УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александра Костић

НЕКОМУТАТИВНЕ ГРУПЕ И СИМПЛИЦИЈАЛНИ КОМПЛЕКСИ

докторска дисертација

Београд, 2021.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Aleksandra Kostić

NONCOMMUTATIVE GROUPS AND SIMPLICIAL COMPLEXES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021.

Ментор:

др Зоран Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Зоран Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Небојша Икодиновић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ђорђе Баралић, виши научни сарадник
Математички институт у Београду

др Нела Милошевић, доцент
Универзитет Доња Горица, Факултет за информационе системе и технологије, Подгорица

Датум одбране: ____________________

Посвећено мојим родитељима, Сими и Милки, у знак захвалности за њихову бескрајну љубав и топлину којом су обасјавали све моје путеве, па и овај.

Захвалница

Овим путем изражавам велику и истинску захвалност свом ментору, проф. др. Зорану Петровићу. Захваљујем му се на указаном поверењу, знању које сам стекла у раду са њим и посвећености која се ретко среће. Професор Петровић је активно и са пуно ентузијазма учествовао у свакој фази мојих докторских студија и његов допринос је кључан у настанку ове дисертације. Задовољство ми је да се захвалим и др. Нели Милошевић. Велики број резултата који су ушли у састав ове тезе настао је као плод сарадње са др. Нелом Милошевић и проф. др. Зораном Петровићем. Захваљујем им се на лепој сарадњи и пријатељској атмосфери током рада. Захваљујем се и осталим члановима комисије, проф. др. Небојши Икодиновићу, проф. др. Горану Ђанковићу и др. Ђорђу Баралићу, који су пажљиво прегледали рукопис, дали корисне савете и на тај начин допринели квалитету ове дисртације. Професору Горану Ђанковићу посебно се захваљујем што је указао на разматрање проблема датог у раду [37], из чега је проистекао један од главних резултата ове тезе.

Желела бих да се захвалим и својој учитељици Драгани Јанковић. Реч је о дивној жени и великом професионалцу, која је пуно свог времена и енергије несебично улагала у то да њени ђаци разумеју и заволе математику од првог сусрета са њом. Моја љубав према математици настала је управо на њеним часовима.

Посебно хвала Дејану и његовој породици, која је постала и моја породица. Њихова љубав, брига и помоћ сваке врсте дали су велики допринос да ова дисертација добије свој конача облик. Захваљујем се и мојим драгим пријатељима на позитивној енергији, разумевању и безусловној подршци. На крају, највећу захвалност дугујем својим родитељима на њиховој великој љубави, вери, разумевању и подржавању свих мојих афинитета. Њихова интуиција увек је била испред времена и наводила ме на праве путеве. Не постоје речи којима бих могла изразити захвалност за све што су они учинили за мене, уз много личног одрицања.

Александра Костић

Наслов дисертације: Некомутативне групе и симплицијални комплекси

Резиме: Предмет изучавања докторске дисертације су симплицијални комплекси придружени алгебарским објектима као што су циклотомични полиноми и иредуцибилни карактери решивих група. Приликом анализе придружених комплекса посебан нагласак је на некомутативности структура које се испитују.

Алгебарском објекту као што је циклотомични полином може се придружити колекција симплицијалних комплекса. Хомотопски тип придружених симплицијалних комплекса у већини случајева даје потпуну информацију о коефицијентима циклотомичног полинома. Једини изузетак су циклотомични полиноми чији је степен једнак производу три различита проста броја и овај случај је у фокусу истраживања у овој докторској дисертацији. Хомотопски тип симплицијалног комплекса придруженог полиному $\Phi_{pqr}(x)$, где су p, q и r различити прости бројеви, одређује се помоћу дискретне теорије Морса, када је то могуће. Међутим, у посебним случајевима симплицијални комплекси придружени полиному $\Phi_{pqr}(x)$ имају некомутативну фундаменталну групу, чиме је обезбеђена нова некомутативна инваријанта оваквог типа полинома. Сложене презентације које се појављују као презентације фундаменталних група придружених симплицијалних комплекса анализирају се коришћењем Фоксовог рачуна.

Други тип придруживања који се разматра јесте придруживање симплицијалног комплекса скупу иредуцибилних карактера коначне решиве групе. Придруживање се врши на два начина, као комплекс заједничког делиоца и комплекс простих делитеља. Проучавање фундаменталне групе оваквих типова симплицијалних комплекса обезбеђује боље разумевање структуре скупа иредуцибилних карактера коначних решивих група.

Кључне речи: симплицијални комплекси, фундаментална група, некомутативност, хомотопски тип, циклотомични полиноми, иредуцибилни карактери, решиве групе, Фоксов рачун, дискретна теорија Морса

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

УДК број: 512.542.1, 512.542.4, 515:146

AMS класификација: 05E45, 11C08, 20D10, 55U10, 57M05

Dissertation title: Noncommutative groups and simplicial complexes

Abstract: This dissertation examines simplicial complexes associated with cyclotomic polynomials and irreducible characters of finite solvable groups. In the process of analysis of the associated objects special attention is paid to the noncommutativity of the examined structures.

A collection of simplicial complexes can be associated to an algebraic object such as a cyclotomic polynomial. In most cases, the homotopy type of associated simplicial complexes gives us complete information about the coefficients of the cyclotomic polynomial. The only exceptions are cyclotomic polynomials whose degree is a product of three different prime numbers and this case is the focus of research in this doctoral dissertation. When it is possible, the homotopy type of a simplicial complex associated with the polynomial $\Phi_{pqr}(x)$, where p, q and r are different prime numbers, is determined by using the discrete Morse theory. However, in special cases, the simplicial complexes associated with the polynomial $\Phi_{pqr}(x)$ have a noncommutative fundamental group, thus providing a new noncommutative invariant of this type of polynomial. Complex presentations that appear as presentations of the fundamental groups of associated simplicial complexes are analyzed using Fox's calculus.

This thesis also focus on the study of simplicial complexes associated to a set of irreducible characters of a finite solvable group. Two types of simplicial complexes are attached to a set of irreducible characters of a finite solvable group — character degree complex and prime divisor complex. The examination of the fundamental group of these types of simplicial complexes provides better understanding of the structure of the irreducible characters of finite solvable groups.

Keywords: simplicial complexes, fundamental group, noncommutativity, homotopy type, cyclotomic polynomials, irreducible characters, solvable groups, Fox calculus, discrete Morse theory

Research area: Mathematics

Research sub-area: Algebra

UDC number: 512.542.1, 512.542.4, 515:146

AMS Subject Classification: 05E45, 11C08, 20D10, 55U10, 57M05

Садржај

Списак слика

Увод

Велика класа алгебарских објеката може се успешно проучавати придруживањем комбинаторних објеката као што су графови или симплицијални комплекси. Постоји значајан број истраживања која користе управо овај приступ, нека од њих су [5, 6, 28, 35]. У овој тези разматрају се симплицијални комплекси придружени алгебарским објектима као што су циклотомични полиноми и карактери коначних некомутативних решивих група. Показује се да проучавање топологије придружених комплекса даје нове врло корисне информације о наведеним алгебарским објектима.

Теза је логички подељена на две целине које су повезане својством некомутативности. Први део посвећен је проучавању симплицијалних комплекса придружених циклотомичним полиномима и одређивању њиховог хомотопског типа, када је то могуће. Посебна пажња у овом делу обраћа се на циклотомичне полиноме чији придружени комплекси имају некомутативну фундаменталну групу. У другом делу тезе испитују се комплекси који су придружени карактерима коначне решиве групе. Комплексе придружене карактерима има смисла испитивати једино у случају када је група некомутативна.

Теза је организована у десет глава и има следећу структуру. Прва глава садржи преглед дефиниција и основних својстава апстрактних симплицијалних комплекса и CW комплекса. Поред тога, у овој глави изложен је метод за рачунање фундаменталне групе симплицијалног комплекса и дато је алгоритамско решење овог метода. Додатно, дефинисани су уређајни комплекси и дат је преглед резултата о хомотопском типу посета. Наредна глава садржи детаљан преглед дискретне теорије Морса за симплицијалне комплексе. Метод дискретне теорије Морса кључан је за испитивање структуре и одређивање хомотопског типа симплицијалних комплекса разматраних у овој тези. У трећој глави изложен је Фоксов рачун, дата је дефиниција низа елементарних идеала и прецизирана је његова улога у доказивању неизоморфности група. У наредним главама, овај метод показује се као врло користан у доказивању некомутативности одређених фундаменталних група. С обзиром на то да разматране фундаменталне групе имају компликоване презентације, што доста отежава рачунање низа елементарних идеала, дати су алгоритми који могу послужити за аутоматизацију прорачуна. Четврта глава садржи основне дефиниције и својства циклотомичних полинома. У седмој глави дат је кратак преглед резултата из теорије карактера, са посебним освртом на карактере коначних решивих група. Изложени резултати прилагођени су потребама остатка тезе.

Остале главе садрже оригиналне резултате. Пета глава отпочиње дефинисањем симплицијалних комплекса придружених циклотомичним полиномима. Ову врсту симплицијалних комплекса увели су Мусикер и Рајнер у раду [37] мотивисани идејама из радова [1, 9, 19]. Аутори су потпуно описали топологију придружених комплекса и довели је у везу са коефицијентима циклотомичних полинома, осим у случају када је степен циклотомичног полинома производ три различита проста броја. Случај када је степен полинома једнак производу три различита проста броја остаје отворено питање (видети [37], Питање 7.6). У остатку ове главе даје се делимичан одговор на постављено питање. Прецизније, описују се случајеви када полиноми чији је степен производ три различита проста броја имају иста тополошка својстава као остали циклотомични полиноми. За анализу тополошких својстава користи се дискретна теорија Морса. Најзначајнији резултати ове главе објављени су у раду [21]. У шестој глави, која је базирана на раду [22], анализирају се случајеви који показују да топологија комплекса придружених циклотомичним полиномима чији је степен производ три проста броја, у генералном случају, ипак одступа од очекиване. Анализа показује да разматрани комплекси имају некомутативну фундаменталну групу. Овај негативан феномен има позитиван ефекат јер су на тај начин дате нове некомутативне инваријанте циклотомичних полинома. Докази некомутативности разматраних фундаменталних група засновани су на конструкцији одговарајућих епиморфизама, као и на употреби Фоксовог рачуна.

Осма глава припада другој логичкој целини и бави се анализом карактера коначне некомутативне решиве групе кроз анализу придружених комплекса. Скупу карактера придружују се два типа комплекса - комплекс заједничког делиоца и комплекс простих делитеља. Поменуте комплексе први пут уводи Сара Јенсен у раду [17]. Пре тога, граф заједничког делиоца и граф простих делитеља били су тема великог броја истраживања (нека од њих су [15, 26, 30, 38, 39]), па се природно намеће идеја да се посматрају њихова вишедимензиона уопштења. У овој глави доказујемо да су комплекс заједничког делиоца и комплекс простих делитеља хомотопски еквивалентни комплекси. Битно је нагласити да је хомотопска еквивалентност независна од скупа на којем су дефинисани. Према томе, резултати ове главе, сем на испитивање скупа карактера, могу бити примењени и на испитивање било ког другог скупа природних бројева. Приликом анализе хомотопског типа, придружени комплекси посматрају се као посети и користе се резултати Д. Квилена о хомотопском типу посета који су дати у раду [42]. Један од најважнијих резултата ове главе јесте да је фундаментална група комплекса придружених скупу карактера коначне некомутативне решиве групе слободна и да је њен ранг ограничен у зависности од димензије самог комплекса. Дато ограничење ранга фундаменталне групе је побољшање у односу на ограничење дато у раду [17]. Значај поменутог резултата је у томе што обезбеђује да се велики број симплицијалних комплекса елиминишу као комплекси коначне некомутативне решиве групе.

Девета глава садржи кратак осврт на главне резултате изложене у дисертацији и смернице за даљи рад.

Десета глава је Додатак. У овој глави издвојени су обимни итеративни поступци рачунања фундаменталних група које су разматране у петој глави. Сем тога, ова глава садржи софтверска решења свих алгоритама који се користе у тези. Софтверска решења имплементирана су у програмском пакету *Wolfram Mathematica 11.2*. Дата софтверска решења имала су веома важну улогу у раним фазама истраживања. Поједини резултати ове тезе најпре су експериментално уочени, а потом и формално доказани.

Глава 1

Апстрактни симплицијални комплекси и CW комплекси

Важан део у изучавању тополошких простора јесте њихово представљање у облику који је погодан за даљу анализу. Једно од најпознатијих начина моделирања тополошких простора јесте помоћу комбинаторних објеката као што су симплицијални комплекси. Основни градивни елементи симплицијалних комплекса, које називамо *симплекси*, представљају вишедимензиона уопштења објеката као што су тачка, дуж, троугао, тетраедар, док се сложенији простори граде слагањем основних градивних елемената по тачно утврђеним правилима. Комбинаторна структура апстрактних симплицијалних комплекса огледа се у томе што се сваки симплицијални комплекс може представити као колекција скупова, при чему ти скупови одговарају градивним елементима тог симплицијалног комплекса.

Генерализацијом појма симплицијални комплекс долазимо до појма CW комплекс. Ови комплекси, као и симплицијални комплекси, имају комбинаторну природу. Већина простора који се изучавају у топологији су или сами CW комплекси, или су хомотопски еквивалентни неком CW комплексу.

Због своје комбинаторне структуре, симплицијални комплекси и CW комплекси могу бити корисни у анализи разних алгебарских објеката. У наредним главама користимо овакав тип анализе за алгебарске објекте као што су циклотомични полиноми и решиве некомутативне групе. Основни циљ ове главе је упознавање са дефиницијом и својствима симплицијалних комплекса и CW комплекса, као и са основним резултатима симплицијалне топологије. Приликом писања пре свега ослањамо се на [23, 34, 36].

1.1 Апстрактни симплицијални комплекси

1.1.1 Дефиниција и основни појмови

Дефиниција 1.1. Нека је V коначан скуп. *Апстрактни симплицијални комплекс* K је фамилија непразних подскупова скупа V за коју важи следеће: ако $\alpha \in K$, тада сваки непразан подскуп скупа α такође припада K. Скуп V називамо *комбинаторни амбијент* комплекса K.

Пример 1.1. Колекција

$$K_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$$

јесте апстрактни симплицијални комплекс, док колекција

$$K_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

није апстрактни симплицијални комплекс јер $\{2, 3\} \in K_2$, а $\{3\} \notin K_2$.

Ако је K апстрактни симплицијални комплекс, скупове $\alpha \in K$ називамо *симплексима*. Димензија симплекса α је $\dim \alpha = |\alpha| - 1$, где је $|\alpha|$ кардиналност скупа α. Уколико желимо да нагласимо да је симплекс α димензије d пишемо $\alpha^{(d)}$. Димензију комплекса K дефинишемо као максималну димензију његових симплекса, односно

$$\dim K = \max \{\dim \alpha \,|\, \alpha \in K\}.$$

Фамилију $L \subseteq K$ која је и сама апстрактни симплицијални комплекс називамо *поткомплексом* комплекса K. Поткомплекс $K^{(d)} \subseteq K$ који је дефинисан на следећи начин:

$$K^{(d)} = \{\alpha \in K \,|\, \dim \alpha \leq d\}$$

називамо *d-скелетом* комплекса K. Скуп свих симплекса димензије d у комплексу K означавамо са K^d. Приметимо да K^d није апстрактни симплицијални комплекс, па самим тим није поткомплекс комплекса K. Елементе скупа K^0 називамо теменима.

Нека је α симплекс у K. Скуп $\beta \subseteq \alpha$ називамо *лице* симплекса α. Уколико је $\beta \subsetneq \alpha$, кажемо да је β *право лице* симплекса α, а скуп α је *ко-лице* скупа β. Симплекс α је *максималан* у K ако није право лице ниједног симплекса у K. Максималне симплексе називамо и *фасетима*. Симплекс $\beta \subset \alpha$ је *слободно лице* у K ако је α максималан симплекс и β није право лице ниједног другог максималног симплекса у K. Уколико сви фасети у комплексу K имају исту димензију онда је апстрактни симплицијални комплекс K *хомоген*[1]. Приметимо да је сваки апстрактни симплицијални комплекс потпуно одређен својим максималним симплексима (фасетима).

Пример 1.2. Посматрајмо апстрактни симплицијални комплекс

$$K = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\},$$
$$\{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}.$$

Његови фасети су $\{v_3, v_5\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$ и $\{v_2, v_3, v_4\}$. Уместо експлицитног навођења свих симплекса комплекса K, можемо краће рећи да је K генерисан фасетима $\{v_3, v_5\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$ и $\{v_2, v_3, v_4\}$. Како су фасети у K различитих димензија, K није хомоген апстрактни симплицијални комплекс.

Пресликавања између апстрактних симплицијалних комплекса дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 1.2. Нека су K и L апстрактни симплицијални комплекси. Пресликавање $\pi : K^0 \to L^0$ је *симплицијално пресликавање* ако је задовољен следећи услов: ако је $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ симплекс у K, тада је $\{\pi(v_0), \pi(v_1), \ldots, \pi(v_n)\}$ симплекс у L. Додатно, уколико је π бијекција и π^{-1} је симплицијално пресликавање, тада је π изоморфизам комплекса.

[1] енг. pure simplicial complex

1.1.2 Геометрија апстрактних симплицијалних комплекса

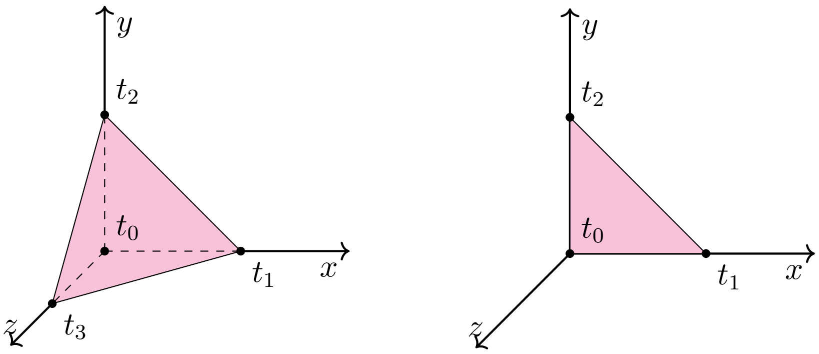
На сваки апстрактни симплицијални комплекс K можемо посматрати и као на апстрактну верзију неког геометријског објекта. Наиме, сваком симплексу димензије нула у K можемо придружити тачку, симплексу димензије један можемо придружити дуж, симплексу димензије два троугао, итд. У циљу формализације ове идеје уводимо појам геометријског симплекса.

Дефиниција 1.3. Нека су $t_0, t_1, \ldots, t_n$ афино независне тачке у $\mathbb{R}^N$. (Геометријски) *n-симӣлекс* σ је скуп тачака $x \in \mathbb{R}^N$ таквих да је

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t_i, \quad \text{где је } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$$

и $\alpha_i \geq 0$ за све $i = \overline{0, n}$. Димензија симплекса σ је $\dim \sigma = n$.

Тачке $t_0, t_1, \ldots, t_n$ које разапињу n-симплекс σ називају се темена симплекса σ. Било који симплекс ρ који је разапет подскупом скупа тачака $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ називамо *лице* симплекса σ и означавамо са $\rho \subseteq \sigma$. Скуп свих правих лица симплекса σ називамо *ḡраницом* симплекса σ, у ознаци $\mathrm{Bd}(\sigma)$. Приметимо да се $\mathrm{Bd}(\sigma)$ састоји од свих тачака x, таквих да је $\alpha_i(x) = 0$, за бар једно $i \in \{0, \ldots, n\}$.



Слика 1.1: 3-симплекс разапет тачкама $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ и његово лице разапето тачкама $\{t_0, t_1, t_2\}$

Ако је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тачка у $\mathbb{R}^n$, тада *норму* тачке x дефинишемо са

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Јединична n-димензиона лоӣта, у ознаци $\mathbb{B}^n$, је скуп свих тачака $x \in \mathbb{R}^n$ за које је $||x|| \leq 1$, док је *јединична $(n-1)$-димензиона сфера*, у ознаци $\mathbb{S}^{n-1}$, скуп свих тачака $x \in \mathbb{R}^n$ за које је $||x|| = 1$. Према томе, $\mathbb{B}^0$ је тачка, $\mathbb{B}^1$ је интервал $[-1, 1]$, $\mathbb{B}^2$ је јединични диск, $\mathbb{S}^0$ је двотачка $\{-1, 1\}$, $\mathbb{S}^1$ је јединична кружница, итд. Није тешко уочити да је $\mathbb{B}^n$ хомеоморфна слика n-симплекса σ, при чему се граница $\mathrm{Bd}(\sigma)$ слика на $\mathbb{S}^{n-1}$. Уместо термина n-лопта често се користи термин n-диск.

Геометријски симплекси су основни градивни елементи геометријских објеката придружених апстрактним симплицијалним комплексима.

Дефиниција 1.4. *Геомеӣријски симӣлицијални комӣлекс* $\mathcal{K}$ је фамилија симплекса у $\mathbb{R}^N$ која задовољава следеће услове:

(1) Свако лице симплекса из $\mathcal{K}$ је симплекс у $\mathcal{K}$.

(2) Непразан пресек свака два симплекса из $\mathcal{K}$ је лице сваког од њих.

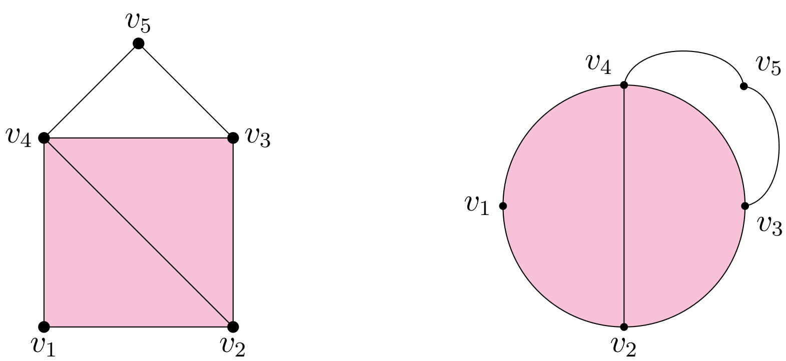
Нека је K апстрактни симплицијални комплекс, где је $|K^0| = n$ и нека функција $\varphi : K^0 \to \{1, \ldots, n\}$ нумерише темена комплекса K. Обележимо са $e_i \in \mathbb{R}^n$ тачку чије су све координате нула, сем i-те координате која је јединица. Скуп $|K|$ дефинишемо на следећи начин:

$$|K| = \bigcup_{\alpha \in K} \sigma_\alpha,$$

где је σ_α геометријски симплекс разапет скупом тачака $\{e_{\varphi(v)}\}_{v\in\alpha}$. Како скуп $|K|$ испуњава услове дефиниције 1.4, $|K|$ је геометријски симплицијални комплекс.

Са друге стране, $|K|$ је потпростор од $\mathbb{R}^N$, па је на сваком n-симплексу $\sigma \in |K|$ дата топологија наслеђена из n-равни у $\mathbb{R}^N$ коју одређују његова темена. Према томе, на скупу $|K|$ може се дефинисати топологија на следећи начин: скуп $A \subset |K|$ је затворен ако и само ако је $A \cap \sigma$ затворен у σ за свако $\sigma \in K$. Резултујући тополошки простор $|K|$ назива се *геометријска реализација* апстрактног симплицијалног комплекса K и јединствен је до на хомеоморфизам.

Слика 1.2 приказује две хомеоморфне геометријске реализације апстрактног симплицијалног комплекса датог у примеру 1.2.



Слика 1.2: Хомеоморфне геометријске реализације

У наставку користићемо исте ознаке за апстрактне симплицијалне комплексе и њима придружене геометријске симплицијалне комплексе. Када кажемо да је неки апстрактни симплицијални комплекс K хомеоморфан или хомотопски еквивалентан тополошком простору X, подразумевамо да то значи да је његова геометријска реализација $|K|$ хомеоморфна или хомотопски еквивалентна тополошком простору X.

1.1.3 Фундаментална група

Нека је K апстрактни симплицијални комплекс. *Путања* од темена α_0 до темена α_n у комплексу K је низ темена

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n,$$

таквих да је $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ симплекс у K, за све $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Уколико је $\alpha_0 = \alpha_n$, тада је реч о *затвореној путањи* или петљи у темену α_0.

Ако су $p = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ и $q = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m$ две различите путање у K, такве да је $\alpha_n = \beta_0$, тада је

$$p.q = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m$$

нова путања у K коју називамо производ путања p и q. Путању

$$p^{-1} = \alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$$

називамо инверзном путањом путање p. Лако се уочава да важи асоцијативност производа путања. Односно, за три произвољне путање p, q, r у K важи $(p.q).r = p.(q.r)$. Такође, важи да је $(p.q)^{-1} = q^{-1}.p^{-1}$.

За две путање $p = \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ и $q = \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m}$ кажемо да су *еквивалентне путање*, и означавамо $p \sim q$, ако се једна од њих може добити од друге низом следећих операција:

- ако је $\alpha_{i-1} = \alpha_i$, тада се $\ldots \alpha_{i-1}\alpha_i \ldots$ мења са $\ldots \alpha_i \ldots$, или обрнуто, $\ldots \alpha_i \ldots$ мења се са $\ldots \alpha_{i-1}\alpha_i \ldots$,
- ако је $\{\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ симплекс у K, тада се $\ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1} \ldots$ мења са $\ldots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1} \ldots$, или обрнуто, $\ldots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1} \ldots$ мења се са $\ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1} \ldots$.

Из претходног следи да је $\alpha_0 = \alpha_{n+1}$ и $\alpha_n = \alpha_{n+m}$ уколико је $p \sim q$.

Јасно је да је $\sim$ релација еквиваленције. Означимо са $[p]$ класу еквиваленције путање p. Скуп

$$\{[p] \mid p \text{ је петља у темену } a_0 \text{ у комплексу } K\}$$

формира групу у односу на операцију множења дефинисану са $[p][q] = [p.q]$. Ову групу називамо *фундаментална група* комплекса K у базном темену α_0 и означавамо са $\pi_1(K, \alpha_0)$. Неутрал групе $\pi_1(K, \alpha_0)$ је $[\alpha_0]$, инверз произвољног елемента $[p]$ је $[p^{-1}]$. Наравно, група $\pi_1(K, \alpha_0)$ није нужно комутативна.

Као што је и очекивано, групе $\pi_1(K, \alpha_0)$ и $\pi_1(|K|, t_0)$, где је t_0 тачка која одговара 0-симплексу α_0, у тесној су вези.

Теорема 1.1 (Теорема 3.3.9., [34]). *Групе $\pi_1(K, \alpha_0)$ и $\pi_1(|K|, t_0)$ су изоморфне.*

Из саме дефиниције групе $\pi_1(K, \alpha_0)$ јасно је да је она потпуно одређена 2-скелетом комплекса K. Према томе, на основу теореме 1.1, фундаментална група простора $|K|$ потпуно је одређена својим потпростором $|K^{(2)}|$.

Очито да група $\pi_1(K, \alpha_0)$ зависи од избора базног темена α_0. Међутим, уколико је комплекс K *повезан*, односно ако од сваког темена у K постоји пут до сваког другог темена у K, тада можемо занемарити базно теме. Односно, ако су α_0 и β_0 два различита темена у повезаном комплексу K, тада су групе $\pi_1(K, \alpha_0)$ и $\pi_1(K, \beta_0)$ изоморфне. Стога, фундаменталну групу повезаног комплекса K означавамо краће са $\pi_1(K)$.

Уколико је K дводимензиони и повезан апстрактни симплицијални комплекс, тада његову фундаменталну групу $\pi_1(K)$ можемо описати помоћу генератора и релација између тих генератора.

Једнодимензиони поткомплекс $L \subset K$ називамо *стабло* ако је простор $|L|$ контрактибилан. Поткомплекс L је *максимално стабло* ако није садржано (у смислу инклузије) ни у једном другом стаблу у K. Како је K повезан комплекс, максимално стабло садржи сва темена комплекса K.

Нека су $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ темена комплекса K. Уведимо тотално уређење на теменима: $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s$. Тада сваки симплекс $\{\alpha_{i_0}, \ldots, \alpha_{i_k}\} \in K$, $k \leq s$, можемо записати у форми $[\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}]$, где је $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$. Симплекс $[\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}]$, где је $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, називамо *уређеним симӣлексом.*

Сваком 1-симплексу $[\alpha_i, \alpha_j]$ у K, $0 \leq i < j \leq s$, придружимо елемент g_{ij}. Обележимо са $g_{ji} := g_{ij}^{-1}$, за све $i < j$. Нека је $G(K, L)$ група генерисана елементима g_{ij} и следећим релацијама:

1. Ако $[\alpha_i, \alpha_j] \in L$, тада је $g_{ij} = 1$.

2. Ако $[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k] \in K$, тада је $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$.

Тада важи следеће тврђење.

Теорема 1.2 (Теорема 3.3.13., [34]). *Груӣе $G(K, L)$ и $\pi_1(K)$ су изоморфне.*

Група $G(K, L)$ потенцијално може бити генерисана великим бројем генератора и релација. У наставку дајемо алгоритам којим број генератора и релација може бити редукован. Алгоритам је заснован на чињеници да сваки генератор који се појављује само једном у некој релацији можемо изразити преко осталих генератора из те релације, чиме смањујемо број генератора и релација.

Алгоритам 1 Редукција

Улазни подаци: Листа генератора *gens*, листа релатора *rels* који одговарају 2-димензионим симплексима у K и максимално стабло L у K. Сваки елемент у листи *rels* је релатор који је представљен листом генератора (и њихових степена).

Излаз: Група $G(K, L)$ са редукованим бројем генератора *gens* и релација *rels*

$trivialGens \leftarrow L$;
while *trivialGens* није празна листа **do** ▷ брисање тривијалних генератора
    $newTrivialGens \leftarrow$ празна листа;
    $newRels \leftarrow$ празна листа;
    for сваки *relator* из листе *rels* **do**
        брисање елемената листе *trivialGens* из листе *relator*;
        if број различитих генератора у листи $relator == 1$ **then**
            додавање генератора из листе *relator* у листу *newTrivialGens*;
        else
            додавање редуковане листе *relator* у листу *newRels*;
        end if
    end for
    брисање елемената *trivialGens* из листе *gens*;
    $trivialGens \leftarrow newTrivialGens$;
    $rels \leftarrow newRels$;
end while

```
if (постоји генератор који се у неком релатору појављује само једном) then
    subIndicator := true;
else
    subIndicator := false;
end if
while subIndicator do                     ▷ редукција броја генератора и релација
    forSub ← генератор који се у неком релатору појављује само једном;
    subRel ← релатор у коме се forSub појављује само једном
    subExp ← изражавање генератора forSub преко осталих генератора у релатору subRel;
    for сваки relator у листи rels do
        замена сваког појављивања генератора forSub у листи relator изразом subExp;
    end for
    брисање генератора forSub из листе gens;
    брисање релатора subRel из листе rels;
    if (не постоји генератор који се појављује у неком релатору само једном) then
        subIndicator := false;
    end if
end while
return (gens, rels);
```

1.1.4 Комбинаторне конструкције и њихова геометрија

Од постојећих апстрактних симплицијалних комплекса могу се конструисати нови апстрактни симплицијални комплекси. У наставку дајемо преглед неких важних конструкција које ћемо користити у наредним главама.

Симплицијално спајање

Дефиниција 1.5. Нека су K_1 и K_2 апстрактни симплицијални комплекси. Апстрактни симплицијални комплекс

$$K_1 * K_2 = \{\alpha_1 \cup \alpha_2 \,|\, \alpha_1 \in K_1, \alpha_2 \in K_2\}$$

називамо *симплицијално спајање*[2] комплекса K_1 и K_2.

Ако је $|K_1|$ потпростор од $\mathbb{R}^n$ и $|K_2|$ потпростор од $\mathbb{R}^m$, комплекс $K_1 * K_2$ у $\mathbb{R}^{n+m}$ можемо реализовати на следећи начин. Простор $\mathbb{R}^n$ идентификујмо са потпростором $\{(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ а простор $\mathbb{R}^m$ идентификујемо са потпростором $\{(0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_m) \,|\, y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$. Означимо са $\sigma_\alpha \subset \mathbb{R}^{n+m}$ геометријски симплекс који одговара симплексу $\alpha \in K_1$ и са $\sigma_\beta \subset \mathbb{R}^{n+m}$ геометријски симплекс који одговара симплексу $\beta \in K_2$. Тада је

$$|K_1 * K_2| = \bigcup_{\alpha \in K_1, \beta \in K_2} \sigma_{\alpha \cup \beta},$$

[2] енг. simplicial join

где је $\sigma_{\alpha\cup\beta}$ геометријски симплекс разапет унијом тачака које разапињу симплексе σ_α и σ_β у $\mathbb{R}^{n+m}$.

Јасно је да је унија тачака из $\mathbb{R}^{n+m}$ које разапињу симплексе σ_α и σ_β увек афино независна. Ако $x \in |K_1|$, тада је $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, где је $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Слично, ако $y \in |K_2|$, тада је $y = (0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_m)$, где је $y_1 + \ldots + y_m = 1$. Према томе, следи да $(1-t)x + ty \in |K_1 * K_2|$, за све $t \in [0,1]$.

Како се спајање тополошких простора X и Y дефинише као количнички простор

$$X * Y = X \times Y \times [0,1]/\sim,$$

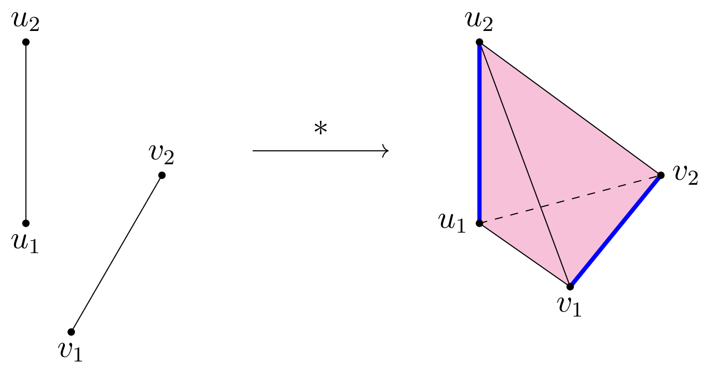
где је $\sim$ релација еквиваленције дефинисана са:

$$\begin{aligned}(x,y,0) &\sim (x,y',0), \quad \text{за све } x \in X \text{ и } y,y' \in Y,\\ (x,y,1) &\sim (x',y,1), \quad \text{за све } x,x' \in X \text{ и } y \in Y,\end{aligned}$$

закључујемо да је

$$|K_1 * K_2| \simeq |K_1| * |K_2|.$$

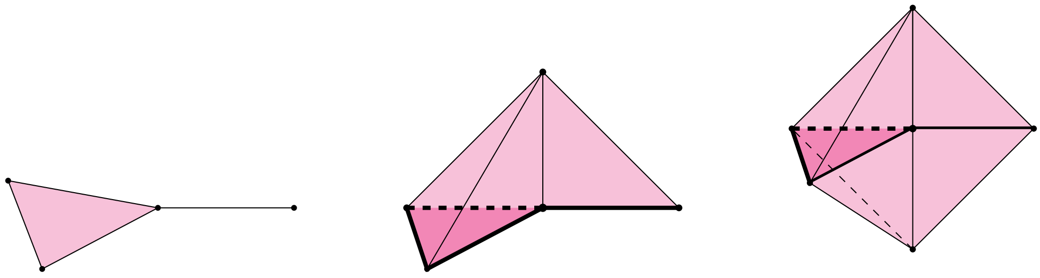
Дакле, у геометријском смислу операција симплицијалног спајања одговара унији дужи које повезију сваку тачку простора $|K_1|$ са сваком тачком простора $|K_2|$ (видети слику 1.3).



Слика 1.3: Симплицијално спајање два једнодимензиона комплекса

Означимо са K^{pt} апстрактни симплицијални комплекс који се састоји од једног једночланог скупа. Дакле, $|K^{pt}|$ је тачка. Ако је K произвољни апстрактни симплицијални комплекс, тада је $K * K^{pt}$ *конус* над комплексом K, у ознаци $C\,K$. Геометријска реализација $|C\,K|$ је тополошки конус над $|K|$.

Ако је L апстрактни симплицијални комплекс који се састоји од два једночлана скупа (тј. $|L| \simeq \mathbb{S}^0$), тада апстрактни симплицијални комплекс $K * L$ називамо *суспензијом* над комплексом K и обележавамо са $\Sigma\,K$. Геометријска реализација $|\Sigma\,K|$ је тополошка суспензија над $|K|$.



Слика 1.4: (а) Симплицијални комплекс K, (б) Конус $C\,K$, (в) Суспензија $\Sigma\,K$

Звезда и линк

Следећи поткомплекси биће нарочито корисни у „локалној” анализи симплицијалних комплекса.

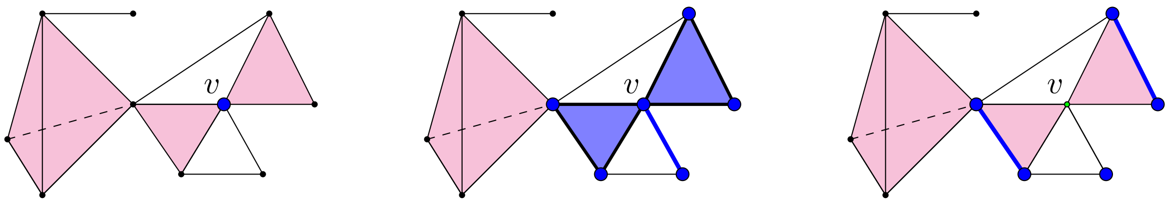
Дефиниција 1.6. Нека је K апстрактни симплицијални комплекс и нека је $\alpha \in K$ произвољан симплекс. *Звезду симплекса* α, у ознаци $\mathrm{St}_K(\alpha)$, дефинишемо на следећи начин:

$$\mathrm{St}_K(\alpha) = \{\beta \mid (\exists\, \gamma \in K)\ (\beta \subseteq \gamma \text{ и } \alpha \subseteq \gamma)\}.$$

Дефиниција 1.7. *Линк симплекса* $\alpha \in K$, у ознаци $\mathrm{Lk}_K(\alpha)$, је поткомплекс апстрактног симплицијалног комплекса K кога чине сви симплекси из $\mathrm{St}_K(\alpha)$ који не садрже симплекс α, односно,

$$\mathrm{Lk}_K(\alpha) = \{\beta \mid \beta \in \mathrm{St}_K(\alpha) \text{ и } \beta \cap \alpha = \emptyset\}.$$

На слици 1.5 може се видети илустрација поменутих поткомплекса на конкретном примеру.



Слика 1.5: (а) Симплицијални комплекс K, (б) Звезда $\mathrm{St}_K(v)$, (в) Линк $\mathrm{Lk}_K(v)$

Приметимо да је $\mathrm{St}_K(v) = \mathrm{Lk}_K(v) * \{\{v\}\}$.

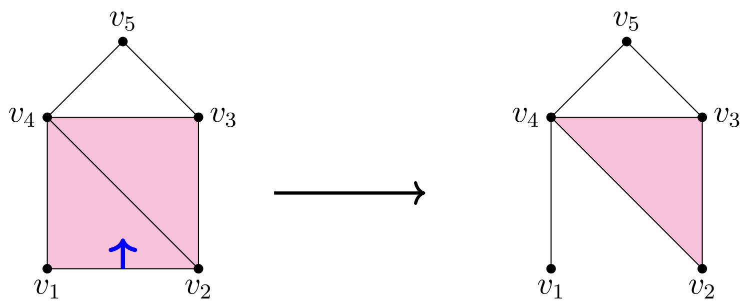
Симплицијални колапс

Дефиниција 1.8. Нека је α слободно лице у апстрактном симплицијалном комплексу K и β максималан симплекс који садржи α. *Симплицијални колапс*, у ознаци $K \setminus \alpha$, је одстрањивање свих симплекса $\gamma \in K$таквих да је $\alpha \subseteq \gamma \subseteq \beta$. Уколико је $\dim \alpha = \dim \beta - 1$, тада је $K \setminus \alpha$ *елементарни колапс*.

Важно је истаћи да су простори $|K|$ и $|K \setminus \alpha|$ хомотопски еквивалентни. Према томе, одстрањивањем свих слободних лица у комплексу K добијамо једноставнији комплекс који је хомотопан полазном. Користимо ознаку $K \searrow L$ уколико је комплекс L добијен од комплекса K низом симплицијалних колапса. Посебно, ако низом колапса комплекс K можемо довести до комплекса који се састоји из једног темена, тада је простор $|K|$ *конШракШибилан.*

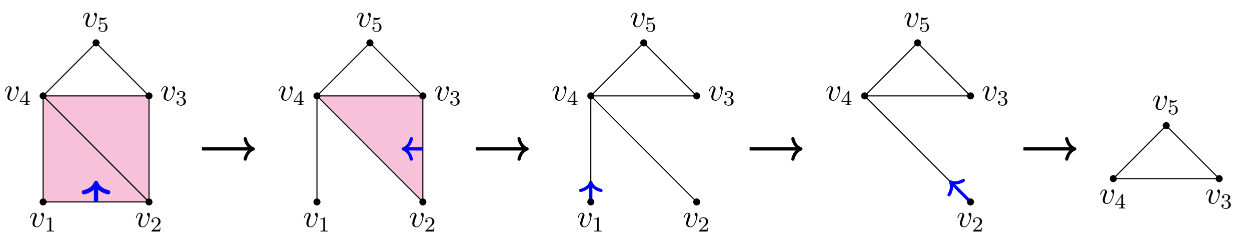
Пример 1.3. Симплекс $\{v_1, v_2\}$ је слободно лице комплекса K датог у примеру 1.2. Тада је

$$K \setminus \{v_1, v_2\} = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}$$
$$\{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}.$$



Слика 1.6: Колапс симплекса $\{v_1, v_2\}$

Приметимо да симплекс $\{v_1, v_2\}$ није једино слободно лице у комплексу K. Такође, симплицијалним колапсом $K \setminus \{v_1, v_2\}$ настају нова слободна лица у комплексу K. Слика 1.7 приказује како се низом колапса може доћи до много једноставнијег комплекса који је хомотопан полазном.



Слика 1.7: Низ колапса

1.1.5 Сложивост апстрактних симплицијалних комплекса

Сложиви симӣлицијални комӣлекси[3] представљају класу симплицијалних комплекса који имају посебно интересантна комбинаторно-геометријска својства. Идеја сложивости заснива се на томе да се симплицијални комплекс може постепено „изградити” додавањем фасета. Критеријум за додавање фасета је да у сваком кораку пресек новододатог фасета и претходно додатих фасета буде скуп максималних лица новододатог фасета.

[3]енг. shellable simplicial complexes

Дефиниција 1.9. Апстрактни симплицијални комплекс K је *сложив* уколико се на његовим фасетима може увести линеарно уређење $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, тако да је поткомплекс

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \cap \alpha_k$$

хомоген и има димензију $\dim \alpha_k - 1$, за све $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Пример 1.4. Посматрајмо апстрактни симплицијални комплекс

$$K_1 = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}.$$

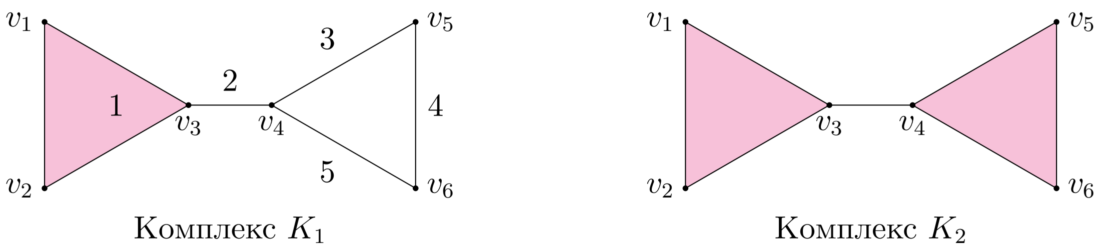
Фасете комплекса K_1 можемо уредити на следећи начин:

$$\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_4, v_6\}.$$

Овакво уређење фасета задовољава критеријуме дефиниције 1.9, па је овај комплекс сложив. За разлику од комплекса K_1, комплекс

$$K_2 = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}\}.$$

није сложив. Нека је $\alpha_j = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $\alpha_k = \{v_4, v_5, v_6\}$ и нека је, без умањења општости, $j < k$. Тада је $\dim\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \cap \alpha_k\right) \neq 1$.



Слика 1.8: K_1 је сложив, K_2 није сложив комплекс

Најважнија особина сложивих симплицијалних комплекса, из угла комбинаторне топологије, дата је у следећој теореми.

Теорема 1.3 (Теорема 12.3(2), [23]). *Нека је K сложив симплицијални комплекс, где је $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ одговарајуће линеарно уређење на фасетима и Σ скуп фасета који су читавом својом границом залепљени на претходне у односу на дато линеарно уређење. Тада комплекс K има хомотопски тип букета сфера, односно*

$$K \simeq \bigvee_{\alpha \in \Sigma} \mathbb{S}^{\dim \alpha}.$$

Претходну теорему можемо илустровати на примеру комплекса K_1. Уколико посматрамо уређење $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_4, v_6\}$ на фасетима комплекса K_1, важи да је $\Sigma = \{\{v_4, v_6\}\}$, према томе K_1 је хомотопски еквивалентан 1-сфери.

Генерално, питање сложивости симплицијалног комплекса је NP-тежак проблем. Међутим, у неким случајевима лако се може доћи до закључка да је неки симплицијални комплекс сложив. Конструкције као што су симплицијално спајање комплекса и линк симплекса чувају сложивост.

Тврђење 1.1 (Последица 2.9(4), [40]). *Симплицијално спајање сложивих апстрактних симплицијалних комплекса је сложив комплекс.*

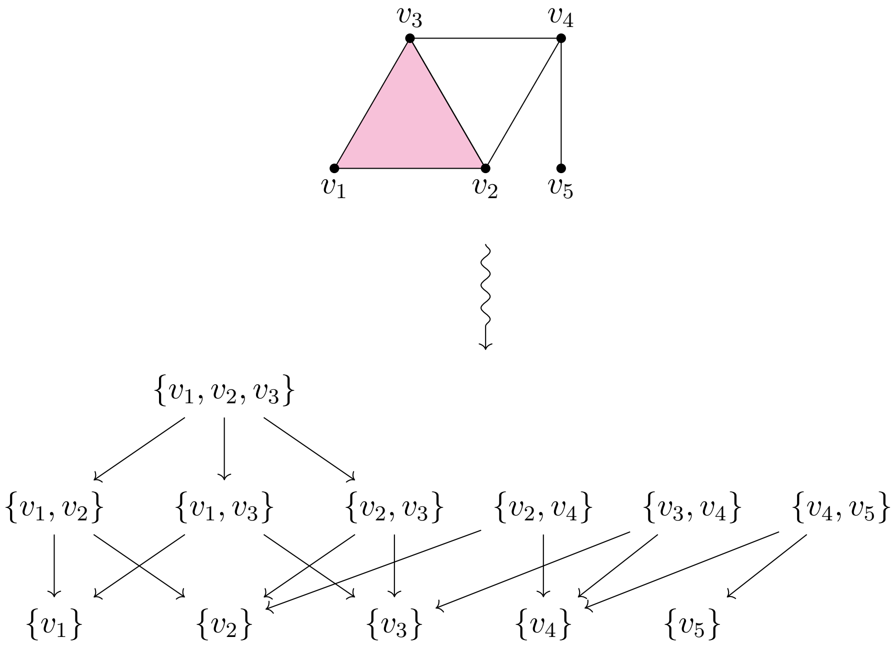
Тврђење 1.2 (Пропозиција 10.14, [8]). *Ако је K сложив апстрактни симплицијални комплекс, тада је и његов поткомплекс $\mathrm{Lk}_K(A)$ такође сложив за све симплексе $A \in K$.*

Скелет сложивог апстрактног симплицијалног комплекса је такође сложив, о чему говори наредно тврђење.

Тврђење 1.3 (Глава 10, [8]). *Нека је K сложив d-димензиони апстрактни симплицијални комплекс. Тада је $K^{(j)}$ сложив апстрактни симплицијални комплекс за све $i \in \{0, \dots, d\}$.*

1.1.6 Уређајни комплекси

Сваки апстрактни симплицијални комплекс у односу на релацију „бити лице” формира један парцијално уређен скуп, који ћемо означити са $\mathcal{P}(K)$. Према томе, сваком симплицијалном комплексу можемо придружити Хасеов дијаграм посета $\mathcal{P}(K)$. Темена Хасеовог дијаграма су симплекси у комплексу, усмерена ивица од α до β постоји ако и само ако је β лице симплекса α и $\dim \alpha - 1 = \dim \beta$.



Слика 1.9: Симплицијални комплекс и његов Хасеов дијаграм

Обрнуто придруживање је такође могуће. Сваком парцијално уређеном скупу P можемо придружити апстрактни симплицијални комплекс, такозвани *уређајни комплекс*[4].

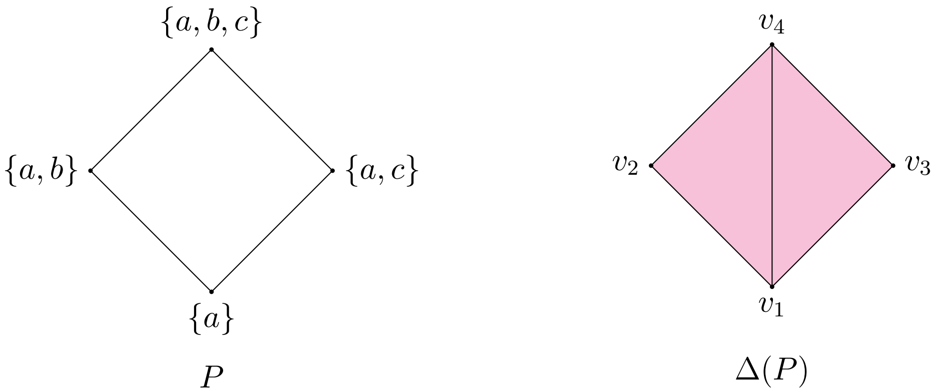
Дефиниција 1.10. Нека је P посет. *Уређајни комплекс* посета P, у ознаци $\Delta(P)$, је апстрактни симплицијални комплекс чија су темена елементи посета P а симплекси су коначни ланци у P. Односно,

$$\Delta(P) = \{A \subseteq P \mid A \text{ је коначан ланац у } P\}.$$

[4]енг. order complex

Пример 1.5. Нека је $P = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ и нека су темена комплекса $\Delta(P)$ која одговарају елементима $\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}$ скупа P редом v_1, v_2, v_3, v_4. Максимални ланци у скупу P су $\{a\} \subset \{a,b\} \subset \{a,b,c\}$ и $\{a\} \subset \{a,c\} \subset \{a,b,c\}$. Према томе, $\{v_1, v_2, v_4\}$ и $\{v_1, v_3, v_4\}$ су фасети комплекса $\Delta(P)$, па је

$$\begin{aligned}\Delta(P) = \{&\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_4\},\\ &\{v_3,v_4\},\{v_1,v_2,v_4\},\{v_1,v_3,v_4\}\}.\end{aligned}$$



Слика 1.10: Парцијално уређен скуп и његов уређајни комплекс

Ако је K произвољан апстрактни симплицијални комплекс, приметимо да је уређајни комплекс $\Delta(\mathcal{P}(K))$ прва барицентрична подела комплекса K. Према томе, геометријске реализације комплекса K и $\Delta(\mathcal{P}(K))$ су хомеоморфне. Ово својство показује се као врло корисно јер обезбеђује да се доказ хомотопске еквиваленције нека два апстрактна симплицијална комплекса K_1 и K_2 сведе на доказ да су хомотопски еквивалентни њима придружени уређајни комплекси $\Delta(\mathcal{P}(K_1))$ и $\Delta(\mathcal{P}(K_2))$. У наставку дајемо критеријуме када су уређајни комплекси хомотопски еквивалентни.

Ако су P_1 и P_2 два парцијално уређена скупа и $f : P_1 \to P_2$ пресликавање које чува уређење, тада f индукује симплицијално пресликавање $\Delta(f) : \Delta(P_1) \to \Delta(P_2)$ које се на теменима поклапа са f.

Даниел Квилен у раду [42] показује да за свака два пресликавања $f, g : P_1 \to P_2$ која чувају уређење и испуњавају услов $f(A) \subseteq g(A)$, за све $A \in P_1$, важи да су $\Delta(f)$ и $\Delta(g)$ хомотопна. Користећи претходно својство, Квилен, прво посредно у раду [41], а затим експлицитно у раду [42] (Пропозиција 1.6), даје услов под којим је пресликавање $\Delta(f)$ хомотопска еквиваленција.

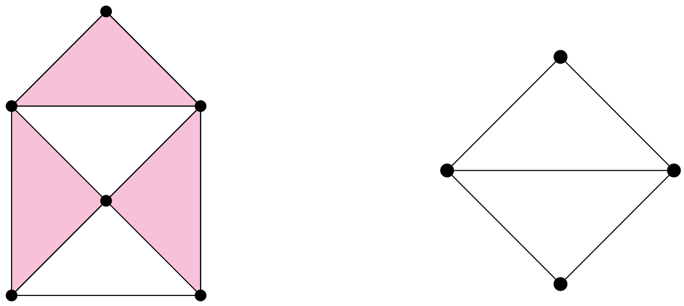
Означимо са $Q_{\geq y} \subseteq P_2$ скуп свих елемената посета P_2 који су (у смислу инклузије) мањи или једнаки од елемента y. Односно, $Q_{\geq y} := \{x \in P_2 \mid x \subseteq y\}$.

Теорема 1.4 (Квиленова лема)**.** *Нека је $f : P_1 \to P_2$ пресликавање између коначних парцијално уређених скупова P_1 и P_2 које чува уређење. Претпоставимо да је за свако $y \in P_2$ комплекс $\Delta(f^{-1}(Q_{\geq y}))$ контрактибилан. Тада је $\Delta(f)$ хомотопска еквиваленција.*

Претходна теорема представља моћан алат у Комбинаторној топологији који је незаобилазан у проучавању топологије уређајних комплекса.

1.1.7 Нерв апстрактног симплицијалног комплекса

Дефиниција 1.11. Нека је K апстрактни симплицијални комплекс. *Нерв комплекса* K, у ознаци $\mathcal{N}(K)$, је апстрактни симплицијални комплекс дефинисан на следећи начин. Темена комплекса $\mathcal{N}(K)$ одговарају фасетима комплекса K, унија темена формира симплекс у $\mathcal{N}(K)$ ако и само ако је пресек фасета који одговарају тим теменима непразан.



(а) (б)

Слика 1.11: Симплицијални комплекс (а) и његов нерв (б)

У неким ситуацијама погодније је испитивати нерв $\mathcal{N}(K)$ него сам комплекс K. Веза између комплекса $\mathcal{N}(K)$ и K дата је у следећем познатом резултату (Теорема 15.21. у [23] прилагођена симплицијалним комплексима).

Теорема 1.5 (Нерв лема). *Нека је K апстрактни симплицијални комплекс и $\mathcal{N}(K)$ нерв комплекса K. Ако је (непразан) пресек сваког скупа фасета у K контрактибилан, тада је $\mathcal{N}(K) \simeq K$.*

Претходна теорема је последица Квиленове леме и представља моћно средство у испитивању хомотопског типа симплицијалних комплекса.

1.2 CW комплекси

CW комплекси су тополошки простори који се низом итерација могу изградити од мањих простора, које називамо *ћелијама*.

Дефиниција 1.12. Ћелија димензије n, или краће *n-ћелија*, је тополошки простор хомеоморфан n-диску $\mathbb{D}^n$. Ћелија је простор који је n-ћелија за неко $n \in \mathbb{N}$.

У процесу изградње CW комплекса у свакој итерацији врши се операција коју називамо *додавање ћелија*. Ћелије се додају почевши од ћелија мање димензије ка ћелијама веће димензије.

Дефиниција 1.13. Нека су X и Y тополошки простори, $A \subseteq X$ затворен потпростор и $f : A \to Y$ непрекидно пресликавање. Резултат додавања простора X на простор Y по пресликавању f је простор

$$Y \cup_f X = \big(Y \sqcup X\big)/\sim,$$

где је $\sim$ релација еквиваленције којим се свака тачка $a \in A$ идентификује са $f(a) \in Y$.

Ако је X тополошки простор, σ n-ћелија и $f_\sigma : \mathrm{Bd}(\sigma) \to X$ непрекидно пресликавање, тада је резултат додавања ћелије σ на простор X по пресликавању f_σ простор $X \cup_{f_\sigma} \sigma$.

Приметимо да пресликавање f_σ одређује начин на који се n-ћелија σ додаје на простор X. Различита пресликавања f_σ дају различите резултујуће просторе $X \cup_{f_\sigma} \sigma$. Пресликавање f_σ се још назива и *карактеристично пресликавање*.

Дефиниција 1.14. Коначан CW комплекс X је тополошки простор који се индуктивно гради почевиши од простора $X^{(0)}$, који је скуп 0-ћелија (односно тачака). Простор $X^{(k)}$, $k > 0$, гради се додавањем k-ћелија на простор $X^{(k-1)}$. Скуп $X^{(k)} \subset X$ називамо k-скелетом простора X и важи $X = \bigcup_{k=0}^{n} X^{(k)}$, за неки природан број n.

За $k \neq 0$, могуће је да CW комплекс X не садржи ниједну k-ћелију. На пример, 2-сфера може бити конструисана од једне 0-ћелије и једне 2-ћелије, дакле, оваква CW декомпозиција не садржи ниједну 1-ћелију.

Као и у случају апстрактних симплицијалних комплекса, фундаментална група CW комплекса потпуно је одређена њиховим 2-скелетом. Посматрајмо коначан CW комплекс X који има једну 0-ћелију. Крајеви сваке 1-ћелије у простору X идентификовани су са 0-ћелијом, према томе, формирају кружницу. Свака од тих кружница је један од генератора групе $\pi_1(X)$.

Нека је σ произвољна 2-ћелија у X. Приметимо да граница 2-ћелије σ формира петљу у $X^{(1)}$. Са друге стране, граница $\mathrm{Bd}(\sigma)$ идентификована је са низом 1-ћелија и нулхомотопна је у σ. Према томе, $\mathrm{Bd}(\sigma) = 1$ је релација групе $\pi_1(X)$.

На основу претходних разматрања, закључујемо да $\pi_1(X)$ има презентацију у којој генераторима одговарају 1-ћелије, док су релације одређене 2-ћелијама простора X.

Глава 2

Дискретна теорија Морса

Низом елементарних колапса над неким симплицијалним комплексом добија се комплекс који је истог хомотопског типа као полазни, али има једноставнију комбинаторну структуру, тј. мањи број симплекса. Ако је K прозвољан симплицијални комплекс и α слободно лице максималног симплекса β у K, при чему је $\dim\alpha = \dim\beta - 1$, тада колапс $K \setminus \alpha$ можемо комбинаторно представити као пар $\{\alpha, \beta\}$. Међутим, произвољан низ парова не представља нужно и низ симплицијалних колапса. Дискретна теорија Морса уводи организацију у процес избора парова, при чему је основни критеријум да низ одабраних парова представља низ могућих симплицијалних колапса. На тај начин постижу се доста добри резултати у погледу смањења броја симплекса, што даље олакшава одређивање хомотопског типа. Детаљан приказ дискретне теорије Морса може се наћи у радовима [12, 13] Робина Формана, аутора ове теорије. На поменуте радове ослањамо се и ми приликом писања ове главе.

2.1 Дискретна Морсова функција

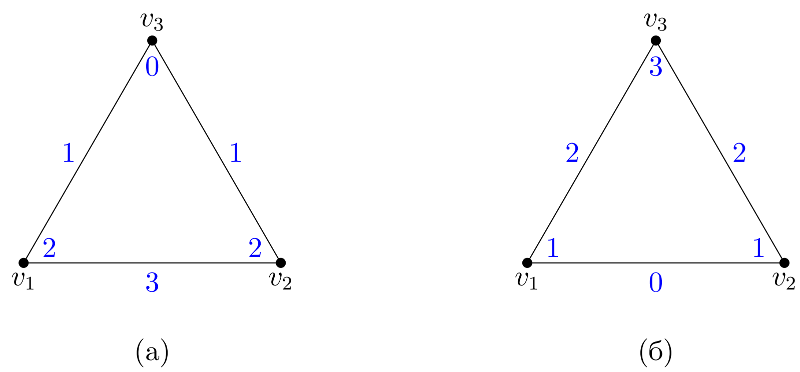
Дискретна Морсова функција на комплексу K је функција која симплексима додељује нумеричке вредности. Додељивање вредности врши се, грубо говорећи, на следећи начин - симплексима већих димензија додељују се веће вредности, при чему је могућа највише једна „грешка" локално, за сваки симплекс комплекса K. У наставку је дата прецизна дефиниција дискретне Морсове функције.

Дефиниција 2.1. Нека је K симплицијални комплекс. Функција $f : K \to \mathbb{R}$ је *дискретна Морсова функција* ако за свако $\alpha^{(p)} \in K$ важи:

(1) $f(\beta^{(p+1)}) \le f(\alpha^{(p)})$ за највише један симплекс $\beta^{(p+1)} \supset \alpha^{(p)}$,

(2) $f(\beta^{(p-1)}) \ge f(\alpha^{(p)})$ за највише један симплекс $\beta^{(p-1)} \subset \alpha^{(p)}$.

Пример дискретне Морсове функције дат је на слици 2.1(а). Са друге стране, функција дата на слици 2.1(б) није дискретна Морсова финкција. Наиме, 0-симплекс $\{v_3\} = f^{-1}(3)$ је лице 1-симплекса $\{v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_3\}$, при чему је $f(\{v_1, v_3\}) = f(\{v_2, v_3\}) = 2$, па је нарушен захтев (1) претходне дефиниције. Даље, 2-симплекс $\{v_1, v_2\} = f^{-1}(0)$ садржи лица $\{v_1\}$ и $\{v_2\}$ за која важи $f(\{v_1\}) = f(\{v_2\}) = 1$, чиме је нарушен захтев (2) претходне дефиниције.



Слика 2.1: (а) Дискретна Морсова функција, (б) Није дискретна Морсова функција

Приметимо да комплекс дат на слици 2.1(а) садржи симплексе $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_3\}$ који немају ниједну локалну „грешку”. Овакве симплексе називамо *критични симплекси*.

Дефиниција 2.2. Нека је $f : K \to \mathbb{R}$ дискретна Морсова функција. Симплекс $\alpha^{(p)}$ је *критичан* ако важи следеће:

(1) $f(\beta^{(p+1)}) > f(\alpha^{(p)})$ за сваки симплекс $\beta^{(p+1)} \supset \alpha^{(p)}$,

(2) $f(\beta^{(p-1)}) < f(\alpha^{(p)})$ за сваки симплекс $\beta^{(p-1)} \subset \alpha^{(p)}$.

Испоставља се да су критични симплекси у тесној вези са топологијом симплицијалног комплекса. Поменута веза прецизирана је у наредној теореми.

Теорема 2.1 (Лема 2.5, [12]). *Нека је K симплицијални комплекс и $f : K \to \mathbb{R}$ дискретна Морсова функција. Комплекс K хомотопан је CW комплексу који има по једну ћелију димензије p за сваки критичан симплекс димензије p.*

Уместо доказа претходне теореме описаћемо основну идеју дискретне теорије Морса. Дискретна Морсова функција дефинише начин на који може бити изграђен неки симплицијални комплекс. Принцип је следећи - прво се додају симплекси на којима је вредност дискретне Морсове функције мања, а затим симплекси на којима је вредност функције већа. Прецизније, за сваки симплицијални комплекс K, дискретну Морсову функцију f и број $c \in \mathbb{R}$ дефинишемо комплекс $K(c)$ на следећи начин:

$$K(c) = \bigcup_{f(\alpha) \leq c} \left(\bigcup_{\beta \subseteq \alpha} \beta \right).$$

Како је

$$K = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} K(c),$$

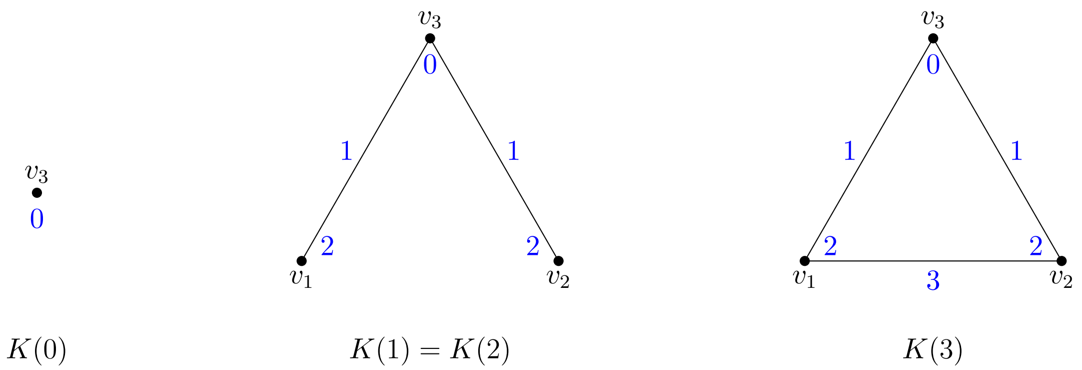
теорема 2.1 следи на основу следећих лема.

Лема 2.1 (Лема 2.6, [12]). *Уколико не постоје критични симплекси $\alpha \in K$ такви да $f(\alpha) \in (a, b]$, тада је комплекс $K(b)$ хомотопски еквивалентан комплексу $K(a)$, заправо $K(b) \searrow K(a)$.*

Лема 2.2 (Лема 2.7, [12]). *Уколико постоји један критични симплекс α такав да $f(\alpha) \in (a, b]$, тада постоји пресликавање $F : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow K(a)$, где је $d = \dim \alpha$, такво да је комплекс $K(b)$ хомотопски еквивалентан комплексу $K(a) \cup_F \mathbb{B}^d$.*

Уколико приликом грађења комплекса K прелазимо са поткомплекса $K(a)$ на поткомплекс $K(b)$ разликујемо две ситуације. Ако се комплекс $K(b)$ гради од комплекса $K(a)$ додавањем симплекса који нису критични, тада сваки од тих симплекса има слободно лице у $K(b)$. Слободна лица одговарају управо лицима α за која важи $b < f(\alpha)$. Према томе, $K(b) \searrow K(a)$. Овај случај прецизно описује лема 2.1. Други случај, описан у леми 2.2, односи се на ситуацију када се комплекс $K(b)$ гради од комплекса $K(a)$ додавањем симплекса који су критични. За сва лица α додатих критичних симплекса важи $f(\alpha) \leq a$, па $\alpha \in K(a)$. На основу претходног, границе критичних симплекса такође припадају скупу $K(a)$. Закључујемо да се поткомплекс $K(b)$ добија лепљењем граница критичних комплекса на поткомплекс $K(a)$.

На слици 2.2 приказан је процес грађења симплицијалног комплекса датог на слици 2.1(а) на основу задате дискретне Морсове функције f. Изградња комплекса почиње од комплекса $K(0)$. Комплекс $K(1)$ гради се додавањем симплекса $\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\} = f^{-1}(1)$ на комплекс $K(0)$. Симплекси $\{v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_3\}$ нису критични јер садрже лица $\{v_1\}$ и $\{v_2\}$, таква да је $\{\{v_1\}, \{v_2\}\} = f^{-1}(2)$. Да би $K(1)$ био симплицијални комплекс морају бити додата и темена v_1 и v_2. Дакле, симплекси $\{v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_3\}$ садрже слободна лица у $K(1)$. Према томе, $K(1) \searrow K(0)$. Исто важи и за $K(2)$, односно $K(2) \searrow K(0)$. Приликом изградње комплекса $K(3)$ потребно је додати 1-симплекс $\{v_1, v_2\}$ на комплекс $K(2)$. Међутим, симплекс $\{v_1, v_2\}$ је критичан, што значи да функција f има мању вредност на сваком од његових лица него на њему самом. Другим речима, лица комплекса $\{v_1, v_2\}$ садржана су у $K(2)$, па је самим тим и његова граница садржана у $K(2)$. Како је $K(2) \simeq v_3$, комплекс $K(3)$ хомотопски је еквивалентан комплексу добијеном лепљењем границе симплекса $\{v_1, v_2\}$ на тачку v_3. Према томе, комплекс $K(3)$ је хомотопски еквивалентан 1-сфери, простору чија ћелијска декомпозиција има једну 0-ћелију и једну 1-ћелију, баш како предвиђа теорема 2.1.



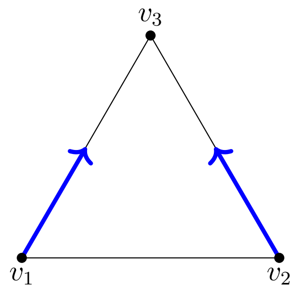
Слика 2.2: Грађење комплекса на основу придружене дискретне Морсове функције

На сваком комплексу K може се дефинисати дискретна Морсова функција $f : K \to \mathbb{R}$ на једноставан начин: ако $\alpha \in K$ тада је $f(\alpha) = \dim \alpha$. Међутим, за овако дефинисану дискретну Морсову функцију f сви симплекси су критични, па оваква функција није занимљива са становишта испитивања топологије комплекса K. Дискретна теорија Морса показује своју пуну снагу онда када дискретна Морсова функција има што је могуће мање критичних симплекса. Следећа глава описује на који начин можемо олакшати проналажење одговарајуће дискретне Морсове функције.

2.2 Градијентно векторско поље

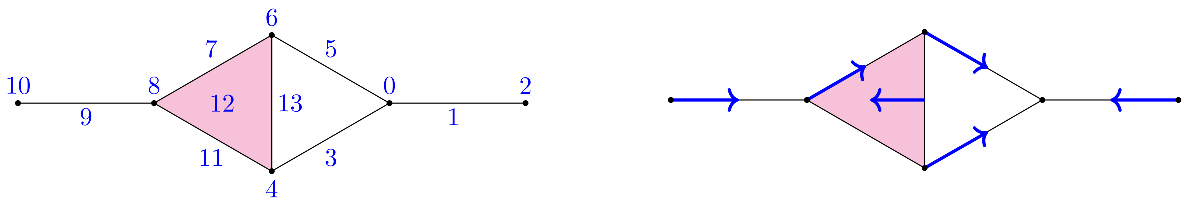
Као што смо већ нагласили, проналажење ефикасне дискретне Морсове функције не представља лак задатак у општем случају. Срећом, у пракси није потребно експлицитно дефинисати дискретну Морсову функцију, довољно је одредити градијентно векторско поље за дискретну Морсову функцију.

Вратимо се опет на симплицијални комплекс дат на слици 2.1(a). Приметимо да се симплекси који нису критични јављају у пару. На пример, симплекси $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_3\}$ нису критични зато што је $f(\{v_1\}) > f(\{v_1, v_3\})$ и $f(\{v_2\}) > f(\{v_2, v_3\})$. Пар $\{\{v_1\}, \{v_1, v_3\}\}$ можемо репрезентовати стрелицом која иде од симплекса $\{v_1\}$ ка симплексу $\{v_1, v_3\}$. Слично, пару $\{\{v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$ придружујемо стрелицу која иде од симплекса $\{v_2\}$ ка симплексу $\{v_2, v_3\}$ (видети слику 2.3).



Слика 2.3: Градијентно векторско поље дискретне Морсове функције дефинисане на слици 2.1(a)

Генерално, ако је K било који симплицијални комплекс и $f : K \to \mathbb{R}$ дискретна Морсова функција тада сваком симплексу који није критичан можемо придружити стрелицу. Наиме, ако је $\alpha^{(p)} \in K$ некритичан симплекс, тада постоји $\beta^{(p+1)}$, тако да је $\alpha^{(p)} \subset \beta^{(p+1)}$ и $f(\beta^{(p+1)}) \leq f(\alpha^{(p)})$. Пар $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\}$ представљамо стрелицом која иде од симплекса мање димензије $\alpha^{(p)}$ ка симплексу веће димензије $\beta^{(p+1)}$.



Слика 2.4: Прелаз са дискретне Морсове функције на њено градијентно векторско поље

Поставља се питање да ли сваки симплекс припада тачно једном пару. Потврдан одговор проистиче из саме дефиниције дискретне Морсове функције. Ако је $\alpha^{(p)}$ произвољан симплекс у комплексу K, тада не постоје симплекси $\beta^{(p-1)} \subset \alpha^{(p)} \subset \gamma^{(p+1)}$ такви да је $f(\beta^{(p-1)}) \geq f(\alpha^{(p)}) \geq f(\gamma^{(p+1)})$. Ако би такви симплекси постојали, тада би за неки симплекс $\delta^{(p)}$ за који важи $\beta^{(p-1)} \subset \delta^{(p)} \subset \gamma^{(p+1)}$ имали $f(\beta^{(p-1)}) < f(\delta^{(p)})$. Из претходног следи да је $f(\gamma^{(d+1)}) \leq f(\alpha^{(p)})$ и $f(\gamma^{(d+1)}) < f(\delta^{(p)})$, што је немогуће.

Дефиниција 2.3. *Дискретно векторско поље* V симплицијалног комплекса K је скуп парова $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\}$, где је $\alpha^{(p)} \subset \beta^{(p+1)}$ и сваки симплекс налази се у највише једном пару. Пар $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\}$ називамо *упаривање* у V. Симплекс $\gamma \in K$ је критичан или неупарен у односу на V уколико не припада ниједном пару у V.

Скуп свих симплекса комплекса K који су неупарени у односу на V означаваћемо са $\mathcal{C}(K, V)$.

Свакој дискретној Морсовој функцији f можемо придружити дискретно векторско поље на следећи начин:

$$V = \{\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\} \,|\, \alpha^{(p)} \subset \beta^{(p+1)} \text{ и } f(\alpha^{(p)}) \geq f(\beta^{(p+1)})\}$$

Овако дефинисано дискретно векторско поље називамо *градијентно векторско поље функције* f.

Дакле, на основу дискретне Морсове функције може се дефинисати дискретно векторско поље. Међутим, много занимљивије питање је када се за неко дискретно векторско поље може тврдити да је градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције f. Испоставља се да су дискретна Морсова функција и дискретно векторско поље под неким условима еквивалентни концепти.

Дефиниција 2.4. Нека је V дискретно векторско поље дефинисано на симплицијалном комплексу K. V*-путања* је низ симплекса

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \ldots, \alpha_{r+1}^{(p)}, \beta_{r+1}^{(p+1)},$$

таквих да, за свако $i \in \{0, \ldots, r\}$, пар $\{\alpha_i, \beta_i\} \in V$ и $\beta_i \supset \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$. Ова путања је нетривијална и *затворена* ако је $r > 0$ и $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$.

Уколико дискретно векторско поље V не садржи нетривијалне затворене путање кажемо да је V *ациклично*.

Посматрајмо градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције f. Ако је

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \ldots, \alpha_{r+1}^{(p)}, \beta_{r+1}^{(p+1)}$$

произвољна путања у овом пољу, следи да је

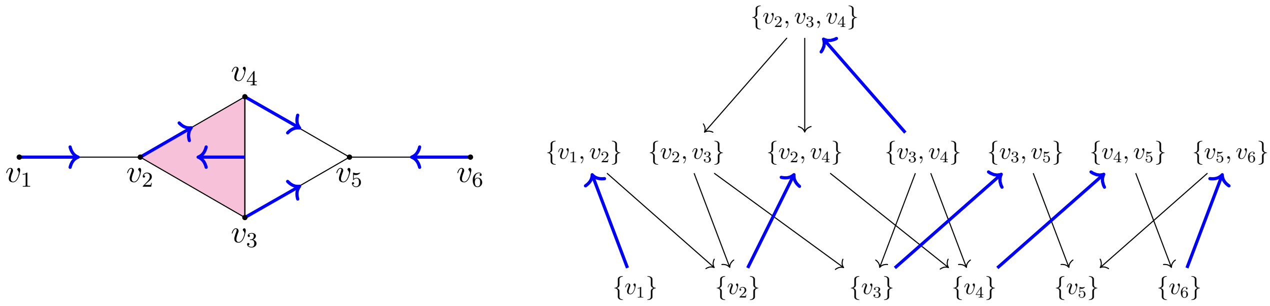
$$f(\alpha_0^{(p)}) \geq f(\beta_0^{(p+1)}) > f(\alpha_1^{(p)}) \geq f(\beta_1^{(p+1)}) > \ldots \geq f(\beta_{r+1}^{(p+1)}) > f(\alpha_{r+1}^{(p)}).$$

Према томе, градијентно векторско поље не садржу нетривијалне затворене путање. Наредна теорема показује да важи и обрнуто. Односно, свако дискретно векторско поље које је ациклично јесте градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције.

Теорема 2.2 (Теорема 3.4, [12]). *Дискретно векторско поље V дефинисано на симплицијалном комплексу K је градијентно векторско поље неке Морсове функције f ако и само ако је V ациклично.*

2.3 Модификован Хасеов дијаграм

Упаривање $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\}$ у неком дискретном векторском пољу V дефинисаном на симплицијалном комплексу K одговара стрелици чији је врх у $\alpha^{(p)}$ а реп иде ка симплексу $\beta^{(p+1)}$. У складу са тим, дискретном векторском пољу V можемо придружити модификован Хасеов дијаграм комплекса K. Модификација дијаграма врши се на следећи начин: за сваки пар $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\} \in V$ уместо ивице која иде од $\beta^{(p+1)}$ ка $\alpha^{(p)}$ додајемо ивицу која иде од $\alpha^{(p)}$ ка $\beta^{(p+1)}$. Модификовани Хасеов дијаграм означавамо са $D(K, V)$.



Слика 2.5: Комплекс и придружени модификовани Хасеов дијаграм

Усмерену путању од симплекса α до симплекса β у диграфу $D(K, V)$ означаваћемо краће са $\alpha \longrightarrow \beta$. Лако се може проверити да ацикличном дискретном векторском пољу V одговара ацикличан диграф $D(K, V)$. Односно, уколико је V ациклично, тада за свака два симплекса α и β за која важи $\alpha \longrightarrow \beta$ и $\beta \longrightarrow \alpha$ у $D(K, V)$ следи да је $\alpha = \beta$. Када желимо да нагласимо да између два симплекса α и β не постоји усмерена путања користићемо ознаку $\alpha \not\longrightarrow \beta$. Генерално, уколико између фамилија K_1, K_2 постоји путања, односно, ако постоје $\alpha \in K_1$ и $\beta \in K_2$ такви да $\alpha \longrightarrow \beta$ у $D(K, V)$, пишемо $K_1 \longrightarrow K_2$. Уколико таква путања не постоји, користимо ознаку $K_1 \not\longrightarrow K_2$.

Следећа теорема, коју ћемо често користити у даљем раду, даје услов када неки комплекс може бити колапсиран до свог правог поткомплекса.

Теорема 2.3 (Теорема 4.4, [18]). *Нека је L поткомплекс симплицијалног комплекса K. Ако $L \not\longrightarrow K \setminus L$ и сви критични симплекси припадају комплексу L, тада је могуће извршити симплицијални колапс од комплекса K до поткомплекса L. Односно, тада су комплекси K и L хомотопски еквивалентни.*

Доказ. Нека је симплекс $\alpha \in K \setminus L$ упарен са симплексом $\beta \in K$. Ако $\beta \in L$, тада $\alpha \not\subset \beta$, јер је L поткомплекс. Дакле, $\beta \subset \alpha$. Међутим, тада постоји путања од L до $K \setminus L$, па закључујемо да $\beta \notin L$.

Посматрајмо симплекс $\alpha \in K \setminus L$ такав да за свако $\gamma \in K$ важи $\gamma \not\longrightarrow \alpha$. Овакав симплекс α сигурно постоји, иначе би постојала затворена путања у модификованом Хасеовом дијаграму или би постојала путања од L од $K \setminus L$. На основу првог дела доказа, постоји $\beta \in K \setminus L$ упарено са α, такво да је $\dim \beta = \dim \alpha + 1$. На основу претходног, симплекс α је слободно лице симплекса β. Дакле, могућ је колапс $K \setminus \{\alpha\}$. Како рестрикција градијентног векторског поља на $K \setminus \{\alpha\}$ задржава особине градијентног векторског поља на K, доказ даље следи индукцијом. $\square$

Глава 3

Фоксов рачун

Приликом испитивања одређених симплицијалних комплекса посебну пажњу поклањаћемо анализи њихових фундаменталних група. Како се фундаментална група било ког симплицијалног комплекса може задати генераторима и скупом релација, јавља се потреба за анализом тих презентација. Прецизније, биће потребно испитати да ли две различите презентације дефинишу изоморфне групе. Проблем изоморфности група које имају различите презентације је нерешив проблем у општем случају. У овој глави представљамо Фоксов рачун, ефикасан метод помоћу кога се у неким случајевима може детектовати неизоморфност група на основу инваријанти придружених њиховим презентацијама. Приликом писања ослањамо се пре свега на књигу [10].

3.1 Извод

Нека је G мултипликативна група и $\mathbb{Z}G$ одговарајући групни прстен над прстеном целих бројева. Симбол 1 користићемо и за означавање целог броја 1 и за означавање неутрала у групи G, при чему ће значење бити јасно из контекста.

Дефиниција 3.1. Функцију $D : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ називамо *изводом* у групном прстену $\mathbb{Z}G$ ако су за све $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}G$ задовољени следећи услови:

(1) $D(v_1 + v_2) = D(v_1) + D(v_2)$,

(2) $D(v_1 v_2) = D(v_1)t(v_2) + v_1 D(v_2)$,

где је $t : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ пресликавање дефинисано са $t(\sum n_i g_i) = \sum n_i$.

Приметимо да за елементе $g_1, g_2 \in G$ услов (2) претходне теореме има једноставнију форму

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) + g_1 D(g_2).$$

Нетривијални извод постоји у сваком групном прстену $\mathbb{Z}G$. Лако се провери да је један такав извод задат пресликавањем које слика $g \mapsto g - 1$, за све $g \in G$. Додатно, уколико су D, D' изводи у групном прстену $\mathbb{Z}G$ и $v_0 \in \mathbb{Z}G$ произвољан елемент, тада су и пресликавања $D + D'$ и $D \circ v_0$, дефинисана са

$$\begin{aligned}(D + D')(v) &= D(v) + D'(v),\\ (D \circ v_0)(v) &= D(v)v_0,\end{aligned}$$

за све $v \in \mathbb{Z}G$, такође изводи у групном прстену $\mathbb{Z}G$.

Из дефиниције може се лако закључити да је извод D адитивни хомоморфизам, односно, да је $D(\sum n_i g_i) = \sum n_i D(g_i)$, за све $n_i \in \mathbb{Z}$ и $g_i \in G$. Како је $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$, закључујемо да је $D(1) = 0$, па је и $D(n) = 0$ за све $n \in \mathbb{Z}$. Такође, $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)$, за све $g \in G$. Претходно следи из чињенице да је $0 = D(g^{-1}g) = D(g^{-1}) + g^{-1}D(g)$. Користећи индукцију, лако се може доћи до закључка да је

$$D(g^n) = \frac{g^n - 1}{g - 1} D(g),$$

за све $n \in \mathbb{Z}$.

Из чињенице да је D је адитивни хомоморфизам следи и да је он потпуно одређен вредностима које има на скупу генератора групе G.

Посматрајмо слободну коначно генерисану групу $F = F(X)$ чија је база $\{x_1, \dots, x_n\}$ и њен групни прстен $\mathbb{Z}F$ над прстеном целих бројева.

Теорема 3.1 (Тврђење 2.9, [10]). *Нека $i \in \{1, \dots, n\}$. Тада постоји јединствени извод $D_i = \partial/\partial x_i : \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}F$, такав да за све $k \in \{1, \dots, n\}$ важи*

$$D_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i = k, \\ 0, & \text{ако је } i \neq k. \end{cases}$$

Извод D_i се назива и *извод по* x_i. Јединственост извода D_i следи из чињенице да је он дефинисан на скупу генератора групе F.

Пример 3.1. Нека је $F = \langle x, y \rangle$. Извод елемента $x^3yx^{-1}y^2 \in \mathbb{Z}F$ по x је:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^3yx^{-1}y^2)}{\partial x} &= \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + x^3 \frac{\partial(yx^{-1}y^2)}{\partial x} = \frac{x^3-1}{x-1} + x^3\left(\frac{\partial(y)}{\partial x} + y\frac{\partial(x^{-1}y^2)}{\partial x}\right) \\ &= \frac{x^3-1}{x-1} + x^3y\left(\frac{\partial(x^{-1})}{\partial x} + x^{-1}\frac{\partial(y^2)}{\partial x}\right) = \frac{x^3-1}{x-1} - x^3yx^{-1} + x^3yx^{-1}\frac{\partial(y^2)}{\partial x} \\ &= \frac{x^3-1}{x-1} - x^3yx^{-1} \end{aligned}$$

3.2 Александерова матрица

Посматрајмо групу $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \,|\, r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ и канонски хомоморфизам

$$\gamma : F(X) \longrightarrow F(X)/R,$$

где је $F(X)$ слободна група генерисана скупом елемената $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и R нормална подгрупа од $F(X)$ генерисана релаторима $r_1, r_2, \dots, r_m$. Јасно је да је $G \cong F(X)/R$. Ако је $\alpha : G \to G^{ab}$ абелизација групе G, тада постоји следећи низ пресликавања:

$$\mathbb{Z}F \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}G^{ab}. \tag{3.1}$$

Приметимо да претходним низом пресликавања са некомутативног прстена, какав је $\mathbb{Z}F$, прелазимо на комутативан прстен $\mathbb{Z}G^{ab}$. Како у комутативним прстенима можемо рачунати детерминанте уводимо следећу матрицу.

Александерова матрица презентације $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$ је матрица (a_{ij}) димензије $m \times n$, где је

$$a_{ij} = \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right).$$

С обзиром на то да рачунање елемената Александерове матрице подразумева налажење извода потенцијално компликованих релатора, у наставку дајемо алгоритам којим се за презентацију групе G рачуна њој придружена Александерова матрица.

Алгоритам 2 Александерова матрица

Улаз: Коначна група G дата листом генератора $gens$ и листом релатора $rels$. Сваки елемент листе $rels$ је релатор који је представљен листом степена генератора.

Излаз: Александерова матрица групе G

```
function Izvod(relation, generator)
    head ← Glava(relation);
    tail ← Rep(relation);
    headGen ← генератор чији је степен head;
    if Rep(relation) је празна листа then
        if headGen == generator then
            return (head − 1)/(generator − 1)^{−1};
        else
            return 0;
        end if
    else
        return Izvod(head)+head*Izvod(tail);
    end if
end function;

function AleksanderovaMatrica(rels, gens)
    m ← нула матрица димензије Duzina(rels) × Duzina(gens);
    abelization ← нула листа димензије Duzina(gens);
    for i = 1, i < Duzina(gens), i + + do
        abelization[i] ← генератор у абелизацији групе G који одговара генератору gens[i];
    end for
    for i = 1, i <= Duzina(rels), i + + do
        for j = 1, j <= Duzina(gens), j + + do
            m[i, j] ← Izvod(rels[i], gens[j]);
            for k = 1, k <= Duzina(gens), k + + do
                свако појављивање gens[k] у m[i, j] замењено са abelization[k];
            end for
        end for
    end for
    return m;
end function;
```

Дефинисање Александерове матрице и рачунање детерминанти њених подматрица представља главни корак у конструкцији *низа елементарних идеала*, инваријанте коју ћемо користити за детекцију неизоморфности група.

3.3 Низ елементарних идеала

Дефиниција 3.2. Нека је A матрица формата $m \times n$ чији су коефицијенти елементи прстена R, *k-ти елементарни идеал* матрице A, у ознаци $E_k(A)$, дефинишемо на следећи начин:

$$E_k(A) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n-k > m \\ R, & \text{ако } n-k \leq 0 \\ \text{идеал генерисан детерминантама свих} & \\ (n-k) \times (n-k) \text{ подматрица матрице } A, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Како је детерминанта сваке матрице једнака комбинацији одговарајућих кофактора, елементарни идеали формирају неопадајући низ:

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_{n-1} = E_n = E_{n+1} \ldots = R.$$

За матрице A и A' кажемо да су *еквивалентне*, у ознаци $A \sim A'$, ако постоји (коначан) низ матрица

$$A = A_1, \ldots, A_n = A',$$

таквих да је матрица A_{i+1} добијена од матрице A_i неком од следећих операција:

(1) пермутовањем врста или колона,

(2) додавањем врсти (колони) линеарне комбинације других врста (колона),

(3) додавањем нула-врсте,

(4) додавањем врсте и колоне таквих да је у њиховом пресеку 1, док су на осталим местима нуле.

Низом претходно наведених операција од полазне матрице може се добити једноставнија еквивалентна матрица. Следећа теорема указује на то да се приликом рачунања низа елементарних идеала може искористити било која матрица еквивалентна полазној. Такође, наредна теорема имаће кључну улогу у доказивању инваријантности низа елементарних идеала у односу на изоморфне групе.

Теорема 3.2 (Тврђење 4.2, [10]). *Еквивалентне матрице дефинишу исти низ елементарних идеала.*

Доказ. Нека су A и A' еквивалентне матрице, при чему је матрица A' добијена од матрице A неком од горенаведених операција (1)-(4). Покажимо да је $E_k(A) = E_k(A')$, за све $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Уколико је матрица A' добијена од матрице A операцијом (1) или (2) једнакост $E_k(A) = E_k(A')$ следи на основу основних особина детерминанте. У случају операције (1), једнакост следи из чињенице да је детерминанта до на знак инваријантна у односу на операције пермутовања врста или колона. Ако је матрица A' добијена операцијом

(2) од матрице A, на основу Лапласовог развоја, сваки генератор идеала $E_k(A')$ је генератор идеала $E_k(A)$, или је линеарна комбинација генератора идеала $E_k(A)$. Дакле, $E_k(A') \subseteq E_k(A)$. Аналогно, на основу Лапласовог развоја, важи и $E_k(A) \subseteq E_k(A')$, па је $E_k(A') = E_k(A)$.

Нека је $m \times n$ димензија матрице A и $m' \times n'$ димензија матрице A'. Размотримо случајеве у којима је матрица A' добијена операцијом (3) или (4) од матрице A. Претпоставимо да је A' добијена операцијом (3) од матрице A. Дакле, $n' = n$ и $m' = m + 1$. Ако је $0 \leq n' - k \leq m$, тада је $0 \leq n - k \leq m$, па је $E_k(A') = E_k(A)$. У случају када је $n - k = m'$ из дефиниције елементарних идеала следи да је $E_k(A) = 0$. Са друге стране, $E_k(A')$ је идеал генерисан детерминантама свих $m' \times m'$ подматрица матрице A'. Последња врста сваке од тих подматрица је нула-врста, па је $E_k(A') = 0$.

Испитајмо и једини преостали случај, тј. нека је матрица A' добијена операцијом (4) од матрице A. Тада важи да је $n' = n + 1$ и $m' = m + 1$. Уколико је $n - k > m$, тада је $n' - k = (n + 1) - k > m + 1 = m'$, па директно следи да је $E_k(A') = E_k(A) = 0$. Ако је $n - k < 0$, тада је $n' - k \leq 0$, па је $E_k(A') = E_k(A) = R$. У случају када је $n - k = 0$ следи да је $n' - k = 1$. Идеал $E_{n'-1}(A')$ је генерисан свим елементима матрице A'. Како је јединица један од елемената матрице A', следи да је $E_{n'-1}(A') = R$. Коначно, нека је $0 < n - k \leq m$. Свака подматрица B матрице A која има димензију $(n - k) \times (n - k)$ може бити допуњена до матрице $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ димензије $(n' - k) \times (n' - k)$. Како ове две матрице имају исту детерминанту, следи да је $E_k(A) \subseteq E_k(A')$. Обрнуто, на основу Лапласовог развоја, свака детерминанта подматрице матрице A' димензије $(n' - k) \times (n' - k)$ је линеарна комбинација детерминанти подматрица матрице A које су димензије $(n - k) \times (n - k)$. Према томе, $E_k(A') \subseteq E_k(A)$. Закључујемо да је и у овом случају $E_k(A') = E_k(A)$. $\square$

Нека је $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$ произвољна презентација, коју ћемо краће обележавати са $\langle X \,|\, R \rangle$. k-ти елементарни идеал презентације $\langle X \,|\, R \rangle$ дефинишемо као k-ти елементарни идеал Александерове матрице придружене презентацији $\langle X \,|\, R \rangle$.

3.4 Инваријантност низа елементарних идеала

Ако су $\langle X \,|\, R \rangle$ и $\langle X' \,|\, R' \rangle$ две презентације, тада за ове презентације кажемо да су истог типа уколико генеришу изоморфне групе. Следеће трансформације произвољне презентације $\langle X \,|\, R \rangle$ чувају њен тип. Шта више, уколико су две презентације истог типа, тада се једна може добити од друге коначним низом следећих трансформација:

трансформација I**:** Додавање релатора s који је последица релатора из R. Резултујућа презентација је $\langle X \,|\, R \cup \{s\} \rangle$.

трансформација I$'$**:** Брисање релатора s из скупа релатора R уколико је s последица релатора из $R \setminus \{s\}$. Резултујућа презентација је $\langle x \,|\, R \setminus \{s\} \rangle$.

трансформација II**:** Додавање генератора $y \notin X$ и релације $y^{-1}\xi = 1$, где је $\xi \in F(X)$. Резултујућа презентација је $\langle X \cup \{y\} \,|\, R \cup \{y^{-1}\xi\} \rangle$.

трансформација II$'$**:** Брисање генератора y уколико се он може изразити преко генератора из $X \setminus y$ и замена сваког појављивања генератора y одговарајућим изразом.

Јасно је да су трансформације I и I′ инверзне. Аналогно важи за трансформације II и II′. Претходне трансформације познате су као *Тицеове трансформације.*

У наставку следи најважнија теорема ове главе у којој је показана инваријантност низа елементарних идеала у односу на презентације истог типа. Доказ инваријантности низа елементарних идеала базиран је управо на ефекту Тицеових трансформација на Александерову матрицу презентације. С обзиром на инверзност трансформација I и I′, односно трансформација II и II′, довољно је посматрати шта се дешава са придруженом Александеровом матрицом применом Тицеових трансформација I и II на презентацију којој је придружена.

Теорема 3.3. *Нека су $\langle X \mid R\rangle$ и $\langle X' \mid R'\rangle$ две различите презентације истог типа, тада је k-ти елементарни идеал презентације $\langle X \mid R\rangle$ изоморфан k-том елементарном идеалу презентације $\langle X' \mid R'\rangle$.*

Доказ. Нека је презентација $\langle X \mid R \cup \{s\}\rangle$ добијена применом Тицеове трансформације I на презентацију $\langle X \mid R\rangle$, где је $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $R = \{r_1, \dots, r_m\}$. Покажимо да су матрице придрижене презентацијама $\langle X \mid R\rangle$ и $\langle X \mid R \cup \{s\}\rangle$ еквивалентне. Релатор s је последица релатора $r_1, \dots, r_m$ па следи да је

$$s = \prod_{k=1}^{p} g_k r_{i_k}^{\alpha_k} g_k^{-1}, \quad g_k \in F(X).$$

Према томе,

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(g_1 r_{i_1}^{\alpha_1} g_1^{-1}) + g_1 r_{i_1}^{\alpha_1} g_1^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(g_2 r_{i_2}^{\alpha_2} g_2^{-1}) + \ldots + \prod_{k=1}^{p-1}(g_k r_{i_k}^{\alpha_k} g_k^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_j}(g_p r_{i_p}^{\alpha_p} g_p^{-1}).$$

Из чињенице да је $\gamma(r_i) = 1$ можемо закључити да је

$$\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(g_k r_{i_k}^{\alpha_k} g_k^{-1})\right).$$

Како је

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g_k r_{i_k}^{\alpha_k} g_k^{-1}) = \frac{\partial g_k}{\partial x_j} + g_k \frac{r_{i_k}^{\alpha_k} - 1}{r_{i_k} - 1} \frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j} - g_k r_{i_k}^{\alpha_k} g_k^{-1} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

и

$$\gamma\left(\frac{r_{i_k}^{\alpha_k} - 1}{r_{i_k} - 1}\right) = \alpha_k$$

следи да је

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(g_k r_{i_k}^{\alpha_k} g_k^{-1})\right) = \alpha_k \gamma(g_k) \gamma\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right).$$

Означимо са $m_k = \alpha_k \alpha(\gamma(g_k))$. Тада је

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} m_k \alpha\left(\gamma\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right)\right). \tag{$\star$}$$

Матрица

$$A_{\langle X\,|\,R\rangle}=\begin{bmatrix} \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}\right)\\ \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2}\right)\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}\right)\end{bmatrix}$$

је Александерова матрица презентације $\langle X\,|\,R\rangle$, док је

$$A_{\langle X\,|\,R\cup\{s\}\rangle}=\begin{bmatrix} \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}\right)\\ \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_n}\right)\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}\right)\\ \alpha\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right) & \cdots & \alpha\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_n}\right)\end{bmatrix}$$

Александерова матрица презентације $\langle X\,|\,R\cup\{s\}\rangle$. Матрица $A_{\langle X\,|\,R\cup\{s\}\rangle}$ има једну додатну врсту у односу на матрицу $A_{\langle X\,|\,R\rangle}$. На основу $(\star)$ следи да је та додатна врста линеарна комбинација преосталих врста матрице $A_{\langle X\,|\,R\cup\{s\}\rangle}$. Дакле, $A_{\langle X\,|\,R\cup\{s\}\rangle}\sim A_{\langle X\,|\,R\rangle}$. Према томе, на основу Теореме 3.2 следи тврђење теореме.

Размотримо преостали случај. Нека је презентација $\langle X\cup\{y\}\,|\,R\cup\{y^{-1}\xi\}\rangle$ добијена Тицеовом трансформацијом II од презентације $\langle X\,|\,R\rangle$. Како $\xi\in F(X)$ и $y\notin X$ следи да је

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial y}\right)=0\quad\text{и}\quad\alpha\gamma\left(\frac{\partial y\xi^{-1}}{\partial y}\right)=1.$$

Обележимо са $a_i=\alpha\gamma\left(\frac{\partial y\xi^{-1}}{\partial x_i}\right)$. Тада је

$$A_{\langle X\cup\{y\}\,|\,R\cup\{y\xi^{-1}\}\rangle}=\begin{bmatrix} A_{\langle X|R\rangle} & 0\\ a & 1\end{bmatrix},$$

где је $a=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$. Применом операција (4) и (2) матрица $A_{\langle X\,|\,R\rangle}$ може се трансформисати у матрицу $A_{\langle X\cup\{y\}\,|\,R\cup\{y\xi^{-1}\}\rangle}$. Према томе, $A_{\langle X\,|\,R\rangle}\sim A_{\langle X\cup\{y\}\,|\,R\cup\{y\xi^{-1}\}\rangle}$. Коначно, на основу Теореме 3.2 закључујемо да тврђење теореме важи. $\square$

Глава 4

Циклотомични полиноми

У овој глави наводимо дефиницију и дајемо преглед најпознатијих својстава циклотомичних полинома. Преглед својстава прилагођен је потребама ове дисертације, конкретно њене главе 5. Приликом писања ослонили смо се на књиге [11, 25].

Нека је n природан број. Број $\xi \in \mathbb{C}$ који задовољава једначину $\xi^n = 1$ називамо *n-тим кореном јединице*. *Ред* n-тог корена јединице ξ, у ознаци $\mathrm{ord}(\xi)$, јесте најмањи природан број l такав да је $\xi^l = 1$. Јасно је да $\mathrm{ord}(\xi) \mid n$.

Дефиниција 4.1. Нека је n природан број и ξ је n-ти корен јединице. Уколико је $\mathrm{ord}(\xi) = n$, тада ξ називамо *примитивним* n-тим кореном јединице.

Лако се уочава да скуп n-тих корена јединице формира групу у односу на операцију множења. Како је та мултипликативна група коначна, следи да је циклична. Генератори цикличне групе формиране од n-тих корена јединице су примитивни корени јединице. Дакле, ако је ξ било који примитивни n-ти корен јединице, тада је $\{\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n\}$ скуп свих n-тих корена јединице.

Ако је ξ примитивни n-ти корен јединице, тада је ξ^l, $l < n$, такође примитивни n-ти корен јединице ако и само ако су l и n узјамно прости. Према томе, број примитивних n-тих корена јединице једнак је $\varphi(n)$, где је φ Ојлерова функција.

Дефиниција 4.2. За природан број n, n-ти циклотомични полином, у ознаци $\Phi_n(x)$, је моничан полином чије су нуле примитивни n-ти корени јединице над пољем $\mathbb{C}$, при чему нема двоструких нула.

Степен циклотомичног полинома $\Phi_n(x)$ једнак је броју примитивних n-тих корена јединице, односно једнак је $\varphi(n)$. Према томе, ако је ξ било који примитивни n-ти корен једнице над пољем $\mathbb{C}$, тада је

$$\Phi_n(x) = \prod_{j \in (\mathbb{Z}_n)^\times} (x - \xi^j).$$

Следећа теорема омогућава рекурзивно рачунање циклотомичних полинома.

Теорема 4.1. *Ако је n природан број, тада је*

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x).$$

Доказ. Јасно је да је
$$x^n - 1 = \prod_{\xi}(x - \xi),$$
где ξ прође скупом n-тих корена јединице. Уколико групишемо n-те корене јединице који имају исти ред следи да је
$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \prod_{\operatorname{ord}(\xi)=d} (x - \xi).$$
Чињеница да је $\Phi_d(x) = \prod\limits_{\operatorname{ord}(\xi)=d} (x - \xi)$ доказује тврђење. □

Претходна теорема има битну последицу.

Последица 4.1. *Ако је n природан број, тада $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијим по броју n. Како је $\Phi_1(x) = x - 1$, тврђење важи за $n = 1$. Претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве мање од n. На основу претходне теореме, следи да је
$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n, d<n} \Phi_d(x)}.$$
Означимо са $g_n(x) = \prod_{d|n,d<n} \Phi_d(x)$. Полином g_n је моничан и на основу индуктивне хипотезе $g_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Како је и полином $x^n - 1$ моничан полином над прстеном $\mathbb{Z}[x]$, следи да постоје $q, r \in \mathbb{Z}[x]$ такви да је
$$x^n - 1 = q(x)g_n(x) + r(x)$$
и $\deg(r) < \deg(q)$ (Глава 5, Теорема 4.1, [25]). Према томе,
$$g_n(x)\left(\Phi_n(x) - q(x)\right) = r(x),$$
па је $\Phi_n(x) = q(x)$, одакле следи да $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. □

Теорема 4.2. *За сваки природан број $n > 1$, коефицијенти циклотомичног полинома $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$ су симетрични, односно, $c_j = c_{\varphi(n)-j}$ за све $j \in \{0, \ldots, \varphi(n)\}$.*

Доказ. Докажимо тврђење индукцијом по броју $n > 1$. За $n = 2$, коефицијенти полинома $\Phi_2(x) = x + 1$ су симетрични. Претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве мање од n. Следи да је
$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{\prod_{d\,|\,n} \Phi_d(x)}{x - 1} = \prod_{d\,|\,n, 1<d} \Phi_d(x) = \Phi_n(x) \cdot \prod_{d\,|\,n, 1<d<n} \Phi_d(x)$$
Није тешко уверити се да су коефицијенти полинома $\prod_{d\,|\,n,1<d<n} \Phi_d(x)$ симетрични јер су, по индуктивној хипотези, коефицијенти сваког од полинома $\Phi_d(x)$, $d < n$, симетрични. Са друге стране, коефицијенти полинома
$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1$$
такође су симетрични. Према томе, и коефицијенти полинома $\Phi_n(x)$ морају бити симетрични. □

За потребе доказа наредних тврђења уведимо *Мебијусову функцију* која је дефинисана над природним бројевима на следећи начин:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{када је } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{када је } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ где су } p_i \text{ различити прости бројеви}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лако се уочава да је функција μ мултипликативна, односно важи да је $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ за све узајамно просте бројеве n, m. Такође, важи да је

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{када је } n = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Из дефиниције Мебијусове функције директно следи да је $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 1$ за $n = 1$. Ако је $n > 1$, тада је $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, за неке просте бројеве p_i и природне бројеве $e_i \geq 1$. Нека је $n' = p_1 \cdots p_k$. Уколико $d \mid n$ и $d \nmid n'$, тада је d дељив квадратом неког простог броја, па је $\mu(d) = 0$. Према томе, ако $p \in \{p_1, \ldots, p_k\}$, следи да је

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid n'} \mu(d) = \sum_{d \mid \frac{n'}{p}} (\mu(d) + \mu(pd)).$$

Како су бројеви p и d, где $d \mid \frac{n'}{p}$, узајмно прости, из мултипликативности Мебијусове функције следи да је $\mu(pd) = \mu(p)\mu(d) = -\mu(d)$. Дакле,

$$\sum_{d \mid \frac{n'}{p}} (\mu(d) + \mu(pd)) = \sum_{d \mid \frac{n'}{p}} (\mu(d) - \mu(d)) = 0.$$

Лема 4.1. *Нека је n природан број. Тада важи*

$$\Phi_n(x) = \prod_{d \mid n} (x^{\frac{n}{d}} - 1)^{\mu(d)} = \prod_{d \mid n} (x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}.$$

Доказ. На основу теореме 4.1 важи да је $x^{\frac{n}{d}} - 1 = \prod_{m \mid \frac{n}{d}} \Phi_m(x)$. Према томе, следи да је

$$\begin{aligned} \prod_{d \mid n} (x^{\frac{n}{d}} - 1)^{\mu(d)} &= \prod_{d \mid n} \left(\prod_{m \mid \frac{n}{d}} \Phi_m(x) \right)^{\mu(d)} \\ &= \prod_{m \mid n} \prod_{d \mid \frac{n}{m}} \Phi_m(x)^{\mu(d)} \\ &= \prod_{m \mid n} \Phi_m(x)^{\sum_{d \mid \frac{n}{m}} \mu(d)}. \end{aligned}$$

Из (4.1) закључујемо да је $\sum_{d \mid \frac{n}{m}} \mu(d) = 0$, за $m < n$. Стога,

$$\prod_{m \mid n} \Phi_m(x)^{\sum_{d \mid \frac{n}{m}} \mu(d)} = \Phi_n(x),$$

чиме смо доказали тврђење леме. $\square$

Следеће две особине су последице леме 4.1.

Теорема 4.3. *Ако је m непаран природан број, тада важи*

$$\Phi_{2m}(-x) = \Phi_m(x).$$

Доказ. Како је m непаран број следи да је $\varphi(2m) = \varphi(2)\varphi(m) = \varphi(m)$. Користећи резултат леме 4.1, закључујемо да важи следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned}
\Phi_{2m}(x) &= \prod_{d\,|\,(2m)} (x^d-1)^{\mu(\frac{2m}{d})} \\
&= \prod_{2\,|\,d,\, d\,|\,(2m)} (x^d-1)^{\mu(\frac{2m}{d})} \prod_{d\,|\,m} (x^d-1)^{\mu(\frac{2m}{d})} \\
&= \prod_{d\,|\,m} \left[(x^{2d}-1)^{\mu(\frac{m}{d})}(x^d-1)^{\mu(\frac{2m}{d})}\right] \\
&= \prod_{d\,|\,m} \left[(x^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})}(x^d+1)^{\mu(\frac{m}{d})}(x^d-1)^{\mu(\frac{2m}{d})}\right] \\
&= \prod_{d\,|\,m} \left[(x^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})}(x^d+1)^{\mu(\frac{m}{d})}(x^d-1)^{-\mu(\frac{m}{d})}\right] \\
&= \prod_{d\,|\,m} (x^d+1)^{\mu(\frac{m}{d})}
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је $\sum_{d\,|\,m} \mu(\frac{m}{d}) = \sum_{d\,|\,m} \mu(d)$, на основу (4.1), важи $\sum_{d\,|\,m} \mu(\frac{m}{d}) = 0$. Број m је непаран па је и свако d, $d\,|\,m$, такође непарно. Стога, следи да је $-x^d = (-x)^d$. Коначно,

$$\begin{aligned}
\prod_{d\,|\,m} (x^d+1)^{\mu(\frac{m}{d})} &= (-1)^{\sum_{d\,|\,m} \mu(\frac{m}{d})} \prod_{d\,|\,m} (x^d+1)^{\mu(\frac{n}{d})} \\
&= \prod_{d\,|\,m} ((-x)^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})} = \Phi_m(-x).
\end{aligned}$$

□

Теорема 4.4. *Ако је $n = p_1^{e_1}\cdots p_d^{e_d}$, где су p_i прости бројеви и $e_i \geq 1$, тада следи да је*

$$\Phi_n(x) = \Phi_{p_1\cdots p_d}(x^{n/p_1\cdots p_d}).$$

Доказ. Обележимо са $n' = p_1\cdots p_d$. Како је $\mu(d) = 0$, за све $d \in \mathbb{N}$ који су дељиви квадратом неког природног броја, на основу леме 4.1, важи следеће:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(x) &= \prod_{d\,|\,n} (x^{\frac{n}{d}}-1)^{\mu(d)} = \prod_{d\,|\,n'} (x^{\frac{n}{d}}-1)^{\mu(d)} \\
&= \prod_{d\,|\,n'} \left(\left(x^{\frac{n}{n'}}\right)^{\frac{n'}{d}}-1\right)^{\mu(d)} = \Phi_{n'}(x^{\frac{n}{n'}}).
\end{aligned}$$

чиме је доказано тврђење теореме. □

Глава 5

Симплицијални комплекси придружени циклотомичном полиному

Циклотомични полиноми представљају важне алгебарске објекте који се изучавају у алгебарској теорији бројева, Галуаовој теорији, елементарној теорији бројева, као и у геометрији. Историја проучавања ових полинома је веома дуга и сеже до Ојлера[1] и Вандермонда[2]. Посебан осврт на циклотомичне полиноме дао је Гаус[3]. Наиме, у његовој књизи *Disquisitiones Arithmeticae* циклотомични полиноми играју улогу у доказу конструктибилности правилног полигона помоћу лењира и шестара. И други познати математичари, као што су Абел[4] и Кронекер[5], наставили су да се интересују за овај тип полинома. Циклотомични полиноми, посебно њихови коефицијенти, актуелна су тема и у данашње време и предмет су великог броја истраживања (нека од њих су [3, 20, 24, 45]). Међутим, иако доста проучавани, коефицијенти ових полинома и даље су мистериозни.

Мусикер и Рајнер у раду [37] коефицијентима циклотомичног полинома дају тополошко тумачење придружујући сваком коефицијенту одговарајући симплицијални комплекс. Као инспирација за дефинисање придружених симплицијалних комплекса ауторима су послужили радови Болкера [9], Калаија [19] и Адина [1]. Испоставља се да комплекси придружени циклотомичном полиному $\Phi_n(x)$ испољавају веома лепе особине за све природне бројеве $n = p_1 p_2 \cdots p_d$, где су $p_1, p_2, \ldots, p_d$ различити прости бројеви и $d \neq 3$. Наиме, у случајевима када је $d \neq 3$ хомотопски тип придруженог симплицијалног комплекса даје потпуну информацију о величини конкретног коефицијента полинома $\Phi_n(x)$. Међутим, то није увек случај када је $d = 3$.

У овој глави бавимо се проучавањем симплицијалних комплекса придружених циклотомичним полиномима $\Phi_{pqr}(x)$, где су p, q, r различити прости бројеви, и одређујемо хомотопске типове тих комплекса када је то могуће.

[1] Leonhard Euler (1707-1783)
[2] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)
[3] Jochann Karl Friedrich Gauss (1777-1855)
[4] Niels Henrik Abel (1802-1829)
[5] Leopold Kronecker (1823-1891)

5.1 Дефиниција

Ако је $n = p_1^{e_1} \cdots p_d^{e_d}$, $e_i \geq 1$ и p_i су прости бројеви, тада следи да је

$$\Phi_n(x) = \Phi_{p_1 \cdots p_d}(x^{n/p_1 \cdots p_d})$$

(видети Теорему 4.4). Према томе, у разматрању циклотомичних полинома довољно је ограничити се на разматрање оних полинома $\Phi_n(x)$ где је n природан бесквадратан број.

Нека је p прост број и K_p 0-димензиони апстрактни симплицијални комплекс који укупно има p темена. Темена комплекса K_p обележена су остацима по модулу p, односно скуп темена је

$$\{0 \bmod p, 1 \bmod p, \ldots, (p-1) \bmod p\}.$$

За различите просте бројеве $p_1, \ldots, p_d$, означимо са

$$K_{p_1,\ldots,p_d} := K_{p_1} * \cdots * K_{p_d}$$

симплицијално спајање комплекса $K_{p_1}, \ldots, K_{p_d}$. Дакле, комплекс $K_{p_1,\ldots,p_d}$ је $(d-1)$-димензиони апстрактни симплицијални комплекс чији су фасети обележени низовима

$$(j_1 \bmod p_1, \ldots, j_d \bmod p_d).$$

Нека је $n = p_1 \cdots p_d$. На основу изоморфизма

$$\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_d\mathbb{Z} \xrightarrow{\Xi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

гарантованог Кинеском теоремом о остацима, фасете можемо идентификовати са елементима групе $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Фасет обележен низом $(j_1 \bmod p_1, \ldots, j_d \bmod p_d)$ можемо краће обележити $F_{j \bmod n}$, при чему је $j \equiv j_i \pmod{p_i}$, за све $i \in \{1, \ldots, d\}$. Слично, симплекси нижих димензија могу бити идентификовани са косетима подгрупа групе $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тако, на пример, $(d-2)$-симплекс можемо идентификовати са косетом $j_0 + \frac{n}{p_i}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, за неко $i \in \{1, \ldots, d\}$ и $j_0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Према томе, лице

$$(j_{i_1} \bmod p_{i_1}, \ldots, j_{i_k} \bmod p_{i_k}),\ \ \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, d\},$$

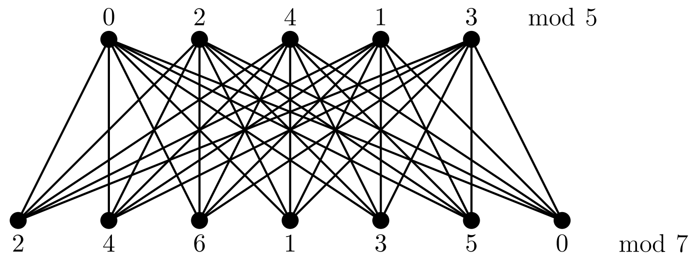
фасета $F_{j \bmod n}$ можемо краће обележити $j \bmod p_{i_1} \cdots p_{i_k}$.

За произвољан скуп $A \subset \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, означимо са K_A поткомплекс комплекса $K_{p_1,\ldots,p_d}$ који је генерисан фасетима $F_{j \bmod n}$, где

$$j \in A \cup \{\varphi(n)+1, \varphi(n)+2, \ldots, n-2, n-1\}.$$

Приметимо да $K_{p_1,\ldots,p_d}$ можемо посматрати као комплекс добијен лепљењем фасета $F_{j \bmod n}, j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, дуж њихових граница на поткомплекс $K_\emptyset$. Другим речима, $K_{p_1,\ldots,p_d} = K_{\{0,1,\ldots,\varphi(n)\}}$.

Пример 5.1. Размотримо претходно дефинисане комплексе на примеру $p_1 = 5$, $p_2 = 7$. Комплекс $K_{5,7}$, чија је геометријска реализација дата на слици 5.1, је комплетан бипартитни граф. Партиције овог графа су $\{i \bmod 5\}_{i=\overline{0,4}}$ и $\{i \bmod 7\}_{i=\overline{0,6}}$.

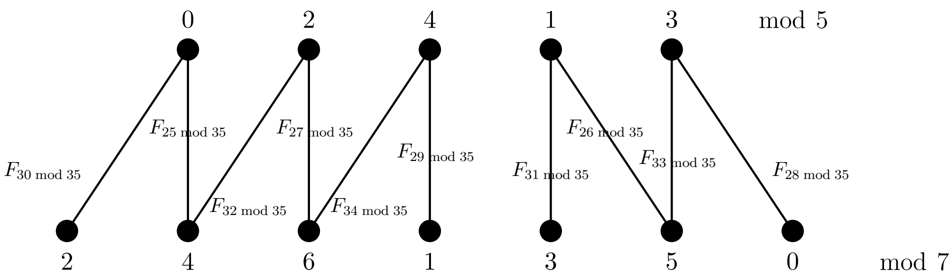


Слика 5.1: Комплекс $K_{5,7}$

Поткомплекс $K_\emptyset$ генерисан је фасетима $\{F_{j \bmod 35}\}$, где

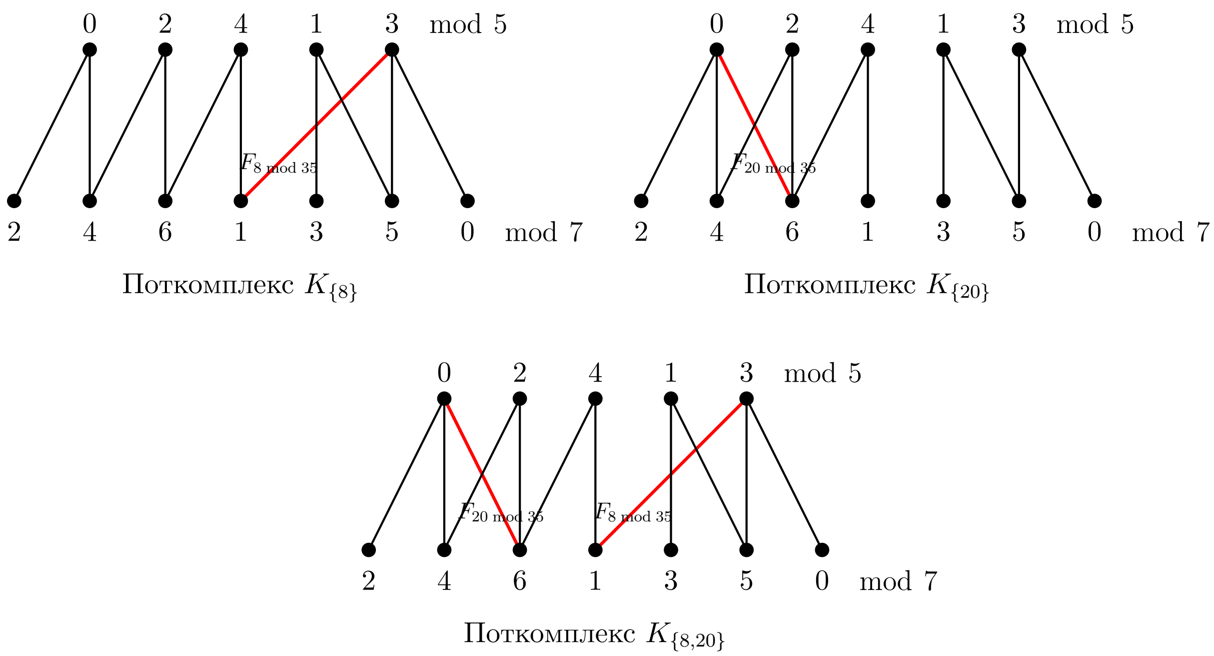
$$j \in \{\varphi(n)+1, \varphi(n)+2, \ldots, n-1\} = \{25, 26, \ldots, 34\}.$$

Односно, $K_\emptyset$ је бипартитни граф са скупом грана $\{F_{j \bmod 35}\}_{j\in\{25,\ldots,34\}}$. Геометријска реализација поткомплекса $K_\emptyset$ може се видети на слици 5.2.



Слика 5.2: Комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{35}(x)$

Поткомплексе K_A, $A \subset \{0, 1, \cdots, 24\}$, добијамо додавањем фасета (грана) $\{F_{j \bmod n}\}_{j\in A}$ на поткомплекс $K_\emptyset$. Геометријске реализације комплекса K_A за неке конкретне скупове A приказане су на слици 5.3.



Слика 5.3: Примери комплекса K_A придружених полиному $\Phi_{35}(x)$

Нека је n природан бесквадратан број. Циклотомичном полиному

$$\Phi_n(x) = \sum_{j=1}^{\varphi(n)} c_j x^j$$

придружујемо низ симплицијалних комплекса, за сваки коефицијент по један. Коефицијенту c_j, $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, придружујемо комплекс $K_{\{j\}}$. Дакле, у контексту циклотомичног полинома $\Phi_n(x)$ испитујемо комплексе

$$K_{\{0\}}, K_{\{1\}}, \ldots, K_{\{\varphi(n)\}},$$

као и њихов заједнички поткомплекс $K_\emptyset$.

5.2 Својства

У овом поглављу излажемо резултате Мусикера и Рајнера из рада [37] који се тичу својстава симплицијалних комплекса придружених циклотомичном полиному. Мусикер и Рајнер анализирали су како се одређена својства циклотомичних полинома одражавају на придружене комплексе. Одредили су хомологије придружених симплицијалних комплекса и довели у везу коефицијенте са хомолошким групама. Такође, за $n = p_1 \cdots p_d$, где је $d \neq 3$, одредили су хомотопски тип придружених симплицијалних комплекса. У наставку дајемо преглед поменутих резултата.

За почетак, наведимо следећу интересантну везу између циклотомичних полинома и придружених комплекса. Нека је $n > 1$ природан бесквадратан број. Комплекс $K_{\{j\}}$ није потребно разматрати за све $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$. Довољно је ограничити се на изучавање комплекса $K_{\{j\}}$ таквих да је $j \in \left\{0, 1, \ldots, \left\lceil \frac{\varphi(n)}{2} \right\rceil \right\}$. Наиме, на основу теореме 4.2, следи да су коефицијенти полинома

$$\Phi(n) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$$

симетрични, односно $c_j = c_{\varphi(n)-j}$, за све $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$. Са друге стране, као аналогон томе, јавља се феномен да су комплекси $K_{\{j\}}$ и $K_{\{\varphi(n)-j\}}$ изоморфни.

Теорема 5.1 (Поглавље 8.2., [37]). *Нека је $n = p_1 \cdots p_d$, где су $p_1, \ldots, p_d$ различити прости бројеви. За свако $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, комплекси $K_{\{j\}}$ и $K_{\{\varphi(n)-j\}}$ су изоморфни.*

Доказ. Дефинишимо пресликавање $\theta : K_{\{j\}} \to K_{\{\varphi(n)-j\}}$ на следећи начин:

$$k_i \bmod p_i \xmapsto{\theta} (\varphi(n) - k_i) \bmod p_i,$$

за све $k_i \in \{0, \ldots, p_i - 1\}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Јасно је да је тада

$$\theta(F_{k \bmod n}) = F_{(\varphi(n)-k) \bmod n},$$

за све $k \in \{\varphi(n) + 1, \ldots, n - 1\} \cup \{j\}$. Дакле, θ је изоморфизам комплекса. $\square$

Теорема 4.3 такође има своје тополошко тумачење. Нека је $n \in \mathbb{N}$ непаран број и

$$\Phi_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} \bar{c}_j x^j \quad \text{и} \quad \Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j.$$

Ако је $n = p_1 \cdots p_d$, где су p_i прости бројеви, обележимо са $\overline{K} := K_{2,p_1,\ldots,p_d}$ и $K := K_{p_1,\ldots,p_d}$. Комплекс $\overline{K}$ има два додатна темена 0 mod 2 и 1 mod 2 у односу на комплекс K. Заправо, $\overline{K}$ представља суспензију ΣK комплекса K. Сваком фасету $F_{j \bmod n}$ комплекса K одговарају тачно два фасета $\overline{F}_{j \bmod 2n}$ и $\overline{F}_{(j+n) \bmod 2n}$ комплекса $\overline{K}$.

Размотримо поткомплексе $\overline{K}_{\{j\}}$ и $K_{\{j\}}$ комплекса $\overline{K}$ и K за $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$. На основу теореме 4.3 коефицијенти $\bar{c}_j$ и c_j имају исту величину. Са друге стране, испоставља се да је комплекс $\overline{K}_{\{j\}}$ хомотопан суспензији $\Sigma K_{\{j\}}$ комплекса $K_{\{j\}}$. Суспензија $\Sigma K_{\{j\}}$ је изоморфна поткомплексу комплекса $\overline{K}_{\{j\}}$ који је генерисан фасетима $\{\overline{F}_{k \bmod 2n}\}$, где

$$k \in \{j, j+n\} \cup \{\varphi(n)+1, \ldots, n-1, \varphi(n)+n+1, \ldots, 2n-1\}.$$

Сваки од преосталих фасета $\overline{F}_{(k+n) \bmod 2n}$, $k \in \{0, \ldots, \varphi(n)\}$, комплекса $\overline{K}_{\{j\}}$ садржи слободно лице $k \bmod 2n$, Дакле, за свако $k \in \{0, \ldots, \varphi(n)\}$, може се извршити симплицијални колапс $\overline{K}_{\{j\}} \backslash \{k \bmod 2n\}$. Коначно, закључујемо да је $\bar{K}_{\{j\}} \simeq \Sigma K_{\{j\}}$. Дакле, довољно је ограничити се на посматрање комплекса $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ придружених полиному $\Phi_n(x)$, где је n непаран број.

У наредним пропозицијама дата су својства комплекса $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ која су важна за одређивање њиховог хомотопског типа.

Пропозиција 5.1 (Пропозиција 5.1, [37]). *Нека су $p_1, \ldots, p_d$ различити прости бројеви. Тада је $(d-2)$-скелет комплекса $K_{p_1,\ldots,p_2}$ сложив комплекс.*

Доказ. Из чињеница да је сваки 0-димензиони комплекс тривијално сложив и да је резултат симплицијалног спајања сложивих комплекса такође сложив комплекс (тврђење 1.1) следи да је $K_{p_1,\ldots,p_d}$ сложив комплекс. Додатно, важи да је скелет сложивог комплекса такође сложив (тврђење 1.3) одакле следи тврђење пропозиције. □

Пропозиција 5.2 (Пропозиција 5.5, [37]). *Нека је $n = p_1 \cdots p_d$, где су p_i различити прости бројеви. Поткомплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_n(x)$ садржи $(d-2)$-скелет комплекса $K_{p_1,\ldots,p_d}$. Према томе, комплекс K_A, $A \subset \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, такође садржи $(d-2)$-скелет комплекса $K_{p_1,\ldots,p_d}$.*

Доказ. Као што смо већ напоменули у претходном поглављу, произвољни $(d-2)$-симплекс можемо идентификовати са косетом $j_0 + \frac{n}{p_i}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, за неко $i \in \{1, \ldots, d\}$ и $j_0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Како је $K_\emptyset$ генерисан фасетима $\{F_{j \bmod n}\}$, где $j \in \{\varphi(n)+1, \ldots, n-1\}$, покажимо да сваки од поменутих косета има непразан пресек са скупом $A_0 = \{\varphi(n)+1, \ldots, n-1\}$.

Из чињенице да је $\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < 1$ следи да је

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_d}\right) \leq n\left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

за све $i \in 1, \ldots, d$. Другим речима,

$$n - \varphi(n) \geq \frac{n}{p_i}.$$

Како скуп A_0 садржи $n-\varphi(n)$ узастопних природних бројева, сваки косет $j_0+\frac{n}{p_i}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ има непразан пресек са скупом A_0. Дакле, $K_\emptyset$ заиста садржи $(d-2)$-скелет комплекса $K_{p_1,\dots,p_d}$. С обзиром на то да је $K_\emptyset$ поткомплекс комплекса K_A, директно следи да и K_A садржи $(d-2)$-скелет комплекса $K_{p_1,\dots,p_d}$. □

Теорема 5.2 (Теорема 7.1, [37]). *Нека је $n=p_1\cdots p_d$, где су p_i различити прости бројеви. Тада:*

(1) *Комплекс $K_\emptyset$ има хомологију $(d-2)$-сфере, односно*

$$\widetilde{H}_*(K_\emptyset)\cong\widetilde{H}_*(\mathbb{S}^{d-2}).$$

(2) *Ако је $\Phi_n(x)=\sum_{j=0}^{\varphi(n)}c_jx^j$, за свако $j\in\{1,\dots,\varphi(n)\}$ важи да је*

$$\widetilde{H}_i(K_{\{j\}};\mathbb{Z})\cong\widetilde{H}_*(\mathbb{B}^{d-1}\cup_{f_j}\mathbb{S}^{d-2};\mathbb{Z}),$$

где је $\deg(f_j)=c_j$.

На основу претходне теореме, закључујемо да је

$$\widetilde{H}_i(K_{\{j\}};\mathbb{Z})=\widetilde{H}_i(\mathbb{B}^{d-1}\cup_{f_j}\mathbb{S}^{d-2};\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}/c_j\mathbb{Z}, & \text{ако је } i=d-2,\\ \mathbb{Z}, & \text{ако је } i=d-1 \text{ и } c_j=0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Дакле, хомологија придруженог комплекса $K_{\{j\}}$ одређује величину коефицијента c_j циклотомичног полинома $\Phi_n(x)$.

Пример 5.2. Илуструјмо претходну теорему на примеру циклотомичног полинома

$$\begin{aligned}\Phi_{35}(x)=&1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}\\&+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{18}+x^{19}-x^{23}+x^{24}.\end{aligned}$$

На слици 5.2 можемо видети да је $K_\emptyset$ хомотопно пару тачака, па је заиста

$$\widetilde{H}_*(K_\emptyset)\cong\widetilde{H}_*(\mathbb{S}^0).$$

У контексту коефицијента $c_8=-1$ посматрамо симплицијални комплекс $K_{\{8\}}$. На основу слике 5.3, комплекс $K_{\{8\}}$ је хомотопан тачки. Како је $\mathbb{B}^1\cup_{f_8}\mathbb{S}^0$, где је $\deg(f_8)=1$, заправо 1-диск, дакле контрактибилан простор, важи да је

$$\widetilde{H}_*(K_{\{7\}})\cong\widetilde{H}_*(\mathbb{B}^1\cup_{f_j}\mathbb{S}^0).$$

Коефицијенту $c_{20}=0$ придружен је комплекс $K_{\{20\}}$. На слици 5.3 може се видети да је комплекс $K_{\{20\}}$ хомотопан унији кружнице и тачке. Са друге стране, простор $\mathbb{B}^1\cup_{f_{20}}\mathbb{S}^0$, где је $\deg(f_7)=0$, добија се лепљењем границе 1-диска на једну од две тачке 0-сфере. Дакле, у питању је букет 1-диска и 0-сфере, па је

$$\widetilde{H}_*(K_{\{20\}})\cong\widetilde{H}_*(\mathbb{B}^1\cup_{f_{20}}\mathbb{S}^0).$$

Из претходног примера наслућује се да, сем хомолошких група, и хомотопски тип придруженог комплекса $K_{\{j\}}$ у већини ситуација једнозначно одређује величину коефицијента c_j циклотомичног полинома $\Phi_n(x)=\sum_{j=0}^{\varphi(n)}c_jx^j$. Наредна теорема то потврђује.

Теорема 5.3 (Теорема 7.5, [37]). *Нека је $n = p_1 \cdots p_d$, где су p_i различити прости бројеви, и $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$. За $d \geq 4$ и $A \subseteq \{0, 1, \dots, \varphi(n)\}$, комплекс K_A је просто повезан. За $d \neq 3$ важи следеће:*

(1) *Комплекс $K_\emptyset$ је хомотопски еквивалентан $(d-2)$-сфери.*

(2) *Коефицијент c_j, $j \in \{0, \dots, \varphi(n)\}$, одређује степен лепљења оријентисане границе $\mathrm{Bd}(F_{j \bmod n})$ фасета $F_{j \bmod n}$ на фундаментални $(d-2)$-цикл $(d-2)$-сфере $K_\emptyset$.*

(3) *Комплекс $K_{\{j\}}$ је хомотопски еквивалентан простору $\mathbb{B}^{d-1} \cup_{f_j} \mathbb{S}^{d-2}$, где је $\deg(f_j) = c_j$.*

Доказ. За $d \in \{1, 2\}$ тврђење директно следи из теореме 5.2. Претпоставимо да је $d \geq 4$. Фундаментална група комплекса K_A одређена је његовим 2-скелетом, који је на основу пропозиције 5.2 исти као 2-скелет комплекса $K_{p_1,\dots,p_d}$. На основу пропозиције 5.1, 2-скелет комплекса $K_{p_1,\dots,p_d}$ је сложив комплекс. Према томе, на основу теореме 1.3, он је хомотопски еквивалентан букету $(d-2)$-сфера, и стога је просто повезан.

Са друге стране, на основу теореме 5.2 важи да је $\widetilde{H}_*(K_\emptyset) \cong \widetilde{H}_*(\mathbb{S}^{d-2})$. Стога, из Хуревичеве теореме (Пропозиција 7.5.2, [43]) следи да је $\pi_*(K_\emptyset) \cong \pi_*(\mathbb{S}^{d-2})$. Тада, на основу Вајтхедове теореме (Последица 4.33, [14]) следи да је $K_\emptyset \simeq \mathbb{S}^{d-2}$, чиме је доказано тврђење (1).

Како је комплекс $K_{\{j\}}$ добијен лепљењем границе $(d-1)$-симплекса $F_{j \bmod n}$ на комплекс $K_\emptyset$, на основу (1) и теореме 5.2 закључујемо да важи (2). Тврђење (3) је директна последица тврђења (1) и (2). □

Како претходни доказ не важи када је $d = 3$, придружени комплекси $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ остају мистериозни у том случају. Мусикер и Рајнер постављају питање да ли претходна теорема важи и за $d = 3$.

Питање 5.1 (Питање 7.6, [37]). Нека је $n = pqr$, где су p, q и r три различита проста броја.

- Да ли је комплекс $K_\emptyset$ хомотопски еквивалентан кружници $\mathbb{S}^1$?
- Да ли је комплекс $K_{\{j\}}$ хомотопски еквивалентан простору $\mathbb{B}^2 \cup_{f_j} \mathbb{S}^1$, где је $\deg(f_j) = c_j$, $j \in \{0, 1, \dots, \varphi(n)\}$?

У наредним поглављима дајемо делимичан одговор на питање 5.1, односно описујемо неке случајеве када је одговор потврдан.

5.3 Комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{pqr}(x)$

Ово поглавље посвећујемо детаљном испитивању структуре симплицијалног комплекса $K_\emptyset$ придруженог полиному $\Phi_{pqr}(x)$, где су p, q, r прости бројеви и $p < q < r$. Нека је $n := pqr$. На основу анализе из претходног поглавља можемо претпоставити да $2 \nmid n$.

Симплицијални комплекс $K_{p,q,r}$ има $p + q + r$ темена:

$$\begin{array}{llll} 0 \bmod p, & 1 \bmod p, & \dots & (p-1) \bmod p, \\ 0 \bmod q, & 1 \bmod q, & \dots, & (q-1) \bmod q, \\ 0 \bmod r, & 1 \bmod r, & \dots, & (r-1) \bmod r, \end{array}$$

која краће обележавамо бројевима:

$$0, \dots, p-1, p, \dots, p+q-1, p+q, \dots, p+q+r-1.$$

Поткомплекс $K_\emptyset$ је дводимензиони симплицијални комплекс који се састоји од фасета $\{F_{j \bmod n}\}$, где $j \in \{\varphi(n)+1, \dots, n-1\}$. Дакле, комплекс $K_\emptyset$ има укупно $pq+pr+qr-p-q-r$ фасета.

Приметимо да број фасета у комплексу $K_\emptyset$ у неким случајевима може бити редукован. Наиме, како је

$$pq + pr + qr - p - q - r = qr + (pq + pr - p - q - r),$$

ако је $qr > pr + pq - p - q - r$, 1-симплекс

$$j \bmod qr$$

је слободно лице фасета $F_{j \bmod n}$, за све $j \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \dots, \varphi(n) + qr\}$. Према томе, колапс комплекса $K_\emptyset$ на поткомплекс $K_\emptyset \setminus \{j \bmod qr\}$ могућ је за $j \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \dots, \varphi(n) + qr\}$. Уколико је $qr > pr + pq - p - q - r$, означимо са

$$\widetilde{K}_\emptyset := K_\emptyset \setminus \{j \bmod qr\}_{j=\varphi(n)+pq+pr-p-q-r+1}^{\varphi(n)+qr} \tag{5.1}$$

комплекс добијен низом колапса комплекса $K_\emptyset$. Комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ сачињен је од фасета $\{F_{j \bmod n}\}$, где

$$j \in \{\varphi(n) + 1, \dots, \varphi(n) + pq + pr - p - q - r\} \cup \{\varphi(n) + qr + 1, \dots, n - 1\}.$$

Укупан број фасета у $\widetilde{K}_\emptyset$ је $2(pq + pr - p - q - r)$. Како је комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ добијен низом колапса од комплекса $K_\emptyset$, следи да је

$$K_\emptyset \simeq \widetilde{K}_\emptyset.$$

Пример 5.3. Комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{3\cdot5\cdot11}(x)$ састоји се од наредних 84 фасета:

$[0,4,12], [1,5,13], [2,6,14], [0,7,15], [1,3,16], [2,4,17], [0,5,18], [1,6,8], [2,7,9], [0,3,10], [1,4,11],$
$[2,5,12], [0,6,13], [1,7,14], [2,3,15], [0,4,16], [1,5,17], [2,6,18], [0,7,8], [1,3,9], [2,4,10], [0,5,11],$
$[1,6,12], [2,7,13], [0,3,14], [1,4,15], [2,5,16], [0,6,17], [1,7,18], [2,3,8], [0,4,9], [1,5,10], [2,6,11],$
$[0,7,12], [1,3,13], [2,4,14], [0,5,15], [1,6,16], [2,7,17], [0,3,18], [1,4,8], [2,5,9], [0,6,10], [1,7,11],$
$[2,3,12], [0,4,13], [1,5,14], [2,6,15], [0,7,16], [1,3,17], [2,4,18], [0,5,8], [1,6,9], [2,7,10], [0,3,11],$
$[1,4,12], [2,5,13], [0,6,14], [1,7,15], [2,3,16], [0,4,17], [1,5,18], [2,6,8], [0,7,9], [1,3,10], [2,4,11],$
$[0,5,12], [1,6,13], [2,7,14], [0,3,15], [1,4,16], [2,5,17], [0,6,18], [1,7,8], [2,3,9], [0,4,10], [1,5,11],$
$[2,6,12], [0,7,13], [1,3,14], [2,4,15], [0,5,16], [1,6,17], [2,7,18].$

Како је $84 = 55 + 29$, комплекс $K_\emptyset$ има $55 - 29 = 26$ слободних лица. Слободна лица у комплексу $K_\emptyset$ су

$[3,8], [4,9], [5,10], [6,11], [7,12], [3,13], [4,14], [5,15], [6,16], [7,17], [3,18],$
$[4,8], [5,9], [6,10], [7,11], [3,12], [4,13], [5,14], [6,15], [7,16], [3,17], [4,18],$
$[5,8], [6,9], [7,10], [3,11].$

Према томе, комплекс $K_\emptyset$ је хомотопски еквивалентан свом поткомплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ који се састоји од наредних 58 фасета:

$[0,4,12],[1,5,13],[2,6,14],[0,7,15],[1,3,16],[2,4,17],[0,5,18],[1,6,8],[2,7,9],[0,3,10],[1,4,11],$
$[2,5,12],[0,6,13],[1,7,14],[2,3,15],[0,4,16],[1,5,17],[2,6,18],[0,7,8],[1,3,9],[2,4,10],[0,5,11],$
$[1,6,12],[2,7,13],[0,3,14],[1,4,15],[2,5,16],[0,6,17],[1,7,18],$
$[1,4,12],[2,5,13],[0,6,14],[1,7,15],[2,3,16],[0,4,17],[1,5,18],[2,6,8],[0,7,9],[1,3,10],[2,4,11],$
$[0,5,12],[1,6,13],[2,7,14],[0,3,15],[1,4,16],[2,5,17],[0,6,18],[1,7,8],[2,3,9],[0,4,10],[1,5,11],$
$[2,6,12],[0,7,13],[1,3,14],[2,4,15],[0,5,16],[1,6,17],[2,7,18].$

Са друге стране, комплекс $K_\emptyset$ приружен циклотомичном полиному $\Phi_{11\cdot 13\cdot 17}(x)$ нема слободних лица. У овом случају број фасета у комплексу $K_\emptyset$ је 510. Како је $510 = 2\cdot 221+68$, закључујемо да је сваки 1-симплекс лице барем два 2-симплекса.

У наставку разматрамо случајеве када је $r > pq-p-q$. Тада је

$$qr > pr = pr + r - r > pr + pq - p - q - r.$$

Дакле, ако је $r > pq-p-q$, уместо комплекса $K_\emptyset$ можемо посматрати комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$. Како важи да је

$$pq + pr - p - q - r = (p-1)r + pq - p - q,$$

скуп фасета комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ је дисјунктна унија скупова

$$\{F_{(\varphi(n)+dr+i) \bmod n}\}_{d\in\{0,\dots,p-1\}\cup\{q,\dots,p+q-1\}, i\in\{1,\dots,pq-p-q\}}$$

и

$$\{F_{(\varphi(n)+dr+i) \bmod n}\}_{d\in\{0,\dots,p-2\}\cup\{q,\dots,p+q-2\}, i\in\{pq-p-q+1,\dots,r\}}.$$

Са друге стране, важи да је

$$\begin{aligned}\varphi(n)+dr+i &= (p-1)(q-1)(r-1)+dr+i\\ &= pqr - qr - pr + r - pq + q + p - 1 + dr + i\\ &= (pq-q-p+1+d)r + i - (pq-q-r+1)\end{aligned}$$

одакле следи да је

$$(\varphi(n)+dr+i) \bmod r = \begin{cases} r+i-(pq-q-p+1), & i\in\{1,\dots,pq-p-q\}\\ i-(pq-q-p+1), & i\in\{pq-p-q+1,\dots,r\}\end{cases}.$$

На основу претходног, ако $i\in\{1,\dots,pq-p-q\}$, сваки фасет који припада скупу фасета $\{F_{(\varphi(n)+dr+i) \bmod n}\}$, где $d\in\{0,\dots,p-1\}\cup\{q,\dots,p+q-1\}$, садржи теме

$$(r+i-(pq-q-p+1)) \bmod r,$$

које је обележено бројем $r+2p+2q-pq+i-1$. Слично, за $i\in\{pq-p-q+1,\dots,r\}$, теме

$$(i-(pq-q-p+1)) \bmod r,$$

које је обележено бројем $2p+2q-pq+i-1$, припада сваком од фасета из скупа $\{F_{(\varphi(n)+dr+i) \bmod n}\}$, где $d \in \{0,\ldots,p-2\} \cup \{q,\ldots,p+q-2\}$. Како сваки фасет комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ садржи тачно једно теме из скупа темена $\{p+q,\ldots,p+q+r-1\}$, закључујемо да је

$$\widetilde{K}_\emptyset = \bigcup_{t=p+q}^{p+q+r-1} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t).$$

У циљу поједностављења записа, уведимо следеће ознаке:

$$\begin{aligned} T_1 :=& \{p+q,\ldots,r+2p+2q-pq-1\},\\ T_2 :=& \{r+2p+2q-pq,\ldots,p+q+r-1\}. \end{aligned}$$

Јасно је да је $T_1 \sqcup T_2 = \{p+q,\ldots,p+q+r-1\}$.

Како фасет $F_{(\varphi(n)+dr+i) \bmod n}$ садржи теме $t = 2p+2q-pq+i-1$, када $i \in \{pq-p-q+1,\ldots,r\}$, $d \in \{0,\ldots,p-2\} \cup \{q,\ldots,p+q-2\}$, следи да је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{F_{(\varphi(n)+dr+t-2p-2q+pq+1) \bmod n}\}_{d\in\{0,\ldots,p-2\}\cup\{q,\ldots,p+q-2\}}, \tag{5.2}$$

за $t \in T_1$. Када $i \in \{1,\ldots,pq-p-q\}$, $d \in \{0,\ldots,p-1\} \cup \{q,\ldots,p+q-1\}$, фасет $F_{(\varphi(n)+dr+i) \bmod n}$ садржи теме $t = r+2p+2q-pq+i-1$, па је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{F_{(\varphi(n)+dr+t-r-2p-2q+pq+1) \bmod n}\}_{d\in\{0,\ldots,p-1\}\cup\{q,\ldots,p+q-1\}}, \tag{5.3}$$

за $t \in T_2$.

Пример 5.4. Комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ придружен циклотомичном полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot 11}$ једнак је унији

$$\bigcup_{t=8}^{18} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t).$$

За свако $t \in T_1 = \{8,\ldots,11\}$ важи да је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{F_{(80+11d+t) \bmod 165}\}_{d\in\{0,1,5,6\}}.$$

Ако $t \in T_2 = \{12,\ldots,18\}$, тада је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{F_{(69+11d+t) \bmod 165}\}_{d\in\{0,1,2,5,6,7\}}.$$

Тако је, на пример,

$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(10) &= \{F_{90 \bmod 165}, F_{101 \bmod 165}, F_{145 \bmod 165}, F_{156 \bmod 165}\}\\ &= \{[0,3,10],[2,4,10],[1,3,10],[0,4,10]\}. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(13) &= \{F_{82 \bmod 165}, F_{93 \bmod 165}, F_{104 \bmod 165}, F_{137 \bmod 165}, F_{148 \bmod 165}, F_{159 \bmod 165}\}\\ &= \{[1,5,13],[0,6,13],[2,7,13],[2,5,13],[1,6,13],[0,7,13]\}. \end{aligned}$$

5.3.1 Поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$

Како бисмо имали детаљан увид у структуру комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$, анализираћемо структуру његових поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_1 \sqcup T_2$.

Означимо са

$$\left[a_j^t, b_j^t, t\right] := F_{(\varphi(n)+(j-1)r+t-2p-2q+pq+1) \bmod n},$$

када $t \in T_1$, и

$$\left[a_j^t, b_j^t, t\right] := F_{(\varphi(n)+(j-1)r+t-r-2p-2q+pq+1) \bmod n},$$

када $t \in T_2$. На основу (5.2) и (5.3), јасно је да је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{[a_j^t, b_j^t, t]\}_{j \in \{1,\dots,p-1\} \cup \{q+1,\dots,p+q-1\}}, \tag{5.4}$$

за $t \in T_1$, и

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{[a_j^t, b_j^t, t]\}_{j \in \{1,\dots,p\} \cup \{q+1,\dots,p+q\}}, \tag{5.5}$$

за $t \in T_2$.

Нека су $l : \mathbb{N} \to \{1, \dots, p\}$ и $k : \mathbb{N} \to \{1, \dots, q\}$ функције дефинисане на следећи начин:

$$l(i) = \begin{cases} i \bmod p, & \text{ако је } p \nmid i \\ p & \text{ако је } p \mid i \end{cases} \quad \text{и} \quad k(i) = \begin{cases} i \bmod q, & \text{ако је } q \nmid i \\ q & \text{ако је } q \mid i \end{cases}.$$

Посматрајмо фасете $[a_i^t, b_i^t, t]$ и $[a_{i+j}^t, b_{i+j}^t, t]$ поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, где $t \in T_1$. Ако је $[a_i^t, b_i^t, t] = F_{d \bmod n}$, за неко $d \in \{\varphi(n)+1, \dots, n-1\}$, тада је $[a_{i+j}^t, b_{i+j}^t, t] = F_{(d+jr) \bmod n}$. Када $p \,|\, j$, важи да је $d \equiv_p d + jr$. Слично, ако $q \,|\, j$, следи да је $d \equiv_q d + jr$. Према томе, долазимо до закључка да је

$$a_i^t = a_{l(i)}^t \quad \text{и} \quad b_i^t = b_{k(i)}^t. \tag{5.6}$$

Како су p и r узајамно прости, темена $a_1^t, a_2^t, \dots, a_p^t \in K_p$ међусобно су различита. Такође, темена $b_1^t, b_2^t, \dots, b_q^t \in K_q$ међусобно су различита, јер су q и r узајамно прости бројеви.

На основу (5.4) и (5.6) закључујемо да је

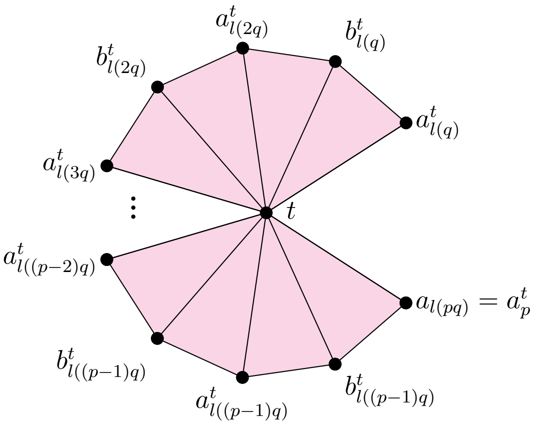
$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{&[a_1^t, b_1^t, t],\ [a_2^t, b_2^t, t],\ \dots,\ [a_{p-1}^t, b_{p-1}^t, t], \\ &[a_{l(q+1)}^t, b_1^t, t],\ [a_{l(q+2)}^t, b_2^t, t],\ \dots,\ [a_{l(p+q-1)}^t, b_{p-1}^t, t]\}, \end{aligned}$$

за $t \in T_1$.

Индекси $\{l(q+1), l(q+2), \dots, l(p+q-1)\} \subset \{1, 2, \dots, p\}$ међусобно су различити. Такође, важи да $l(q) \notin \{l(q+1), l(q+1), \dots, l(p+q-1)\}$. Са друге стране, како $p \nmid q$, следи да је је $l(q) \neq p$, па $l(q) \in \{1, \dots, p-1\}$. Стога, $p \in \{l(q+1), l(q+1), \dots, l(p+q-1)\}$.

Приметимо да је 1-симплекс $[b_j^t, t]$ лице тачно два 2-симплекса $[a_j^t, b_j^t, t]$ и $[a_{l(q+j)}^t, b_j^t, t]$, за све $j \in \{1, \dots, p-1\}$. Како $l(q) \in \{1, \dots, p-1\}$ и $l(q) \notin \{l(q+1), l(q+1), \dots, l(p+q-1)\}$, 1-симплекс $[a_{l(q)}^t, t]$ је лице тачно једног 2-симплекса $[a_{l(q)}^t, b_{l(q)}^t, t]$. Слично, како $p \in \{l(p+1), \dots, l(p+q-1)\}$ и $p \notin \{1, \dots, p-1\}$, једини 2-симплекс чије је лице 1-симплекс $[a_p^t, t]$ је $[a_p^t, b_{l(p-q)}^t, t]$. Сваки од преосталих 1-симплекса $[a_j^t, t]$, $j \in \{1, \dots, p-1\} \setminus \{l(q)\}$, је лице тачно два 2-симплекса $[a_j^t, b_j^t, t]$ и $[a_j^t, b_{l(j-q)}^t, t]$.

На основу претходног, на слици 5.4 дата је геометријска реализација поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_1$. Како $p \nmid q$, приметимо да је $\{l(q), l(2q), \ldots, l((p-1)q)\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

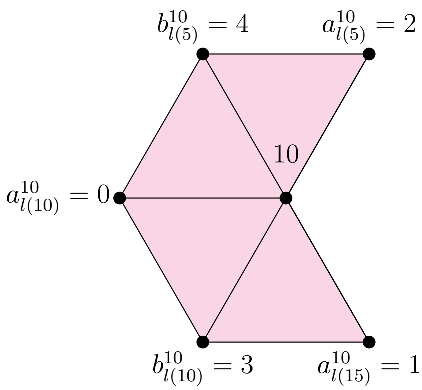


Слика 5.4: Поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_1$

Пример 5.5. Посматрајмо поткомплекс

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(10) = \{[0, 3, 10], [2, 4, 10], [1, 3, 10], [0, 4, 10]\}$$

комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ придруженог полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot 11}(x)$ (видети примере 5.3 и 5.4). Важи да је $a^{10}_1 = 0$, $a^{10}_2 = 2$, $a^{10}_3 = 1$, $b^{10}_1 = 3$ и $b^{10}_2 = 4$. Геометријска реализација поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(10)$ дата је на слици 5.5.



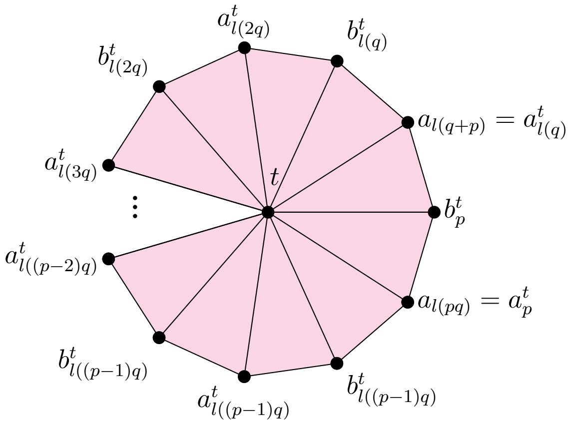
Слика 5.5: Поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(10)$

У случају када $t \in T_2$, на основу (5.5) и (5.6) закључујемо да је

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \{&[a^t_1, b^t_1, t],\ [a^t_2, b^t_2, t],\ \ldots,\ [a^t_{p-1}, b^t_{p-1}, t],\ [a^t_p, b^t_p, t],\\ &[a^t_{l(q+1)}, b^t_1, t],\ [a^t_{l(q+2)}, b^t_2, t],\ \ldots,\ [a^t_{l(p+q-1)}, b^t_{p-1}, t],\ [a^t_{l(p+q)}, b^t_p, t]\}.\end{aligned}$$

Јасно је да је $\{l(q+1), \ldots, l(q+p)\} = \{1, \ldots, p\}$, па је сваки од 1-симплекса $[a^t_j, t]$ и $[b^t_j, t]$, $t \in \{1, \ldots, p\}$, лице тачно два 2-симплекса. Симплекс $[a^t_j, t]$ лице је 2-симплексима $[a^t_j, b^t_j, t]$ и $[a^t_j, b^t_{l(j-q)}, t]$, док је симплекс $[b^t_j, t]$ лице 2-симплексима $[a^t_j, b^t_j, t]$ и $[a^t_{l(q+j)}, b^t_j, t]$.

Геометријска реализација поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$, дата је на слици 5.6. Како $p \nmid q$, важи да је $\{l(q), l(2q), \ldots, l(pq)\} = \{1, 2, \ldots, p\}$.

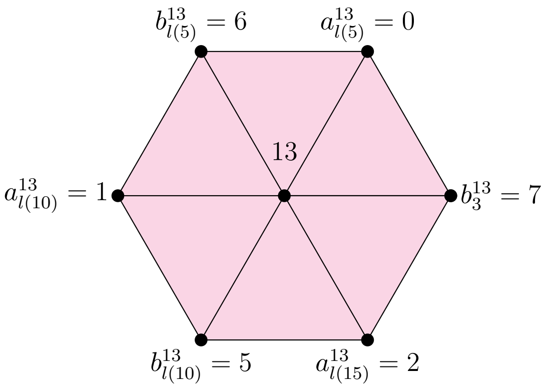


Слика 5.6: Поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$

Пример 5.6. Посматрајмо поткомплекс

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(13) = \{[1,5,13],[0,6,13],[2,7,13],[2,5,13],[1,6,13],[0,7,13]\}$$

комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ придруженог полиному $\Phi_{3\cdot5\cdot11}(x)$ (видети примере 5.3 и 5.4). Важи да је $a^{13}_1 = 1$, $a^{13}_2 = 0$, $a^{13}_3 = 2$, $b^{13}_1 = 5$, $b^{13}_2 = 6$ и $b^{13}_3 = 7$. Геометријска реализација поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(13)$ дата је на слици 5.7.



Слика 5.7: Поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(13)$

5.3.2 Ациклично дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$

Како бисмо могли одредити хомотопски тип комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ потражићемо дискретно ациклично векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$ са што мање критичних 2-симплекса. За почетак, дефинишимо дискретно векторско поље S_t на поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_1$, на следећи начин:

$$\begin{aligned} S_t = \Big\{ &\{[b^t_1, t],\, [a^t_1, b^t_1, t]\},\, \ldots,\, \{[b^t_{p-1}, t],\, [a^t_{p-1}, b^t_{p-1}, t]\},\\ &\{[a^t_{l(q+1)}, t], [a^t_{l(q+1)}, b^t_1, t]\},\, \ldots,\, \{[a^t_{l(p+q-1)}, t], [a^t_{l(p+q-1)}, b^t_{p-1}, t]\}\\ &\{[t],\, [a_{l(q)}, t]\}\Big\}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

Дакле, за $j_1, j_2 \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$\{[b^t_{j_2}, t],\, [a^t_{j_1}, b^t_{j_2}, t]\} \in S_t,$$

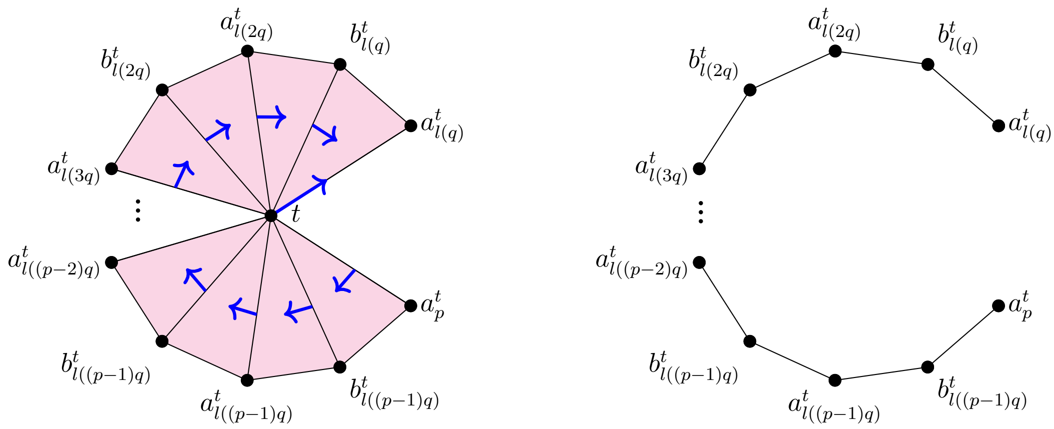
ако је $j_1 = j_2$. Ако је $j_1 = l(q + j_2)$, тада

$$\{[a^t_{j_1}, t],\, [a^t_{j_1}, b^t_{j_2}, t]\} \in S_t.$$

Приметимо да је $l(q + j_2) \neq j_2$, јер $q + j_2 \not\equiv_p j_2$. Како $l(q) \notin \{l(q+1), \dots, l(q+p-1)\}$, 1-симплекс $[a_{l(q)}, t]$ није упарен ни са једним 2-симплексом. Закључујемо да је дискретно векторско поље S_t добро дефинисано. Додатно, векторско поље S_t је ациклично па је градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције (видети слику 5.8(а)). Приметимо да је

$$\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), S_t) = \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \subset K_{p,q}$$

(видети слику 5.8(б)).



Слика 5.8: (а) Градијентно векторско поље S_t, $t \in T_1$, (б) $\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), S_t)$

Лема 5.1. *Нека је $n = pqr$ и $r > pq - p - q$, где су p, q, r прости бројеви. Ако је C произвољно ациклично поље на поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$, тада је*

$$V = \left(\bigcup_{t \in T_1} S_i \right) \cup C$$

ациклично дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$ такво да је

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2), C) \cup \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1).$$

Доказ. Важи да је

$$\left(\bigcup_{t' \in T_1 \sqcup T_2 \setminus \{t\}} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t') \right) \cap \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \subseteq \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t),$$

за све $t \in T_1$. Како је $\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), S_t) = \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, из претходног закључујемо да сваки симплекс припада највише једном пару, па је V добро дефинисано дискретно векторско поље. Додатно, за све $t \in T_1$ важи

$$\bigcup_{t' \in T_1 \cup T_2 \setminus \{t\}} \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t') \not\longrightarrow \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \setminus \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t).$$

Према томе, не постоје нетривијални циклуси у $\widetilde{K}_\emptyset$ који садрже елементе из скупа $\bigcup_{t\in T_1}\left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\setminus \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\right)$. Приметимо да су симплекси

$$\left(\bigcup_{t\in T_1}\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\right)\setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$$

неупарени у V. Како је

$$\widetilde{K}_\emptyset=\left(\bigcup_{t\in T_1}\left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\setminus \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\right)\right)\sqcup\left(\left(\bigcup_{t\in T_1}\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\right)\setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)\right)\sqcup \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2),$$

закључујемо да је V ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$, при чему је

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset,V)=\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2),C)\cup \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1).$$

□

Како је $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1)\subset K_{p,q}$, претходна лема показује да се проналазак одговарајућег ацикличног векторског поља на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ може свести на проналазак одговарајућег ацикличног векторског поља на његовом поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$.

5.3.3 Поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$

Комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ састоји се од фасета $F_{\varphi(n)+dr+i}$, где $i\in\{1,\dots,pq-p-q\}$ и $d\in\{0,\dots,p-1\}\cup\{q,\dots,p+q-1\}$. Приметимо да број фасета комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ не зависи од r. Шта више, показаћемо да за фиксиране просте бројеве p и q није потребно разматрати комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ за све просте бројеве r. Довољно је разматрати овај комплекс за коначно много простих бројева r.

Нека су $r,r'\geq 7$ различити прости бројеви. Обележимо са $\widetilde{K}_\emptyset$ и $\widetilde{K}'_\emptyset$ одговарајуће комплексе за $n=pqr$ и $n'=pqr'$, редом. Посматрајмо поткомплексе $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ и $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$, где је

$$\begin{aligned}T_2 =&\{r+2p+2q-pq,\dots,p+q+r-1\},\\ T'_2 =&\{r'+2p+2q-pq,\dots,p+q+r'-1\}.\end{aligned}$$

Комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ генерисан је фасетима

$$\left\{F_{\varphi(n)+dr+i}\right\}_{d\in\{0,\dots,p-1\}\cup\{q,\dots,p+q-1\},i\in\{1,\dots,pq-p-q\}},$$

док је комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ генерисан фасетима

$$\left\{F_{\varphi(n')+dr'+i}\right\}_{d\in\{0,\dots,p-1\}\cup\{q,\dots,p+q-1\},i\in\{1,\dots,pq-p-q\}}.$$

Дакле, $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ и $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ имају исти број фасета. Додатно, испоставља се да су за одређене просте бројеве r и r' ови комплекси изоморфни, о чему говори наредна теорема.

Теорема 5.4. *Нека су p,q прости бројеви такви да је $3\leq p<q$. Ако су r,r' различити прости бројеви такви да је је $r,r'>pq-p-q$ и $r\equiv r' \pmod{pq}$, тада су комплекси $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ и $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ изоморфни.*

Доказ. Дефинишимо пресликавање $\pi : \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) \to \mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ на следећи начин:

$$r + 2p + 2q - pq - 1 + k \overset{\pi}{\longmapsto} r' + 2p + 2q - pq - 1 + k,$$

за $k \in \{1, \dots, pq-p-q\}$, док је свако друго теме фиксирано пресликавањем π. Покажимо да је π изоморфизам комплекса.

Из услова $r \equiv r' \pmod{pq}$ следи да је

$$\begin{aligned}\varphi(n) + dr + i &= (p-1)(q-1)(r-1) + dr + i \\ &\equiv_{pq} (p-1)(q-1)(r-1) + dr' + i = \varphi(n') + dr' + i.\end{aligned}$$

Са друге стране,

$$\begin{aligned}\varphi(n) + dr + i &= (p-1)(q-1)(r-1) + dr + i \\ &\equiv_r r - (p-1)(q-1) + i.\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(n') + dr' + i &= (p-1)(q-1)(r'-1) + dr' + i \\ &\equiv_{r'} r' - (p-1)(q-1) + i.\end{aligned}$$

Теме $(r - (p-1)(q-1) + i) \pmod{r}$ комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ обележено је бројем $r + 2p + 2q - pq - 1 + i$, док је теме $(r' - (p-1)(q-1) + i) \pmod{r'}$ комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ обележено бројем $r' + 2p + 2q - pq - 1 + i$. Према томе,

$$\pi(F_{\varphi(n)+dr+i}) = F_{\varphi(n')+dr'+i},$$

за све $i \in \{1, \dots, pq-p-q\}$, $d \in \{0, \dots, p-1\} \cup \{q, \dots, p+q-1\}$. Како $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ и $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ имају исти број фасета, закључујемо да је π изоморфизам комплекса. □

На основу претходне теореме, за фиксиран број $k \in \{0, \dots, pq-1\}$ није потребно разматрати комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ за све просте бројеве $r \equiv_{pq} k$. Довољно је посматрати комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ за најмањи прост број r који испуњава услове $r \equiv_{pq} k$ и $r > pq - p - q$. Према томе, за фиксиране просте бројеве p, q постоји највише pq међусобно неизоморфних комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$. Наредна теорема говори о томе да је број међусобно неизоморфних комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ могуће додатно смањити.

Теорема 5.5. *Нека су p, q прости бројеви такви да је $3 \leq p < q$. Ако су r, r' различити прости бројеви такви да је је $r, r' > pq - p - q$ и $r \equiv -r' \pmod{pq}$, тада су комплекси $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ и $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ изоморфни.*

Доказ. Означимо са $\mathrm{rm}(a, b)$ остатак при дељењу броја a бројем b. Пресликавање $\omega : \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) \to \mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ дефинишимо на следећи начин:

$$\begin{aligned} k &\overset{\omega}{\longmapsto} \mathrm{rm}(q-1-k, p), && k \in \{0, \dots, p-1\}, \\ p + k &\overset{\omega}{\longmapsto} p + \mathrm{rm}(p-1-k, q), && k \in \{0, \dots, q-1\}, \\ r + 2p + 2q - pq - 1 + k &\overset{\omega}{\longmapsto} p + q + r' - k, && k \in \{1, \dots, pq-p-q\}. \end{aligned}$$

Покажимо да је

$$\omega(F_{\varphi(n)+dr+i}) = F_{\varphi(n')+dr'+pq-p-q+1-i},$$

за све $i \in \{1, \dots, pq-p-q\}$, $d \in \{0, \dots, p-1\} \cup \{q, \dots, p+q-1\}$. Наиме, важи да је

$$\begin{aligned} q-1-(\varphi(n)+dr+i) &= q-1-(p-1)(q-1)(r-1)-dr-i \\ &\equiv_p q-1+(q-1)(-r'-1)+dr'-i \\ &= -qr'+r'+dr'-i \\ &= -(r'-1)(q-1)-q+1+dr'-i \\ &\equiv_p (p-1)(r'-1)(q-1)+pq-p-q+1+dr'-i \\ &= \varphi(n')+dr'+pq-p-q+1-i \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p-1-(\varphi(n)+dr+i) &= p-1-(p-1)(q-1)(r-1)-dr-i \\ &\equiv_q p-1+(p-1)(-r'-1)+dr'-i \\ &= -pr'+r'+dr'-i \\ &= -(r'-1)(p-1)-p+1+dr'-i \\ &\equiv_q (q-1)(r'-1)(p-1)+pq-q-p+1+dr'-i \\ &= \varphi(n')+dr'+pq-p-q+1-i \end{aligned}$$

Додатно,

$$\begin{aligned} \varphi(n)+dr+i &= (p-1)(q-1)(r-1)+dr+i \\ &\equiv_r r-(p-1)(q-1)+i \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(n)+dr'+pq-p-q+1-i &= (p-1)(q-1)(r'-1)+dr'+pq-p-q+1-i \\ &\equiv_{r'} r'-(p-1)(q-1)+pq-p-q+1-i \\ &= r'-i \end{aligned}$$

Теме $(r-(p-1)(q-1)+i) \pmod r$ комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ обележено је бројем $r+2p+2q-pq-1+i$, док је теме $(r'-i) \pmod{r'}$ комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}'_\emptyset}(T'_2)$ обележено бројем $r'+p+q-1$.

На основу претходног, закључујемо да је слика фасета $F_{\varphi(n)+dr+i}$ при пресликавању ω заиста фасет $F_{\varphi(n')+dr'+pq-p-q+1-i}$. Дакле, ω је изоморфизам комплекса. □

Претходне теореме илустроваћемо следећим примером.

Пример 5.7. За $n_1 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ комплекс $K_1 = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ генерисан је фасетима $\{F_{j \bmod 165}\}$, где

$$j \in \bigcup_{d \in \{0,1,2,5,6,7\}} \{81+11d, 82+11d \dots, 87+11d\},$$

који су редом обележени са:

$$\begin{gathered}[0,4,12],[1,5,13],[2,6,14],[0,7,15],[1,3,16],[2,4,17],[0,5,18],\\ [2,5,12],[0,6,13],[1,7,14],[2,3,15],[0,4,16],[1,5,17],[2,6,18],\\ [1,6,12],[2,7,13],[0,3,14],[1,4,15],[2,5,16],[0,6,17],[1,7,18],\\ [1,4,12],[2,5,13],[0,6,14],[1,7,15],[2,3,16],[0,4,17],[1,5,18],\\ [0,5,12],[1,6,13],[2,7,14],[0,3,15],[1,4,16],[2,5,17],[0,6,18],\\ [2,6,12],[0,7,13],[1,3,14],[2,4,15],[0,5,16],[1,6,17],[2,7,18].\end{gathered}$$

Са друге стране, за $n_2 = 3\cdot 5\cdot 41$ комплекс $K_2 = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ генеришу фасети $\{F_{j \bmod 615}\}$, где

$$j \in \bigcup_{d\in\{0,1,2,5,6,7\}} \{321+41d, 322+41d\dots, 327+41d\}.$$

Ови фасети обележени су редом:

$$\begin{gathered}[0,4,42],[1,5,43],[2,6,44],[0,7,45],[1,3,46],[2,4,47],[0,5,48],\\ [2,5,42],[0,6,43],[1,7,44],[2,3,45],[0,4,46],[1,5,47],[2,6,48],\\ [1,6,42],[2,7,43],[0,3,44],[1,4,45],[2,5,46],[0,6,47],[1,7,48],\\ [1,4,42],[2,5,43],[0,6,44],[1,7,45],[2,3,46],[0,4,47],[1,5,48],\\ [0,5,42],[1,6,43],[2,7,44],[0,3,45],[1,4,46],[2,5,47],[0,6,48],\\ [2,6,42],[0,7,43],[1,3,44],[2,4,45],[0,5,46],[1,6,47],[2,7,48].\end{gathered}$$

Како је $11 \equiv 41 \pmod{15}$, дефинишимо пресликавање $\pi : K_1 \to K_2$ на следећи начин

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \end{pmatrix}.$$

Тада важи да је

$$\pi(F_{(81+k+11d) \bmod 165}) = F_{(321+k+41d) \bmod 615},$$

за све $k \in \{0,\dots,6\}$, $d \in \{0,1,2,5,6,7\}$. Стога, закључујемо да је π изоморфизам комплекса K_1 и K_2.

У случају када је $n_3 = 3\cdot 5\cdot 19$, фасети комплекса $K_3 = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ су $\{F_{j \bmod 285}\}$, где

$$j \in \bigcup_{d\in\{0,1,2,5,6,7\}} \{145+19d, 146+19d\dots, 151+19d\},$$

и редом су обележени са:

$$\begin{gathered}[1,3,20],[2,4,21],[0,5,22],[1,6,23],[2,7,24],[0,3,25],[1,4,26],\\ [2,7,20],[0,3,21],[1,4,22],[2,5,23],[0,6,24],[1,7,25],[2,3,26],\\ [0,6,20],[1,7,21],[2,3,22],[0,4,23],[1,5,24],[2,6,25],[0,7,26],\\ [0,3,20],[1,4,21],[2,5,22],[0,6,23],[1,7,24],[2,3,25],[0,4,26],\\ [1,7,20],[2,3,21],[0,4,22],[1,5,23],[2,6,24],[0,7,25],[1,3,26],\\ [2,6,20],[0,7,21],[1,3,22],[2,4,23],[0,5,24],[1,6,25],[2,7,26]\end{gathered}$$

Важи да је $11 \equiv -19 \pmod{15}$, па је пресликавање $\omega : K_1 \to K_3$ дефинисано са

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 26 & 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 \end{pmatrix}$$

изоморфизам комплекса K_1 и K_3. Претходно следи из чињенице да је

$$\pi(F_{(81+k+11d) \bmod 165}) = F_{(151-k+19d) \bmod 285},$$

за све $k \in \{0, \dots, 6\}$, $d \in \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$.

5.3.4 Ациклично дискретно векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$

Као што смо се уверили у поглављу 5.3.2 (лема 5.1), проналазак ацикличног дискретног векторског поља на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ можемо свести на проналазак ацикличног дискретног векторског поља на његовом поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$.

Ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ дефинисаћемо на сличан начин као ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1)$. Дакле, најпре ћемо дефинисати ациклична дискретна векторска поља на његовим поткомплексима $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), t \in T_2$.

Подсетимо се да је за $t \in T_2$

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \big\{&[a_1^t, b_1^t, t],\ [a_2^t, b_2^t, t],\ \dots,\ [a_{p-1}^t, b_{p-1}^t, t],\ [a_p^t, b_p^t, t],\\ &[a_{l(q+1)}^t, b_1^t, t],\ [a_{l(q+2)}^t, b_2^t, t],\ \dots,\ [a_{l(p+q-1)}^t, b_{p-1}^t, t],\ [a_{l(p+q)}^t, b_p^t, t]\big\}.\end{aligned}$$

Дефинишимо дискретно векторско поље на поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}V_t = \big\{&\{[b_1^t, t],\ [a_1^t, b_1^t, t]\},\ \dots,\ \{[b_p^t, t],\ [a_p^t, b_p^t, t]\},\\ &\{[a_{l(q+1)}^t, t],\ [a_{l(q+1)}^t, b_1^t, t]\},\ \dots,\ \{[a_{l(p+q)}^t, t],\ [a_{l(p+q)}^t, b_p^t, t]\}\big\}.\end{aligned}$$

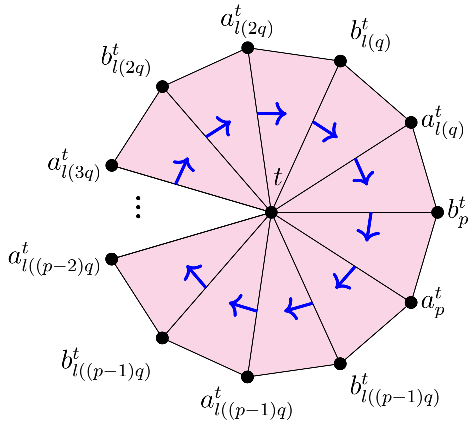
Дакле, за $j_1, j_2 \in \{1, \dots, p\}$,

$$\{[b_{j_2}^t, t],\ [a_{j_1}^t, b_{j_2}^t, t]\} \in V_t,$$

ако је $j_1 = j_2$. Са друге стране, ако је $j_1 = l(q + j_2)$, тада

$$\{[a_{j_1}^t, t],\ [a_{j_1}^t, b_{j_2}^t, t]\} \in V_t.$$

Како је $l(q + j_2) \neq j_2$, дискретно векторско поље V_t је добро дефинисано, али није ациклично на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$ (видети слику 5.9).



Слика 5.9: V_t-путање у комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$

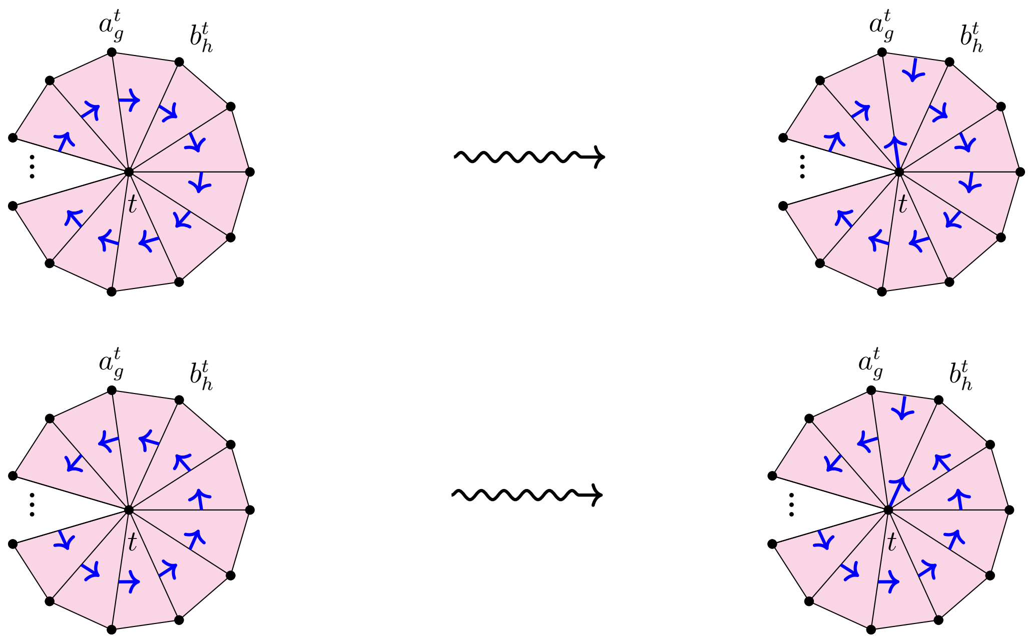
Међутим, уколико извршимо одређене модификације на дискретном векторском пољу V_t, оно може постати ациклично. Нека

$$(g,h) \in \big\{(1,1),\ (2,2),\ \ldots,\ (p,p),\ (l(q+1),1),\ (l(q+2),2),\ \ldots,\ (l(q+p),p)\big\}.$$

Модификујмо V_t на следећи начин:

- ако $\{[a^t_g,t],\ [a^t_g,b^t_h,t]\} \in V_t$, тада 2-симплекс $[a^t_g,b^t_h,t]$, уместо са $[a^t_g,t]$, упарујемо са $[a^t_g,b^t_h]$. Симплекс $[a^t_g,t]$ остаје неупарен, па њега упарујемо са 0-симплексом $[t]$.
- ако $\{[b^t_h,t],\ [a^t_g,b^t_h,t]\} \in V_t$, тада 2-симплекс $[a^t_g,b^t_h,t]$, уместо са $[b^t_h,t]$, упарујемо са $[a^t_g,b^t_h]$. Симплекс $[b^t_h,t]$ остаје неупарен, па њега упарујемо са 0-симплексом $[t]$.

Слика 5.10 приказује да сваки од претходна два типа модификација дају ациклично дискретно векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$.



Слика 5.10: Два типа модификација дискретног векторског поља V_t

Уведимо наредне ознаке:

$$V_t([a^t_g,b^t_h]) := \big(V_i \setminus \big\{\{[a^t_g,t],\ [a^t_g,b^t_h,t]\}\big\}\big) \cup \big\{\{[a^t_g,b^t_h],\ [a^t_g,b^t_h,t]\},\ \{[t],\ [a^t_g,t]\}\big\}$$

ако $\{[a^t_g,t],\ [a^t_g,b^t_h,t]\} \in V_t$, и

$$V_t([a^t_g,b^t_h]) := \big(V_i \setminus \big\{\{[b^t_h,t],\ [a^t_g,b^t_h,t]\}\big\}\big) \cup \big\{\{[a^t_g,b^t_h],\ [a^t_g,b^t_h,t]\},\ \{[t],\ [b^t_h,t]\}\big\}$$

ако $\{[b^t_h,t],\ [a^t_g,b^t_h,t]\} \in V_t$.

На основу претходног, $V_t([a^t_g,b^t_h])$ је добро дефинисано и ациклично дискретно векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, за све $t \in T_2$. Додатно,

$$\mathcal{C}\left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), V_t([a^t_g,b^t_h])\right) = \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \setminus \big\{[a^t_g,b^t_h]\big\} \subset K_{p,q}.$$

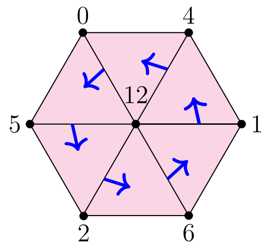
Пример 5.8. Посматрајмо поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(12)$ комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ придруженог полиному $\Phi_{3\cdot5\cdot11}(x)$. Важи да је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(12) = \{[0,4,12],[2,5,12],[1,6,12],[1,4,12],[0,5,12],[2,6,12]\}\,.$$

Дискретно векторско поље

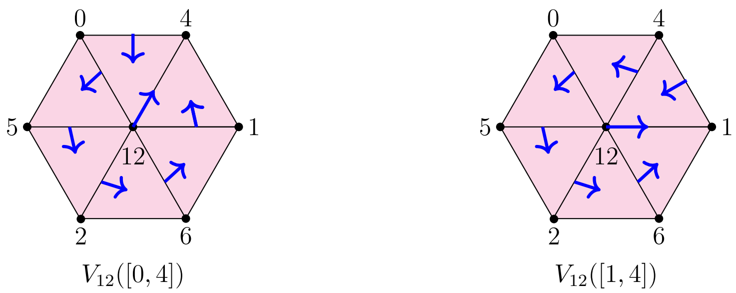
$$V_{12} = \big\{\{[0,4,12],[0,4]\},\{[2,5,12],[5,12]\},\{[1,6,12],[6,12]\},\\ \{[1,4,12],[1,12]\},\{[0,5,12],[0,12]\},\{[2,6,12],[2,12]\}\big\}$$

је добро дефинисано на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(12)$, али није ациклично (видети слику 5.11).



Слика 5.11: V_{12}-путање на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(12)$

Са друге стране, слика 5.12 показује да су дискретна векторска поља $V_{12}([0,4])$ и $V_{12}([1,4])$ ациклична.



Слика 5.12: Путање у модификацијама дискретног векторског поља V_{12}

Избор индекса (g,h) зависиће од остатка комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$. Нека су $V_t([a^t_{g_t}, b^t_{h_t}])$ одговарајућа ациклична векторска поља на поткомплексима $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$. Ако су 1-симплекси $[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}], t \in T_2$, међусобно различити, тада је

$$C := \bigcup_{t\in T_2} V_t\left([a^t_{g_t}, b^t_{h_t}]\right) \tag{5.8}$$

добро дефинисано векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$. Генерално, дискретно векторско поље C не мора бити ациклично. Наиме, не постоје нетривијалне затворене C-путање које садрже симплексе из само једног поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, али могу постојати нетривијалне затворене C-путање које садрже симплексе из различитих поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$.

Приметимо да је једини „улаз” у поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$, из поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2 \setminus \{t\})$ 1-симплекс $[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}]$, док су „излази” 1-симплекси из скупа $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \setminus \{[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}]\}$. Како бисмо избегли цикличност дискретног векторског поља C, посматраћемо потенцијалне „улазе/излазе” у сваком од поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, $t \in T_2$, при чему можемо занемарити оне „излазе” из $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$ који се не појављују као „улази” неких других поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t')$, $t' \in T_2 \setminus \{t\}$.

Нека је $\mathrm{Flow}(C) = (A \sqcup B, E)$ бипартитни диграф дефинисан на следећи начин:

$$A = \{\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \mid t \in T_2\},$$
$$B = \{[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}] \mid t \in T_2\}$$

и

$$E = \bigcup_{t \in T_2} \left\{ \left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), \beta\right) \,\middle|\, \beta \in \left(\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \setminus \{[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}]\}\right) \cap B \right\}$$
$$\cup \left\{ \left([a^t_{g_t}, b^t_{h_t}],\ \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\right) \,\middle|\, t \in T_2 \right\},$$

Приметимо да елементи скупа

$$\left\{ \left([a^t_{g_t}, b^t_{h_t}],\ \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)\right) \,\middle|\, t \in T_2 \right\}$$

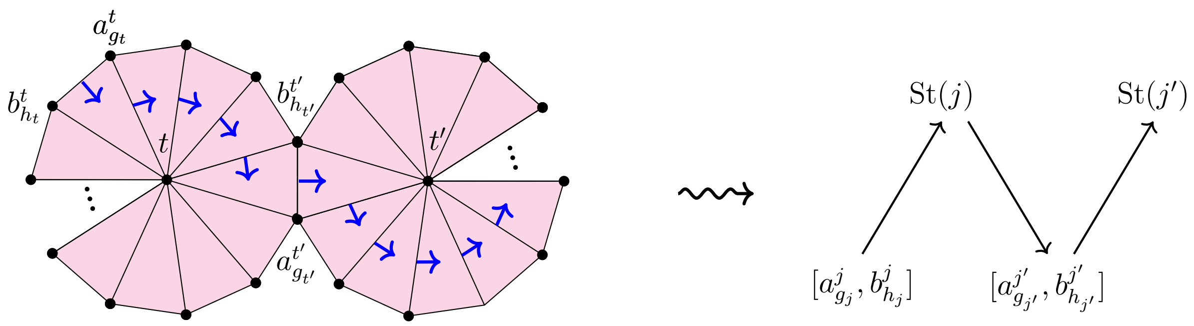
представљају „улазе” у поткомплексе $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), t \in T_2$, док елементи скупа

$$\bigcup_{t \in T_2} \left\{ \left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), \beta\right) \,\middle|\, \beta \in \left(\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \setminus \{[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}]\}\right) \cap B \right\}$$

представљају „излазе” из поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$ ка другим поткомплексима $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t')$, $t' \in T_2 \setminus \{t\}$. Ако су $t, t' \in T_2$ различита темена и $[a^{t'}_{g_{t'}}, b^{t'}_{h_{t'}}] \in \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, тада је

$$[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}] \to \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \to [a^{t'}_{g_{t'}}, b^{t'}_{h_{t'}}] \to \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t')$$

путања у $\mathrm{Flow}(C)$ (видети слику 5.13).



Слика 5.13: Формирање диграфа $\mathrm{Flow}(C)$

Из претходног следи да ако је диграф $\mathrm{Flow}(C)$ ацикличан, тада је и дискретно векторско поље C аციклично. Да бисмо постигли ацикличност дискретног векторског поља C, бираћемо одговарајуће 1-симплексе $[a^t_{g_t}, b^t_{h_t}]$, $t \in T_2$.

5.4 Комплекс $K_{\{j\}}$ придружен полиному $\Phi_{pqr}(x)$

Нека је $n = pqr$. Комплекс $K_{\{j\}}$, $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, придружен циклотомичном полиному $\Phi_{pqr}(x)$ је дводимензиони симплицијални комплекс који се састоји од фасета $\{F_{i \bmod n}\}$, где

$$i \in \{\varphi(n) + 1, \ldots, n - 1\} \cup \{j\}.$$

Стога, комплекс $K_{\{j\}}$ има један додатан фасет $F_{j \bmod n}$ у односу на комплекс $K_\emptyset$.

Када је $qr > pr + pq - p - q - r$, на основу поглавља 5.3, 1-симплекси $i \bmod qr$, где

$$i \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \ldots, \varphi(n) + qr\},$$

слободна су лица комплекса $K_\emptyset$. Међутим, уколико је $j \equiv_{qr} i_0$ за неко $i_0 \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \ldots, \varphi(n) + qr\}$, тада 1-симплекс $i_0 \bmod qr$ није слободно лице комплекса $K_{\{j\}}$. Са друге стране, 1-симплекси $i \bmod qr$

$$i \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \ldots, \varphi(n) + qr\} \setminus \{i_0\},$$

слободна су лица комплекса $K_{\{j\}}$. Ако важи $qr > pr + pq - p - q - r$, означимо са

$$\widetilde{K}_{\{j\}} := \widetilde{K}_\emptyset \cup F_{j \bmod n} \cup F_{i_0 \bmod n},$$

ако постоји $i_0 \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \ldots, \varphi(n) + qr\}$ такво да је $j \equiv_{qr} i_0$. Уколико такво i_0 не постоји

$$\widetilde{K}_{\{j\}} := \widetilde{K}_\emptyset \cup F_{j \bmod n}.$$

Дакле, $\widetilde{K}_{\{j\}}$ је комплекс добијен симплицијалним колапсом свих слободних лица комплекса $K_{\{j\}}$. Према томе,

$$K_{\{j\}} \simeq \widetilde{K}_{\{j\}}.$$

Пример 5.9. Посматрајмо комплексе $K_{\{0\}}$ и $K_{\{33\}}$ придружене полиному $\Phi_{3 \cdot 5 \cdot 11}(x)$. Комплекс $K_\emptyset$ хомотопан је комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ (видети пример 5.3).

Важи да је

$$K_{\{0\}} = K_\emptyset \cup F_{0 \bmod 165}.$$

Како је $F_{0 \bmod 165} = [0, 3, 8]$ и $[3, 8] \subset [2, 3, 8] \in K_\emptyset \subset K_{\{j\}}$, [3,8] није слободно лице комплекса $K_{\{0\}}$. Са друге стране, [3,8] јесте слободно лице комплекса $K_\emptyset$. Дакле,

$$\widetilde{K}_{\{0\}} = \widetilde{K}_\emptyset \cup [2, 3, 8] \cup [0, 3, 8].$$

Комплекс

$$K_{\{33\}} = K_\emptyset \cup F_{33 \bmod 165},$$

при чему лице [6,8] фасета $F_{33 \bmod 165} = [1, 6, 8]$ није слободно лице комплекса $K_\emptyset$. Према томе, слободна лица комплекса $K_{\{33\}}$ иста су као и слободна лица комплекса $K_\emptyset$, па је

$$\widetilde{K}_{\{33\}} = \widetilde{K}_\emptyset \cup [1, 6, 8].$$

Произвољно ациклично дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$ може послужити за конструкцију ацикличног дискретног векторског поља на $\widetilde{K}_{\{j\}}$, о чему говори наредна лема.

Лема 5.2. *Нека је $n = pqr$, p, q, r су различити прости бројеви и $r > pq - p - q$. Ако су $\widetilde{K}_\emptyset$ и $\widetilde{K}_{\{j\}}$, $j \in \{0, \ldots, \varphi(n)\}$, комплекси придружени полиному $\Phi_n(x)$ и V ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$, тада постоји дискретно ациклично поље V' на комплексу $\widetilde{K}_{\{j\}}$ такво да је*

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_{\{j\}}, V') = \mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) \cup F_{j \bmod n}.$$

Доказ. Ако постоји $i_0 \in \{\varphi(n) + pq + pr - p - q - r + 1, \ldots, \varphi(n) + qr\}$ такво да је $j \equiv_{qr} i_0$, тада је $\widetilde{K}_{\{j\}} = \widetilde{K}_\emptyset \cup F_{j \bmod n} \cup F_{i_0 \bmod n}$ и

$$V' = V \cup \big\{\{i_0 \bmod qr, i_0 \bmod n\}\big\}$$

ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_{\{j\}}$. Како су $F_{j \bmod n}$ и $F_{i_0 \bmod n}$ једини 2-симплекси из $\widetilde{K}_{\{j\}}$ чије је лице $i_0 \bmod qr$, дискретно векторско поље V' је добро дефинисано. Како $i_0 \bmod qr \notin \widetilde{K}_\emptyset$, V' је ациклично.

Уколико такво i_0 не постоји, $\widetilde{K}_{\{j\}} = \widetilde{K}_\emptyset \cup F_{j \bmod n}$ и $V' = V$ је ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_{\{j\}}$. Јасно је да у оба случаја важи

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_{\{j\}}, V') = \mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) \cup F_{j \bmod n}.$$

□

5.5 Хомотопски тип

Према теореми 5.3, комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{p_1 \cdots p_d}(x)$, где су p_i прости бројеви и $d \neq 3$, хомотопски је еквивалентан $(d-2)$-сфери. На основу исте теореме, комплекс $K_{\{j\}}$ придружен полиному $\Phi_{p_1 \cdots p_d}(x)$ хомотопски је еквивалентан простору $\mathbb{S}^{d-2} \cup_{f_j} \mathbb{B}^{d-1}$, где је $\deg(f_j) = c_j$. У овом поглављу бавимо се испитивањем хомотопског типа комплекса $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ када је $d = 3$.

Теорема 5.6. *Нека је $n = pqr$, где су p, q, r различити прости бројеви и $r > pq - p - q$. Ако је $r \equiv k \pmod{pq}$, где $k \in \{1, pq - 1\}$, тада важи:*

(1) *Комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_n(x)$ хомотопски је еквивалентан простору $\mathbb{S}^1$.*

(2) *Ако је $\Phi_n(x) = \sum_{i=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$, комплекс $K_{\{j\}}$, $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, придружен полиному $\Phi_n(x)$ хомотопски је еквивалентан простору $\mathbb{S}^1 \cup_{f_j} \mathbb{B}^2$, где је $\deg(f_j) = c_j$.*

Доказ. Како је $r > pq - p - q$, на основу поглавља 5.3, уместо комплекса $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ можемо посматрати њихове деформационе ретракте $\widetilde{K}_\emptyset$ и $\widetilde{K}_{\{j\}}$.

Да бисмо показали да је $\widetilde{K}_\emptyset \simeq \mathbb{S}^1$ конструисаћемо дискретно ациклично векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ са једним неупареним 0-симплексом и једним неупареним 1-симплексом. Уколико такво дискретно ациклично векторско поље постоји, тада на основу теорема 2.1 и 2.2 следи да је комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ хомотопски еквивалентан CW комплексу који се састоји од једне 0-ћелије и једне 1-ћелије. Како према теореми 5.2 следи да је $H_1(\widetilde{K}_\emptyset) = \mathbb{Z}$, закључујемо да је $\widetilde{K}_\emptyset \simeq \mathbb{S}^1$.

Слично томе, да бисмо показали да је $\widetilde{K}_{\{j\}} \simeq \mathbb{S}^1 \cup_{f_j} \mathbb{B}^2$, где је $\deg(f_j) = c_j$, конструисаћемо ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_{\{j\}}$ са једним неупареним 0-симплексом, једним неупареним 1-симплексом и једним неупареним 2-симплексом. Тада, према теоремама 2.1 и 2.2, следи да је комплекс $\widetilde{K}_{\{j\}}$ хомотопски еквивалентан CW комплексу који се састоји од једне 0-ћелије, једне 1-ћелије и једне 2-ћелије. Стога, генератор групе $\pi_1(\widetilde{K}_{\{j\}})$ је 1-ћелија, док је релација одређена 2-ћелијом. Другим речима,

$$\pi_1(\widetilde{K}_{\{j\}}) = \langle g \mid g^d = 1 \rangle,$$

где је d степен лепљења 1-ћелије на границу 2-ћелије. На основу теореме 5.2, важи да је $H_1(\widetilde{K}_{\{j\}}) = \mathbb{Z}/c_j\mathbb{Z}$. Како је $H_1(\widetilde{K}_{\{j\}})$ абелизација групе $\pi_1(\widetilde{K}_{\{j\}})$, закључујемо да је $d = c_j$. Према томе, $\widetilde{K}_{\{j\}} \simeq \mathbb{S}^1 \cup_{f_j} \mathbb{B}^2$.

Ако је V ациклично дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$ које има по једну критичну 0-ћелију и 1-ћелију, према леми 5.2, постоји ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_{\{j\}}$ са по једном критичном 0-ћелијом, 1-ћелијом и 2-ћелијом. Критична 2-ћелија одговара управо фасету $F_{j \bmod n}$.

На основу леме 5.1, конструкцију ацикличног дискретног векторског поља V без критичних 2-симплекса на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ можемо свести на конструкцију ацикличног дискретног векторског поља C без критичних 2-симплекса на поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$, где је $T_2 = \{r + 2p + 2q - pq, \dots, p + q + r - 1\}$.

Нека је $r \equiv 1 \pmod{pq}$. Ради поједностављења записа, обележимо елементе скупа T_2 редом са $t_1, t_2, \dots, t_m$, где је $m = |T_2| = pq - p - q$. Дефинишимо дискретно векторско поље C на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}
C := &\bigcup_{i=1}^{m} V_{t_i}([a_1^{t_i}, b_1^{t_i}]) \\
&\cup \Big\{ \{[b_2^{t_m}],\, [a_2^{t_m}, b_2^{t_m}]\},\ \dots,\ \{[b_p^{t_m}],\, [a_p^{t_m}, b_p^{t_m}]\}, \\
&\quad \{[b_{q+1}^{t_m-q+p}],\, [a_{q+1}^{t_m-q+p}, b_{q+1}^{t_m-q+p}]\}, \dots, \{[b_{q+1}^{t_m-1}],\, [a_{q+1}^{t_m-1}, b_{q+1}^{t_m-1}]\}, \\
&\quad \{[a_{q+1}^{t_m}],\, [a_{q+1}^{t_m}, b_{q+1}^{t_m}]\},\ \dots,\ \{[a_{p+q}^{t_m}],\, [a_{p+q}^{t_m}, b_{p+q}^{t_m}]\} \Big\}
\end{aligned}$$

У наредним корацима покажимо да је C тражено ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$.

Корак 1: Дискретно векторско поље C је добро дефинисано на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$.

Уколико је C добро дефинисано дискретно векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$, тада сваки од 1-симплекса и 0-симплекса из $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ припада највише једном пару у C. Другим речима, 1-симплекси

$$\begin{aligned}
&[a_1^{t_1}, b_1^{t_1}], \dots, [a_1^{t_m}, b_1^{t_m}], [a_2^{t_m}, b_2^{t_m}], \dots, [a_p^{t_m}, b_p^{t_m}], \\
&[a_{q+1}^{t_m-q+p}, b_{q+1}^{t_m-q+p}], \dots, [a_{q+1}^{t_m-1}, b_{q+1}^{t_m-1}], [a_{q+1}^{t_m}, b_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{p+q}^{t_m}, b_{p+q}^{t_m}]
\end{aligned}$$

и 0-симплекси

$$[a_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{p+q}^{t_m}], [b_2^{t_m}], \dots, [b_p^{t_m}], [b_{q+1}^{t_m-q+p}], \dots, [b_{q+1}^{t_m-1}]$$

су међусобно различити.

За свако $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, p\} \cup \{q+1, \dots, p+q\}$, важи да је

$$[a_j^{t_i}, b_j^{t_i}, t_i] = F_{(\varphi(n)+i+(j-1)r) \bmod n}.$$

Према томе, симплекси

$$\begin{aligned}
&[a_1^{t_1}, b_1^{t_1}], \dots, [a_1^{t_m}, b_1^{t_m}], [a_2^{t_m}, b_2^{t_m}], \dots, [a_p^{t_m}, b_p^{t_m}],\\
&[a_{q+1}^{t_m-q+p}, b_{q+1}^{t_m-q+p}], \dots, [a_{q+1}^{t_m-1}, b_{q+1}^{t_m-1}], [a_{q+1}^{t_m}, b_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{p+q}^{t_m}, b_{p+q}^{t_m}]
\end{aligned}$$

су редом лица фасета

$$\begin{aligned}
&F_{(\varphi(n)+1) \bmod n},\ \dots,\ F_{(\varphi(n)+m) \bmod n},\\
&F_{(\varphi(n)+m+r) \bmod n},\ \dots,\ F_{(\varphi(n)+m+pr) \bmod n},\\
&F_{(\varphi(n)+m-q+p+(q+1)r) \bmod n},\ \dots,\ F_{(\varphi(n)+m-1+(q+1)r) \bmod n},\\
&F_{(\varphi(n)+m+(q+1)r) \bmod n},\ \dots,\ F_{(\varphi(n)+m-1+(p+q)r) \bmod n}.
\end{aligned}$$

Како је $\varphi(n) = (p-1)(q-1)(r-1) \equiv_{pq} 0$, следи да је

$$\begin{aligned}
&\varphi(n) + 1 \equiv_{pq} 1\\
&\qquad\vdots\\
&\varphi(n) + m \equiv_{pq} m\\
&\varphi(n) + m + r \equiv_{pq} m + 1\\
&\qquad\vdots\\
&\varphi(n) + m + pr \equiv_{pq} m + p\\
&\varphi(n) + m - q + p + (q+1)r \equiv_{pq} m + p + 1\\
&\qquad\vdots\\
&\varphi(n) + m - 1 + (q+1)r \equiv_{pq} m + q\\
&\varphi(n) + m + (q+1)r \equiv_{pq} m + q + 1\\
&\qquad\vdots\\
&\varphi(n) + m - 1 + (p+q)r \equiv_{pq} m + p + q - 1 = pq - 1.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}
&[a_1^{t_1}, b_1^{t_1}], \dots, [a_1^{t_m}, b_1^{t_m}], [a_2^{t_m}, b_2^{t_m}], \dots, [a_p^{t_m}, b_p^{t_m}],\\
&[a_{q+1}^{t_m-q+p}, b_{q+1}^{t_m-q+p}], \dots, [a_{q+1}^{t_m-1}, b_{q+1}^{t_m-1}], [a_{q+1}^{t_m}, b_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{p+q}^{t_m}, b_{p+q}^{t_m}]
\end{aligned}$$

су $pq-1$ међусобно различита 1-симплекса. Додатно, посматрајући остатке при дељењу са p и q, из претходног можемо закључити да су и 0-симплекси

$$[a_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{p+q}^{t_m}], [b_2^{t_m}], \dots, [b_p^{t_m}], [b_{q+1}^{t_m-q+p}], \dots, [b_{q+p}^{t_m-1}]$$

такође међусобно различити. Закључујемо да дискретно векторско поље C јесте добро дефинисано.

Корак 2: Дискретно векторско поље C је ациклично.

Нека је $i' > i$, где $i, i' \in \{1, \dots, m\}$. Како је $1 \leq i' - i < m = pq - p - q$, за свако $j \in \{1, \dots, p\} \cup \{q+1, \dots, p+q\}$ важи да је

$$\varphi(n) + i' + (j-1)r \not\equiv_{pq} \varphi(n) + i.$$

У супротном, важило би да је $i' - i = lpq - (j-1)$, за неко $l > 0$. Како је $lpq - (j-1) > pq - p - q + 1$ и $i' - i < pq - p - q$, то је немогуће. Стога, $[a_1^{t_i}, b_1^{t_i}] \neq [a_j^{t_{i'}}, b_j^{t_{i'}}]$ за све $j \in \{1, \dots, p\} \cup \{q+1, \dots, p+q\}$. Другим речима, $[a_1^{t_i}, b_1^{t_i}] \notin \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_{i'})$. На основу претходне чињенице следи да у диграфу $\mathrm{Flow}\left(\bigcup_{i=1}^m V_t([a_1^{t_i}, b_1^{t_i}])\right)$ не постоји усмерена путања

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_{i'}) \to [a_1^{t_i}, b_1^{t_i}] \to \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_i).$$

Односно, за свако теме $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, диграфа $\mathrm{Flow}\left(\bigcup_{i=1}^m V_t([a_1^{t_i}, b_1^{t_i}])\right)$ важи да

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_i) \not\longrightarrow \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_j),$$

ако је $j \leq i$ и $j \in \{1, \dots, m\}$. Закључујемо да је $\mathrm{Flow}\left(\bigcup_{i=1}^m V_t([a_1^{t_i}, b_1^{t_i}])\right)$ ацикличан диграф, па не постоје нетривијалне C-путање које се састоје од 1-симплекса и 2-симплекса у комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$.

Ако би 1-симплекс $[a_{q+1}^{t_m - i}, b_{q+1}^{t_m - i}]$, $i \in \{1, \dots, q-p\}$, био део неке затворене нетривијалне C-путање која се састоји од 1-симплекса и 0-симплекса, тада би она садржала пут

$$[t_m - i] \longrightarrow [b_{q+1}^{t_m - i}, t_m - i] \longrightarrow [b_{q+1}^{t_m - i}] \longrightarrow [a_{q+1}^{t_m - i}, b_{q+1}^{t_m - i}].$$

Међутим, за свако $\alpha \supset [t_m - i]$, $\alpha \neq [b_{q+1}^{t_m - i}, t_m - i]$, важи да је α упарено са неким 2-симплексом. Према томе, таква затворена нетривијална путања не постоји. Преостали симплекси који могу формирати неку нетривијалну затворену C-путању у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ садржану од 0-симплекса и 1-симплекса су

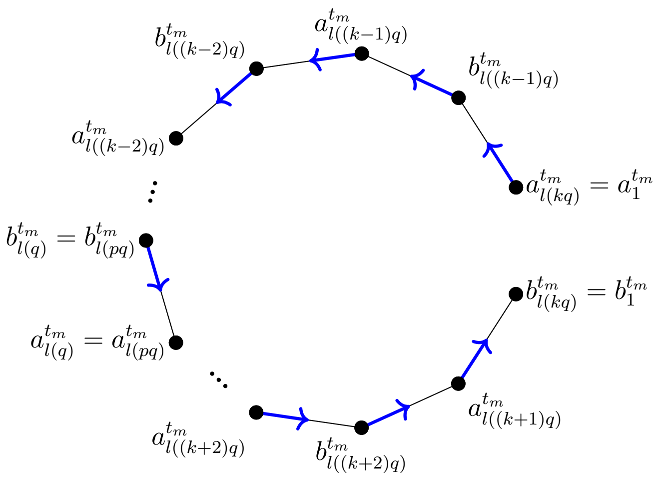
$$\begin{aligned}
&[b_2^{t_m}], \dots, [b_p^{t_m}], [a_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{q+p}^{t_m}],\\
&[a_2^{t_m}, b_2^{t_m}], \dots, [a_p^{t_m}, b_p^{t_m}], [a_{q+1}^{t_m}, b_{q+1}^{t_m}], \dots, [a_{p+q}^{t_m}, b_{p+q}^{t_m}].
\end{aligned}$$

Другим речима, то су симплекси који припадају комплексу $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_m)$. Подсетимо се да је $a_{q+j}^{t_m} = a_{l(q+j)}^{t_m}$ и $b_{q+j}^{t_m} = b_j^{t_m}$ за свако $j \in \{1, \dots, p\}$ (видети 5.6). Дакле, симплекс $[b_j^{t_m}]$ је лице симплекса $[a_j^{t_m}, b_j^{t_m}, t_m]$ и $[a_{l(j+q)}^{t_m}, b_j^{t_m}, t_m]$, док је $[a_j^{t_m}]$ лице симплекса $[a_j^{t_m}, b_j^{t_m}, t_m]$ и $[a_j^{t_m}, b_{l(j-q)}^{t_m}, t_m]$, за све $j \in \{1, \dots, p\}$. Како су p и q узајамно прости, следи да је

$$\{l(q), l(2q), \dots, l((p-1)q)\} = \{l(q+1), l(q+2), \dots, l(q+p)\} = \{1, 2, \dots, p\}$$

(видети слику 5.6). Нека је $l(kq) = 1$, за неко $k \in \{1, \dots, p\}$. На основу слике 5.14 и чињенице да је $b_1^{t_m}$ критичан симплекс у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ у односу на C, закључујемо да не постоје нетривијалне затворене C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$ садржане од 0-симплекса и 1-симплекса. Дакле, C је ациклично дискретно векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$, при чему је

$$\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2), C) = \{[b_1^{t_m}]\}.$$



Слика 5.14: C-путање на $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t_m)$

Корак 3: Критични симплекси у дискретном векторском пољу V.

Посматрајмо 1-симплекс

$$[a^{p+q+1}_{p+q-1}, b^{p+q+1}_{p+q-1}, p+q] \in \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(p+q+1) \subset \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1).$$

Како је $p+q = \min(T_1)$, важи да је $[a^{p+q+1}_{p+q-1}, b^{p+q+1}_{p+q-1}, p+q+1] = F_{(\varphi(n)+m+2+(p+q-1)r) \bmod n}$. Из чињенице да је

$$\varphi(n) + m + 2 + (p+q-1)r \not\equiv_{pq} \varphi(n) + i + (j-1)r$$

за све $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, p\} \cup \{q+1, \dots, p+q\}$, закључујемо да

$$[a^{p+q+1}_{p+q-1}, b^{p+q+1}_{p+q-1}] \notin \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2).$$

Према томе,

$$K_{p,q} \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) = \{[a^{p+q+1}_{p+q-1}, b^{p+q+1}_{p+q-1}]\}.$$

Како је $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1) \subset K_{p,q}$, следи да је

$$\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1) \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) = \{[a^{p+q+1}_{p+q-1}, b^{p+q+1}_{p+q-1}]\}.$$

Нека је V ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ дефинисано као у леми 5.1. Тада је

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \{[b^{t_m}_1], [a^{p+q+1}_{p+q-1}, b^{p+q+1}_{p+q-1}]\},$$

чиме је доказано тврђење у случају да је $r \equiv 1 \pmod{pq}$.

Како је $1 \equiv 1 - pq \pmod{pq}$, случај када је $r \equiv pq - 1 \pmod{pq}$ можемо свести на претходни случај. На основу претходних разматрања и теореме 5.5 следи да је

$$\begin{aligned} C := & \bigcup_{i=1}^{m} V_{t_i}([a^{t_i}_1, b^{t_i}_1]) \\ & \cup \big\{\{[b^{t_1}_2], [a^{t_1}_2, b^{t_1}_2]\}, \dots, \{[b^{t_1}_p], [a^{t_1}_p, b^{t_1}_p]\}, \\ & \quad \{[b^{t_2}_{q+1}], [a^{t_2}_{q+1}, b^{t_2}_{q+1}]\}, \dots, \{[b^{t_{q-p}}_{q+1}], [a^{t_{q-p}}_{q+1}, b^{t_{q-p}}_{q+1}]\}, \\ & \quad \{[a^{t_1}_{q+1}], [a^{t_1}_{q+1}, b^{t_1}_{q+1}]\}, \dots, \{[a^{t_1}_{p+q}], [a^{t_1}_{p+q}, b^{t_1}_{p+q}]\}\big\}, \end{aligned}$$

ациклично векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2)$, при чему је

$$\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2), C) = \{[b_1^{t_1}]\}.$$

Додатно,

$$\begin{array}{l}[a_1^{t_1}, b_1^{t_1}], \dots, [a_1^{t_m}, b_1^{t_m}], [a_2^{t_1}, b_2^{t_1}], \dots, [a_p^{t_1}, b_p^{t_1}],\\ [a_{q+1}^{t_2}, b_{q+1}^{t_2}], \dots, [a_{q+1}^{t_{p+q}}, b_{q+1}^{t_{p+q}}], [a_{q+1}^{t_1}, b_{q+1}^{t_1}], \dots, [a_{p+q}^{t_1}, b_{p+q}^{t_1}]\end{array}$$

су $pq-1$ међусобно различита 1-симплекса. Како је $[a_1^{p+q}, b_1^{p+q}, p+q] = F_{(\varphi(n)+m+1) \bmod n}$ и важи да је

$$\varphi(n) + m + 1 \not\equiv_{pq} \varphi(n) + i + (j-1)r$$

за све $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, p\} \cup \{q+1, \dots, p+q\}$, закључујемо да

$$[a_1^{p+q}, b_1^{p+q}] \notin \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2).$$

Тада је

$$\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1) \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) = \{[a_1^{p+q}, b_1^{p+q}]\}.$$

Дакле,

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \{[b_1^{t_1}], [a_1^{p+q}, b_1^{p+q}]\},$$

чиме је доказано тврђење и у овом случају □

У претходној теореми дат је критеријум када важи тврђење теореме 5.3 у случају када је $d = 3$. У наставку бавићемо се испитивањем хомотопског типа комплекса $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ за $p = 3, q = 5$.

Случај $p = 3, q = 5$

Посматрајмо комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{3\cdot5\cdot r}(x)$, где је $r > 7$. Како је $5r > 2r+7$, уместо комплекса $K_\emptyset$ можемо разматрати његов поткомплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ (видети поглавље 5.3). Поткомплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ је дводимензиони симплицијални комплекс који се састоји од следећих фасета:

$$\begin{array}{llllll}
F_{(8r-7) \bmod n}, & \dots, & F_{(8r-1) \bmod n}, & F_{8r \bmod n}, & \dots, & F_{(9r-8) \bmod n},\\
F_{(9r-7) \bmod n}, & \dots, & F_{(9r-1) \bmod n}, & F_{9r \bmod n}, & \dots, & F_{(10r-8) \bmod n},\\
F_{(10r-7) \bmod n}, & \dots, & F_{(10r-1) \bmod n}, & F_{10r \bmod n}, & \dots, & F_{(11r-8) \bmod n},\\
F_{(13r-7) \bmod n}, & \dots, & F_{(13r-1) \bmod n}, & F_{13r \bmod n}, & \dots, & F_{(14r-8) \bmod n},\\
F_{(14r-7) \bmod n}, & \dots, & F_{(14r-1) \bmod n}, & F_{14r \bmod n}, & \dots, & F_{(15r-8) \bmod n},\\
F_{(15r-7) \bmod n}, & \dots, & F_{(15r-1) \bmod n}. & & &
\end{array}$$

Преузимајући ознаке из поглавља 5.3.1, претходне фасете обележавамо редом са:

$$\begin{array}{llllll}
[a_1^{r+1}, b_1^{r+1}, r+1], & \ldots, & [a_1^{r+7}, b_1^{r+7}, r+7], & [a_1^8, b_1^8, 8], & \ldots, & [a_1^r, b_1^r, r], \\
[a_2^{r+1}, b_2^{r+1}, r+1], & \ldots, & [a_2^{r+7}, b_2^{r+7}, r+7], & [a_2^8, b_2^8, 8], & \ldots, & [a_2^r, b_2^r, r], \\
[a_3^{r+1}, b_3^{r+1}, r+1], & \ldots, & [a_3^{r+7}, b_3^{r+7}, r+7], & [a_3^8, b_3^8, 8], & \ldots, & [a_3^r, b_3^r, r], \\
[a_6^{r+1}, b_6^{r+1}, r+1], & \ldots, & [a_6^{r+7}, b_6^{r+7}, r+7], & [a_6^8, b_6^8, 8], & \ldots, & [a_6^r, b_6^r, r], \\
[a_7^{r+1}, b_7^{r+1}, r+1], & \ldots, & [a_7^{r+7}, b_7^{r+7}, r+7], & [a_7^8, b_7^8, 8], & \ldots, & [a_7^p, b_7^r, r], \\
[a_8^{r+1}, b_8^{r+1}, r+1], & \ldots, & [a_8^{r+7}, b_8^{r+7}, r+7]. & & &
\end{array}$$

Дакле,

$$\widetilde{K}_\emptyset = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) \cup \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1),$$

где је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_2) = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$$

и

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(T_1) = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{8, \ldots, r\}).$$

У леми 5.1 истакнута је важност поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$ у анализи структуре комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$. Шта више, у одређеним случајевима, структура комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ потпуно је одређена структуром поткомплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$. Наредна теорема описује те случајеве.

Теорема 5.7. *Нека је $n = 3 \cdot 5 \cdot r$, где је $r \geq 7$ прост број. Ако је $r \equiv k \pmod{15}$, где $k \in \{2, 4, 7, 8, 11, 13\}$, комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x)$ хомотопски је еквивалентан свом поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$. Додатно, ако је $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$, комплекс $\widetilde{K}_{\{j\}}$, $j \in \{0, \ldots, \varphi(n)\}$, хомотопски је еквивалентан поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}) \cup F_{j \bmod n}$.*

Доказ. Ако је $p = 7$, тада је $\widetilde{K}_\emptyset = \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$. Према томе, размотримо случајеве када је $r > 7$. Нека је C ациклично дискретно векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$. Тада је, на основу леме 5.1, $V = (\bigcup_{t=8}^{r} S_t) \cup C$ ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\widetilde{K}_\emptyset$. Покажимо да је

$$\left(\widetilde{K}_\emptyset \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})\right) \cap \mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \emptyset$$

и да

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}) \not\longrightarrow \widetilde{K}_\emptyset \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}).$$

Тада ће тврђење теореме следити на основу теореме 2.3.

Подсетимо се да су S_t ациклична векторска поља на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t)$, за све $t \in \{8, \ldots, r\}$ (видети слику 5.8). Додатно, $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) = \mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t), S_t)$. Према томе,

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}) \not\longrightarrow \widetilde{K}_\emptyset \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}).$$

Ако је симплекс $\alpha \in \widetilde{K}_\emptyset \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ критичан у односу на V, тада $\alpha \in \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ за неко $t \in \{8,\ldots,r\}$. Комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ састоји се од фасета $\{F_{j \bmod 15r}\}$, где $j \in \{dr-i\}_{i\in\{1,\ldots 7\},d\in\{8,9,10,13,14,15\}}$. За свако $k \in \{2,4,7,8,11,13\}$, међу бројевима $\{dr-i\}_{i\in\{1,\ldots 7\},d\in\{8,9,10,13,14,15\}}$ налази се 15 бројева који дају различите остатке приликом дељења са 15 (видети табелу 5.1). Дакле,

$$K_{3,5} \subset \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}).$$

Табела 5.1

k	15 бројева из скупа $\{dr-i\}_{i\in\{1,\ldots 7\},d\in\{8,9,10,13,14,15\}}$ чији су остаци различити по модулу 15
2	$8r-1,\ 9r-2,\ 9r-1,\ 10r-2,\ 10r-1,\ 11r-2,\ 11r-1,\ 12r-2, 12r-1,\ 8r-7,\ 8r-6,\ 8r-5,\ 8r-4,\ 8r-3,\ 8r-2$
4	$8r-2,\ 8r-1,\ 9r-4,\ 9r-3,\ 9r-2,\ 9r-1,\ 10r-4,\ 10r-3,\ 10r-2,\ 10r-1,\ 8r-7,\ 8r-6,\ 8r-5,\ 8r-4,\ 8r-3$
7	$9r-3,\ 9r-2,\ 9r-1,\ 10r-7,\ 8r-7,\ 8r-6,\ 8r-5,\ 8r-4,\ 8r-3,\ 8r-2,\ 8r-1,\ 9r-7,\ 9r-6,\ 9r-5,\ 9r-4$
8	$8r-3,\ 8r-2,\ 8r-1,\ 10r-1,\ 9r-7,\ 9r-6,\ 9r-5,\ 9r-4,\ 9r-3,\ 9r-2,\ 9r-1,\ 8r-7,\ 8r-6,\ 8r-5,\ 8r-4$
11	$10r-5,\ 10r-4,\ 9r-7,\ 9r-6,\ 9r-5,\ 9r-4,\ 8r-7,\ 8r-6,\ 8r-5,\ 8r-4,\ 8r-3,\ 8r-2,\ 8r-1,\ 10r-7,\ 10r-6$
13	$12r-6,\ 11r-7,\ 11r-6,\ 10r-7,\ 10r-6,\ 9r-7,\ 9r-6,\ 8r-7,\ 8r-6,\ 8r-5,\ 8r-4,\ 8r-3,\ 8r-2,\ 8r-1,\ 12r-7$

Како $\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \subset K_{3,5}$, закључујемо да

$$\mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(t) \subset \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}),$$

за све $t \in \{8,\ldots,r\}$. Стога,

$$\left(\widetilde{K}_\emptyset \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})\right) \cap \mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \emptyset.$$

Приметимо да је $\mathrm{Bd}(F_{j \bmod n}) \subset K_{3,5} \subset \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}) \cup F_{j \bmod n}$. Стога,

$$\widetilde{K}_{\{j\}} \simeq \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}) \cup F_{j \bmod n}.$$

□

Када је $r \equiv k \pmod{15}$, где $k \in \{1,14\}$, комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ није хомотопски еквивалентан комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$, о чему сведоче наредни примери. Такође, наредни примери могу послужити као илустрација теореме 5.6.

Пример 5.10. Размотримо хомотопски тип комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ придруженог циклотомичном полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x)$, где је $r \equiv 1 \pmod{15}$. Комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ генерисан је следећим фасетима:

$$\begin{array}{ccccccc}
[1,4,r+1], & [2,5,r+2], & [0,6,r+3], & [1,7,r+4], & [2,3,r+5], & [0,4,r+6], & [1,5,r+7],\\
[2,5,r+1], & [0,6,r+2], & [1,7,r+3], & [2,3,r+4], & [0,4,r+5], & [1,5,r+6], & [2,6,r+7],\\
[0,6,r+1], & [1,7,r+2], & [2,3,r+3], & [0,4,r+4], & [1,5,r+5], & [2,6,r+6], & [0,7,r+7],\\
[0,4,r+1], & [1,5,r+2], & [2,6,r+3], & [0,7,r+4], & [1,3,r+5], & [2,4,r+6], & [0,5,r+7],\\
[1,5,r+1], & [2,6,r+2], & [0,7,r+3], & [1,3,r+4], & [2,4,r+5], & [0,5,r+6], & [1,6,r+7],\\
[2,6,r+1], & [0,7,r+2], & [1,3,r+3], & [2,4,r+4], & [0,5,r+5], & [1,6,r+6], & [2,7,r+7].
\end{array}$$

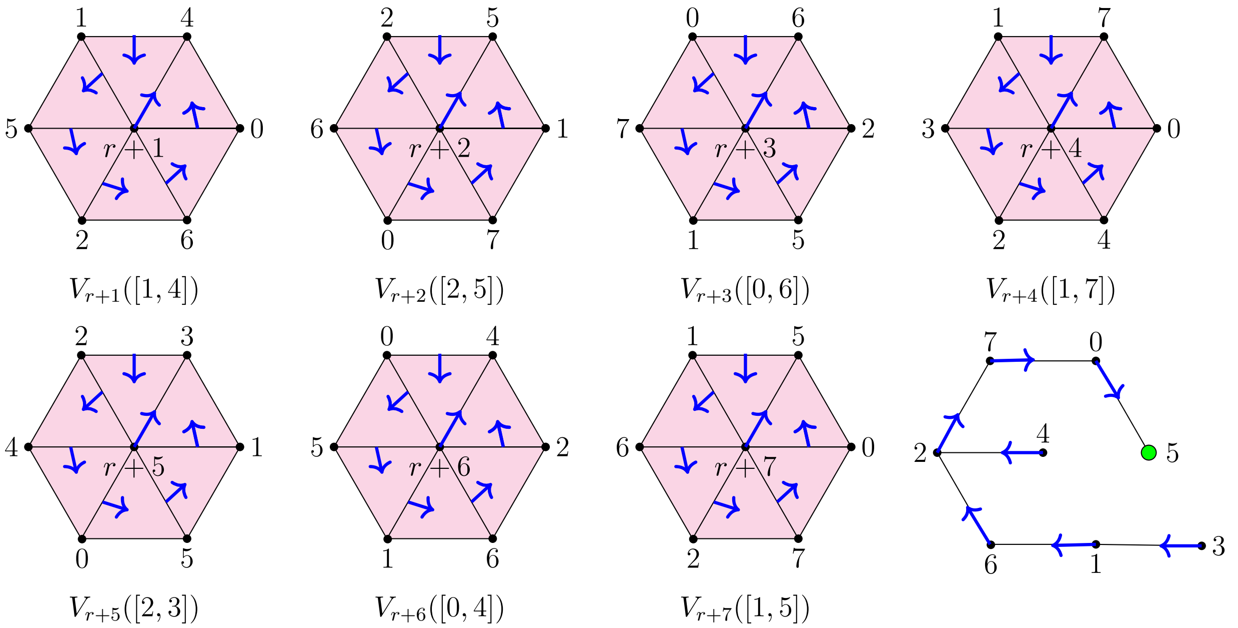
Нека је

$$\begin{aligned} C' = & V_{r+1}([1,4]) \cup V_{r+2}([2,5]) \cup V_{r+3}([0,6]) \cup V_{r+4}([1,7]) \\ & \cup V_{r+5}([2,3]) \cup V_{r+6}([0,4]) \cup V_{r+7}([1,5]). \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} C = C' \cup \{ & \{[6],[2,6]\}, \{[7],[0,7]\}, \{[3],[1,3]\}, \{[4],[2,4]\} \\ & \{[0],[0,5]\}, \{[1],[1,6]\}, \{[7],[2,7]\}\}. \end{aligned}$$

На основу теореме 5.6, C је ациклично дискретно векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$, па је C градијентно векторско поље неке Морсове функције (видети слику 5.15).



Слика 5.15: Градијентно векторско поље C

Заиста, C је добро дефинисано дискретно векторско поље на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$. Како је $\mathrm{Flow}(C')$ ацикличан диграф (видети слику 5.16), не постоје нетривијалне затворене C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ која се састоји од 1-симплекса и 2-симплекса.

Додатно, на слици 5.17 приказане су све могуће C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ које су формиране од 0-симплекса и 1-симплекса, при чему ниједна нетривијална C-путања није затворена.

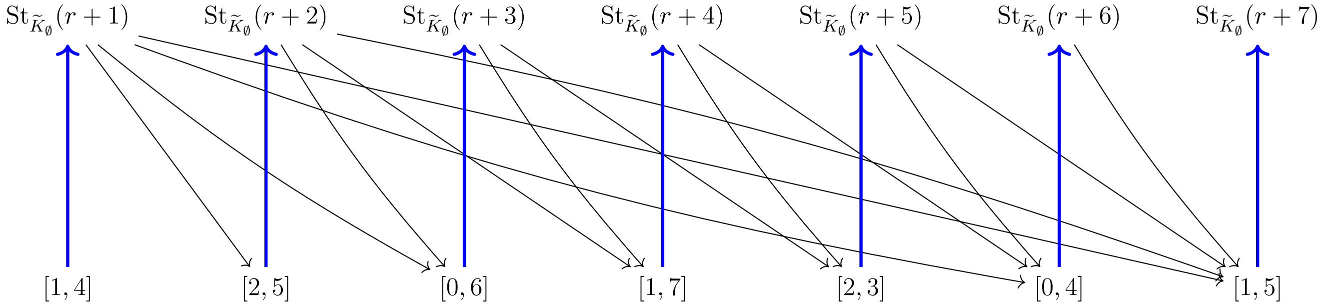
Како је

$$\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}), C) = \{[5]\},$$

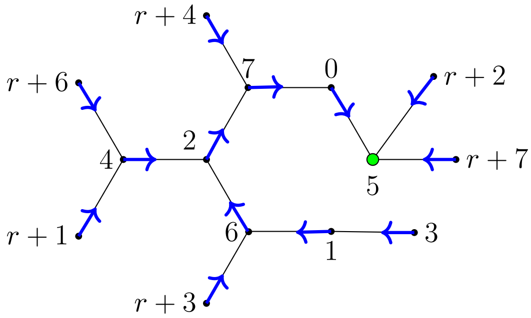
на основу теореме 2.1 и теореме 2.2, закључујемо да је поткомплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ контрактибилан.

Са друге стране, нека је V дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$ дефинисано као у леми 5.1. Тада је V ациклично дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$. Како је

$$K_{3,5} \setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}) = \{[0,3]\}$$



Слика 5.16: Диграф $\mathrm{Flow}(C')$



Слика 5.17: C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$

и

$$[0,3] \in F_{(14r+1) \bmod 15r} \subset \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(9) \subset \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{8,\dots,r\})$$

следи да је

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \{[5],[0,3]\}.$$

Дакле, комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ је хомотопан 1-сфери. Закључујемо да

$$\widetilde{K}_\emptyset \not\simeq St_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\}).$$

Пример 5.11. Посматрајмо комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ придружен циклотомичном полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x)$, где је $r \equiv 14 \pmod{15}$. Фасети комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$ су:

$$\begin{array}{ccccccc}
[0,3,r+1], & [1,4,r+2], & [2,5,r+3], & [0,6,r+4], & [1,7,r+5], & [2,3,r+6], & [0,4,r+7], \\
[2,7,r+1], & [0,3,r+2], & [1,4,r+3], & [2,5,r+4], & [0,6,r+5], & [1,7,r+6], & [2,3,r+7], \\
[1,6,r+1], & [2,7,r+2], & [0,3,r+3], & [1,4,r+4], & [2,5,r+5], & [0,6,r+6], & [1,7,r+7], \\
[1,3,r+1], & [2,4,r+2], & [0,5,r+3], & [1,6,r+4], & [2,7,r+5], & [0,3,r+6], & [1,4,r+7], \\
[0,7,r+1], & [1,3,r+2], & [2,4,r+3], & [0,5,r+4], & [1,6,r+5], & [2,7,r+6], & [0,3,r+7], \\
[2,6,r+1], & [0,7,r+2], & [1,3,r+3], & [2,4,r+4], & [0,5,r+5], & [1,6,r+6], & [2,7,r+7].
\end{array}$$

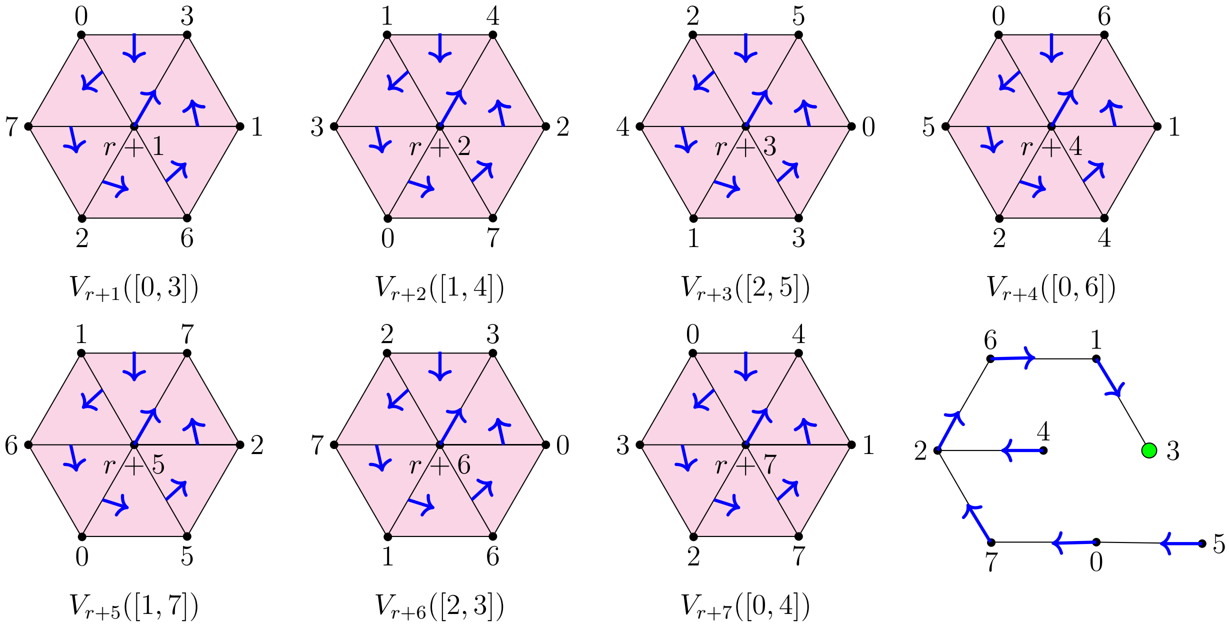
Нека је

$$\begin{aligned} C' :=& V_{r+1}([0,3]) \cup V_{r+2}([1,4]) \cup V_{r+3}([2,5]) \cup V_{r+4}([0,6]) \\ &\cup V_{r+5}([1,7]) \cup V_{r+6}([2,3]) \cup V_{r+7}([0,4]). \end{aligned}$$

На основу теореме 5.6, дискретно векторско поље

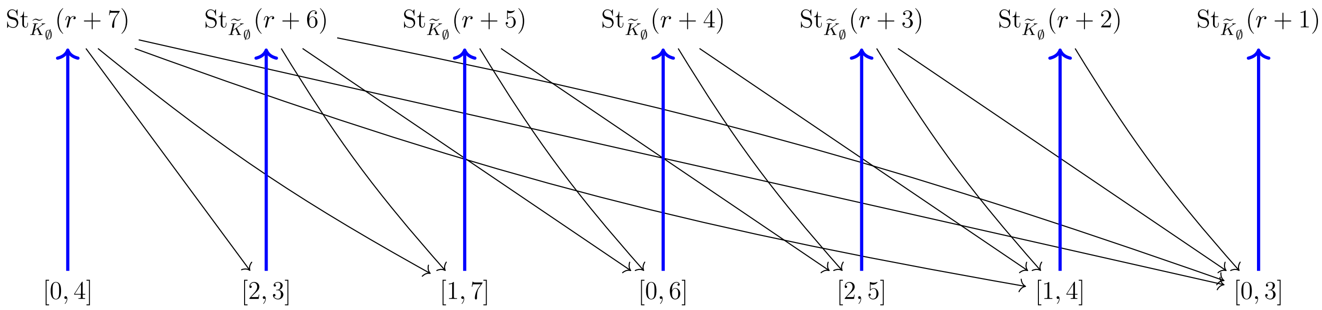
$$\begin{aligned} C := C' \cup \{ &\{[7],[2,7]\}, \{[6],[1,6]\}, \{[5],[0,5]\}, \{[4],[2,4]\}, \\ &\{[1],[1,3]\}, \{[0],[0,7]\}, \{[2],[2,6]\}, \} \end{aligned}$$

приказано на слици 5.18, добро је дефинисано и ациклично на комплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$.



Слика 5.18: Градијентно векторско поље C

Наиме, диграф $\mathrm{Flow}(C')$ је ацикличан (видети слику 5.19), према томе, не постоје нетривијалне затворене C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$ која се састоји од 1-симплекса и 2-симплекса.



Слика 5.19: Диграф $\mathrm{Flow}(C')$

Слика 5.20 показује да у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$ такође не постоје нетривијалне затворене C-путање формиране од 0-симплекса и 1-симплекса.

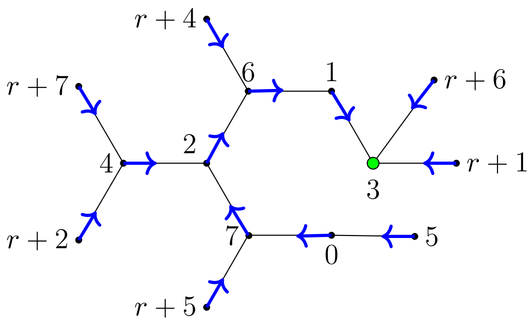
С обзиром на то да је

$$\mathcal{C}(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\}),C)=\{[3]\},$$

на основу теореме 2.1, комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$ је контрактибилан.

Приметимо да је

$$K_{3,5}\setminus \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})=\{[1,5]\}$$



Слика 5.20: C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$

и

$$[1,5] \in F_{8r \bmod 15r} \subset \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(8) \subset \mathrm{Lk}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{8,\ldots,r\}).$$

Ако је V дискретно векторско поље на $\widetilde{K}_\emptyset$ дефинисано као у леми 5.1, на основу претходних разматрања следи да је V ациклично на $\widetilde{K}_\emptyset$ и да је

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}_\emptyset, V) = \{[3],[1,5]\}.$$

Према томе, на основу теореме 2.1 и теореме 2.2, закључујемо да је комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ хомотопски еквивалентан 1-сфери. Самим тим,

$$\widetilde{K}_\emptyset \not\simeq \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\}).$$

Теорема 5.8. *Нека је $n = 3\cdot 5\cdot r$, где је $r > 7$ прост број. Ако је $r \equiv k \pmod{15}$, где $k \in \{1,2,13,14\}$, тада важи:*

(1) *Комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_n(x)$ хомотопски је еквивалентан $\mathbb{S}^1$.*

(2) *Ако је $\Phi_n(x) = \sum_{i=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$, комплекс $K_{\{j\}}$, $j \in \{0,1,\ldots,\varphi(n)\}$, придружен полиному $\Phi_n(x)$ хомотопски је еквивалентан простору $\mathbb{S}^1 \cup_{f_j} \mathbb{B}^2$, где је $\deg(f_j) = c_j$.*

Доказ. На основу теореме 5.6, тврђење важи за $k \in \{1,14\}$. Размотримо случајеве када $k \in \{2,13\}$. Како је, према теореми 5.7, комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ хомотопски еквивалентан свом поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ када $k \in \{2,13\}$, показаћемо да је комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ хомотопски еквивалентан $\mathbb{S}^1$. Будући да је $2 \equiv -13 \pmod{15}$, на основу теореме 5.5, довољно је посматрати $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ за $k=2$.

Нека је $r \equiv 2 \pmod{15}$. Комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ генерисан је следећим фасетима:

$$\begin{array}{ccccccc}
[0,7,r+1], & [1,3,r+2], & [2,4,r+3], & [0,5,r+4], & [1,6,r+5], & [2,7,r+6], & [0,3,r+7],\\
[2,4,r+1], & [0,5,r+2], & [1,6,r+3], & [2,7,r+4], & [0,3,r+5], & [1,4,r+6], & [2,5,r+7],\\
[1,6,r+1], & [2,7,r+2], & [0,3,r+3], & [1,4,r+4], & [2,5,r+5], & [0,6,r+6], & [1,7,r+7],\\
[1,7,r+1], & [2,3,r+2], & [0,4,r+3], & [1,5,r+4], & [2,6,r+5], & [0,7,r+6], & [1,3,r+7],\\
[0,4,r+1], & [1,5,r+2], & [2,6,r+3], & [0,7,r+4], & [1,3,r+5], & [2,4,r+6], & [0,5,r+7],\\
[2,6,r+1], & [0,7,r+2], & [1,3,r+3], & [2,4,r+4], & [0,5,r+5], & [1,6,r+6], & [2,7,r+7].
\end{array}$$

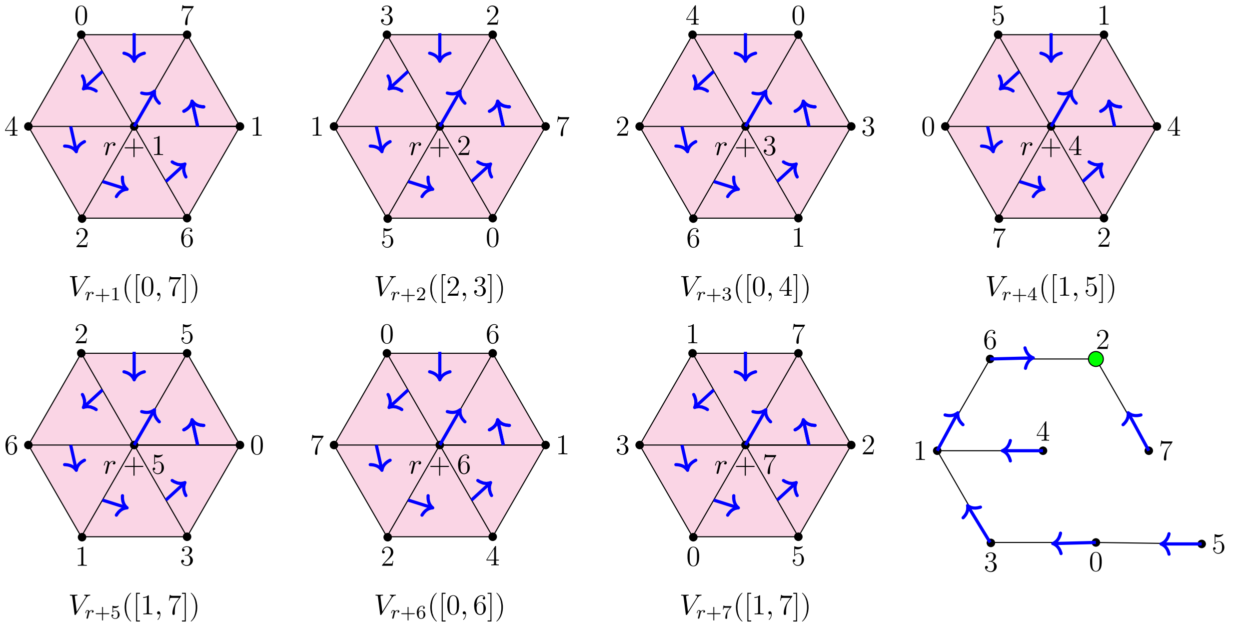
Ако је

$$\begin{aligned}
C' := & V_{r+1}([0,7]) \cup V_{r+2}([2,3]) \cup V_{r+3}([0,4]) \cup V_{r+4}([1,5])\\
& \cup V_{r+5}([2,5]) \cup V_{r+6}([0,6]) \cup V_{r+7}([1,7]),
\end{aligned}$$

тада је

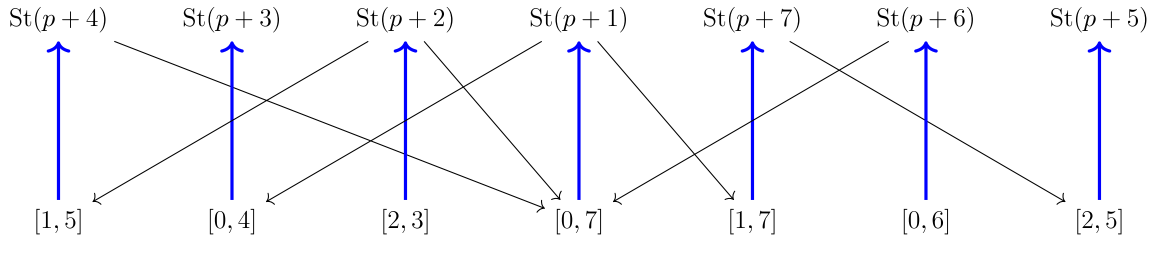
$$C := C' \cup \{\{[0], [0,3]\}, \{[5], [0,5]\}, \{[3], [1,3]\}, \{[4], [1,4]\},$$
$$\{[1], [1,6]\}, \{[6], [2,6]\}, \{[7], [2,7]\}\}$$

добро дефинисано и ациклично дискретно векторско поље на $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\})$ (видети слику 5.21).



Слика 5.21: Градијентно векторско поље C

Из чињенице да је диграф $\mathrm{Flow}(C')$ ацикличан (видети слику 5.22) следи да не постоје нетривијалне C-путање које се састоје од 1-симплекса и 2-симплекса.



Слика 5.22: Диграф $\mathrm{Flow}(C)$

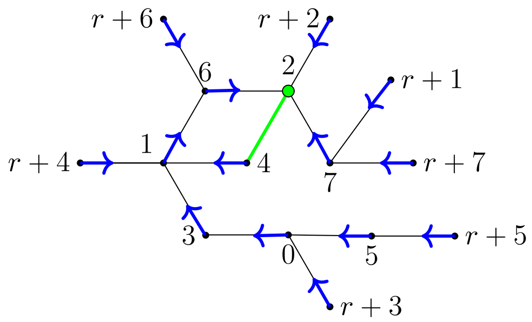
Такође, не постоје нетривијалне затворене C-путање које се састоје од 0-симплекса и 1-симплекса (видети слику 5.23).

На основу претходног,

$$\mathcal{C}\left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}), C\right) = \{[2], [2,4]\}.$$

Применом теореме 2.1 и теореме 2.2 долазимо до закључка да је

$$\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1, \ldots, r+7\}) \simeq \mathbb{S}^1.$$



Слика 5.23: C-путање у $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\})$

Према теореми 5.7,

$$\widetilde{K}_{\{j\}} \simeq \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\}) \cup F_{j \bmod n}.$$

Стога, C је дискретно ациклично векторско поље и на комплексу $\widetilde{K}_{\{j\}}$, при чему је

$$\mathcal{C}\left(\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\dots,r+7\}), C\right) = \{[2],[2,4],F_{j \bmod n}\}.$$

Како је $H_1(\widetilde{K}_{\{j\}}) = \mathbb{Z}/c_j\mathbb{Z}$ (теорема 5.2), на основу теореме 2.1 и теореме 2.2, закључујемо да је

$$\widetilde{K}_{\{j\}} \simeq \mathbb{S}^1 \cup_{f_j} \mathbb{B}^2,$$

где је $\deg(f_j) = c_j$. $\square$

На основу претходне теореме закључујемо да је у случају када је $n = 3\cdot 5\cdot r$, где је $r > 7$ и $r \equiv k\,(\mathrm{mod} 15)$, за $k \in \{1,2,13,14\}$, одговор на питање 5.1 потврдан. Другим речима, у овим случајевима важи тврђење теореме 5.3 за $d = 3$.

Глава 6

Некомутативне инваријанте циклотомичних полинома

Комплекси $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ придружени циклотомичном полиному $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$ у већини случајева имају правилну структуру, у шта смо се могли уверити у претходној глави. Међутим, у неким случајевима комплекси придружени полиному $\Phi_{pqr}(x)$, где су p, q и r прости бројеви, имају много компликованију и интересантнију структуру од очекиване. Како хомотопски тип оваквих комплекса није могуће одредити, у овој глави разматрамо њихове фундаменталне групе, као основне хомотопске инваријанте. Фундаменталне групе рачунамо користећи метод изложен у поглављу 1.1.3 ове дисертације. Испитивање фундаменталних група показаће да су оне некомутативне и да је одговор на питање 5.1 у општем случају негативан.

Како бисмо релаксирали садржај ове главе, детаље обимних итеративних прорачуна, као и софтверска решења која смо користили приликом израчунавања фундаменталних група издвајамо у глави Додатак.

6.1 Полином $\Phi_{105}(x)$

Симплицијални комплекс $K_{3,5,7}$ придружен полиному $\Phi_{105}(x)$ укупно има 15 темена:

$$0 \bmod 3,\ 1 \bmod 3,\ 2 \bmod 3,\ 0 \bmod 5,\ \ldots\ 4 \bmod 5, 0 \bmod 7,\ \ldots,\ 6 \bmod 7,$$

које због једноставности записа редом обележавамо бројевима

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.$$

Поткомплекс $K_\emptyset$ генерисан је фасетима $F_{j \bmod 105}$, где $j \in \{49, \ldots, 104\}$, односно следећим 2-симплексима:

$$\begin{gathered}
[1,7,8], [2,3,9], [0,4,10], [1,5,11], [2,6,12], [0,7,13], [1,3,14],\\
[2,4,8], [0,5,9], [1,6,10], [2,7,11], [0,3,12], [1,4,13], [2,5,14],\\
[0,6,8], [1,7,9], [2,3,10], [0,4,11], [1,5,12], [2,6,13], [0,7,14],\\
[1,3,8], [2,4,9], [0,5,10], [1,6,11], [2,7,12], [0,3,13], [1,4,14],\\
[2,5,8], [0,6,9], [1,7,10], [2,3,11], [0,4,12], [1,5,13], [2,6,14],\\
[0,7,8], [1,3,9], [2,4,10], [0,5,11], [1,6,12], [2,7,13], [0,3,14],\\
[1,4,8], [2,5,9], [0,6,10], [1,7,11], [2,3,12], [0,4,13], [1,5,14],\\
[2,6,8], [0,7,9],]1,3,10], [2,4,11], [0,5,12], [1,6,13], [2,7,14].
\end{gathered}$$

Како је $5 \cdot 7 > 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 3 - 5 - 7$, на основу разматрања у глави 5.3, уместо комплекса $K_\emptyset$ можемо посматрати његову редуковану варијанту, комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ који је генерисан фасетима:

$$\begin{gathered}
[1,7,8], [2,3,9], [0,4,10], [1,5,11], [2,6,12], [0,7,13], [1,3,14],\\
[2,4,8], [0,5,9], [1,6,10], [2,7,11], [0,3,12], [1,4,13], [2,5,14],\\
[0,6,8], [1,7,9], [2,3,10], [0,4,11], [1,5,12], [2,6,13], [0,7,14],\\
[0,7,8], [1,3,9], [2,4,10], [0,5,11], [1,6,12], [2,7,13], [0,3,14],\\
[1,4,8], [2,5,9], [0,6,10], [1,7,11], [2,3,12], [0,4,13], [1,5,14],\\
[2,6,8], [0,7,9],]1,3,10], [2,4,11], [0,5,12], [1,6,13], [2,7,14].
\end{gathered}$$

Као што је описано у поглављу 1.1.3, група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$, где је L максимално разапињуће стабло у $\widetilde{K}_\emptyset$, изоморфна је фундаменталној групи $\pi_1(\widetilde{K}_\emptyset)$. Будући да сваком 1-симплексу у $\widetilde{K}_\emptyset$ одговара по један генератор групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$, у циљу поједностављења записа, генераторе обележавамо на исти начин као и 1-симплексе. За максимално разапињуће стабло

$$\begin{aligned}
L = \{&[0,4], [0,5], [0,7], [0,8], [0,9], [0,10], [0,13],\\
&[1,3], [1,6], [1,7], [1,11], [1,12], [1,14], [2,3]\},
\end{aligned}$$

група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ генерисана је 1-симплексима који не припадају комплексу L и релацијама које одговарају фасетима:

$[7,8] \cdot [1,8]^{-1} = 1$
$[3,9] \cdot [2,9]^{-1} = 1$
$[4,10] = 1$
$[1,5] \cdot [5,11] = 1$
$[2,6] \cdot [6,12] \cdot [2,12]^{-1} = 1$
$[7,13] = 1$
$[3,14] = 1$
$[2,4] \cdot [4,8] \cdot [2,8]^{-1} = 1$
$[5,9] = 1$
$[6,10] \cdot [1,10]^{-1} = 1$
$[2,7] \cdot [7,11] \cdot [2,11]^{-1} = 1$
$[0,3] \cdot [3,12] \cdot [0,12]^{-1} = 1$
$[1,4] \cdot [4,13] \cdot [1,13]^{-1} = 1$
$[2,5] \cdot [5,14] \cdot [2,14]^{-1} = 1$
$[0,6] \cdot [6,8] = 1$
$[7,9] \cdot [1,9]^{-1} = 1$
$[3,10] \cdot [2,10]^{-1} = 1$
$[4,11] \cdot [0,11]^{-1} = 1$
$[1,5] \cdot [5,12] = 1$
$[2,6] \cdot [6,13] \cdot [2,13]^{-1} = 1$
$[7,14] \cdot [0,14]^{-1} = 1$
$[7,8] = 1$
$[3,9] \cdot [1,9]^{-1} = 1$
$[2,4] \cdot [4,10] \cdot [2,10]^{-1} = 1$
$[5,11] \cdot [0,11]^{-1} = 1$
$[6,12] = 1$
$[2,7] \cdot [7,13] \cdot [2,13]^{-1} = 1$
$[0,3] \cdot [3,14] \cdot [0,14]^{-1} = 1$
$[1,4] \cdot [4,8] \cdot [1,8]^{-1} = 1$
$[2,5] \cdot [5,9] \cdot [2,9]^{-1} = 1$
$[0,6] \cdot [6,10] = 1$
$[7,11] = 1$
$[3,12] \cdot [2,12]^{-1} = 1$
$[4,13] = 1$
$[1,5] \cdot [5,14] = 1$
$[2,6] \cdot [6,8] \cdot [2,8]^{-1} = 1$
$[7,9] = 1$
$[3,10] \cdot [1,10]^{-1} = 1$
$[2,4] \cdot [4,11] \cdot [2,11]^{-1} = 1$
$[5,12] \cdot [0,12]^{-1} = 1$
$[6,13] \cdot [1,13]^{-1} = 1$
$[2,7] \cdot [7,14] \cdot [2,14]^{-1} = 1$

Да бисмо олакшали испитивање групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$, редуковаћемо број њених генератора и релација. Користећи алгоритам 1 добијамо да је

$$G(\widetilde{K}_\emptyset, L) = \langle a, b \,|\, b^{-1}abab^{-2}a^{-1}baba^{-1} = 1\rangle,$$

где су a и b редом ознаке за генераторе [2,13] и [2,14]. Детаљи итеративног процеса редукције групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ за овај случај, као и за наредне случајеве, дати су у глави Додатак.

На основу презентације групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$, абелизација $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}$, одакле следи да је $H_1(\widetilde{K}_\emptyset) \cong \mathbb{Z}$, што потврђује тврђење теореме 5.2. Међутим, сама група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ није комутативна, па самим тим није изоморфна групи $\mathbb{Z}$. Да бисмо показали да група G није комутативна довољно је конструисати епиморфизам

$$f : G(\widetilde{K}_\emptyset, L) \to S_3,$$

где је S_3 група пермутација. Нека је Γ скуп генератора групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$. За $\pi \in S_3$, означимо са

$$\Gamma_\pi := \{e \in \Gamma : f(e) = \pi\}.$$

Ако је $f(a) = (132)$ и $f(b) = (12)$, тада је на основу почетних релација

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(1)} = \{&[0,4],[0,5],[0,7],[0,8],[0,9],[0,10],[0,13],[1,3],[1,6],[1,7],[1,8],\\
&[1,9],[1,11],[1,12],[1,14],[2,3],[2,5],[2,9],[3,9],[3,14],[4,10],\\
&[4,13],[5,9],[6,12],[7,8],[7,9],[7,11],[7,13]\},\\
\Gamma_{(12)} = \{&[0,11],[0,12],[1,5],[2,8],[2,14],[4,11],[5,11],[5,12],[5,14]\},\\
\Gamma_{(23)} = \{&[0,6],[1,10],[2,4],[2,10],[3,10],[6,8],[6,10]\},\\
\Gamma_{(13)} = \{&[0,3],[0,14],[7,14]\},\\
\Gamma_{(123)} = \{&[1,4],[1,13],[2,6],[2,12],[3,12],[6,13]\},\\
\Gamma_{(132)} = \{&[2,7],[2,11],[2,13],[4,8]\}.
\end{aligned}$$

Према томе, f је заиста тражени епиморфизам. Како група пермутација S_3 није комутативна, следи да ни $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ не може бити комутативна. Како је $\pi_1(\widetilde{K}_\emptyset) \cong G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$, фундаментална група комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ није комутативна. Самим тим, комплекс $\widetilde{K}_\emptyset$ није хомотопски еквивалентан $\mathbb{S}^1$, па је одговор на први део питања 5.1 негативан.

Да бисмо показали да је одговор и на други део питања 5.1 негативан, размотримо комплекс $K_{\{7\}}$ који одговара коефицијенту $c_7 = -2$ циклотомичног полинома $\Phi_{105}(x)$. Комплекс $K_{\{7\}}$ добијен је додавањем фасета $F_{7 \bmod 105} = [1,5,8]$ комплексу $K_\emptyset$. На основу поглавља 5.4, уместо комплекса $K_{\{7\}}$ може се посматрати његов поткомплекс $\widetilde{K}_{\{7\}} = \widetilde{K}_\emptyset \cup \{[2,5,8],[1,5,8]\}$. Према томе, група $G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L)$ има две додатне релације

$$[2,5]\cdot[5,8]\cdot[2,8]^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad [1,5]\cdot[5,8]\cdot[1,8]^{-1} = 1$$

у односу на групу $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$. Редукцијом броја генератора и релација групе $G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L)$ (видети Додатак) добијамо да је

$$G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L) = \langle a, b \,|\, b^{-1}abab^{-2}a^{-1}baba^{-1} = 1,\ ab^{-1}a^{-1}b^{-1}a = 1\rangle.$$

Абелизација групе $G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L)$ је $\mathbb{Z}_2$, како је и очекивано, али ова група није комутативна. Како цикли (132) и (12) задовољавају релацију $ab^{-1}a^{-1}b^{-1}a = 1$, за доказ некомутативности можемо искористити исти епиморфизам као у претходном случају. Према томе, група $\pi_1(\widetilde{K}_{\{7\}})$ није изоморфна групи $\mathbb{Z}_2$, па комплекс $K_{\{7\}}$ није хомотопски еквивалентан пројективној равни $\mathbb{R}P^2$, како је било предвиђено с обзиром на то да је $c_7 = -2$.

6.2 Полином $\Phi_{165}(x)$

Комплекс $K_{3,5,11}$ придружен полиному $\Phi_{165}(x)$ има 19 темена:

$$0 \bmod 3,\ 1 \bmod 3,\ 2 \bmod 3,\ 0 \bmod 5,\ \ldots\ 4 \bmod 5, 0 \bmod 11,\ \ldots,\ 10 \bmod 11,$$

које редом обележавамо бројевима

$$0, 1, \ldots, 18.$$

Његов поткомплекс $K_\emptyset$ генерисан је фасетима $F_{j \bmod 164}$, где $j \in \{81, \dots, 165\}$. Како је комплекс $K_\emptyset$ хомотопски еквивалентан свом поткомплексу $\widetilde{K}_\emptyset$ (видети пример 5.3), а $\widetilde{K}_\emptyset$ је хомотопски еквивалентан поткомплексу $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{12, \dots, 18\})$ (теорема 5.7), у наставку разматрамо комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{12, \dots, 18\})$. Комплекс $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{12, \dots, 18\})$ генерисан је следећим 2-симплексима:

$$
\begin{gathered}
[0,4,12],[1,5,13],[2,6,14],[0,7,15],[1,3,16],[2,4,17],[0,5,18],\\
[2,5,12],[0,6,13],[1,7,14],[2,3,15],[0,4,16],[1,5,17],[2,6,18],\\
[1,6,12],[2,7,13],[0,3,14],[1,4,15],[2,5,16],[0,6,17],[1,7,18],\\
[1,4,12],[2,5,13],[0,6,14],[1,7,15],[2,3,16],[0,4,17],[1,5,18],\\
[0,5,12],[1,6,13],[2,7,14],[0,3,15],[1,4,16],[2,5,17],[0,6,18],\\
[2,6,12],[0,7,13],[1,3,14],[2,4,15],[0,5,16],[1,6,17],[2,7,18].
\end{gathered}
$$

За максимално разапињуће стабло

$$
\begin{aligned}
L = \{&[0,3],[0,4],[0,5],[0,6],[0,7],[0,8],[0,9],[0,10],[0,11],[0,12],\\
&[0,13],[0,14],[0,15],[0,16],[0,17],[0,18],[1,3],[2,3]\},
\end{aligned}
$$

група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ генерисана је 1-симплексима који нису елементи скупа L и следећим релацијама које одговарају 2-симплексима комплекса $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{12, \dots, 18\})$:

$[4,12]=1$
$[1,5]\cdot[5,13]\cdot[1,13]^{-1}=1$
$[2,6]\cdot[6,14]\cdot[2,14]^{-1}=1$
$[7,15]=1$
$[3,16]\cdot[1,16]^{-1}=1$
$[2,4]\cdot[4,17]\cdot[2,17]^{-1}=1$
$[5,18]=1$
$[2,5]\cdot[5,12]\cdot[2,12]^{-1}=1$
$[6,13]=1$
$[1,7]\cdot[7,14]\cdot[1,14]^{-1}=1$
$[3,15]\cdot[2,15]^{-1}=1$
$[4,16]=1$
$[1,5]\cdot[5,17]\cdot[1,17]^{-1}=1$
$[2,6]\cdot[6,18]\cdot[2,18]^{-1}=1$
$[1,6]\cdot[6,12]\cdot[1,12]^{-1}=1$
$[2,7]\cdot[7,13]\cdot[2,13]^{-1}=1$
$[3,14]=1$
$[1,4]\cdot[4,15]\cdot[1,15]^{-1}=1$
$[2,5]\cdot[5,16]\cdot[2,16]^{-1}=1$
$[6,17]\cdot=1$
$[1,7]\cdot[7,18]\cdot[1,18]^{-1}=1$
$[1,4]\cdot[4,12]\cdot[1,12]^{-1}=1$
$[2,5]\cdot[5,13]\cdot[2,13]^{-1}=1$
$[6,14]=1$
$[1,7]\cdot[7,15]\cdot[1,15]^{-1}=1$
$[3,16]\cdot[2,16]^{-1}=1$
$[4,17]=1$
$[1,5]\cdot[5,18]\cdot[1,18]^{-1}=1$
$[5,12]=1$
$[1,6]\cdot[6,13]\cdot[1,13]^{-1}=1$
$[2,7]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}=1$
$[3,15]=1$
$[1,4]\cdot[4,16]\cdot[1,16]^{-1}=1$
$[2,5]\cdot[5,17]\cdot[2,17]^{-1}=1$
$[6,18]=1$
$[2,6]\cdot[6,12]\cdot[2,12]^{-1}=1$
$[7,13]=1$
$[3,14]\cdot[1,14]^{-1}=1$
$[2,4]\cdot[4,15]\cdot[2,15]^{-1}=1$
$[5,16]=1$
$[1,6]\cdot[6,17]\cdot[1,17]^{-1}=1$
$[2,7]\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}=1$

Редукцијом број генератора и релација у складу са алгоритмом 1 добијамо да је

$$G(\widetilde{K}_\emptyset, L) = \langle a, b \,|\, bab^{-1}a^{-2} = 1 \rangle.$$

Група $\langle a, b \,|\, bab^{-1}a^{-2} = 1 \rangle$ позната је као Баумслаг-Солитарова група $\mathrm{BS}(1,2)$ (за више детаља видети [4]) и није комутативна. Слично претходном случају, некомутативност можемо доказати конструкцијом епиморфизма $f : \mathrm{BS}(1,2) \to S_3$. Пресликавање f дефинисано на следећи начин: $f(a) = (123)$ и $f(b) = (23)$ јесте један епиморфизам, па група $\mathrm{BS}(1,2)$ заиста није комутативна. Дакле, абелизација $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}$, али сама група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ није комутативна, па није изоморфна групи $\mathbb{Z}$. Према томе, група $\pi_1(K_\emptyset)$ није комутативна, па простор $K_\emptyset$ није хомотопски еквивалентан $\mathbb{S}^1$.

6.3 Полином $\Phi_{385}(x)$

Како су $n = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $n = 3 \cdot 5 \cdot 11$ најмањи бројеви за које је испуњен услов да је n производ три различита непарна проста броја, занимљиво је испитати шта се дешава за неке веће бројеве n. Из тог ралога размотримо случај када је $n = 5 \cdot 7 \cdot 11$. Комплекс $K_{5,7,11}$ придружен циклотомичном полиному $\Phi_{385}(x)$ има 23 темена:

$$\{0 \bmod 5,\ \ldots, 4 \bmod 5,\ 0 \bmod 7, \ldots, 6 \bmod 7,\ 0 \bmod 11,\ \ldots,\ 10 \bmod 11, \}$$

која редом обележавамо бројевима $0, \ldots, 22$. Негов поткомплекс $K_\emptyset$ генерисан је фасетима $F_{j \bmod 385}$, где $j \in \{241, \ldots, 384\}$. Користећи алгоритам 1 за израчунавање фундаменталне групе, за максимално стабло

$$\begin{aligned} L = \{&[0,5],[0,8],[0,10],[0,11],[0,15],[0,17],[0,18],[1,6],[1,7],[1,8],[1,16],[1,23],[2,8],\\ &[2,9],[2,12],[3,10],[3,13],[4,9],[4,21],[5,20],[7,14],[11,19]\} \end{aligned}$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} G(K_\emptyset, L) = \{a,b,c \mid\ & a^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bacb^{-1}cabc^{-1}ba^2ca^{-1}b^{-1}cab^{-1}a^{-1}c^{-1}ba^{-1}b^{-1}c\\ & b^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabac^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bacb^{-1}cabacb^{-1}a^{-1}\\ & c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cab = 1,\\ & a^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabaca^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bacb^{-1}cabc^{-1}ba\\ & b^{-1}caba^{-1}c^{-1}ba^{-1}b^{-1}cb^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabab^{-1} = 1\}, \end{aligned}$$

Презентација групе $G(K_\emptyset, L)$ доста је компликованија у односу на претходне случајеве. Стога, није једноставно наћи сурјективни хомоморфизам који слика групу $G(K_\emptyset, L)$ у групу пермутација. Међутим, метод као што је Фоксов рачун (представљен у глави 3) може нам дати одговор да ли је група $G(K_\emptyset, L)$ комутативна.

Како је $G(K_\emptyset, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}$, уколико је група $G(K_\emptyset, L)$ комутативна, низ елементарних идеала придружен овој групи морао би бити изоморфан низу елементарних идеала који је придружен групи $\mathbb{Z}$. Анализу низа елементарних идеала групе $G(K_\emptyset, L)$ започињемо рачунањем Александерове матрице која одговара групи $G(K_\emptyset, L)$. Означимо са r_1 и r_2, редом, прву и другу релацију групе $G(K_\emptyset, L)$. Одговарајући Фоксови изводи релатора r_1 и r_2 по генераторима a, b и c су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial a} =& -a^{-1} + a^{-1}b^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}c^{-1}b(1 + acb^{-1}c(1 + abc^{-1}b(1 + a + a^2c(-a^{-1} + a^{-1}b^{-1}c(1\\ & + ab^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}c^{-1}b(-a^{-1} + a^{-1}b^{-1}cb^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}c^{-1}bc^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}b^{-1}c(1\\ & + ab(1 + ac^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}b^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}c^{-1}b(1 + acb^{-1}c(1 + ab(1 + acb^{-1}(-a^{-1}\\ & + a^{-1}c^{-1}bc^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}b^{-1}c))))))))))))))))))),\\ \frac{\partial r_1}{\partial b} =& a^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1 + bac(-b^{-1} + b^{-1}ca(1 + bc^{-1}(1 + ba^2ca^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}ca(-b^{-1}\\ & + b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1 + ba^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}c(-b^{-1} + b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1 + bc^{-1}a^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}ca(1\\ & + bac^{-1}a^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1 + bac(-b^{-1} + b^{-1}ca(1 + bac(-b^{-1} + b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1\\ & + bc^{-1}a^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}ca)))))))))))))))))))),\\ \frac{\partial r_1}{\partial c} =& a^{-1}b^{-1}a^{-1}(-c^{-1} + c^{-1}ba(1 + cb^{-1}(1 + cab(-c^{-1} + c^{-1}ba^2(1 + ca^{-1}b^{-1}(1 + cab^{-1}a^{-1}(-c^{-1}\\ & + c^{-1}ba^{-1}b^{-1}(1 + cb^{-1}a^{-1}(-c^{-1} + c^{-1}b(-c^{-1} + c^{-1}a^{-1}b^{-1}(1 + caba(-c^{-1} + c^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}(-c^{-1}\\ & + c^{-1}ba(1 + cb^{-1}(1 + caba(1 + cb^{-1}a^{-1}(-c^{-1} + c^{-1}b(-c^{-1} + c^{-1}a^{-1}b^{-1})))))))))))))))))), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r_2}{\partial a} =& -a^{-1}+a^{-1}b^{-1}(-a^{-1}+a^{-1}c^{-1}bc^{-1}(-a^{-1}+a^{-1}b^{-1}c(1+ab(1+ac(-a^{-1}+a^{-1}b^{-1}(-a^{-1}\\
&+a^{-1}c^{-1}b(1+acb^{-1}c(1+abc^{-1}b(1+ab^{-1}c(1+ab(-a^{-1}+a^{-1}c^{-1}b(-a^{-1}+a^{-1}b^{-1}cb^{-1}(-a^{-1}\\
&+a^{-1}c^{-1}bc^{-1}(-a^{-1}+a^{-1}b^{-1}c(1+ab)))))))))))))),\\
\frac{\partial r_2}{\partial b} =& a^{-1}(-b^{-1}+b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1+bc^{-1}a^{-1}(-b^{-1}+b^{-1}ca(1+baca^{-1}(-b^{-1}+b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1+bac(-b^{-1}\\
&+b^{-1}ca(1+bc^{-1}(1+ba(-b^{-1}+b^{-1}ca(1+ba^{-1}c^{-1}(1+ba^{-1}(-b^{-1}+b^{-1}c(-b^{-1}+b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1\\
&+bc^{-1}a^{-1}(-b^{-1}+b^{-1}ca(1-bab^{-1})))))))))))))))),\\
\frac{\partial r_2}{\partial c} =& a^{-1}b^{-1}a^{-1}(-c^{-1}+c^{-1}b(-c^{-1}+c^{-1}a^{-1}b^{-1}(1+caba(1+ca^{-1}b^{-1}a^{-1}(-c^{-1}+c^{-1}ba(1+cb^{-1}(1\\
&+cab(-c^{-1}+c^{-1}bab^{-1}(1+caba^{-1}(-c^{-1}+c^{-1}ba^{-1}b^{-1}(1+cb^{-1}a^{-1}(-c^{-1}+c^{-1}b(-c^{-1}\\
&+c^{-1}a^{-1}b^{-1})))))))))))).
\end{aligned}
$$

Како је $G(K_\emptyset, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}$, група $G(K_\emptyset, L)^{ab}$ је бесконачна циклична група генерисана неким генератором t. Према томе, $\mathbb{Z}G(K_\emptyset, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Функција $\alpha : \mathbb{Z}G(K_\emptyset, L) \to \mathbb{Z}G(K_\emptyset, L)^{ab}$ (видети 3.1, глава 3) дата је са

$$\alpha(a) = 1, \quad \alpha(b) = t, \quad \alpha(c) = t.$$

На основу претходног закључујемо да је Александерова матрица групе $G(K_\emptyset, L)$

$$A_{G(K_\emptyset,L)} = \begin{pmatrix} 0 & t^{-3}-3t^{-2}+3t^{-1}-2t & -t^{-3}+3t^{-2}-3t^{-1}+2t \\ -1+2t-2t^2 & -t^{-3}+3t^{-2}-4t^{-1}+2 & t^{-3}-3t^{-2}+4t^{-1}-2 \end{pmatrix}.$$

Идеал који је генерисан детерминантама подматрицама реда 1 матрице $A_{G(K_\emptyset,L)}$ је

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \langle t^{-3}-3t^{-2}+3t^{-1}-2t, t^{-3}-3t^{-2}+4t^{-1}-2, -1+2t-2t^2 \rangle\\
&= \langle 1-2t+2t^2 \rangle,
\end{aligned}
$$

јер важи да је

$$t^{-3}-3t^{-2}+3t^{-1}-2t = (1-2t+2t^2)(t^{-3}-t^{-2}-t^{-1})$$

и

$$t^{-3}-3t^{-2}+4t^{-1}-2 = (1-2t+2t^2)(t^{-3}-t^{-2}).$$

Даље, идеал који је генерисан детерминантама подматрица реда 2 матрице $A_{G(K_\emptyset,L)}$ је

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \langle 0, 12-t^{-3}+5t^{-2}-11t^{-1}-4t-4t^2+4t^3, -12+t^{-3}-5t^{-2}+11t^{-1}+4t+4t^2-4t^3 \rangle\\
&= \langle 12-t^{-3}+5t^{-2}-11t^{-1}-4t-4t^2+4t^3 \rangle
\end{aligned}
$$

Како полиноми $1-2t+2t^2$ и $12-t^{-3}+5t^{-2}-11t^{-1}-4t-4t^2+4t^3$ нису инверитибилни у групном прстену $Z[t^{-1}, t]$, низ елементарних идела који одговара матрици $A_{G(K_\emptyset,L)}$ је

$$\langle 12-t^{-3}+5t^{-2}-11t^{-1}-4t-4t^2+4t^3 \rangle \subset \langle 1-2t+2t^2 \rangle.$$

Са друге стране, Александерова матрица која одговара презентацији

$$\{a, b, c \,|\, bc^{-1} = 1,\, abc^{-1} = 1\}$$

групе $\mathbb{Z}$ је

$$A_{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

па је низ елементарних идеала који јој одговара

$$\langle 1 \rangle \subseteq \langle 1 \rangle.$$

Будући да полиноми $12 - t^{-3} + 5t^{-2} - 11t^{-1} - 4t - 4t^2 + 4t^3$ и $1 - 2t + 2t^2$ нису инвертибилни у групном прстену $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, следи да групама $G(K_\emptyset, L)$ и $\mathbb{Z}$ одговарају различити низови идеала. Према томе, на основу теореме 3.3, групе $G(K_\emptyset, L)$ и $\mathbb{Z}$ нису изоморфне. Закључујемо да и у овом случају комплекс $K_\emptyset$ није хомотопски еквивалентан простору $\mathbb{S}^1$.

Како бисмо показали да је у случају $n = 5 \cdot 7 \cdot 11$ одговор и на други део питања 5.1 негативан, посматрајмо комплекс $K_{\{119\}}$ придружен коефицијенту c_{119} циклотомичног полинома $\Phi_{385}(x)$. Комплекс $K_{\{119\}}$ добијен је додавањем фасета $F_{119 \bmod 385}$ комплексу $K_\emptyset$. Примењујући редукциони алгоритам 1 добијамо да је

$$\begin{aligned} G(K_{\{119\}}, L) = \{a, b, c \mid\ & a^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bacb^{-1}cabc^{-1}ba^2ca^{-1}b^{-1}cab^{-1}a^{-1}c^{-1}ba^{-1}b^{-1} \\ & cb^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabac^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bacb^{-1}cabac \\ & b^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cab = 1, \\ & a^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabaca^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}bacb^{-1}cabc^{-1}b \\ & ab^{-1}caba^{-1}c^{-1}ba^{-1}b^{-1}cb^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabab^{-1} = 1, \\ & a^{-1}b^{-1}cb^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}b^{-1}cabab^{-1}a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1} = 1\}. \end{aligned}$$

Како је $c_{119} = -3$, предвиђено је да комплекс $K_{\{119\}}$ буде хомотопски еквивалентан простору чија је фундаментална група $\mathbb{Z}_3$, што ће се испоставити као нетачно. Лако се може утврдити да је $G(K_{\{119\}}, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}_3$. Међутим, као и у случају комплекса $K_\emptyset$, фундаментална група има компликовану презентацију и није лако утврдити да ли је изоморфна групи $\mathbb{Z}_3$. Стога, разматрамо низове елементарних идеала група $G(K_{\{119\}}, L)$ и $\mathbb{Z}_3$.

Група $G(K_{\{119\}}, L)$ има једну додатну релацију у односу на групу $G(K_\emptyset, L)$, ту додатну релацију обележићемо са r_3. Изводи релације r_3 по генераторима a, b и c су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_3}{\partial a} =& - a^{-1} + a^{-1}b^{-1}cb^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}c^{-1}bc^{-1}(-a^{-1} + a^{-1}b^{-1}c(1 + ab(1 \\ & + ab^{-1}(-a^{-1} - a^{-1}c^{-1}bc^{-1}a^{-1}))))), \\ \frac{\partial r_3}{\partial b} =& a^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}c(-b^{-1} + b^{-1}a^{-1}c^{-1}(1 + bc^{-1}a^{-1}(-b^{-1} + b^{-1}ca(1 \\ & + ba(-b^{-1} + b^{-1}a^{-1}c^{-1})))))), \\ \frac{\partial r_3}{\partial c} =& a^{-1}b^{-1}(1 + cb^{-1}a^{-1}(-c^{-1} + c^{-1}b(-c^{-1} + c^{-1}a^{-1}b^{-1}(1 + cabab^{-1}a^{-1}(-c^{-1} \\ & - c^{-1}bc^{-1}))))). \end{aligned}$$

Абелизација $G(K_{\{119\}}, L)^{ab}$ је циклична група реда три. Нека је t генератор групе $G(K_{\{119\}}, L)^{ab}$, тада је $\mathbb{Z}G(K_{\{119\}}, L)^{ab} \cong \mathbb{Z}[t]/\langle t^3 - 1 \rangle$. Функција $\alpha : \mathbb{Z}G(K_{\{119\}}, L) \to \mathbb{Z}G(K_{\{119\}}, L)^{ab}$ дата је са:

$$\alpha(a) = 1, \quad \alpha(b) = t, \quad \alpha(c) = t.$$

Како је

$$\alpha\left(\frac{\partial r_3}{\partial a}\right) = -2-t, \quad \alpha\left(\frac{\partial r_3}{\partial b}\right) = t-2t^2, \quad \alpha\left(\frac{\partial r_3}{\partial c}\right) = -1-2t+t,$$

Александерова матрица која одговара групи $G(K_{\{119\}}, L)$ је

$$A_{G(K_{\{119\}},L)} = \begin{pmatrix} 0 & 1-5t+3t^2 & -1+5t-3t^2 \\ -1+2t-2t^2 & 1+3t-4t^2 & -1-3t+4t^2 \\ -2-t & t-2t^2 & -1-2t+t^2 \end{pmatrix}.$$

Идеал који је генерисан детерминантама подматрица реда 1 матрице $A_{G(K_{\{119\}},L)}$ је

$$E_1 = \langle 1-5t+3t^2, 1+3t-4t^2, -1+2t-2t^2, -2-t, t-2t^2, -1-2t+t^2 \rangle.$$

Међутим, важи да је

$$1 = (2+t)(-t^2+1) + (t-2t^2)t - (-1-2t+t^2)t^2,$$

па је

$$E_1 = \langle 1 \rangle.$$

Идеал који је генерисан детерминантама подматрица реда 2 матрице $A_{G(K_{\{119\}},L)}$ је:

$$E_2 = \langle -15-t+15t^2, 5-9t+t^2, 1+t+t^2, -8+10t-t^2, 9-9t+2t^2 \rangle.$$

С обзиром на то да важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} 1+t+t^2 &= 13(-9-9t-9t^2) + (-3-t)(-59-59t-59t^2) \\ 9-9t+2t^2 &= 13(t+t^2) + (-3+t)(-1+7t+6t^2) \\ 5-9t+t^2 &= -13 + (-3+t)(-6+t) \\ -8+10t-t^2 &= 13 + (-3+t)(7-t) \\ -15-t+15t^2 &= 13\cdot 9 + (-3+t)(44+15t) \end{aligned}$$

и да се полиноми 13 и $-3+t$ могу изразити преко полинома из идеала

$$\begin{aligned} 13 &= (-6+t)(-8+10t-t^2) + (-7+t)(5-9t+t^2) \\ -3+t &= (-8+10t-t^2) + (5-9t+t^2) \end{aligned}$$

закључујемо да је

$$E_2 = \langle 13, -3+t \rangle.$$

Проверимо да ли полиноми 13 и $-3+t$ генеришу цео прстен $\mathbb{Z}[t]/\langle t^3-1\rangle$. Нека је

$$(-3+t)(a+bt+ct^2) + 13(a'+b't+c't^2) = 1,$$

за неке $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Z}$. Тада важи да је

$$\begin{aligned} -3a+c+13a' &= 1 \\ -3b+a+13b' &= 0 \\ -3c+b+13c' &= 0. \end{aligned}$$

Према томе, $c = 1+3a-13a'$, $a = 3b-13b'$ и $b = 3c-13c'$, па је $-26c = 1+13(-a'-9c'-3b')$, односно $13(-2c+a'+9c'+3b') = 1$. Како 13 није инвертибилан елемент у $\mathbb{Z}$, полиноми 13 и $-3+t$ не могу генерисати цео прстен.

Идеал који је генерисан детерминантом матрице $A_{G(K_{\{119\}},L)}$ је:

$$E_3 = \langle 1+t+t^2 \rangle.$$

Дакле, низ елементарних идеала који одговара матрици $A_{G(K_{\{119\}},L)}$ је

$$\langle 1+t+t^2 \rangle \subset \langle 13, -3+t \rangle \subset \langle 1 \rangle.$$

Александерова матрица која одговара презентацији

$$\{a, b, c \,|\, bc^{-1} = 1,\, abc^{-1} = 1, b^3 = 1\}$$

групе $\mathbb{Z}_3$ је

$$A_{\mathbb{Z}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1+t+t^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

па је низ елементарних идеала који јој одговара

$$\langle 1+t+t^2 \rangle \subset \langle 1 \rangle \subseteq \langle 1 \rangle.$$

Као што смо се уверили, $1 \notin \langle 13, -3+t \rangle$, према томе, групама $G(K_{\{119\}}, L)$ и $\mathbb{Z}_3$ одговарају различити низови елементарних идеала. Дакле, на основу теореме 3.3, групе $G(K_{\{119\}}, L)$ и $\mathbb{Z}_3$ нису изоморфне.

6.4 Полином $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x)$

Нека је $r \geq 7$ прост број. У претходним поглављима ове главе уверили смо се да у случајевима када је $r = 7$ и $r = 11$ комплекс $K_\emptyset$ придружен полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x)$ има некомутативну фундаменталну групу. У наставку ћемо показати да ови случајеви нису изоловани.

Теорема 6.1. *Нека је $n = 3\cdot 5\cdot r$, ѓде је $r \geq 7$. Ако је $r \equiv k \pmod{15}$, ѓде $k \in \{4,7,8,11\}$, комӣлекс $K_\emptyset$ ӣридружен ӣолиному $\Phi_n(x)$ није хомоӣоӣски еквиваленӣан ӣросӣору $\mathbb{S}^1$.*

Доказ. Као што је наведено у поглављу 5.3, уместо комплекса $K_\emptyset$ придруженог полиному $\Phi_{3\cdot 5\cdot r}(x)$ можемо посматрати његов поткомплекс $\widetilde{K}_\emptyset$. На основу теореме 5.7, у случају када $k \in \{4,7,8,11\}$ важи да је $\widetilde{K}_\emptyset \simeq \mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$. Како је $11 \equiv -4 \pmod{15}$ и $7 \equiv -8 \pmod{15}$, према теореми 5.5, довољно је разматрати комплексе $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ за $k \in \{7, 11\}$. Међутим, на основу теореме 5.4, за $r \equiv 7 \pmod{15}$ сви комплекси $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ су међусобно изоморфни. Слично, за $r \equiv 11 \pmod{15}$ комплекси $\mathrm{St}_{\widetilde{K}_\emptyset}(\{r+1,\ldots,r+7\})$ такође су међусобно изоморфни. На основу претходног, закључујемо да се случајеви када је $r \equiv k \pmod{15}$, $k \in \{4,7,8,11\}$, своде на случајеве када је $r = 7$ и $r = 11$. Будући да су фундаменталне групе комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ за $r = 7$ и $r = 11$ некомутативне, исто важи и за фундаменталне групе комплекса $\widetilde{K}_\emptyset$ за било који прост број r за који важи $r \equiv k \pmod{15}$, где $k \in \{4,7,8,11\}$. Како простор $\mathbb{S}^1$ има комутативну фундаменталну групу, тврђење теореме следи. $\square$

Случајеви разматрани у претходним поглављима заједно са теоремом 6.1 паказују да је одговор на питање 5.1 у генералном случају негативан. Негативан одговор има позитиван ефекат јер проистиче из чињенице да сваки од комплекса придружених полиномима разматраним у овој глави има некомутативну фундаменталну групу која представља нову некомутативну инваријанту датог полинома.

Глава 7

Карактери коначних група

У овој глави дајемо кратак увод у теорију карактера коначних група. Упознаћемо се са терминима и навести неке резултате ове теорије који су неопходни за главу 8 ове дисертације. За детаљан увод у теорију карактера коначних група препоручујемо стандардну литературу [16] и [33].

7.1 Репрезентација група

Увођење *репрезентације групе* G мотивисано је идејом да се особине групе G проучавају кроз линеарна пресликавања коришћењем стандардних техника линеарне алгебре. На тај начин конкретан проблем преводи се из поља теорије група на више истражено поље линеарне алгебре.

Нека је G група и $GL(V)$ скуп аутоморфизама коначно димензионог векторског простора V дефинисаног над пољем $\mathbb{C}$.

Дефиниција 7.1. *Репрезентација групе* G над V је хомоморфизам $\rho : G \to GL(V)$. Степен репрезентације (ρ, V) је димензија векторског простора V.

На основу претходне дефиниције, функција $\rho : G \to GL(V)$ је репрезентација ако и само ако је $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$, за све $g, h \in G$. Није тешко уочити да је пресликавањем ρ задато дејство групе G на V, које је дефинисано са

$$g \cdot v = \rho(g)(v).$$

Дефиниција 7.2. Нека је U векторски потпростор простора V. Уколико је $\rho(g)(U) \subseteq U$, за све $g \in G$, тада је $g \mapsto \rho(g)|_U$ *подрепрезентација* репрезентације ρ.

Посебно, уколико репрезентација (ρ, V) нема правих нетривијалних подрепрезентација, тада за њу кажемо да је *иредуцибилна репрезентација*. Иредуцибилне репрезентације посебно су важне, о чему сведочи наредна теорема.

Теорема 7.1 (Машкеова теорема)**.** *Нека је G коначна група и нека је (ρ, V) репрезентација групе G. Ако је $(\rho|_U, U)$ подрепрезентација од (ρ, V), тада постоји потпростор W од V такав да је $(\rho|_W, W)$ подрепрезентација од (ρ, V) и*

$$V = U \oplus W.$$

Последица претходне теореме је да је свака репрезентација сума иредуцибилних репрезентација. Према томе, проучавање репрезентација може се свести на проучавање иредуцибилних репрезентација.

7.2 Карактери

Дефиниција 7.3. Нека је V векторски простор са базом $\mathcal{B}$. Тада је *карактер* групе G у односу на репрезентацију (ρ, V) функција $\chi : G \to \mathbb{C}$ дефинисана на следећи начин:

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}\left([\rho(g)]_{\mathcal{B}}\right), \quad \text{за све } g \in G.$$

Приметимо да карактер групе G у односу на репрезентацију (ρ, V) не зависи од избора базе векторског простора V. Ако су $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ две различите базе простора V, тада је

$$[\rho(g)]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\rho(g)]_{\mathcal{B}}P,$$

за неку инвертибилну матрицу P, па је $\mathrm{Tr}([\rho(g)]_{\mathcal{B}'}) = \mathrm{Tr}([\rho(g)]_{\mathcal{B}})$.

Вредност $\chi(1)$ називамо *степен карактера* χ. Није тешко уочити да је $\chi(1) = \dim V$. Карактер чији је степен један називамо *линеарни карактер*. Карактер је *иредуцибилан* уколико је иредуцибилна репрезентација у односу на коју је дефинисан. На основу Машкеове теореме, степен сваког карактера једнак је збиру степена његових иредуцибилних конституената. Скуп иредуцибилних карактера групе G означаваћемо са $\mathrm{Irr}(G)$.

Карактери испољавају многе лепе особине које су важне у изучавању група којима су придружени. Једна од тих особина је да су карактери константни на класама конјугације. Ако су x и y конјуговани елементи групе G, односно, ако постоји $g \in G$ такво да је $x = g^{-1}yg$, тада важи да је $\chi(x) = \chi(y)$. Нека је $\mathcal{B}$ база векторског простора V, тада је

$$[\rho(x)]_{\mathcal{B}} = [\rho(g^{-1}yg)]_{\mathcal{B}} = [\rho(g)]_{\mathcal{B}}^{-1}[\rho(y)]_{\mathcal{B}}[\rho(g)]_{\mathcal{B}},$$

одакле следи да је $\mathrm{Tr}([\rho(x)]_{\mathcal{B}}) = \mathrm{Tr}([\rho(y)]_{\mathcal{B}})$. Дакле, карактери су класне функције (то јест функције које су добро дефинисане на класама конјугације). Означимо са $Cl(G)$ скуп свих класних функција на G. Овај скуп је векторски потпростор простора свих функција из G у $\mathbb{C}$. База простора $Cl(G)$ задата је функцијама које узимају вредност 1 на тачно једној класи конјугације, а на осталим класама је вредност нула. Према томе, ако је k број класа конјугације, тада је $\dim Cl(G) = k$. Испоставља се да је једна база потпростора $Cl(G)$ управо скуп иредуцибилних карактера. Из претходног закључујемо да је број иредуцибилних карактера групе G једнак броју њених класа конјугације.

Како је број иредуцибилних карактера једнак броју класа конјугације и како је сваки карактер константан на класама конјугације следи да вредностима иредуцибилних карактера можемо придружити матрицу коју називамо *табела карактера*.

Дефиниција 7.4. Ако су $\chi_1, \ldots, \chi_k$ иредуцибилни карактери групе G и $g_1, \ldots, g_k$ представници класа конјугације, табела карактера групе G је матрица

$$\Big(\chi_i(g_j)\Big)_{i=\overline{1,k}, j=\overline{1,k}}.$$

Табела карактера групе G је кључан објекат у студирању структуре групе G. Једно од важних својстава табеле карактера јесте да на основу ње можемо одредити све нормалне подгрупе неке групе G. Нека је $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, скуп

$$\mathrm{Ker}\,\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

називамо *језгро карактера* χ. Приметимо да је $\mathrm{Ker}\,\chi \lhd G$. Скуп $\mathrm{Ker}\,\chi$ одређује се лако на основу табеле карактера. Наредна теорема говори о томе да идентификовањем језгара иредуцибилних карактера идентификујемо и све нормалне подгрупе групе G.

Теорема 7.2 (Поглавље 2, [16]). *Нека је $H \triangleleft G$, тада постоје $\chi_1, \ldots, \chi_t \in \mathrm{Irr}(G)$ такви да је $H = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Ker}\,\chi_i$.*

Ако је G комутативна група, онда њена табела карактера има димензију $|G|$, обзиром да је свака класа конјугације групе G једночлана. Додатно, сваки иредуцибилан карактер ове групе је линеаран.

7.3 Карактери и подгрупе

Нека је H подгрупа групе G. Природно се намеће питање да ли на основу иредуцибилних карактера групе G можемо нешто закључити о иредуцибилним карактерима групе H и обрнуто. У овом поглављу дајемо одговор на то питање.

Нека је $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Означимо са χ_H рестрикцију карактера χ на H. Јасно је да је χ_H карактер групе H. Међутим, у општем случају, χ_H не мора бити и иредуцибилан карактер групе H и мало тога може бити речено о χ_H.

Ситуација је другачија уколико је H нормална подгрупа од G. Ако је ϑ класна функција на H и $g \in G$, дефинишимо функцију $\vartheta^g : H \to \mathbb{C}$ са $\vartheta^g(h) = \vartheta(ghg^{-1})$, за све $h \in H$. Функцију ϑ^g називамо *конјугат* од ϑ. Уколико је ϑ (иредуцибилни) карактер групе H, тада је и ϑ^g (иредуцибилни) карактер групе H. Према томе, са $g : \vartheta \mapsto \vartheta^g$ дефинисано је дејство групе G на скуп $\mathrm{Irr}(H)$. Следећа теорема даје потпуни опис рестрикције χ_H када је H нормална подгрупа.

Теорема 7.3 (Клифордова теорема, [16]). *Нека је $H \triangleleft G$ и $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Ако је ϑ иредуцибилни конституент од χ_H и $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_t$ конјугати од ϑ, тада је*

$$\chi_H = e \sum_{i=1}^{t} \vartheta_i, \quad \text{где } e \in \mathbb{N}.$$

Како је $\vartheta(1) = \vartheta_2(1) = \ldots = \vartheta_t(1)$ и $\chi(1) = \chi_H(1)$, на основу претходне теореме следи да $\vartheta(1) | \chi(1)$.

Размотримо обрнути случај. Нека је H нормална подгрупа групе G и $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$. Дефинишимо *индуковани карактер* φ^G групе G на следећи начин: за све $g \in G$

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^0(xgx^{-1}),$$

где је $\varphi^0(h) = \varphi(h)$ ако $h \in H$ и $\varphi^0(y) = 0$ ако $y \notin H$. Наравно, карактер φ^G не мора бити иредуцибилан. Скуп свих иредуцибилних конституената индукованог карактера φ^G означаваћемо са $\mathrm{Irr}(G|\varphi)$.

Теорема 7.4 (Последица 5.4, [16]). *Нека је $H \leq G$ и $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$. Тада постоји $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ такав да је φ конституент од χ_H.*

Карактер χ из претходне теореме је управо елемент скупа $\mathrm{Irr}(G|\varphi)$. Додатно, уколико је $H \triangleleft G$, на основу Клифордове теореме, следи да $\varphi(1) \mid \chi(1)$. Другим речима, за сваки

$\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$, где је $H \lhd G$, постоји $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, такав да $\varphi(1) \mid \chi(1)$. Ова констатација биће нам врло корисна приликом проучавања степена карактера групе.

Када је у питању однос иредуцибилних карактера количничке групе G/H и групе G, где је $H \lhd G$ и $H \neq \{1\}$, ситуација је повољнија. Иредуцибилни карактери количничке групе G/H потпуно су одређени карактерима групе G. Такође, на основу иредуцибилних карактера количничке групе G/H поступком који се назива подизање карактера можемо пронаћи неке иредуцибилне карактере групе G.

Нека је χ' карактер групе G/H. Функција $\chi : G \to \mathbb{C}$ дефинисана са:

$$\chi(g) = \chi'(gH), \quad \text{за све } g \in G,$$

је карактер групе G који називамо *подизање* од χ' у G. Приметимо да је $\chi'(1) = \chi(1)$. Придруживање $\chi' \mapsto \chi$, где $\chi' \in \mathrm{Irr}(G/H)$, представља бијективну кореспонденцију између скупова $\mathrm{Irr}(G/H)$ и $\{\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G) \text{ и } H \leq \mathrm{Ker}\,\chi\}$. Дакле, на основу табеле карактера групе G потпуно је одређена табела карактера групе G/H. Обрнуто, на основу табеле карактера групе G/H можемо записати $|\mathrm{Irr}(G/H)|$ иредуцибилних карактера групе G.

Ако $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$, постоје ситуације када је скуп $\mathrm{Irr}(G|\varphi)$ у бијективној кореспонденцији са скупом $\mathrm{Irr}(G/H)$, о чему говори наредна теорема.

Теорема 7.5 (Галатер, [16]). *Нека је $H \lhd G$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\chi_H = \vartheta \in \mathrm{Irr}(H)$. Тада су карактери $\beta\chi$, где $\beta \in \mathrm{Irr}(G/H)$, иредуцибилни, међусобно различити и важи да је $\mathrm{Irr}(G|\vartheta) = \{\beta\chi \mid \beta \in \mathrm{Irr}(G/H)\}$.*

7.4 Карактери решивих група

Решиве групе представљају генерализацију комутативних група. Историјски гледано, ове групе су врло значајне. Реч „решиве” потиче из Галуаове теорије и везана је за доказ нерешивости алгебарске једначине петог степена. Специјално, алгебарска једначина је решива радикалима ако и само ако је решива одговарајућа Галуаова група. Карактери решиве групе могу дати додатне информације о њеној структури, стога, испитивање ових карактера представља посебно занимљиво питање. У овом делу дајемо преглед неких резултата из теорије карактера решивих група који ће нам бити потребни у даљем раду.

Дефиниција 7.5. Група G је *решива* уколико постоји низ подгрупа

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_k = G$$

такав да су количничке групе G_i/G_{i-1} комутативне за свако $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Ако је G решива група и $N \lhd G$, тада су N и G/N такође решиве групе.

За потребе наредне структурне леме дефинишемо појам Фробенијусове групе.

Дефиниција 7.6. Нека је $\{1\} < H < G$. Ако је $H \cap g^{-1}Hg = \{1\}$ за све $g \in G \setminus H$, тада се H назива *Фробенијусов комплемент* у групи G. Група у којој постоји Фробенијусов комплемент назива се *Фробенијусова група*.

Ако је G Фробенијусова група која садржи комплемент H, тада постоји $N \triangleleft G$, таква да је $HN = G$ и $H \cap N = 1$. Група N назива се *Фробенијусово језгро* групе G. Свака Фробенијусова група има јединствен Фробенијусов комплемент и јединствено језгро.

Лема 7.1 (Лема 12.3, [16]). *Нека је G решива група. Претпоставимо да је комутаторска подгрупа G' јединствена нормална подгрупа групе G. Тада сви нелинеарни карактери групе G имају исти степен f и важи један од следећа два случаја:*

1) *G је p-група, центар $Z(G)$ је циклична група и $G/Z(G)$ је елементарна Абелова група реда f^2,*

2) *G је Фробенијусова група која има комутативан Фробенијусов комплемент реда f. Такође, G' је Фробенијусово језгро и ова група је елементарна Абелова p-група.*

Практична примена претходне леме је следећа. Нека је G дата некомутативна група и $K \triangleleft G$ је максимална таква да је G/K некомутативна. Тада је свака права количничка група групе G/K комутативна, па је комутаторска група $(G/K)'$ јединствена минимална нормална подгрупа од G/K. Према томе, Лема 7.1 може бити примењена на групу G/K, за сваку некомутативну групу G. Ако је G/K Фробенијусова група, тј. ако важи други случај лема 7.1, у даљем испитивању степена карактера групе G корисна је следећа теорема.

Теорема 7.6 (Теорема 12.4, [16]). *Нека је $K \triangleleft G$ таква да је G/K Фробенијусова група са Фробенијусовим језгром N/K које је елементарна p-група. Ако $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$, тада важи један од следећа два случаја:*

1) $|G : N|\psi(1) \in \{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$,

2) $p \mid \psi(1)$.

Уколико су познати иредуцибилни степени карактера решиве групе G, тада следећа теорема може бити корисна у испитивању иредуцибилних степена карактера нормалних подгрупа групе G.

Теорема 7.7 (Проблем 6.7, [16]). *Нека је G решива група. Ако $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\vartheta \in \mathrm{Irr}(N)$ је иредуцибилни конституент од χ_N, тада*

$$\frac{\chi(1)}{\vartheta(1)} \,\Big|\, |G : N|.$$

Приликом испитивања скупа $\mathrm{Irr}(G)$ често се разматра и скуп свих простих делилаца степена иредуцибилних карактера групе G, који обележавамо са $\rho(G)$. У наставку је описана веза између елемената ова два скупа у случају решивих група.

Теорема 7.8 ([38]). *Нека је G решива група и $\pi \subseteq \rho(G)$ скуп простих делилаца степена иредуцибилних карактера групе G. Ако је $|\pi| = 3$, тада постоји иредуцибилан карактер групе G такав да је степен тог карактера дељив са бар два проста броја која припадају скупу π.*

Глава 8

Комплекси придружени иредуцибилним карактерима коначних некомутативних решивих група

Иредуцибилни карактери су објекти који имају веома важну улогу у проучавању коначних група. Поред тога што карактери играју велику улогу у класификацији група, особине карактера блиско су повезане са особинама групе којој су придружени. За испитивање појединих особина коначне групе G, уместо скупа иредуцибилних карактера $\mathrm{Irr}(G)$, довољно је анализирати скуп степена $\mathrm{cd}(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$. Један од начина да се анализира скуп $\mathrm{cd}(G)$ јесте да му се придружи граф. Скупу $\mathrm{cd}(G)$ можемо придружити два типа графа - *граф заједничког делиоца* и *граф простих делитеља.* Темена првог графа су елементи скупа $\mathrm{cd}(G) \setminus \{1\}$ и између два темена постоји ивица уколико одговарајући степени иредуцибилних карактера имају нетривијалан заједнички делилац. Други граф има темена којима одговарају прости делиоци елемената скупа $\mathrm{cd}(D)$ и постоје ивице између два темена уколико производ придружених простих бројева дели степен неког иредуцибилног карактера. Ови графови су се показали као веома корисни у анализи појединих својстава и класификацији коначних група (видети [2, 27, 31, 32]). Посебно корисни показали су се у испитивању решивости коначних група (видети [15, 26, 30, 38, 39]).

Сара Јенсен у раду [17] уводи *комплекс заједничког делиоца* и *комплекс простих делитеља* као вишедимензионе аналогоне графа заједничког делиоца и графа простих делитеља коначне групе. Како симплицијални комплекс има богатију структуру од графа, придружени комплекси могу дати више информација о коначној групи од придружених графова. Истраживање степена карактера у том правцу наставља Вилер у раду [44]. У овој глави бавимо се испитивањем комплекса заједничког делиоца и комплекса простих делитеља придружених некомутативним решивим групама и дајемо побољшања неких од резултата датих у радовима [17, 44].

Поједини резултати ове главе независни су од тога да ли је комплекс дефинисан на скупу нетривијалних иредуцибилних карактера групе или било којем скупу природних бројева. Према томе, комплексе заједничког делиоца и комплекс простих делитеља дефинисаћемо на произвољном скупу чији су елементи природни бројеви.

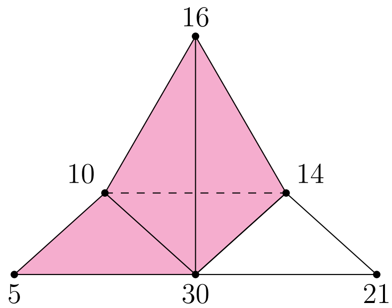
8.1 Комплекс заједничког делиоца и комплекс простих делитеља

Нека је X коначан скуп чији су елементи природни бројеви.

Дефиниција 8.1. *Комūлекс заједничкоī делиоца* придружен скупу X, у ознаци $\mathcal{G}(X)$, је апстрактни симплицијални комплекс чија су темена елементи скупа $X^* = X \setminus \{1\}$ а симплекси су они подскупови скупа X^* чији елементи имају нетривијалан заједнички делилац, односно

$$\mathcal{G}(X) = \{\sigma \subseteq X^* \mid \mathrm{nzd}(\sigma) \neq 1\}.$$

Пример 8.1. Ако је $X = \{1, 5, 10, 14, 16, 21, 30\}$, тада је геометријска реализација комплекса $\mathcal{G}(X)$ дат на слици 8.1.

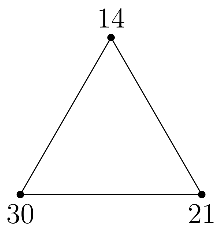


Слика 8.1: Комплекс $\mathcal{G}(X)$

За природан број x, означимо са $\pi(x)$ скуп свих простих делитеља броја x. Скуп свих простих делитеља елемената скупа X означимо са $\rho(X)$, односно $\rho(X) = \cup_{x \in X}\pi(x)$.

Дефиниција 8.2. Елемент $x \in X$ је *pd-максималан* ако је $\pi(x)$ максималан елемент скупа $\{\pi(x) \,|\, x \in X\}$.

За два pd-максимална елемента кажемо да су еквивалентна уколико имају исти скуп простих делитеља. Према томе, скупу X можемо придружити скуп $\Omega \subseteq X$ такав да Ω садржи представнике класа pd-максималних елемената скупа X. Приметимо да је комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ поткомплекс комплекса $\mathcal{G}(X)$. У највећем броју случајева комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ има мањи број темена и мању димензију од комплекса $\mathcal{G}(X)$. На пример, комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ који одговара комплексу $\mathcal{G}(X)$ из претходног примера дат је на слици 8.2.



Слика 8.2: Комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$

У раду [17] показано је да комплекси $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{G}(\Omega)$ имају исту фундаменталну групу. Међутим, важи много више од тога. Наиме, ови комплекси су хомотопски еквивалентни, што ћемо сада и показати.

Теорема 8.1. *Нека је X коначан скуп чији су елементи природни бројеви и $\Omega \subseteq X$ скуп представника класа* pd*-максималних елемената скупа X. Тада је симплицијални комплекс $\mathcal{G}(X)$ хомотопски еквивалентан симплицијалном комплексу $\mathcal{G}(\Omega)$.*

Доказ. Ако $p \in \rho(X)$, тада у комплексу $\mathcal{G}(X)$ постоји симплекс чија су темена сви елементи скупа X који су дељиви бројем p. Означимо тај симплекс са σ_p. Лако се уочава да скуп $\{\sigma_p\}_{p\in\rho(X)}$ генерише цео комплекс $\mathcal{G}(X)$. Слично, означимо са τ_p симплекс у $\mathcal{G}(\Omega)$ чија су темена сви елементи скупа Ω дељиви бројем p. Како је $\Omega \subseteq X$ важи да је симплекс τ_p лице симплекса σ_p у комплексу $\mathcal{G}(X)$, односно $\tau_p \subseteq \sigma_p$ у $\mathcal{G}(X)$.

Дефинишимо непрекидно пресликавање $f : |\mathcal{G}(X)| \to |\mathcal{G}(\Omega)|$ које свако теме $x \in X$ слика у барицентар симплекса $\{y \in \Omega \mid \pi(x) \subseteq \pi(y)\}$ у $\mathcal{G}(\Omega)$ а тачке $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i$, где $x_i \in X$, слика у $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$. Темена која припадају скупу $\Omega \subseteq X$ при пресликавању f сликају се сама у себе, јер су елементи скупа Ω pd-максимални. Ако је $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ симплекс у $\mathcal{G}(X)$, тада постоји прост број $p \in \rho(X)$ такав да p дели свако од темена $x_0, x_1, \dots, x_n$. Према томе, тачке $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ су барицентри неких лица симплекса $\tau_p \in \mathcal{G}(\Omega)$, па је пресликавање f добро дефинисано.

Приметимо да је

$$\{y \in \Omega \mid \pi(x) \subseteq \pi(y)\} = \cap_{p\in\pi(x)} \tau_p.$$

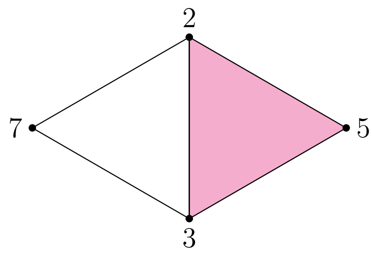
На основу претходних разматрања закључујемо да пресликавање f сваку тачку симплекса $\sigma_p \in |\mathcal{G}(X)|$ пројектује на одговарајућу тачку његовог лица $\tau_p \in |\mathcal{G}(\Omega)|$ дуж линије унутар симплекса σ_p. Јасно је да је f јак деформацијски ретракт, па је $|\mathcal{G}(X)| \simeq |\mathcal{G}(\Omega)|$. □

Поред комплекса заједничког делиоца, скупу X можемо придружити и комплекс простих делитеља.

Дефиниција 8.3. *Комплекс простих делитеља* придружен скупу X, у ознаци $\mathcal{D}(X)$, је апстрактни симплицијални комплекс чија су темена прости делиоци елемената скупа X, а симплекси су формирани од простих бројева чији производ дели неки елемент скупа X, односно

$$\mathcal{D}(X) = \{\tau \subseteq \rho(X) \mid (\exists x \in X) \prod_{p\in\tau} p \mid x\}.$$

Пример 8.2. Нека је $X = \{1, 5, 10, 14, 16, 21, 30\}$, тада је геометријска реализација комплекса $\mathcal{D}(X)$ дат на слици 8.3.



Слика 8.3: Комплекс $\mathcal{D}(X)$

Вилер је у раду [44] показао да постоји веза између комплекса $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$. Прецизније, показао је да су фундаменталне групе ових комплекса изоморфне. Ми ћемо у наставку показати да је та веза много јача, односно да су $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$ хомотопски еквивалентни.

Теорема 8.2. *Нека је X коначан скуп чији су елементи природни бројеви. Тада су комплекси $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$ придружени скупу X хомотопски еквивалентни.*

Доказ. Посматрајмо комплексе $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$ као посете. Уређајни комплекс за овакав тип посета је прва барицентрична подела комплекса који се посматра као посет. Како је прва барицентрична подела комплекса хомотопски еквивалентна том комплексу, комплекс посматран као посет и уређајни комплекс над тим посетом хомотопски су еквивалентни.

Покажимо да су уређајни комплекси над посетима $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$ хомотопски еквивалентни. Дефинишимо пресликавања $f : \mathcal{G}(X) \to \mathcal{D}(X)$ и $g : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{G}(X)$ на следећи начин:

$$(\forall\, \sigma \in \mathcal{G}(X))\ \sigma \xmapsto{f} \pi(\mathrm{nzd}(\sigma)) \quad \text{и} \quad (\forall\, \alpha \in \mathcal{D}(X))\ \alpha \xmapsto{g} \{v \in X \,|\, \prod_{p\in\alpha} p \,|\, v\}.$$

Приметимо да важи следеће:

$$\text{ако је } \sigma \subseteq \tau \text{ онда } \mathrm{nzd}(\tau) \,|\, \mathrm{nzd}(\sigma), \text{ па је } f(\sigma) \supseteq f(\tau),$$

као и

$$\text{ако је } \alpha \subseteq \beta \text{ онда је } g(\alpha) \supseteq g(\beta).$$

Дакле, функције f и g задају симплицијална пресликавања на уређајним комплексима.

Међутим, важи и следеће:

$$(\forall\, \sigma \in \mathcal{G}(X))\ g(f(\sigma)) \supseteq \sigma \quad \text{и} \quad (\forall\, \alpha \in \mathcal{D}(X))\ f(g(\alpha)) \supseteq \alpha.$$

Нека $\sigma \in \mathcal{G}(X)$, покажимо да је $g(f(\sigma)) \supseteq \sigma$. Ако $v \in \sigma$, следи да $\mathrm{nzd}(\sigma) \,|\, v$, па производ бројева из скупа $\pi(\mathrm{nzd}(\sigma))$ дели v. Према томе, $v \in g(f(\sigma))$.

Посматрајмо $\alpha \in \mathcal{D}(X)$ и покажимо да важи и $f(g(\alpha)) \supseteq \alpha$. Нека $p \in \alpha$. Тада $p \,|\, v$ за сваки $v \in g(\alpha)$, те онда $p \,|\, \mathrm{nzd}(g(\alpha))$. Закључујемо да $p \in f(g(\alpha))$.

На основу резултата из поглавља 1.1.6 и претходних разматрања, пресликавања $g \circ f$ и $f \circ g$ су хомотопна одговарајућим идентичким пресликавањима, па је $\mathcal{G}(X) \simeq \mathcal{D}(X)$. $\square$

Сваком максималном симплексу у $\mathcal{D}(X)$ одговара по један представник класе pd-максималних елемената, тј. по једно теме у комплексу $\mathcal{G}(\Omega)$. Додатно, ако максимални симплекси у $\mathcal{D}(X)$ имају непразан пресек тада постоје прости бројеви који деле сва темена у $\mathcal{G}(\Omega)$ која одговарају овим максималним симплексима, па та темена формирају симплекс у $\mathcal{G}(\Omega)$. Обрнуто, темена произвољног симплекса $\sigma \in \mathcal{G}(\Omega)$ дељива су неким природним бројем $d = \mathrm{nzd}(\sigma)$, при чему $d \neq 1$. Скуп $\pi(d)$ одређују симплекс у $\mathcal{D}(X)$ и тај симплекс је заједничко лице свих максималних симплекса у $\mathcal{D}(X)$ који одговарају теменима симплекса σ. Према томе, комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ је нерв комплекса $\mathcal{D}(X)$, односно

$$\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{N}(\mathcal{D}(X)).$$

Нека је G коначна решива група. Размотримо комплексе

$$\mathcal{G}(G) := \mathcal{G}(\mathrm{cd}(G)) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(G) := \mathcal{D}(\mathrm{cd}(G)).$$

Уколико је група G комутативна, тада је $\mathrm{cd}(G) = \{1\}$, па нема смисла разматрати комплексе $\mathcal{G}(G)$ и $\mathcal{D}(G)$. Стога, у наставку претпоставимо да група G није комутативна.

Комплекси $\mathcal{G}(G)$ и $\mathcal{D}(G)$ имају специфичну структуру када је G коначна решива група. За почетак, комплекс $\mathcal{D}(G)$, а тиме и $\mathcal{G}(G)$, има прецизно ограничен број компоненти повезаности. Наведимо следеће својство графа простих делитеља решиве групе G које је кључно за утврђивање броја компоненти комплекса $\mathcal{D}(G)$.

Теорема 8.3 (Теорема 2, [39]). *Ако граф простих делитеља коначне решиве групе G није повезан, тада постоје карактери $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$, такви да за сваки прост број $p \in \rho(\mathrm{cd}(G))$ важи $p \,|\, \chi_1(1)\chi_2(1)$.*

Као последицу претходне теореме имамо следеће тврђење.

Последица 8.1 (Поглавље 2.5, [17]). *Нека је G коначна решива група. Ако комплекс $\mathcal{D}(G)$ није повезан, тада он има две компоненте повезаности и свака од тих компоненти је симплекс.*

Доказ. Ако је комплекс $\mathcal{D}(G)$ неповезан, такав је и граф простих делитеља групе G, који је његов 1-скелет. На основу теореме 8.3, постоје карактери $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$, такви да за сваки прост број $p \in \rho(\mathrm{cd}(G))$ важи $p \,|\, \chi_1(1)\chi_2(1)$.

Нека су поткомплекси K_1 и K_2 компоненте повезаности у комплексу $\mathcal{D}(G)$. Ако је p теме комплекса K_1, тада важи да $p \,|\, \chi_1(1)\chi_2(1)$. Без умањења општости, нека $p \,|\, \chi_1(1)$. Ако је q теме комплекса K_2, тада $q \nmid \chi_1(1)$, иначе би темена p и q припадала истој компоненти повезаности. Према томе, $q \,|\, \chi_2(1)$, па $p \nmid \chi_2(1)$. Дакле, сви прости бројеви који одговарају теменима комплекса K_1 деле $\chi_1(1)$, док сви прости бројеви који одговарају теменима комплекса K_2 деле $\chi_2(1)$. Закључујемо да су K_1 и K_2 симплекси.

Уколико би постојала још нека компонента повезаности у комплексу $\mathcal{D}(G)$ тада би сваки прост број r који одговара неком њеном темену делио неки од бројева $\chi_1(1)$ и $\chi_2(1)$. Стога, теме r би припадало компоненти K_1 или компоненти K_2, што је контрадикција. □

Као што смо се уверили, у случају када комплекс $\mathcal{D}(G)$ није повезан његова структура је врло једноставна. На основу теореме 8.2, исто важи и за комплекс $\mathcal{G}(G)$. У раду [17] показано је да повезан комплекс $\mathcal{G}(G)$, тачније његов поткомплекс $\mathcal{G}(\Omega)$, у општем случају има доста занимљивију структуру.

Теорема 8.4 (Теорема 3.4, [17]). *Нека је G коначна решива група и Ω скуп представника pd-максималних елемената у $\mathrm{cd}(G)$. Ако је $\mathcal{G}(\Omega)$ повезан комплекс, тада постоји прост број $p \in \rho(G)$ такав да је скуп*

$$\Omega_{p'} = \{x \in \Omega \mid p \nmid x\}$$

или празан или симплекс у $\mathcal{G}(\Omega)$.

Доказ. Нека је $K \lhd G$ максимална нормална подгрупа за коју важи да G/K није комутативна. На основу леме 7.1, $\mathrm{cd}(G/K)^* = \mathrm{cd}(G/K) \setminus \{1\} = \{f\}$, за неки природан број f.

Размотримо случај када је G/K p-група, за неки прост број p. Тада је f степен броја p. Нека $x \in \mathrm{cd}(G)^*$ и $p \nmid x$. Покажимо да x није pd-максималан елемент. Нека $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $\chi(1) = x$ и нека је $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ конституент од χ_K. Теорема 7.7 нам говори да

$\frac{\chi(1)}{\theta(1)} \mid |G:K|$. Како је $|G:K| = p^s$, за неко $s \in \mathbb{N}$, и $p \nmid \chi(1)$, закључујемо да је $\frac{\chi(1)}{\theta(1)} = 1$, односно $\chi(1) = \theta(1)$. Дакле, карактер $\theta = \chi_K$ па на основу Теореме 7.5 важи да је

$$\mathrm{Irr}(G|\theta) = \{\chi\psi \mid \psi \in \mathrm{Irr}(G/K)\}.$$

Стога,

$$\mathrm{cd}(G|\theta) = \{x, xf\} \subseteq \mathrm{cd}(G).$$

Како је f степен броја p и $p \nmid x$, следи да је $\pi(x) \subset \pi(xf)$. Дакле, x није pd-максималан елемент скупа $\mathrm{cd}(G)$, па је $\Omega_{p'} = \emptyset$.

Ако група G/K није p-група, на основу леме 7.1, можемо претпоставити да је G/K Фробенијусова група са Фробенијусовим језгром N/K. Додатно, на основу исте леме, важи да је $|G:N| = f$ и N/K је елементарна p-група за неки прост број p. Нека $x \in \Omega_{p'}$. Изаберимо карактер $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ такав да је $\chi(1) = x$. Ако је $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ конституент карактера χ_N, тада на основу теореме 7.6 следи да

$$|G:N|\psi(1) \in \mathrm{cd}(G) \quad \text{или} \quad p \mid \psi(1).$$

Будући да $\psi(1) \mid \chi(1)$, закључујемо да $|G:N|\psi(1) \in \mathrm{cd}(G)$. Међутим, на основу теореме 7.7, $\chi(1) \mid |G:N|\psi(1)$, па $\pi(x) \subseteq \pi(f\psi(1))$. Степен x је pd-максималан, па је $\pi(x) = \pi(f\psi(1))$. Из претходних разматрања следи да је $\pi(f) \subseteq \pi(x)$. Дакле, сваки број из скупа $\Omega_{p'}$ дељив је сваким бројем из скупа $\pi(f)$, одакле директно следи да је $\Omega_{p'}$ симплекс. $\square$

На основу претходне теореме можемо описати структуру комплекса $\mathcal{G}(\Omega)$. Ако је $\Omega_{p'} = \emptyset$, тада су сви pd-максимални елементи дељиви бројем p. Из угла комплекса $\mathcal{D}(G)$, сваки максимални симплекс у $\mathcal{D}(G)$ садржи теме p. Супротно, уколико је $\Omega_{p'} \neq \emptyset$, постоји степен $f \in \mathrm{cd}(G)$ такав да за све $x \in \Omega$ и $p \nmid x$, важи да $\pi(f) \subseteq \pi(x)$. Према томе, сваки максимални симплекс у $\mathcal{D}(G)$ садржи теме p или садржи симплекс чија су темена елементи скупа $\pi(f)$.

8.2 Фундаментална група придружених комплекса

Нека је G коначна решива група таква да је $\mathcal{G}(G)$ повезан. Посматрајмо поткомплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ комплекса $\mathcal{G}(G)$. Уколико комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ није контрактибилан, теорема 8.4 говори нам да је он унија два дисјунктна симплекса

$$\Omega_p = \{v \in \Omega : p \mid v\},$$

и

$$\Omega_{p'} = \{v \in \Omega : p \nmid v\},$$

чија су темена спојена бар једном ивицом. Претпоставимо да је $\dim \Omega_p = n_1$ и $\dim \Omega_{p'} = n_2$, за неке $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Фундаменталну групу комплекса $\mathcal{G}(\Omega)$ рачунамо помоћу метода представљеног у поглављу 1.1.3 ове дисертације. Подсетимо се да је за рачунање групе $\pi_1(\mathcal{G}(\Omega))$ довољно посматрати 2-скелет комплекса $\mathcal{G}(\Omega)$. Одаберимо темена $x \in \Omega_p$ и $y \in \Omega_{p'}$ који су повезани ивицом у $\mathcal{G}(\Omega)$ (оваква два темена сигурно постоје јер је $\mathcal{G}(\Omega)$ повезан комплекс). Нека је L максимално разапињуће стабло у комплексу $\mathcal{G}(\Omega)$ које садржи n_1 ивица симплекса Ω_p инцидентних са теменом x, n_2 ивица комплекса $\Omega_{p'}$ инцидентних са теменом y и ивицу која спаја темена x и y. Група $G(\mathcal{G}(\Omega), L)$ генерисана је генераторима g_{ij} који одговарају 1-симплексима $\{i, j\}$ у $\mathcal{G}(\Omega)$ који нису у L и са по једном релацијом

$g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$ за сваки 2-симплекс $\{i,j,k\}$ у $\mathcal{G}(\Omega)$. Ако $\{i,j\} \subseteq \Omega_p$, тада $\{i,j,x\} \subseteq \Omega_p$ па из релације $g_{ij} \cdot g_{jx} = g_{ix}$ следи да је $g_{ij} = 1$. Слично, ако $\{i,j\} \subseteq \Omega_{p'}$, следи да је одговарајући генератор $g_{ij} = 1$. На основу претходних разматрања, скуп нетривијалних генератора групе $G(\mathcal{G}(\Omega), L)$ је подскуп скупа

$$\{g_{ij} \in G(\mathcal{G}(\Omega), L) \mid i \in \Omega_p, j \in \Omega_p, \{i,j\} \in \mathcal{G}(\Omega) \setminus L\}.$$

Сваки 2-симплекс који садржи ивицу $\{i,j\}$ која одговара нетривијалном генератору садржи и ивицу $\{i,k\}$ која припада симплексу Ω_p или $\Omega_{p'}$, па је $g_{ij}g_{jk} = 1$. Закључујемо да је $G(\mathcal{G}(\Omega), L)$ слободна група. Како је $G(\mathcal{G}(\Omega), L) \cong \pi_1(\mathcal{G}(\Omega))$, група $\pi_1(\mathcal{G}(\Omega))$ је такође слободна. Додатно, сваком генератору групе $\pi_1(\mathcal{G}(\Omega))$ одговара неки 1-симплекс $\{i,j\} \in \mathcal{G}(\Omega)$, такав да је $i \in \Omega_p, j \in \Omega_p$ и $\{i,j\} \notin L$.

Користећи претходну анализу, у наредној теореми дајемо оцену за број генератора групе $\pi(\mathcal{G}(\Omega))$. Дата оцена представља побољшање у односу на оцену дату у раду [17] (теорема 3.4).

Теорема 8.5. *Нека је G коначна решива група таква да је $\mathcal{G}(G)$ повезан и* $\dim \mathcal{G}(G) = n$. *Тада је $\pi_1(\mathcal{G}(G))$ слободна група и* $\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(G)) \leq \max\{4n-3, \left\lceil \frac{n^2-1}{2} \right\rceil + n\}$.

Доказ. Комплекси $\mathcal{G}(G)$ и $\mathcal{G}(\Omega)$ су хомотопски еквивалентни, па важи $\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(G)) = \operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(\Omega))$. Претпоставимо да комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ није контрактибилан. Тада је он унија симплекса Ω_p и $\Omega_{p'}$ чија су темена спојена бар једном ивицом. На основу теореме 8.4, постоји степен $f \in \operatorname{cd}(G) \setminus \{1\}$ такав да за све $x \in \Omega_{p'}$ следи да је $\pi(f) \subseteq \pi(x)$. Ако је f pd-максималан, тада је једини елемент скупа $\Omega_{p'}$ представник класе елемента f и $\dim \Omega_{p'} = 0$. У супротном, ако f није pd-максималан, важи да је $\{f\} \cup \Omega_{p'}$ симплекс у $\mathcal{G}(G)$ и $f \notin \Omega_{p'}$. Како је $\dim(\mathcal{G}(G)) = n$, закључујемо да је $\dim \Omega_p \leq n$ и $\dim \Omega_{p'} \leq n-1$. Размотримо максималан случај, тј. случај када је $\dim \Omega_p = n$ и $\dim \Omega_{p'} = n-1$.

Нека је

$$M = \Big\{\{a,b\} \mid a \in \Omega_p,\, b \in \Omega_{p'}\Big\}.$$

На основу анализе са почетка овог поглавља, група $\pi_1(\mathcal{G}(\Omega))$ је слободна и генерисана је елементима из скупа M, па је $\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(\Omega)) \leq |M| - 1 = (n+1)n - 1$.

Обележимо елементе скупа Ω_p са $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ а елементе скупа $\Omega_{p'}$ са $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Разликујемо следећа два дисјунктна случаја:

1) Постоје два дисјунктна максимална 1-симплекса која припадају скупу $M \cap \mathcal{G}(\Omega)$.

2) Не постоје два дисјунктна максимална 1-симплекса која припадају скупу $M \cap \mathcal{G}(\Omega)$.

Први случај: Ако постоје два дисјунктна 1-симплекса $\{a_{i_1}, b_{j_1}\}, \{a_{i_2}, b_{j_2}\} \in M$ која су максималана у комплексу $\mathcal{G}(\Omega)$, тада 1-симплекс $\{a_{i_3}, b_{j_3}\} \in M$, $i_3 \notin \{i_1, i_2\}$, $j_3 \notin \{j_1, j_2\}$, или није максималан у $\mathcal{G}(\Omega)$, или $\{a_{i_3}, b_{j_3}\} \notin \mathcal{G}(\Omega)$. Уколико би постојао максималан симплекс $\{a_{i_3}, b_{j_3}\} \in M \cap \mathcal{G}(\Omega)$, тада би постојали прости бројеви p_1, p_2, p_3, такви да $p_1 \mid \operatorname{nzd}(a_{i_1}, b_{j_1})$, $p_2 \mid \operatorname{nzd}(a_{i_2}, b_{j_2})$ и $p_3 \mid \operatorname{nzd}(a_{i_3}, b_{j_3})$. Прости бројеви p_1, p_2 и p_3 су различити, иначе $\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$, $\{a_{i_2}, b_{j_2}\}$ и $\{a_{i_3}, b_{j_3}\}$ не би били максимални симплекси у $\mathcal{G}(\Omega)$. Такође, не постоји степен у $\operatorname{cd}(G)$ кога дели производ $p_i p_j$, $i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j$. Ако би производ $p_1 p_2$ делио неки степен, тада би делио и неки pd-максимални степен $c \in \Omega \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, b_{i_1}, b_{i_2}\}$, а онда би у $\mathcal{G}(\Omega)$ постојао 2-симплекс $\{c, a_{i_1}, b_{j_1}\}$ или 2-симплекс $\{c, a_{i_2}, b_{j_2}\}$, што је у супротности са максималношћу 1-симплекса $\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$ и $\{a_{i_2}, b_{j_2}\}$. Слично се може закључити и за остале производе. Дакле, у комплексу $\mathcal{D}(G)$ постојала би три проста броја која међусобно нису спојена ивицама, што је у контрадикцији са теоремом 7.8.

На основу претходног, ако су $\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$ и $\{a_{i_2}, b_{j_2}\}$ максимални симплекси, самим тим и генератори фундаменталне групе, тада 1-симплекси $\{a_{i_3}, b_{j_3}\}$, где $i_3 \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{i_1, i_2\}$ и $j_3 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2\}$, нису генератори фундаменталне групе. Ови 1-симплекси или не постоје у $\mathcal{G}(\Omega)$, или су лица неких 2-симплекса, па се могу изразити преко других генератора. Наиме, ако $\{a_{i_3}, b_{j_3}\} \in \mathcal{G}(\Omega)$, тада на основу претходног p_1p_3 или p_2p_3 дели неки pd-максимални степен c. Без губитка општости, нека $p_1p_3 \mid c$. Тада $c \in \{a_{i_1}, b_{j_1}\}$, јер у супротном $a_{i_1}b_{j_1}$ не би био максималан симплекс. Следи да у $\mathcal{G}(\Omega)$ постоји 2-симплекс $\{a_{i_3}, b_{i_3}, a_{i_1}\}$ или $\{a_{i_3}, b_{i_3}, b_{i_1}\}$. Закључујемо да се генератор који одговара 1-симплексу $a_{i_3}b_{i_3}$ може изразити преко генератора који одговарају 1-симплексима $a_{i_1}b_{i_3}$ или $a_{i_3}b_{i_1}$. Другим речима, генератор који одговара 1-симплексу $a_{i_3}b_{i_3}$ може се изразити преко генератора који одговарају 1-симплексима чије једно теме припада скупу $\{a_{i_1}, a_{i_2}\}$ или $\{b_{i_1}, b_{i_2}\}$ а друго теме је a_{i_3} или b_{i_3}. Како је $(n-1)(n-2)$ број 1-симплекса $\{a_{i_3}, b_{j_3}\}$, следи да је

$$\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(G)) \leq (n+1)n - 1 - (n-1)(n-2) = 4n - 3.$$

Други случај: Сви максимални 1-симплекси $\{a_i, b_j\} \in M \cap \mathcal{G}(\Omega)$ су генератори фундаменталне групе. С обзиром на то да се свака два максимална 1-симплекса секу, може их имати највише $n+1$. Максималан број максималних 1-симплекса се достиже када сви они имају заједничко теме b_j, за неко $j \in \{1, \ldots, n\}$, а друго теме им је a_i, где $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Ако је m број максималних 1-симплекса, тада највише $n(n+1) - m$ 1-симплекса $\{a_i, b_j\} \in M \cap \mathcal{G}(\Omega)$ нису максимални, тј. лица су неких 2-симплекса. Сваки такав 1-симплекс може се изразити преко неког другог 1-симплекса из 2-симплекса коме припадају. Нека је k број изражених 1-симплекса, а l број генеришућих немаксималних 1-симплекса који припадају скупу $M \cap \mathcal{G}(\Omega)$. Како је $k + l \leq n(n+1) - m$ и $k \geq l$ то је $l \leq \lfloor \frac{n(n+1)-m}{2} \rfloor$. Закључујемо да је у овом случају

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(G)) &\leq \left\lfloor \frac{n(n+1) - m}{2} \right\rfloor + m - 1 \\
&\leq \left\lfloor \frac{n(n+1) - (n+1)}{2} \right\rfloor + (n+1) - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n^2 - 1}{2} \right\rfloor + n
\end{aligned}$$

Коначно, на основу претходних случајева,

$$\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{G}(G)) \leq \max\{4n - 3, \left\lfloor \frac{n^2 - 1}{2} \right\rfloor + n\}.$$

□

Оцену фундаметалне групе можемо дати и из угла броја темена комплекса $\mathcal{D}(G)$.

Теорема 8.6. *Нека је G коначна решива група. Ако је $\mathcal{D}(G)$ повезан комплекс и $|\rho(\operatorname{cd}(G))| = n$, тада је $\operatorname{rk} \pi_1(\mathcal{D}(G)) \leq n - 2$.*

Доказ. Ако је $\Omega_{p'} = \emptyset$, на основу теореме 8.4, сви pd-максимални степени карактера дељиви су са p, па је комплекс $\mathcal{D}(G)$ конус са врхом p, односно контрактибилан је. Претпоставимо да је $\Omega_{p'} \neq \emptyset$. Тада постоји $f \in \mathrm{cd}(G) \setminus \{1\}$, такав да је $\pi(f) \subseteq \pi(x)$, за све $x \in \Omega_{p'}$. Дакле, за сваки симплекс $\tau \in \mathcal{D}(G)$ важи да $\{p\} \cup \tau \in \mathcal{D}(G)$ или $\pi(f) \cup \tau \in \mathcal{D}(G)$. Нека $q \in \pi(f)$. На основу претходног, за сваки прост број $r \in \rho(\mathrm{cd}(G))$ важи да $\{p, r\} \in \mathcal{D}(G)$ или $\{q, r\} \in \mathcal{D}(G)$. Обележимо са

$$\Psi_p = \{r \in \rho(\mathrm{cd}(G)) \mid \{p, r\} \in \mathcal{D}(G)\}$$

и

$$\Psi_q = \{r \in \rho(\mathrm{cd}(G)) \mid \{p, r\} \notin \mathcal{D}(G) \text{ и } \{q, r\} \in \mathcal{D}(G)\}.$$

Како је $\mathcal{D}(G)$ повезан комплекс, постоје прости бројеви $p' \in \Psi_p$ и $q' \in \Psi_q$ такви да $\{p', q'\} \in \mathcal{D}(G)$.

Нека је

$$L = \{\{p, r\} \mid r \in \Psi_p\} \cup \{\{q, r\} \mid r \in \Psi_q\} \cup \{p', q'\}.$$

Комплекс L је разапињуће стабло у $\mathcal{D}(G)$. Означимо генераторе групе $G(\mathcal{D}(G), L)$ са g_{ij}, где $i, j \in \rho(\mathrm{cd}(G))$ и $i < j$ (неки од ових генератора су тривијални). Ако $i, j \notin \{p, q\}$ и $\{i, j\} \in \mathcal{D}(G)$, тада $\{p, i, j\} \in \mathcal{D}(G)$ или $\{q, i, j\} \in \mathcal{D}(G)$. Стога, генератор g_{ij} може бити изражен преко генератора g_{pi} и g_{pj}, или преко генератора g_{qi} и g_{qj}. Дакле, нетривијални генератори групе $G(\mathcal{D}(G), L)$ су елементи скупа

$$\{g_{pi} \mid i \in \rho(\mathrm{cd}(G)) \setminus \{p\}\} \cup \{g_{qi} \mid i \in \rho(\mathrm{cd}(G)) \setminus \{p, q\}\} \setminus L.$$

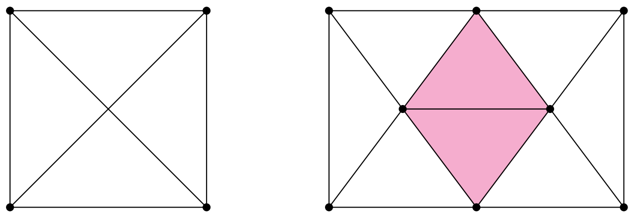
Како је $G(\mathcal{D}(G), L) \cong \pi_1(\mathcal{D}(G))$, закључујемо да је

$$\mathrm{rk}\, \pi_1(\mathcal{D}(G)) \leq n - 1 + n - 2 - (n - 1) = n - 2.$$

□

У радовима [7, 15, 29] поставља се питање да ли одређени графови могу бити графови заједничког делиоца или графови простих делитеља неке коначне решиве групе. Такође, у раду [17], у глави 4, разматра се да ли одређени комплекси могу бити комплекси заједничког делиоца неке коначна решиве групе. Својства фундаменталних група комплекса $\mathcal{G}(G)$ и $\mathcal{D}(G)$ можемо искористити да покажемо да поједини скупови природних бројева не могу бити степени карактера коначне решиве групе.

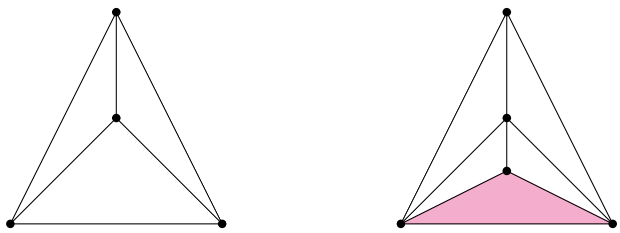
Пример 8.3. Комплекси дати на слици 8.4 нису комплекси заједничког делиоца ниједне коначне решиве групе.



Слика 8.4: Нису комплекси заједничког делиоца

Први комплекс дат на слици 8.4 је једнодимензиони и његова фундаментална група изоморфна је групи $\mathbb{Z}^3$. Међутим, на основу теореме 8.5, сваки комплекс заједничког делиоца неке коначне решиве групе који је једнодимензиони има фундаменталну групу чији је ранг највише један. Фундаментална група другог комплекса изоморфна је групи $\mathbb{Z}^6$. Како дводимензиони комплекси заједничког делиоца решивих група имају фундаменталну групу чији је ранг највише пет, закључујемо да ни други комплекс није комплекс заједничког делиоца неке коначне решиве групе.

Пример 8.4. Комплекси дати на слици 8.5 нису комплекси простих делитеља ниједне коначне решиве групе.



Слика 8.5: Нису комплекси простих делитеља

Први комплекс дат на слици 8.5 има четири темена и фундаменталну групу која је изоморфна групи $\mathbb{Z}^3$. На основу теореме 8.6, овај комплекс не може бити комплекс простих делитеља ниједне решиве групе G. На основу исте теореме други комплекс не може бити комплекс простих делитеља решиве групе јер има пет темена и фундаменталну групу изоморфну групи $\mathbb{Z}^4$.

Глава 9

Закључак и даљи правци истраживања

Мусикер и Рајнер у раду [37] показали су да је испитивање придружених комплекса од великог значаја за изучавање циклотомичних полинома. Аутори су дали тополошко тумачење циклотомичних полинома у свим случајевима, осим у случају када је степен циклотомичног полинома производ три различита проста непарна броја (видети теорему 7.5 и питање 7.6 у раду [37]). У првом делу ове дисертације у фокусу истраживања су управо комплекси $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ придружени циклотомичном полиному $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} c_j x^j$, где је $n = pqr$ и p, q и r су различити непарни прости бројеви. У теореми 5.6 показано је да у случајевима када је $n = pqr$, $r > pq - p - q$ и $r \equiv k \,(\mathrm{mod}\, pq)$, где $k \in \{1, pq-1\}$, комплекси $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ имају правилну структуру. Прецизније, комплекс $K_\emptyset$ хомотопски је еквивалентан простору $\mathbb{S}^1$, док је комплекс K_j, $j \in \{0, 1, \ldots, \varphi(n)\}$, хомотопски еквивалентан простору $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{B}^2$, где је $\deg(f_j) = c_j$. Према томе, комплекс $K_{\{j\}}$ у овим случајевима даје потпуну информацију о величини коефицијента c_j. До истог закључка долази се и приликом разматрања случајева када је $n = 3 \cdot 5 \cdot r$ и $r \equiv k \,(\mathrm{mod}\, 15)$, где $k \in \{1, 2, 13, 14\}$ (Теорема 5.8). Докази теорема 5.6 и 5.8 темеље се на конструкцији одговарајућег ацикличног дискретног векторског поља. Резултати изложени у глави 6 показују да придружени комплекси $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ немају увек правилну структуру. У овој глави разматрани су случајеви када је $n = 3 \cdot 5 \cdot r$, где је $r \equiv k \,(\mathrm{mod}\ 15)$ и $k \in \{4, 7, 8, 11\}$ (теорема 6.1), као и случај $n = 5 \cdot 7 \cdot 11$ (поглавље 6.3). У сваком од наведених случајева, конструкцијом одговарајућих епиморфизама или употребом Фоксовог рачуна, долази се до закључка да је фундаментална група придруженог комплекса $K_\emptyset$ некомутативна, па стога овај комплекс није хомотопски еквивалентан 1-сфери. Међутим, неправилност структуре комплекса $K_\emptyset$ у овим случајевима има позитиван ефекат. Наиме, некомутативне фундаменталне групе обезбеђују нове некомутативне инваријанте поменутих циклотомичних полинома. Могући даљи развој истраживања у овом правцу односи се на испитивање сутруктуре комплекса $K_\emptyset$ и $K_{\{j\}}$ придруженог полиному $\Phi_{pqr}(x)$ када је $r \leq pq - p - q$ или $r \equiv k \,(\ \mathrm{mod}\ pq)$, где $k \notin \{1, pq-1\}$, чиме би се комплетирала тополошка интерпретација циклотомичних полинома.

У другом делу ове тезе изучавани су симплицијални комплекси придружени иредуцибилним карактерима коначних решивих некомутативних група. Разматрају се два типа симплицијалних комплекса – комплекс заједничког делиоца $\mathcal{G}(G)$ и комплекс простих делилаца $\mathcal{D}(G)$, које је увела Сара Јенсен у раду [17]. У теореми 8.2 ове дисертације показано је да су ова два симплицијална комплекса заправо хомотопски еквивалентна.

Нагласимо да се добијени резултат односи на хомотопску еквиваленцију комплекса заједничког делиоца и комплекса простих делилаца придружених било којем коначном скупу природних бројева, који не мора бити нужно скуп иредуцибилних карактера коначне некомутативне решиве групе. У раду [17] такође се разматра и поткомплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ комплекса $\mathcal{G}(G)$ који се састоји из pd-максималних елемената скупа $\mathrm{cd}(G) \setminus 1$. Ауторка показује да у случају коначне решиве некомутативне групе комплекс $\mathcal{G}(\Omega)$ има специфичну структуру што даље даје ограничење ранга фундаменталне групе комплекса $\mathcal{G}(G)$ (теорема 3.4 у [17]). Претходни резултати могу се искористити као критеријум за одређивање да ли је коначна група решива или не. Међутим, теорема 8.5 ове дисертације показује да граница ранга фундаменталне групе $\pi_1(\mathcal{G}(G))$ дата у раду [17] може бити побољшана, чиме се додатно прецизира критеријум по коме је неки симплицијални комплекс комплекс заједничког делитеља неке коначне решиве групе. У поглављу 8.2 даје се и оцена фундаменталне групе из угла броја темена комплекса $\mathcal{D}(G)$ (теорема 8.6). Ова оцена обезбеђује да се поједини симплицијални комплекси елиминишу као комплекси простих делилаца коначне некомутативне решиве групе. Нерешено питање остаје да ли се граница ранга фундаменталне групе $\pi_1(\mathcal{G}(G))$ дата у теореми 8.5 може достићи, односно да ли је то најбоља могућа граница. Исто питање важи и за границу ранга фундаменталне групе $\pi_1(\mathcal{D}(G))$ дату у теореми 8.6. Одговор на претходна питања могао би се дати конструкцијом коначне решиве групе која има одговарајући скуп иредуцибилних карактера. На крају, намеће се питање да ли би било корисно комплекс заједничког делиоца и комплекс простих делилаца испитивати у контексту неког другог алгебарског објекта који није коначна некомутативна решива група.

Додатак A

Итеративни поступци редукције и софтверска решења

A.1 Итеративни поступци редукције

У овом поглављу дајемо детаље итеративних поступака редукције броја генератора и релатора група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ и $G(K_{\{7\}}, L)$ придружених полиному $\Phi_{105}(x)$, као и групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ придружене полиному $\Phi_{165}(x)$.

Група $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$ придружена полиному $\Phi_{105}(x)$

Почетни генератори:

$[0,3]$, $[0,6]$, $[0,11]$, $[0,12]$, $[0,14]$, $[1,4]$, $[1,5]$, $[1,8]$, $[1,9]$, $[1,10]$, $[1,13]$, $[2,4]$, $[2,5]$, $[2,6]$, $[2,7]$, $[2,8]$, $[2,9]$, $[2,10]$, $[2,11]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[3,9]$, $[3,10]$, $[3,12]$, $[3,14]$, $[4,8]$, $[4,10]$, $[4,11]$, $[4,13]$, $[5,9]$, $[5,11]$, $[5,12]$, $[5,14]$, $[6,8]$, $[6,10]$, $[6,12]$, $[6,13]$, $[7,8]$, $[7,9]$, $[7,11]$, $[7,13]$, $[7,14]$

Почетни релатори:

$[7,8]\cdot[1,8]^{-1}$, $[3,9]\cdot[2,9]^{-1}$, $[4,10]$, $[1,5]\cdot[5,11]$, $[2,6]\cdot[6,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[7,13]$, $[3,14]$, $[2,4]\cdot[4,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[5,9]$, $[6,10]\cdot[1,10]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,11]\cdot[2,11]^{-1}$, $[0,3]\cdot[3,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[1,4]\cdot[4,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,5]\cdot[5,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[0,6]\cdot[6,8]$, $[7,9]\cdot[1,9]^{-1}$, $[3,10]\cdot[2,10]^{-1}$, $[4,11]\cdot[0,11]^{-1}$, $[1,5]\cdot[5,12]$, $[2,6]\cdot[6,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[7,14]\cdot[0,14]^{-1}$, $[7,8]$, $[3,9]\cdot[1,9]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,10]\cdot[2,10]^{-1}$, $[5,11]\cdot[0,11]^{-1}$, $[6,12]$, $[2,7]\cdot[7,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[0,3]\cdot[3,14]\cdot[0,14]^{-1}$, $[1,4]\cdot[4,8]$, $[2,5]\cdot[5,9]\cdot[2,9]^{-1}$, $[0,6]\cdot[6,10]$, $[7,11]$, $[3,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[4,13]$, $[1,5]\cdot[5,14]$, $[2,6]\cdot[6,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[7,9]$, $[3,10]\cdot[1,10]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,11]\cdot[2,11]^{-1}$, $[5,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[6,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}$

Корак 1-6: Елиминација тривијалних генератора.

Корак 1: $[3,14]$, $[4,10]$, $[4,13]$, $[5,9]$, $[6,12]$, $[7,8]$,$[7,9]$, $[7,11]$, $[7,13]$
Корак 2: $[1,8]$
Корак 3: $[1,9]$
Корак 4: $[3,9]$
Корак 5: $[2,9]$
Корак 6: $[2,5]$

Преостали генератори:

$[0,3]$, $[0,6]$, $[0,11]$, $[0,12]$, $[0,14]$, $[1,4]$, $[1,5]$, $[1,10]$, $[1,13]$, $[2,4]$, $[2,6]$, $[2,7]$, $[2,8]$, $[2,10]$, $[2,11]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[3,10]$, $[3,12]$, $[4,8]$, $[4,11]$, $[5,11]$, $[5,12]$, $[5,14]$, $[6,8]$, $[6,10]$, $[6,13]$, $[7,14]$

Преостали релатори:
$[1,5]\cdot[5,11]$, $[2,6]\cdot[2,12]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[6,10]\cdot[1,10]^{-1}$, $[2,7]\cdot[2,11]^{-1}$, $[0,3]\cdot[3,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[1,4]\cdot[1,13]^{-1}$, $[5,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[0,6]\cdot[6,8]$, $[3,10]\cdot[2,10]^{-1}$, $[4,11]\cdot[0,11]^{-1}$, $[1,5]\cdot[5,12]$, $[2,6]\cdot[6,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[7,14]\cdot[0,14]^{-1}$, $[2,4]\cdot[2,10]^{-1}$, $[5,11]\cdot[0,11]^{-1}$, $[2,7]\cdot[2,13]^{-1}$, $[0,3]\cdot[0,14]^{-1}$, $[1,4]\cdot[4,8]$, $[0,6]\cdot[6,10]$, $[3,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[1,5]\cdot[5,14]$, $[2,6]\cdot[6,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[3,10]\cdot[1,10]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,11]\cdot[2,11]^{-1}$, $[5,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[6,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}$

Корак 7-32: Редукција броја генератора изржавањем неких генератора преко осталих генератора.

Корак 7: $[1,5]=[5,11]^{-1}$
Корак 8: $[2,6]=[2,12]$
Корак 9: $[6,10]=[1,10]$
Корак 10: $[2,7]=[2,11]$
Корак 11: $[1,4]=[1,13]$
Корак 12: $[0,6]=[6,8]^{-1}$
Корак 13: $[3,10]=[2,10]$
Корак 14: $[4,11]=[0,11]$

Преостали генератори:
$[0,3]$, $[0,11]$, $[0,12]$, $[0,14]$, $[1,10]$, $[1,13]$, $[2,4]$, $[2,8]$, $[2,10]$, $[2,11]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[3,12]$,$[4,8]$, $[5,11]$, $[5,12]$, $[5,14]$, $[6,8]$, $[6,13]$, $[7,10]$, $[7,12]$, $[7,14]$

Преостали релатори:
$[2,4]\cdot[4,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[0,3]\cdot[3,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[5,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[5,11]^{-1}\cdot[5,12]$, $[2,12]\cdot[6,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[7,14]\cdot[0,14]^{-1}$, $[2,4]\cdot[2,10]^{-1}$, $[5,11]\cdot[0,11]^{-1}$, $[2,11]\cdot[2,13]^{-1}$, $[0,3]\cdot[0,14]^{-1}$, $[1,13]\cdot[4,8]$, $[6,8]^{-1}\cdot[1,10]$, $[3,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[5,11]^{-1}\cdot[5,14]$, $[2,12]\cdot[6,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[2,10]\cdot[1,10]^{-1}$, $[2,4]\cdot[0,11]\cdot[2,11]^{-1}$, $[5,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[6,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,11]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}$

Корак 15: $[5,12]=[5,11]$
Корак 16: $[7,14]=[0,14]$
Корак 17: $[2,4]=[2,10]$
Корак 18: $[5,11]=[0,11]$
Корак 19: $[2,11]=[2,13]$
Корак 20: $[0,3]=[0,14]$
Корак 21: $[1,10]=[6,8]$
Корак 22: $[3,12]=[2,12]$

Преостали генератори:
$[0,11]$, $[0,12]$, $[0,14]$, $[1,13]$, $[2,8]$, $[2,10]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[4,8]$, $[5,14]$, $[6,8]$, $[6,13]$

Преостали релатори:
$[2,10]\cdot[4,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[0,14]\cdot[2,12]\cdot[0,12]^{-1}$, $[5,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[2,12]\cdot[6,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[1,13]\cdot[4,8]$, $[0,11]^{-1}\cdot[5,14]$, $[2,12]\cdot[6,8]\cdot[2,8]^{-1}$, $[2,10]\cdot[6,8]^{-1}$, $[2,10]\cdot[0,11]\cdot[2,13]^{-1}$, $[0,11]\cdot[0,12]^{-1}$, $[6,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,13]\cdot[0,14]\cdot[2,14]^{-1}$

Корак 23: $[5,14]=[0,11]$
Корак 24: $[2,10]=[6,8]$

Корак 25: $[0, 11] = [0, 12]$
Корак 26: $[6, 13] = [1, 13]$
Корак 27: $[1, 13] = [4, 8]^{-1}$

Преостали генератори:
$[0, 12]$, $[0, 14]$, $[2, 8]$, $[2, 12]$, $[2, 13]$, $[2, 14]$, $[4, 8]$, $[6, 8]$

Преостали релатори:
$[6, 8] \cdot [4, 8] \cdot [2, 8]^{-1}$, $[0, 14] \cdot [2, 12] \cdot [0, 12]^{-1}$, $[0, 12] \cdot [2, 14]^{-1}$, $[2, 12] \cdot [4, 8]^{-1} \cdot [2, 13]^{-1}$, $[2, 12] \cdot [6, 8] \cdot [2, 8]^{-1}$, $[6, 8] \cdot [0, 12] \cdot [2, 13]^{-1}$, $[2, 13] \cdot [0, 14] \cdot [2, 14]^{-1}$

Корак 28: $[0, 12] = [2, 14]$
Корак 29: $[6, 8] = [2, 8] \cdot [4, 8]^{-1}$
Корак 30: $[0, 14] = [2, 14] \cdot [2, 12]^{-1}$
Корак 31: $[2, 12] = [2, 13] \cdot [4, 8]$

Преостали генератори:
$[2, 8]$, $[2, 13]$, $[2, 14]$, $[4, 8]$

Преостали релатори:
$[2, 13] \cdot [4, 8] \cdot [2, 8] \cdot [4, 8]^{-1} \cdot [2, 8]^{-1}$, $[2, 8] \cdot [4, 8]^{-1} \cdot [2, 14] \cdot [2, 13]^{-1}$, $[2, 13] \cdot [2, 14] \cdot [4, 8]^{-1} \cdot [2, 13]^{-1} \cdot [2, 14]^{-1}$

Корак 32: $[2, 8] = [2, 13] \cdot [2, 14]^{-1} \cdot [4, 8]$

Преостали генератори:
$[2, 13]$, $[2, 14]$, $[4, 8]$

Преостали релатори:
$[2, 13] \cdot [4, 8] \cdot [2, 13] \cdot [2, 14]^{-1} \cdot [4, 8]^{-1} \cdot [2, 14] \cdot [2, 13]^{-1}$, $[2, 13] \cdot [2, 14] \cdot [4, 8]^{-1} \cdot [2, 13]^{-1} \cdot [2, 14]^{-1}$

Корак 32: $[4, 8] = [2, 13]^{-1} \cdot [2, 14]^{-1} \cdot [2, 13] \cdot [2, 14]$

Преостали генератори:
$[2, 13]$, $[2, 14]$

Преостали релатор:
$[2, 14]^{-1} \cdot [2, 13] \cdot [2, 14] \cdot [2, 13] \cdot [2, 14]^{-2} \cdot [2, 13]^{-1} \cdot [2, 14] \cdot [2, 13] \cdot [2, 14] \cdot [2, 13]^{-1}$

Закључујемо да је

$G(\widetilde{K}_{\emptyset}, L) = \langle\, [2, 13], [2, 14] \mid [2, 14]^{-1} \cdot [2, 13] \cdot [2, 14] \cdot [2, 13] \cdot [2, 14]^{-2} \cdot [2, 13]^{-1} \cdot [2, 14] \cdot [2, 13] \cdot [2, 14] \cdot [2, 13]^{-1} = 1 \,\rangle.$

Група $G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L)$ придружена полиному $\Phi_{105}(x)$

Група $G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L)$ има исте генераторе и релаторе као и група $\widetilde{K}_{\emptyset}$ уз један додатни генератор $[5, 8]$ и два додатна релатора

$$[2, 5] \cdot [5, 8] \cdot [2, 8]^{-1} \quad \text{и} \quad [1, 5] \cdot [5, 8] \cdot [1, 8]^{-1}.$$

На основу итеративног процеса за поједностављење презентације групе $G(\widetilde{K}_{\emptyset}, L)$, важи да је $[2, 5] = 1$. Према томе, из релације $[2, 5] \cdot [5, 8] \cdot [2, 8]^{-1} = 1$ следи да је

$$[5, 8] = [2, 8] = [2, 13] \cdot [2, 14]^{-1} \cdot [4, 8] = [2, 13] \cdot [2, 14]^{-1} \cdot [2, 13]^{-1} \cdot [2, 14]^{-1} \cdot [2, 13] \cdot [2, 14].$$

Такође, како је $[1,8]=1$ и $[1,5]\cdot[5,8]\cdot[1,8]^{-1}=1$, следи да је

$$[5,8]=[1,5]^{-1}=[5,11]=[0,11]=[0,12]=[2,14].$$

На основу претходног,

$$[2,13]\cdot[2,14]^{-1}\cdot[2,13]^{-1}\cdot[2,14]^{-1}\cdot[2,13]=1.$$

Дакле, генератори групе $G(\widetilde{K}_{\{7\}},L)$ су $[2,13]$ и $[2,14]$, а релације

$$[2,14]^{-1}\cdot[2,13]\cdot[2,14]\cdot[2,13]\cdot[2,14]^{-2}\cdot[2,13]^{-1}\cdot[2,14]\cdot[2,13]\cdot[2,14]\cdot[2,13]^{-1}=1,$$
$$[2,13]\cdot[2,14]^{-1}\cdot[2,13]^{-1}\cdot[2,14]^{-1}\cdot[2,13]=1.$$

Група $G(\widetilde{K}_{\emptyset},L)$ придружена полиному $\Phi_{165}(x)$

Почетни генератори:

$[1,4]$, $[1,5]$, $[1,6]$, $[1,7]$, $[1,12]$, $[1,13]$, $[1,14]$, $[1,15]$, $[1,16]$, $[1,17]$, $[1,18]$, $[2,4]$, $[2,5]$, $[2,6]$, $[2,7]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[2,15]$, $[2,16]$, $[2,17]$, $[2,18]$, $[3,14]$, $[3,15]$, $[3,16]$, $[4,12]$, $[4,15]$, $[4,16]$, $[4,17]$, $[5,12]$, $[5,13]$, $[5,16]$, $[5,17]$, $[5,18]$, $[6,12]$, $[6,13]$, $[6,14]$, $[6,17]$, $[6,18]$, $[7,13]$, $[7,14]$, $[7,15]$, $[7,18]$

Почетни релатори:

$[4,12]$, $[1,5]\cdot[5,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,6]\cdot[6,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[7,15]$, $[3,16]\cdot[1,16]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,17]\cdot[2,17]^{-1}$, $[5,18]$, $[2,5]\cdot[5,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[6,13]$, $[1,7]\cdot[7,14]\cdot[1,14]^{-1}$, $[3,15]\cdot[2,15]^{-1}$, $[4,16]$, $[1,5]\cdot[5,17]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,6]\cdot[6,18]\cdot[2,18]^{-1}$, $[1,6]\cdot[6,12]\cdot[1,12]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[3,14]$, $[1,4]\cdot[4,15]\cdot[1,15]^{-1}$, $[2,5]\cdot[5,16]\cdot[2,16]^{-1}$, $[6,17]\cdot$, $[1,7]\cdot[7,18]\cdot[1,18]^{-1}$, $[1,4]\cdot[4,12]\cdot[1,12]^{-1}$, $[2,5]\cdot[5,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[6,14]$, $[1,7]\cdot[7,15]\cdot[1,15]^{-1}$, $[3,16]\cdot[2,16]^{-1}$, $[4,17]$, $[1,5]\cdot[5,18]\cdot[1,18]^{-1}$, $[5,12]$, $[1,6]\cdot[6,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[3,15]$, $[1,4]\cdot[4,16]\cdot[1,16]^{-1}$, $[2,5]\cdot[5,17]\cdot[2,17]^{-1}$, $[6,18]$, $[2,6]\cdot[6,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[7,13]$, $[3,14]\cdot[1,14]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,15]\cdot[2,15]^{-1}$, $[5,16]$, $[1,6]\cdot[6,17]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}$

Корак 1-2: Елиминација тривијалних генератора.

Корак 1: $[4,12]$, $[7,15]$, $[5,18]$, $[6,13]$, $[4,16]$, $[3,14]$, $[6,17]$, $[6,14]$, $[4,17]$, $[5,12]$, $[3,15]$, $[6,18]$, $[7,13]$, $[5,16]$
Корак 2: $[2,15]$, $[1,14]$

Преостали генератори:

$[1,4]$, $[1,5]$, $[1,6]$, $[1,7]$, $[1,12]$, $[1,13]$, $[1,15]$, $[1,16]$, $[1,17]$, $[1,18]$, $[2,4]$, $[2,5]$, $[2,6]$, $[2,7]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[2,16]$, $[2,17]$, $[2,18]$, $[3,16]$, $[4,15]$, $[5,13]$, $[5,17]$, $[6,12]$, $[7,14]$, $[7,18]$

Преостали релатори:

$[1,5]\cdot[5,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,6]\cdot[2,14]^{-1}$, $[3,16]\cdot[1,16]^{-1}$, $[2,4]\cdot[2,17]^{-1}$, $[2,5]\cdot[2,12]^{-1}$, $[1,7]\cdot[7,14]$, $[1,5]\cdot[5,17]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,6]\cdot[2,18]^{-1}$, $[1,6]\cdot[6,12]\cdot[1,12]^{-1}$, $[2,7]\cdot[2,13]^{-1}$, $[1,4]\cdot[4,15]\cdot[1,15]^{-1}$, $[2,5]\cdot[2,16]^{-1}$, $[1,7]\cdot[7,18]\cdot[1,18]^{-1}$, $[1,4]\cdot[1,12]^{-1}$, $[2,5]\cdot[5,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[1,7]\cdot[1,15]^{-1}$, $[3,16]\cdot[2,16]^{-1}$, $[1,5]\cdot[1,18]^{-1}$, $[1,6]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[1,4]\cdot[1,16]^{-1}$, $[2,5]\cdot[5,17]\cdot[2,17]^{-1}$, $[2,6]\cdot[6,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[2,4]\cdot[4,15]\cdot^{-1}$, $[1,6]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}$

Корак 3-27: Редукција броја генератора изржавањем неких генератора преко осталих генератора.

Корак 3: $[2,6] = [2,14]$
Корак 4: $[3,16] = [1,16]$
Корак 5: $[2,4] = [2,17]$
Корак 6: $[2,5] = [2,12]$

Преостали генератори:
$[1,4]$, $[1,5]$, $[1,6]$, $[1,7]$, $[1,12]$, $[1,13]$, $[1,15]$, $[1,16]$, $[1,17]$, $[1,18]$, $[2,7]$, $[2,12]$, $[2,13]$, $[2,14]$, $[2,16]$, $[2,17]$, $[2,18]$, $[4,15]$, $[5,13]$, $[5,17]$, $[6,12]$, $[7,14]$, $[7,18]$

Преостали релатори:
$[1,5]\cdot[5,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[1,7]\cdot[7,14]$, $[1,5]\cdot[5,17]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,14]\cdot[2,18]^{-1}$, $[1,6]\cdot[6,12]\cdot[1,12]^{-1}$, $[2,7]\cdot[2,13]^{-1}$, $[1,4]\cdot[4,15]\cdot[1,15]^{-1}$, $[2,12]\cdot[2,16]^{-1}$, $[1,7]\cdot[7,18]\cdot[1,18]^{-1}$, $[1,4]\cdot[1,12]^{-1}$, $[2,12]\cdot[5,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[1,7]\cdot[1,15]^{-1}$, $[1,16]\cdot[2,16]^{-1}$, $[1,5]\cdot[1,18]^{-1}$, $[1,6]\cdot[1,13]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,14]\cdot[2,14]^{-1}$, $[1,4]\cdot[1,16]^{-1}$, $[2,12]\cdot[5,17]\cdot[2,17]^{-1}$, $[2,14]\cdot[6,12]\cdot[2,12]^{-1}$, $[2,17]\cdot[4,15]$, $[1,6]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,7]\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}$

Корак 7: $[2,14] = [2,18]$
Корак 8: $[2,7] = [2,13]$
Корак 9: $[2,12] = [2,16]$
Корак 10: $[1,4] = [1,12]$
Корак 11: $[1,7] = [1,15]$
Корак 12: $[1,16] = [2,16]$
Корак 13: $[1,5] = [1,18]$
Корак 14: $[1,6] = [1,13]$

Преостали генератори:
$[1,12]$, $[1,13]$, $[1,15]$, $[1,17]$, $[1,18]$, $[2,13]$, $[2,16]$, $[2,17]$, $[2,18]$, $[4,15]$, $[5,13]$, $[5,17]$, $[6,12]$, $[7,14]$, $[7,18]$

Преостали релатори:
$[1,18]\cdot[5,13]\cdot[1,13]^{-1}$, $[1,15]\cdot[7,14]$, $[1,18]\cdot[5,17]\cdot[1,17]^{-1}$, $[1,13]\cdot[6,12]\cdot[1,12]^{-1}$, $[1,12]\cdot[4,15]\cdot[1,15]^{-1}$, $[1,15]\cdot[7,18]\cdot[1,18]^{-1}$, $[2,16]\cdot[5,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[2,13]\cdot[7,14]\cdot[2,18]^{-1}$, $[1,12]\cdot[2,16]^{-1}$, $[2,16]\cdot[5,17]\cdot[2,17]^{-1}$, $[2,18]\cdot[6,12]\cdot[2,16]^{-1}$, $[2,17]\cdot[4,15]$, $[1,13]\cdot[1,17]^{-1}$, $[2,13]\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}$

Корак 15: $[1,12] = [2,16]$
Корак 16: $[1,13] = [1,17]$
Корак 17: $[1,15] = [7,14]^{-1}$
Корак 18: $[2,17] = [4,15]^{-1}$

Преостали генератори:
$[1,17]$, $[1,18]$, $[2,13]$, $[2,16]$, $[2,18]$, $[4,15]$, $[5,13]$, $[5,17]$, $[6,12]$, $[7,14]$, $[7,18]$

Преостали релатори:
$[1,18]\cdot[5,13]\cdot[1,17]^{-1}$, $[1,18]\cdot[5,17]\cdot[1,17]^{-1}$, $[1,17]\cdot[6,12]\cdot[2,16]^{-1}$, $[2,16]\cdot[4,15]\cdot[7,14]$, $[7,14]^{-1}\cdot[7,18]\cdot[1,18]^{-1}$, $[2,16]\cdot[5,13]\cdot[2,13]^{-1}$, $[2,13]\cdot[7,14]\cdot[2,18]^{-1}$, $[2,16]\cdot[5,17]\cdot[4,15]$, $[2,18]\cdot[6,12]\cdot[2,16]^{-1}$, $[2,13]\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}$

Корак 19: $[1,18] = [1,17]\cdot[5,13]^{-1}$
Корак 20: $[1,17] = [2,16]\cdot[6,12]^{-1}$
Корак 21: $[2,16] = [7,14]^{-1}[4,15]^{-1}$
Корак 22: $[2,13] = [2,18]\cdot[7,14]^{-1}$

Преостали генератори:
$[2,18]$, $[4,15]$, $[5,13]$, $[5,17]$, $[6,12]$, $[7,14]$, $[7,18]$

Преостали релатори:
$[4,15]^{-1}\cdot[6,12]^{-1}\cdot[5,13]^{-1}\cdot[5,17]\cdot[6,12]\cdot[4,15]$, $[7,14]^{-1}\cdot[7,18]\cdot[5,13]\cdot[6,12]\cdot[4,15]\cdot[7,14]$, $[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}\cdot[5,13]\cdot[7,14]\cdot[2,18]^{-1}$, $[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}\cdot[5,17]\cdot[4,15]$, $[2,18]\cdot[6,12]\cdot[4,15]\cdot[7,14]$, $[2,18]\cdot[7,14]^{-1}\cdot[7,18]\cdot[2,18]^{-1}$

Корак 23: $[7,18]=[7,14]$
Корак 24: $[5,17]=[4,15]\cdot[7,14]\cdot[4,15]^{-1}$
Корак 25: $[2,18]=[7,14]^{-1}[4,15]^{-1}\cdot[6,12]^{-1}$

Преостали генератори:
$[4,15]$, $[5,13]$, $[6,12]$, $[7,14]$

Преостали релатори:
$[5,13]^{-1}\cdot[4,15]\cdot[7,14]\cdot[4,15]^{-1}$, $[5,13]\cdot[6,12]\cdot[4,15]\cdot[7,14]$, $[5,13]\cdot[7,14]\cdot[6,12]$

Корак 26: $[5,13]=[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}\cdot[6,12]^{-1}$

Преостали генератори:
$[4,15]$, $[6,12]$, $[7,14]$

Преостали релатори:
$[6,12]\cdot[4,15]\cdot[7,14]\cdot[4,15]\cdot[7,14]\cdot[4,15]^{-1}$, $[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}\cdot[6,12]^{-1}\cdot[7,14]\cdot[6,12]$

Корак 27: $[6,12]=[4,15]\cdot[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}\cdot[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}$

Преостали генератори:
$[4,15]$, $[7,14]$

Преостали релатори:
$[4,15]^{-1}\cdot[7,14]\cdot[4,15]\cdot[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-1}$

Дакле,
$$G(\widetilde{K}_\emptyset,L)=\left\langle\,[4,15],[7,14]\mid[7,14]\cdot[4,15]\cdot[7,14]^{-1}\cdot[4,15]^{-2}=1\,\right\rangle.$$

A.2 Софтверска решења

A.2.1 Алгоритам редукције

Приликом испитивања симплицијалних комплекса придружених циклотомичним полиномима сусрећемо се са испитивањем фундаменталних група које су генерисане великим бројем генератора и релација. Комплексност презентације (тј. број генератора и релација) расте са порастом степена циклотомичног полинома. Већ у случају комплекса придружених полиномима $\Phi_{105}(x)$ и $\Phi_{165}(x)$ фундаменталне групе имају доста компликовану презентацију, у шта смо се могли уверити у поглављу A.1. Ради лакше даље анализе ових група, пожељно је поједноставити њихову презентацију. У овом поглављу дајемо софтверско решење алгоритма 1 написано у програмском пакету *Wolfram Mathematica 12.1* којим се број генератора и релација неке фундаменталне групе може значајно редуковати.

Функција redukcija на основу листе gens која одговара листи 1-симплекса, листе rels која одговара листи 2-симлекса неког комплекса K и листе stablo која одговара неком максималном разапињућем стаблу у комплексу K враћа редуковану презентацију групе $\pi_1(K)$.

```
redukcija[gens_, rels_, stablo_]:=(
 Block[{zamena, relatori, genaratori, jedinicni, k, j, d},
  relatori=rels;
  generatori=jedanSimpleksiString[gens];

  (* brisanje razapinjuceg stabla *)
  relatori=obrisi[relatori, stablo];
  generatori=Complement[generatori, stablo];

  (* brisanje trivijalnih generatora *)
  {relatori, jedinicni}=obrisiJedinicne[relatori];
  generatori=Complement[generatori, jedinicni];

  (* smanjenje broja relacija i generatora izrazhavanjem nekih generatora
    preko ostalih *)
  While[Length[relatori]>1 && Length[zaZamenu[relatori]]==3,
   k=zaZamenu[relatori];
   zamena=izrazi[relatori, k];
   relatori=Delete[relatori, k[[1]]];
   For[d=1, d<=Length[relatori], d++,
    relatori[[d]]=zameni[relatori[[d]], Join[{zamena[[1,1]]}, zamena[[2]]]];
    relatori[[d]]=sredi[relatori[[d]]];
   ];

   relator=Sort[relatori, Length[#1]<=Length[#2] &];
   For[d=1, d<=Length[relatori], d++,
    relatori[[d]]=sredi[relatori[[d]]]];
    generatori=Delete[generatori, Position[generatori, zamena[[1,1]]]
   ];

   {relatori, jedinicni}=obrisiJedinicne[relatori];
   If[Length[jedinicni]!=0, generatori = Complement[generatori, jedinicni]];

   relatori=Sort[relatori, Length[#1] <= Length[#2] &];
   For[d=1, d<=Length[relatori], d++, relatori[[d]]=sredi[relatori[[d]]]]
  ];

  (* uredjivanje prikaza relacija *)
  For[d=1, d<=Length[relatori], d++, relatori[[d]]=sredi[relatori[[d]]]];
  For[j=1, j<=Length[relatori], j++, relatori[[j]]=srediKrajeve[relatori[[j]]]];
  Print["genaratori redukovane fundamentalne grupe: \n", generatori];
  Print["relatori redukovane fundamentalne grupe:"];
  Print[Grid[prikaziRelacije[relatori], Alignment -> Left, Spacings -> {4, 1}]];
 ]
)
```

Помоћне функције коришћене у функцији redukcija:

```
(* zapis relacija u obliku stringova *)
relacije[l2sim_]:=(
 Block[{i, r},
  r = {};
  For[i = 1, i <= Length[l2sim], i++,
```

```
    r=Append[r, {StringJoin[ToString[l2sim[[i,1]]], ToString[l2sim[[i,2]]]], {1},
        StringJoin[ToString[l2sim[[i,2]]], ToString[l2sim[[i,3]]]], {1},
        StringJoin[ToString[l2sim[[i,1]]], ToString[l2sim[[i,3]]]], {-1}}]
   ];
   Return[r]
  ]
)

(* ispis relacija *)
prikaziRelacije[relacije_]:=(
 Block[{i, j, ispis, kolona},
   ispis={};
   For[i=1, i<=Length[relacije], i++,
    kolona={};
    For[j=1, j<=Length[relacije[[i]]], j=j + 2,
     kolona=Append[kolona, relacije[[i]][[j]]^relacije[[i,j+1]][[1]]]];
    kolona=Append[kolona, "= 1"];
    ispis=Append[ispis, kolona];
   ];
   Return[ispis];
  ]
)

(* zamena pojavljivanja generatora zanema[[1]] u relaciji relacija ostatkom
 liste zamena*)
zameni[relacija_, zamena_]:=(
 Block[{i, j, r, novaR, step, k, d},
   r = relacija;
   novaR={};
   For[i=1, i<=Length[r], i=i+2,
    If[r[[i]]==zamena[[1]], step=r[[i+1,1]];
     If[step>=0,
      For[d=1, d<=step, d++,
       k=2;
       For[j=1, j<=Length[zamena]-1, j=j+2,
        novaR=Append[Append[novaR, zamena[[k]]], zamena[[k+1]]];
        k=k+2;
       ];
      ];
     ];
     If[step<=-1,
      For[d=1, d<=-step, d++,
       k=Length[zamena]-1;
       For[j=Length[zamena], j>=2, j=j-2,
        novaR=Append[Append[novaR, zamena[[k]]], -zamena[[k+1]]];
        k=k-2;
       ];
      ];
     ],
     novaR=Append[Append[novaR, r[[i]]], r[[i+1]]];
    ];
   ];
   Return[novaR];
  ]
)

(* zapis generatora u obliku stringova *)
```

```
jedanSimpleksiString[l1sim_]:=(
 Block[{i, r},
  r = {};
  For[i=1, i<=Length[l1sim], i++,
   r=Append[r, StringJoin[ToString[l1sim[[i,1]]], ToString[l1sim[[i,2]]]]];
  ];
  Return[r];
 ]
)

(* uredjuje zapis relacije tako da se isti generatori ne pojavljuju uzastopno *)
sredi[relacija_]:=(
 Block[{r, indexJedinica, jedinice, d, zaBrisanje, i},
  r=relacija;
  zaBrisanje={};
  For[i=1, i<=Length[r]-2, i=i+2,
   If[r[[i]]==r[[i + 2]], r[[i+3]]=r[[i+3]]+r[[i+1]];
   zaBrisanje=Union[zaBrisanje, {{i}, {i + 1}}]];
  ];
  r=Delete[r, zaBrisanje];
  indexJedinica=Position[r, {0}];
  jedinice=Union[indexJedinica-1, indexJedinica];
  r=Delete[r,jedinice];
  Return[r];
 ]
)

(* uredjivanje relacije u chijem su zapisu prvi i poslednji generator isti *)
srediKrajeve[relacije_]:=(
 Block[{r, d},
  r=relacije;
  d=Length[relacije];
  If[d==0,Return[r]];
  While[r[[1]]==r[[d-1]] && d>=4,
   If[r[[2,1]]==-r[[d,1]], r=Delete[r, {{1}, {2}, {d-1}, {d}}],
    If[r[[2,1]]<-r[[d,1]], r[[d,1]] = r[[d,1]] + r[[2,1]];
     r=Delete[r, {{1}, {2}}],
     r[[2,1]] = r[[2,1]] + r[[d,1]];
     r=Delete[r, {{d-1}, {d}}],
    ];
   ];
   d=Length[r];
   If[d==0, Return[r]];
  ];
  Return[r];
 ]
)

(*pronalazenje prvog element u nizu relacija koji moze da se izrazi preko ostalih
 i vracanje rednog broj relacije, rednog broja elementa u okviru relacije i
 indikatora da li se u toj relaciji element pojavljuje kao inverz ili ne *)
zaZamenu[relacije_]:=(
 Block[{i, j, b, pp1, pp2, prethodni},
  For[i=1, i<=Length[relacije], i++,
   pp1=Position[relacije[[i]], {1}];
   For[j=1, j<=Length[pp1], j++,
    prethodni = relacije[[i,pp1[[j,1]]-1]];
```

```
      b=Position[relacije[[i]], prethodni];
      If[Length[b]==1, Return[{i, b[[1,1]], 1}]]
     ];
    pp2=Position[relacije[[i]], {-1}];
    For[j=1, j<=Length[pp2], j++,
      prethodni=relacije[[i, pp2[[j,1]]-1]];
      b = Position[relacije[[i]], prethodni];
      If[Length[b]==1, Return[{i, b[[1,1]], -1}]]
      ];
     ];
   Return[0];
  ]
)

(* brisanje generatora iz liste stablo u relacijama koje priladajulisti
   relacije *)
obrisi[relacije_, stablo_]:=(
 Block[{i, j, r, rNove, vrsta},
   r=relacije;
   rNove={};
   For[i=1, i<=Length[r], i=i+1,
    vrsta={};
    For[j=1, j<=Length[r[[i]]], j=j+2,
      If[MemberQ[stablo, r[[i,j]]]==False, vrsta=Append[vrsta, r[[i,j]]];
       vrsta=Append[vrsta, r[[i,j+1]]];
      ];
     ];
    rNove=Append[rNove, vrsta]
   ];
   Return[rNove];
  ]
)

(* nalazenje trivijalnih generatora *)
trazenjeJedinicnih[relacije_]:=(
 Block[{i, r, nejed, jed},
   r=relacije;
   nejed={};
   jed={};
   For[i=1, i<=Length[relacije], i++,
    If[!(Length[r[[i]]]==2 && (MemberQ[r[[i,2]], 1] || MemberQ[r[[i,2]], -1 ])),
      nejed = Append[nejed, r[[i]]],
      jed = Append[jed, r[[i,1]]]
     ];
   ];
   Return[{nejed, jed}];
  ]
)

(* brisanje pojavljivanja trivijalnih generatora u relacijama *)
obrisiJedinicne[relacije_]:=(
 Block[{r, obrisani, i, jed},
   r=relacije;
   obrisani={};
   jed=trazenjeJedinicnih[r];
   While[Length[jed[[2]]]>=1,
    r=jed[[1]];
```

```
    r=obrisi[r, jed[[2]]];
    obrisani=Join[obrisani, jed[[2]]];
    r=Sort[r, Length[#1]<=Length[#2] &];
    For[i=1, i<=Length[r], i++, r[[i]]=sredi[r[[i]]]];
     jed=trazenjeJedinicnih[r];
   ];
  Return[{r, obrisani}];
 ]
)

(*izrazavanje k[1]-vog elementa koji se nalazi u k[2]-goj relaciji preko ostalih
  elemenata te relacije*)
izrazi[relacije_, k_] := (
 Block[{element, inverzInd, ostatak, i, lo, t, j, zamena, pomocna},
  element=relacije[[k[[1]],k[[2]]]];
  inverzInd=k[[3]];
  If[inverzInd==1,
   ostatak=Delete[relacije[[k[[1]]]], {{k[[2]]}, {k[[2]]}+1}];
   For[i=2, i<=Length[ostatak], i=i+2, ostatak[[i]]=-ostatak[[i]]];
   lo=Length[ostatak];
   j=1;
   For[i=k[[2]], i<=k[[2]]+(lo-k[[2]])/2, i=i+2,
    t=ostatak[[i]];
    ostatak[[i]]=ostatak[[lo-j]];
    ostatak[[lo-j]]=t;
    t=ostatak[[i+1]];
    ostatak[[i+1]] = ostatak[[lo-j+1]];
    ostatak[[lo-j+1]]=t;
    j=j+2;
   ];
   j=2;
   For[i=1, i<k[[2]]/2, i=i+2,
    t=ostatak[[i]];
    ostatak[[i]]=ostatak[[k[[2]]-j]];
    ostatak[[k[[2]]-j]]=t;
    t=ostatak[[i+1]];
    ostatak[[i+1]]=ostatak[[k[[2]]-j+1]];
    ostatak[[k[[2]]-j+1]]=t;
    j=j+2;
   ];
   zamena=Join[{{element}}, {ostatak}];
  ];
  If[inverzInd==-1,
   pomocna=Delete[relacije[[k[[1]]]], {{k[[2]]}, {k[[2]]}+1}];
   ostatak={};
   For[i=k[[2]], i<=Length[pomocna], i++, ostatak=Append[ostatak, pomocna[[i]]]];
   For[i=1, i<=k[[2]]-1, i++, ostatak=Append[ostatak, pomocna[[i]]]];
   zamena=Join[{{element}}, {ostatak}];
   ];
  Return[zamena];
 ]
)
```

Пример А.1. Редукција фундаменталне групе $\pi_1(\widetilde{K}_\emptyset)$ за $n = 105$, тј. групе $G(\widetilde{K}_\emptyset, L)$, где је разапињуће стабло

$$L = \{[0,4],[0,5],[0,7],[0,8],[0,9],[0,10],[0,13],[1,3],[1,6],[1,7],[1,11],[1,12],[1,14],[2,3]\}.$$

Позив функције:

```
redukcija[{{0,3}, {0,4}, {0,5}, {0,6}, {0,7}, {0,8}, {0,9}, {0,10}, {0,11}, {0,12},
{0,13}, {0,14}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {1,7}, {1,8}, {1,9}, {1,10}, {1,11},
{1,12}, {1,13}, {1,14}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {2,7}, {2,8}, {2,9}, {2,10},
{2,11}, {2,12}, {2,13}, {2,14}, {3,9}, {3,10}, {3,12}, {3,14}, {4,8}, {4,10},
{4,11}, {4,13}, {5,9}, {5,11}, {5,12}, {5,14}, {6,8}, {6,10}, {6,12}, {6,13},
{7,8}, {7, 9}, {7, 11}, {7, 13}, {7,14}},
relacije[{{1,7,8}, {2,3,9}, {0,4,10}, {1,5,11}, {2,6,12}, {0,7,13}, {1,3,14},
 {2,4,8}, {0,5,9}, {1,6,10}, {2,7,11}, {0,3,12},  {1,4,13}, {2,5,14}, {0,6,8},
 {1,7,9}, {2,3,10}, {0,4,11}, {1,5,12}, {2,6,13}, {0,7,14}, {0,7,8}, {1,3,9},
 {2,4,10}, {0,5,11}, {1,6,12}, {2,7,13}, {0,3,14},{1,4,8}, {2,5,9}, {0,6,10},
 {1,7,11}, {2,3,12}, {0,4,13}, {1,5,14}, {2,6,8},{0,7,9}, {1,3,10}, {2,4,11},
 {0,5,12}, {1,6,13}, {2,7,14}}],
{"04", "05", "07", "08", "09", "010", "013", "13", "16", "17", "111", "112",
 "114", "23"}]
```

Резултат извршавања функције:

genaratori redukovane fundamentalne grupe:
{213, 214}

relatori redukovane fundamentalne grupe:

$$\frac{1}{214}\ \ 213\ \ 214\ \ 213\ \ \frac{1}{214^2}\ \ \frac{1}{213}\ \ 214\ \ 213\ \ 214\ \ \frac{1}{213}\ \ =\ \ 1$$

A.2.2 Александерова матрица

Редукована фундаментална група често има мали број релација, али су те релације компликоване структуре. Уколико је потребно израчунати Александерову матрицу такве групе ручно израчунавање извода постаје изузетно захтевно. Из тог разлога у наставку дајемо софтверско решење алгоритма 2 којим је аутоматизован процес рачунања Александерове матрице. Алгоритам је реализован у програмском пакету *Wolfram Mathematica 12.1.*

```
Izvod[izraz_, promenljiva_]:=(
 Block[{prviDeo, drugiDeo, rez},
  If[Length[izraz]==2,
     If[SameQ[izraz[[1]], promenljiva],
        Return[Simplify[(promenljiva^izraz[[2]]-1)/(promenljiva-1)]], Return[0]
    ],
     {prviDeo, drugiDeo}=TakeList[izraz, {2, Length[izraz]-2}];
     rez=Izvod[prviDeo, promenljiva]
         +prviDeo[[1]]^prviDeo[[2]]*Izvod[drugiDeo, promenljiva];
     Return[rez];
  ]
 ]
)

matricaIzvoda[lRelacija_, lPromenljivih_]:=(
 Block[{m, i, j},
  m=Table[0, Length[lRelacija], Length[lPromenljivih]];
  For[i=1, i<=Length[lRelacija], i++,
   For[j=1, j<=Length[lPromenljivih], j++,
    m[[i,j]]=Simplify[Izvod[lRelacija[[i]], lPromenljivih[[j]]]];
   ];
```

```
  ];
  Return[m];
 ]
)

AleksanderovaMatrica[relacije_, promenljive_, abelizacija_]:=(
 Block[{m, i, j},
  m=matricaIzvoda[relacije, promenljive];
  For[i=1, i<=Length[relacije], i++,
   For[j=1, j<=Length[promenljive], j++,
    For[k=1, k<=Length[promenljive], k++,
     m[[i,j]]=Simplify[m[[i, j]]/.{promenljive[[k]]->abelizacija[[k]]}];
    ];
    m[[i,j]]=Expand[m[[i,j]]];
   ];
  ];
  Return[m];
 ]
)
```

Пример А.2. Александерова матрица групе

$$G(\widetilde{K}_{\{7\}}, L) = \langle a, b \,|\, b^{-1}abab^{-2}a^{-1}baba^{-1} = 1,\, ab^{-1}a^{-1}b^{-1}a = 1 \rangle$$

придружене циклотомичном полиному $\Phi_{105}(x)$.

Позив функције:

```
MatrixForm[AleksanderovaMatrica[{{b, -1, a, 1, b, 1, a, 1, b, -2, a, -1, b, 1,
 a, 1, b, 1, a, -1}, {a, 1, b, -1, a, -1, b, -1, a, 1}}, {a, b}, {1, t}]]
```

Резултат извршавања функције:

$$\begin{pmatrix} 2t^{-1} - t^{-2} & 0 \\ t^{-2} - t^{-1} + 1 & -t^{-2} - t^{-1} \end{pmatrix}$$

———————————————————————————

Литература

[1] R. M. Adin, *Counting colorful multy-dimensional trees*, Combinatorica **12** (1992), 247–260.

[2] Z. Akhlaghi et al., *On the character degree graph of finite groups*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **198** (2019), 1595–1614.

[3] G. Bachman, *On the coefficients of cyclotomic polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993).

[4] G. Baumslag and D. Solitar, *Some two-generator one-relator non-Hopfian groups*, Bull. Am. Math. Soc. **68** (3) (1962), 199–201.

[5] E. A. Bertram, *Some applications of graph theory to finite groups*, Discrete Math. **44** (1) (1983), 31–43.

[6] E. A. Bertram, M. Herzog, and A. Mann, *On a graph related to conjugacy classes of groups*, Bull. London Math. Soc. **22** (6) (1990), 569–575.

[7] M. W. Bissler, J. Laubacher, and M. L. Lewis, *Classifying character degree graphs with six vertices*, Beitrage zur Algebra und Geometrie **60** (2019), 499–511.

[8] A. Björner and M. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 3945–3975.

[9] E. D. Bolker, *Simplicial geometry and transportation polytopes*, Trans. Amer. Math. Soc. **217** (1976), 121–141.

[10] R. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Springer, New York, 1963.

[11] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra, 3rd ed.* John Wiley, Hoboken, New York, 2004.

[12] R. Forman, *A user's guide to discrete Morse theory*, Sem. Lothar. Combin. **48** (2002), Art. B48c, 35pp.

[13] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Adv. Math **134** (1) (1998), 90–145.

[14] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[15] L. He and M. L. Lewis, *Common Divisor Character Degree Graphs of Solvable Groups with Four Vertices*, Communications in Algebra (2015), 4916–4922.

[16] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, 1976.

[17] S. Jensen, *The character degree simplicial complex of a finite group*, J. Algebra **440** (2015), 33–48.

[18] J. Jonsson, *Simplicial Complexes of Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[19] G. Kalai, *Enumeration of $\mathbb{Q}$-acyclic simplicial complexes*, Israel J. Math. **45** (1983), 337–351.

[20] G. S. Kazandzidis, *On the cyclotomic polynomial: Coefficients*, Bull. Soc. Math. Gréce (N.S) **4** (1) (1963), 1–11.

[21] A. Kostić, *On the simplicial complexes associated to the cyclotomic polynomial*, Kragujev. J. Math. **47** (2) (2023), 309–329.

[22] A. Kostić, N. Milošević, and Z. Z. Petrović, *Note on the Cyclotomic Polynomial Topologically*, Experimental Math. (2019), 309–329.

[23] D. Kozlov, *Combinatorial Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[24] T. Y. Lam and K. H. Leung, *On the cyclotomic polynomial* $\Phi_{pq}(X)$, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 562–564.

[25] S. Lang, *Algebra, 2nd ed.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[26] M. L. Lewis, *A solvable group whose character degree graph has diameter 3*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (3) (2002), 625–630.

[27] M. L. Lewis, *An Overview of Graphs Associated with Character Degrees And Conjugacy Class Sizes in Finite Groups*, Rocky Mountain J. Math **38** (1) (2008), 175–211.

[28] M. L. Lewis, *An overview of graphs associated with character degrees and conjugacy class sizes in finite groups*, Rocky Mountain J. Math. **38** (2008), 175–211.

[29] M. L. Lewis, *Classifying character degree graphs with five vertices*, Finite Groups 2003 (2004).

[30] M. L. Lewis, *Solvable groups whose degree graphs have two connected components*, J. Group Theory **4** (3) (2001), 255–275.

[31] O. Manz, R. Staszewski, and W. Willems, *On the number of components of a graph related to character degrees*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1) (1988), 31–37.

[32] O. Manz, W. Willems, and Th. R. Wolf, *The diameter of the character degree graph*, J. reine angew. Math. **402** (1989), 181–198.

[33] O. Manz and T. R. Wolf, *Representations of solvable groups*, Cambridge University Press, 1993.

[34] C. R. F. Maunder, *Algebraic topology*, The New University Mathematic Series, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.

[35] N. Milošević and Z. Z. Petrović, *Order complex of ideals in a commutative ring with identity*, Czechoslovak Mathematical J. **65** (2015), 947–952.

[36] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[37] G. Musiker and V. Reiner, *The cyclotomic polynomial topologically*, J. Reine Angew. Math. **687** (2014), 113–132.

[38] P. P. Pálfy, *On the Character Degree Graph of Solvable Groups, I. Three Primes*, Periodica Mathematica Hungarica **36** (1998), 61–65.

[39] P. P. Pálfy, *On the character degree graph of solvable groups. II. Disconnected graphs*, Studia Sci. Math. Hungarica **38** (1) (2001), 339–355.

[40] J. S. Provan and L. J. Billera, *Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra*, Math. Oper. Res. **5** (1980), 576–594.

[41] D. G. Quillen, *Higher algebraic K-theory, I: Higher K-theories*, Lect. Notes in Math. **341** (1972), 85–147.

[42] D. G. Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Adv. Math. **28** (2) (1978), 101–128.

[43] E. H. Spainer, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[44] E. Wheeler, *Fundamental groups of simplicial complexes*, J. Algebra **478** (2017), 283–295.

[45] J. Zhao and X. Zhang, *Coefficients of ternary cyclotomic polynomials*, J. Number Theory **130** (10) (2010), 2223–2237.

Биографија аутора

Александра Костић рођена је 12. маја 1989. у Лозници. Дипломирала је на Математичком факултету 2012. године на смеру Рачунарство и информатика са просечном оценом 9,60. На истом факултету на смеру Теоријска математика и примене 2014. године одбранила је мастер рад под насловом „Ефективна хомологија према Francis Sergeraert-у" (ментор проф. др Зоран Петровић) са оценом 10. Докторске студије уписала је 2014. године на Катедри за алгебру и математичку логику. Има шест радова који су прихваћени за објављивање, од чега су пет на SCI листи. Од 2012. запослена је на Математичком факултету, најпре као сарадник у настави, а затим као асистент.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а ____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____