z}}(z)|$. Приметимо и да је свако такво пресликавање C^1 дифеоморфизам области Ω_1 и Ω_2.*

Дефиниција 1.7. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области и $K \geqslant 1$. Кажемо да је пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ хармонијско $K-$квазиконформно ако је пресликавање f и хармонијско и $K-$квазиконформно. Скуп свих хармонијских $K-$квазиконформних пресликавања из Ω_1 у Ω_2 обележавамо са $\mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$.*

Пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ јесте хармонијско квазиконформно ако је хармонијско $K-$квазиконформно, за неко $K \geqslant 1$.

Хармонијска квазиконформна пресликавања називају се и HQC пресликавања.

За пресликавање $f \in \mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$, при чему су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области, важи да је инјективно, па на основу Левијеве теореме, као и напомене 1.2 за свако $z \in \Omega_1$ важи $|f_z(z)| > |f_{\overline{z}}(z)|$. Отуда, примедба дата у напомени 1.3 и не представља рестрикцију за таква пресликавања.

Приметимо да пресликавање A_K дефинисано у примеру 1.4 припада $\mathrm{HQC}_K(\mathbb{S},\mathbb{S})$, као и да пресликавање B_K дефинисано у примеру 1.5 припада $\mathrm{HQC}_K(\mathbb{K},\mathbb{K})$, али и да пресликавање C_K дефинисано у примеру 1.6 припада $\mathrm{HQC}_K(\mathbb{U},\mathbb{S})$ ако и само ако је $n=1$.

Пропозиција 1.7. *Нека је $K \geqslant 1$ и нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области. Ако је $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ пресликавање које је $K-$квазиконформно, онда је и $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ пресликавање које је $K-$квазиконформно.*

Доказ. Како на основу напомене 1.3 следи да је пресликавање f C^1 дифеоморфизам, потребно и довољно је доказати да је f^{-1} пресликавање које је $K-$квазирегуларно. Нека је $w \in \Omega_2$ произвољно. Тада постоји $z \in \Omega_1$ такво да је $w = f(z)$ и на основу (1.13) следи

$$\begin{aligned} \|df^{-1}(f(z))\|^2 &= \frac{1}{J_f^2(z)} \cdot \|df(z)\|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{J_f^2(z)} \cdot K \cdot J_f(z) \\ &= K \cdot \frac{1}{J_f(z)} \\ &= K \cdot J_{f^{-1}}(f(z)). \end{aligned}$$

Дакле, за свако $w \in \Omega_2$ важи $\|df^{-1}(w)\|^2 \leqslant K \cdot J_{f^{-1}}(w)$, тј. пресликавање f^{-1} јесте $K-$квазирегуларно. $\square$

Напоменимо и да су квазиконформна пресликавања детаљно обрађена, на пример, у књигама [4] и [59].

Глава 2

Геометријска својства холоморфних функција и хиперболичка метрика

2.1 Шварцова лема

Холоморфна пресликавања имају многа значајна геометријска својства. Велики број тих својстава потиче од Шварцове леме, која је један од најзначајних резултата у геометријској теорији функција.

Теорема 2.1 (Шварцова лема). *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $f(0) = 0$. Тада је*

а) $|f(z)| \leqslant |z|$, за свако $z \in \mathbb{U}$;

б) $|f'(0)| \leqslant 1$.

При томе, ако постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $f(z) = e^{i\theta}z$, онда у а) и б) важе једнакости. С друге стране, ако у делу а), за неко $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$, важи једнакост или ако у делу б) такође важи једнакост, онда постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $f(z) = e^{i\theta}z$.

Доказ. Нека је

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Како је $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$, следи да је функција g холоморфна на $\mathbb{U}$. Нека је $0 < r < 1$. Функција g је холоморфна на U_r и непрекидна на $\overline{U}_r$. Отуда, на основу принципа максимума модула, важи

$$\max_{z\in\overline{U}_r} |g(z)| = \max_{z\in T_r} |g(z)| = \max_{z\in T_r} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}. \tag{2.1}$$

Даље, нека је $z_0 \in \mathbb{U}$ произвољно. Тада, за сваки реалан број r такав да је $|z_0| \leqslant r < 1$ важи $z_0 \in \overline{U}_r$ и на основу (2.1) следи $|g(z_0)| \leqslant \dfrac{1}{r}$. Отуда је $|g(z_0)| \leqslant \lim\limits_{r\to 1-} \dfrac{1}{r}$, тј.

$$|g(z_0)| \leqslant 1. \tag{2.2}$$

За $z_0 \neq 0$, на основу дефиниције функције g и (2.2), следи $\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqslant 1$, тј. $|f(z_0)| \leqslant |z_0|$. Како је $z_0 \in \mathbb{U}$ произвољно и како је $f(0) = 0$, следи да је $|f(z)| \leqslant |z|$, за свако $z \in \mathbb{U}$.

За $z_0 = 0$, на основу дефиниције функције g и (2.2), следи $|g(0)| = |f'(0)| \leqslant 1$.

Ако за неко $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$ у а) важи једнакост или ако у б) важи једнакост, на основу принципа максимума модула следи да је $|g(z)| = 1$, за свако $z \in \mathbb{U}$, тј. следи да је функција g константна. Отуда, постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $g(z) = e^{i\theta}$, односно да је $f(z) = e^{i\theta} z$. □

Приметимо да на основу Шварцове леме следи да за $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, такво да је $f(0) = 0$, важи $d_e(f(z), f(0)) \leqslant d_e(z, 0)$, тј. еуклидско растојање тачака $f(z)$ и $f(0)$ није веће од еуклидског растојања тачака z и 0.

Према [71, 12, 10] тврђење исказано у теореми 2.1, додуше уз додатну претпоставку да је дато пресликавање инјекција, први је формулисао и доказао Карл Херман Амандус Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921). Наиме, овакво тврђење постоји на странама 109 - 111 у његовом делу *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band* , које је објављено 1890. године (видети [77]). Сам Шварц наводи да је одговарајућу главу написао на основу предавања која је држао на Политехничкој школи у Цириху школске 1869/1870. године.

Према истим изворима, име овом резултату (Шварцова лема) дао је Константин Каратеодори (Constantin Carathéodory, 1873 - 1950) у свом раду [15] из 1912. године, мада је овај резултат у својим истраживањима и радовима користио још од 1905. године. Осим што је дао име резултату, Каратеодори је први дао доказ Шварцове леме који је приказан у овој дисертацији и који се данас сматра класичним. У својим аутобиографским белешкама Каратеодори наводи да му је на тај доказ сугерисао његов велики пријатељ из студентских дана, Ерхард Шмит (Erhard Schmidt, 1876 - 1959). Поменимо још да је, не баш тако очигледну варијанту класичног доказа Шварцове леме, дао и Жил Анри Поенкаре (Jules Henri Poincaré, 1854 - 1912) у једном свом раду из 1884. године. Детаљан историјат ове теореме може се наћи у [12, 10], као и у литератури која је тамо цитирана.

Напомена 2.1. *Приметимо да тврђење Шварцове леме важи и под слабијим претпоставкама, тј. и за функцију f холоморфну на $\mathbb{U}$, такву да је $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$, за свако $z \in \mathbb{U}$. Заиста, на основу принципа максимума модула следи да свака таква функција припада скупу* $\mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$.

Једна од непосредних последица Шварцове леме јесте и принцип субординације.

Пропозиција 2.1 (Принцип субординације)**.** *Нека су функције $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$ такве да важи*

1° *f је „1-1”;*

2° *$g(0) = f(0)$;*

3° *$g(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{U})$.*

Тада за свако $r \in (0, 1)$ важи $g(\overline{U}_r) \subset f(\overline{U}_r)$.

Доказ. Нека је $h = f^{-1} \circ g$. Непосредно се проверава да $h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и да важи $h(0) = 0$. Отуда, на основу Шварцове леме, за свако $r \in (0, 1)$ важи $h(\overline{U}_r) \subset \overline{U}_r$, односно $g(\overline{U}_r) \subset f(\overline{U}_r)$. □

Наредна пропозиција представља профињење Шварцове леме у случају да је тачка $z=0$ нула одговарајуће функције вишеструкости веће од 1.

Пропозиција 2.2. *Нека је $m \in \mathbb{N}$ и функција $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, таква да за свако k које припада скупу $\{0,\dots,m-1\}$ важи $f^{(k)}(0)=0$. Тада је $|f(z)| \leqslant |z|^m$, за свако $z \in \mathbb{U}$.*

При томе, ако постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $f(z)=e^{i\theta}z^m$, онда у претходној неједнакости важи једнакост. С друге стране, ако у претходној неједнакости за неко $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$ важи једнакост, онда постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи да је $f(z)=e^{i\theta}z^m$.

Доказ. Претпоставимо да је $m \geqslant 2$ (ако је $m=1$ онда се тврђење своди на Шварцову лему).

Нека је

$$g(z)=\begin{cases} \dfrac{f(z)}{z^{m-1}}, & z \neq 0, \\ 0, & z=0. \end{cases}$$

Како је $\lim\limits_{z\to 0} g(z)=0$, следи да је функција g холоморфна на $\mathbb{U}$. Дакле, функција g је холоморфна на U_r и непрекидна на $\overline{U}_r$, за свако $r \in (0,1)$. Отуда, на основу принципа максимума модула важи

$$\max_{z\in\overline{U}_r}|g(z)|=\max_{z\in T_r}|g(z)|=\max_{z\in T_r}\left|\frac{f(z)}{z^{m-1}}\right| \leqslant \frac{1}{r^{m-1}}. \tag{2.3}$$

Даље, нека је $z_0 \in \mathbb{U}$ произвољно. Тада, за сваки реалан број r, такав да је $|z_0| \leqslant r < 1$, важи $z_0 \in \overline{U}_r$ и на основу (2.3) следи $|g(z_0)| \leqslant \dfrac{1}{r^{m-1}}$. Отуда је $|g(z_0)| \leqslant \lim\limits_{r\to 1-}\dfrac{1}{r^{m-1}}=1$, тј. како је $z_0 \in \mathbb{U}$ произвољно, следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|g(z)| \leqslant 1$. Дакле, функција g испуњава претпоставке Шварцове леме и применом исте добијамо тврђење. □

2.2 Конформни изоморфизми и аутоморфизми

Постоје разне дефиниције конформног пресликавања. Ми ћемо користити дефиницију дату у [74].

Пре него што наведемо поменуту дефиницију, напоменимо да ћемо у овој секцији са Ω_1, Ω_2 и Ω обележавати области у $\mathbb{C}$.

Функцију $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1,\Omega_2)$ називамо конформним пресликавањем на Ω_1, ако за свако $z \in \Omega_1$ важи $f'(z) \neq 0$.

Из стандардног курса комплексне анализе познато је да важи следеће тврђење: Потребан и довољан услов да је $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1,\Omega_2)$ конформно пресликавање на Ω_1 јесте да је оно локално „1-1” на Ω_1. Приметимо да за пресликавање које је конформно на Ω_1 у општем случају не важи да је исто и глобално „1-1” на Ω_1. На пример, пресликавање $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ дефинисано са $f(z)=e^z$ јесте конформно на $\mathbb{C}$, али није „1-1” на $\mathbb{C}$.

Дефиниција 2.1. *Области Ω_1 и Ω_2 су конформно еквивалентне ако постоји пресликавање $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1,\Omega_2)$, које је „1-1” и „НА”. У том случају, пресликавање f назива се конформни изоморфизам области Ω_1 и Ω_2, а скуп свих таквих конформних изоморфизама обележава се са $\mathrm{Isom}(\Omega_1,\Omega_2)$. Ако је $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$, онда се конформни изоморфизам назива конформни аутоморфизам области Ω, а скуп одговарајућих аутоморфизама обележава се са $\mathrm{Aut}(\Omega)$.*

Како је инверзно пресликавање холоморфног пресликавања такође холоморфно, следи да, ако је $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$, онда је и $f^{-1} \in \mathrm{Isom}(\Omega_2, \Omega_1)$. Непосредно се доказује и да је $\mathrm{Aut}(\Omega)$ група у односу на слагање пресликавања.

Приметимо још да из дефиниције конформног изоморфизма непосредно следи следеће тврђење: Ако је $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$, онда је $f'(z) \neq 0$, за свако $z \in \Omega_1$, тј. f је конформно пресликавање.

Следећа теорема, у чијем се доказу, на пример у [74], користи и Шварцова лема, јесте једна од најелегантнијих и најважнијих теорема комплексне анализе.

Теорема 2.2 (Риманова теорема). *Свака просто повезана област $\Omega \subset \mathbb{C}$, таква да је $\Omega \neq \mathbb{C}$, конформно је еквивалентна јединичном диску $\mathbb{U}$.*

Напоменимо да се једноставно показује да тврђење Риманове теореме није тачно ако је $\Omega = \mathbb{C}$.

Непосредна последица Риманове теореме јесте следеће тврђење: Ако су Ω_1 и Ω_2 просто повезане области у $\mathbb{C}$, такве да је $\Omega_1 \neq \mathbb{C}$ и $\Omega_2 \neq \mathbb{C}$, онда је скуп $\mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$ непразан.

Од посебног интереса јесте да се опише скуп $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, а да бисмо то учинили потребно је да уведемо једно пресликавање и применимо Шварцову лему.

Дефиниција 2.2. *Нека је $\alpha \in \mathbb{U}$. Пресликавање $\varphi_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ дефинишемо на следећи начин:*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}.$$

Напомена 2.2. *Понекад је погодно користити пресликавање φ_α и за $\alpha = 1$ (видети теорему 2.4, теорему 2.13, теорему 3.14, теорему 3.15 и теорему 3.17). Тада, по дефиницији узимамо да је $\varphi_1(z) = 1$, за свако $z \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Пропозиција 2.3. *Нека је $\alpha \in \mathbb{U}$. Тада важи:*

а) φ_α је холоморфно на $\mathbb{C} \backslash \{-1/\overline{\alpha}\}$;

б) φ_α је „1-1” и „НА” на $\overline{\mathbb{C}}$;

в) $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$;

г) φ_α пресликава $\mathbb{T}$ на $\mathbb{T}$;

д) $\varphi_\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$;

ђ) $\varphi'_\alpha(z) = \dfrac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}$, посебно $\varphi'_\alpha(0) = 1-|\alpha|^2$ и $\varphi'_\alpha(-\alpha) = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$.

Специјално, ако је $\alpha \in (-1, 1)$, онда важи и:

е) φ_α је строго растућа на $(-1, 1)$;

ж) $\varphi_\alpha([-r, r]) = [\varphi_\alpha(-r), \varphi_\alpha(r)] = \left[\dfrac{\alpha - r}{1-\alpha r}, \dfrac{\alpha + r}{1+\alpha r}\right]$, за свако $r \in [0, 1)$.

Доказ. Делови а), б) и в) доказују се непосредно. Да бисмо доказали део г), претпоставимо да је $z \in \mathbb{T}$. Тада постоји $t \in \mathbb{R}$, такво да је $z = e^{it}$ и важи

$$|\varphi_\alpha(e^{it})| = \left|\frac{e^{it}+\alpha}{1+\overline{\alpha}e^{it}}\right| = \frac{|e^{it}+\alpha|}{|e^{-it}+\overline{\alpha}|} = 1,$$

као и

$$|\varphi_\alpha^{-1}(e^{it})| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\overline{\alpha}e^{it}}\right| = \frac{|e^{it}-\alpha|}{|e^{-it}-\overline{\alpha}|} = 1,$$

тј. $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$ и $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$. Отуда је $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

Да бисмо доказали део д), приметимо да на основу дела г) и принципа максимума модула важи $\varphi_\alpha(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ и $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Отуда је $\varphi_\alpha(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

Једнакости у делу ђ) добијају се непосредним израчунавањем.

Део е) следи из чињенице да је $\varphi_\alpha'(x) = \dfrac{1-|\alpha|^2}{(1+\alpha x)^2} > 0$, за свако $x \in (-1, 1)$.

Део ж) непосредно следи из дела е). □

Пропозиција 2.4. *Функција f припада $\operatorname{Aut}(\mathbb{U})$ ако и само ако постоје $t \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{U}$ такви да је $f(z) = e^{it}\varphi_\alpha(z)$, за свако $z \in \mathbb{U}$.*

Доказ. Претпоставимо да постоје $t \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{U}$ такви да је $f(z) = e^{it}\varphi_\alpha(z)$. Тада, на основу пропозиције 2.3, следи да је $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{U})$.

Нека је $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{U})$ произвољно и нека је $f(0) = a$. Дефинишимо пресликавање g као $g = \varphi_{-a} \circ f$. Непосредно се проверава да $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{U})$ и да је $g(0) = 0$. Отуда је $g^{-1} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{U})$ и важи $g^{-1}(0) = 0$. Дакле, пресликавања g и g^{-1} задовољавају претпоставке Шварцове леме, па је $|g(z)| \leqslant |z|$ и $|g^{-1}(z)| \leqslant |z|$, за свако $z \in \mathbb{U}$. Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. Тада, $g(z) \in \mathbb{U}$ и на основу претходног важи $|g^{-1}(g(z))| \leqslant |g(z)|$, тј. $|z| \leqslant |g(z)|$. Дакле, како је $|g(z)| \leqslant |z|$ и $|g(z)| \geqslant |z|$, следи да је $|g(z)| = |z|$. Отуда, на основу Шварцове леме, постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да је $g(z) = e^{it}z$, тј. $(\varphi_{-a} \circ f)(z) = e^{it}z$. Коначно, из последње једнакости следи $f(z) = e^{it}\varphi_\alpha(z)$, при чему је $\alpha = e^{-it}a$. □

На основу пропозиције 2.4 можемо закључити да пресликавање чију егзистенцију утврђује теорема 2.2 не мора бити јединствено. Ипак, уз неке додатне претпоставке то пресликавање јесте јединствено. Прецизније, важи следећа пропозиција.

Пропозиција 2.5. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана област таква да је $\Omega \neq \mathbb{C}$ и нека је $w_0 \in \Omega$ фиксирано. Тада постоји јединствено $\chi \in \operatorname{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ такво да важи $\chi(w_0) = 0$ и $\chi'(w_0) > 0$.*

Доказ. Нека је $f \in \operatorname{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ произвољно и нека је пресликавање $g : \Omega \to \mathbb{U}$ дефинисано са $g(w) = \varphi_{-f(w_0)} \circ f$. Тада је $g \in \operatorname{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ и важи $g(w_0) = 0$. Дакле, пресликавање $\chi : \Omega \to \mathbb{U}$ можемо дефинисати са $\chi(w) = e^{-i \arg g'(w_0)} g(w)$.

Претпоставимо да за $\chi_1 \in \operatorname{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ такође важи $\chi_1(w_0) = 0$ и $\chi_1'(w_0) > 0$. Тада $\chi_1 \circ \chi^{-1} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{U})$ и важи $(\chi_1 \circ \chi^{-1})(0) = 0$. Отуда, на основу Шварцове леме, добијамо да постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $(\chi_1 \circ \chi^{-1})(z) = e^{it}z$, односно да за свако $w \in \Omega$ важи $\chi_1(w) = e^{it}\chi(w)$. Како је $\chi'(w_0) > 0$ и $\chi_1'(w_0) > 0$, следи да је $e^{it} = 1$, тј. $\chi_1(w) = \chi(w)$, за свако $w \in \Omega$. □

Следе примери конформних изоморфизама које ћемо често користити приликом формулисања и доказивања главних резултата представљених у овој дисертацији (видети главе 3 и 4).

Пример 2.1 (Пресликавање које припада $\mathrm{Isom}(\mathbb{K}, \mathbb{U})$)**.** *Нека је пресликавање ψ дефинисано са $\psi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Тада је $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{K}, \mathbb{U})$.*

У наставку текста са ψ обележаваћемо пресликавање дефинисано у примеру 2.1.

Пример 2.2 (Пресликавања која припадају $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$)**.**

а) Нека је $\kappa = \psi^{-1}$. Тада је $\kappa \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$. Такође, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\kappa(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

б) Нека су $b \in \mathbb{K}$, $a = \psi(b) = \dfrac{b-1}{b+1}$ и $\kappa_b = \kappa \circ \varphi_a$. Тада је $\kappa_b \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$ и $\kappa_b(0) = b$.

У наставку текста са κ и κ_b обележаваћемо пресликавања дефинисана у примеру 2.2.

Пример 2.3 (Пресликавање које припада $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}, \mathbb{U})$)**.** *Нека је пресликавање φ дефинисано са $\varphi(z) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right)$. Тада је $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{S}, \mathbb{U})$.*

У наставку текста са φ обележаваћемо пресликавање дефинисано у примеру 2.3.

Пример 2.4 (Пресликавања која припадају $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$)**.**

а) Нека је $\phi = \varphi^{-1}$. Тада је $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$. Такође, ако је

- $\phi_1(z) = iz$,
- $\phi_2(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$,
- $\phi_3(z) = \log z$, *где је* $\log$ *регуларна грана логаритма дефинисана на* $\mathbb{K}$ *и одређена условом* $\log 1 = 0$ *и*
- $\phi_4(z) = -i\dfrac{2}{\pi}z$,

онда је $\phi = \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$. Приметимо да је $\phi_2 = \kappa$ (видети пример 2.2) и $\phi(0) = 0$.

б) Нека су $b \in \mathbb{S}$, $a = \varphi(b) = \mathrm{tg}\,\dfrac{b\pi}{4}$ и $\phi_b = \phi \circ \varphi_a$. Тада је $\phi_b \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ и $\phi_b(0) = b$.

У наставку текста са ϕ и ϕ_b обележаваћемо пресликавања дефинисана у примеру 2.4.

Пример 2.5 (Пресликавање које припада $\mathrm{Isom}(\mathbb{P}, \mathbb{U})$)**.** *Нека је пресликавање ς дефинисано са $\varsigma(z) = \sqrt{z}$, где је $\sqrt{\cdot}$ регуларна грана корена дефинисана на $\mathbb{P}$ и одређена условом $\sqrt{1} = 1$. Тада је $\varsigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P}, \mathbb{K})$. Даље, нека је $\omega = \psi \circ \varsigma$. Тада је $\omega \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P}, \mathbb{U})$ и за свако $z \in \mathbb{P}$ важи $\omega(z) = \dfrac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}$.*

У наставку текста са ω обележаваћемо пресликавање дефинисано у примеру 2.5.

Пропозиција 2.6. *Нека су $b \in (0, +\infty)$, $a = \dfrac{b-1}{b+1}$ и κ_b пресликавање дефинисано у примеру 2.2. Тада је*

а) κ_b строго растућа на $(-1, 1)$;

б) $\kappa_b([-r,r]) = [\kappa_b(-r), \kappa_b(r)] = \left[\dfrac{1+\varphi_a(-r)}{1-\varphi_a(-r)}, \dfrac{1+\varphi_a(r)}{1-\varphi_a(r)}\right] = \left[\dfrac{1-r}{1+r}b, \dfrac{1+r}{1-r}b\right]$, *за свако* $r \in [0,1)$.

Доказ. Непосредно се проверава да функција κ_b пресликава $(-1,1)$ на $(0,+\infty)$. Како за свако $t \in (-1,1)$ важи $\kappa_b'(t) > 0$, следи а). Део б) непосредно следи из дела а). □

Пропозиција 2.7. *Нека су* $b \in (-1,1)$, $a = \operatorname{tg}\dfrac{b\pi}{4}$ *и* ϕ_b *пресликавање дефинисано у примеру 2.4. Тада је*

а) ϕ_b *строго растућа на* $(-1,1)$*;*

б) $\phi_b([-r,r]) = [\phi_b(-r), \phi_b(r)] = \left[\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(-r), \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(r)\right]$, *за свако* $r \in [0,1)$.

Доказ. Непосредно се проверава да функција ϕ_b пресликава $(-1,1)$ на $(-1,1)$. Како за свако $t \in (-1,1)$ важи $\phi_b'(t) > 0$, следи а). Део б) непосредно следи из дела а). □

2.3 Нека уопштења Шварцове леме

Размотримо сада варијанте Шварцове леме за $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, при чему не мора бити $f(0) = 0$.

Наредна теорема приписује се Линделофу (видети [12, стр. 193] и [41, стр. 32]).

Теорема 2.3. *Нека је* $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ *и* $|f(0)| = a$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|}, \tag{2.4}$$

односно, другачије записано,

$$|f(z)| \leqslant \varphi_a(|z|). \tag{2.5}$$

Неједнакост (2.5) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ *постоји функција (која зависи од* z*)* $f_{[z]} \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, *таква да је* $f_{[z]}(0) = a$ *и* $f_{[z]}(z) = \varphi_a(|z|)$.

Напомена 2.3. *Приметимо да је неједнакост а) у теореми 2.1 специјалан случај неједнакости (2.5) за* $a = 0$.

Пре него што наведемо доказ теореме 2.3, погодно је да формулишемо једну лему.

Лема 2.1. *Нека су* $a, b \in \mathbb{C}$ *такви да је* $|a| < 1$ *и* $|b| < 1$. *Тада важи*

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| \geqslant \frac{\big||a|-|b|\big|}{1-|a||b|}.$$

Доказ. Приметимо да важи

$$1 - \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)}{|1-\overline{a}b|^2}.$$

Отуда је

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 &= 1-\frac{\big(1-|a|^2\big)\big(1-|b|^2\big)}{|1-\overline{a}b|^2}\\ &\geqslant 1-\frac{\big(1-|a|^2\big)\big(1-|b|^2\big)}{\big(1-|a||b|\big)^2}\\ &= \frac{\big(|a|-|b|\big)^2}{\big(1-|a||b|\big)^2}.\end{aligned}$$

□

Доказ теореме 2.3. Нека је $F=\varphi_{-f(0)}\circ f$. Тада је $F\in\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и $F(0)=0$. На основу Шварцове леме следи

$$|F(z)|\leqslant|z|,$$

тј.

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\leqslant|z|, \tag{2.6}$$

док на основу леме 2.1 важи

$$\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)||f(z)|}\leqslant\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|. \tag{2.7}$$

Коначно, из (2.6) и (2.7) следи (2.4).

Докажимо сада да је неједнакост (2.5) оштра у претходно наведеном смислу.

Ако је $z\neq0$ дефинишимо функцију $f_{[z]}:\mathbb{U}\to\mathbb{U}$ на следећи начин:

$$f_{[z]}(\zeta)=\varphi_a(e^{-i\arg z}\zeta).$$

Непосредно се показује да $f_{[z]}\in\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, као и да важи $f_{[z]}(0)=a$. Такође, за функцију $f_{[z]}$ важи

$$f_{[z]}(z)=\varphi_a(e^{-i\arg z}z)=\varphi_a(|z|).$$

Ако је $z=0$, онда тривијално следи да је неједнакост (2.5) оштра у наведеном смислу.

□

Наведимо сада још једно профињење Шварцове леме (видети [65],[41, стр. 60]).

Теорема 2.4. *Нека је $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ таква да је*

1° $f(0)=0$ *и*

2° $|f'(0)|=c$, *при чему је* $c\leqslant1$.

Тада, за свако $z\in\mathbb{U}$ важи

$$|f(z)|\leqslant|z|\frac{|z|+|f'(0)|}{1+|f'(0)||z|}, \tag{2.8}$$

односно, другачије записано,

$$|f(z)|\leqslant|z|\cdot\varphi_c(|z|). \tag{2.9}$$

Неједнакост (2.9) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z\in\mathbb{U}$ постоји функција (која зависи од z) $f_{[z]}\in\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, таква да је $f_{[z]}(0)=0$, $f'_{[z]}(0)=c$ и $|f_{[z]}(z)|=|z|\cdot\varphi_c(|z|)$.

Напомена 2.4. *Имајући у виду теорему 2.1, услов* $c \leqslant 1$ *у* 2° *јесте природан и неопходан.*

Напомена 2.5. *Приметимо да је неједнакост а) у теореми 2.1 специјалан случај неједнакости (2.9), за* $c = 1$.

Доказ теореме 2.4. Нека је

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Као и у доказу Шварцове леме показује се да је функција g холоморфна на $\mathbb{U}$. С друге стране, применом Шварцове леме на функцију f, добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|g(z)| \leqslant 1$. При томе, ако је $|g(z)| = 1$, за неко $z \in \mathbb{U}$, онда је $f(z) = e^{i\theta} z$, за свако $z \in \mathbb{U}$ и неједнакост (2.8) тривијално важи. Ако је $|g(z)| < 1$, онда је $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и, тада, на функцију g можемо применити теорему 2.3. Заиста, у том случају за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$|g(z)| \leqslant \frac{|z| + |g(0)|}{1 + |g(0)||z|}. \tag{2.10}$$

Из (2.10) непосредно следи (2.8).

Докажимо сада да је неједнакост (2.9) оштра у наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, дефинишимо функцију $f_{[z]} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ на следећи начин:

$$f_{[z]}(\zeta) = \zeta \cdot \varphi_c(e^{-i \arg z} \zeta).$$

Непосредно се показује да $f_{[z]} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, као и да важи $f_{[z]}(0) = 0$ и $f'_{[z]}(0) = c$. Такође, за функцију $f_{[z]}$ важи

$$|f_{[z]}(z)| = |z \cdot \varphi_c(e^{-i \arg z} z)| = |z| \cdot \varphi_c(|z|).$$

Ако је $z = 0$, онда тривијално следи да је неједнакост (2.9) оштра у наведеном смислу. □

2.4 Шварц - Пикова лема

Највећи део излагања у овој и у наредне две секције написан је комбиновањем материјала који се може наћи у књигама [3], [41] и [59] и посебно у раду [9].

Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, $z \in \mathbb{U}$ произвољно и нека је функција F дефинисана на следећи начин:

$$F = \varphi_{-f(z)} \circ f \circ \varphi_z.$$

Непосредно се проверава да је $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $F(0) = 0$, па функција F задовољава претпоставке Шварцове леме. Отуда је

$$|F(\zeta)| \leqslant |\zeta|, \quad \text{за свако } \zeta \in \mathbb{U}, \tag{2.11}$$

и

$$|F'(0)| \leqslant 1.$$

Ако је $w \in \mathbb{U}$, онда је $\varphi_{-z}(w) \in \mathbb{U}$ и из (2.11) следи $|F(\varphi_{-z}(w))| \leqslant |\varphi_{-z}(w)|$, односно на основу дефиниције пресликавања F добијамо

$$|\varphi_{-f(z)}(f(w))| \leqslant |\varphi_{-z}(w)|,$$

тј.

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right| \leqslant \left|\frac{w-z}{1-\overline{z}w}\right|. \tag{2.12}$$

Ако је $z \neq w$, онда је (2.12) еквивалентно са

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| \leqslant \left|\frac{1-\overline{f(z)}f(w)}{1-\overline{z}w}\right|. \tag{2.13}$$

Узимајући $\lim\limits_{w\to z}$ у неједнакости (2.13) добијамо

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2},$$

односно

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{2.14}$$

Отуда, имајући у виду услове под којима се у неједнакостима исказаним у Шварцовој леми достиже једнакост, претходним разматрањима доказали смо следећу теорему.

Теорема 2.5 (Шварц - Пикова лема)**.** *Нека је* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$*. Тада важи*

а) $\left|\dfrac{f(w)-f(z)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right| \leqslant \left|\dfrac{w-z}{1-\overline{z}w}\right|$*, за свако* $z, w \in \mathbb{U}$*;*

б) $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \dfrac{1}{1-|z|^2}$*, за свако* $z \in \mathbb{U}$*.*

При томе, ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$*, онда у а) једнакост важи за свако* $z, w \in \mathbb{U}$*, а у б) једнакост важи за свако* $z \in \mathbb{U}$*. Обратно, ако у а), за неке* $z, w \in \mathbb{U}$*, важи једнакост или ако у б), за неко* $z \in \mathbb{U}$*, важи једнакост, онда је* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$*.*

Према [10], горе наведену идеју компоновања пресликавања које припада $\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, са пресликавањима која припадају $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ споменуо је Каратеодори у већ поменутом раду [15] из 1912. године. Такође, према истом извору, први експлицитан запис неједнакости (2.12) појављује се у раду [28] Г. Жулије (Gaston Maurice Julia, 1893 - 1978) из 1918. године. Теорема 2.5 је своје уобичајено име, Шварц-Пикова лема, добила по раду [70] Г. Пика (Georg Alexander Pick, 1859 - 1942) из 1915. године. У том раду аутор експлицитно не записује неједнакости (2.12) и (2.14), већ пише да пресликавања која припадају $\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ не повећавају хиперболичко растојање на јединичном диску. О томе ће у овој дисертацији више речи бити у наредној секцији, а веза Поенкареовог диск модела хиперболичке равни са овом теоријом биће детаљно размотрена у глави 5.

2.5 Хиперболичка метрика на јединичном диску

По дефиницији, хиперболичка метрика на јединичном диску јесте $\rho_{\mathbb{U}}(z)|dz|$, при чему је $z \in \mathbb{U}$ и $\rho_{\mathbb{U}}(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$[*]. При томе, функцију $\rho_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \to (0, +\infty)$ називамо хиперболичка густина на јединичном диску. Хиперболичка метрика индукује хиперболичку дужину C^1 криве[†], која припада $\mathbb{U}$, на следећи начин: Ако је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ једна C^1 крива, онда је њена хиперболичка дужина $\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$ по дефиницији једнака

$$\int_\gamma \rho_{\mathbb{U}}(z)|dz|. \tag{2.15}$$

Коначно, ако су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$, онда је са

$$d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \rho_{\mathbb{U}}(z)|dz|, \tag{2.16}$$

при чему се инфимум узима по свим C^1 кривим $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ чије су крајње тачке z_1 и z_2, дефинисана функција на $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, за коју ћемо показати (видети теорему 2.10) да је растојање на $\mathbb{U}$. То растојање називамо хиперболичко растојање.

Пре него што покажемо да је са (2.16) заиста дефинисано једно растојање на $\mathbb{U}$, навешћемо неколико теорема, лема и дефиниција које су од ширег значаја.

Теорема 2.6 (Шварц-Пикова лема у терминима хиперболичке метрике на $\mathbb{U}$)**.** *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада важи*

а) $\rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f'(z)| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(z)$, за свако $z \in \mathbb{U}$;

б) $\ell_{\mathbb{U}}(f \circ \gamma) \leqslant \ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$, за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$;

в) $d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Специјално, ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, онда у а), б) и в) важе једнакости. Обратно, ако у а) за неко $z \in \mathbb{U}$ важи једнакост, онда је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$.

Доказ.

а) Следи директно из Шварц-Пикове леме (теореме 2.5).

б) На основу дефиниције хиперболичке дужине C^1 криве $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ и дела а) важи

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbb{U}}(f \circ \gamma) &= \int_{f\circ\gamma} \rho_{\mathbb{U}}(w)|dw| \\
&= \int_0^1 \rho_{\mathbb{U}}(f(\gamma(t)))|(f\circ\gamma)'(t)|dt \\
&= \int_0^1 \rho_{\mathbb{U}}(f(\gamma(t)))|f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\
&= \int_\gamma \rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f'(z)||dz| \\
&\leqslant \int_\gamma \rho_{\mathbb{U}}(z)|dz| \\
&= \ell_{\mathbb{U}}(\gamma).
\end{aligned}$$

[*] За мотивацију и везу са Поенкареовим диск моделом хиперболичке геометрије видети главу 5.

[†] Општије криве која је део по део C^1.

в) Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ произвољни. Тада је

$$d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)) = \inf_{\Gamma} \ell_{\mathbb{U}}(\Gamma), \tag{2.17}$$

при чему се инфимум узима по свим C^1 кривим $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$, таквим да је $\Gamma(0) = f(z_1)$ и $\Gamma(1) = f(z_2)$. Како је скуп

$$\{f \circ \gamma \,|\, \gamma : [0,1] \to \mathbb{U} \text{ је } C^1 \text{ крива, } \gamma(0) = z_1 \text{ и } \gamma(1) = z_2\}$$

подскуп скупа

$$\{\Gamma \,|\, \Gamma : [0,1] \to \mathbb{U} \text{ је } C^1 \text{ крива, } \Gamma(0) = f(z_1) \text{ и } \Gamma(1) = f(z_2)\},$$

следи да је

$$\inf_{\Gamma} \ell_{\mathbb{U}}(\Gamma) \leqslant \inf_{\gamma} \ell_{\mathbb{U}}(f \circ \gamma), \tag{2.18}$$

при чему се инфимум с леве стране неједнакости узима по свим C^1 кривим $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$, таквим да је $\Gamma(0) = f(z_1)$ и $\Gamma(1) = f(z_2)$, а инфимум с десне стране неједнакости узима по свим C^1 кривим $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$, таквим да је $\gamma(0) = z_1$ и $\gamma(1) = z_2$. Отуда, на основу (2.17), (2.18) и дела б) следи

$$d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2).$$

Нека је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$. Тада на основу теореме 2.5 у а) и б) важе једнакости. Такође, како је тада $f^{-1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, на основу доказаног у делу в), важи

$$d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{U}}(f^{-1}(f(z_1)), f^{-1}(f(z_2))) \leqslant d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)).$$

Отуда, ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, онда и у делу в) важи једнакост.

Обратно, ако у а) за неко $z \in \mathbb{U}$ важи једнакост, онда је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, на основу теореме 2.5 □

Дефиниција 2.3. *Функцију $\delta_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \to [0, +\infty)$ дефинишемо са*

$$\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = |\varphi_{-z_1}(z_2)| = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|.$$

Теорема 2.7. *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи*

$$\delta_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2). \tag{2.19}$$

Специјално, ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, онда у (2.19) важи једнакост. Обратно, ако у (2.19) за неке $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи једнакост, онда $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$.

Доказ. Тврђење непосредно следи из дефиниције функције $\delta_{\mathbb{U}}$ и теореме 2.5. □

Лема 2.2. *Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Тада је $\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) \leqslant \dfrac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|}$.*

Доказ. Како је $\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = |\varphi_{-z_1}(z_2)|$, те како је $\varphi_{-z_1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $|\varphi_{-z_1}(0)| = |z_1|$, на основу теореме 2.3 следи

$$|\varphi_{-z_1}(z_2)| \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},$$

тј.

$$\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|}.$$

□

Теорема 2.8. *Функција $\delta_{\mathbb{U}}$ јесте растојање на $\mathbb{U}$.*

Доказ. Непосредно се доказује:

1° $\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) \geqslant 0$, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

2° $\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = 0$ ако и само ако $z_1 = z_2$.

3° $\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_1)$, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Потребно је још доказати:

4° $\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3) \leqslant \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)$, за свако $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{U}$.

Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{U}$ произвољни. На основу теореме 2.7 и леме 2.2 важи

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3) &= \delta_{\mathbb{U}}(\varphi_{-z_2}(z_1), \varphi_{-z_2}(z_3)) \leqslant \frac{|\varphi_{-z_2}(z_1)| + |\varphi_{-z_2}(z_3)|}{1 + |\varphi_{-z_2}(z_1)||\varphi_{-z_2}(z_3)|} \\ &= \frac{\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)}{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)\delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)} \leqslant \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3), \end{aligned}$$

што представља доказ својства 4°. □

Напомена 2.6. *Растојање $\delta_{\mathbb{U}}$ називамо псеудохиперболичко растојање.*

Лема 2.3. *Нека је $\gamma : [a, b] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива, $\alpha = \operatorname{Re}\gamma$ и $\beta = \operatorname{Im}\gamma$. Тада важи*

$$\int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \geqslant \int_a^b \frac{2\alpha'(t)}{1 - (\alpha(t))^2} dt = \log\left(\frac{1 + \alpha(b)}{1 - \alpha(b)} \cdot \frac{1 - \alpha(a)}{1 + \alpha(a)}\right).$$

Доказ. Како за свако $t \in [a, b]$ важи

$$|\gamma(t)| = \sqrt{\big(\alpha(t)\big)^2 + \big(\beta(t)\big)^2} \geqslant |\alpha(t)|$$

и

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\big(\alpha'(t)\big)^2 + \big(\beta'(t)\big)^2} \geqslant |\alpha'(t)| \geqslant \alpha'(t),$$

следи да за свако $t \in [a, b]$ важи

$$\frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} \geqslant \frac{\alpha'(t)}{1 - |\alpha(t)|^2} = \frac{\alpha'(t)}{1 - (\alpha(t))^2}.$$

Отуда добијамо

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt &\geqslant \int_a^b \frac{2\alpha'(t)}{1-(\alpha(t))^2}dt\\ &= \int_a^b \left(\log\frac{1+\alpha(t)}{1-\alpha(t)}\right)' dt\\ &= \log\left(\frac{1+\alpha(b)}{1-\alpha(b)}\cdot\frac{1-\alpha(a)}{1+\alpha(a)}\right).\end{aligned}$$

□

Теорема 2.9. *Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Тада је*

$$d_{\mathbb{U}}(z_1,z_2) = \log\frac{1+\delta_{\mathbb{U}}(z_1,z_2)}{1-\delta_{\mathbb{U}}(z_1,z_2)}. \tag{2.20}$$

Доказ. Ако је $z_1 = z_2$, онда једнакост (2.20) тривијално важи. Нека су z_1 и z_2 различите и нека је функција f дефинисана са $f(z) = e^{-i\arg\varphi_{-z_1}(z_2)}\varphi_{-z_1}(z)$. Тада $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, $f(z_1) = 0$ и $f(z_2) = |\varphi_{-z_1}(z_2)|$. Отуда, на основу теореме 2.6, важи $d_{\mathbb{U}}(z_1,z_2) = d_{\mathbb{U}}(0,|\varphi_{-z_1}(z_2)|)$. Даље, нека је $r = r(z_1,z_2) = |\varphi_{-z_1}(z_2)|$ и нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива, таква да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = r$. На основу дефиниције $\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$ и леме 2.3 важи

$$\ell_{\mathbb{U}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geqslant \log\frac{1+r}{1-r}.$$

Отуда, с обзиром на дефиницију $d_{\mathbb{U}}$, добијамо

$$d_{\mathbb{U}}(0,r) = \inf_{\gamma} \ell_{\mathbb{U}}(\gamma) \geqslant \log\frac{1+r}{1-r}, \tag{2.21}$$

при чему се инфимум узима по свим C^1 кривим $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$, таквим да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = r$. Даље, нека је $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{U}$ дефинисана са $\gamma_0(t) = rt$. Тада је $\gamma_0(0) = 0$, $\gamma_0(1) = r$ и

$$\ell_{\mathbb{U}}(\gamma_0) = \log\frac{1+r}{1-r}. \tag{2.22}$$

Коначно, како је $r = |\varphi_{-z_1}(z_2)| = \delta_{\mathbb{U}}(z_1,z_2)$, из (2.21) и (2.22) следи (2.20). □

Последица 2.1. *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$. Ако за неке $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи*

$$d_{\mathbb{U}}(f(z_1),f(z_2)) = d_{\mathbb{U}}(z_1,z_2),$$

онда је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$.

Доказ. На основу теореме 2.9 важи $\delta_{\mathbb{U}}(f(z_1),f(z_2)) = \delta_{\mathbb{U}}(z_1,z_2)$. Отуда, на основу теореме 2.7, следи да је $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{U})$. □

Приметимо да на основу доказа теореме 2.9, следи да се у дефиницији функције $d_{\mathbb{U}}$, датој на страни 31, инфимум може заменити минимумом. Заиста, нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ произвољни и различити и нека су f, $r = r(z_1,z_2)$ и γ_0 дефинисани као у доказу теореме 2.9. Тада је

$$d_{\mathbb{U}}(z_1,z_2) = \ell_{\mathbb{U}}(\gamma_0) = \ell_{\mathbb{U}}(f^{-1}\circ\gamma_0).$$

Крајње тачке криве $f^{-1} \circ \gamma_0$ јесу z_1 и z_2 и траг те криве назива се *геодезијска линија у* $\mathbb{U}$ чије су крајње тачке z_1 и z_2. Како је траг криве γ_0 еуклидска дуж чије су крајње тачке 0 и r, те како је еуклидска права одређена тим тачкама ортогонална на $\mathbb{T}$ и како је $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, следи да је траг криве $f^{-1} \circ \gamma_0$ кружни лук који је део еуклидског круга k ортогоналног на $\mathbb{T}$. Круг k јесте једнозначо одређени круг који садржи тачке z_1 и z_2 и ортогоналан је на $\mathbb{T}$.

Теорема 2.10. *Функција* $d_{\mathbb{U}}$ *јесте растојање на* $\mathbb{U}$.

Доказ. На основу теореме 2.9 и теореме 2.8 непосредно следи:

1° $d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) \geqslant 0$, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

2° $d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = 0$ ако и само ако $z_1 = z_2$.

3° $d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{U}}(z_2, z_1)$, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Потребно је још доказати:

4° $d_{\mathbb{U}}(z_1, z_3) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)$, за свако $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{U}$.

У том циљу, нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{U}$ произвољни. На основу теореме 2.9, неједнакост $d_{\mathbb{U}}(z_1, z_3) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)$ еквивалентна је са

$$\log \frac{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3)}{1 - \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3)} \leqslant \log \frac{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)}{1 - \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)} + \log \frac{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)}{1 - \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)},$$

односно са

$$\log \frac{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3)}{1 - \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3)} \leqslant \log \left(\frac{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)}{1 - \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)} \cdot \frac{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)}{1 - \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)} \right). \tag{2.23}$$

Коначно, непосредно се проверава да је неједнакост (2.23) еквивалентна са

$$\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_3) \leqslant \frac{\delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)}{1 + \delta_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)\delta_{\mathbb{U}}(z_2, z_3)}, \tag{2.24}$$

а неједнакост (2.24) јесте тачна на основу доказа теореме 2.8. □

2.6 Хиперболичка метрика на просто повезаној области и Шварц-Пикова лема за просто повезане области

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана област различита од $\mathbb{C}$ и $f \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$. Хиперболичка метрика на Ω дефинише се на следећи начин:

$$\rho_{\Omega}(z)|dz| = \rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f'(z)||dz|.$$

На основу Риманове теореме (теорема 2.2) следи да је скуп $\mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ непразан, док на основу Шварц-Пикове леме (теорема 2.5) следи да је дефиниција хиперболичке метрике на Ω коректна, тј. да не зависи од избора функције f. Заиста, нека су $f_1, f_2 \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$.

Тада је $g = f_2 \circ f_1^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ и на основу Шварц-Пикове леме за свако $w \in \mathbb{U}$ важи $\dfrac{|g'(w)|}{1-|g(w)|^2} = \dfrac{1}{1-|w|^2}$. Отуда, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\frac{|f_1'(z)|}{1-|f_1(z)|^2} = \frac{|f_2'(z)|}{1-|f_2(z)|^2},$$

тј.

$$\rho_{\mathbb{U}}(f_1(z))|f_1'(z)||dz| = \rho_{\mathbb{U}}(f_2(z))|f_2'(z)||dz|.$$

Функција $\rho_\Omega : \Omega \to (0,+\infty)$ назива се хиперболичка густина на Ω. Слично као у случају јединичног диска, хиперболичка метрика на Ω индукује хиперболичку дужину C^1 криве у Ω (обележава се са ℓ_Ω) и хиперболичко растојање на Ω (обележава се са d_Ω).

На основу наведеног, просто повезану област $\Omega \subset \mathbb{C}$, која је различита од $\mathbb{C}$, називамо *хиперболички домен.*

У наставку наводимо примере хиперболичких домена и хиперболичких густина на њима.

Пример 2.6 (Хиперболичка густина на диску U_r)**.** *Нека је $r \in (0,+\infty)$ и нека је пресликавање $f : U_r \to \mathbb{U}$ дефинисано са $f(z) = \dfrac{z}{r}$. Тада, за $z \in U_r$ важи*

$$\rho_{U_r}(z) = \rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f'(z)| = \frac{2r}{r^2-|z|^2}.$$

Пример 2.7 (Хиперболичка густина на полуравни $\mathbb{K}$)**.** *Нека је $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{K},\mathbb{U})$ пресликавање дефинисано у примеру 2.1. Тада, за $z \in \mathbb{K}$ важи*

$$\rho_{\mathbb{K}}(z) = \rho_{\mathbb{U}}(\psi(z))|\psi'(z)| = \frac{1}{\mathrm{Re}\, z}.$$

Пример 2.8 (Хиперболичка густина на појасу $\mathbb{S}$)**.** *Нека је $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{S},\mathbb{U})$ пресликавање дефинисано у примеру 2.3. Тада, за $z \in \mathbb{S}$ важи*

$$\rho_{\mathbb{S}}(z) = \rho_{\mathbb{U}}(\varphi(z))|\varphi'(z)| = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\mathrm{Re}\, z\right)}.$$

Следећа пропозиција даје нам интересантну везу између еуклидског и хиперболичког растојања на појасу $\mathbb{S}$. Нагласимо да је ова пропозиција кључна за један од важних резултата приказаних у овој дисертацији (видети теорему 4.6).

Пропозиција 2.8. *За свако $z_1, z_2 \in \mathbb{S}$ важи*

$$d_{\mathbb{S}}(z_1,z_2) \geqslant \frac{\pi}{2} d_e(z_1,z_2). \tag{2.25}$$

Ако су z_1 и z_2 чисто имагинарни бројеви, онда у (2.25) важи једнакост.

Доказ. Како за свако $z \in \mathbb{S}$ важи $0 < \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\mathrm{Re}\, z\right) \leqslant 1$, следи да за свако $z \in \mathbb{S}$ важи и

$$\rho_{\mathbb{S}}(z) \geqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.26}$$

Нека је γ произвољна C^1 крива у $\mathbb{S}$ чије су крајње тачке z_1 и z_2. Из (2.26) следи

$$\int_\gamma \rho_{\mathbb{S}}(z)|dz| \geqslant \frac{\pi}{2}\int_\gamma |dz|. \tag{2.27}$$

Другим речима, хиперболичка дужина криве γ није мања од производа константе $\dfrac{\pi}{2}$ и еуклидске дужине криве γ. Како еуклидска дужина криве γ није мања од $d_e(z_1, z_2)$, на основу неједнакости (2.27) добијамо

$$\int_\gamma \rho_{\mathbb{S}}(z)|dz| \geqslant \frac{\pi}{2}d_e(z_1, z_2). \tag{2.28}$$

Узимајући на левој страни неједнакости (2.28) инфимум по свим C^1 кривим γ у $\mathbb{S}$ чије су крајње тачке z_1 и z_2, добијамо

$$d_{\mathbb{S}}(z_1, z_2) \geqslant \frac{\pi}{2}d_e(z_1, z_2). \tag{2.29}$$

Нека су $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ произвољни и нека је C^1 крива $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{S}$ дефинисана са $\gamma_0(t) = iy_1 + i(y_2 - y_1)t$. Тада је

$$\int_{\gamma_0} \rho_{\mathbb{S}}(z)|dz| \geqslant d_{\mathbb{S}}(iy_1, iy_2)$$

и

$$\int_{\gamma_0} \rho_{\mathbb{S}}(z)|dz| = \frac{\pi}{2}|y_2 - y_1| = \frac{\pi}{2}d_e(iy_1, iy_2),$$

па на основу (2.29) важи $d_{\mathbb{S}}(iy_1, iy_2) = \dfrac{\pi}{2}d_e(iy_1, iy_2)$. □

Пример 2.9 (Хиперболичка метрика на засеченој равни $\mathbb{P}$)**.** *Нека је $\omega \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P}, \mathbb{U})$ пресликавање дефинисано у примеру 2.5. Тада, за $z \in \mathbb{P}$ важи*

$$\rho_{\mathbb{P}}(z) = \rho_{\mathbb{U}}(\omega(z))|\omega'(z)| = \frac{1}{2|\sqrt{z}|\operatorname{Re}\sqrt{z}},$$

при чему је са $\sqrt{\cdot}$ обележена регуларна грана корена дефинисана на $\mathbb{P}$ и одређена условом $\sqrt{1} = 1$.

У складу са уведеним појмовима хиперболичког домена у $\mathbb{C}$ и хиперболичке метрике на њему, теорема 2.6, као и њене последице, имају своје природне генерализације.

Теорема 2.11 (Шварц-Пикова лема за просто повезане области)**.** *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени и $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада важи*

а) $\rho_{\Omega_2}(f(z))|f'(z)| \leqslant \rho_{\Omega_1}(z)$, за свако $z \in \Omega_1$;

б) $\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \leqslant \ell_{\Omega_1}(\gamma)$, за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$;

в) $d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant d_{\Omega_1}(z_1, z_2)$, за свако $z_1, z_2 \in \Omega_1$.

Специјално, ако је $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$, онда у а), б) и в) важе једнакости. Обратно, ако у а), за неко $z \in \Omega_1$, важи једнакост, онда је $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$.

Доказ. Нека су $g_1 \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \mathbb{U})$ и $g_2 \in \mathrm{Isom}(\Omega_2, \mathbb{U})$. Тада пресликавање $h = g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$ припада $\mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, одакле на основу дела а) теореме 2.6, за свако $w \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho_{\mathbb{U}}(h(w))|h'(w)| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(w). \tag{2.30}$$

Нека $z \in \Omega_1$ произвољно и $w \in \mathbb{U}$ такво да важи $z = g_1^{-1}(w)$. На основу дефиниција ρ_{Ω_2} и ρ_{Ω_1}, као и неједнакости (2.30) следи

$$\begin{aligned}
\rho_{\Omega_2}(f(z)) \cdot |f'(z)| &= \rho_{\mathbb{U}}(g_2(f(z))) \cdot |g_2'(f(z))| \cdot |f'(z)| \\
&= \rho_{\mathbb{U}}(g_2(f(z))) \cdot |(g_2 \circ f)'(z)| \\
&= \rho_{\mathbb{U}}(h(w)) \cdot |(g_2 \circ f)'(g^{-1}(w))| \\
&= \rho_{\mathbb{U}}(h(w)) \cdot |h'(w)| \cdot |(g_1^{-1})'(w)|^{-1} \\
&\leqslant \rho_{\mathbb{U}}(w) \cdot |(g_1^{-1})'(w)|^{-1} \\
&= \rho_{\mathbb{U}}(g_1(z)) \cdot |g_1'(z)| \\
&= \rho_{\Omega_1}(z),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

чиме смо доказали а). Ако је пресликавање $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$, онда је пресликавање $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, па у (2.30), а самим тим и у (2.31), важи једнакост. С друге стране, ако за неко $z \in \Omega_1$ важи $\rho_{\Omega_2}(f(z)) \cdot |f'(z)| = \rho_{\Omega_1}(z)$, онда и у (2.31) за неко $w \in \mathbb{U}$ важи једнакост, па $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, а самим тим и $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$.

Делови б) и в) доказују се користећи део а) аналогно као што се доказују и делови б) и в) у теореми 2.6. □

Последица 2.2. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен и $f \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$. Тада важи*

а) $\ell_\Omega(\gamma) = \ell_{\mathbb{U}}(f \circ \gamma)$, за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega$;

б) $d_\Omega(z_1, z_2) = d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2))$, за свако $z_1, z_2 \in \Omega$.

Доказ. Тврђење следи директно из теореме 2.11 за $\Omega_2 = \mathbb{U}$ и $\Omega_1 = \Omega$. □

Последица 2.3. *Нека је пресликавање $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$. Ако за неке $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи $d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\Omega_1}(z_1, z_2)$, онда је $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$.*

Доказ. Нека су $g_1 \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \mathbb{U})$, $g_2 \in \mathrm{Isom}(\Omega_2, \mathbb{U})$, $w_1 = g_1(z_1)$ и $w_2 = g_1(z_2)$. Тада, пресликавање $h = g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$ припада $\mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и на основу последице 2.2 важи

$$d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\Omega_2}(f(g_1^{-1}(w_1)), f(g_1^{-1}(w_2))) = d_{\mathbb{U}}(h(w_1), h(w_2)) \tag{2.32}$$

и

$$d_{\Omega_1}(z_1, z_2) = d_{\Omega_1}(g_1^{-1}(w_1), g_1^{-1}(w_2)) = d_{\mathbb{U}}(w_1, w_2). \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) следи $d_{\mathbb{U}}(h(w_1), h(w_2)) = d_{\mathbb{U}}(w_1, w_2)$, одакле на основу последице 2.1 следи да $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$, а самим тим и $f \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$. □

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен, нека су $z_1, z_2 \in \Omega$ и $f \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ и нека је $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{U}$ проста C^1 крива у $\mathbb{U}$ чији је траг геодезијска линија са крајњим тачкама $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Тада се траг криве $f^{-1} \circ \gamma_0 : [0,1] \to \Omega$ назива *геодезијска линија у* Ω чије су крајње тачке z_1 и z_2. Приметимо да на основу последице 2.2 важи $d_\Omega(z_1, z_2) = \ell_\Omega(f^{-1} \circ \gamma_0)$.

Напоменимо још да се и проста C^1 крива $\Gamma_0 : [0,1] \to \Omega$, чији је траг геодезијска линија у Ω често назива геодезијска линија (видети главу 4).

2.7 Хиперболички извод

Дефиниција 2.4. *Нека су* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *хиперболички домени и* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$. *Хиперболички извод функције* f *у тачки* $z_0 \in \Omega_1$ *јесте*

$$f^h(z_0) = \frac{\rho_{\Omega_2}(f(z_0))}{\rho_{\Omega_1}(z_0)} f'(z_0).$$

Хиперболичка дисторзија[‡] *функције* f *у тачки* $z_0 \in \Omega_1$ *јесте* $|f^h(z_0)|$.

Приметимо да на основу теореме 2.11, за свако $z \in \Omega_1$ важи $|f^h(z)| \leqslant 1$.

Користећи појам хиперболичке дисторзије А. Ф. Бирдон и Т. К. Карне објавили су 1992. године рад [8] у коме су формулисали и доказали наредну теорему, коју можемо сматрати уопштењем теореме 2.11. Напоменимо да ова теорема има кључну улогу у доказу теореме 3.14 у глави 3 ове дисертације.

Теорема 2.12. *Нека су* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *хиперболички домени и* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$. *Тада за свако* $z, w \in \Omega_1$ *важи*

$$d_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \leqslant \log\big(\cosh d_{\Omega_1}(z, w) + |f^h(w)| \sinh d_{\Omega_1}(z, w)\big). \tag{2.34}$$

Доказ. За почетак претпоставимо да је $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{U}$ и $w = 0 = f(w)$.

Како је у том случају $|f^h(0)| = |f'(0)|$, потребно је да докажемо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$d_{\mathbb{U}}(f(z), 0) \leqslant \log\big(\cosh d_{\mathbb{U}}(z, 0) + |f'(0)| \sinh d_{\mathbb{U}}(z, 0)\big). \tag{2.35}$$

Имамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $d_{\mathbb{U}}(z, 0) = \log \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$, као и

$$\cosh d_{\mathbb{U}}(z, 0) = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \quad \text{и} \quad \sinh d_{\mathbb{U}}(z, 0) = \frac{2|z|}{1-|z|^2},$$

па је неједнакост (2.35) еквивалентна са неједнакошћу

$$\log \frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leqslant \log\left(\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} + |f'(0)| \frac{2|z|}{1-|z|^2}\right),$$

а како је природни логаритам строго растућа функција, и са неједнакошћу

$$\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leqslant \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} + |f'(0)| \frac{2|z|}{1-|z|^2}. \tag{2.36}$$

С друге стране, неједнакост (2.36) еквивалентна је са неједнакошћу

$$|f(z)| \leqslant |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)||z|},$$

која јесте тачна, за свако $z \in \mathbb{U}$, на основу теореме 2.4.

[‡]На енглеском *hyperbolic distortion* или *hyperbolic change of scale.*

Ослободимо се најпре претпоставке $w = 0 = f(w)$. У том циљу, нека су $z, w \in \mathbb{U}$ произвољни и $g = \varphi_{-f(w)} \circ f \circ \varphi_w$. Тада је $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $g(0) = 0$. На основу доказаног случаја следи

$$d_{\mathbb{U}}(g(\varphi_{-w}(z)), 0) \leqslant \log\big(\cosh d_{\mathbb{U}}(\varphi_{-w}(z), 0) + |g'(0)| \sinh d_{\mathbb{U}}(\varphi_{-w}(z), 0)\big).$$

Како је

$$g'(0) = \frac{1-|w|^2}{1-|f(w)|^2} f'(w) = \frac{\rho_{\mathbb{U}}(f(w))}{\rho_{\mathbb{U}}(w)} f'(w) = f^h(w),$$

те како је $d_{\mathbb{U}}(\varphi_{-w}(z), 0) = d_{\mathbb{U}}(z, w)$ и коначно, како је

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{U}}(g(\varphi_{-w}(z)), 0) &= d_{\mathbb{U}}(g(\varphi_{-w}(z)), g(0)) \\ &= d_{\mathbb{U}}(g(\varphi_{-w}(z)), g(\varphi_{-w}(w))) \\ &= d_{\mathbb{U}}(\varphi_{-f(w)}(f(z)), \varphi_{-f(w)}(f(w))) \\ &= d_{\mathbb{U}}(f(z), f(w)), \end{aligned}$$

следи да неједнакост (2.34) важи под претпоставком $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{U}$.

Ослободимо се још и те претпоставке. Нека су $g_1 \in \mathrm{Isom}(\Omega_1, \mathbb{U})$, $g_2 \in \mathrm{Isom}(\Omega_2, \mathbb{U})$ и $h = g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$. Тада је $h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, па на основу доказаног важи

$$d_{\mathbb{U}}(h(z_1), h(w_1)) \leqslant \log\big(\cosh d_{\mathbb{U}}(z_1, w_1) + |h^h(w_1)| \sinh d_{\mathbb{U}}(z_1, w_1)\big), \tag{2.37}$$

при чему су $z, w \in \Omega_1$ произвољни и $z_1 = g_1(z)$ и $w_1 = g_1(w)$. На основу дела б) последице 2.2 важи

$$d_{\mathbb{U}}(h(g_1(z)), h(g_1(w))) = d_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \tag{2.38}$$

и

$$d_{\mathbb{U}}(g_1(z), g_1(w)) = d_{\Omega_1}(z, w), \tag{2.39}$$

а узимајући у обзир дефиницију хиперболичких густина на Ω_1 и Ω_2 и дефиницију хиперболичког извода, непосредним рачунањем добијамо

$$|h^h(g_1(w))| = \frac{\rho_{\mathbb{U}}(h(g_1(w)))}{\rho_{\mathbb{U}}(g_1(w))} \cdot |h'(g_1(w))| = \frac{\rho_{\Omega_2}(f(w))|f'(w)|}{\rho_{\Omega_1}(w)}. \tag{2.40}$$

Коначно, из (2.37), (2.38), (2.39) и (2.40) добијамо (2.34). □

Напомена 2.7. *Како за свако $t \in \mathbb{R}$ важи $\log(\cosh t + \sinh t) = \log(e^t) = t$, следи да се за $|f^h(w)| = 1$ неједнакост (2.34) своди на неједнакост у делу в) теореме 2.11. С друге стране, како је за свако $t \in [0, +\infty)$ функција $F : [0,1] \to [0, +\infty)$, дефинисана са $F(a) = \log(\cosh t + a \sinh t)$, строго растућа, следи да је за $|f^h(w)| < 1$ неједнакост (2.34) строжија од неједнакости у делу в) теореме 2.11.*

Наредна теорема може се сматрати последицом теореме 2.12.

Теорема 2.13. *Нека је $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ таква да је*

1° $|f(0)| = a$ *и*

2° $|f'(0)| = d$, *при чему је* $d \leqslant 1 - a^2$.

Тада, за свако $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big), \tag{2.41}$$

при чему је $c = \dfrac{d}{1-a^2}$.

Неједнакост (2.41) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ *постоји функција (која зависи од* z*)* $f_{[z]} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$*, таква да задовољава услове* 1° *и* 2° *и за коју важи* $f_{[z]}(z) = \varphi_a\big(|z| \cdot \varphi_c(|z|)\big)$.

Напомена 2.8. *Имајући у виду теорему 2.5 услов* $d \leqslant 1-a^2$ *у* 2° *јесте природан и неопходан.*

Напомена 2.9. *Приметимо да су неједнакост (2.9) у теореми 2.4 и неједнакост (2.5) у теореми 2.3 специјални случајеви неједнакости (2.41). Заиста, ако је* $a = 0$*, онда се неједнакост (2.41) своди на неједнакост (2.9), а ако је* $d = 1-a^2$*, онда се неједнакост (2.41) своди на неједнакост (2.5).*

Пре него што дамо доказ теореме 2.13, погодно је да формулишемо једну лему коју ћемо користити у доказу те теореме, али и приликом доказивања даљих резултата у глави 3.

Лема 2.4. *Нека је* $0 \leqslant c \leqslant 1$ *произвољно. Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$\begin{aligned} \log(\cosh d_{\mathbb{U}}(z,0) + c\sinh d_{\mathbb{U}}(z,0)) &= \log\left(\frac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2}\right) \\ &= d_{\mathbb{U}}(|z|\varphi_c(|z|),0). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Доказ. Како за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\cosh d_{\mathbb{U}}(z,0) = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \quad \text{и} \quad \sinh d_{\mathbb{U}}(z,0) = \frac{2|z|}{1-|z|^2},$$

следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи прва једнакост у (2.42). Како бисмо доказали и другу једнакост у (2.42), одредимо тачку $R(z) \in [0,1)$ такву да је

$$d_{\mathbb{U}}(R(z),0) = \log\left(\frac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2}\right). \tag{2.43}$$

Приметимо да је једнакост (2.43) еквивалентна са једнакошћу

$$\frac{1+R(z)}{1-R(z)} = \frac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2},$$

одакле добијамо $R(z) = |z|\dfrac{c+|z|}{1+c|z|} = |z|\varphi_c(|z|)$. □

Доказ теореме 2.13. Пре свега, приметимо да важи

$$|f^h(0)| = \frac{\rho_{\mathbb{U}}(f(0))}{\rho_{\mathbb{U}}(0)}|f'(0)| = \frac{d}{1-a^2} = c. \tag{2.44}$$

Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. На основу теореме 2.12 (узимајући $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{U}$), леме 2.4 и (2.44) добијамо

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{U}}(f(z), f(0)) &\leqslant \log(\cosh d_{\mathbb{U}}(z,0) + |f^h(0)| \sinh d_{\mathbb{U}}(z,0)) \\ &= \log\left(\frac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2}\right) \\ &= d_{\mathbb{U}}(|z|\varphi_c(|z|), 0). \end{aligned}$$

Отуда је

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \leqslant |z|\varphi_c(|z|). \tag{2.45}$$

С друге стране, на основу леме 2.1 важи

$$\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)||f(z)|} \leqslant \left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|. \tag{2.46}$$

Коначно, из (2.45) и (2.46) следи

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|\varphi_c(|z|)+|f(0)|}{1+|f(0)||z|\varphi_c(|z|)} = \varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big).$$

Докажимо сада да је неједнакост (2.41) оштра у наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, дефинишимо функцију $f_{[z]} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ на следећи начин:

$$f_{[z]}(\zeta) = \varphi_a\big(e^{-i\arg z}\zeta \cdot \varphi_c(e^{-i\arg z}\zeta)\big).$$

Непосредно се показује да $f_{[z]} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, као и да важи $f_{[z]}(0) = a$ и $|f'_{[z]}(0)| = d$. Такође, за функцију $f_{[z]}$ важи

$$f_{[z]}(z) = \varphi_a\big(e^{-i\arg z}z \cdot \varphi_c(e^{-i\arg z}z)\big) = \varphi_a\big(|z|\cdot\varphi_c(|z|)\big).$$

Ако је $z = 0$, онда тривијално следи да је неједнакост (2.41) оштра у наведеном смислу. □

2.8 Еуклидска својства хиперболичких дискова

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен и нека су $a \in \Omega$ и $r > 0$. Са $D_\Omega(a,r)$ (респективно, $\overline{D}_\Omega(a,r)$) обележавамо отворени хиперболички диск у Ω чији је хиперболички центар a и хиперболички полупречник r (респективно, затворени хиперболички диск у Ω чији је хиперболички центар a и хиперболички полупречник r). Дакле,

$$D_\Omega(a,r) = \{z \in \Omega : d_\Omega(z,a) < r\} \quad \text{и} \quad \overline{D}_\Omega(a,r) = \{z \in \Omega : d_\Omega(z,a) \leqslant r\}.$$

Нека је $r \in [0,1)$. Са $\lambda_{\mathbb{U}}(r)$ обележавамо хиперболичко растојање тачака 0 и r у јединичном диску $\mathbb{U}$. Дакле, важи

$$\lambda_{\mathbb{U}}(r) = d_{\mathbb{U}}(0,r) = \log\frac{1+r}{1-r} = 2\,\mathrm{artanh}\, r.$$

Важи следећа лема, коју ћемо често користити.

Лема 2.5. *Нека је* $r \in (0,1)$. *Тада је* $D_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) = U_r$ *и* $\overline{D}_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) = \overline{U}_r$.

Доказ. Доказ следи из дефиниција наведених појмова. Заиста,

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) &= \{z \in \mathbb{U} : d_{\mathbb{U}}(0,z) < \lambda_{\mathbb{U}}(r)\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{U} : \log \frac{1+|z|}{1-|z|} < \log \frac{1+r}{1-r}\right\} \\ &= \{z \in \mathbb{U} : |z| < r\} = U_r. \end{aligned}$$

Аналогно можемо показати и другу једнакост. □

Наредна пропозиција даје довољан услов да хиперболички диск буде еуклидски конвексан скуп (видети и [9, Теорема 7.11])

Пропозиција 2.9. *Нека је* Ω *еуклидски конвексан хиперболички домен,* $a \in \Omega$ *и* $r > 0$. *Тада је* $D_\Omega(a,r)$ *еуклидски конвексан скуп.*

Доказ. Нека су $z_1, z_2 \in D_\Omega(a,r)$ произвољне и $t \in [0,1]$. Потребно је доказати да је $tz_1 + (1-t)z_2 \in D_\Omega(a,r)$. У том циљу, нека је $f \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ такво да је $f(a) = 0$. Тада је

$$f(D_\Omega(a,r)) = D_{\mathbb{U}}(0,r) = U_R,$$

при чему је $R = \tanh \dfrac{r}{2}$. Изаберимо реалан број S такав да је

$$\max\{|f(z_1)|, |f(z_2)|\} < S < R$$

и дефинишимо функцију g на следећи начин

$$g(w) = tf^{-1}\left(\frac{f(z_1)w}{S}\right) + (1-t)f^{-1}\left(\frac{f(z_2)w}{S}\right).$$

Функција g је холоморфна на $\mathbb{U}$ и важи $g(0) = a$, као и $g(S) = tz_1 + (1-t)z_2$. Такође, како је Ω еуклидски конвексан скуп, следи да g пресликава $\mathbb{U}$ у Ω.

Даље, нека је $h = f \circ g$. Тада је $h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $h(0) = 0$, па на основу Шварцове леме важи $h(U_R) \subset U_R$. Отуда је $(f^{-1} \circ h)(U_R) \subset f^{-1}(U_R)$, а како је $g(S) = (f^{-1} \circ h)(S)$ и $S \in U_R$, следи да је $g(S) \in f^{-1}(U_R)$. Дакле, важи $tz_1 + (1-t)z_2 \in D_\Omega(a,r)$, јер је $g(S) = tz_1 + (1-t)z_2$ и $f^{-1}(U_R) = D_\Omega(a,r)$. □

Наредне три пропозиције односе се на еуклидска својства хиперболичких дискова. Та својства користићемо приликом доказивања главних резултата у глави 3.

Пропозиција 2.10. *Нека су* $r \in (0,1)$ *и* $b \in (0, +\infty)$. *Тада важи*

$$R_e(\overline{D}_{\mathbb{K}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)) = \left[\frac{1-r}{1+r}b, \frac{1+r}{1-r}b\right]$$

и

$$I_m(\overline{D}_{\mathbb{K}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)) = \left[-\frac{2r}{1-r^2}b, \frac{2r}{1-r^2}b\right].$$

Специјално,

$$\overline{D}_{\mathbb{K}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) \subset \left[\frac{1-r}{1+r}b, \frac{1+r}{1-r}b\right] \times \left[-\frac{2r}{1-r^2}b, \frac{2r}{1-r^2}b\right].$$

Доказ. Нека је $\kappa_b \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$ пресликавање дефинисано у примеру 2.2б. На основу теореме 2.11 и леме 2.5 важи $\overline{D}_{\mathbb{K}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) = \kappa_b(\overline{D}_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)) = \kappa_b(\overline{U}_r)$. Непосредно се проверава да је $\kappa_b(\overline{U}_r)$ затворени еуклидски диск чији је центар $c = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}b$, а полупречник $R = \dfrac{2r}{1-r^2}b$. Отуда добијамо тврђење. □

Пропозиција 2.11. *Нека је $r \in (0,1)$. Тада важи*

$$R_e(\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)) = \left[-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} r, \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} r\right]$$

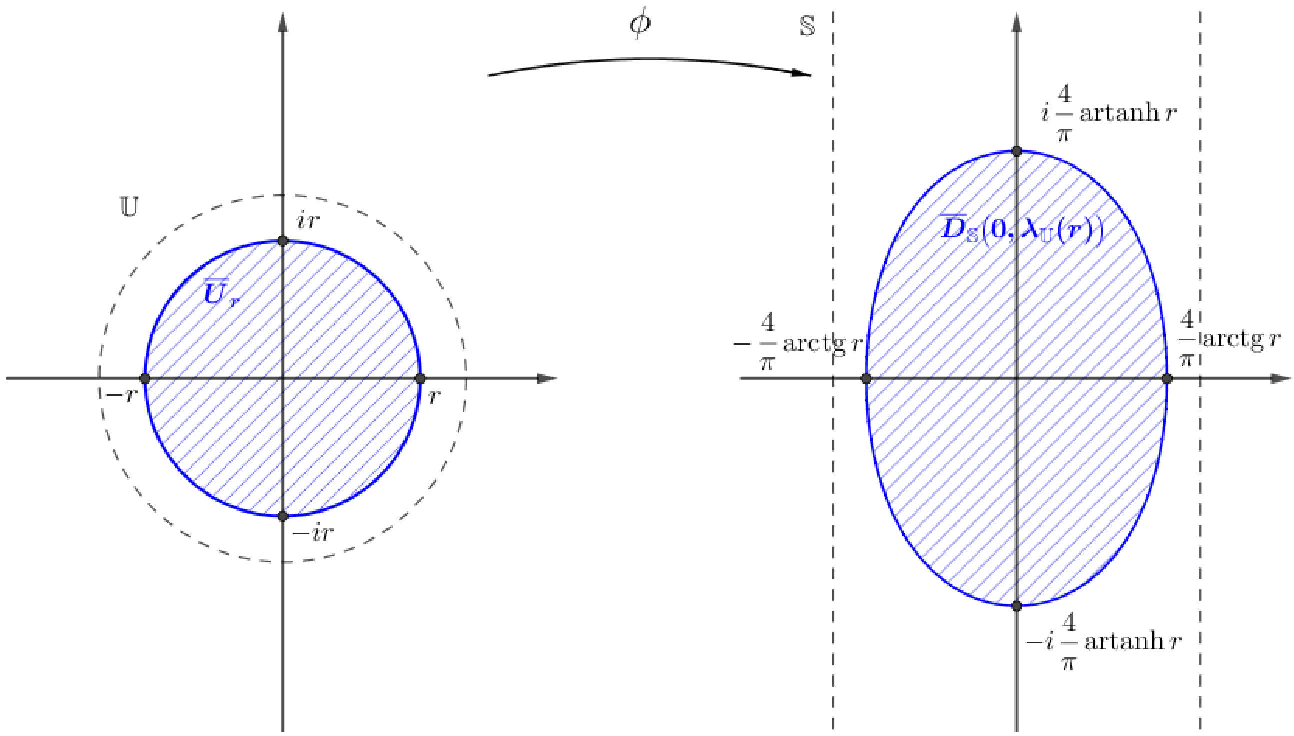
и

$$I_m(\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)) = \left[-\frac{4}{\pi}\operatorname{artanh} r, \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh} r\right].$$

Специјално,

$$\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) \subseteq \left[-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} r, \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} r\right] \times \left[-\frac{4}{\pi}\operatorname{artanh} r, \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh} r\right].$$

Доказ. Нека је $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ пресликавање дефинисано у примеру 2.4. На основу теореме 2.11 и леме 2.5 важи $\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) = \phi(\overline{D}_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)) = \phi(\overline{U}_r)$ (видети слику 2.1). Отуда, узимајући у обзир принцип максимума модула за хармонијске функције, довољно



Слика 2.1: Дискови $\overline{U}_r$ и $\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)$

је показати да важи

$$\max\{|\operatorname{Re}\phi(z)| : z \in T_r\} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} r \tag{2.47}$$

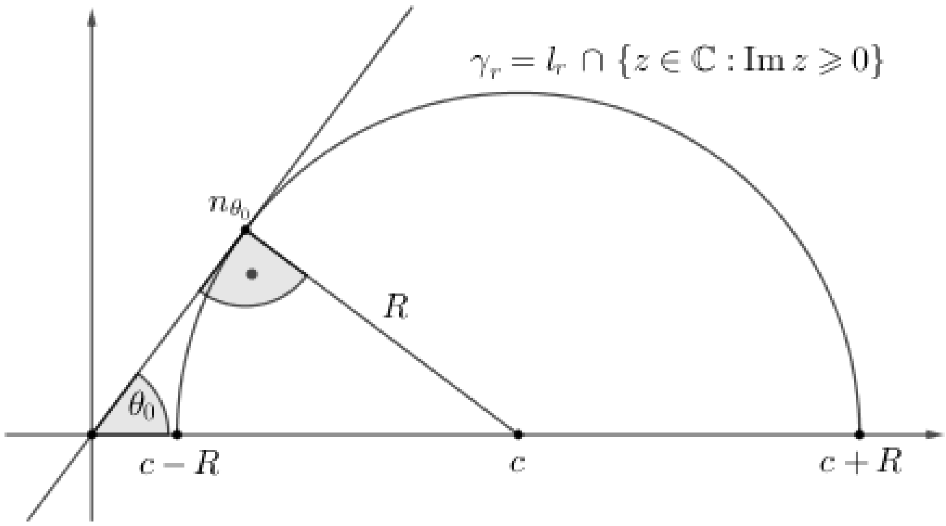
и

$$\max\{|\operatorname{Im}\phi(z)| : z \in T_r\} = \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh} r. \tag{2.48}$$

Нека су ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и ϕ_4 пресликавања дефинисана у примеру 2.4. Једноставно се може показати да $\phi_2 \circ \phi_1$ пресликава T_r на l_r, где је l_r круг чији је центар тачка $c = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$ и полупречник $R = \dfrac{2r}{1-r^2}$. С друге стране, за свако $z \in l_r$ важи $\operatorname{Re}(\phi_4(\phi_3(z))) = \dfrac{2}{\pi}\arg z$[§] и $\operatorname{Im}(\phi_4(\phi_3(z))) = -\dfrac{2}{\pi}\log|z|$.

Нека је $\theta_0 = \max\{|\arg z| : z \in l_r\}$ и $L_0 = \max\{|\log|z|| : z \in l_r\}$.

Посматрајмо слику 2.2. Права $y = (\operatorname{tg}\theta_0)x$ јесте тангента из тачке 0 на круг l_r,



Слика 2.2: Угао θ_0

а n_{θ_0} јесте одговарајућа тачка додира. Приметимо да круг l_r сече $x-$осу у тачкама $c - R = \dfrac{1-r}{1+r}$ и $c + R = \dfrac{1+r}{1-r}$ које су реципрочни бројеви. Отуда, потенција тачке 0 у односу на круг l_r једнака је 1, па је и $|n_{\theta_0}| = 1$. На основу претходног важи $\operatorname{tg}\theta_0 = R$, па је

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} R = \operatorname{arctg}\frac{2r}{1-r^2} = 2\operatorname{arctg} r. \tag{2.49}$$

Даље, како је $\log|n_{\theta_0}| = 0$, непосредно се показује да важи

$$L_0 = \max\{-\log(c-R), \log(c+R)\}.$$

С друге стране, како је $(c-R)(c+R) = 1$, следи да је $\log(c+R) = -\log(c-R)$, односно

$$L_0 = \log(c+R) = -\log(c-R) = \log\frac{1+r}{1-r}. \tag{2.50}$$

Из (2.49) и (2.50) следе једнакости (2.47) и (2.48). □

[§]Овде је са arg обележен имагинарни део функције log, где је log регуларна грана логаритма дефинисана на $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ и одређена условом $\log 1 = 0$. Очигледно, вредности функције arg припадају интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пропозиција 2.12. *Нека је* $r \in (0,1)$, $b \in (-1,1)$ *и* $a = \operatorname{tg} \dfrac{b\pi}{4}$. *Тада важи*

$$R_e\big(\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)\big) = \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(-r), \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(r)\right].$$

Доказ. Нека је ϕ_b пресликавање дефинисано у примеру 2.4б. Како је

$$\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) = \phi_b\big(\overline{D}_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)\big) = \phi_b(\overline{U}_r) = \phi(\varphi_a(\overline{U}_r)),$$

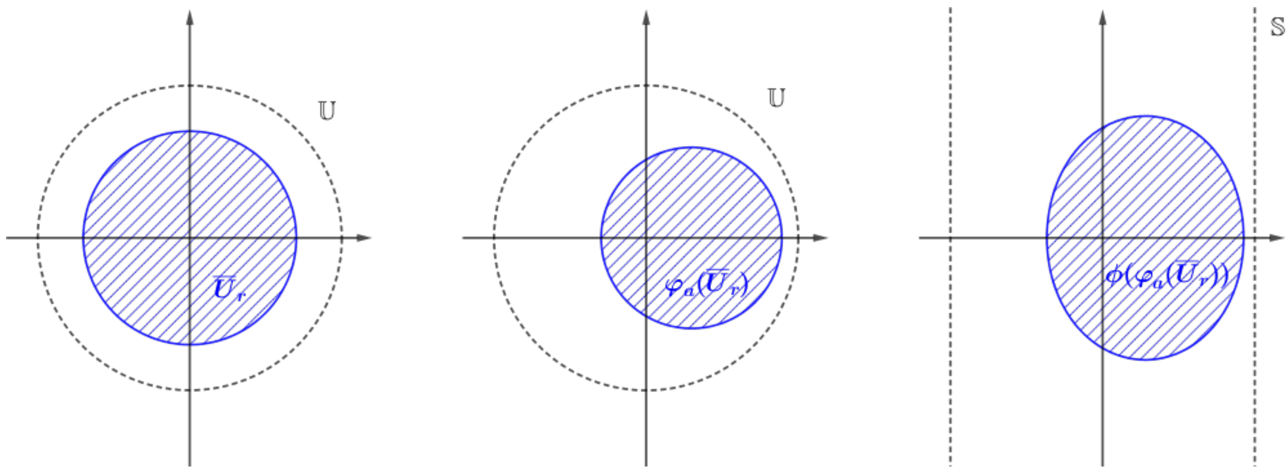
те како за свако $z \in \overline{U}_r$ важи $\phi_b(\overline{z}) = \overline{\phi_b(z)}$, следи да је

1° $\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)$ симетричан у односу на реалну осу.

С друге стране, на основу пропозиције 2.9, важи да је

2° $\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)$ еуклидски конвексан скуп.

На основу 1° и 2° и пропозиције 2.7 следи тврђење (видети слику 2.3).



Слика 2.3: Дискови $\overline{U}_r$, $\varphi_a(\overline{U}_r)$ и $\phi(\varphi_a(\overline{U}_r))$

□

2.9 Даље последице Шварцове и Шварц-Пикове леме

Циљ ове секције јесте да, имајући у виду до сада приказану теорију, систематски прикажемо још неке последице Шварцове леме и Шварц-Пикове леме.

За почетак дајемо једну пропозицију која се односи на холоморфна пресликавања чији је домен просто повезана област $\Omega \subset \mathbb{C}$ таква да је $\Omega \neq \mathbb{C}$, тј. хиперболички домен, а кодомен $\mathbb{U}$.

Пропозиција 2.13. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *хиперболички домен,* $w_0 \in \Omega$ *фиксирано и пресликавање* $f \in \operatorname{Hol}(\Omega, \mathbb{U})$, *такво да је* $f(w_0) = 0$. *Тада за свако* $w \in \Omega$ *важи*

$$|f(w)| \leqslant |\chi(w)|, \tag{2.51}$$

при чему је $\chi \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$, *такво да је* $\chi(w_0) = 0$. *При томе, ако постоји* $\theta \in \mathbb{R}$ *такво да за свако* $w \in \Omega$ *важи* $f(w) = e^{i\theta}\chi(w)$, *онда у (2.51) важи једнакост, за свако* $w \in \Omega$. *Обратно, ако у (2.51) за неко* $w \in \Omega\backslash\{w_0\}$ *важи једнакост, онда постоји* $\theta \in \mathbb{R}$ *такво да за свако* $w \in \Omega$ *важи* $f(w) = e^{i\theta}\chi(w)$.

Доказ. Нека је $g = f \circ \chi^{-1}$. Тада $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $g(0) = 0$. Отуда, на основу Шварцове леме за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|g(z)| = |(f \circ \chi^{-1})(z)| \leqslant |z|$, односно за свако $w \in \Omega$ важи $|f(w)| \leqslant |\chi(w)|$.

Нека је $w_1 \in \Omega\backslash\{w_0\}$ такво да је $|f(w_1)| = |\chi(w_1)|$ и нека је $z_1 = \chi(w_1)$. Тада је $w_1 = \chi^{-1}(z_1)$ и важи $|g(z_1)| = |z_1|$. Отуда на основу Шварцове леме добијамо да постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $g(z) = e^{i\theta}z$. Самим тим, за свако $w \in \Omega$ важи $|f(w)| = |\chi(w)|$. □

Наведимо сада две директне последице пропозиције 2.13.

Последица 2.4. *Нека је* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{S}, \mathbb{U})$ *и* $f(0) = 0$. *Тада, за свако* $w \in \mathbb{S}$ *важи*

$$|f(w)| \leqslant |\varphi(w)|, \tag{2.52}$$

при чему је φ *пресликавање дефинисано у примеру 2.3. Ако постоји* $\theta \in \mathbb{R}$ *такво да за свако* $w \in \Omega$ *важи* $f(w) = e^{i\theta}\varphi(w)$, *онда у (2.52) важи једнакост за свако* $w \in \Omega$. *Обратно, ако у (2.52) за неко* $w \in \mathbb{S}\backslash\{0\}$ *важи једнакост, онда постоји* $\theta \in \mathbb{R}$ *такво да за свако* $w \in \Omega$ *важи* $f(w) = e^{i\theta}\varphi(w)$.

Последица 2.5. *Нека је* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{K}, \mathbb{U})$ *и* $f(1) = 0$. *Тада, за свако* $w \in \mathbb{K}$ *важи*

$$|f(w)| \leqslant |\psi(w)|, \tag{2.53}$$

при чему је ψ *пресликавање дефинисано у примеру 2.1. Ако постоји* $\theta \in \mathbb{R}$ *такво да за свако* $w \in \Omega$ *важи* $f(w) = e^{i\theta}\psi(w)$, *онда у (2.53) важи једнакост за свако* $w \in \Omega$. *Обратно, ако у (2.53) за неко* $w \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$ *важи једнакост, онда постоји* $\theta \in \mathbb{R}$ *такво да за свако* $w \in \Omega$ *важи* $f(w) = e^{i\theta}\psi(w)$.

Имајући у виду да је у пропозицији 2.13 услов да је $f(w_0) = 0$, за неко $w_0 \in \Omega$, есенцијалан, размотрићемо варијанту Шварцове леме за холоморфна пресликавања чији је кодомен појас $\mathbb{S}$, који такође садржи тачку 0. Напоменимо да је пропозиција 2.8 кључна за доказивање одговарајућих резултата.

Теорема 2.14. *Нека је* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ *и* $f(0) = 0$. *Тада, за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{artanh} |z|. \tag{2.54}$$

Неједнакост (2.54) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ *постоји функција (која зависи од* z*)* $f_{[z]} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ *таква да важи* $f_{[z]}(0) = 0$ *и* $f_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi} \operatorname{artanh} |z|$.

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. На основу дела в) теореме 2.11 важи

$$d_{\mathbb{S}}(f(z), f(0)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z, 0), \tag{2.55}$$

док на основу пропозиције 2.8 важи

$$\frac{\pi}{2}|f(z) - f(0)| \leqslant d_{\mathbb{S}}(f(z), f(0)). \tag{2.56}$$

Како је $d_{\mathbb{U}}(z,0) = 2\operatorname{artanh}|z|$, из (2.55) и (2.56) добијамо

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh}|z|,$$

одакле, узимајући у обзир да је $f(0) = 0$, следи неједнакост (2.54).

Докажимо сада да је неједнакост (2.54) оштра у претходно наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, дефинишимо функцију $f_{[z]} : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ на следећи начин:

$$f_{[z]}(\zeta) = \phi(ie^{-i\arg z}\zeta),$$

при чему је ϕ пресликавање дефинисано у примеру 2.4. Функција $f_{[z]}$ припада $\operatorname{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{S})$ и важи $f_{[z]}(0) = 0$. Такође, за функцију $f_{[z]}$ важи

$$|f_{[z]}(z)| = |\phi(ie^{-i\arg z}z)| = |\phi(i|z|)| = \left|-i\frac{2}{\pi}\log\frac{1-|z|}{1+|z|}\right| = \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh}|z|.$$

Ако је $z = 0$, онда тривијално следи да је неједнакост (2.54) оштра у наведеном смислу. $\square$

Пропозиција 2.14. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен, $w_0 \in \Omega$ фиксирано и пресликавање $f \in \operatorname{Hol}(\Omega,\mathbb{S})$, такво да је $f(w_0) = 0$. Тада, за свако $w \in \Omega$ важи*

$$|f(w)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh}|\chi(w)|, \tag{2.57}$$

при чему је $\chi \in \operatorname{Isom}(\Omega,\mathbb{U})$, такво да је $\chi(w_0) = 0$.

Неједнакост (2.57) јесте оштра у следећем смислу: За свако $w \in \Omega$ постоји функција (која зависи од w) $f_{[w]} \in \operatorname{Hol}(\Omega,\mathbb{S})$ таква да је $f_{[w]}(w_0) = 0$ и $f_{[w]}(w) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{artanh}|\chi(w)|$.

Доказ. Тврђење се доказује аналогно као пропозиција 2.13, с тим што се уместо Шварцове леме примењује теорема 2.14. $\square$

На крају, размотримо последицу Шварцове леме, која се односи на холоморфна пресликавања чији је домен $\mathbb{U}$, а кодомен $\mathbb{K}$.

Теорема 2.15. *Нека је $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{K})$ такво да је $f(0)$ реалан број. Тада, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\cdot f(0) \leqslant \operatorname{Re} f(z) \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}\cdot f(0) \tag{2.58}$$

и

$$-\frac{2|z|}{1-|z|^2}\cdot f(0) \leqslant \operatorname{Im} f(z) \leqslant \frac{2|z|}{1-|z|^2}\cdot f(0). \tag{2.59}$$

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. На основу дела в) теореме 2.11 важи

$$d_{\mathbb{K}}(f(z), f(0)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z,0),$$

односно

$$f(z) \in \overline{D}_{\mathbb{K}}\big(f(0), \lambda_{\mathbb{U}}(|z|)\big).$$

Отуда, на основу пропозиције 2.10, добијамо (2.58) и (2.59). $\square$

2.10 Гаусова кривина и Алфорсова лема

У овој секцији разматрамо појам Гаусове кривине конформне семиметрике дефинисане на области у $\mathbb{C}$, а специјално и појам Гаусове кривине хиперболичке метрике дефинисане на хиперболичком домену у $\mathbb{C}$. Овај појам омогућава нам да формулишемо и докажемо Алфорсову лему (теорема 2.16, ниже). Као литература приликом писања ове секције коришћене су књиге [3], [41] и [59], као и рад [9]. Напоменимо још да појмови уведени у овој секцији, као и приказана тврђења, имају есенцијални значај за резултате које наводимо у глави 4 ове дисертације.

Дефиниција 2.5. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ непрекидна функција. Конформна семиметрика на Ω јесте $\rho(z)|dz|$, при чему је $z \in \Omega$. Специјално, ако је $\rho^{-1}(\{0\}) = \varnothing$, онда се конформна семиметрика $\rho(z)|dz|$ назива конформна метрика.*

Приметимо да ако је $\rho(z)|dz|$ конформна семиметрика на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, онда је ρ непрекидна функција која пресликава област Ω у интервал $[0, +\infty)$.

Пример 2.10 (Конформна метрика)**.** *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен. Тада је $\rho_\Omega(z)|dz|$ конформна метрика.*

Примери конформних семиметрика и конформних метрика, које нису хиперболичке метрике на одговарајућим доменима, биће приказани у глави 4 ове дисертације на местима где се природно појавила потреба за њиховим коришћењем.

Дефиниција 2.6. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $\rho(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω, таква да је функција ρ класе C^2 на $\rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$. Гаусова кривина конформне семиметрике $\rho(z)|dz|$ у тачки $z \in \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ јесте*

$$K_\rho(z) = -\frac{\Delta[\log \circ \rho](z)}{\rho^2(z)}.$$

Наредне две леме биће од користи приликом доказивања главних резултата који се односе на Гаусову кривину.

Лема 2.6. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $\rho(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω, таква да је функција ρ класе C^2 на $\rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ и $a > 0$. Ако је $\sigma : \Omega \to [0, +\infty)$ дефинисана са $\sigma(z) = a \cdot \rho(z)$, онда је $\sigma(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω ,таква да је функција σ класе C^2 на $\sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big)$, $\sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big) = \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ и за свако $z \in \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ важи $K_\sigma(z) = \dfrac{1}{a^2} K_\rho(z)$.*

Доказ. Очигледно је да је $\sigma(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω, таква да је функција σ класе C^2 на $\sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big)$, као и да је $\sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big) = \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$.

Даље, нека је $z \in \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ произвољно. На основу дефиниције Гаусове кривине конформне семиметрике важи

$$\begin{aligned} K_\sigma(z) &= -\frac{\Delta[\log \circ (a\rho)](z)}{a^2\rho^2(z)} = -\frac{\Delta[\log a + \log \circ \rho](z)}{a^2\rho^2(z)} \\ &= -\frac{\Delta[\log \circ \rho](z)}{a^2\rho^2(z)} = \frac{1}{a^2} K_\rho(z). \end{aligned}$$

□

Лема 2.7. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ неконстантна холоморфна функција и $\Phi : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ функција класе C^2 на $f(\Omega)$. Тада, за свако $z \in \Omega$ важи*

$$\Delta[\Phi \circ f](z) = \big(\Delta[\Phi] \circ f\big)(z) \cdot |f'(z)|^2.$$

Доказ. Непосредним рачунањем добија се да важи наведена једнакост. □

Наредна пропозиција односи се на инваријантност Гаусове кривине у односу на холоморфна пресликавања.

Пропозиција 2.15. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области, $\rho(w)|dw|$ конформна семиметрика на Ω_2, таква да је функција ρ класе C^2 на $\rho^{-1}\big((0,+\infty)\big)$ и $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$. Ако је функција $\sigma : \Omega_1 \to [0,+\infty)$ дефинисана са $\sigma(z) = \rho(f(z))|f'(z)|$, онда је $\sigma(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω_1, таква да је σ класе C^2 на $\sigma^{-1}\big((0,+\infty)\big)$ и за свако $z \in \sigma^{-1}\big((0,+\infty)\big)$ важи $K_\sigma(z) = K_\rho(f(z))$.*

Приметимо да је $\sigma(z) > 0$ ако и само ако је $\rho(f(z)) > 0$ и $f'(z) \neq 0$.

Доказ. Очигледно да је $\sigma(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω, таква да је функција σ класе C^2 на $\sigma^{-1}\big((0,+\infty)\big)$. Даље, нека је $z \in \sigma^{-1}\big((0,+\infty)\big)$ произвољно. На основу дефиниције Гаусове кривине конформне семиметрике $\sigma(z)|dz|$ важи

$$K_\sigma(z) = -\frac{\Delta[\log \circ \sigma](z)}{\sigma^2(z)}. \tag{2.60}$$

Како на основу дефиниције функције σ и својстава логаритамске функције важи

$$\log(\sigma(z)) = \log(\rho(f(z))|f'(z)|) = \log(\rho(f(z))) + \log|f'(z)|$$

и како су f и f' холоморфне функције, добијамо

$$\Delta[\log \circ \sigma](z) = \Delta[(\log \circ \rho) \circ f](z) + \Delta[\log \circ |f'|](z) = \Delta[(\log \circ \rho) \circ f](z). \tag{2.61}$$

Даље, на основу леме 2.7 следи

$$\Delta[(\log \circ \rho) \circ f](z) = \big(\Delta[\log \circ \rho] \circ f\big)(z) \cdot |f'(z)|^2. \tag{2.62}$$

Коначно, на основу (2.60), (2.61) и (2.62) следи

$$K_\sigma(z) = -\frac{\Delta[\log \circ \rho](f(z)) \cdot |f'(z)|^2}{\rho^2(f(z)) \cdot |f'(z)|^2} = -\frac{\Delta[\log \circ \rho](f(z))}{\rho^2(f(z))} = K_\rho(f(z)).$$

□

Наредна последица јесте специјалан случај пропозиције 2.15.

Последица 2.6. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен и $f \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$. Тада, за свако $z \in \Omega$ важи*

$$K_{\rho_\Omega}(z) = K_{\rho_\mathbb{U}}(f(z)).$$

Пропозиција 2.16. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен. Тада, за свако $z \in \Omega$ важи*

$$K_{\rho_\Omega}(z) = -1.$$

Доказ. На основу последице 2.6, довољно је доказати тврђење у случају $\Omega = \mathbb{U}$. Нека је $g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$g(z) = \big(\log \circ \rho_{\mathbb{U}}\big)(z) = \log \frac{2}{1 - z\overline{z}}.$$

Како је

$$\Delta[\log \circ \rho_{\mathbb{U}}] = \Delta g = 4g_{z\overline{z}}$$

и како за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$g_{z\overline{z}}(z) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2},$$

следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$K_{\rho_{\mathbb{U}}}(z) = -\frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \cdot 4g_{z\overline{z}}(z) = -1.$$

□

Према [66], међу многим генерализацијама Шварц-Пикове леме вероватно најутицајнија јесте теорема коју је Л. В. Алфорс формулисао и доказао у свом раду [1] из 1938. године. Данас је ово тврђење познато као Шварц-Пик-Алфорсова лема или другачије Алфорсова верзија Шварцове леме. Наредна теорема, чију формулацију можемо наћи у [3], [41] и [9], јесте специјалан случај тог тврђења. Напоменимо још и да ова теорема има пресудан значај у доказима неких тврђења приказаних у глави 4 ове дисертације (видети теореме 4.2 и 4.3).

Теорема 2.16 (Шварц-Пик-Алфорсова лема). *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен и нека је $\rho(z)|dz|$ конформна семиметрика на Ω, таква да је функција ρ класе C^2 на $\rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ и $K_\rho(z) \leqslant -1$ за свако $z \in \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$. Тада, за свако $z \in \Omega$ важи $\rho(z) \leqslant \rho_\Omega(z)$.*

Пре него што дамо доказ теореме формулисаћемо и доказаћемо једну лему.

Лема 2.8. *Нека је $v : U_r \to [0, +\infty)$ непрекидна функција таква да је*

$$\lim_{|z| \to r} v(z) = 0. \tag{2.63}$$

Тада, функција v достиже максимум на U_r.

Доказ. Ако за свако $z \in U_r$ важи $v(z) = 0$, онда је очигледно да функција v достиже максимум на U_r.

Претпоставимо сада да постоји $z_0 \in U_r$ такво да важи $v(z_0) > 0$. Како је $\lim\limits_{|z| \to r} v(z) = 0$, следи да постоји r_0 такво да је $0 < r_0 < r$ и да за свако $z \in U_r \backslash \overline{U}_{r_0}$ важи $v(z) < v(z_0)$. С друге стране, како је $\overline{U}_{r_0}$ компактан скуп и како је функција v непрекидна, следи да постоји $a \in \overline{U}_{r_0}$ такво да за свако $z \in \overline{U}_{r_0}$ важи $v(a) \geqslant v(z)$. Дакле, тачка a јесте тачка у којој функција v достиже максимум. □

Доказ теореме 2.16. Најпре ћемо доказати тврђење у случају да је $\Omega = \mathbb{U}$. Нека је $z_0 \in \mathbb{U}$ фиксирано и нека је $r \in (0, 1)$ такво да $z_0 \in U_r$. Дефинишимо функцију $v : U_r \to [0, +\infty)$ на следећи начин:

$$v(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{U_r}(z)}.$$

Како је $\rho_{U_r}(z) = \dfrac{2r}{r^2 - |z|^2}$, следи да је $\lim\limits_{|z|\to r} v(z) = 0$. Отуда, на основу леме 2.8, следи да функција v достиже максимум у некој тачки $a \in U_r$.

Доказаћемо да је $v(a) \leqslant 1$. Заиста, ако је $\rho(a) = 0$, онда је $v(a) = 0 < 1$. С друге стране, ако је $\rho(a) > 0$, онда је $v(a) > 0$ и тачка a јесте тачка локалног максимума функције $\log \circ v$, која је дефинисана на $U_r \cap \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$. Отуда је

$$(\log \circ v)_{xx}(a) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad (\log \circ v)_{yy}(a) \leqslant 0,$$

па важи

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \Delta[\log \circ v](a) \\ &= \Delta[\log \circ \rho](a) - \Delta[\log \circ \rho_{U_r}](a) \\ &= -K_\rho(a) \cdot \rho^2(a) + K_{\rho_{U_r}}(a) \cdot \rho^2_{U_r}(a). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Из $K_\rho(a) \leqslant -1$, следи да је $-K_\rho(a) \geqslant 1$, па како је $K_{\rho_{U_r}}(a) = -1$, на основу (2.64), следи

$$0 \geqslant \rho^2(a) - \rho^2_{U_r}(a),$$

тј. $v(a) \leqslant 1$.

Како је $v(a) \leqslant 1$ и како функција v достиже максимум у тачки a, следи да за свако $z \in U_r$ важи $v(z) \leqslant 1$. Отуда, за $z = z_0$ добијамо

$$\rho(z_0) \leqslant \frac{2r}{r^2 - |z_0|^2},$$

па је

$$\lim_{r\to 1} \rho(z_0) \leqslant \lim_{r \to 1} \frac{2r}{r^2 - |z_0|^2},$$

односно $\rho(z_0) \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(z_0)$. Како је z_0 произвољно, следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\rho(z) \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(z)$.

Докажимо сада тврђење и у случају $\Omega \neq \mathbb{U}$.

Нека је $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \Omega)$ и $\sigma : \mathbb{U} \to [0, +\infty)$ дефинисана са $\sigma(w) = \rho(f(w))|f'(w)|$. Тада је функција σ класе C^2 на $\sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big)$, $\sigma(w)|dw|$ конформна семиметрика на $\mathbb{U}$ и $w \in \sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ ако и само ако $f(w) \in \rho^{-1}\big((0, +\infty)\big)$. На основу пропозиције 2.15 и претпоставке теореме, за свако $w \in \sigma^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ важи

$$K_\sigma(w) = K_\rho(f(w)) \leqslant -1.$$

Отуда, како смо доказали да тврђење важи у случају $\Omega = \mathbb{U}$, добијамо да за свако $w \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho(f(w))|f'(w)| = \sigma(w) \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(w) = \rho_\Omega(f(w))|f'(w)|. \tag{2.65}$$

Коначно, из (2.65) непосредно следи да за свако $z \in \Omega$ важи $\rho(z) \leqslant \rho_\Omega(z)$. □

У раду [54] (видети и [49]) М. Матељевић доказао је наредну теорему (супротну верзију Шварц-Пик-Алфорсове леме) у чијој се формулацији појављују супротне неједнакости од оних које се појављују у Шварц-Пик-Алфорсовој леми. Напоменимо да и ова теорема има пресудан значај у доказима неких тврђења приказаних у глави 4 ове дисертације (видети теореме 4.8 и 4.11).

Теорема 2.17. *Нека је $\rho(z)|dz|$ конформна метрика на $\mathbb{U}$ таква да је $\rho : \mathbb{U} \to (0, +\infty)$ функција класе C^2, $\lim\limits_{|z|\to 1} \rho(z) = +\infty$ и $K_\rho(z) \geqslant -1$ за свако $z \in \mathbb{U}$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\rho(z) \geqslant \rho_{\mathbb{U}}(z)$.*

Пре него што дамо доказ теореме формулисаћемо и доказаћемо једну лему.

Лема 2.9. *Нека је $v : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је*

$$\lim_{|z|\to 1-} v(z) = +\infty. \tag{2.66}$$

Тада функција v достиже минимум на $\mathbb{U}$.

Доказ. Како је $\lim\limits_{|z|\to 1-} v(z) = +\infty$, следи да постоји $r > 0$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}\backslash\overline{U}_r$ важи $v(z) > v(0)$. Како је $\overline{U}_r$ компактан скуп и како је функција v непрекидна, следи да постоји $a \in \overline{U}_r$ такво да за свако $z \in \overline{U}_r$ важи $v(a) \leqslant v(z)$. С друге стране, за свако $z \in \mathbb{U}\backslash\overline{U}_r$ важи $v(a) \leqslant v(0) \leqslant v(z)$. Дакле, тачка a јесте тачка у којој функција v достиже минимум. □

Доказ теореме 2.17. Нека је $r \in (0, 1)$ произвољно и нека је $v : \mathbb{U} \to (0, +\infty)$ дефинисана са

$$v(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{U_{\frac{1}{r}}}(z)},$$

при чему је $\rho_{U_{\frac{1}{r}}}$ хиперболичка густина на диску $U_{\frac{1}{r}}$, тј. $\rho_{U_{\frac{1}{r}}}(z) = \dfrac{2r}{1 - r^2|z|^2}$. Како је $\lim\limits_{|z|\to 1} \rho(z) = +\infty$, следи да је $\lim\limits_{|z|\to 1} v(z) = +\infty$ и на основу леме 2.9, функција v достиже минимум у некој тачки $a \in \mathbb{U}$. Тачка a јесте тачка локалног минимума и за функцију $\log \circ v$. Отуда је

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \Delta[\log \circ v](a) \\
&= \Delta[\log \circ \rho](a) - \Delta[\log \circ \rho_{U_{\frac{1}{r}}}](a) \\
&= -K_\rho(a) \cdot \rho^2(a) + K_{\rho_{U_{\frac{1}{r}}}}(a) \cdot \rho^2_{U_{\frac{1}{r}}}(a) \\
&\leqslant \rho^2(a) - \rho^2_{U_{\frac{1}{r}}}(a),
\end{aligned}$$

односно $v(a) \geqslant 1$. Како је тачка a тачка минимума за функцију v, следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $v(z) \geqslant 1$, тј. $\rho(z) \geqslant \rho_{U_{\frac{1}{r}}}(z)$. Коначно, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho(z) \geqslant \lim_{r\to 1-} \rho_{U_{\frac{1}{r}}}(z) = \rho_{\mathbb{U}}(z).$$

□

Глава 3

Шварцова лема и оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска пресликавања

3.1 Шварцова лема за хармонијска пресликавања

Како се хармонијска пресликавања могу сматрати уопштењем холоморфних пресликавања, природно је испитивати која од тврђења која се односе на холоморфна пресликавања, уз евентуалне модификације, важе и за хармонијска пресликавања. У складу са тим, најпре ћемо размотрити тврђење које се обично назива Шварцова лема за реалновредносне хармонијске функције.

Теорема 3.1. *Нека је* $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ *и* $u(0) = 0$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|u(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|. \tag{3.1}$$

Неједнакост (3.1) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ *постоји функција (која зависи од* z*)* $u_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ *таква да је* $u_{[z]}(0) = 0$ *и* $u_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|$.

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно и $r = |z|$. Како је $\mathbb{U}$ просто повезана област, следи да постоји $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ такво да важи $u = \operatorname{Re} f$ и $f(0) = 0$. На основу принципа субординације (видети пропозицију 2.1) важи

$$f(\overline{U}_r) \subset \phi(\overline{U}_r), \tag{3.2}$$

при чему је ϕ пресликавање дефинисано у примеру 2.4. На основу леме 2.5 важи

$$\overline{U}_r = \overline{D}_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big), \tag{3.3}$$

а како је $\phi \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$, на основу теореме 2.11 следи

$$\overline{D}_{\mathbb{S}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big) = \phi\big(\overline{D}_{\mathbb{U}}\big(0, \lambda_{\mathbb{U}}(r)\big)\big). \tag{3.4}$$

Коначно, на основу (3.2), (3.3), (3.4) и пропозиције 2.11 добијамо

$$u(\overline{U}_r) \subset \left[-\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} r, \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} r\right],$$

одакле следи неједнакост (3.1).

Докажимо сада да је неједнакост (3.1) оштра у наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, дефинишимо функцију $u_{[z]} : \mathbb{U} \to (-1,1)$ на следећи начин:

$$u_{[z]}(\zeta) = \operatorname{Re}\phi(e^{-i\arg z}\zeta).$$

Непосредно се показује да $u_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U},(-1,1))$, као и да важи $u_{[z]}(0) = 0$. Такође, за функцију $u_{[z]}$ важи

$$|u_{[z]}(z)| = |\operatorname{Re}\phi(e^{-i\arg z}z)| = |\operatorname{Re}\phi(|z|)| = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{Re}|z|}{1-|z|^2} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|.$$

Ако $z = 0$, онда тривијално следи да је неједнакост (3.1) оштра у наведеном смислу. □

Пре него што размотримо Шварцову лему за комплексно-вредносне хармонијске функције, формулисаћемо и доказаћемо једну лему која ће имати улогу у том и даљим разматрањима.

Лема 3.1. *Нека је $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Тада је са*

$$U^\theta(z) = \cos\theta u(z) + \sin\theta v(z)$$

на $\mathbb{U}$ дефинисана реално-вредносна хармонијска функција таква да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|U^\theta(z)| \leqslant |f(z)|$.

Осим тога, за свако $z \in \mathbb{U}$ постоји $\theta_0 \in \mathbb{R}$ такво да важи $U^{\theta_0}(z) = |f(z)|$.

Доказ. Како је θ константа и како су u и v реални, односно имагинарни део комплексно-вредносне хармонијске функције f, следи да је U^θ реално-вредносна хармонијска функција дефинисана на $\mathbb{U}$. Такође, на основу Коши-Шварцове неједнакости за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\begin{aligned} |U^\theta(z)| &= |\langle(\cos\theta,\sin\theta),(u(z),v(z))\rangle| \\ &\leqslant \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\sqrt{u(z)^2+v(z)^2} \\ &= |f(z)| < 1. \end{aligned}$$

Ако је $f(z) \neq 0$, онда постоји $\theta_0 \in \mathbb{R}$ такво да важи $\cos\theta_0 = \dfrac{u(z)}{|f(z)|}$ и $\sin\theta_0 = \dfrac{v(z)}{|f(z)|}$, а самим тим и $U^{\theta_0}(z) = |f(z)|$.

Ако је $f(z) = 0$, онда за свако $\theta \in \mathbb{R}$ важи $U^\theta(z) = |f(z)|$. □

Напомена 3.1. *Приметимо да функција U^θ пресликава $\mathbb{U}$ у интервал $(-1,1)$.*

Теорема 3.2. *Нека је $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|. \tag{3.5}$$

Неједнакост (3.5) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ постоји функција (која зависи од z) $f_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ таква да је $f_{[z]}(0) = 0$ и $f_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|$.

Доказ. Нека је $\theta \in \mathbb{R}$ произвољно и нека је U^θ функција дефинисана као у леми 3.1. Тада је $U^\theta(0) = 0$, па на основу теореме 3.1, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$|U^\theta(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|. \tag{3.6}$$

Даље, нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. Тада, на основу леме 3.1, постоји $\theta_0 \in \mathbb{R}$ такво да важи $|f(z)| = U^{\theta_0}(z)$, па из (3.6) добијамо (3.5).

Да је неједнакост (3.5) оштра у наведеном смислу, следи из теореме 3.1 и чињенице да је $\mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1, 1)) \subset \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. □

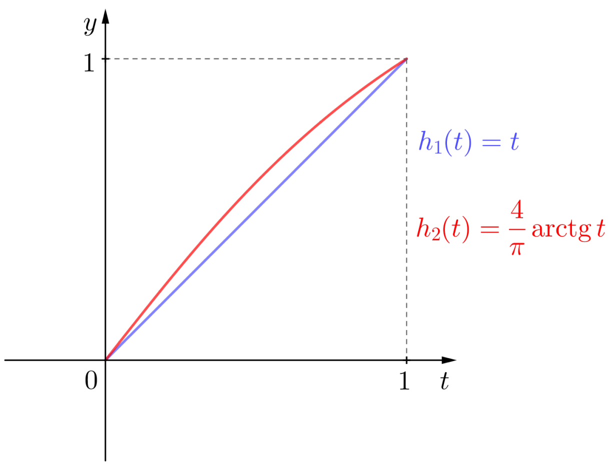
Последица 3.1. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен, $w_0 \in \Omega$ фиксирано и $f \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{U})$ такво да је $f(w_0) = 0$. Тада за свако $w \in \Omega$ важи*

$$|f(w)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |\chi(w)|,$$

при чему је $\chi \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ такво да је $\chi(w_0) = 0$.

Доказ. Нека је $g = f \circ \chi^{-1}$. Тада је $g \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ и $g(0) = 0$. Отуда, на основу теореме 3.2, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|g(z)| = |(f \circ \chi^{-1})(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|$, односно за свако $w \in \Omega$ важи $|f(w)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |\chi(w)|$. □

Напомена 3.2. *Како за свако $t \in [0, 1]$ важи $t \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} t$ (при чему се једнакост постиже ако и само ако је $t = 0$ или $t = 1$), следи да теорема 3.2 даје лошију оцену него теорема 2.1, али под слабијим претпоставкама, тј. за ширу класу пресликавања, јер је $\mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) \subset \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. На слици 3.1 приказани су графици функције $h_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са $h_1(t) = t$ и функције $h_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са $h_2(t) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} t$.*



Слика 3.1: Графици функција h_1 и h_2

У књизи П. Дјурена *Harmonic Mapping in the Plane* [21] из 2004. године на стр. 76 као референца за теорему 3.2 наводи се рад [25] Е. Хајнца који је то тврђење формулисао и доказао у том раду из 1959. године. Сам Хајнц у том раду наводи да се ради о познатом резултату у вези хармонијских функција, који представља аналогон Шварцове леме, и као референцу даје задатак број 288 из чувене збирке задатака *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I* чији су аутори Ђ. Поја и Г. Сеге [71], која је објављена 1925. године. С друге стране, према [13] варијанта овог тврђења појављује се у већ поменутом Шварцовом делу *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band* [77] из 1890. године.

Напоменимо још да је и у [25] и у [21] теорема 3.2 доказана тако што је суштински најпре доказана теорема 3.1. Доказ теореме 3.1 приказан у овој дисертацији (који се есенцијално ослања на пресликавање дефинисано у примеру 2.4а, принцип субординације, еуклидска својства хиперболичких дискова у јединичном диску $\mathbb{U}$ и појасу $\mathbb{S}$ и Шварц-Пикову лему за просто повезане области) јесте доказ који је дат у скорашњем заједничком раду [62] аутора ове дисертације са ментором М. Матељевићем.

У верзијама Шварцове леме за хармонијска пресликавања, које смо до сада навели у овој дисертацији (а то су теорема 3.1 и теорема 3.2), имали смо важну претпоставку да се одговарајућим пресликавањем 0 пресликава у 0. Аналогно као и у случају пресликавања која припадају $\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, природно је разматрати варијанте Шварцове леме за пресликавање $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, при чему не мора бити $f(0) = 0$. Колико је аутору дисертације познато, у литератури нема пуно резултата на ову тему (на пример, неки резултати овог типа појављују се у раду [13]).

Приметимо, ако је f пресликавање такво да $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и $f(0) \neq 0$, онда се коришћењем пресликавања $F = \varphi_{-f(0)} \circ f$, које припада $\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и за које је $F(0) = 0$, може добити варијанта Шварцове леме за пресликавање f (видети теорему 2.3). С друге стране, ако је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и $f(0) \neq 0$, онда пресликавање $F = \varphi_{-f(0)} \circ f$ у општем случају не мора да припада $\mathrm{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и то представља одређену потешкоћу у проучавању пресликавања f.

У већ поменутом заједничком раду [62] аутора ове дисертације са ментором приказан је метод којим се те потешкоће могу превазићи (видети теорему 3.4). Али, пре него што прикажемо одговарајуће резултате добијене у том раду, навешћемо резултат који је у вези са овом темом, али је другачијег типа, до ког је дошао Х. В. Хеткот 1977. године у раду [26]. Чини се да се истраживачи у овој области нису обазирали на резултат објављен у раду [26], а такође тај резултат можемо наћи и у [69].

Теорема 3.3. *Нека је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} f(0) \right| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|.$$

Наредна теорема јесте резултат објављен у раду [62]. Напоменимо да је доказ ове теореме одговарајућа модификација доказа теореме 3.1 датог у том раду и у овој дисертацији. Есенцијалну улогу у овом доказу имају Шварц-Пикова лема за просто повезане области и пропозиција 2.12, која следи из својстава пресликавања ϕ_b дефинисаног у примеру 2.4б и еуклидских својстава хиперболичких дискова у $\mathbb{U}$ и $\mathbb{S}$.

Теорема 3.4. *Нека је $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U},(-1,1))$, $u(0) = b$ и $a = \operatorname{tg} \dfrac{b\pi}{4}$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a-|z|}{1-a|z|} \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a+|z|}{1+a|z|},$$

односно, другачије записано,

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(-|z|) \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(|z|). \tag{3.7}$$

Неједнакости (3.7) јесу оштре у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ *постоје функције (које зависе од* z*)* $\widehat{u}_{[z]}, \widetilde{u}_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ *такве да је* $\widehat{u}_{[z]}(0) = \widetilde{u}_{[z]}(0) = b$ *и за које важи* $\widehat{u}_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(-|z|)$ *и* $\widetilde{u}_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(|z|)$.

Доказ. Како је $\mathbb{U}$ просто повезана област, следи да постоји $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ такво да важи $u = \operatorname{Re} f$ и $f(0) = b$. На основу дела в) теореме 2.11 имамо

$$d_{\mathbb{S}}(f(z), b) = d_{\mathbb{S}}(f(z), f(0)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z, 0).$$

Отуда, како је $d_{\mathbb{U}}(z,0) = \lambda_{\mathbb{U}}(|z|)$, следи да $f(z) \in \overline{D}_{\mathbb{S}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}(|z|)\big)$, па на основу пропозиције 2.12 добијамо $u(z) \in \left[\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(-|z|), \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(|z|)\right]$, тј. неједнакости (3.7).

Докажимо сада да су неједнакости (3.7) оштре у наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, дефинишимо функције $\widehat{u}_{[z]}, \widetilde{u}_{[z]} : \mathbb{U} \to (-1,1)$ на следећи начин

$$\widehat{u}_{[z]}(\zeta) = \operatorname{Re}\phi_b(-e^{-i\arg z}\zeta)$$

и

$$\widetilde{u}_{[z]}(\zeta) = \operatorname{Re}\phi_b(e^{-i\arg z}\zeta),$$

при чему је $\phi_b \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ пресликавање дефинисано у примеру 2.4б. Непосредно се показује да $\widehat{u}_{[z]}, \widetilde{u}_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$, као и да важи $\widehat{u}_{[z]}(0) = \widetilde{u}_{[z]}(0) = b$. Такође, за функцију $\widehat{u}_{[z]}$ важи

$$\widehat{u}_{[z]}(z) = \operatorname{Re}\phi_b(-e^{-i\arg z}z) = \operatorname{Re}\phi_b(-|z|) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(-|z|),$$

док за функцију $\widetilde{u}_{[z]}$ важи

$$\widetilde{u}_{[z]}(z) = \operatorname{Re}\phi_b(e^{-i\arg z}z) = \operatorname{Re}\phi_b(|z|) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(|z|).$$

Ако је $z = 0$, онда тривијално следи да су неједнакости (3.7) оштре у наведеном смислу. □

Теорема која следи (видети теорему 1 у [60]) јесте последица теореме 3.4 и може се сматрати уопштењем теореме 2.3 за пресликавања која припадају $\operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$.

Теорема 3.5. *Нека је* $f \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, $b = |f(0)|$ *и* $a = \operatorname{tg}\dfrac{b\pi}{4}$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a + |z|}{1 + a|z|},$$

односно, другачије записано,

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(|z|). \tag{3.8}$$

Неједнакост (3.8) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ *постоји функција (која зависи од* z*)* $f_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ *таква да је* $|f_{[z]}(0)| = b$ *и* $|f_{[z]}(z)| = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a(|z|)$.

Пре него што докажемо теорему 3.5 формулисаћемо и доказаћемо једну једноставну лему коју ћемо користити у доказу ове теореме.

Лема 3.2. *За фиксирано $z \in \mathbb{U}$, функција $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(t) = \dfrac{t+|z|}{1+t|z|}$ јесте строго монотоно растућа.*

Доказ. Како за свако $t \in (-1,1)$ важи $h'(t) = \dfrac{1-|z|^2}{(1+t|z|)^2} > 0$, добијамо да је функција h строго монотоно растућа. □

Доказ теореме 3.5. Нека је $\theta \in \mathbb{R}$ произвољно и нека је U^θ функција дефинисана као у леми 3.1. Даље, нека су $b^\theta = U^\theta(0)$ и $a^\theta = \operatorname{tg} \dfrac{b^\theta \pi}{4}$. Тада, на основу теореме 3.4, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$U^\theta(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_{a^\theta}(|z|).$$

Како је

$$a^\theta = \operatorname{tg} \frac{b^\theta \pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{U^\theta(0)\pi}{4} \leqslant \operatorname{tg} \frac{|f(0)|\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{b\pi}{4} = a$$

и како је аркустангенс монотоно растућа функција, на основу леме 3.2, добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$U^\theta(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(|z|). \tag{3.9}$$

Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. Тада, на основу леме 3.1, постоји $\theta_0 \in \mathbb{R}$ такво да важи $|f(z)| = U^{\theta_0}(z)$, па из (3.9) следи (3.8).

Да је неједнакост (3.8) оштра у наведеном смислу, следи из теореме 3.4 и чињенице да је $\operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1)) \subset \operatorname{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. □

Како бисмо упоредили неједнакости (2.5) и (3.8), најпре ћемо доказати једну лему.

Лема 3.3. *Нека је $b \in [0,1)$ и $a = \operatorname{tg} \dfrac{b\pi}{4}$. Тада за свако $t \in [0,1]$ важи*

$$\varphi_b(t) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(t). \tag{3.10}$$

При томе, у неједнакости (3.10) постиже се једнакост ако и само ако је $t = 0$ или $t = 1$.

Доказ. Непосредно се проверава да се за $t = 0$ или $t = 1$ у (3.10) постиже једнакост.

Надаље, претпоставимо да је $t \neq 0$ и $t \neq 1$, и докажимо да за свако $t \in (0,1)$ важи

$$\varphi_b(t) < \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(t). \tag{3.11}$$

Ако је $b = 0$, а самим тим и $a = 0$, онда се неједнакост (3.10) своди на неједнакост $t < \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} t$ која јесте тачна, за свако $t \in (0,1)$ (видети напомену 3.2). Размотримо зато случај $b \neq 0$ (тада је и $a \neq 0$). Нека је $s = \dfrac{b+t}{1+bt}$. Како $t \in (0,1)$, имамо да $s \in (b,1)$ и неједнакост (3.11) еквивалентна је са неједнакошћу

$$\frac{\pi}{4}s < \operatorname{arctg}\frac{a-b+(1-ab)s}{1-ab+(a-b)s}. \tag{3.12}$$

Даље, нека је $g_1 : [b,1] \to \mathbb{R}$ дефинисано са $g_1(s) = \operatorname{arctg}\dfrac{a-b+(1-ab)s}{1-ab+(a-b)s}$ и $g_2 : [b,1] \to \mathbb{R}$ дефинисано са $g_2(s) = \dfrac{\pi}{4}s$. Непосредно се проверава да за свако $s \in (b,1)$ важи $g_1''(s) < 0$, тј. да функција g_1 јесте строго конкавна на $(b,1)$. Отуда, како је $g_1(b) = g_2(b) = \dfrac{b\pi}{4}$ и $g_1(1) = g_2(1) = \dfrac{\pi}{4}$, добијамо да је неједнакост (3.12) тачна, за свако $s \in (b,1)$. $\square$

Напомена 3.3. *На основу леме 3.3, следи да теорема 3.5 даје лошију оцену него теорема 2.3, али под слабијим претпоставкама, тј. за ширу класу пресликавања, јер је* $\mathrm{Hol}(\mathbb{U},\mathbb{U}) \subset \mathrm{Har}(\mathbb{U},\mathbb{U})$.

3.2 Шварц-Пикова лема за хармонијска пресликавања

У последњих тридесетак година објављено је доста радова (видети на пример [19], [34], [13], [14], [51], [39], [33], [17], [16], [38], [31], [48], [35], [56], [64], [55], [45], [62], [78]) у којима су дате разне верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска пресликавања и решени многи проблеми у вези са том темом. С тим у вези, видети на пример монографију [42] и радове [29], [47], [63], [57], [44]. Посебно је интересантан скорашњи рад М. Матељевића [56]. Наиме, у том раду развијен је метод појаса и полуравни који је омогућио да се неки од тих резултата докажу на елегантан начин. Напоменимо још да је тај метод коришћен у радовима [62] и [78], као и да ће имати кључну улогу у темама које обрађујемо у овој секцији, тј. докази које ћемо приказати ослањаће се на тај метод.

Укратко, метод појаса и полуравни састоји се из следећих елементарних разматрања.

1° Нека је $D \subset \mathbb{C}$ област, $I \subset \mathbb{R}$ отворени интервал и $u : D \to I$ реално-вредносна хармонијска функција. Ако постоји холоморфна функција F таква да за свако $z \in D$ важи $\operatorname{Re} F(z) = u(z)$, онда F пресликава D у $I \times \mathbb{R}$. У том случају кажемо да је функција F придружена функцији u.

2° Ако је $I = (-1,1)$, онда је $I \times \mathbb{R} = \mathbb{S}$, а ако је $I = (0,+\infty)$ онда је $I \times \mathbb{R} = \mathbb{K}$.

3° Нека је $D \subset \mathbb{C}$ област, u реално-вредносна хармонијска функција дефинисана на D и F холоморфна функција која је придружена функцији u. Ако су U и V редом реални и имагинарни део функције F онда за свако $z \in D$ важи $U(z) = u(z)$ и $F'(z) = U_x(z) + iV_x(z) = U_x(z) - iU_y(z) = u_x(z) - iu_y(z) = \overline{\nabla(z)}$. Стога, за свако $z \in D$ важи $|F'(z)| = |\overline{\nabla(z)}| = |\nabla(z)|$.

4° Ако је $D \subset \mathbb{C}$ просто повезана област и u реално-вредносна хармонијска функција дефинисана на D, онда постоји холоморфна функција F (која је јединствена до на константу) која је придружена функцији u.

5° Нека је $\Omega = \mathbb{S}$ или $\Omega = \mathbb{K}$. Тада вредност хиперболичке густине ρ_Ω у тачки z зависи само од $\operatorname{Re} z$, односно, за свако $z \in \Omega$ важи $\rho_\Omega(z) = \rho_\Omega(\operatorname{Re} z)$.

На основу 1°-5° и дела а) теореме 2.11 непосредно добијамо следеће две теореме.

Теорема 3.6. *Нека је $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ и нека је F холоморфна функција која је придружена функцији u. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\rho_\mathbb{S}(u(z))|\nabla u(z)| = \rho_\mathbb{S}(F(z))|F'(z)| \leqslant \rho_\mathbb{U}(z),$$

односно

$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{\rho_\mathbb{U}(z)}{\rho_\mathbb{S}(u(z))} = \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right)}{1-|z|^2}. \tag{3.13}$$

При томе, ако је $u = \operatorname{Re} f$, где је $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$, онда у (3.13) важи једнакост за свако $z \in \mathbb{U}$. Обратно, ако у (3.13) за неко $z \in \mathbb{U}$ важи једнакост, онда постоји $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ такво да је $u = \operatorname{Re} f$.

Теорема 3.7. *Нека је $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (0,+\infty))$ и нека је F холоморфна функција која је придружена функцији u. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\rho_\mathbb{K}(u(z))|\nabla u(z)| = \rho_\mathbb{K}(F(z))|F'(z)| \leqslant \rho_\mathbb{U}(z),$$

односно

$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{\rho_\mathbb{U}(z)}{\rho_\mathbb{K}(u(z))} = \frac{2u(z)}{1-|z|^2}. \tag{3.14}$$

При томе, ако је $u = \operatorname{Re} f$, где је $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$, онда у (3.14) важи једнакост за свако $z \in \mathbb{U}$. Обратно, ако у (3.14) за неко $z \in \mathbb{U}$ важи једнакост, онда постоји $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$ такво да је $u = \operatorname{Re} f$.

Неједнакост (3.13) налазимо и као један од главних резултата у раду Х. Х. Чен [16] из 2013. године (у вези са овом темом видети и рад [33] Д. Калаја и М. Вуориненa из 2011. године), док је једна варијанта неједнакости (3.14) доказана у раду [48] М. Марковића из 2015. године. Методи доказивања који су коришћени у тим радовима разликују се од метода који је приказан у овој дисертацији. Метод доказивања неједнакости (3.13) и (3.14) приказан у овој дисертацији, који се ослања на резултате рада [56] М.Матељевића из 2018. године, јесте општији. У вези са овом темом видети и рад [62].

У литератури (видети на пример теорему 6.26 у [6]) често се срећу и следећа два тврђења која су непосредне последице, редом, теореме 3.6 и теореме 3.7.

Последица 3.2. *Нека је $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$. Тада важи*

$$|\nabla u(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(0)\right).$$

Специјално, ако је $u(0) = 0$ важи

$$|\nabla u(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}.$$

Последица 3.3. *Нека је* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$. *Тада важи*

$$|\nabla u(0)| \leqslant 2u(0).$$

Наредна теорема, која је један од главних резултата већ поменутог рада Д. Калаја и М. Вуоринена [33], такође јесте последица теореме 3.6.

Теорема 3.8. *Нека је* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1, 1))$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{1 - |u(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

односно

$$\rho_{\mathbb{U}}(u(z))|\nabla u(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \rho_{\mathbb{U}}(z). \tag{3.15}$$

Како бисмо доказали теорему 3.8 најпре ћемо доказати једну једноставну неједнакост која се односи на две елементарне функције.

Лема 3.4. *За свако* $t \in [-1, 1]$ *важи* $\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \leqslant 1 - t^2$.

Доказ. Нека је $t \in [-1, 1]$. Како је $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} t\right)$ следи да је неједнакост $\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \leqslant 1 - t^2$ еквивалентна са

$$t^2 \leqslant 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} t\right). \tag{3.16}$$

Неједнакост (3.16) јесте тачна за свако $t \in [-1, 1]$ ако и само ако за свако $t \in [0, 1]$ важи $t \leqslant \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$. Последња неједнакост важи за свако $t \in [0, 1]$, јер је функција $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(t) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$ конкавна на $[0, 1]$ и при томе је $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$. $\square$

Доказ теореме 3.8. Тврђење следи директно на основу теореме 3.6 и леме 3.4. $\square$

Напомена 3.4. *Приметимо да, уз адекватне модификације, теореме 3.6, 3.7 и 3.8 важе и ако је домен одговарајућег хармонијског пресликавања произвољни хиперболички домен. Прецизније, ако је* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *хиперболички домен и* $u \in \mathrm{Har}(\Omega, (-1, 1))$ *(односно* $u \in \mathrm{Har}(\Omega, (0, +\infty))$*), онда за свако* $w \in \Omega$ *важи*

$$\rho_{\mathbb{S}}(u(w))|\nabla u(w)| \leqslant \rho_{\Omega}(w) \quad (\textit{односно } \rho_{\mathbb{K}}(u(w))|\nabla u(w)| \leqslant \rho_{\Omega}(w)), \tag{3.17}$$

као и

$$\rho_{\mathbb{U}}(u(w))|\nabla u(w)| \leqslant \frac{4}{\pi} \rho_{\Omega}(w). \tag{3.18}$$

Заиста, ако је $g \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathbb{U})$ *и ако је* $v = u \circ g^{-1}$, *онда је* $v \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1, 1))$ *(односно* $v \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$*). Даље, како за функцију* v *важе неједнакости (3.13), (3.14) и (3.15), једноставним трансформисањем одговарајућих израза добијају се неједнакости (3.17) и (3.18).*

У циљу да формулишемо и докажемо одговарајуће верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска пресликавања, у терминима хиперболичког растојања тачака, најпре наводимо следећу пропозицију.

Пропозиција 3.1. *Нека је $c > 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ отворени интервал, Ω произвољан хиперболички домен у $\mathbb{C}$ такав да садржи интервал I и $u : \mathbb{U} \to I$ једна C^1 функција. Ако за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\rho_\Omega(u(z))|\nabla u(z)| \leqslant c\rho_{\mathbb{U}}(z)$, онда је*

а) $\ell_\Omega(u \circ \gamma) \leqslant c\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$, за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$;

б) $d_\Omega(u(z_1), u(z_2)) \leqslant cd_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Доказ.

а) Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива. Тада је $u \circ \gamma$ једна C^1 крива у Ω и на основу дефиниције хиперболичке дужине C^1 криве важи

$$\ell_\Omega(u \circ \gamma) = \int_{u\circ\gamma} \rho_\Omega(w)|dw| = \int_0^1 \rho_\Omega(u(\gamma(t))) \cdot |(u \circ \gamma)'(t)|dt. \tag{3.19}$$

Како је $(u \circ \gamma)'(t) = \big\langle (\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle$ и како на основу Коши-Шварцове неједнакости важи $|\big\langle (\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle| \leqslant |(\nabla u)(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|$, следи да је

$$\int_0^1 \rho_\Omega(u(\gamma(t))) \cdot |(u \circ \gamma)'(t)|dt \leqslant \int_0^1 \rho_\Omega(u(\gamma(t))) \cdot |(\nabla u)(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|dt. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20), узимајући у обзир да на основу претпоставке пропозиције за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho_\Omega(u(z))|\nabla u(z)| \leqslant c\rho_{\mathbb{U}}(z),$$

добијамо

$$\ell_\Omega(u \circ \gamma) \leqslant \int_0^1 c\rho_{\mathbb{U}}(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|dt. \tag{3.21}$$

Коначно, како је

$$\int_0^1 c\rho_{\mathbb{U}}(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|dt = c\ell_{\mathbb{U}}(\gamma),$$

из (3.21) следи део а).

б) Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ произвољне. Тада је

$$d_\Omega(u(z_1), u(z_2)) = \inf_\Gamma \ell_\Omega(\Gamma), \tag{3.22}$$

при чему се инфимум узима по свим C^1 кривим $\Gamma : [0,1] \to \Omega$ таквим да је $\Gamma(0) = u(z_1)$ и $\Gamma(1) = u(z_2)$. Како је скуп

$$\{u \circ \gamma \,|\, \gamma : [0,1] \to \mathbb{U} \text{ је } C^1 \text{ крива}, \gamma(0) = z_1 \text{ и } \gamma(1) = z_2\}$$

подскуп скупа

$$\{\Gamma \,|\, \Gamma : [0,1] \to \Omega \text{ је } C^1 \text{ крива}, \Gamma(0) = u(z_1) \text{ и } \Gamma(1) = u(z_2)\},$$

следи да је

$$\inf_{\Gamma} \ell_\Omega(\Gamma) \leqslant \inf_{\gamma} \ell_\Omega(u \circ \gamma), \tag{3.23}$$

при чему се инфимум с леве стране неједнакости (3.23) узима по свим C^1 кривим $\Gamma : [0,1] \to \Omega$ таквим да је $\Gamma(0) = u(z_1)$ и $\Gamma(1) = u(z_2)$, а инфимум с десне стране неједнакости (3.23) узима се по свим C^1 кривим $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ таквим да је $\gamma(0) = z_1$ и $\gamma(1) = z_2$. Отуда, на основу (3.22), (3.23) и дела а) следи

$$d_\Omega(u(z_1), u(z_2)) \leqslant c d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2).$$

□

Наредне три теореме могу се сматрати верзијама Шварц-Пикове леме за хармонијска пресликавања формулисане у терминима хиперболичког растојања тачака. Теорема 3.10 јесте резултат М. Марковића (видети теорему 1.1 у [48]), а теорема 3.11 јесте резултат Д. Калаја и М. Вуоринена (видети теорему 1.8 у [33]).

Теорема 3.9. *Нека је* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$. *Тада за свако* $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ *важи*

$$d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2). \tag{3.24}$$

При томе, ако за неке $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ *такве да је* $z_1 \neq z_2$ *у неједнакости (3.24) важи једнакост, онда је* $u = \mathrm{Re}\, f$, *при чему је* $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$.

С друге стране, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ *постоји функција* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$, *која зависи од* z_1 *и* z_2, *таква да у неједнакости (3.24) важи једнакост.*

Доказ. Неједнакост (3.24) непосредно следи из теореме 3.6 и дела б) пропозиције 3.1.

Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ такве да је $z_1 \neq z_2$ и $d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)) = d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$. Како је $\mathbb{U}$ просто повезана област, следи да постоји пресликавање $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ такво да је $u = \mathrm{Re}\, f$. Претпоставимо да $f \notin \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$. Тада, на основу теореме 3.6, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho_{\mathbb{S}}(u(z)) |\nabla u(z)| < \rho_{\mathbb{U}}(z). \tag{3.25}$$

Даље, нека је $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{U}$ геодезијска линија таква да је $\gamma_0(0) = z_1$ и $\gamma_0(1) = z_2$. Тада је

$$d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) = \ell_{\mathbb{U}}(\gamma_0). \tag{3.26}$$

На основу (3.25) и доказа дела а) пропозиције 3.1 следи

$$\ell_{\mathbb{U}}(\gamma_0) > \ell_{\mathbb{S}}(u \circ \gamma_0), \tag{3.27}$$

а на основу дефиниције хиперболичког растојања важи

$$\ell_{\mathbb{S}}(u \circ \gamma_0) \geqslant d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)). \tag{3.28}$$

Отуда из (3.26), (3.27) и (3.28) следи

$$d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)) < d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2),$$

што је у супротности са чињеницом да за z_1 и z_2 важи $d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)) = d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$. Дакле, претпоставка да $f \notin \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ није тачна, односно важи да је $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$.

Докажимо сада и последњи део тврђења. Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ произвољни. Ако је $z_1 = z_2$ онда за сваку функцију $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ у (3.24) важи једнакост. Ако је $z_1 \neq z_2$, најпре дефинишимо функцију $g : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ са $g(z) = e^{-i \arg \varphi_{-z_1}(z_2)} \varphi_{-z_1}(z)$ и функцију $u : \mathbb{U} \to (-1,1)$ са $u = \operatorname{Re}(\phi \circ g)$, при чему је пресликавање ϕ дефинисано у примеру 2.4. Тада је $\phi \circ g \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ и $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$, а како је $u(z_1) = (\phi \circ g)(z_1)$ и $u(z_2) = (\phi \circ g)(z_2)$, на основу теореме 2.11, следи да је

$$d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)) = d_{\mathbb{S}}((\phi \circ g)(z_1), (\phi \circ g)(z_2)) = d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2).$$

□

Теорема 3.10. *Нека је $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$. Тада за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи*

$$d_{\mathbb{K}}(u(z_1), u(z_2)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2). \tag{3.29}$$

При томе, ако за неке $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ такве да је $z_1 \neq z_2$ у неједнакости (3.29) важи једнакост, онда је $u = \operatorname{Re} f$, при чему је $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$.

С друге стране, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ постоји функција $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$, која зависи од z_1 и z_2, таква да у неједнакости (3.29) важи једнакост.

Доказ. Неједнакост (3.29) непосредно следи из теореме 3.7 и дела б) пропозиције 3.1. Остатак доказа аналоган је остатку доказа теореме 3.9. □

Теорема 3.11. *Нека је $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1, 1))$. Тада за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи*

$$d_{\mathbb{U}}(u(z_1), u(z_2)) \leqslant \frac{4}{\pi} d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2). \tag{3.30}$$

Доказ. Неједнакост (3.30) непосредно следи из теореме 3.8 и дела б) пропозиције 3.1. □

Напомена 3.5. *Приметимо да, уз адекватне модификације, теореме 3.9, 3.10 и 3.11 важе и ако је домен одговарајућег хармонијског пресликавања произвољни хиперболички домен. Прецизније, ако је $\Omega \subset \mathbb{C}$ хиперболички домен и $u \in \operatorname{Har}(\Omega, (-1,1))$ (односно $u \in \operatorname{Har}(\Omega, (0, +\infty))$) онда за свако $w_1, w_2 \in \Omega$ важи*

$$d_{\mathbb{S}}(u(w_1), u(w_2)) \leqslant d_{\Omega}(w_1, w_2) \quad (\text{односно } d_{\mathbb{K}}(u(w_1), u(w_2)) \leqslant d_{\Omega}(w_1, w_2)),$$

као и

$$d_{\mathbb{U}}(u(w_1), u(w_2)) \leqslant \frac{4}{\pi} d_{\Omega}(w_1, w_2).$$

Ако су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени такви да је $\Omega_1 \subset \Omega_2$ онда, на основу теореме 2.11, за свако $z \in \Omega_1$ важи да је $\rho_{\Omega_2}(z) \leqslant \rho_{\Omega_1}(z)$, односно за свако $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи да је $d_{\Omega_2}(z_1, z_2) \leqslant d_{\Omega_1}(z_1, z_2)$. Специјално, како је $\mathbb{U} \subset \mathbb{S}$, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\rho_{\mathbb{S}}(z) \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(z)$ и за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи $d_{\mathbb{S}}(z_1, z_2) \leqslant d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$. Међутим, како и $\mathbb{U}$ и $\mathbb{S}$ садрже интервал $(-1, 1)$, у случају ова два хиперболичка домена важе још неке релације које се односе на одговарајуће хиперболичке густине и одговарајућа хиперболичка растојања.

Пропозиција 3.2.

а) За свако $x \in (-1, 1)$ важи $\rho_{\mathbb{U}}(x) \leqslant \dfrac{4}{\pi} \rho_{\mathbb{S}}(x)$.

б) За свако $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ важи $d_{\mathbb{U}}(x_1, x_2) \leqslant \dfrac{4}{\pi} d_{\mathbb{S}}(x_1, x_2)$.

Доказ.

а) Како је $\rho_{\mathbb{U}}(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$ и $\rho_{\mathbb{S}}(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ дата неједнакост директно следи на основу леме 3.4.

б) Геодезијска линија чије су крајње тачке x_1 и x_2 и у диску $\mathbb{U}$ и у појасу $\mathbb{S}$ јесте траг криве γ дефинисане са $\gamma(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $t \in [0,1]$. Отуда,

$$d_{\mathbb{U}}(x_1, x_2) = \ell_{\mathbb{U}}(\gamma) = \int_\gamma \rho_{\mathbb{U}}(z)|dz| = \int_0^1 \rho_{\mathbb{U}}(\gamma(t))|x_2 - x_1|dt \tag{3.31}$$

и

$$d_{\mathbb{S}}(x_1, x_2) = \ell_{\mathbb{S}}(\gamma) = \int_\gamma \rho_{\mathbb{S}}(z)|dz| = \int_0^1 \rho_{\mathbb{S}}(\gamma(t))|x_2 - x_1|dt. \tag{3.32}$$

Дакле, дата неједнакост следи на основу (3.31), (3.32) и дела а) ове пропозиције. □

Последица 3.4. *Нека је $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$. Тада за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи*

$$\frac{\pi}{4} d_{\mathbb{U}}(u(z_1), u(z_2)) \leqslant d_{\mathbb{S}}(u(z_1), u(z_2)) \leqslant d_{\mathbb{U}}(u(z_1), u(z_2)).$$

Доказ. Доказ следи директно из разматрања наведеног непосредно пре пропозиције 3.2 и дела б) те пропозиције. □

Пре него што размотримо варијанте Шварц-Пикове леме за комплексно-вредносне хармонијске функције, формулисаћемо и доказаћемо две леме које ће имати улогу у тим разматрањима, али и приликом доказивања даљих резултата. Прва од тих лема јесте лема 1 из рада [19].

Лема 3.5. *Нека су $z, w \in \mathbb{C}$. Тада је*

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}} |w\cos\theta + z\sin\theta| = \frac{1}{2}(|w + iz| + |w - iz|).$$

При томе, ако су бројеви $w + iz$ и $w - iz$ различити од 0 максимум се постиже за $\theta = \dfrac{1}{2}(\arg(w + iz) - \arg(w - iz))$.

Доказ. Нека је $\theta \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада је

$$|w\cos\theta + z\sin\theta| = \frac{1}{2}|(w - iz)e^{i\theta} + (w + iz)e^{-i\theta}|,$$

па тврђење следи на основу леме 1.1. □

Лема 3.6. *Нека је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ и $\theta \in \mathbb{R}$ и нека је функција U^θ дефинисана на $\mathbb{U}$ са $U^\theta(z) = \cos\theta u(z) + \sin\theta v(z)$ (дакле, исто као у формулацији леме 3.1). Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}} |\nabla U^\theta(z)| = \|df(z)\|.$$

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. Како је

$$\begin{aligned} \nabla U^\theta(z) &= \big(u_x(z)\cos\theta + v_x(z)\sin\theta, u_y(z)\cos\theta + v_y(z)\sin\theta\big) \\ &= \big(u_x(z)\cos\theta + v_x(z)\sin\theta\big) + i\big(u_y(z)\cos\theta + v_y(z)\sin\theta\big) \\ &= \big(u_x(z) + iu_y(z)\big)\cos\theta + \big(v_x(z) + iv_y(z)\big)\sin\theta, \end{aligned}$$

на основу леме 3.5 важи

$$\begin{aligned} \max_{\theta\in\mathbb{R}} |\nabla U^\theta(z)| &= \frac{1}{2}\big(|u_x(z) + iu_y(z) + i(v_x(z) + iv_y(z))| \\ &\quad + |u_x(z) + iu_y(z) - i(v_x(z) + iv_y(z))|\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(|u_x(z) - v_y(z) + i(u_y(z) + v_x(z))| \\ &\quad + |u_x(z) + v_y(z) + i(u_y(z) - v_x(z))|\big) \\ &= |f_{\overline{z}}(z)| + |\overline{f_z(z)}| = |f_{\overline{z}}(z)| + |f_z(z)|. \end{aligned}$$

Дакле, $\max_{\theta\in\mathbb{R}} |\nabla U^\theta(z)| = \|df(z)\|$. □

Наредна теорема може се сматрати верзијом Шварц-Пикове леме за комплексно-вредносна хармонијска пресликавања из јединичног диска $\mathbb{U}$ у себе (видети и теореме 3 и 4 у [19]).

Теорема 3.12. *Нека је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\|df(z)\| \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-|z|^2}. \tag{3.33}$$

Специјално,

$$\|df(0)\| \leqslant \frac{4}{\pi}.$$

Доказ. Нека је $\theta \in \mathbb{R}$ и нека је U^θ функција дефинисана као у формулацији леме 3.6. Тада, на основу теореме 3.6, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$|\nabla U^\theta(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}U^\theta(z)\right)}{1-|z|^2} \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-|z|^2}.$$

Отуда следи

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}} |\nabla U^\theta(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-|z|^2},$$

па на основу леме 3.6 важи (3.33). □

Наведимо још једну варијанту Шварц-Пикове леме за комплексно-вредносне хармонијске функције (у вези са овом теоремом видети и теорему 1.10 у [33], као и [68]).

Теорема 3.13. *Нека је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ такво да је $f(z) \neq 0$, за свако $z \in \mathbb{U}$, и нека је пресликавање $g : \mathbb{U} \to (-1, 1)$ дефинисано са $g(z) = |f(z)|$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|\nabla g(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}g(z)\right)}{1-|z|^2}.$$

Доказ. Нека су $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$. За свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\nabla g(z) = \left(\frac{u(z)u_x(z) + v(z)v_x(z)}{g(z)}, \frac{u(z)u_y(z) + v(z)v_y(z)}{g(z)}\right). \tag{3.34}$$

С друге стране, нека је $\theta \in \mathbb{R}$ произвољно и нека је U^θ функција дефинисана као у леми 3.1. Тада на основу леме 3.1 важи $U^\theta \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$, и отуда, на основу теореме 3.6, за свако $\theta \in \mathbb{R}$ и свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$|\nabla U^\theta(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} U^\theta(z)\right)}{1 - |z|^2}. \tag{3.35}$$

Осим тога, за свако $\theta \in \mathbb{R}$ и свако $z \in \mathbb{U}$ важи и

$$\nabla U^\theta(z) = (u_x(z)\cos\theta + v_x(z)\sin\theta, u_y(z)\cos\theta + v_y(z)\sin\theta). \tag{3.36}$$

Даље, нека је $z \in \mathbb{U}$ фиксирано и нека је $\theta_0 \in \mathbb{R}$такво да важи $\cos\theta_0 = \dfrac{u(z)}{|f(z)|}$ и $\sin\theta_0 = \dfrac{v(z)}{|f(z)|}$. Тада, на основу дефиниције U^{θ_0}, важи

$$U^{\theta_0}(z) = |f(z)| = g(z), \tag{3.37}$$

а на основу (3.34) и (3.36) важи и

$$\nabla U^{\theta_0}(z) = \nabla g(z). \tag{3.38}$$

Коначно, из (3.35), (3.37) и (3.38) следи тврђење. □

3.3 Уопштења Шварцове леме за хармонијска пресликавања

У овој секцији наводимо две теореме које су главни резултати самосталног рада [78] аутора ове дисертације. Теорема 3.14 може се сматрати профињењем теореме 3.4, док је теорема 3.15 верзија теореме 2.4 за хармонијска пресликавања.

Теорема 3.14. *Нека је $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ таква да је*

1° $u(0) = b$ *и*

2° $|\nabla u(0)| = d$, *при чему је* $d \leqslant \dfrac{4}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} b\right)$.

Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(-|z|\varphi_c(|z|)\big) \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big), \tag{3.39}$$

при чему је $a = \operatorname{tg}\dfrac{b\pi}{4}$ *и* $c = \dfrac{\pi}{4}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2}b} d$.

Неједнакости (3.39) јесу оштре у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ постоје функције (које зависе од z) $\widehat{u}_{[z]}, \widetilde{u}_{[z]} \in \operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1,1))$ такве да задовољавају услове 1° и 2° и за које важи $\widehat{u}_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(-|z|\varphi_c(|z|)\big)$ *и* $\widetilde{u}_{[z]}(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big)$.

Напомена 3.6. *Имајући у виду последицу 3.2, услов* $d \leqslant \dfrac{4}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}b\right)$ *у* 2° *јесте природан и неопходан.*

Доказ. Применом метода појаса добијамо да постоји холоморфна функција $f : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ таква да је $\operatorname{Re} f = u$, $f(0) = b$, $|f'(0)| = d$ и

$$|f^h(0)| = \frac{\rho_{\mathbb{S}}(f(0))}{\rho_{\mathbb{U}}(0)}|f'(0)| = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2}b}d = c.$$

Нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. На основу теореме 2.12, узимајући $\Omega_1 = \mathbb{U}$ и $\Omega_2 = \mathbb{S}$, добијамо

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}}(f(z), b) &\leqslant \log\big(\cosh d_{\mathbb{U}}(z,0) + |f^h(0)|\sinh d_{\mathbb{U}}(z,0)\big) \\ &= \log\left(\frac{1 + |z|^2 + 2c|z|}{1 - |z|^2}\right), \end{aligned}$$

док на основу леме 2.4 важи

$$\log\left(\frac{1 + |z|^2 + 2c|z|}{1 - |z|^2}\right) = d_{\mathbb{U}}(|z|\varphi_c(|z|), 0).$$

Отуда је $d_{\mathbb{S}}(f(z), b) \leqslant d_{\mathbb{U}}(|z|\varphi_c(|z|), 0)$, тј. $f(z) \in \overline{D}_{\mathbb{S}}\big(b, \lambda_{\mathbb{U}}\big(|z|\varphi_c(|z|)\big)\big)$. Коначно, на основу пропозиције 2.12 имамо

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) \in \left[\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(-|z|\varphi_c(|z|)\big), \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big)\right].$$

Докажимо сада да је неједнакост (3.39) оштра у наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, најпре дефинишимо функције $\widehat{\Phi}_{b,d}, \widetilde{\Phi}_{b,d} \in \operatorname{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ на следећи начин

$$\widehat{\Phi}_{b,d}(\zeta) = \phi_b\big(-\zeta \cdot \varphi_c(\zeta)\big)$$

и

$$\widetilde{\Phi}_{b,d}(\zeta) = \phi_b\big(\zeta \cdot \varphi_c(\zeta)\big),$$

при чему је $\phi_b \in \operatorname{Isom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ дефинисано у примеру 2.4б.

Затим дефинишемо функције $\widehat{u}_{[z]}, \widetilde{u}_{[z]} : \mathbb{U} \to (-1, 1)$, на следећи начин

$$\widehat{u}_{[z]}(\zeta) = \operatorname{Re}\widehat{\Phi}_{b,d}(e^{-i\arg z}\zeta)$$

и

$$\widetilde{u}_{[z]}(\zeta) = \operatorname{Re}\widetilde{\Phi}_{b,d}(e^{-i\arg z}\zeta).$$

Непосредно се показује да функције $\widehat{u}_{[z]}, \widetilde{u}_{[z]}$ припадају $\operatorname{Har}(\mathbb{U}, (-1, 1))$, као и да задовољавају 1° и 2°. Такође, за функцију $\widehat{u}_{[z]}$ важи

$$\widehat{u}_{[z]}(z) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(-|z|\varphi_c(|z|)\big),$$

док за функцију $\widetilde{u}_{[z]}$ важи

$$\widetilde{u}_{[z]}(z) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big).$$

Ако је $z = 0$, онда тривијално следи да је неједнакост (3.39) оштра у наведеном смислу.

□

Теорема 3.15. *Нека је $f \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ таква да је*

1° $f(0) = 0$ *и*

2° $\|df(0)\| = d$, *при чему је* $d \leqslant \dfrac{4}{\pi}$.

Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\big(|z|\varphi_c(|z|)\big), \tag{3.40}$$

при чему је $c = \dfrac{\pi}{4} d$.

Неједнакост (3.40) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ постоји функција (која зависи од z) $f_{[z]} \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ таква да задовољава услове 1° и 2° и за коју важи $|f_{[z]}(z)| = \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\big(|z|\varphi_c(|z|)\big)$.

Напомена 3.7. *Имајући у виду теорему 3.12, услов $d \leqslant \dfrac{4}{\pi}$ у 2° јесте природан.*

Доказ. Нека је $\theta \in \mathbb{R}$ произвољно, U^θ функција дефинисана као у леми 3.1 и нека је $c^\theta = \dfrac{\pi}{4}|\nabla U^\theta(0)|$. На основу теореме 3.14 за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$U^\theta(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\big(|z|\varphi_{c^\theta}(|z|)\big). \tag{3.41}$$

С друге стране, на основу леме 3.6 важи

$$|\nabla U^\theta(0)| \leqslant \|df(0)\|, \tag{3.42}$$

одакле следи

$$c^\theta = \frac{\pi}{4}|\nabla U^\theta(0)| \leqslant \frac{\pi}{4}\|df(0)\| = \frac{\pi}{4} d = c.$$

На основу леме 3.2, из (3.41) и (3.42), добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$U^\theta(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\big(|z|\varphi_c(|z|)\big). \tag{3.43}$$

Коначно, нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољно. Тада, на основу леме 3.1, постоји $\theta_0 \in \mathbb{R}$ такво да важи $|f(z)| = U^{\theta_0}(z)$, па из (3.43) следи (3.40).

Да је неједнакост (3.40) оштра у наведеном смислу, следи из теореме 3.14 и чињенице да је $\mathrm{Har}(\mathbb{U}, (-1, 1)) \subset \mathrm{Har}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. □

3.4 Уопштења Харнакових неједнакости за хармонијска пресликавања

На почетку ове секције наводимо једноставно тврђење које је познато под називом Харнакова неједнакост (стр. 62 у [24]) и које се може доказати коришћењем Шварцове леме за холоморфна пресликавања.

Теорема 3.16. *Нека је* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \frac{u(z)}{u(0)} \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{3.44}$$

Доказ. Применом метода полуравни добијамо да постоји $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$ таква да је $\mathrm{Re}\, f = u$ и $f(0) = u(0)$. Отуда (3.44) директно следи из теореме 2.15. □

Наредна теорема може се сматрати уопштењем претходне.

Теорема 3.17. *Нека је* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$\left(\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} + \frac{|\nabla u(0)|}{u(0)} \frac{|z|}{1-|z|^2}\right)^{-1} \leqslant \frac{u(z)}{u(0)} \leqslant \left(\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} + \frac{|\nabla u(0)|}{u(0)} \frac{|z|}{1-|z|^2}\right). \tag{3.45}$$

Доказ. Аналогно, као у доказу теореме 3.14, применом метода полуравни добијамо да постоји $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{U}, \mathbb{K})$ таква да је $\mathrm{Re}\, f = u$, $f(0) = u(0)$, $|f'(0)| = |\nabla u(0)|$ и

$$|f^h(0)| = \frac{\rho_{\mathbb{K}}(f(0))}{\rho_{\mathbb{U}}(0)} |f'(0)| = \frac{|\nabla u(0)|}{2u(0)}.$$

Нека је $c = \dfrac{|\nabla u(0)|}{2u(0)}$. Слично као у доказу теореме 3.14, узимајући у теореми 2.12 да је $\Omega_1 = \mathbb{U}$ и $\Omega_2 = \mathbb{K}$, добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{K}}(f(z), f(0)) &\leqslant \log(\cosh d_{\mathbb{U}}(z,0) + |f^h(0)| \sinh d_{\mathbb{U}}(z,0)) \\ &= \log\left(\frac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2}\right), \end{aligned}$$

док на основу леме 2.4 важи

$$\log\left(\frac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2}\right) = d_{\mathbb{U}}(|z|\varphi_c(|z|), 0).$$

Отуда је

$$f(z) \in \overline{D}_{\mathbb{K}}\big(f(0), \lambda_{\mathbb{U}}\big(|z|\varphi_c(|z|)\big)\big). \tag{3.46}$$

Коначно, из (3.46), на основу пропозиције 2.10, имамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$u(z) \in \left[\frac{1-|z|\varphi_c(|z|)}{1+|z|\varphi_c(|z|)} u(0), \frac{1+|z|\varphi_c(|z|)}{1-|z|\varphi_c(|z|)} u(0)\right], \tag{3.47}$$

а како је $\dfrac{1+|z|\varphi_c(|z|)}{1-|z|\varphi_c(|z|)} = \dfrac{1+|z|^2+2c|z|}{1-|z|^2}$, следи да је (3.47) еквивалентно са (3.45). □

Напомена 3.8. *Како за* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{U}, (0, +\infty))$ *на основу последице 3.3 важи*

$$|\nabla u(0)| \leqslant 2u(0),$$

следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} + \frac{|\nabla u(0)|}{u(0)} \frac{|z|}{1-|z|^2} \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{3.48}$$

и

$$\left(\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}+\frac{|\nabla u(0)|}{u(0)}\frac{|z|}{1-|z|^2}\right)^{-1}\geqslant\frac{1-|z|}{1+|z|}. \tag{3.49}$$

При томе, у (3.48) и (3.49) важе одговарајуће једнакости за свако $z\in\mathbb{U}$ *ако и само ако је* $|\nabla u(0)|=2u(0)$. *Дакле, можемо закључити да се неједнакости (3.45) своде на неједнакости (3.44) ако и само ако је* $u=\operatorname{Re}f$, *при чему је* $f\in\operatorname{Isom}(\mathbb{U},\mathbb{S})$. *Иначе, неједнакости (3.45) дају боље оцене од неједнакости (3.44).*

Глава 4

Шварцова лема и оцене Шварц-Пиковог типа за HQR пресликавања

4.1 Нека својства хиперболичке метрике

У овој секцији формулисаћемо и доказаћемо нека својства хиперболичке метрике на хиперболичким доменима у $\mathbb{C}$, која ћемо користити за проучавање оцена Шварц-Пиковог типа за хармонијска квазирегуларна и хармонијска квазиконформна пресликавања.

Пропозиција 4.1. *Нека је $c > 0$ и нека су Ω_1 и Ω_2 произвољни хиперболички домени у $\mathbb{C}$ и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ пресликавање које је класе C^1.*

а) Ако за свако $z \in \Omega_1$ важи

$$\rho_{\Omega_2}(f(z))\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) \leqslant c\rho_{\Omega_1}(z),$$

онда за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ важи $\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \leqslant c\ell_{\Omega_1}(\gamma)$.

б) Ако за свако $z \in \Omega_1$ важи

$$\rho_{\Omega_2}(f(z))\big||f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big| \geqslant c\rho_{\Omega_1}(z),$$

онда за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ важи $\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \geqslant c\ell_{\Omega_1}(\gamma)$.

Доказ.

а) Нека је $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ произвољна C^1 крива. Тада је $f \circ \gamma$ једна C^1 крива у Ω_2 и на основу дефиниције хиперболичке дужине C^1 криве важи

$$\begin{aligned}
\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) &= \int_{f\circ\gamma} \rho_{\Omega_2}(w)|dw| \\
&= \int_0^1 \rho_{\Omega_2}(f(\gamma(t)))|f_z(\gamma(t))\gamma'(t) + f_{\overline{z}}(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}|dt.
\end{aligned}$$

Отуда, како за свако $t \in [0,1]$ важи

$$|f_z(\gamma(t))\gamma'(t) + f_{\overline{z}}(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}| \leqslant \big(|f_z(\gamma(t))| + |f_{\overline{z}}(\gamma(t))|\big)|\gamma'(t)|,$$

и како на основу претпоставке теореме за свако $z \in \Omega_1$ важи

$$\rho_{\Omega_2}(f(z))\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) \leqslant c\rho_{\Omega_1}(z),$$

следи

$$\begin{aligned}
\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) &\leqslant \int_0^1 \rho_{\Omega_2}(f(\gamma(t)))\big(|f_z(\gamma(t))| + |f_{\overline{z}}(\gamma(t))|\big)|\gamma'(t)|dt \\
&\leqslant c\int_0^1 \rho_{\Omega_1}(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \\
&= c\ell_{\Omega_1}(\gamma).
\end{aligned}$$

б) Доказује се аналогно као део а).

□

Пропозиција 4.2. *Нека је $c > 0$ и нека су Ω_1 и Ω_2 произвољни хиперболички домени у $\mathbb{C}$ и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ пресликавање које је класе C^1. Ако за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ важи*

$$\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \leqslant c\ell_{\Omega_1}(\gamma),$$

онда за сваке две тачке $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи

$$d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant cd_{\Omega_1}(z_1, z_2).$$

Доказ. Нека је $\gamma_0 : [0,1] \to \Omega_1$ геодезијска линија чије су крајње тачке z_1 и z_2. Тада на основу дефиниције хиперболичког растојања и пропозиције 4.1 важи

$$d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma_0) \leqslant c\ell_{\Omega_1}(\gamma_0) = cd_{\Omega_1}(z_1, z_2).$$

□

Пропозиција 4.3. *Нека је $c > 0$ и нека су Ω_1 и Ω_2 произвољни хиперболички домени у $\mathbb{C}$ и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ пресликавање које је „1-1” и „НА” и класе C^1. Ако за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ важи*

$$\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \geqslant c\ell_{\Omega_1}(\gamma),$$

онда за сваке две тачке $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи

$$d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) \geqslant cd_{\Omega_1}(z_1, z_2).$$

Доказ. Нека је $\Gamma_0 : [0,1] \to \Omega_2$ геодезијска линија чије су крајње тачке $f(z_1)$ и $f(z_2)$ и нека је $\gamma_0 = f^{-1} \circ \Gamma_0$. Тада на основу дефиниције хиперболичког растојања и пропозиције 4.1 важи

$$d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) = \ell_{\Omega_2}(\Gamma_0) = \ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma_0) \geqslant c\ell_{\Omega_1}(\gamma_0) \geqslant cd_{\Omega_1}(z_1, z_2).$$

□

4.2 Шварц-Пикова лема за HQR пресликавања

Најпре ћемо формулисати и доказати верзију Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања чији је домен јединични диск $\mathbb{U}$, а кодомен појас $\mathbb{S}$ или полураван $\mathbb{K}$. Напоменимо да се, због специфичних својстава појаса $\mathbb{S}$ и полуравни $\mathbb{K}$, ова теорема може доказати (тај доказ и приказујемо на овом месту) коришћењем метода појаса и полуравни који је детаљно описан у глави 3 ове дисертације (видети и радове [56] и [62]).

Теорема 4.1. *Нека је* $K \geqslant 1$ *и* $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \Omega)$, *при чему је* $\Omega = \mathbb{S}$ *или* $\Omega = \mathbb{K}$. *Тада је*

а) $\rho_\Omega(f(z))\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) \leqslant K\rho_{\mathbb{U}}(z)$, *за свако* $z \in \mathbb{U}$;

б) $\ell_\Omega(f \circ \gamma) \leqslant K\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$, *за сваку* C^1 *криву* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$;

в) $d_\Omega(f(z_1), f(z_2)) \leqslant K d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$, *за свако* $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Неједнакост под а) јесте оштра у следећем смислу: Постоји $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \Omega)$ *такво да за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи* $\rho_\Omega(f(z))\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) = K\rho_{\mathbb{U}}(z)$.

Неједнакост под в), за $\Omega = \mathbb{S}$, *јесте оштра у следећем смислу: За свако* $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ *постоји* $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$, *које зависи од* z_1 *и* z_2, *такво да је* $d_{\mathbb{S}}(f(z_1), f(z_2)) = K d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$.

Доказ.

а) Нека је $u = \operatorname{Re} f$. Тада је $u : \mathbb{U} \to (-1, 1)$ (за $\Omega = \mathbb{S}$), односно $u : \mathbb{U} \to (0, +\infty)$ (за $\Omega = \mathbb{K}$) хармонијска функција и на основу теореме 3.6, односно теореме 3.7, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\rho_\Omega(u(z))|\nabla u(z)| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(z)$. Даље, нека је $z \in \mathbb{U}$ произвољна тачка. Како је $\rho_\Omega(f(z)) = \rho_\Omega(u(z))$ и како на основу пропозиције 1.4 важи неједнакост $\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) \leqslant K|\nabla u(z)|$, следи да је $\rho_\Omega(f(z))\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) \leqslant K\rho_{\mathbb{U}}(z)$.

б) Следи на основу дела а) и пропозиције 4.1.

в) Следи на основу дела б) и пропозиције 4.2.

Докажимо сада да је неједнакост под а) оштра у наведеном смислу. Нека су A_K и B_K пресликавања дефинисана у примерима 1.4 и 1.5 и нека је $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \Omega)$ произвољан. Тада на основу пропозиције 1.6 важи да је $f = A_K \circ g \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ (ако је $\Omega = \mathbb{S}$), односно $f = B_K \circ g \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{K})$ (ако је $\Omega = \mathbb{K}$). За тако дефинисано пресликавање f непосредним рачунањем проверава се да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)| = K|\nabla \operatorname{Re} f(z)|. \tag{4.1}$$

Из (4.1) на основу теорема 3.6 и 3.7 за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho_\Omega(f(z))\big(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\big) = K\rho_{\mathbb{U}}(z).$$

Докажимо и да је, за $\Omega = \mathbb{S}$, неједнакост под в) оштра у наведеном смислу. Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ такви да је $z_1 \neq z_2$ и нека $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ дефинисана са $g(z) = e^{-i\arg\varphi_{-z_1}(z_2)}\varphi_{-z_1}(z)$.

Пресликавање f дефинишемо на следећи начин:

$$f = A_K \circ \phi \circ ig,$$

при чему су пресликавања ϕ и A_K дефинисана у примерима 2.4 и 1.4, респективно.

На основу пропозиције 1.6 пресликавање f припада $\mathrm{HQR}_K(\mathbb{U},\mathbb{S})$, а непосредним рачунањем може се проверити да важи

$$d_{\mathbb{S}}(f(z_1), f(z_2)) = K d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2).$$

На крају напоменимо да ако су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ такви да је $z_1 = z_2$ онда тривијално следи да је, за $\Omega = \mathbb{S}$, неједнакост под в) оштра у наведеном смислу. $\square$

Наредна теорема јесте један од главних резултата рада [39] из 2007. године чији су аутори М. Кнежевић и М. Матељевић. Напоменимо да је овај рад имао великог утицаја на даља истраживања у овој области. Ова теорема може се сматрати верзијом Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања која пресликавају јединични диск $\mathbb{U}$ у себе.

Теорема 4.2. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U},\mathbb{U})$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\rho_{\mathbb{U}}(f(z))\left(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\right) \leqslant K\rho_{\mathbb{U}}(z).$$

Доказ. Нека је $\sigma : \mathbb{U} \to [0, +\infty)$ дефинисана са $\sigma(z) = \rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f_z(z)|$. Тада је $\sigma(z)|dz|$ конформна семиметрика на $\mathbb{U}$. Најпре ћемо, користећи само чињеницу да је пресликавање f хармонијско, доказати да за свако $z \in \mathbb{U}$ такво да је $\sigma(z) \neq 0$ (што је еквивалентно са $f_z(z) \neq 0$) важи

$$K_\sigma(z) \leqslant -(1 - |\mu_f(z)|)^2,$$

при чему су, подсетимо се, K_σ Гаусова кривина конформне семиметрике $\sigma(z)|dz|$ и μ_f комплексна дилатација функције f. Како је $K_\sigma(z) = -\dfrac{\Delta[\log\circ\sigma](z)}{\sigma^2(z)}$ прво ћемо одредити $\Delta[\log\circ\sigma](z)$. Нека је $z \in \mathbb{U}$ такво да је $\sigma(z) \neq 0$. Тада важи

$$\Delta[\log\circ\sigma](z) = \Delta[\log\circ(\rho_{\mathbb{U}}\circ f)](z) + \Delta[\log\circ|f_z|](z). \tag{4.2}$$

Како је пресликавање f хармонијско на $\mathbb{U}$ следи да је пресликавање f_z холоморфно на $\mathbb{U}$, па је и функција $\log\circ|f_z|$ хармонијска на $\mathbb{U}$, тј. $\Delta[\log\circ|f_z|](z) = 0$. Отуда, из (4.2) следи

$$\Delta[\log\circ\sigma](z) = \Delta[\log\circ(\rho_{\mathbb{U}}\circ f)](z).$$

Непосредним рачунањем добијамо

$$\begin{aligned}
\Delta[\log\circ(\rho_{\mathbb{U}}\circ f)](z) &= 4\cdot\big(\log\circ(\rho_{\mathbb{U}}\circ f)\big)_{z\overline{z}}(z)\\
&= \frac{4\Big(|f_z(z)|^2 + |f_{\overline{z}}(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big(f_z(z)f_{\overline{z}}(z)\overline{f(z)}^2\big)\Big)}{\big(1-|f(z)|^2\big)^2}.
\end{aligned}$$

Отуда је

$$\begin{aligned}
K_\sigma(z) &= -\frac{1}{|f_z(z)|^2}\cdot\Big(|f_z(z)|^2 + |f_{\overline{z}}(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big(f_z(z)f_{\overline{z}}(z)\overline{f(z)}^2\big)\Big)\\
&= -\left(1 + |\mu_f(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{f_z(z)f_{\overline{z}}(z)\overline{f(z)}^2}{|f_z(z)|^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

С друге стране, како је

$$\left|\mathrm{Re}\,\frac{f_z(z)f_{\overline{z}}(z)\overline{f(z)}^2}{|f_z(z)|^2}\right| \leqslant \left|\frac{f_z(z)f_{\overline{z}}(z)\overline{f(z)}^2}{|f_z(z)|^2}\right| = |\mu_f(z)||\overline{f(z)}|^2 \leqslant |\mu_f(z)|,$$

добијамо

$$\mathrm{Re}\,\frac{f_z(z)f_{\overline{z}}(z)\overline{f(z)}^2}{|f_z(z)|^2} \geqslant -|\mu_f(z)|. \tag{4.4}$$

Сада из (4.3) и (4.4) следи

$$K_\sigma(z) \leqslant -(1+|\mu_f(z)|^2 - 2|\mu_f(z)|) = -(1-|\mu_f(z)|)^2. \tag{4.5}$$

Како је пресликавање f и $K-$квазирегуларно на $\mathbb{U}$, на основу пропозиције 1.5 следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ такво да је $f_z(z) \neq 0$ важи $|\mu_f(z)| \leqslant k$, при чему је $k = \dfrac{K-1}{K+1}$. Нека је $\tau(z) = (1-k)\sigma(z)$. Тада је $\tau(z)|dz|$ конформна семиметрика на $\mathbb{U}$, па на основу леме 2.6 и неједнакости (4.5) за свако $z \in \mathbb{U}$ такво да је $f_z(z) \neq 0$ важи

$$K_\tau(z) = \frac{1}{(1-k)^2}K_\sigma(z) \leqslant -\left(\frac{1-|\mu_f(z)|}{1-k}\right)^2 \leqslant -1. \tag{4.6}$$

Даље, на основу Алфорсове леме (теорема 2.16) из (4.6) добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$(1-k)\rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f_z(z)| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(z),$$

тј.

$$\rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f_z(z)| \leqslant \frac{1}{1-k}\rho_{\mathbb{U}}(z). \tag{4.7}$$

Коначно, како за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_{\overline{z}}(z)| \leqslant k|f_z(z)|$ и како је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$ из (4.7) следи да, за свако $z \in \mathbb{U}$, важи

$$\rho_{\mathbb{U}}(f(z))\left(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\right) \leqslant (1+k)\rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f_z(z)| \leqslant \frac{1+k}{1-k}\rho_{\mathbb{U}}(z) = K\rho_{\mathbb{U}}(z),$$

што је и требало доказати. □

Последица 4.1. *Нека је* $K \geqslant 1$ *и* $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U},\mathbb{U})$. *Тада за сваку* C^1 *криву* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ *важи* $\ell_{\mathbb{U}}(f\circ\gamma) \leqslant K\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$.

Доказ. Тврђење непосредно следи из пропозиције 4.1 и теореме 4.2. □

Последица 4.2. *Нека је* $K \geqslant 1$ *и* $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U},\mathbb{U})$. *Тада за свако* $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ *важи* $d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant Kd_{\mathbb{U}}(z_1,z_2)$.

Доказ. Тврђење непосредно следи из пропозиције 4.2 и последице 4.1. □

У свом раду [18] из 2010. године К. Чен и А. Фанг уопштили су теорему 4.2. Наиме, они су коришћењем истог метода доказа као и М. Кнежевић и М. Матељевић у раду [39] и карактеризације конвексних хиперболичких домена преко хиперболичке метрике тог домена, коју је дао Р. Хармелин у раду [23] из 1990. године, доказали да теорема 4.2 важи и у случају да је кодомен одговарајућег пресликавања произвољан конвексан хиперболички домен. Наводимо сада теорему до које су дошли К. Чен и А. Фанг.

Теорема 4.3. *Нека је Ω конвексан хиперболички домен, $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \Omega)$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\rho_\Omega(f(z))\,(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|) \leqslant K\rho_{\mathbb{U}}(z).$$

Пре него што докажемо теорему 4.3 навешћемо, без доказа, већ поменути резултат Р. Хармелина који је од есенцијалног значаја за доказ ове теореме.

Теорема 4.4. *Хиперболички домен $\Omega \subset \mathbb{C}$ јесте конвексан ако и само ако за свако $z \in \Omega$ важи*

$$|(\log \circ \rho_\Omega)_z(z)| \leqslant \frac{\rho_\Omega(z)}{2}. \tag{4.8}$$

Осим тога, ако за свако $z \in \Omega$ важи (4.8), онда за свако $z \in \Omega$ важи и

$$|(\log \circ \rho_\Omega)_{zz}(z)| \leqslant \frac{\rho_\Omega^2(z)}{4}.$$

Доказ теореме 4.3. Доказ је аналоган доказу теореме 4.2 уз модификацију делова који се односе на дефиницију конформне семиметрике $\sigma(z)|dz|$ и на доказ неједнакости

$$K_\sigma(z) \leqslant -(1 - |\mu_f(z)|)^2,$$

при чему је $z \in \mathbb{U}$ такво да је $\sigma(z) \neq 0$ (што је еквивалентно са $f_z(z) \neq 0$). Дакле, нека је $\sigma : \mathbb{U} \to [0, +\infty)$ дефинисана са $\sigma(z) = \rho_\Omega(f(z))|f_z(z)|$. Исто као у доказу теореме 4.2, добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ такво да је $f_z(z) \neq 0$ важи

$$\Delta[\log \circ \sigma](z) = \Delta[\log \circ (\rho_\Omega \circ f)](z). \tag{4.9}$$

Нека је $z \in \mathbb{U}$ такво да је $f_z(z) \neq 0$. Непосредним рачунањем добијамо

$$\begin{aligned}
\Delta[\log \circ (\rho_\Omega \circ f)](z) &= 4\big((\log \circ \rho_\Omega) \circ f\big)_{z\overline{z}}(z) \\
&= 4\big((\log \circ \rho_\Omega)_{w\overline{w}}(f(z))\big) \cdot \big(|f_z(z)|^2 + |f_{\overline{z}}(z)|^2\big) \\
&+ 8\,\mathrm{Re}\Big(\big((\log \circ \rho_\Omega)_{ww}(f(z))\big) \cdot f_z(z) \cdot f_{\overline{z}}(z)\Big)
\end{aligned}$$

и отуда на основу (4.9) и дефиниције Гаусове кривине конформне семиметрике $\sigma(z)|dz|$, следи

$$\begin{aligned}
-K_{\sigma(z)} &= \frac{4\big((\log \circ \rho_\Omega)_{w\overline{w}}(f(z))\big)}{\rho_\Omega^2(f(z))} \cdot \left(\frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\overline{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2}\right) \\
&\quad + 8\,\mathrm{Re}\left(\frac{(\log \circ \rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))} \cdot \frac{f_z(z) \cdot f_{\overline{z}}(z)}{|f_z(z)|^2}\right) \\
&= -K_{\rho_\Omega}(f(z)) \cdot (1 + |\mu_f(z)|^2) \\
&\quad + 8\,\mathrm{Re}\left(\frac{(\log \circ \rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))} \cdot \frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Како је

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Re}\left(\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\cdot\frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\right| &\leqslant \left|\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\cdot\frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right|\\ &= \left|\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\right|\cdot|\mu_f(z)|,\end{aligned}$$

на основу теореме 4.4 следи

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\cdot\frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\right|\leqslant\frac{|\mu_f(z)|}{4},$$

па је

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\cdot\frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\geqslant-\frac{|\mu_f(z)|}{4}. \tag{4.11}$$

Коначно, на основу (4.10) и (4.11) (узимајући у обзир и да на основу пропозиције 2.16 важи $K_{\rho_\Omega}(f(z))=-1$) добијамо

$$K_\sigma(z)\leqslant-(1-|\mu_f(z)|)^2.$$

□

Приметимо да је теорема 4.3 општија од дела а) теореме 4.1, као и теореме 4.2. Штавише, како су $\mathbb{S}$, $\mathbb{K}$ и $\mathbb{U}$ конвексни хиперболички домени следи да су део а) теореме 4.1 и теорема 4.2 непосредне последице теореме 4.3. Осим тога, имамо и следеће две последице теореме 4.3.

Последица 4.3. *Нека је Ω конвексан хиперболички домен, $K\geqslant1$ и $f\in\mathrm{HQR}_K(\mathbb{U},\Omega)$. Тада за сваку C^1 криву $\gamma:[0,1]\to\mathbb{U}$ важи $\ell_\Omega(f\circ\gamma)\leqslant K\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.1 и теореме 4.3. □

Последица 4.4. *Нека је Ω конвексан хиперболички домен, $K\geqslant1$ и $f\in\mathrm{HQR}_K(\mathbb{U},\Omega)$. Тада за свако $z_1,z_2\in\mathbb{U}$ важи $d_\Omega(f(z_1),f(z_2))\leqslant Kd_{\mathbb{U}}(z_1,z_2)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.2 и последице 4.3. □

Уместо јединичног диска $\mathbb{U}$ домен пресликавања на која се односе теореме 4.1, 4.2 и 4.3 може бити и произвољан хиперболички домен. Наиме, важи следећа теорема и њене две непосредне последице.

Теорема 4.5. *Нека су $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{C}$ хиперболички домени, при чему је Ω_2 конвексан, $K\geqslant1$ и $f\in\mathrm{HQR}_K(\Omega_1,\Omega_2)$. Тада за свако $z\in\Omega_1$ важи*

$$\rho_{\Omega_2}(f(z))\,(|f_z(z)|+|f_{\overline{z}}(z)|)\leqslant K\rho_{\Omega_1}(z). \tag{4.12}$$

Доказ. Нека су $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}, \Omega_1)$ и $h = f \circ g$. На основу пропозиције 1.6 важи да је $h \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \Omega_2)$. Даље, нека је $z \in \Omega_1$ произвољна. Тада је $z = g(w)$ за неко $w \in \mathbb{U}$ и на основу теореме 4.3 важи

$$\rho_{\Omega_2}(h(w)) \left(|h_w(w)| + |h_{\overline{w}}(w)|\right) \leqslant K \rho_{\mathbb{U}}(w).$$

Отуда, како је

$$h_w(w) = f_z(g(w)) \cdot g'(w)$$

и

$$h_{\overline{w}}(w) = f_{\overline{z}}(g(w)) \cdot \overline{g'(w)}$$

добијамо

$$\rho_{\Omega_2}(f(z)) \left(|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|\right) |g'(g^{-1}(z))| \leqslant K \rho_{\mathbb{U}}(g^{-1}(z)),$$

што је еквивалентно са (4.12). □

Последица 4.5. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени, при чему је Ω_2 конвексан, $K \geqslant 1$ и пресликавање $f \in \mathrm{HQR}_K(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ важи $\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \leqslant K \ell_{\Omega_1}(\gamma)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.1 и теореме 4.5. □

Последица 4.6. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени, при чему је Ω_2 конвексан, $K \geqslant 1$ и пресликавање $f \in \mathrm{HQR}_K(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада за за свако $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи $d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant K d_{\Omega_1}(z_1, z_2)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.2 и последице 4.5. □

Наредни пример показује да је у теоремама 4.3 и 4.5, а самим тим и у последицама 4.3, 4.4, 4.5 и 4.6, претпоставка да је кодомен одговарајућег пресликавања конвексан скуп битна и да се не може изоставити. Овај пример јесте модификација примера 4.1 из рада [18].

Пример 4.1 (Пресликавање које припада $\mathrm{HQR}_K(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ и за које неједнакост (4.12) није тачна за свако $z \in \mathbb{P}$)**.**

Нека је $K \geqslant 1$ произвољно и нека је $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ дефинисано са $f(x,y) = Kx + iy$. Непосредно се проверава да $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ и да за свако $z \in \mathbb{P}$ важи $\|df(z)\| = K$. Даље, нека је $z = -1 + i$. Важи

$$\frac{\rho_{\mathbb{P}}(f(z))}{\rho_{\mathbb{P}}(z)} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} 1\right)}{\sqrt{K^2+1} \sin\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{K}\right)},$$

односно, ако је функција $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са $g(t) = \sqrt{t^2+1} \sin\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{t}\right)$, важи

$$\frac{\rho_{\mathbb{P}}(f(z))}{\rho_{\mathbb{P}}(z)} = \frac{g(1)}{g(K)}. \tag{4.13}$$

Покажимо да је g строго опадајућа функција. Имамо да за свако $t \in [1, +\infty)$ важи

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \left(t \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)\right),$$

а како је

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right) < \frac{1}{2t},$$

следи да за свако $t \in [1, +\infty)$ важи $g'(t) < 0$, тј. функција g јесте строго опадајућа. Дакле, ако је $K > 1$ онда важи

$$\frac{g(1)}{g(K)} > 1.$$

Отуда, на основу (4.13) имамо

$$\rho_{\mathbb{P}}(f(z))\|df(z)\| = \rho_{\mathbb{P}}(f(z)) \cdot K > K\rho_{\mathbb{P}}(z).$$

Дакле, за пресликавање f није тачно да за свако $z \in \mathbb{P}$ важи

$$\rho_{\mathbb{P}}(f(z))\|df(z)\| \leqslant K\rho_{\mathbb{P}}(z).$$

4.3 Шварцова лема за HQR пресликавања

Можемо разматрати и верзије Шварцове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања. Наредна теорема, која је заједнички резултат аутора ове дисертације са ментором М. Матељевићем (видети теорему 8 у [62]), може се сматрати верзијом Шварцове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања која пресликавају $\mathbb{U}$ у $\mathbb{S}$.

Теорема 4.6. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ такво да важи $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} K \operatorname{artanh}|z|. \tag{4.14}$$

Неједнакост (4.14) јесте оштра у следећем смислу: За свако $z \in \mathbb{U}$ постоји функција (која зависи од z) $f_{[z]} \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ таква да је $f_{[z]}(0) = 0$ и $|f(z)| = \dfrac{4}{\pi} K \operatorname{artanh}|z|$.

Доказ. Нека $z \in \mathbb{U}$ произвољно. Узимајући у обзир да је $f(0) = 0$, на основу дела в) теореме 4.1 важи

$$d_{\mathbb{S}}(f(z), 0) \leqslant K d_{\mathbb{U}}(z, 0). \tag{4.15}$$

С друге стране, на основу пропозиције 2.8, важи

$$\frac{\pi}{2}|f(z)| = \frac{\pi}{2} d_e(f(z), 0) \leqslant d_{\mathbb{S}}(f(z), 0). \tag{4.16}$$

Коначно, како је $d_{\mathbb{U}}(z, 0) = 2 \operatorname{artanh}|z|$ из (4.15) и (4.16) следи (4.14).

Докажимо сада да је неједнакост (4.14) оштра у наведеном смислу.

Ако је $z \neq 0$, дефинишимо функцију $f_{[z]} : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ на следећи начин:

$$f_{[z]}(\zeta) = (A_K \circ \phi)(ie^{-i \arg z}\zeta),$$

при чему су пресликавања ϕ и A_K дефинисана у примерима 2.4 и 1.4, респективно.

На основу пропозиције 1.6 важи $f_{[z]} \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$, а јасно је да је $f_{[z]}(0) = 0$. Такође, за пресликавање $f_{[z]}$ важи

$$\begin{aligned} |f_{[z]}(z)| &= |(A_K \circ \phi)(ie^{-i \arg z} z)| = |(A_K \circ \phi)(i|z|)| \\ &= \left| -iK\frac{2}{\pi} \log \frac{1-|z|}{1+|z|} \right| = \frac{4}{\pi} K \operatorname{artanh} |z|. \end{aligned}$$

Ако је $z = 0$, онда тривијално следи да је неједнакост (4.14) оштра у наведеном смислу. □

У раду [35] из 2015. године М. Кнежевић доказао је верзију Шварцове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања која пресликавају $\mathbb{U}$ у $\mathbb{U}$ (видети и [36]). Ради се о следећој теореми.

Теорема 4.7. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ такво да важи $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant K|z|. \tag{4.17}$$

Пре него што прикажемо доказ теореме 4.7, формулисаћемо и доказаћемо једну лему која се односи на конвексне функције.

Лема 4.1. *Нека је $h : [0, 1) \to \mathbb{R}$ конвексна функција таква да је $h(0) = 0$. Тада за свако $\lambda \in [0, 1]$ и свако $t \in [0, 1)$ важи $h(\lambda t) \leqslant \lambda h(t)$.*

Доказ. Нека су $\lambda \in [0, 1]$ и $t \in [0, 1)$ произвољни. Како је функција h конвексна на $[0, 1)$ следи

$$h((1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot t) \leqslant (1 - \lambda) \cdot h(0) + \lambda \cdot h(t).$$

Отуда, како је $h(0) = 0$ следи $h(\lambda t) \leqslant \lambda h(t)$. □

Доказ теореме 4.7. Приметимо да је за свако $z \in \mathbb{U}$, такво да је $|z| \geqslant \dfrac{1}{K}$, неједнакост (4.17) тривијално задовољена. Претпоставимо зато да је $|z| < \dfrac{1}{K}$. На основу последице 4.2 важи

$$d_{\mathbb{U}}(f(z), 0) \leqslant K d_{\mathbb{U}}(z, 0),$$

односно

$$\log \frac{1 + |f(z)|}{1 - |f(z)|} \leqslant K \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \tag{4.18}$$

Нека је $h : [0, 1) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(t) = \log \dfrac{1+t}{1-t}$. Функција h јесте конвексна на $[0, 1)$, па на основу леме 4.1 за свако $t \in [0, 1)$ важи $h\left(\dfrac{1}{K}t\right) \leqslant \dfrac{1}{K}h(t)$. Отуда, како $K|z| \in [0, 1)$ добијамо $h(|z|) \leqslant \dfrac{1}{K}h(K|z|)$, односно

$$\log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \leqslant \frac{1}{K} \log \frac{1 + K|z|}{1 - K|z|}. \tag{4.19}$$

Даље, из (4.18) и (4.19) следи

$$\log \frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leqslant \log \frac{1+K|z|}{1-K|z|},$$

одакле добијамо (4.17). □

4.4 Квази-изометрије и HQC пресликавања

Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфно пресликавање које је „1-1" и „НА". Тада је, као што је добро познато, и $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ холоморфно пресликавање и кажемо да је f конформни изоморфизам области Ω_1 и Ω_2. Подсетимо се да скуп свих конформних изоморфизама области Ω_1 и Ω_2 обележавамо са $\operatorname{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$ (видети дефиницију 2.1). Осим тога, као што смо видели, на основу теореме 2.11 имамо да је свако $f \in \operatorname{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$ изоморфизам метричких простора (Ω_1, d_{Ω_1}) и (Ω_2, d_{Ω_2}), тј. за свако $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи $d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\Omega_1}(z_1, z_2)$.

Природно се поставља питање како се и да ли се малопре поновљена својства пресликавања која припадају скупу $\operatorname{Isom}(\Omega_1, \Omega_2)$, могу пренети или уопштити за пресликавања која припадају скупу $\mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$, при чему је $K \geqslant 1$.

Пре него што формулишемо и докажемо одговарајућа тврђења дефинисаћемо појам квази-изометрије.

Дефиниција 4.1. *Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) произвољни метрички простори и $C \geqslant 1$. За пресликавање $f : X \to Y$ кажемо да је $\left(C^{-1}, C\right)$ квази-изометрија ако је „НА" и ако за свако $x_1, x_2 \in X$ важи*

$$\frac{1}{C} d_X(x_1, x_2) \leqslant d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C d_X(x_1, x_2). \tag{4.20}$$

Наредна теорема која је један од главних резултата већ поменутог рада [39], заједно са теоремом 4.2 омогућиће нам да покажемо да је свако пресликавање које припада $\mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ једна квази-изометрија метричког простора $(\mathbb{U}, d_{\mathbb{U}})$ у себе.

Теорема 4.8. *Нека су $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\rho_{\mathbb{U}}(f(z)) \big| |f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)| \big| \geqslant \frac{1}{K} \rho_{\mathbb{U}}(z).$$

Доказ. На основу теореме 1.4 постоји $c > 0$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_z(z)| \geqslant c$.

Нека је, исто као и у доказу теореме 4.2 функција $\sigma : \mathbb{U} \to (0, +\infty)$ дефинисана са $\sigma(z) = \rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f_z(z)|$. Тада је $\sigma(z)|dz|$ конформна метрика на $\mathbb{U}$ и на основу доказа теореме 4.2 за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$K_\sigma(z) = -\left(1 + |\mu_f(z)|^2 + 2 \operatorname{Re} \frac{f_z(z) f_{\overline{z}}(z) \overline{f(z)}^2}{|f_z(z)|^2}\right). \tag{4.21}$$

Даље, како такође на основу доказа теореме 4.2, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\operatorname{Re} \frac{f_z(z) f_{\overline{z}}(z) \overline{f(z)}^2}{|f_z(z)|^2} \leqslant |\mu_f(z)|,$$

из (4.21) следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$K_\sigma(z) \geqslant -(1 + |\mu_f(z)|^2 + 2|\mu_f(z)|) = -(1 + |\mu_f(z)|)^2. \tag{4.22}$$

Нека су $k = \dfrac{K-1}{K+1}$ и $\tau(z) = (1+k)\sigma(z)$. Тада, како је $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, имамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|\mu_f(z)| \leqslant k$, па на основу леме 2.6 и (4.22) добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$K_\tau(z) = \frac{1}{(1+k)^2} K_\sigma(z) \geqslant -\frac{(1 + |\mu_f(z)|)^2}{(1+k)^2} \geqslant -\left(\frac{1+k}{1+k}\right)^2 = -1.$$

Даље, како за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_z(z)| \geqslant c$ (ова неједнакост је есенцијална у доказу) следи да је $\lim\limits_{|z| \to 1} \tau(z) = +\infty$, па на основу теореме 2.17, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $\tau(z) \geqslant \rho_{\mathbb{U}}(z)$, тј.

$$\rho_{\mathbb{U}}(f(z))|f_z(z)| \geqslant \frac{1}{1+k} \rho_{\mathbb{U}}(z). \tag{4.23}$$

Коначно, како за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_{\overline{z}}(z)| \leqslant k|f_z(z)|$ и $|f_{\overline{z}}(z)| < |f_z(z)|$ и како је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$ из (4.23) следи да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$\rho_{\mathbb{U}}(f(z))(|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|) \geqslant \rho_{\mathbb{U}}(f(z))(1-k)|f_z(z)| \geqslant \frac{1-k}{1+k} \rho_{\mathbb{U}}(z) = \frac{1}{K} \rho_{\mathbb{U}}(z),$$

што је и требало доказати. □

Последица 4.7. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада за сваку C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ важи $\ell_{\mathbb{U}}(f \circ \gamma) \geqslant \dfrac{1}{K} \ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.1 и теореме 4.8. □

Последица 4.8. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи $d_{\mathbb{U}}(f(z_1), f(z_2)) \geqslant \dfrac{1}{K} d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.3 и последице 4.7. □

Теорема 4.9. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$. Тада је f једна $\big(K^{-1}, K\big)$ квази-изометрија метричког простора $(\mathbb{U}, d_{\mathbb{U}})$ у себе.*

Доказ. Како је свако квазиконформно пресликавање и квазирегуларно пресликавање доказ директно следи из последица 4.2 и 4.8. □

Наредна теорема, која је резултат рада [35] (видети и [11, Проблем 3.28], [67, Теорема 3.3], [32], [36]), такође јесте последица теореме 4.8.

Теорема 4.10. *Нека је $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ такво да важи $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \geqslant \frac{1}{K} |z|. \tag{4.24}$$

Доказ. Приметимо да је за свако $z \in \mathbb{U}$ такво да је $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{K}$ неједнакост (4.24) тривијално задовољена. Претпоставимо зато да је $|f(z)| < \dfrac{1}{K}$. На основу последице 4.8 важи

$$d_{\mathbb{U}}(f(z),0) \geqslant \frac{1}{K} d_{\mathbb{U}}(z,0),$$

односно

$$\log\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \geqslant \frac{1}{K}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{4.25}$$

Нека је $h : [0,1) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(t) = \log\dfrac{1+t}{1-t}$. Функција h јесте конвексна на $[0,1)$, па на основу леме 4.1 за свако $t \in [0,1)$ важи $h\left(\dfrac{1}{K}t\right) \leqslant \dfrac{1}{K}h(t)$. Отуда, како је $K|f(z)| \in [0,1)$ добијамо $h\left(|f(z)|\right) \leqslant \dfrac{1}{K}h(K|f(z)|)$, односно

$$\log\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leqslant \frac{1}{K}\log\frac{1+K|f(z)|}{1-K|f(z)|}. \tag{4.26}$$

Даље, из (4.25) и (4.26) следи

$$\log\frac{1+|z|}{1-|z|} \leqslant \log\frac{1+K|f(z)|}{1-K|f(z)|},$$

одакле добијамо (4.24). □

Аналогно као што су уопштили теорему 4.2, К. Чен и А. Фанг у истом раду [18] уопштили су и теорему 4.8. Наводимо и то уопштење.

Теорема 4.11. *Нека је* Ω *конвексан хиперболички домен,* $K \geqslant 1$ *и* $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{U},\Omega)$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$\rho_\Omega(f(z))\big||f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big| \geqslant \frac{1}{K}\rho_{\mathbb{U}}(z).$$

Доказ. На основу теореме 1.4 постоји $c > 0$ такво да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|f_z(z)| \geqslant c$.

Доказ је аналоган доказу теореме 4.8 уз модификацију делова који се односе на дефиницију конформне метрике $\sigma(z)|dz|$ и на доказ неједнакости

$$K_\sigma(z) \geqslant -(1+|\mu_f(z)|)^2,$$

при чему $z \in \mathbb{U}$. Дакле, нека је $\sigma : \mathbb{U} \to (0,+\infty)$ дефинисана са $\sigma(z) = \rho_\Omega(f(z))|f_z(z)|$. На основу доказа теореме 4.3 имамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$-K_\sigma(z) = -K_{\rho_\Omega}(f(z))\cdot(1+|\mu_f(z)|^2) + 8\,\mathrm{Re}\left(\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\cdot\frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right) \tag{4.27}$$

и

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(\log\circ\rho_\Omega)_{ww}(f(z))}{\rho_\Omega^2(f(z))}\cdot\frac{f_{\overline{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right) \leqslant \frac{|\mu_f(z)|}{4}. \tag{4.28}$$

Отуда, на основу (4.27) и (4.28) (узимајући у обзир и да на основу пропозиције 2.16 важи $K_{\rho_\Omega}(f(z)) = -1$) добијамо да за свако $z \in \mathbb{U}$ важи

$$K_\sigma(z) \geqslant -(1 + |\mu_f(z)|)^2.$$

□

Уместо јединичног диска $\mathbb{U}$ домен пресликавања, на која се односе теореме 4.8 и 4.11, може бити и произвољан хиперболички домен. Наиме, важи следећа теорема и њене две непосредне последице.

Теорема 4.12. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени, при чему је Ω_2 конвексан, $K \geqslant 1$ и $f \in \mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада за свако $z \in \Omega_1$ важи*

$$\rho_{\Omega_2}(f(z))\big||f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big| \geqslant \frac{1}{K}\rho_{\Omega_1}(z). \tag{4.29}$$

Доказ. Доказ следи из теореме 4.11 аналогно као што доказ теореме 4.5 следи из теореме 4.3. □

Последица 4.9. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени, при чему је Ω_2 конвексан, $K \geqslant 1$ и пресликавање $f \in \mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада за сваку C^1 криву $\gamma : [0, 1] \to \Omega_1$ важи $\ell_{\Omega_2}(f \circ \gamma) \geqslant \dfrac{1}{K}\ell_{\Omega_1}(\gamma)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.1 и теореме 4.12. □

Последица 4.10. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени, при чему је Ω_2 конвексан, $K \geqslant 1$ и пресликавање $f \in \mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада за свако $z_1, z_2 \in \Omega_1$ важи $d_{\Omega_2}(f(z_1), f(z_2)) \geqslant \dfrac{1}{K}d_{\Omega_1}(z_1, z_2)$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из пропозиције 4.3 и последице 4.9. □

Наредни пример показује да је у теоремама 4.11 и 4.12, а самим тим и у последицама 4.9 и 4.10 претпоставка да је кодомен одговарајућег пресликавања конвексан скуп битна и да се не може изоставити. Овај пример јесте модификација примера 4.2 из рада [18].

Пример 4.2 (Пресликавање које припада $\mathrm{HQC}_K(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ и за које неједнакост (4.29) није тачна за свако $z \in \mathbb{P}$)**.**

Нека је $K \geqslant 1$ произвољно и нека је $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ дефинисано са $f(x, y) = \dfrac{1}{K}x + iy$. Непосредно се проверава да $f \in \mathrm{HQC}_K(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ и да за свако $z \in \mathbb{P}$ важи

$$|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)| = \frac{1}{K}.$$

Даље, нека је $z = -1 + i$. Важи

$$\frac{\rho_{\mathbb{P}}(f(z))}{\rho_{\mathbb{P}}(z)} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 1\right)}{\dfrac{\sqrt{K^2+1}}{K}\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} K\right)},$$

односно, ако је функција $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, *дефинисана са* $g(t) = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t} \sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right)$, *важи*

$$\frac{\rho_{\mathbb{P}}(f(z))}{\rho_{\mathbb{P}}(z)} = \frac{g(1)}{g(K)}. \tag{4.30}$$

Покажимо да је g *строго растућа функција. Имамо да за свако* $t \in [1, +\infty)$ *важи*

$$g'(t) = \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \left(-\frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right) \right),$$

а како је

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right) < \frac{t}{2},$$

следи да за свако $t \in [1, +\infty)$ *важи* $g'(t) > 0$, *тј. функција* g *јесте строго растућа. Дакле, ако је* $K > 1$ *онда важи*

$$\frac{g(1)}{g(K)} < 1.$$

Отуда, на основу (4.30) имамо

$$\rho_{\mathbb{P}}(f(z))\big||f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big| = \rho_{\mathbb{P}}(f(z)) \cdot \frac{1}{K} < \frac{1}{K}\rho_{\mathbb{P}}(z).$$

Дакле, за пресликавање f *није тачно да за свако* $z \in \mathbb{P}$ *важи*

$$\rho_{\mathbb{P}}(f(z))\big||f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|\big| \geqslant \frac{1}{K}\rho_{\mathbb{P}}(z).$$

Теорема 4.13. *Нека су* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *хиперболички домени, при чему је* Ω_2 *конвексан,* $K \geqslant 1$ *и* $f \in \mathrm{HQC}_K(\Omega_1, \Omega_2)$. *Тада је* f *једна* $\left(K^{-1}, K\right)$ *квази-изометрија метричког простора* (Ω_1, d_{Ω_1}) *у метрички простор* (Ω_2, d_{Ω_2}).

Доказ. Како је свако квазиконформно пресликавање и квазирегуларно пресликавање доказ директно следи из последица 4.6 и 4.10. □

Напоменимо да тврђења аналогна теореми 4.13 постоје и за хиперболичка хармонијска квазиконформна пресликавања јединичног диска $\mathbb{U}$ у себе (или општије за пресликавања из хиперболичке површи у хиперболичку површ). Та тематика изучавана је, на пример, у радовима [80], [49], [39], [37]. За дефиницију хиперболичких хармонијских пресликавања видети [76].

Глава 5

Растојање тачака и дужина криве у апсолутној равни

5.1 Апсолутна раван

У глави 2 навели смо дефиницију хиперболичке метрике на јединичном диску $\mathbb{U}$, а затим смо помоћу тог појма, онако како се то обично чини у литератури (видети рад [9] и књиге [3, 75, 7, 20, 41, 5, 59]), дефинисали хиперболичку дужину C^1 криве која припада $\mathbb{U}$ као и хиперболичко растојање две тачке које припадају $\mathbb{U}$.

С друге стране, појмови дужине дужи и растојања тачака уводе се и у апсолутној равни, а самим тим и у еуклидској и у хиперболичкој равни (видети [22, 46]).

У овом поглављу, које је засновано на радовима [61, 40], показујемо:

1) да се хиперболичко растојање тачака уведено у глави 2 поклапа (до на јединицу мере) са растојањем тачака у апсолутној равни, ако је модел те равни Поенкареов диск модел;

2) да се хиперболичка дужина C^1 криве уведена у глави 2 поклапа (до на јединицу мере) са дужином C^1 криве, ако је та дужина једнака супремуму дужина одговарајућих уписаних полигоналних линија у Поенкареовом диск моделу те равни.

Ради комплетности најпре наводимо дефиницију апсолутне равни (видети [27, 46]).

Апсолутну раван можемо дефинисати као уређену петорку $(\mathbb{A}, \mathfrak{L}, \mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ где су:

- $\mathbb{A}$ произвољан непразан скуп који називамо *раван* и чије елементе називамо *тачке*,
- $\mathfrak{L}$ скуп одређених подскупова скупа $\mathbb{A}$ чије елементе називамо *праве*,
- $\mathcal{I} \subset \mathbb{A} \times \mathfrak{L}$ релација коју називамо *инцидентно*,
- $\mathcal{B} \subset \mathbb{A}^3$ релација коју називамо *између* и
- $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2$ релација коју називамо *подударно* (уместо $((a,b),(c,d)) \in \mathcal{C}$ пишемо $(a,b) \cong (c,d)$)

и при томе важе аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности (Хилбертов систем аксиома).

Често се апсолутна раван обележава само са $\mathbb{A}$.

Појмови апсолутне равни које ћемо користити јесу и дуж и средиште дужи. Ради комплетности наводимо и њихове добро познате дефиниције. *Дуж* чије су крајње тачке a и b јесте $\{c \in \mathbb{A} : \mathcal{B}(a,c,b)\} \cup \{a,b\}$. У овој глави дуж чије су крајње тачке a и b обележаваћемо са $[a,b]$. Тачка $c \in \mathbb{A}$ јесте *средиште дужи* $[a,b]$ ако $c \in [a,b]$ и ако важи $(a,c) \cong (c,b)$.

5.2 $E-$модел и $H-$модел апсолутне равни

Познато је да модел апсолутне равни добијамо ако интерпретирамо елементе скупова $\mathbb{A}$ и $\mathfrak{L}$, као и основне релације $\mathcal{I}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ тако да буду задовољене аксиоме Хилбертовог система аксиома. У овој секцији дајемо кратак опис два модела апсолутне равни која називамо $E-$модел и $H-$модел. При томе, $E-$модел биће један модел еуклидске равни, а $H-$модел један модел хиперболичке равни.

У $E-$моделу узимамо да је $\mathbb{A} = \mathbb{C}$. Што се правих тиче, у $E-$моделу $l \subset \mathbb{C}$ јесте права ($E-$права) ако је l скуп решења (по z) неке једначине облика $\overline{a}z + a\overline{z} + c = 0$, при чему су $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и $c \in \mathbb{R}$.

Слично, у $H-$моделу узимамо да је $\mathbb{A} = \mathbb{U}$, а $l \subset \mathbb{U}$ јесте права ($H-$права) ако је l скуп оних решења (по z) неке једначине облика $cz\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + c = 0$ која припадају $\mathbb{U}$, при чему су $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ и $|a| > c$. Другим речима $l \subset \mathbb{U}$ јесте $H-$права ако је l пресек јединичног диска $\mathbb{U}$ и еуклидског круга ортогоналног на $\mathbb{T}$ или ако је l пресек јединичног диска $\mathbb{U}$ и еуклидске праве која садржи тачку 0.

Да бисмо комплетирали $E-$модел и $H-$модел, потребно је још да дамо интерпретације релација инцидентно, између и подударно. У оба модела за тачку a и праву l важи $(a,l) \in \mathcal{I}$ ако $a \in l$. Пре него што дамо интерпретацију релација између и подударно дајемо дефиницију изометрија у оба модела.

Фамилија изометрија у $E-$моделу (кратко $E-$изометрије) јесте фамилија свих пресликавања скупа $\mathbb{C}$ на себе облика

$$z \mapsto e^{i\theta}z + a \qquad \text{или} \qquad z \mapsto e^{i\theta}\overline{z} + a,$$

при чему $a \in \mathbb{C}$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

Фамилија изометрија у $H-$моделу (кратко $H-$изометрије) јесте фамилија свих пресликавања скупа $\mathbb{U}$ на себе облика

$$z \mapsto e^{i\theta}\varphi_a(z) \qquad \text{или} \qquad z \mapsto e^{i\theta}\varphi_a(\overline{z}),$$

при чему су $a \in \mathbb{U}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, а пресликавање φ_a дефинисано у глави 2 (видети дефиницију 2.2).

У оба модела кажемо да је тачка z између тачака z_1 и z_2 и пишемо $\mathcal{B}(z_1, z, z_2)$ ако у одговарајућем моделу постоји изометрија f таква да су $f(z)$, $f(z_1)$ и $f(z_2)$ реални бројеви и важи $0 = f(z_1) < f(z) < f(z_2)$. Такође, у оба модела за пар тачака (z_1, z_2) кажемо да је подударан пару тачака (w_1, w_2) и пишемо $(z_1, z_2) \cong (w_1, w_2)$ ако у одговарајућем моделу постоји изометрија f са својством $f(z_1) = w_1$ и $f(z_2) = w_2$.

Непосредно се проверава да су у оба модела, за овако интерпретиране основне појмове и релације, задовољене све аксиоме Хилбертовог система аксиома апсолутне равни. Приметимо још да је у $E-$моделу задовољена Плејферова аксиома паралелности, док је у $H-$моделу задовољена аксиома паралелности Бољај-Лобачевског (видети [22, 46]). Отуда, ова два модела као модели апсолутне равни нису изоморфна.

На крају приметимо да је $H-$модел, уствари, добро познати Поенкареов диск модел хиперболичке равни. Такође, приметимо да је f једна $H-$изометрија ако и само ако $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ или $\overline{f} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$.

5.3 Растојање у $E-$моделу и $H-$моделу апсолутне равни

Полазна тачка за одређивање експлицитне формуле за растојање тачака у $E-$моделу и у $H-$моделу јесте следећа теорема (видети теорему 4.3.Б у [22], као и [46, стр. 167 -172]).

Теорема 5.1. *Постоји растојање $d_{\mathrm{a}} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to [0, +\infty)$ које има следећа својства:*

а) ако су $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ такве да је $(a, b) \cong (c, d)$, онда је $d_{\mathrm{a}}(a, b) = d_{\mathrm{a}}(c, d)$;

б) ако су $a, b, c \in \mathbb{A}$ такве да је $\mathcal{B}(a, b, c)$, онда је $d_{\mathrm{a}}(a, c) = d_{\mathrm{a}}(a, b) + d_{\mathrm{a}}(b, c)$.

Штавише, ако неко растојање $d'_{\mathrm{a}} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to [0, +\infty)$ има својства а) и б), онда постоји $\lambda > 0$ такво са важи $d'_{\mathrm{a}} = \lambda d_{\mathrm{a}}$.

Растојање d_{a} назива се и растојање у апсолутној равни.

Како бисмо одредили интерпретације, односно одговарајуће формуле за функцију растојања d_{a} у $E-$моделу и у $H-$моделу, размотрићемо та два модела истовремено.

Обележимо са d_{e} (у случају $E-$модела), односно са d_{h} (у случају $H-$модела) растојање чију егзистенцију утврђује теорема 5.1. Нека су z_1 и z_2 две произвољне тачке у одговарајућем моделу. Тада постоји изометрија f из одговарајућег скупа изометрија таква да је $f(z_1) = 0$ и $f(z_2) = r$, при чему је $r \geqslant 0$ (у случају $H-$модела и $r < 1$). Тада, на основу својста а) у теореми 5.1, важи $d_{\mathrm{e}}(z_1, z_2) = d_{\mathrm{e}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\mathrm{e}}(0, r)$, односно $d_{\mathrm{h}}(z_1, z_2) = d_{\mathrm{h}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\mathrm{h}}(0, r)$. Отуда је за одређивање растојања d_{e} довољно одредити $d_{\mathrm{e}}(0, r)$ при чему је $r \geqslant 0$ произвољно, а за одређивање растојања d_{h} довољно је одредити $d_{\mathrm{h}}(0, r)$ при чему је $0 \leqslant r < 1$ произвољно. Ради лакшег обележавања уведимо ознаке $f_{\mathrm{e}}(r) = d_{\mathrm{e}}(0, r)$ и $f_{\mathrm{h}}(r) = d_{\mathrm{h}}(0, r)$. Дакле, растојања d_{e} и d_{h} јесу у потпуности одређена, редом, функцијама $f_{\mathrm{e}} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ и $f_{\mathrm{h}} : [0, 1) \to [0, +\infty)$.

Размотримо сада својства функција f_{e} и f_{h}. Пре свега, на основу својства б) исказаног у теореми 5.1 те функције јесу строго растуће. Осим тога имају и неко својство адитивности. Прецизније, важи следећа лема.

Лема 5.1. *Нека су $c_0 = 0 < a = c_1 < c_2 < \ldots < c_k = b < +\infty$ (у случају $E-$модела), односно $c_0 = 0 < a = c_1 < c_2 < \ldots < c_k = b < 1$ (у случају $H-$модела) такви да су парови тачака (c_0, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{k-1}, c_k) узајамно подударни у одговарајућем моделу. Тада важи $f_{\mathrm{e}}(b) = k f_{\mathrm{e}}(a)$ и $f_{\mathrm{h}}(b) = k f_{\mathrm{h}}(a)$.*

Доказ. Нека је $\mathrm{j} \in \{\mathrm{e}, \mathrm{h}\}$. Како су парови тачака (c_0, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{k-1}, c_k) узајамно подударни у одговарајућем моделу, на основу својства а) исказаног у теореми 5.1 следи

$$d_{\mathrm{j}}(c_0, c_1) = d_{\mathrm{j}}(c_1, c_2) = \ldots = d_{\mathrm{j}}(c_{k-1}, c_k). \tag{5.1}$$

С друге стране, на основу својства б) исказаног у теореми 5.1 важи

$$d_{\mathrm{j}}(0,b)=\sum_{l=1}^{k} d_{\mathrm{j}}(c_{l-1},c_l),$$

па узимајући у обзир (5.1) добијамо $d_{\mathrm{j}}(0,b)=kd_{\mathrm{j}}(0,a)$. Дакле, $f_{\mathrm{j}}(b)=kf_{\mathrm{j}}(a)$. □

Нека је $r\in[0,+\infty)$ (у случају $E-$модела), односно $r\in[0,1)$ (у случају $H-$модела) фиксирано и нека је r_1 (у случају оба модела) такво да је r средиште дужи чије су крајње тачке 0 и r_1. При томе, ако је $r=0$ онда узимамо да је $r_1=0$. Тада важи следећа лема.

Лема 5.2. *У $E-$моделу важи $r_1=2r$, док у $H-$моделу важи* $r_1=\dfrac{2r}{1+r^2}$.

Доказ. Даћемо доказ у случају $H-$модела. У случају $E-$модела доказ је аналоган.

Јасно је да r припада $H-$дужи $[0,r_1]$. Дакле, потребно и довољно је још доказати да важи $(0,r)\cong(r,r_1)$, односно да постоји $H-$изометрија f таква да је $f(0)=r$ и $f(r)=\dfrac{2r}{1+r^2}$. Та $H-$изометрија јесте пресликавање φ_r. □

Даље, на основу леме 5.1 и леме 5.2 добијамо да за свако $r\in[0,+\infty)$ (у случају $E-$модела), односно за свако $r\in[0,1)$ (у случају $H-$модела) важи

(5.2) $$f_{\mathrm{e}}(2r)=2f_{\mathrm{e}}(r)$$

и

(5.3) $$f_{\mathrm{h}}\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)=2f_{\mathrm{h}}(r).$$

С друге стране, добро је познато да за свако $t\in[0,+\infty)$ важи $\tanh 2t=\dfrac{2\tanh t}{1+\tanh^2 t}$ и да функција g, дефинисана са $g(t)=\tanh t$, бијективно пресликава интервал $[0,+\infty)$ у интервал $[0,1)$. Дакле, ако у једнакости (5.3) уведемо смену $r=\tanh t$, при чему је $t\in[0,+\infty)$, добијамо да за свако $t\in[0,+\infty)$ важи

$$f_{\mathrm{h}}(\tanh 2t)=2f_{\mathrm{h}}(\tanh t).$$

Отуда, ако је

(5.4) $$\widetilde{f}_{\mathrm{h}}=f_{\mathrm{h}}\circ\tanh,$$

добијамо да за свако $t\in[0,+\infty)$ важи

(5.5) $$\widetilde{f}_{\mathrm{h}}(2t)=2\widetilde{f}_{\mathrm{h}}(t).$$

Дакле, на основу (5.2) и (5.5) закључујемо да функције f_{e} и $\widetilde{f}_{\mathrm{h}}$ задовољавају исту функционалну једначину, тј. функционалну једначину

(5.6) $$F(2t)=2F(t),$$

где је $F:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ непозната функција.

Непосредно се проверава да је за $c > 0$ функција $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ дефинисана са $F(t) = ct$ решење једначине (5.6). Међутим, није свако решење једначине (5.6) тог облика, чак уз додатне претпоставке да је непозната функција строго растућа и непрекидна. О томе ће више речи бити у наредној секцији.

Претпоставимо да за функцију $\widetilde{f}_{\mathrm{h}}$ и свако $t \in [0, +\infty)$ важи

$$\widetilde{f}_{\mathrm{h}}(t) = ct, \tag{5.7}$$

при чему је $c > 0$ нека константа. Тада, имајући у виду (5.4), добијамо да за свако $r \in [0, 1)$ важи

$$f_{\mathrm{h}}(r) = (\widetilde{f}_{\mathrm{h}} \circ \tanh^{-1})(r) = \frac{1}{2} c \log \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Ако су $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ различите онда за $H-$изометрију f дефинисану са

$$f(z) = e^{-i \arg \varphi_{-z_1}(z_2)} \varphi_{-z_1}(z)$$

важи $f(z_1) = 0$ и $f(z_2) = |\varphi_{-z_1}(z_2)|$. Отуда, имамо

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{h}}(z_1, z_2) &= d_{\mathrm{h}}(f(z_1), f(z_2)) \\ &= d_{\mathrm{h}}(0, |\varphi_{-z_1}(z_2)|) \\ &= f_{\mathrm{h}}\big(|\varphi_{-z_1}(z_2)|\big) \\ &= \frac{1}{2} c \log \frac{1 + |\varphi_{-z_1}(z_2)|}{1 - |\varphi_{-z_1}(z_2)|}. \end{aligned}$$

Имајући у виду дефиницију функције $d_{\mathbb{U}}$ (видети једнакост (2.16)), дефиницију 2.3 и теорему 2.9 добијамо да за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ важи

$$d_{\mathrm{h}}(z_1, z_2) = \frac{c}{2} \cdot d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2).$$

Како растојање $d_{\mathbb{U}}$ има својства а) и б) формулисана у теореми 5.1 следи да је претпоставка (5.7) била тачна.

Слично, ако претпоставимо да за функцију f_{e} и свако $t \in [0, +\infty)$ важи

$$f_{\mathrm{e}}(t) = ct,$$

при чему је $c > 0$ нека константа, онда за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи $d_{\mathrm{e}}(z_1, z_2) = c|z_1 - z_2|$.

Ако резимирамо претходна разматрања добијамо следећу теорему.

Теорема 5.2. *Растојање, чију егзистенцију и јединственост (до на мултипликативну константу) утврђује теорема 5.1 дато је са:*

а) (у $E-$моделу) $d_{\mathrm{e}}(z_1, z_2) = c|z_1 - z_2|$, при чему је $c > 0$ нека константа и $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ произвољне;

б) (у $H-$моделу) $d_{\mathrm{h}}(z_1, z_2) = \dfrac{1}{2} c \log \dfrac{1 + |\varphi_{-z_1}(z_2)|}{1 - |\varphi_{-z_1}(z_2)|}$, при чему је $c > 0$ нека константа и $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ произвољне.

Напоменимо да је за $c = 1$ растојање d_{e} уобичајено еуклидско растојање у $\mathbb{C}$, док за $c = 2$ растојање d_{h} јесте једнако растојању $d_{\mathbb{U}}$ које се још назива и Поенкареово растојање на јединичном диску $\mathbb{U}$.

5.4 Веза са функционалним једначинама

Размотримо сада детаљније функционалну једначину

$$F(2t) = 2F(t), \tag{5.8}$$

где је $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ непозната функција. Непосредно се показује да ако је функција F решење једначине (5.8) онда је $F(0) = 0$. Такође, непосредно се показује да је за константу $c > 0$ функција F дефинисана са $F(t) = ct$ решење једначине (5.8). Као што смо већ поменули нису сва решења једначине (5.8) тог облика, чак и ако претпоставимо да је непозната функција строго растућа и непрекидна. То показује следећи пример.

Пример 5.1. *Нека је* $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $b_n = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $I_n = [a_{n+1}, a_n]$ *и* $0 < c_1 < c < c_2$. *Тада је* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} I_n = (0, +\infty)$. *Дефинишимо функцију* $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *на следећи начин:* $F(0) = 0$, $F(a_n) = ca_n$ *и, за свако фиксирано* n, *рестрикција* F_n *функције* F *на* I_n *јесте полигонална линија са нагибом* c_1 *на* $[a_{n+1}, b_n]$ *и нагибом* c_2 *на* $[b_n, a_n]$.

Непосредно се проверава да је функција F *строго растућа, непрекидна, као и да задовољава једначину (5.8).*

Природно се постављају следећа питања:

1) Које додатне услове (изузев услова да је строго растућа и непрекидна) треба да задовољава функција која је решење једначине (5.8) како би та функција била јединствено (до на мултипликативну константу) решење те једначине?

2) Да ли ти услови следе из делова а) и б) теореме 5.1, тј. да ли функције f_{e} и $\widetilde{f}_{\mathrm{h}}$ задовољавају те услове?

Неке одговоре на та питања дају следеће две теореме.

Теорема 5.3. *Претпоставимо да функција* $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *има следећа својства:*

1° *F је строго растућа и непрекидна;*

2° $F(2t) = 2F(t)$, *за свако* $t \in [0, +\infty)$;

3° $F(3t) = 3F(t)$, *за свако* $t \in [0, +\infty)$.

Тада је $F(t) = ct$, *за свако* $t \in [0, +\infty)$, *при чему је* $c > 0$ *нека константа.*

Да бисмо доказали теорему 5.3 најпре ћемо формулисати и доказати једну лему.

Лема 5.3. *Скуп* $\{3^m 2^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ *јесте густ у* $[\,0, +\infty)$.

Доказ. Докажимо прво да је скуп $A = \{m \log 3 + n \log 2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ густ у $\mathbb{R}$.

Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољно и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је $A \subset \mathbb{R}$, потребно и довољно је доказати да у интервалу $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ постоји бар један елемент скупа A.

Претпоставимо прво да је $x_0 = 0$.

Нека је $k \in \mathbb{N}$ такво да је $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$. Посматрајмо следеће бројеве:

$$\log 3, \quad 2\log 3, \quad 3\log 3, \quad \ldots, \quad k\log 3, \quad (k+1)\log 3.$$

Постоје цели бројеви $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$ такви да $l\log 3 + n_l \log 2$ припада интервалу $[0,1)$ за свако $l \in \{1,2,\ldots,k,k+1\}$. Заиста, за свако $l \in \{1,2,\ldots,k,k+1\}$ постоји $d \in \mathbb{N}$ такво да је $l\log 3 - d\log 2 < 0$. Нека је d_0 најмање такво d. Тада је $n_l = -(d_0 - 1)$.

Нека је

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{k}\right), \quad I_2 = \left[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right), \quad \ldots, \quad I_k = \left[\frac{k-1}{k}, 1\right).$$

Постоји $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ такво да интервалу I_j припадају бар два од бројева

$$\log 3 + n_1 \log 2, \quad 2\log 3 + n_2\log 2, \quad \ldots, \quad k\log 3 + n_k \log 2, \quad (k+1)\log 3 + n_{k+1}\log 2.$$

Нека су то бројеви $p\log 3 + n_p \log 2$ и $q\log 3 + n_q\log 2$ и без умањења општости претпоставимо да важи $p\log 3 + n_p\log 2 > q\log 3 + n_q \log 2$.

Ако би било $p\log 3 + n_p \log 2 = q\log 3 + n_q\log 2$ онда би било $e^{p\log 3 + n_p\log 2} = e^{q\log 3 + n_q \log 2}$, односно $p = q$ и $n_p = n_q$.

Даље, како је дужина интервала I_j једнака $\dfrac{1}{k}$, важи:

$$0 < (p-q)\log 3 + (n_p - n_q)\log 2 < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Односно, ако уведемо ознаке $m = p - q$ и $n = n_p - n_q$, важи

$$0 < m\log 3 + n\log 2 < \varepsilon.$$

Претпоставимо да је $x_0 > 0$.

Нека су $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ такви да је $0 < m_0\log 3 + n_0 \log 2 < \varepsilon$. Тада постоји $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ такво да је

$$r(m_0\log 3 + n_0\log 2) \leqslant x_0 < (r+1)(m_0\log 3 + n_0\log 2).$$

Отуда важи

$$0 \leqslant x_0 - r(m_0\log 3 + n_0\log 2) < m_0\log 3 + n_0\log 2 < \varepsilon.$$

Односно, ако уведемо ознаке $m = rm_0$ и $n = rn_0$, важи

$$0 \leqslant x_0 - (m\log 3 + n\log 2) < \varepsilon.$$

Претпоставимо да је $x_0 < 0$.

Нека је $y_0 = -x_0$. Тада је $y_0 > 0$ и постоје бројеви $m', n' \in \mathbb{Z}$ такви да је

$$0 \leqslant y_0 - (m'\log 3 + n'\log 2) < \varepsilon.$$

Односно, ако уведемо ознаке $m = -m'$ и $n = -n'$, важи $-\varepsilon < x_0 - (m\log 3 + n\log 2) \leqslant 0$.

Како је функција $x \mapsto e^x$ хомеоморфизам скупова $\mathbb{R}$ и $(0,+\infty)$ следи да је скуп

$$\{e^a : a \in A\} = \{3^m 2^n \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$$

густ у $[0,+\infty)$.

$\square$

Доказ теореме 5.3. Из претпоставки 2° и 3° добијамо да за свака два цела броја m и n важи $F(3^m2^n) = 3^m2^nF(1)$. Нека је $G : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $G(t) = tF(1)$ и нека је $A = \{3^m2^n \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$. Тада за свако $t \in A$ важи $F(t) = G(t)$. Функција F је непрекидна на основу претпоставке 1°, а функција G је непрекидна на основу дефиниције. Како су непрекидне функције F и G идентички једнаке на скупу A, који је на основу леме 5.3 густ у $[0,+\infty)$, следи да за свако $t\in[0,+\infty)$ важи $F(t) = G(t) = tF(1)$. Коначно, како је на основу претпоставке 1° функција F строго растућа следи да је $c = F(1) > F(0) = 0$. $\square$

Може се проверити да функције f_{e} и $\widetilde{f}_{\mathrm{h}}$ задовољавају претпоставке теореме 5.3, тј. да та својства следе из делова а) и б) теореме 5.1.

Теорема 5.4. *Претпоставимо да функција $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ има следећа својства:*

1° $F(2t) = 2F(t)$, *за свако* $t \in [0, +\infty)$;

2° *други извод* F'' *постоји на* $[0, +\infty)$ *и непрекидан је у* 0.

Тада је $F(t) = ct$, *за свако* $t \in [0, +\infty)$, *при чему је* $c > 0$ *нека константа.*

Доказ. Из $F(2t) = 2F(t)$ следи да је $2F'(2t) = 2F'(t)$, односно $2F''(2t) = F''(t)$ за свако $t \in [0, +\infty)$. Отуда, за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $t \in [0, +\infty)$ важи $F''(t) = \dfrac{1}{2^n} F''\left(\dfrac{t}{2^n}\right)$. Преласком на граничну вредност, када $n \to +\infty$, добијамо $F''(t) = 0$, за свако $t \in [0, +\infty)$. Дакле, $F(t) = ct + c_0$, при чему су $c, c_0 \in \mathbb{R}$. Како је $F(0) = 0$, добијамо $F(t) = ct$, при чему је $c > 0$ нека константа. □

5.5 Дужина C^1 криве у $H-$моделу апсолутне равни

Добро је познато (видети на пример [73, стр. 136-137]) како се у $E-$моделу апсолутне равни одређује дужина криве $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Укратко, у $E-$моделу апсолутне равни најпре се дефинише $E-$дужина $E-$дужи као $E-$растојање њених крајњих тачака. Затим се дефинише $E-$дужина $E-$полигоналне линије као збир $E-$дужина $E-$дужи од којих се та $E-$полигонална линија састоји. Даље, ако је $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ подела интервала $[a, b]$ онда се тој подели и кривој γ придружује број

$$\ell_{\mathrm{e}}(P, \gamma) = \sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{e}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})),$$

тј. $E-$дужина $E-$полигоналне линије која се састоји од $E-$дужи

$$[\gamma(t_0), \gamma(t_1)], \quad \ldots, \quad [\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)].$$

Та $E-$полигонална линија сматра се апроксимацијом криве γ. Коначно, $E-$дужина криве γ (у ознаци $\ell_{\mathrm{e}}(\gamma)$) дефинише се на следећи начин:

$$\ell_{\mathrm{e}}(\gamma) = \sup_{P \in \Pi} \ell_{\mathrm{e}}(P, \gamma),$$

при чему је Π скуп свих подела интервала $[a, b]$.

Ако је $\ell_{\mathrm{e}}(\gamma) < +\infty$ онда кажемо да је крива γ $E-$ректифицијабилна. Показује се да ако за криву γ важи да је C^1 да је онда та крива и $E-$ректифицијабилна. Штавише, у том случају важи $\ell_{\mathrm{e}}(\gamma) = \displaystyle\int_\gamma |dz|$ (видети [73, Теорема 6.27]).

Подсетимо се да смо у глави 2 (видети једнакост (2.15)) хиперболичку дужину C^1 криве $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{U}$ (у ознаци $\ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$) дефинисали на следећи начин:

$$\ell_{\mathbb{U}}(\gamma) = \int_\gamma \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|.$$

У овој секцији дефинисаћемо $H-$дужину криве $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$, коју ћемо обележавати са $\ell_{\mathrm{h}}(\gamma)$, у $H-$моделу апсолутне равни аналогно као што се у $E-$моделу апсолутне равни дефинише $E-$дужина криве $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Штавише, показаћемо да за C^1 криву $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ важи $\ell_{\mathrm{h}}(\gamma) = \displaystyle\int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz|$, тј. $\ell_{\mathrm{h}}(\gamma) = \ell_{\mathbb{U}}(\gamma)$.

Нека је $\gamma : [a,b] \to \mathbb{U}$ једна крива и $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ подела интервала $[a,b]$. Аналогно као и у $E-$моделу апсолутне равни, кривој γ и подели P придружујемо број

$$\ell_{\mathrm{h}}(P,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})).$$

$H-$дужина криве γ (у ознаци $\ell_{\mathrm{h}}(\gamma)$) дефинише се на следећи начин:

$$\ell_{\mathrm{h}}(\gamma) = \sup_{P\in\Pi} \ell_{\mathrm{h}}(P,\gamma),$$

при чему је Π скуп свих подела интервала $[a,b]$.

Ако је $\ell_{\mathrm{h}}(\gamma) < +\infty$ онда кажемо да је крива γ $H-$ректифицијабилна.

Важи следећа теорема.

Теорема 5.5. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива. Тада је*

$$\ell_{\mathrm{h}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz|.$$

Теорему 5.5 доказаћемо тако што ћемо формулисати и доказати две пропозиције (видети пропозиције 5.1 и 5.2) и неколико лема.

Пропозиција 5.1. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива. Тада је*

$$\ell_{\mathrm{h}}(\gamma) \leqslant \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt. \tag{5.9}$$

Доказ. Нека је $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ подела интервала $[0,1]$, нека је за $j \in \{1,\ldots,n\}$ пресликавање $f_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ такво да је $f_j(\gamma(t_{j-1})) = 0$ и $f_j(\gamma(t_j)) \geqslant 0$ и нека је $\Gamma_j = f_j \circ \gamma$. Како је f_j $H-$изометрија добијамо

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) &= d_{\mathrm{h}}(f_j(\gamma(t_j)), f_j(\gamma(t_{j-1}))) \\ &= d_{\mathrm{h}}(\Gamma_j(t_j), 0) \\ &= \log\frac{1+|\Gamma_j(t_j)|}{1-|\Gamma_j(t_j)|} \\ &= \log\frac{1+\operatorname{Re}\Gamma_j(t_j)}{1-\operatorname{Re}\Gamma_j(t_j)} \\ &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{2\operatorname{Re}\Gamma_j'(t)}{1-(\operatorname{Re}\Gamma_j(t))^2}dt. \end{aligned} \tag{5.10}$$

На основу леме 2.3 важи

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{2\operatorname{Re}\Gamma_j'(t)}{1-(\operatorname{Re}\Gamma_j(t))^2}dt \leqslant \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{2|\Gamma_j'(t)|}{1-|\Gamma_j(t)|^2}dt, \tag{5.11}$$

док на основу теореме 2.6 важи

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{2|\Gamma_j'(t)|}{1-|\Gamma_j(t)|^2}dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt. \tag{5.12}$$

Дакле, из (5.10), (5.11) и (5.12) следи

$$\sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt,$$

тј.

$$\ell_{\mathrm{h}}(P,\gamma) \leqslant \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt. \tag{5.13}$$

Коначно, преласком на супремум по свим поделама интервала $[0,1]$ из (5.13) добијамо тврђење. $\square$

Приметимо да на основу пропозиције 5.1 непосредно следи да је свака C^1 крива $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ $H-$ректифицијабилна.

Како бисмо доказали теорему 5.5 потребно је доказати да у (5.9) важи и обратна неједнакост. У том циљу најпре ћемо формулисати и доказати неколико лема.

Лема 5.4. *Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ са својством да за свако $z \in \mathbb{U}$, такво да је $|z| < \delta$, важи $0 \leqslant d_{\mathrm{h}}(0,z) - 2|z| < \varepsilon|z|$.*

Доказ. Доказ непосредно следи из једнакости

$$d_{\mathrm{h}}(0,z) = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

и

$$\lim_{|z|\to 0} \frac{1}{|z|}\left(\log\frac{1+|z|}{1-|z|} - 2|z|\right) = 0.$$

$\square$

Пре него што формулишемо следећу лему поновићемо дефиницију параметра поделе.

Параметар поделе $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ интервала $[a,b]$ јесте

$$\lambda(P) = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |t_j - t_{j-1}|.$$

Лема 5.5. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна крива и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи*

$$\left|\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| < \varepsilon.$$

Доказ. Нека је m минимум функције $f(z,w) = |1-\overline{z}w|$ на компактном скупу $\operatorname{tr}\gamma \times \operatorname{tr}\gamma$. Јасно је да је $m > 0$. Како је γ униформно непрекидна на $[0,1]$ постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| < m\varepsilon$. Отуда за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи

$$\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| \leqslant \frac{1}{m}|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| < \varepsilon.$$

□

Лема 5.6. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна крива и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи*

$$0 \leqslant d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_{j-1}),\gamma(t_j)) - 2\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| < \varepsilon|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Доказ. Нека је m минимум функције $f(z,w) = |1-\overline{z}w|$ на компактном скупу $\operatorname{tr}\gamma \times \operatorname{tr}\gamma$. Јасно је да је $m > 0$. На основу леме 5.4 постоји $\delta_1 > 0$ са својством да за свако $z \in \mathbb{U}$, такво да је $|z| < \delta_1$, важи

$$0 \leqslant d_{\mathrm{h}}(0,z) - 2|z| < m\varepsilon|z|.$$

С друге стране, на основу леме 5.5, постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу

$$P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1,$$

интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи

$$\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| < \delta_1.$$

Отуда, за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ такву да је $\lambda(P) < \delta$ и за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{h}}\left(0,\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right|\right) - 2\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| \;&<\; m\varepsilon\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| \\
&\leqslant\; \frac{m\varepsilon}{m}|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\
&=\; \varepsilon|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.
\end{aligned}$$

Коначно, како је

$$d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_{j-1}),\gamma(t_j)) = d_{\mathrm{h}}\left(0,\left|\frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right|\right),$$

следи тврђење леме. □

Лема 5.7. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна крива. Тада постоји константа $M > 0$ таква да за свако $z,w \in \operatorname{tr}\gamma$ важи*

$$\left|\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| - \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}w}\right|\right| \leq M|z-w|^2.$$

Доказ. Нека су $z, w \in \operatorname{tr}\gamma$ произвољни. Тада важи

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| - \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}w}\right|\right| &= |z-w|\left|\left|\frac{1}{1-\overline{w}z}\right| - \left|\frac{1}{1-\overline{w}w}\right|\right| \\
&\leqslant |z-w|\left|\frac{1}{1-\overline{w}z} - \frac{1}{1-\overline{w}w}\right| \\
&= |z-w|^2\left|\frac{\overline{w}}{(1-\overline{w}z)(1-\overline{w}w)}\right| \\
&\leqslant M|z-w|^2,
\end{aligned}$$

при чему је M максимум функције $f(z,w) = \left|\dfrac{\overline{w}}{(1-\overline{w}z)(1-\overline{w}w)}\right|$ на компактном скупу $\operatorname{tr}\gamma \times \operatorname{tr}\gamma$. $\square$

Лема 5.8. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна крива и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи*

$$\left|\left|\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| - \left|\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_{j-1})}\right|\right| < \varepsilon|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|.$$

Доказ. Нека је M максимум функције $f(z,w) = \left|\dfrac{\overline{w}}{(1-\overline{w}z)(1-\overline{w}w)}\right|$ на компактном скупу $\operatorname{tr}\gamma \times \operatorname{tr}\gamma$. Како је γ униформно непрекидна на $[0,1]$ постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи $|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Отуда, на основу леме 5.7, за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)}\right| - \left|\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{1-\overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_{j-1})}\right|\right| &\leqslant M|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|^2 \\
&< M\frac{\varepsilon}{M}|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})| \\
&= \varepsilon|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|.
\end{aligned}$$

$\square$

Лема 5.9. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ и за свако $j \in \{1,\ldots,n\}$ важи*

$$\left|\frac{|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|}{1-|\gamma(t_{j-1})|^2} - \frac{|\gamma'(t_{j-1})|}{1-|\gamma(t_{j-1})|^2}(t_j-t_{j-1})\right| < \varepsilon(t_j-t_{j-1}).$$

Доказ. Нека је $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ произвољна подела интервала $[0,1]$. Тада је

$$\left|\frac{|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|}{1-|\gamma(t_{j-1})|^2} - \frac{|\gamma'(t_{j-1})|\cdot(t_j-t_{j-1})}{1-|\gamma(t_{j-1})|^2}\right| < \frac{|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})-\gamma'(t_{j-1})(t_j-t_{j-1})|}{1-|\gamma(t_{j-1})|^2}. \tag{5.14}$$

Даље, нека су $\alpha = \operatorname{Re}\gamma$ и $\beta = \operatorname{Im}\gamma$. На основу Лагранжове теореме о средњој вредности постоје $\xi_j, \eta_j \in (\, t_{j-1}, t_j)$ такви да је

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = (\alpha'(\xi_j) + i\beta'(\eta_j))(t_j - t_{j-1}). \tag{5.15}$$

Обележимо са M максимум функције $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$ на компактном скупу $\operatorname{tr}\gamma$. Како су α' и β' униформно непрекидне на $[0,1]$ следи да постоји $\delta > 0$ такво да за свако $t, s \in [0,1]$ и $|t-s| < \delta$ важи

$$|\alpha'(t) - \alpha'(s)| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{5.16}$$

и

$$|\beta'(t) - \beta'(s)| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{5.17}$$

Ако за поделу P важи $\lambda(P) < \delta$ онда, на основу (5.15), (5.16) и (5.17), важи

$$\begin{aligned} &|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})| \\ &= |(\alpha'(\xi_j) - \alpha'(t_{j-1}) + i(\beta'(\eta_j) - \beta'(t_{j-1}))|(t_j - t_{j-1}) \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right)(t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{M}(t_j - t_{j-1}). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Коначно, из (5.14) и (5.18) следи

$$\left| \frac{|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|}{1 - |\gamma(t_{j-1})|^2} - \frac{|\gamma'(t_{j-1})|}{1 - |\gamma(t_{j-1})|^2}(t_j - t_{j-1}) \right| < M\frac{\varepsilon}{M}(t_j - t_{j-1}) = \varepsilon(t_j - t_{j-1}).$$

□

На основу наредне пропозиције непосредно следи да у (5.9) важи и обратна неједнакост.

Пропозиција 5.2. *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ произвољна C^1 крива и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ важи*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) - \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \right| < \varepsilon.$$

Доказ. Нека је $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ произвољна подела интервала $[0,1]$. Тада је

$$\left| \sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) - \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \right| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|, \tag{5.19}$$

при чему је

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) - \sum_{j=1}^{n} \frac{2|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|}{|1 - \overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)|}, \\
I_2 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{2|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|}{|1 - \overline{\gamma(t_{j-1})}\gamma(t_j)|} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|}{1 - |\gamma(t_{j-1})|^2}, \\
I_3 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{2|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|}{1 - |\gamma(t_{j-1})|^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2|\gamma'(t_{j-1})|}{1 - |\gamma(t_{j-1})|^2}(t_j - t_{j-1}), \\
I_4 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{2|\gamma'(t_{j-1})|}{1 - |\gamma(t_{j-1})|^2}(t_j - t_{j-1}) - \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.
\end{aligned}$$

Како је γ C^1 крива следи да је γ $E-$ректифицијабилна, тј. $\ell_{\mathrm{e}}(\gamma) < +\infty$. Претпоставимо, додатно, да γ није константна функција. Тада је $\ell_{\mathrm{e}}(\gamma) > 0$. На основу лема 5.6, 5.8 и 5.9 и дефиниције одређеног интеграла постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу

$$P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

интервала $[0, 1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ важи

$$\begin{aligned}
|I_1| &< \frac{\varepsilon}{4\ell_{\mathrm{e}}(\gamma)} \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \\
|I_2| &< \frac{\varepsilon}{4\ell_{\mathrm{e}}(\gamma)} \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \\
|I_3| &< \frac{\varepsilon}{4} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{4} \\
|I_4| &< \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Коначно, из (5.19) и (5.20) следи да за сваку поделу $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0, 1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$ важи

$$\left| \sum_{j=1}^{n} d_{\mathrm{h}}(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) - \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \right| < \varepsilon.$$

□

Доказ теореме 5.5. Тврђење следи директно из пропозиције 5.1 и пропозиције 5.2. □

Литература

[1] L. V. Ahlfors. “An extension of Schwarz’s Lemma”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938), pp. 359–364.

[2] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1979.

[3] L. V. Ahlfors. *Conformal Invariants*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[4] L. V. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1966.

[5] J. W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag London, 2005.

[6] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] A. F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] A. F. Beardon and T. K. Carne. “A Strengthening of the Schwarz-Pick Inequality”. In: *Amer. Math. Monthly* 99 (1992), pp. 216–217.

[9] A.F. Beardon and D. Minda. “The hyperbolic metric and geometric function theory”. In: *Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications s (IWQCMA05)*. Ed. by S. Ponnusamy, T. Sugawa, and M. Vuorinen. 2007.

[10] H. P. Boas. “Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma”. In: *Amer. Math. Monthly* Vol. 117 No. 9 (November 2010), pp. 770–785.

[11] D. Bshouty and A. Lyzzaik. “Problems and Conjectures in Planar Harmonic Mappings”. In: *Proceedings of the ICM2010 Satellite Conference International Workshop on Harmonic and Quasiconformal Mappings (HQM2010)*. Ed. by D. Minda, S. Ponnusamy, and N. Shanmugalingam. 2010.

[12] R. B. Burckel. *An Introduction to Classical Complex Analysis, Vol. I.* Academic Press, New York, 1979.

[13] B. Burgeth. “A Schwarz Lemma for harmonic and hyperbolic-harmonic functions in higher dimensions”. In: *Manuscripta math.* 77 (1992), pp. 283–291.

[14] B. Burgeth. “Schwarz lemma type inequalities for harmonic functions in the ball”. In: *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Classical and Modem Potential Theory and Applications.* Ed. by K. GowriSankaran et al. 1994.

[15] C. Carathéodory. “Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten”. In: *Mathematische Annalen* 72 (1) (1912), pp. 107–144.

[16] H. H. Chen. “The Schwarz-Pick lemma and Julia lemma for real planar harmonic mappings”. In: *Sci. China Math.* Vol. 56 No. 11 (November 2013), pp. 2327–2334.

[17] H. H. Chen. "The Schwarz-Pick lemma for planar harmonic mappings". In: *Sci. China Math.* Vol. 54 No. 6 (June 2011), pp. 1101–1118.

[18] X. Chen and A. Fang. "A Schwarz-Pick inequality for harmonic quasiconformal mappings and its applications". In: *J. Math. Anal. Appl.* 369 (2010), pp. 22–28.

[19] F. Colonna. "The Bloch constant of bounded harmonic mappings". In: *Indiana Univ. Math. J.* 38 (1989), pp. 829–840.

[20] S. Dineen. *The Schwarz Lemma.* Clarendon Press Oxford, 1989.

[21] P. Duren. *Harmonic Mappings in the Plane.* Cambridge University Press, 2004.

[22] M. J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* W. H. Freeman and Company New York, 1994.

[23] R. Harmelin. "Hyperbolic metric, curvature of geodesics and hyperbolic discs in hyperbolic plane domains". In: *Israel Journal of Mathematics* Vol. 70, No. 1 (1990), pp. 111–128.

[24] A. Harnack. *Die Grundlagen der Theorie des Logarithmischen Potentiales und der Eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene.* 1887.

[25] E. Heinz. "On one-to-one harmonic mappings". In: *Pacific J. Math.* 9 (1959), pp. 101–105.

[26] H. W. Hethcote. "Schwarz lemma analogues for harmonic functions". In: *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* Vol. 8, No. 1 (1977), pp. 65–67.

[27] D. Hilbert. *The Foundations of Geometry.* The Open Court Publishing Co. La Salle Illinois, 1950.

[28] G. Julia. "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles". In: *J. Math. Pures Appl.* (8) 1 (1918), pp. 47–245.

[29] D. Kalaj. "A proof of Khavinson's conjecture in $\mathbb{R}^4$". In: *Bull. London Math. Soc.* 49 (2017), pp. 561–570.

[30] D. Kalaj. "On Harmonic Diffeomorphisms of the Unit Disc onto a Convex Domain". In: *Complex Variables* Vol. 48, No. 2 (2003), pp. 175–187.

[31] D. Kalaj. "On Harmonic Functions on Surfaces with Positive Gauss Curvature and the Schwarz Lemma". In: *Rocky Mountain Journal of Mathematics* Vol. 44, No. 5 (2014), pp. 175–187.

[32] D. Kalaj and M. Pavlović. "On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying Poisson's equation". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 363 no. 8 (2011), pp. 4043–4061.

[33] D. Kalaj and M. Vuorinen. "On harmonic functions and the Schwarz lemma". In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 140, no. 1 (2012), pp. 161–165.

[34] D. Khavinson. "An extremal problem for harmonic functions in the ball". In: *Canadian Math. Bulletin* 35(2) (1992), pp. 218–220.

[35] M. Knežević. "A Note on the Harmonic Quasiconformal Diffeomorphisms of the Unit Disc". In: *Filomat* 29:2 (2015), pp. 335–341.

[36] M. Knežević. "Harmonijska i kvazikonformna preslikavanja, kvazi-izometrije i krivina". Doctoral dissertation. University of Belgrade, Faculty of Mathematics, 2014.

[37] M. Knežević. “On the Theorem of Wan for $K-$Quasiconformal Hyperbolic Harmonic Self Mappings of the Unit Disk”. In: *Mathematica Moravica* Vol. 19-1 (2015), pp. 81–85.

[38] M. Knežević. “Some Properties of Harmonic Quasi-Conformal Mappings”. In: *Lie Theory and Its Applications in Physics, IX International Workshop*. Ed. by V. Dobrev. 2013.

[39] M. Knežević and M. Mateljević. “On the quasi-isometries of harmonic quasi-conformal mappings”. In: *J. Math. Anal. Appl.* 334(1) (2007), pp. 404–413.

[40] M. Knežević and M. Svetlik. “From the hyperbolic distance to the hyperbolic length”. manuscript.

[41] S. G. Krantz. *Geometric Function Theory*. Birkhäuser, 2006.

[42] G. Kresin and V. Maz'ya. *Maximum Principles and Sharp Constants for Solutions of Elliptic and Parabolic Systems*. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2012.

[43] H. Lewy. “On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings”. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 42 (10) (1936), pp. 689–692.

[44] C. Liu. “A proof of the generalized Khavinson conjecture”. In: *Mathematische Annalen* (2020).

[45] C. Liu. “Schwarz - Pick lemma for harmonic functions”. arXiv:2004.08894v1 [math.AP] 19 Apr 2020.

[46] Z. Lučić. *Euklidska i hiperbolička geometrija*. Total design i Matematički fakultet, Beograd, 1997.

[47] M. Marković. “A proof of the generalized Khavinson conjecture”. In: *Constr. Approx.* 45 (2020), pp. 243–271.

[48] M. Marković. “On harmonic functions and the hyperbolic metric”. In: *Indag. Math.* 26 (2015), pp. 19–23.

[49] M. Mateljević. “Ahlfors-Schwarz lemma and curvature”. In: *Kragujevac J. Math.* 25 (2003), pp. 155–164.

[50] M. Mateljević. “Dirichlet's principle, distortion and related problems for harmonic mappings”. In: *Publications de l'Institut Mathématique* 75 (89) (2004), pp. 147–171.

[51] M. Mateljević. “Distortion of harmonic functions and harmonic quasiconformal quasi-isometry”. In: *Revue Roum. Math. Pures Appl.* 51 (5-6) (2006), pp. 711–722.

[52] M. Mateljević. “Estimates for the modulus of the derivatives of harmonic univalent mappings”. In: *Revue Roum. Math. Pures Appl.* 47 (5-6) (2002), pp. 709–711.

[53] M. Mateljević. *Kompleksne funkcije 1&2*. Društvo matematičara Srbije, 2006.

[54] M. Mateljević. “Note on Schwarz lemma, curvature and distance”. In: *Zbornik radova PMF 13*. 1992.

[55] M. Mateljević. “Schwarz Lemma and Distortion for Harmonic Functions Via Length and Area”. In: *Potential Analysis* (2020).

[56] M. Mateljević. “Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions”. In: *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018), pp. 78–100.

[57] M. Mateljević. "Schwarz type inequalities for harmonic and related functions in the disk and the ball". In: *Current Research in Mathematical and Computer Sciences II*. Ed. by A. Lecko. 2010.

[58] M. Mateljević. "The Lower Bound for the Modulus of the Derivatives and Jacobian of Harmonic Injective Mappings". In: *Filomat* 29:2 (2015), pp. 221–244.

[59] M. Mateljević. *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps*. Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[60] M. Mateljević and A. Khalfallah. "Schwarz lemmas for mappings with bounded Laplacian". arXiv:1810.08823v1 [math.CV] 20 Oct 2018.

[61] M. Mateljević, M. Knežević, and M. Svetlik. "Distance in the Absolute Plane and Cauchy Functional Equations". In: *Filomat* 31:11 (2017), pp. 3585–3592.

[62] M. Mateljević and M. Svetlik. "Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings". In: *Appl. Anal. Discrete Math.* 14 (2020), pp. 150–168.

[63] P. Melentijević. "A proof of the Khavinson conjecture in $\mathbb{R}^3$". In: *Canadian Math. Bulletin Adv. Math.* 352 (2019), pp. 1044–1065.

[64] P. Melentijević. "Invariant gradient in refinemenets of Schwarz and Harnack inequalities". In: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 43 (2018), pp. 391–399.

[65] R. Osserman. "A sharp Schwarz inequality on the boundary". In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), pp. 3513–3517.

[66] R. Osserman. "From Schwarz to Pick to Ahlfors and Beyond". In: *Notices Amer. Math. Soc.* 46 (September 1999), pp. 868–873.

[67] D. Partyka and K. Sakan. "On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings". In: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math* 32 (2007), pp. 579–594.

[68] M. Pavlović. "A Schwarz lemma for the modulus of a vector-valued analytic function". In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 139, no. 3 (2010), pp. 969–973.

[69] M. Pavlović. *Introduction to Function Spaces on the Disk*. Matematički institut SANU, Beograd, 2004.

[70] G. Pick. "Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche". In: *Mathematische Annalen* 77 (1) (1915), pp. 1–6.

[71] G. Pólya and G. Szegő. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GMBH, 1925.

[72] S. Rickman. *Quasiregluar Mappings*. Springer-Verlag, 1993.

[73] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1976.

[74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, Singapure, 1987.

[75] B. V. Šabat. *Introduction to Complex Analysis (in Russian)*. Nauka, Moscow, 1976.

[76] R. Schoen and S. T. Yau. "Lectures on Harmonic Maps". In: *Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Vol. II*. Ed. by N. Hitchin, R. Kirby, and J. Wolf. 1997.

[77] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1890.

[78] M. Svetlik. “A note on the Schwarz lemma for harmonic functions”. Accepted for publication in Filomat.

[79] M. Vuorinen. *Conformal Geometry and Quasiregluar Mappings.* Springer-Verlag, 1988.

[80] T. Wan. “Constant mean curvature surface, harmonic maps, and universal Teichmüller space”. In: *J. Diff. Geom.* 35 (1992), pp. 643–657.

[81] J. C. Wood. “Lewy’s theorem fails in higher dimensions”. In: *Math. Scand.* 69 (1991), p. 166.

Биографија аутора

Марек Светлик рођен је у Београду 25.10.1983.

Основну школу „Млада покољења” завршио је у Ковачици 1998. године, а Математичку гимназију у Београду 2002. године. Дипломирао је на Математичком факултету (смер Теоријска математика и примене) 5. септембра 2007. године са просечном оценом 10,00 као студент генерације.

Од октобра 2007. године запослен је на Математичком факултету, најпре као сарадник у настави, а затим и као асистент. До сада је држао вежбе из следећих предмета: Комплексне функције, Дистрибуције и парцијалне једначине А, Дистрибуције и парцијалне једначине Б, Једначине математичке физике, Парцијалне једначине, Одабрана поглавља комплексне анализе, Пракса наставе математике и рачунарства, Школска пракса, Математика 1, Математика 2, Математика 3 и Математика 4.

Од 2008. до 2010. године био је сарадник на пројекту Министарства за науку Републике Србије *ОН 144032 Геометрија, образовање и визуализација са применама*, а од 2011. године сарадник је на пројектима Министарства за науку Републике Србије *ОН 174032 Анализа и алгебра са применама* и *ИИИ 41013 Функционална геномика хипоталамуса и медуле у хипертензији индукованој хроничним стресом.*

Члан је организационог одбора Симпозијума „Математика и примене”, а учествовао је и на великом броју конференција, научних и стручних скупова.

До сада је објавио следеће радове.

1. M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic Metric on the Strip and the Schwarz Lemma for HQR Mappings*, Appl. Anal. Discrete Math. 14 (2020), 150-168.

2. M. Svetlik, *A Note on the Schwarz Lemma for Harmonic Functions*, Accepted for publication in Filomat.

3. M. Mateljević, M. Knežević, M. Svetlik, *Distance in the Absolute Plane and Cauchy Functional Equations*, Filomat 31:11 (2017), 3585-3592.

4. M. Mateljević, M. Svetlik, M. Albijanić, N. Savić, *Generalizations of the Lagrange mean value theorem and applications*, Filomat 27:4 (2013), 515-528.

5. N. Ikodinović, J. Milinković, M. Svetlik, *Problem posing based on outcomes*, 53-62, Proceedings of Scientific Conference „Research in Mathematics Education”, Mathematical Society of Serbia, Belgrade, May 10-11, 2019.

6. M. Mateljević, N. Jozić, M. Svetlik, *Istraživanjem do minimuma ili maksimuma*, Zbornik radova, Treći simpozijum „Matematika i primene”, Matematički fakultet, 25-26.05.2012, Beograd 2013.

7. M. Mateljević, M. Svetlik, *A contribution to the development of functional thinking related to convexity and one-dimensional motion*, The Teaching of Mathematics, XIV 2 (2011), 87-96.

8. M. Mateljević, A. Rosić, M. Svetlik, *A problem from the PISA assessment relevant to calculus*, The Teaching of Mathematics, XIV, 1 (2011), 15-29.

9. M. Mateljević, M. Svetlik, *Odnos između oblika rezervoara i visine stuba tečnosti u rezervoaru*, 317 - 333, Spomenica akademika Veselina Perića, ANURS, Odeljenje prirodno - matematičkih i tehničkih nauka, Knj. 15, Banja Luka 2011, (pp. 1 - 609).

10. M. Mateljević, M. Svetlik, *A contribution to the development of functional thinking related to convexity*, The Teaching of Mathematics, XIII, 1 (2010), 1-16.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ___________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а ____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _________________________

____