УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

АНТОН БИЛИМОВИЋ
ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

РАЦИОНАЛНА МЕХАНИКА

II

МЕХАНИКА СИСТЕМА

М. Вујовић

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1951

Штампарија и књиговезница „НАУЧНА КЊИГА" — погон II — Београд

САДРЖАЈ

ОДЕЉАК ПРВИ

Геометрија маса

ГЛАВА ПРВА

Геометрија маса

ОДЕЉАК ДРУГИ

Механика система

ГЛАВА ДРУГА

Материјални системи — слободни и неслободни

ГЛАВА ТРЕЋА

Диференцијалне једначине кретања материјалног система

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Опште теореме и интеграли

ГЛАВА ПЕТА

Каноничне једначине. Пфафова метода

ГЛАВА ШЕСТА

Општи принципи механике

ГЛАВА СЕДМА

Аналогија између механике и оптике. Јакобијева метода

ГЛАВА ОСМА

Статика система

ГЛАВА ДЕВЕТА

Мале осцилације система

ГЛАВА ДЕСЕТА

Удар материјалног система

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник садржи други део мојих предавања из рационалне механике, наиме геометрију маса и механику система.

Излагање предмета и овде, као и у механици тачке, има теориски карактер. Форма излагања је углавном векторска. При томе сам сматрао за своју дужност да у оквиру могућности наставе унесем на неким местима у векторско излагање тенденцију ка новој, тензорској форми излагања механике.

У материјал основног курса механике система унесене су допуне, нарочито аналитичког карактера; оне су намењене оним који би желели проширити своја знања и радити даље у области теориске механике. Извесна отступања од уобичајеног начина излагања у вези су са мојим радовима у овој области механике.

Професору Т. Анђелићу, који је прочитао рукопис, редиговао га и много ми помогао при штампању, много и најсрдачније захваљујем.

8. VI. 1950
Београд

А. Билимовић

ЛИТЕРАТУРА

Поред литературе која је наведена у мојој првој књизи (Рационална механика. I. Механика тачке. 2 изд. 1950) у вези са механиком система можемо навести ове допуне.

Главним класичним делима, која су наведена, треба додати и дело:

H. Hertz — Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig. 1894.

Из Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften треба нарочито поменути чланак

G. Prange — Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Leipzig. 1935.

Читаоцу који би желео да се упозна и са другим курсевима механике система можемо препоручити

P. Appell — Traité de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris. Више издања.

И. Арновљевић — Основе теориске механике I—VI. Београд. 1947—49.

J. Chazy — Cours de mécanique rationnelle. T. II. Dynamique des systèmes matériels. Paris. 1948.

T. Levi-Civita e U. Amaldi — Lezioni di meccanica razionale. Vol. II. Parte seconda. Bologna 1927.

Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье — Курс теоретической механики. Т. I и II. Издание четвертое. Москва, Ленинград. 1948.

P. Painlevé — Cours de mécanique. T. I. Paris. 1930.

Г. К. Сусловъ — Основы аналитической механики. Т. I. Часть III. Динамика системы. Кіевъ. 1912.

Г. К. Сусловъ — Теоретическая механика. Издание третье, посмертное. Москва, Ленинград. 1946.

E. T. Whittaker — A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge. 1904. Треће издање 1927.

ОДЕЉАК ПРВИ

ГЕОМЕТРИЈА МАСА

ГЛАВА ПРВА

Геометрија маса

§ 1·1. Дискретно и непрекидно распоређене масе. Геометрија маса

У првом делу рационалне механике (механика тачке) увели смо појам *материјалне тачке* (§ 0·4) као заступника транслаторно покретног чврстог тела. Са једном тачком тог тела везали смо целокупну његову масу. Ако имамо више чврстих тела, код којих проучавамо само транслаторно кретање, можемо говорити о систему материјалних тачака, кратко, материјалном систему маса дискретно распоређених у простору. Према томе, без обзира на то што свака маса увек заузима неку одређену запремину, може се говорити о систему геометриских тачака за које су везане одређене масе.

Свођење материјалног система на коначан број дискретних материјалних тачака није увек могуће. Кад се систем или не састоји из чврстих, тј. непроменљивих, тела, већ претставља један променљив материјални систем, или се састоји из чврстих тела, код којих не проучавамо само транслаторно кретање, онда се такав материјални систем не може свести на коначан број дискретно распоређених материјалних тачака. За масе таквих тела каже се да су *непрекидно* или *континуално распоређене у одређеним областима простора*.

У општем случају било дискретно било непрекидно могу по тачкама простора бити распоређене вредности и других скалара сем масе, на пр. температуре, електричног или магнетског оптерећења итд.

Проучавање различитих питања, која стоје у вези са распоредом скалара у простору, чини нарочиту научну дисциплину — *геометрију скалара.*

У општем случају вредности скалара распоређене у простору могу бити позитивне и негативне. Ми ћемо се зауставити само на случају кад је тај скалар маса и према томе може узимати само позитивне вредности. Геометрија таквог скалара је *геометрија маса.*

§ 1·11. Густина

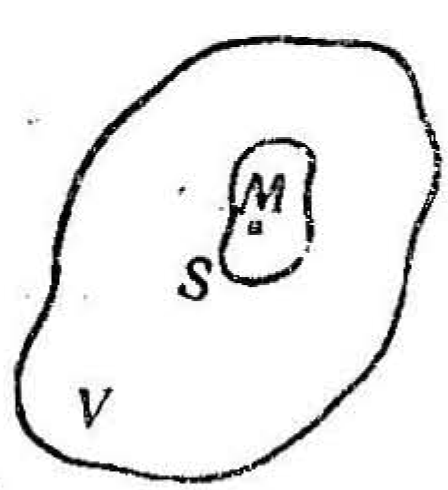
Претпоставимо да се у области дате запремине V налази материјални систем са целокупном масом m. Количник

$$\sigma = \frac{m}{V}$$

зове се *средња (запреминска) густина* датог материјалног система.

Нека сад буду дате масе непрекидно распоређене у одређеној области запремине V. Узмимо у тој области ма коју тачку M (сл. 1) и затвореном површином S издвојимо из наше области област запремине ΔV у којој је тачка M. Означимо масу, која се налази у запремини ΔV, са Δm и узмимо у обзир количник

$$\frac{\Delta m}{\Delta V}.$$



Слика 1

Тај количник се зове *средња запреминска густина датих маса у датој области* ΔV *око тачке* M. У општем случају средња густина око исте тачке зависи од облика и величине области ΔV. Може се десити да, кад ΔV ма на који начин тежи нули, средња густина тежи одређеној граничној вредности, тј.

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \sigma .$$

Ова се гранична вредност σ, ако постоји, зове *густина датог тела у датој тачки* M. Ако искористимо појам диференцијала можемо написати

$$\sigma = \frac{d\,m}{d\,V}. \tag{1}$$

У општем случају густина σ може зависити од положаја тачке M у простору области, тј. може бити функција вектора положаја $\vec{r}$ тачке M у односу на одређену тачку O, што можемо изразити једначином

$$\sigma = f(\vec{r}).$$

Ако је вектор $\vec{r}$ одређен помоћу Декартових координата x, y, z, може се написати

$$\sigma = f(x, y, z).$$

Из једначине (1) изводимо овај образац за одређивање масе m тела чија је густина σ позната у свакој тачки као функција Декартових координата

$$m = \iiint_V \sigma\, dV = \iiint_V \sigma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где је троструки интеграл проширен на целокупну запремину V дате области.

Ако је положај тачке M одређен помоћу криволиниских координата q_1, q_2, q_3 и за вектор положаја имамо

$$\vec{r} = \vec{r}\,(q_1, q_2, q_3),$$

елемент запремине можемо израчунати обрасцем

$$dV = (\vec{dl_1}\,[\vec{dl_2}\,\vec{dl_3}]), \tag{2}$$

где су $\vec{dl_1}$, $\vec{dl_2}$, $\vec{dl_3}$ елементарни вектори у правцима тангената на координатне линије са вредностима

$$\vec{dl_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\, dq_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ако су координате q_1, q_2, q_3 уведене помоћу Декартових координата једначинама:

$$x = x\,(q_1, q_2, q_3),$$
$$y = y\,(q_1, q_2, q_3),$$
$$z = z\,(q_1, q_2, q_3),$$

вектори $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ имају за координате $\frac{\partial x}{\partial q_i}$, $\frac{\partial y}{\partial q_i}$, $\frac{\partial z}{\partial q_i}$, а елемент запремине се изражава према (2),

$$dV = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (q_1, q_2, q_3)} dq_1 \, dq_2 \, dq_3 ,$$

где је

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1}, & \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2}, & \frac{\partial y}{\partial q_2}, & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3}, & \frac{\partial y}{\partial q_3}, & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

Јакобијева детерминанта (Јакобијан).

Према томе у криволиниским координатама маса се одређује овим интегралом:

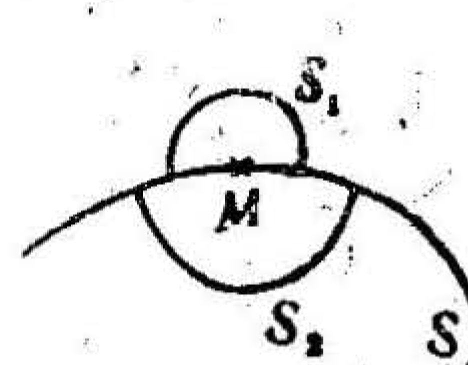
$$m = \underset{V}{\iiint} \sigma(q_1, q_2, q_3) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (q_1, q_2, q_3)} dq_1 \, dq_2 \, dq_3 .$$

Може наступити случај да гранична вредност, која одређује густину у датој тачки, зависи од оне запремине ΔV коју смо изабрали у околини дате тачке. Тако, на пр., можемо имати овај случај расподеле маса. Замислимо кроз тачку M једну такву површину S, да једна запремина ΔV_1 омеђена том површином и површином S_1 (сл. 2) доводи до једне граничне вредности

$$\lim_{\Delta V_1 \to 0} \frac{\Delta m_1}{\Delta V_1} = \sigma' ,$$

а друга запремина ΔV_2, омеђена истом површином S и површином S_2 доводи до друге граничне вредности

$$\lim_{\Delta V_2 \to 0} \frac{\Delta m_2}{\Delta V_2} = \sigma'' .$$



Слика 2

Тада можемо казати да се тачка (M) налази на површини (S), која одваја масе једне густине (σ') од маса друге густине (σ''). Јасно је да нека тачка може да се налази на спoју и више области различитих густина.

Ако густина σ има исту вредност за све тачке неке области, онда се каже да је средина те области *хомогена;* у супротном случају она је *хетерогена.*

За хомогено тело имамо

$$m = \iiint\limits_V \sigma\, d\, V = \sigma \iiint\limits_V d\, V,$$

$$m = \sigma\, V,$$

или: маса хомогеног тела једнака је производу запреминске густине и запремине.

Без обзира на то што свака маса заузима, како рекосмо, одређену запремину, може се говорити о површинском распореду маса и то на овај начин.

Могу посматрати две блиске површине S и S' између којих се налази маса m материјалног система. Област те масе ограничена је: 1. једним делом површине S, рецимо величине A са контуром L, 2. праволиниском површином S^* чија је водиља контура L а изводница нормала на површину S и 3. оним делом површине S' који исеца праволиниска површина S^* на површини S'. У случају затворених површина S и S', између којих се налази маса система, површина S^* отпада.

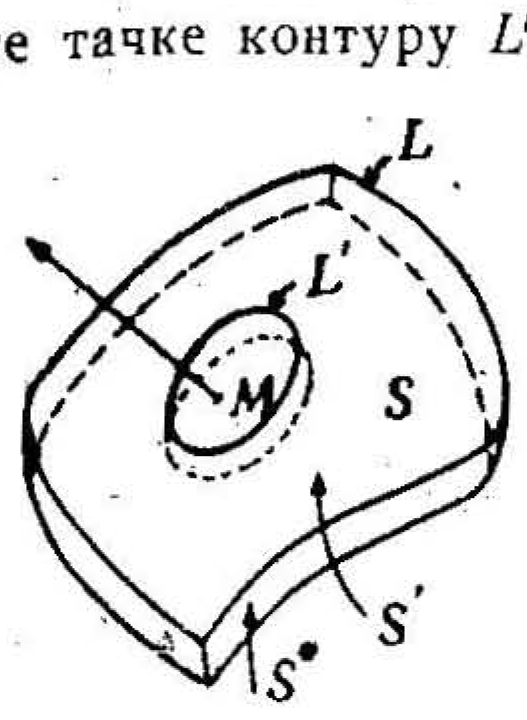
Као конкретни примери таквог распореда маса могу служити материјалне плоче, корице, љуске, лим и др.

Однос масе m таквог система и величине A површине S са којом је везана та маса, тј. количник

$$\sigma_1 = \frac{m}{A}$$

зове се *средња површинска густина* датог материјалног система.

Узмимо сад на површини S тачку M (сл. 3) и нацртајмо око те тачке контуру L' која издваја део ΔA површине S. Као и раније кроз сваку тачку контуре L' повуцимо нормалу на површину S. Претпоставимо да праволиниска површина од тих нормала одваја од целокупне масе нашег тела масу Δm. Количник $\Delta m/\Delta A$ је средња површинска густина датих маса за површину ΔA око тачке M. Гранична вредност те густине у облику



Слика 3

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{d\, m}{d\, A} = \sigma_1$$

зове се *површинска густина датих маса у тачки* M.

Ако је површина одређена једначином

$$z = f\ (x,\ y),$$

површинску густину можемо сматрати као функцију координата x и y:

$$\sigma_1 = \sigma_1\ (x,\ y).$$

За одређивање целокупне масе m тела, кад је позната површинска густина, можемо искористити образац:

$$m = \iint\limits_S \sigma_1\, dA = \iint\limits_S \sigma_1 \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

где су

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

а двоструки интеграл је проширен на целокупну површину S.

Ако је површина S одређена једначинама

$$x = x\ (q_1,\ q_2),$$
$$y = y\ (q_1,\ q_2),$$
$$z = z\ (q_1;\ q_2),$$

где су q_1 и q_2 независни Гаусови параметри тачке на површини, онда је густина функција тих истих параметара

$$\sigma_1 = \sigma_1\ (q_1,\ q_2),$$

а образац за одређивање масе се пише овако:

$$m = \iint\limits_S \sigma_1\, dA = \iint\limits_S \sigma_1 \sqrt{EG - F^2}\, dq_1\, dq_2,$$

где су E, F, G Гаусови коефицијенти метричке форме дате површине

$$E\, dq_1^2 + 2F\, dq_1\, dq_2 + G\, dq_2^2,$$

тј.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^2}\right)^2.$$

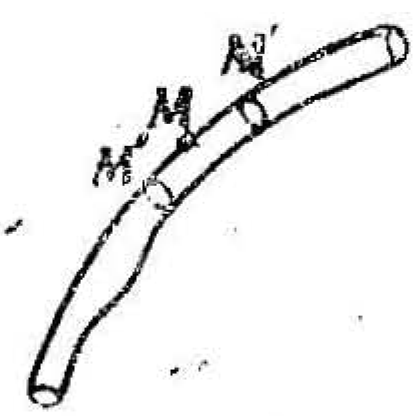
Најзад распоред маса може бити везан за неку линију. Тада се може увести појам *линиске густине* и то на овај начин.

Ако су масе распоређене дуж линије L на дужини l и целокупна маса износи m, количник

$$\frac{m}{l}$$

је *средња линиска густина* тог тела.

Узмимо сада на линији L (сл. 4) тачку M и две суседне тачке M' и M''. Кроз те тачке повуцимо равни нормалне на криву L. Нека се између тих равни налази маса Δm тела. Ако дужину линије између тачака M' и M'' означимо са Δl, однос



Слика 4

$$\frac{\Delta m}{\Delta l}$$

је средња линиска густина тела на дужини Δl око тачке M. Гранична вредност

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \sigma_2$$

је *линиска густина датог тела у тачки* M. И овде се може написати

$$\sigma_2 = \frac{dm}{dl}.$$

Густина σ_2 у општем случају зависи од положаја тачке на кривој и може се сматрати као функција дужине l лука те линије:

$$\sigma_2 = \sigma_2(l).$$

У овом случају за одређивање масе тела можемо искористити образац:

$$m = \int_L \sigma_2(l)\, dl,$$

где је интеграл проширен на целу дужину наше материјалне линије.

Ако је линија дата једначинама

$$y = y(x), \qquad z = z(x)$$

и

$$\sigma_2 = \sigma_2(x),$$

израчунавање масе треба вршити помоћу обрасца:

$$m = \int_L \sigma_2(x) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

су

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad z' = \frac{dz}{dx}.$$

Најзад у случају параметарских једначина криве

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

где је t параметар, имамо $\sigma_2 = \sigma_2(t)$ и према томе је

$$m = \int_L \sigma_2(t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

где је, на пр., $x' = \frac{dx}{dt}$.

Ако је параметар t дужина l лука криве линије и $\sigma_2 = \sigma_2(l)$, маса криве линије се изражава интегралом

$$m = \int_L \sigma_2(l)\, dl,$$

који је проширен на целокупну дужину L криве.

Према дефиницијама запреминска, површинска и линиска густина имају ове димензије: $[\sigma] = ML^{-3}$, $[\sigma_1] = ML^{-2}$, $[\sigma_2] = ML^{-1}$.

§ 1·111. Примери

1. Одредити масу лопте полупречника R чија је запреминска густина линеарна функција растојања тачке од центра са вредношћу a у центру и b на површини лопте.

Ако са r означимо растојање тачке лопте од центра, запреминска густина се изражава обрасцем

$$\sigma = a + (b - a)\frac{r}{R}.$$

Ако за хомогени елемент наше лопте узмемо бескрајно танку сферну љуску полупречника r и дебљине dr, пошто је запремина такве љуске једнака $4\pi r^2 dr$, за одређивање масе можемо искористити образац

$$m = \int_0^R \sigma \cdot 4\pi r^2 \, dr = 4\pi \int_0^R \left(a + \frac{b-a}{R} r \right) r^2 \, dr =$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^3 (a + 3b) .$$

Ако искористимо израз $\frac{4}{3} \pi R^3$ за запремину лопте, претходни резултат можемо изразити овако

$$m = \sigma_s V ,$$

где је V запремина лопте и σ_s средња густина са вредношћу

$$\sigma_s = \frac{1}{4} (a + 3b) ;$$

ту густину има хомогена лопта исте величине и исте масе.

2. Одредити масу равне правоугаоне плоче дужине a и ширине b $(b < a)$ под условом да је дуж пресека по ширини површинска густина плоче σ_1 стална, а уздуж плоче се та густина мења по закону

$$\sigma_1 = p + q \left| \sin\left(\frac{8\pi}{a} x \right) \right| , \tag{1}$$

где су p и q константе, x је растојање пресека по ширини од једног краја плоче. Цртицама је обележена апсолутна вредност.

Из једначине (1) се види да можемо целу плочу поделити на 16 плоча са димензијама b и $\frac{1}{16} a$. Све такве узане плоче имају исту масу као и прва са вредношћу

$$\frac{1}{16} m = \int_0^{\frac{1}{16} a} b \left(p + q \sin \frac{8\pi}{a} x \right) dx ,$$

одакле после интеграције имамо

$$m = ab \left(p + \frac{2}{\pi} q \right) = ab \, \sigma_{1s} ,$$

где је σ_{1s} густина хомогене плоче која са датом плочом има исту површину и исту масу.

3. Одредити масу од n- завоја завојнице полупречника R и хода h, при чему је на сваком завоју маса распоређена према закону за линиску густину

(2) $$\sigma_2 = p + q \sin^2\theta ,$$

где су p и q константе, а θ је угао при обиласку по завојници између две равни које пролазе кроз осу завојнице и то једна кроз њену почетну тачку, а друга кроз произвољну тачку те завојнице.

Ако једначине завојнице напишемо у облику

$$x = R\cos\theta , \quad y = R\sin\theta , \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta ,$$

маса завојнице са густином (2) се одређује помоћу интеграла

$$m = n\int_0^{2\pi}(p + q\sin^2\theta)\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta .$$

Извршена интеграција даје

$$m = n\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}\left(p + \frac{1}{2}q\right)$$

или

$$m = l\,\sigma_{2s}$$

где су: l дужина завојнице и $\sigma_{2s} = p + \frac{1}{2}q$ густина хомогене завојнице исте дужине која са датом има исту масу.

§ 1·2. Центар маса или центар инерције

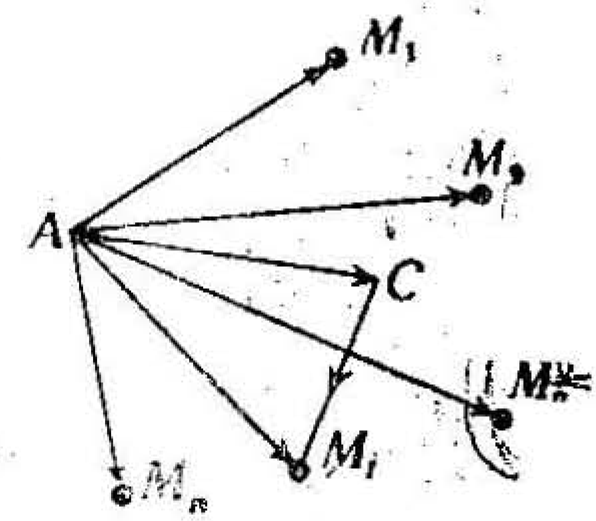
Ако је са тачком M везана маса m и $\overrightarrow{AM}$ вектор положаја тачке M у односу на тачку A, производ

$$m\overrightarrow{AM}$$

зове се *вектор положаја оптерећен масом* m тачке M у односу на тачку A.

Ако имамо скуп или, како смо казали, систем од n тачака $M_1, M_2, \cdots, M_n$ (сл. 5) са масама $m_1, m_2, \cdots, m_n$ и једну одређену тачку A простора, може се за сваку тачку тог система конструисати вектор положаја оптерећен масом у односу на тачку A и начинити збир свих конструисаних вектора:

$$m_1 \overrightarrow{AM}_1 + m_2 \overrightarrow{AM}_2 + \cdots + m_n \overrightarrow{AM}_n .$$



Слика 5

То ће бити одређен вектор са почетком у тачки A. Означимо са m целокупну масу система, тј. ставимо

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

и поделимо конструисани збир том масом или, како се каже, растеретимо тај збир целокупном масом система. Добићемо нов вектор. Крај тог вектора означимо са C. На тај начин можемо написати векторску једначину:

$$(1) \qquad m \overrightarrow{AC} = m_1 \overrightarrow{AM}_1 + m_2 \overrightarrow{AM}_2 + \cdots + m_n \overrightarrow{AM}_n = \sum_{n=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM}_i .$$

Ако су дате масе система m_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ и њихов положај, једначина (1) одређује вектор $\overrightarrow{AC}$, а према томе и тачку C. Тачка C зове се *центар* или *средиште маса* или *центар инерције маса*. Према томе је векторска једначина (1) једначина за одређивање положаја центра маса.

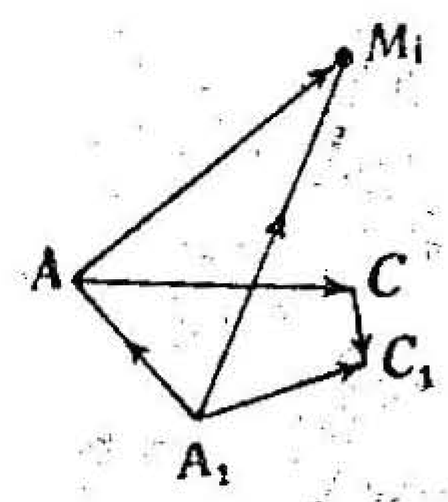
Докажимо сад да положај тачке C не зависи од избора положаја тачке A у простору, која је служила као почетак вектора положаја оптерећених масама. За тај циљ узмимо нову тачку A_1 за почетак таквих вектора и покажимо да тачка C_1, одређена помоћу тачке A_1, има исти положај са тачком C.

Према основној дефиницији (1) за тачку A_1 имамо

$$(2) \qquad m \overrightarrow{A_1C_1} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_1M_i} .$$

Пошто за сваку тачку M_i система имамо (сл. 6):

$$\overrightarrow{A_1M_i} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM_i},$$



Слика 6

множењем сваке од тих једначина одговарајућом масом m_i и сабирањем резултат се може написати:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_1M_i} = m\overrightarrow{A_1A} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM_i}.$$

Према (2) први збир има вредност

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_1M_i} = m\overrightarrow{A_1C_1},$$

а за други на основу (1) имамо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM_i} = m\overrightarrow{AC}$$

и на тај начин се из (3) после дељења са m може написати:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC}.$$

Са друге стране, за четири тачке A, C, C_1 и A_1 увек имамо:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}.$$

Упоређивање ове векторске једначине са претходном доводи до резултата

$$\overrightarrow{CC_1} = 0,$$

који показује да се тачка C_1 поклапа са тачком C, а то је требало доказати.

Из доказане теореме можемо закључити да је центар маса тачака битно везан само за величине маса (тачније за величине односа маса $n-1$ тачке према маси једне тачке изабране за упоређивање) и за њихов релативни положај.

Докажимо сад ону основну особину центра маса због које се ова тачка зове центар или средиште. Ова особина се изражава теоремом:

Збир вектора положаја оптерећених масама у односу на центар маса једнак је нули, тј.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CM_i} = 0\,.$$

Пошто је (сл. 5)

$$\overrightarrow{CM_i} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM_i}\,,$$

онда множењем са m_i и сабирањем добијамо:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CM_i} = m\,\overrightarrow{CA} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM_i}\,,$$

али на основу (1) је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM_i} = m\,\overrightarrow{AC},$$

па је према томе на десној страни у претходној једначини

$$m\,\overrightarrow{CA} + m\,\overrightarrow{AC} = 0\,,$$

после чега долазимо до резултата

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CM_i} = 0\,,$$

који потврђује нашу теорему.

Пошто на збир

$$m_1 \overrightarrow{AM_1} + m_2 \overrightarrow{AM_2} + \ldots + m_n \overrightarrow{AM_n}$$

десне стране једначине (1) можемо применити комутативни закон, можемо закључити да положај тачке C не зависи од реда којим узимамо материјалне тачке система. На наведени збир исто тако може се применити асоцијативни закон, другим речима целокупни систем може се поделити на групе и свака група заменити једном материјалном тачком са масом те групе у положају центра маса те групе. Тако, на пр., првих k тачака можемо према збиру

$$m_1 \overrightarrow{AM_1} + m_2 \overrightarrow{AM_2} + \ldots + m_k \overrightarrow{AM_k}$$

заменити тачком са масом $\mu_1 = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ која се налази у тачки C_1 одређеној једначином:

$$\mu_1 AC_1 = m_1 AM_1 + m_2 AM_2 + \cdot\cdot\cdot + m_k AM_k\,.$$

Из једначине (1) имамо векторску једначину

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

која у решеном облику одређује вектор положаја тачке C.

Ако се за тачку A узме почетак Декартовог координатног система, тачка O, а вектор положаја $\overrightarrow{OM_i}$ означимо са $\vec{r}_i$, векторска једначина за $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_c$ изгледа

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ако са x_c, y_c, z_c означимо Декартове координате тачке C, а са x_i, y_i, z_i — исте координате тачке M_i, из претходне векторске једначине можемо написати ове три скаларне једначине:

$$(3) \qquad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Написане једначине су основне скаларне једначине за одређивање положаја центра рачунским путем помоћу Декартових координата. Дефиниција центра маса, тачке C, помоћу векторске једначине (1) и теорема о томе да положај те тачке не зависи од избора тачке A ослобађају излагање теорије центра маса од доказа да положај тачке C, одређен рачунским путем из једначина (3), не зависи од избора координатних оса.

§ 1·21. Поларни, планарни и аксијални линеарни моменти маса

Збир вектора положаја појединих материјалних тачака оптерећених масама тих тачака, вектор

$$\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}$$

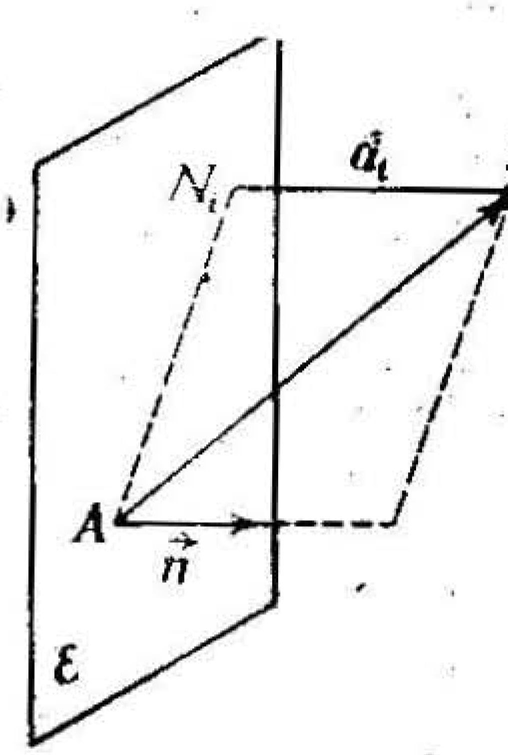
зове се *полaрни линеарни моменат маса система у односу на пол A*. Означимо тај вектор са $\overrightarrow{L_P}^{(A)}$, тј. ставимо

$$\overrightarrow{L_P}^{(A)} = \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}\,.$$

Помоћу овог појма једначину (1) § 1·2 можемо формулисати овако: Поларни линеарни момент датог система маса у односу на дати пол једнак је поларном линеарном моменту целокупне масе система везане за центар маса, а у односу на исти пол, наиме

$$\overrightarrow{L_P}^{(A)} = m\,\overrightarrow{AC}\,. \tag{1}$$

Сад узмимо у простору *утврђену оријентисану раван*, тј. раван која има потпуно одређени положај и на којој је назначено лице и наличје. Означимо такву раван са ε. Она се утврђује одређеном тачком у простору, рецимо тачком A (сл. 7), и ортом нормале на ту раван, вектором $\vec{n}$. Смер тог вектора је наперен од равни на ону страну простора одакле видимо лице оријентисане равни. Са растојањем тачке од оријентисане равни може се везати знак: позитиван, ако се из тачке види лице равни и негативан у другом случају. Означимо са d_i такво алгебарско растојање тачке M_i од равни ε. Производ масе тачке m_i и растојања d_i обично се зове *планарни линеарни моменат дате материјалне тачке у односу на дату раван* ε. Збир планарних линеарних момената свих тачака система у односу на исту раван је *планарни линеарни моменат датог материјалног система у односу на дату*



Слика 7

раван. Ако тај момент за раван ε, која пролази кроз тачку A, значимо са $L_\varepsilon^{(A)}$, имамо једначину

$$L_\varepsilon^{(A)} = \sum_i m_i\, d_i\,.$$

Докажимо сад теорему:

Планарни линеарни момент материјалног система у односу на раван једнак је планарном линеарном моменту у односу на исту раван материјалне тачке са целокупном масом система у положају центра маса тог система.

Ако основну векторску једначину (1) § 1·2 у облику

$$\sum_i m_i\, \overrightarrow{AM_i} = m\, \overrightarrow{AC}$$

помножимо скаларно вектором $\vec{n}$, ортом оријентисане равни ε, и узмемо у обзир да је

$$\left(\overrightarrow{AM_i},\ \vec{n}\right) = d_i\,, \quad \left(\overrightarrow{AC},\ \vec{n}\right) = d_c\,,$$

где је d_c алгебарско растојање тачке C од равни ε, онда се из претходне векторске једначине може написати ова скаларна једначина

$$(2) \qquad \sum_i m_i\, d_i = m\, d_c\,,$$

која потврђује нашу теорему.

Ако је оријентисана раван нека од координатних равни, на пр. раван Oyz, претходна једначина даје

$$m x_c = \sum_i m_i\, x_i$$

и изражава према томе помоћу планарног линеарног момента исти резултат као и прва од једначина (3) § 1·2.

Ако раван ε пролази кроз центар маса система, она се зове *централна раван.* Пошто је за такву раван $d_c = 0$, из (2) следи да је $L_\varepsilon^{(C)} = 0$ и према томе важи овај став:

Планарни линеарни момент система у односу на сваку централну раван једнак је нули.

Ако је једна од координатних равни централна раван, на пр. раван Oyz, онда је

$$\sum_i m_i x_i = 0 .$$

Најзад, ако се центар маса налази у почетку координатног система, тада је у исто време

$$\sum_i m_i x_i = 0 , \quad \sum_i m_i y_i = 0 , \quad \sum_i m_i z_i = 0 .$$

У проучавању линеарних момената обично се зауставља само на поларном линеарном моменту у облику вектора

$$\vec{L}_P^{(A)} = \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}$$

и планарном линеарном моменту у облику скалара

$$L_\varepsilon^{(A)} = \sum_i m_i d_i = \sum_i m_i \left(\vec{n} , \overrightarrow{AM_i} \right) ,$$

при чему у последњем фигурише скаларни производ орта $\vec{n}$ и вектора $\overrightarrow{AM_i}$.

То су важне форме линеарних момената али нису једине.

Тако се за планарни момент сем скаларног планарног линеарног момента, који смо анализирали, може конструисати и други, *векторски планарни линеарни момент са вредношћу*

$$\vec{\Lambda}_\varepsilon^{(A)} = \sum_i m_i [\vec{n}, \overrightarrow{AM_i}] ;$$

он лежи у равни ε и за њега исто тако важи теорема

$$\vec{\Lambda}_\varepsilon^{(A)} = m [\vec{n}, \overrightarrow{AC}]$$

о изражавању тог момента помоћу момента само једне материјалне тачке са целокупном масом система у центру система.

Ако су x_c, y_c, z_c координате центра маса у односу на триједар $Oxyz$, векторски планарни линеарни моменти у односу на координатне равни тог триједра имају вредности

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
&\overset{\to(O)}{\Lambda_{yz}} \; (0, \; -mz_c, \; my_c), \\
&\overset{\to(O)}{\Lambda_{zx}} \; (mz_c \; 0 \;, -mx_c), \\
&\overset{\to(O)}{\Lambda_{xy}} \; (-my_c, \; mx_c, \; 0 \;).
\end{aligned}
$$

Ако је дата оријентисана раван, тачком A и ортом $\vec{n}$, и позната су два планарна линеарна момента, скаларни $\overset{(A)}{L_\varepsilon}$ и векторски $\overset{\to(A)}{\Lambda_\varepsilon}$, може се на основу тих података одредити положај тачке C, вектор $\overrightarrow{AC}$. Заиста, две једначине

$$
m\,(\vec{n}, \overrightarrow{AC}) = \overset{(A)}{L_\varepsilon} = ma\,;
$$

$$
m\,[\vec{n}, \overrightarrow{AC}] = \overset{\to(A)}{\Lambda_\varepsilon} = m\vec{R}\,,
$$

где су a и $\vec{R}$ дати скалар и дати вектор, управан на $\vec{n}$, одређују потпуно једнозначно решење:

$$
\overrightarrow{AC} = a\,\vec{n} + [\vec{R}\,\vec{n}]\,.
$$

Формирајмо сад два *аксијална линеарна момента, скаларни и векторски.* За осу са ортом $\vec{u}$, која пролази кроз тачку A и одређује праву p, имамо ове моменте:

скаларни $\qquad \overset{(A)}{L_p} = \sum_i m_i\,(\vec{u}, \overrightarrow{AM_i})\,.$

и векторски $\qquad \overset{\to(A)}{\Lambda_p} = \sum_i m_i\,[\vec{u}, \overrightarrow{AM_i}]\,.$

Тај вектор је управан на праву p.

Јасно је да у случају, кад је

$$
\vec{u} = \vec{n}\,,
$$

тј. раван ε стоји нормално на оси и оријентисана је према њој, између планарних и аксијалних линеарних момената имамо једнакости

$$
\overset{(A)}{L_\varepsilon} = \overset{(A)}{L_p}\,,
$$

$$
\overset{\to(A)}{\Lambda_\varepsilon} = \overset{\to(A)}{\Lambda_p}\,.
$$

Према томе и за сваки аксијални момент важи теорема слична теореми за претходне моменте.

Приметимо да како оба планарна момента тако и оба аксијална момента мењају свој знак са променом смера вектора $\vec{n}$ односно $\vec{u}$.

Познавање два аксијална линеарна момента такође даје могућност одредити положај центра маса материјалног система.

§ 1·22 Центар инерције непрекидно распоређених маса

Поделимо материјални систем са непрекидно распоређеним масама на бескрајно мале масе и сваку од њих означимо са Δm, а вектор положаја једне тачке те масе у односу на тачку A са $\vec{r}$. Једначину (1) § 1·2 тада можемо написати овако:

$$\vec{AC}\sum \Delta m = \sum \vec{r}\,\Delta m ,$$

где су збирови проширени на све масе система. Кад пређемо на граничне вредности и претпоставимо да Δm тежи нули, збирови се претворе у интеграле и тада ћемо имати:

$$\vec{AC} \underset{V}{\iiint} dm = \underset{V}{\iiint} \vec{r}\, dm , \tag{1}$$

где су троструки интеграли проширени на целокупну област тела. Ако уведемо густину, претходну векторску једначину можемо написати и овако:

$$\vec{AC} \underset{V}{\iiint} \sigma\, dV = \underset{V}{\iiint} \vec{r}\, \sigma\, dV .$$

Из ове векторске једначине можемо добити одговарајуће скаларне једначине. Тако, на пр., ако је тачка A почетак координатног система, из претходне једначине можемо одредити ову вредност координате x_c центра инерције датих непрекидних маса:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V \sigma\, x\, dV}{\iiint\limits_V \sigma\, dV}.$$

Слична расуђивања можемо применити и на масе непрекидно распоређене било по површини било дуж линије.

У првом случају имамо векторску једначину

$$\overrightarrow{AC} \iint\limits_S dm = \iint\limits_S \vec{r}\, dm, \tag{2}$$

у другом ову:

$$\overrightarrow{AC} \int\limits_L dm = \int\limits_L \vec{r}\, dm. \tag{3}$$

Из тих једначина можемо извести ове једначине за одређивање, рецимо, координате x_c : за површину —

$$x_c = \frac{\iint\limits_S \sigma_1\, x\, dA}{\iint\limits_S \sigma_1\, dA} = \frac{\iint\limits_S x\sigma_1(x,y)\sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy}{\iint\limits_S \sigma_1(x,y)\sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy},$$

и за линију

$$x_c = \frac{\int\limits_L \sigma_2\, x\, dl}{\int\limits_L \sigma_2\, dl} = \frac{\int\limits_L x\,\sigma_2(x)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx}{\int\limits_L \sigma_2(x)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx}.$$

Ако је тело хомогено, густина σ има сталну вредност за све тачке области V и пошто је $dm = \sigma\, dV$, из (1) се може извести:

$$\overrightarrow{AC} \underset{V}{\iiint} dV = \underset{V}{\iiint} \vec{r}\, dV.$$

Ова векторска једначина уопште не садржи масу и у том смислу се може сматрати као једначина за одређивање *центра инерције неке запремине*. Према томе одређивање центра инерције неког хомогеног тела ма које густине и одређивање центра инерције неке запремине — то су два идентична питања. То важи и за одређивање центра инерције хомогене површине или хомогене линије. Према томе за кординату, рецимо, x_c запремине, x'_c површине и x_c'' линије могу се написати ови обрасци:

$$x_c = \frac{\underset{V}{\iiint} x dV}{\underset{V}{\iiint} dV}, \quad x_c' = \frac{\underset{S}{\iint} x dA}{\underset{S}{\iint} dA}, \quad x_c'' = \frac{\int_L x dl}{\int_L dl}.$$

§ 1·23. Примери

Учинимо пре свега једну примедбу.

Ако је распоред маса, било дискретних било непрекидних, симетричан у односу на неку раван, центар инерције тих маса налази се у тој равни. Исто тако за случај маса са осом симетрије, центар маса се налази на тој оси. Најзад, ако су масе распоређене централно-симетрично, центар маса је у центру симетрије.

1. *Центар инерције две дискретне масе*

Нека су дате две дискретне масе m_1 и m_2 на растојању d (сл. 8, *a*). Означимо растојања тих маса од центра маса C са r_1

и r_2, тада према особини линеарног момента имамо:

$$(1) \qquad m_1 r_1 = m_2 r_2$$

или

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

тј. центар две масе дели растојање између њих у обрнутој размери масама.

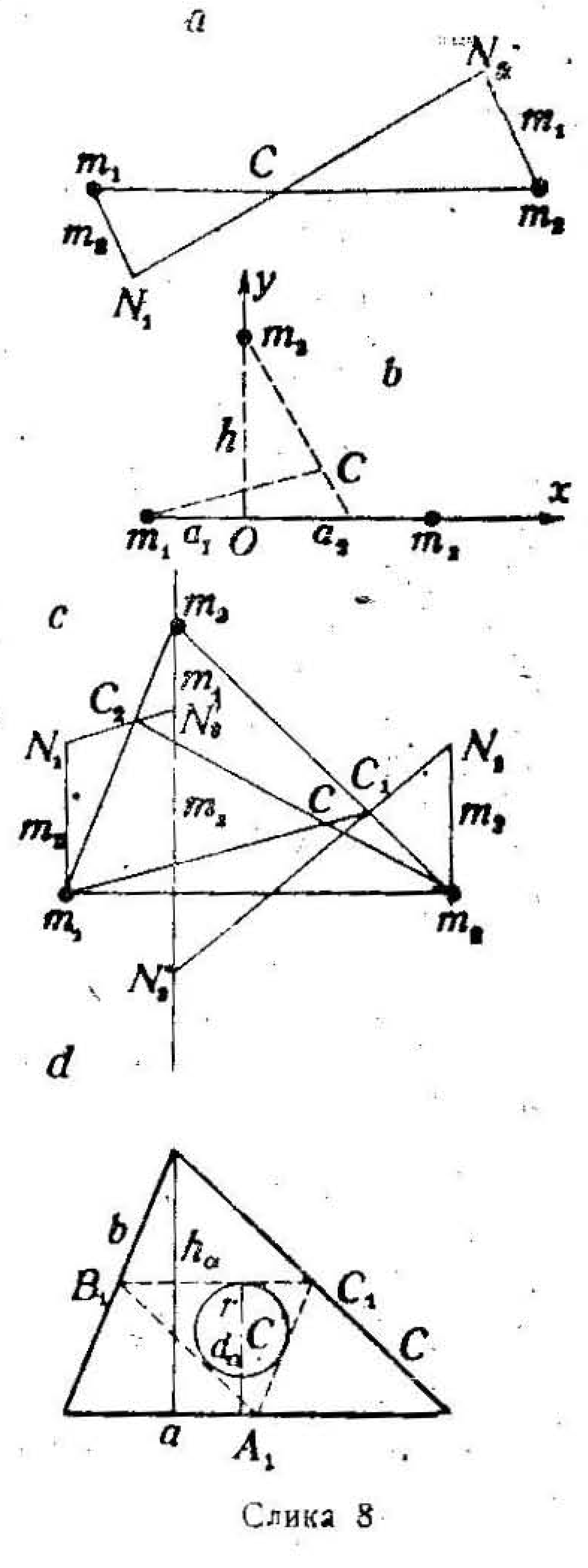
Према томе, ако кроз тачке m_1 и m_2 повучемо паралелне праве и на једној од њих одмеримо дужину $m_1 N_1$ пропорционалну маси m_2, а на другој, на другу страну, дужину $m_2 N_2$ пропорционалну маси m_1 и спојимо тачке N_1 и N_2, пресек праве $N_1 N_2$ са правом $m_1 m_2$ одређује центар инерције, тачку C.

Пошто је

$$(2) \qquad r_1 + r_2 = d,$$

то се решењем система једначина (1) и (2) добија:

$$r_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}, \qquad r_2 = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2}.$$



Слика 8

2. *Центар инерције три дискретне масе*

Одредимо сад центар инерције, тачку C, за три дискретне масе m_1, m_2, m_3. Ако координате тих тачака редом означимо са x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$), према општим обрасцима имамо, на пр.;

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Ако уведемо координатни систем Oxy специјалног положаја како то показује слика 8, b, координате тачака можемо означити овако:

$$m_1(-a_1, 0), \qquad m_2(a_2, 0), \qquad m_3(0, h).$$

За координате тачке C тада имамо:

$$x_c = \frac{m_2 a_2 - m_1 a_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad y_c = \frac{m_3 h}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

За графичко одређивање тачке C можемо се послужити овим поступком. Према претходном поступку за две тачке конструишемо центар маса m_1 и m_3, тачку C_2 (сл. 8, c) и то помоћу правих $m_1 N_1 = m_3$ и $m_3 N'_3 = m_1$ и пресека $N_1 N'_3$ са $m_1 m_3$, а затим за тачке m_2 и m_3 — тачку C_1 помоћу $m_2 N_2 = m_3$ и $m_3 N''_3 = m_2$ и праве $N_2 N''_3$. Пошто тачка C мора лежати и на правој $m_1 C_1$ и на правој $m_2 C_2$, она лежи у пресеку тих правих.

3. *Центар инерције дужи, обима троугла и паралелограма.*

a. Пошто је свака дуж симетрична у односу на своју средину, центар инерције те дужи се налази у тој средини.

b. Ако стране троугла означимо са a, b, c (сл. 8, d) висину троугла према страни a са h_a и растојање тачке C од стране a са d_a, онда је једначина за линеарне моменте маса система у односу на страну a

$$(a + b + c)\, d_a = (b + c)\, \frac{h_a}{2};$$

одакле имамо

$$d_a = \frac{h_a}{2}\, \frac{b + c}{a + b + c}.$$

Помоћу тог обрасца можемо доказати да се центар маса обима троугла налази у центру уписаног круга у троуглу $A_1 B_1 C_1$ са теменима у срединама страна датог троугла. Заиста, полупречник r круга уписаног у троугао $A_1 B_1 C_1$, чије су стране $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ и чија је површина једнака четвртини површине P датог троугла, може се израчунати из једначине:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) r = \frac{1}{4} P,$$

одакле је

$$r = \frac{P}{a+b+c} = \frac{h_a}{2}\,\frac{a}{a+b+c}\,.$$

На основу тог израза за растојање центра круга од стране a имамо:

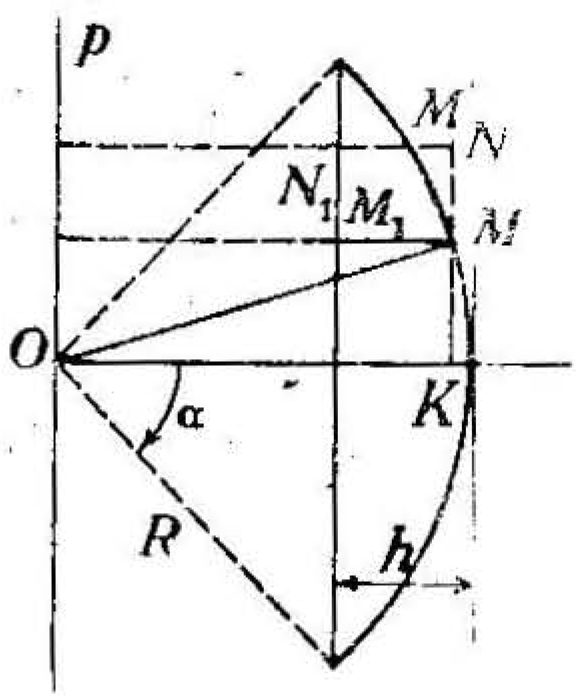
$$\frac{h_a}{2} - r = \frac{h_a}{2}\left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right) = \frac{h_a}{2}\,\frac{b+c}{a+b+c} = d_a,$$

а то и доказује наведену особину центра инерције. Добијени резултат важи за отстојања тачке C и од остале две стране троугла.

c. Пошто је обим паралелограма централно-симетрична слика, центар инерције тог обима се налази у пресеку паралелограмових дијагонала.

4. *Центар инерције кружног лука*

Нека је дат кружни лук полупречника R са средишним углом 2α (сл. 9). Пошто је он осно-симетрична слика, центар инерције C се налази на оси симетрије — симетрали средишног угла. За одређивање положаја тачке C напишимо једначину линеарних момената маса за праву p која пролази кроз центар кружног лука и паралелна је тетиви тог лука. Ако уведемо ове ознаке: x_c — растојање тачке C од центра круга O, Δl — бескрајно мала дужина MM' елемента лука, чија је целокупна дужина s, x — растојање тачке M тог елемента од праве, једначину линеарних момената можемо написати овако:



Слика 9

(3) $$x_c\, s = \sum x\, \Delta l\,,$$

где је збир проширен на све елементе нашег лука. Ако се даље конструише пројекција елемента Δl на тетиву и означи $M_1 N_1 = \Delta\lambda$, онда из сличности троуглова $MM'N$ (где је MN једнако и паралелно са $M_1 N_1$ и OMK, где је K пројекција тачке M на симетралу, имамо:

$$\frac{\Delta l}{\Delta\lambda}=\frac{OM}{OK}=\frac{R}{x},$$

одакле је

$$x\,\Delta l = R\,\Delta\lambda\,.$$

Ако се тај резултат унесе у једначину (3), може се написати:

$$x_c\,s = \sum R\,\Delta\lambda = R\sum\Delta\lambda = RT\,,$$

где смо са T означили целокупну дужину тетиве. Према томе за x_c имамо вредност

$$x_c=\frac{RT}{s}$$

или речима:

(4) $$x_c=\frac{\text{полупречник}\times\text{тетива}}{\text{лук}}\,.$$

Одређивање те величине на наведени начин је пример како се помоћу елементарних трансформација може понекад избећи процес интеграције.

Помоћу полупречника R и угла α, x_c се изражава овако:

(5) $$x_c=R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,.$$

За неке специјалне вредности угла α имамо:

за полукруг са $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, $x_c=2R:\pi\approx 0{,}6366\,R$,

за четвртину круга са $\alpha=\frac{1}{4}\pi$, $x_c=2R\sqrt{2}:\pi\approx 0{,}9003\,R$,

за шестину круга са $\alpha=\frac{1}{6}\pi$, $x_c=3R:\pi\approx 0{,}9549\,R$.

Претпоставимо сад да је угао α мали, тада можемо ставити

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{6}+\frac{\alpha^5}{5!}-\cdots\approx\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)$$

и из (5) имамо

$$x_c\approx R\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right).$$

Ако, са друге стране, одредимо приближну вредност такозване висине h лука, тј. растојање најудаљеније тачке лука од тетиве лука, која има вредност

$$h = R\,(1 - \cos\alpha) \approx \frac{1}{2}\,R\alpha^2,$$

онда се за растојање δ_c тачке C од тетиве може написати образац:

$$\delta_c \approx \frac{2}{3}\,h\,.$$

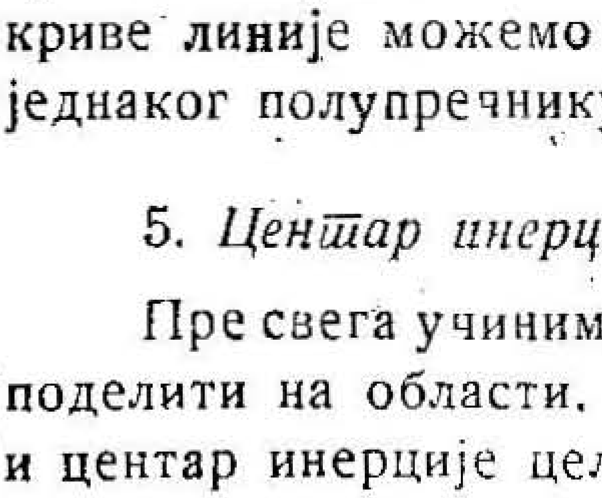
Овај се образац може применити и на мали лук сваке друге криве линије, а не само на кружни лук, јер малу област сваке криве линије можемо сматрати као кружну линију полупречника једнаког полупречнику кривине.

5. *Ценшар инерције шроугла, чешвороугла и многоугла.*

Пре свега учинимо ову примедбу. Ако неку површину можемо поделити на области, чији центри инерције леже на истој правој, и центар инерције целокупне површине лежи на тој правој.

а. Троугао

Пошто сваки троугао можемо правима паралелним једној страни поделити на бескрајно уске области са центром инерције, који у граничном положају лежи у средини паралелног пресека (сл. 10), може се тврдити да центар инерције мора лежати на правој што спаја свако теме са средином супротне стране. Из геометрије је познато да се те праве секу у истој значајној тачки троугла, која се зове *шежишше.* Свака линија, на пр. RR_1, је *шежишна линија.* Тежиште дели сваку линију у односу 2:1 са већим делом до темена.



Слика 10

Ако је положај троугла одређен координатама темена, и то у односу на координатни систем у простору

$$P\,(x_1,\,y_1,\,z_1),\quad Q\,(x_2,\,y_2,\,z_2),\quad R\,(x_3,\,y_3,\,z_3),$$

онда за координате центра инерције имамо:

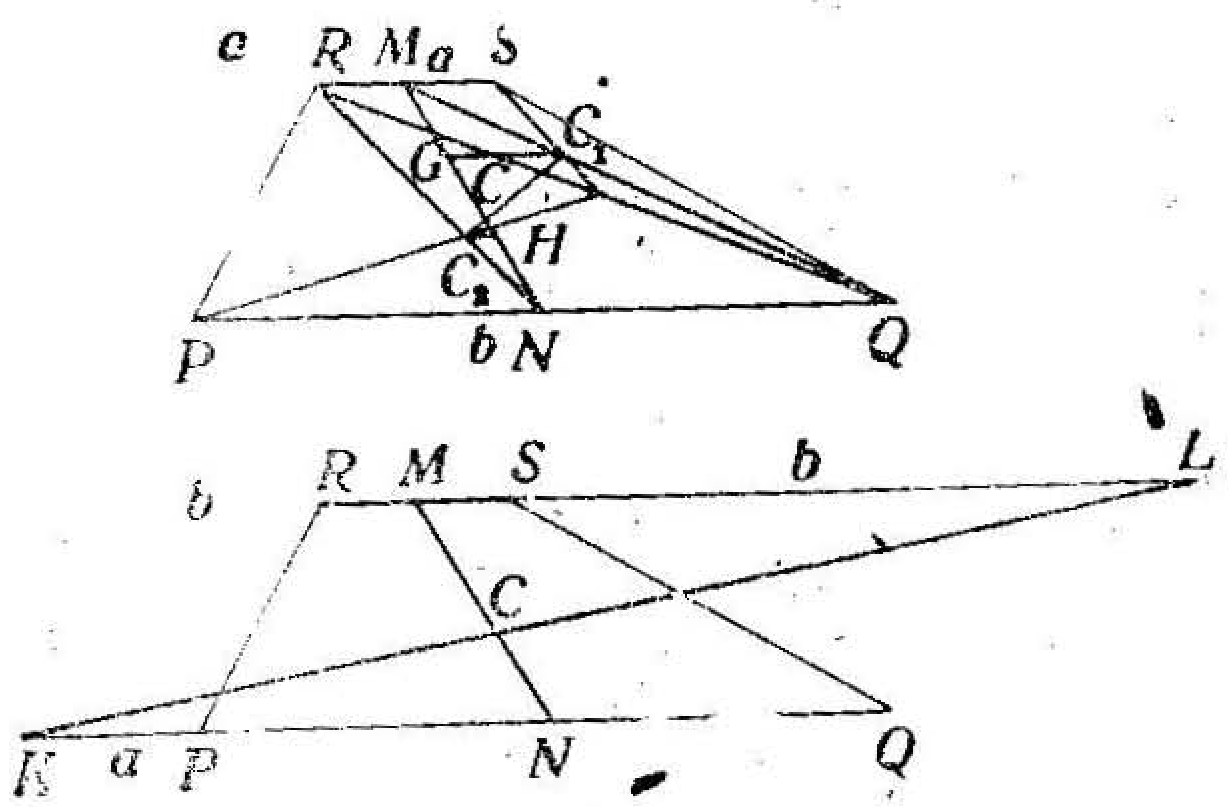
$$x_c = \frac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3),\quad y_c = \frac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3),\quad z_c = \frac{1}{3}\,(z_1 + z_2 + z_3).$$

b. Паралелограм

Пошто је не само обим паралелограма него и површина паралелограма централно-симетрична слика, центар инерције те површине налази се у пресеку паралелограмових дијагонала.

c. Трапез

Нека су код трапеза $PQSR$ (сл. 11, a) основе $RS = a$, $PQ = b$ и висина h. Повуцимо дијагоналу QR и нека је C_1 центар инер-



Слика 11

ције троугла QRS, а C_2 — троугла QRP. Површину трапеза можемо заменити са две површине-масе: масом $\frac{1}{2}ah$ у тачки C_1 и масом $\frac{1}{2}bh$ у тачки C_2. Пресечна тачка C праве C_1C_2 са правом MN, која спаја средине основа, одређује положај центра инерције трапеза.

Тачка C дели дуж C_1C_2 у односу: $CC_1 : CC_2 = \frac{1}{2}bh : \frac{1}{2}ah = b:a$.

Ако повучемо кроз тачке C_1 и C_2 праве паралелне са основама до пресека са MN у тачкама G и H, из сличности троуглова CC_1G и CC_2H можемо написати:

$$CG : CH = CC_1 : CC_2 = b : a. \tag{6}$$

Пошто G и H деле дуж $MN = d$ на три једнака дела, можемо са ознакама $CM = d_1$, $CN = d_2$ ставити

$$CG = d_1 - \frac{1}{3}\,d = \frac{1}{3}(2d_1 - d_2),$$

$$CH = d_2 - \frac{1}{3}\,d = \frac{1}{3}(2d_2 - d_1)$$

и тада из (6) имамо

$$(2d_1 - d_2) : (2d_2 - d_1) = b : a .$$

Одатле одређујемо

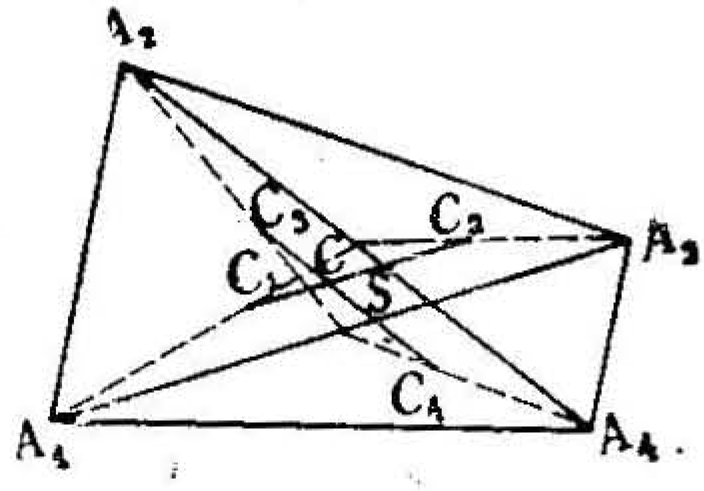
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{a + 2b}{b + 2a} .$$

То је вредност односа у коме тачка C дели дуж MN. У том истом односу стоје и растојања h_1 и h_2 тачке C од основа трапеза. Пошто је $h_1 + h_2 = h$, лако се после тога могу добити ове вредности за h_1 и h_2:

$$h_1 = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}, \qquad h_2 = \frac{h}{3}\,\frac{b + 2a}{a + b} .$$

За графичко одређивање тачке C може послужити ова конструкција. Одмеримо од тачке S (сл. 11, b) дужину $SL = b$ и од тачке P на другу страну дужину $PK = a$ и спојимо тачке K и L. Пресек праве KL са правом MN, што није тешко потврдити, одређује тачку C.

d. Четвороугао



Слика 12

Ако четвороугао $A_1A_2A_3A_4$ (сл. 12) прво дијагоналом A_2A_4 поделимо на два троугла $A_1A_2A_4$ и $A_3A_2A_4$ са центрима инерције C_1 и C_2, а затим дијагоналом A_1A_3 на два троугла $A_2A_1A_3$ и $A_4A_1A_3$ са центрима C_3 и C_4, пресек правих C_1C_2 и C_3C_4, тачка C, одређује центар инерције четвороугла. Пошто је свака од правих C_1C_2 и C_3C_4 паралелна односној дијагонали, довољно је одредити само две тачке, рецимо C_1 и C_3, и повући кроз њих паралеле са дијагоналама; њихов пресек је тачка C. Најзад, за конструкцију тачке C можемо искористити особину те тачке, да је $CC_1 = SC_2$, где је тачка S пресек праве C_1C_2 са дијагоналом A_2A_4. Доказ ове особине може послужити као вежба читаоцу.

е. Многоугао

Сваки многоугао можемо раставити на троуглове и сличним поступком као код четвороугла одредити центар инерције многоугла.

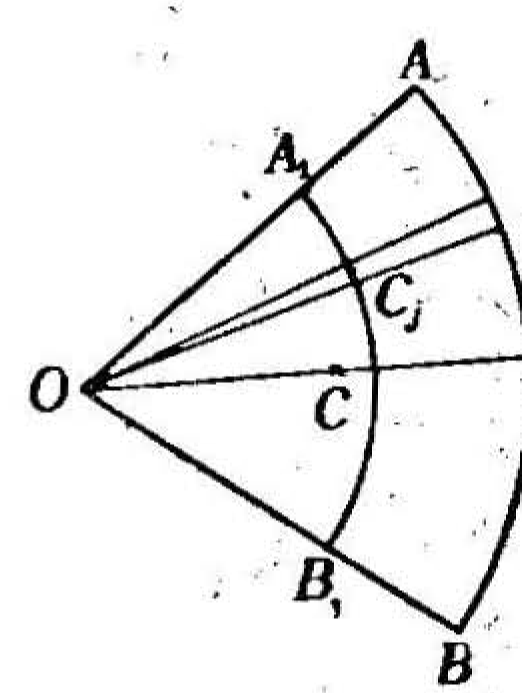
Координата, рецимо x_c, центра инерције таквог једног многоугла може се одредити из једначине

$$P x_c = \frac{1}{3} \sum P_i \left(x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + x_3^{(i)} \right),$$

где је: P — површина многоугла, P_i — површина i 'ог троугла и $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ координате три темена i 'ог троугла.

6. *Центар инерције кружног сектора*

Пошто сваки кружни сектор (сл. 13) можемо поделити на бескрајно мале секторе, од којих сваки можемо сматрати за троугао, а у граничном случају центар инерције тог сектора лежи на растојању $\frac{2}{3}R$ од центра круга, онда масу површине кружног сектора (OAB) полупречника R можемо заменити хомогеним луком A_1B_1 полупречника $\frac{2}{3}R$. Ако на лук A_1B_1 приприменимо образац (4), имаћемо



Слика 13

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{R \cdot \overline{A_1 B_1}}{\smile A_1 B_1},$$

а пошто је

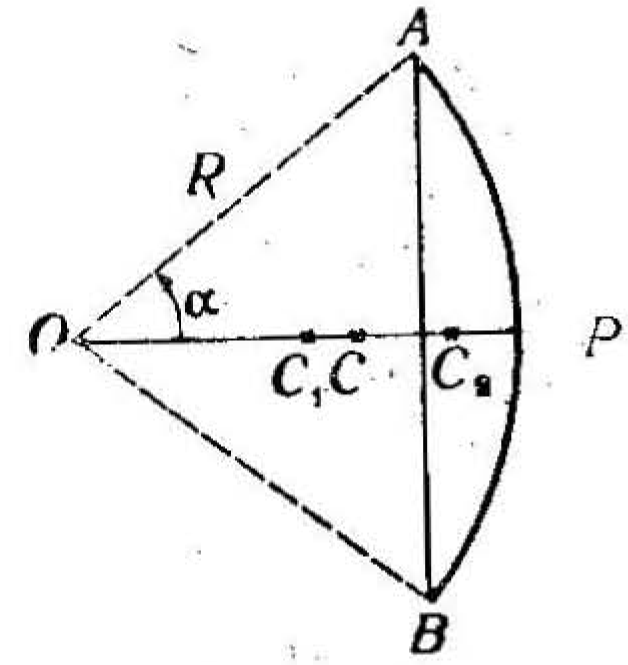
$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\smile A_1 B_1} = \frac{\overline{A B}}{\smile A B},$$

можемо за кружни сектор дефинитивно написати

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{\text{полупречник} \times \text{тетиве}}{\text{лук}}.$$

7. *Центар инерције кружног сегмента*

Узмимо сегмент $APBA$ (сл. 14), који се може сматрати као разлика кружног сектора $OAPB$ и троугла OAB. Ако означимо са C_2, C и C_1 центре инерције тих површина, за тачку O можемо написати ову једначину линеарних момената



Слика 14

(7) $\quad$ (површ. сект.) $x_c =$
$=$ (површ. троуг.) $x_{c_1} +$ (површ. сегм.) x_{c_2} .

Пошто је

површ. сект. $= \frac{1}{2} R \,.\, 2 R\alpha = R^2\alpha$,

површ. троуг. $= \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha = R^2 \sin\alpha \cos\alpha$,

површ. сегм. $= R^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)$ •

и

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{R \sin\alpha}{\alpha} ,$$

$$x_{c_1} = \frac{2}{3} R \cos\alpha ,$$

из једначине (7) изводимо:

$$x_{c_2} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha} .$$

Одредимо још растојање ξ_{c_2} тачке C_2 од тетиве AB:

$$\xi_{c_2} = x_{c_2} - R \cos\alpha = \frac{1}{3} R \frac{2 \sin^3\alpha - 3\alpha \cos\alpha + 3 \sin\alpha \cos^2\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{3} R \frac{2 \sin\alpha - 3\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos^2\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha} .$$

Ако се зауставимо на малом углу α и уведемо слично случају 4. висину сегмента са приближном вредношћу

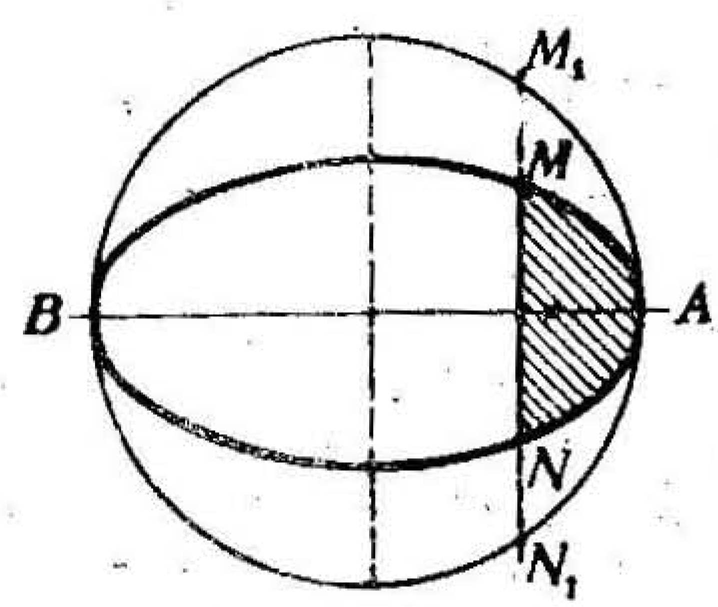
$$h \approx R \frac{\alpha^2}{2},$$

за ξ_{c_2} се добија ова приближна вредност[1]):

$$\xi_{c_2} = \frac{2}{5} h .$$

8. *Центар инерције елиптичког сегмента*

Нека је AMN елиптички сегмент. Докажимо да се његов центар инерције поклапа са центром инерције кружног сегмента $A\,M_1\,N_1$ који одговара елиптичком сегменту (сл. 15). Заиста, центар инерције пројекције сваке равне слике ма на коју раван поклапа се са пројекцијом центра инерције те слике на исту раван. Пошто се наведени елиптички сегмент може сматрати као пројекција кружног сегмента на раван елипсе, при чему се обе равни секу по правој AB, можемо тврдити да се центри инерције једне и друге слике поклапају.



Слика 15

---

[1]) Означимо тригонометриски множитељ код x_{c_2} са k и трансформишимо га помоћу обрасца

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

на овај начин:

$$k = \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{3}{4}\,\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - \dfrac{\sin 3\alpha}{3\alpha}}{1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} .$$

Ако применимо сад приближни образац

$$\frac{\sin\beta}{\beta} \approx 1 - \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^4}{120},$$

долазимо до резултата

$$k \approx \frac{3}{2}\,\frac{1 - 0{,}5\,\alpha^2}{1 - 0{,}2\,\alpha^2} \approx \frac{3}{2}(1 - 0{,}3\alpha^2).$$

Према том резултату имамо

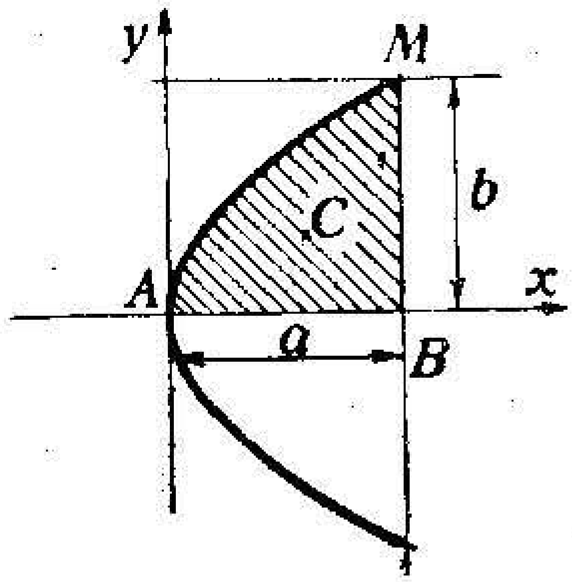
$$\xi_{c_2} = \frac{2}{3} R k - R\cos\alpha = R(1 - 0{,}3\,\alpha^2) - R(1 - 0{,}5\,\alpha^2) =$$

$$= \frac{1}{5} R\alpha^2 = \frac{2}{5} h .$$

9. *Центар инерције површине омеђене луком параболе*

Нека је дата површина омеђена луком параболе AM (сл. 16), делом AB осе x и ординатом b.

Пошто за координате x_c и y_c тачке C можемо написати ове једначине



Слика 16

$$x_c \int_0^a y dx = \int_0^a x y dx ,$$

$$y_c \int_0^a y dx = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx ,$$

при чему је једначина параболе

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x$$

после извршених квадратура добијамо:

$$x_c = \frac{3}{5} a , \qquad y_c = \frac{3}{8} b .$$

10. *Центар инерције сферне зоне и калоте*

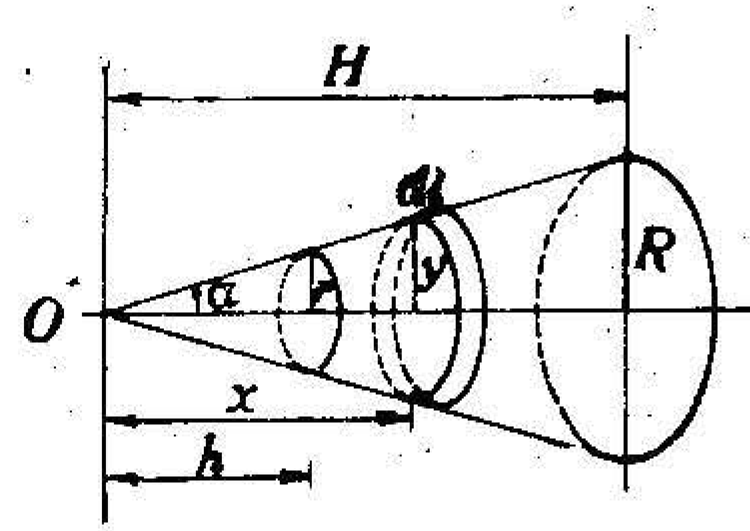
Пошто је површина сферне зоне и калоте пропорционална висини, центар инерције тих површина лежи у средини те висине.

11. *Центар инерције површине целог и зарубљеног конуса*

Узмимо зарубљени конус са полупречницима R и r једне и друге основе и са висином $H-h$ (сл. 17). Једначину линеарног момента можемо написати овако

$$x_c \int 2\pi y \, dl = \int 2\pi y \cdot x \cdot dl ,$$

где се интеграција односи на целу производиљу l.



Слика 17

Ако ставимо

$$dl = \frac{dy}{\sin \alpha} , \quad x = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}$$

наша једначина даје

$$x_c \int_r^R y\,dy = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\int_r^R y^2\,dy\,,$$

одакле имамо

$$x_c = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}.$$

Ако са d означимо растојање тачке C од основе полупречника R, тј. ставимо

$$d = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha} - x_c\,,$$

онда, узимајући у обзир да је

$$\frac{R-r}{\operatorname{tg}\alpha} = H-h\,,$$

можемо написати овај дефинитивни резултат:

$$d = \frac{H-h}{3}\;\frac{R+2r}{R+r}.$$

За случај целог конуса, кад је $r=0$ и према томе $h=0$, имамо

$$d = \frac{1}{3}H\,,$$

тј. центар инерције површине праве купе налази се на растојању трећине висине од основе.

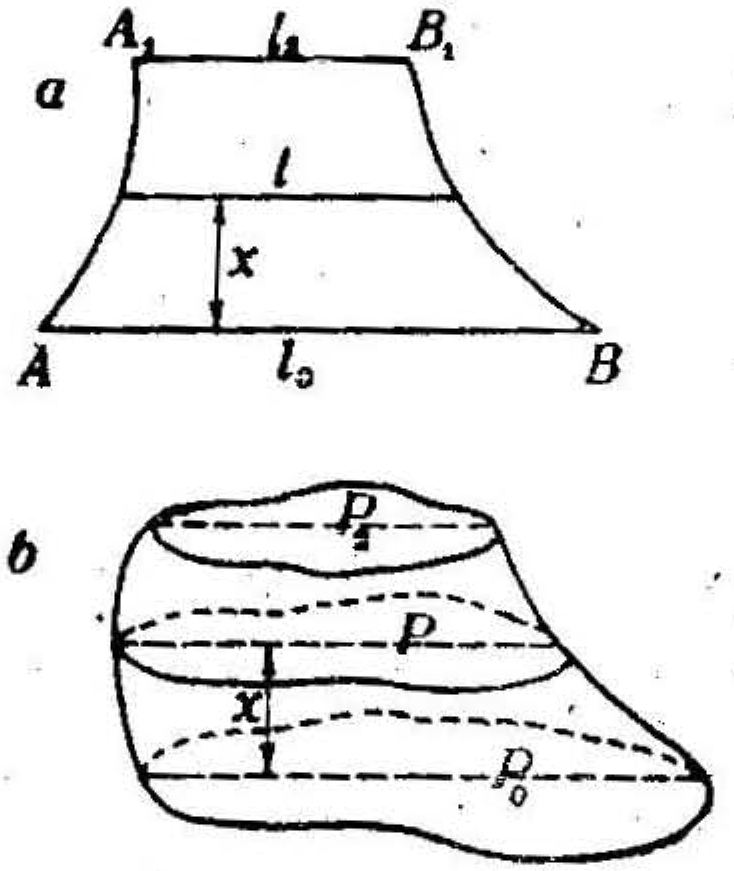
12. *Центар инерције маса чији распоред одређује квадратна функција растојања*

Нека је дата површина ABB_1A_1 (сл. 18, a) омеђена са две паралелне дужи AB и A_1B_1 и таквим линијама AA_1 и BB_1 да је дужина пресека l наше површине квадратна функција растојања x тог пресека од једне основе, тј.

(8) $$l = a + bx + cx^2.$$

Овој површини одговара и она запремина, која је омеђена са две паралелне равни P_0 и P_2 (сл. 18, b) и једном кривом површином, али такве особине да је површина P пресека паралелног основама на растојању x од једне основе квадратна функција тог растојања, тј.

(9) $$P = a + bx + cx^2.$$



Слика 18

Једначину линеарног момента за случај површине пишемо овако

$$x_c \int_0^h l\,dx = \int_0^h x\,l\,dx\,,$$

где је h растојање између основа. Ако искористимо вредност (8), имамо једначину:

$$x_c \int_0^h (a + bx + cx^2)\,dx = \int_0^h x\,(a + bx + cx^2)\,dx\,,$$

а идентичну једначину добили бисмо и за запремину помоћу (9).

После извршене интеграције можемо написати:

$$x_c = \frac{\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}bh^3 + \frac{1}{4}ch^4}{ah + \frac{1}{2}bh^2 + \frac{1}{3}ch^3}\,.$$

Узмимо у исто време у обзир разлику $h - x_c$ и израчунајмо однос

$$\frac{x_c}{h - x_c} = \frac{3a + 2bh + \frac{3}{2}ch^2}{3a + bh + \frac{1}{2}ch^2}\,. \tag{10}$$

Уведимо сад три дужине; l_0 — доње основе, l_1 — средње линије и l_2 — горње основе, тј. ставимо

$$l_0 = a\,,$$

$$l_1 = a + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{4}ch^2\,,$$

$$l_2 = a + bh + ch^2\,,$$

пошто је тада

$$3a + 2\,bh + \frac{3}{2}ch^2 = l_2 + 2\,l_1\,,$$

$$3a + \ \ bh + \frac{1}{2}ch^2 = l_0 + 2\,l_1\,,$$

место (10) можемо написати:

$$\frac{x_c}{h - x_c} = \frac{l_2 + 2\,l_1}{l_0 + 2\,l_1} .$$

Тај однос одређује растојање тачке C од основе.

Сличан резултат се добије и за наведену запремину:

$$(11) \qquad \frac{x_c}{h - x_c} = \frac{P_2 + 2\,P_1}{P_0 + 2\,P_1} ,$$

где су P_0, P_1, P_2 површине односних пресека.

Учинимо две примене обрасца (11).

α. *Центар инерције запремине конуса*

Нека је дат конус са теменом у S и са основом P_0 на растојању h од темена (сл. 19). Пошто је

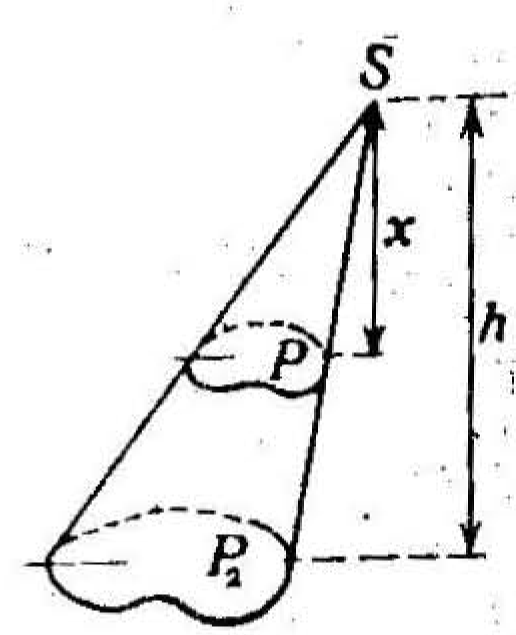
$$P : P_2 = x^2 : h^2$$

и према томе

$$P = \frac{P_2}{h^2}\, x^2 ;$$

то значи да наше тело испуњава услов претходног случаја, па можемо написати:

$$\frac{x_c}{h - x_c} = \frac{P_2 + 2\,P_1}{P_0 + 2\,P_1} = 3 ,$$



Слика 19

јер је

$$P_0 = 0 , \quad P_1 = \frac{1}{4} P_2 .$$

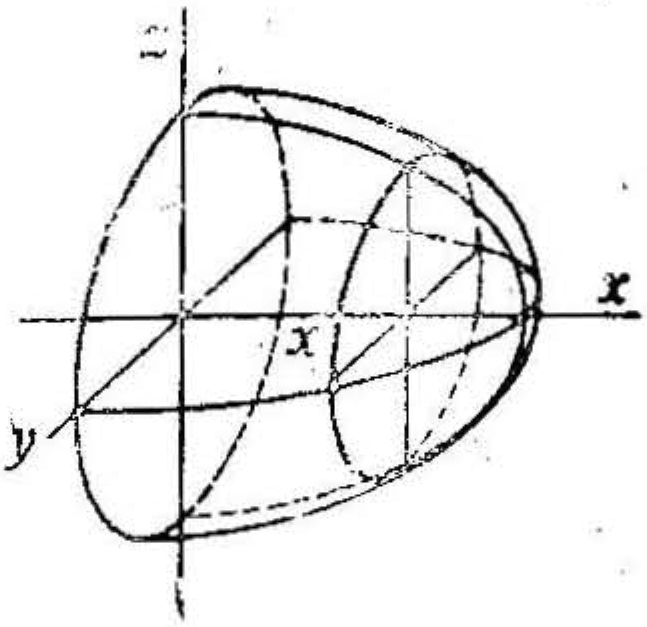
На тај начин је

$$x_c = \frac{3}{4} h .$$

β. *Центар инерције половине троосног елипсоида*

Нека треба одредити центар инерције половине елипсоида (сл. 20) чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Слика 20

и то, рецимо, оне половине која се добије пресеком равни Oyz. Ако претходну једначину напишемо у облику

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

можемо тврдити да у пресеку те површине са равни паралелном yOz равни имамо елипсу са полуосама

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,,\qquad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Пошто је површина те елипсе једнака

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

наше тело спада у тела третирана под 12. Пошто је у датом случају

$$P_0=\pi bc\,,\quad P_1=\frac{3}{4}\pi bc\,,\quad P_2=0\,,$$

образац (11) даје

$$\frac{x_c}{a-x_c}=\frac{3}{5}$$

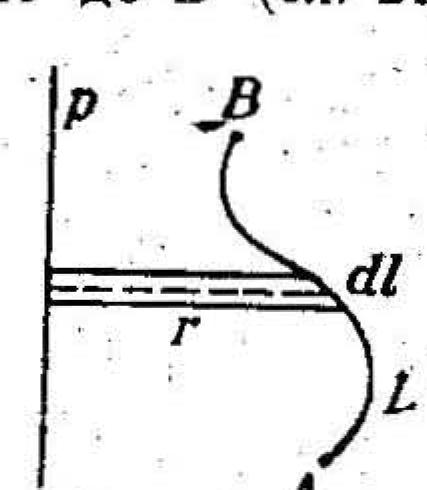
и према томе је

$$x_c=\frac{3}{8}a\,.$$

§ 1·24. Pappos — Guldin' ове теореме

Нека се део равне криве линије од тачке A до B (сл. 21) обрће око осе p која лежи у равни криве. Из диференцијалне геометрије је познато да се површина S, коју описује лук AB, изражава овим обрасцем:

$$\text{(1)}\qquad S=2\pi\int\limits_L r\,dl\,,$$



Слика 21

где је интеграл проширен на целу дужину L лука, r је растојање тачке лука од осе обртања и dl је елемент дужине тог лука.

Претпоставимо сад да се лук AB налази само с једне стране од праве p и означимо са r_c растојање центра инерције, тачке C, лука AB од праве p. Тада једначина за линеарни момент лука AB у односу на праву p гласи

$$(2) \qquad L r_c = \int_L r\, dl .$$

Ако ставимо вредност интеграла, узету из (2), у (1), добићемо

$$S = 2\pi r_c \, . \, L .$$

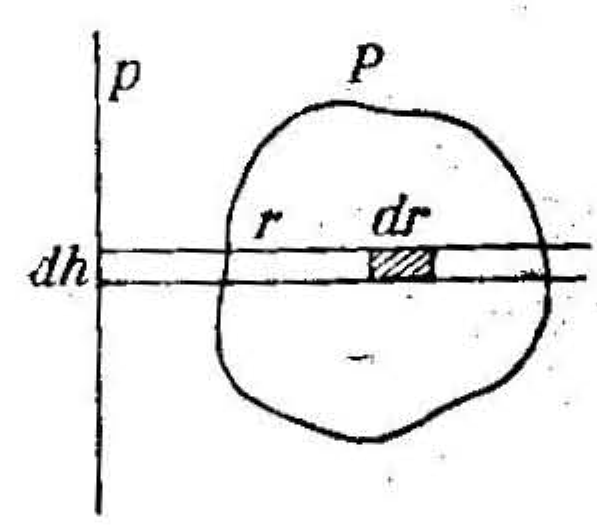
Овај резултат је прва Pappos-Guldin'ова[1]) теорема; она гласи:

Површина која се добија обртањем лука криве линије у равни око осе у тој истој равни, која не сече ту криву, једнака је производу дужине лука и обима круга који описује центар инерције тог лука.

Нека се сада нека равна површина P (сл. 22) обрће око неке праве p која не сече контуру те површине. Запремину V која се добија обртањем те површине можемо изразити обрасцем

$$(3) \qquad V = 2\pi \iint_P r\, dr\, dh ,$$

где је r растојање тачке елементарног правоугаоника са димензијама dr и dh од осе обртања p.



Слика 22

С друге стране, ако напишемо једначину линеарног момента површине P у односу на праву p, добија се

$$(4) \qquad P r_c = \iint_P r\, dr\, dh ,$$

где је r_c растојање центра инерције површине P од праве p.

[1]) Pappos, математичар, који је живео крајем трећег века наше ере у Александрији, оставио је „Математичку збирку" са многим геометриским ставовима.
Guldin Paul (1577—1643), математичар, штампао је дело „Centrobaryca", у којем је у новој форми изнео резултате Pappos'а

Ако и овде из једначине (3) елиминишемо вредност интеграла помоћу (4), изводи се образац

$$V = 2\pi r_c \cdot P$$

који изражава другу Pappos-Guldin'ову теорему:

Запремина која се добија обртањем равне површине око осе у тој истој равни, која не сече ту површину, једнака је производу величине те површине и обима круга који описује центар инерције те површине.

Пример. Ако се круг полупречника r обрће око праве на растојању R $(R > r)$ од центра круга добија се торус. Према наведеним теоремама површина тог торуса једнака је $S = 4\pi^2 rR$, а запремина $V = 2\pi^2 r^2 R$.

§ 1·3. Поларни квадратни момент инерције маса

Нека буду дате тачке $M_1, M_2, \ldots, M_n$ са масама $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и ма која тачка A, коју узимамо за *пол*.

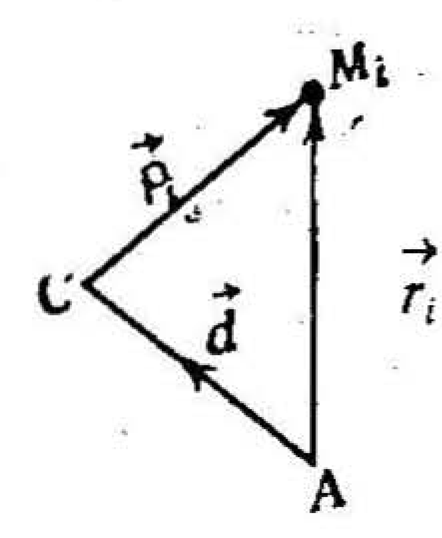
Збир производа масе сваке тачке и квадрата растојања те тачке од пола зове се *поларни квадратни момент инерције датих маса* у односу на дати пол. Кад нема сумње о којем се поларном моменту говори, реч квадратни се изоставља. Ако са r_i означимо растојање тачке M_i од тачке A, за поларни квадратни момент инерције нашег система тачака имамо

$$K_A = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 . \tag{1}$$

Ако је тачка A центар инерције система, поларни момент инерције K_C зове се *централни*. Ако са ρ_i означимо растојање тачке M_i од центра инерције, централни поларни момент износи

$$K_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 \tag{2}$$

Поставимо везу између K_A и K_C за исти систем. Ако са $\vec{r}_i$ и $\vec{\rho}_i$ означимо односне векторе положаја тачке M_i у односу на тачке A и C, биће (сл. 23)



Слика 23

$$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i + \vec{d}, \tag{3}$$

где је $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$.

Ако ставимо вредност (3) у (1) имамо:

$$(4)\quad K_A = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{\rho}_i + \vec{d})^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\rho_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{\rho}_i\,\vec{d}) + \sum_{i=1}^{n} m_i\,d^2 .$$

Како је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{\rho}_i\,\vec{d}) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\rho}_i\,,\,\vec{d}\right) = 0\,;$$

јер је за центар инерције

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\rho}_i = 0\,,$$

једначина (4) на основу (2) даје

$$(5)\qquad K_A = K_C + md^2\,,$$

где је

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

целокупна маса система.

Једначина (5) гласи: Поларни квадратни момент инерције материјалног система у односу ма на коју тачку једнак је збиру централног поларног квадратног момента инерције и производа масе система и квадрата растојања између пола и центра инерције.

Пошто је md^2 увек позитивно, једначина (5) показује да је централни поларни момент инерције најмањи од свих поларних квадратних момената инерције датог система.

Из исте једначине можемо закључити да је геометриско место полова, за које поларни момент има исту вредност, сферна површина.

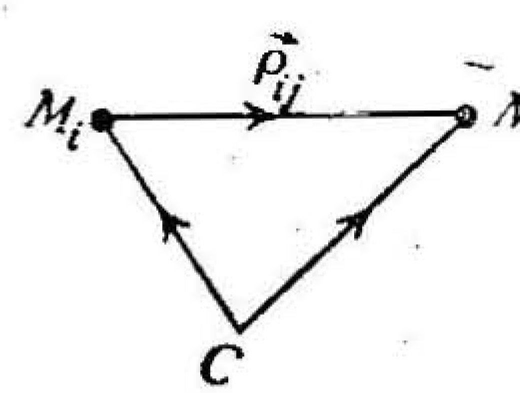
§ 1·31. Узајамни момент инерције маса

Ако са ρ_{ij} означимо растојање две тачке M_i и M_j маса m_i и m_j, двоструки збир

$$U = \sum_{i,j} m_i\,m_j\,\rho^2_{ij}\,,$$

где је свако растојање само једанпут узето, зове се *узајамни момент инерције маса датог система.*

Ако са $\vec{\rho}_{ij}$ означимо вектор положаја тачке M_j према тачки M_i, онда, узимајући у обзир тачку C система и ознаке претходног параграфа, можемо ставити (сл. 24)



Слика 24

$$(1)\qquad \vec{\rho}_{ij} = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i\,.$$

Из овог израза следује да је

$$\rho^2_{ij} = \rho^2_{ji}$$

и према томе можемо ставити да је

$$(2)\qquad 2U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i\, m_j\, \rho^2_{ij}\,,$$

где i и j узимају све вредности од 1 до n, а то значи да се свако растојање ρ_{ij} двапут рачуна: од тачке M_i до M_j и од тачке M_j до M_i.

Ако вредност (1) ставимо у (2) добићемо

$$2U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i\, m_j \left[\rho^2_j - 2\,(\vec{\rho}_j\,\vec{\rho}_i) + \rho^2_i\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{n} m_j\, \rho^2_j - 2\sum_{j=1}^{n} m_j \left(\vec{\rho}_j \sum_{j=1}^{n} m_i\, \vec{\rho}_i\right) + \sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{i=1}^{n} m_i\, \rho^2_i$$

или

$$2U = \sum_{i=1}^{n} m_i\, K_c + \sum_{j=1}^{n} m_j\, K_c = 2m\, K_c\,,$$

јер је и овде

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{\rho}_i = 0\,.$$

Према томе дефинитивно имамо

$$(3)\qquad U = m\, K_c\,.$$

На тај начин имамо

$$K_c = \frac{1}{m} \sum_{i,j} m_i \, m_j \, \rho^2_{ij} \, ,$$

тј. централни поларни квадратни момент инерције материјалног система једнак је узајамном моменту инерције тог система подељеном целокупном масом система.

Ова особина поларног момента може знатно олакшати његово израчунавање. Тако, на пр., ако имамо две масе m_1 и m_2 на растојању d, њихов централни поларни момент инерције одмах се добија по обрасцу

$$K_c = \frac{m_1 \, m_2 \, d^2}{m_1 + m_2}$$

без одређивања положаја тачке C. Исто тако за један троугао са масама m_1, m_2, m_3 у теменима, а са странама d_1, d_2, d_3 непосредно пишемо

$$K_c = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left(m_2 \, m_3 \, d^2_1 + m_3 \, m_1 \, d^2_2 + m_1 \, m_2 \, d^2_3 \right) .$$

Како према § 1·3 централни поларни квадратни момент можемо заменити са

$$K_c = K_A - m \, d^2 ,$$

из једначине (3) следује

$$U = m \, K_A - m^2 \, d^2 .$$

Сличан образац важи и за случај кад се тачка A поклопи са почетком координатних оса — тачком O. Тада имамо

$$U = m \, K_0 - m^2 \, d^2 , \tag{4}$$

овде је d растојање тачке C од почетка координата. У развијеном облику из (4) следује овај *Лапласов образац*

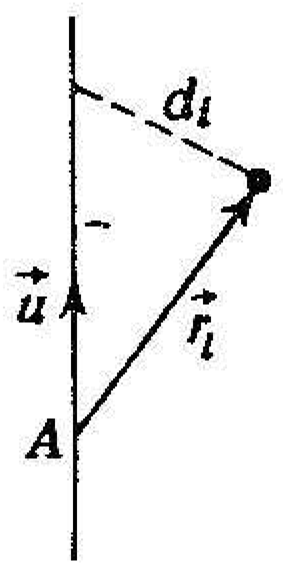
$$\sum_{i,j} m_i \, m_j \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \right] =$$

$$= \sum_i m_i \cdot \sum_i m_i \, (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \left(\sum_i m_i \right)^2 (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2) .$$

§ 1·4. Аксијални квадратни момент инерције

Нека су поново дате тачке M_1, M_2, . . . , M_n са масама m_1, m_2, . . . , m_n. Уочимо у простору неку праву, на њој можемо обележити одређен смер, тј. претворити је у осу; орт те осе означимо са $\vec{u}$.

Збир производа масе сваке тачке и квадрата растојања те тачке од праве (осе) зове се *аксијални квадратни момент инерције* или кратко *момент инерције* датих маса око те праве (осе).



Слика 25

Ако са d_i означимо растојање масе m_i од осе са ортом $\vec{u}$ (сл. 25), а са J_u момент инерције око те осе, према дефиницији имаћемо основну једначину

$$J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i^2 .$$

Тај израз се може написати и у другом облику врло важном у проучавању теорије момента инерције помоћу векторске анализе: Ако на правој $\vec{u}$ узмемо тачку A и вектор положаја тачке m_i према тачки A означимо са $\vec{r}_i$, растојање d_i може се изразити интензитетом векторског производа $\left[\vec{u}\,\vec{r}_i\right]$, тј. ставити

$$d_i = \overline{\left[\vec{u}\,\vec{r}_i\right]} ,$$

где смо помоћу црте означили интензитет.

Момент инерције можемо тада изразити у облику

$$J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{u}\,\vec{r}_i\right]^2$$

или

$$J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\left[\vec{u}\,\vec{r}_i\right]\left[\vec{u}\,\vec{r}_i\right]\right) .$$

Овај образац се може узети за дефиницију момента инерције око дате осе.

Јасно је да момент инерције не зависи од смера орта $\vec{u}$ на датој правој, јер се $\left|\vec{u}\,\vec{r}_i\right|^2$ не мења променом $\vec{u}$ у $-\vec{u}$. Орт $\vec{u}$, са тачком A на правој треба сматрати као везани вектор. Положај тачке A на правој орта $\vec{u}$ може се изабрати произвољно, јер за сваки положај тачке A векторски производ $\left[\vec{u}\,\vec{r}_i\right]$ има исту векторску вредност.

У нарочитом случају кад се права поклапа са x осом, чији је орт $\vec{i}$, момент инерције J_x око те осе има вредност

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{i}\,\vec{r}_i\right]^2,$$

а пошто вектор $\left[\vec{i}\,\vec{r}_i\right]$ има координате

$$0,\ -z_i,\ y_i,$$

где су x_i, y_i, z_i — координате вектора положаја $\vec{r}_i$, при чему се тачка A поклапа са почетком координатног система, имаћемо

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(y_i^2 + z_i^2)\,.$$

На сличан начин се за моменте инерције око других координатних оса добија

$$J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(z_i^2 + x_i^2)\,.$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(x_i^2 + y_i^2)\,.$$

Ако су масе непрекидно распоређене у простору, збир у изразу за момент инерције прелази у интеграл и за момент инерције маса распоређених у запремини V са густином σ имамо израз

$$J_u = \underset{V}{\iiint} \sigma\, r^2\, dV\,,$$

где је r растојање тачке тела од осе $\vec{u}$.

Ако су масе распоређене по површини или линији са густином σ_1 одн. σ_2, њихови моменти инерције ће бити

$$J_u = \iint_S \sigma_1 r^2 \, dS \,, \qquad J_u = \int_L \sigma_2 r^2 \, dl \,,$$

при чему је први интеграл проширен на целокупну површину S, а други на линију L.

Како сваки момент инерције има димензију

$$[J_u] = ML^2 \,,$$

он се увек може претставити као производ масе система и квадрата неке дужине, тј. ставити

$$J_u = ma^2 \,. \tag{1}$$

Дужина a зове се *крак инерције*. Јасно је да је момент инерције система дате масе око дате осе познат, ако је познат крак инерције за ту осу.

Понекад се моменту инерције даје још један облик. У изразу (1) је дата маса система, а одређује се дужина a — крак инерције. За исту вредност момента инерције можемо узети као дату неку унапред изабрану дужину, рецимо l, чији квадрат у производу са неком масом m' даје исту бројну вредност момента инерције, тј. ставити

$$J_u = ma^2 = m' l^2 \,,$$

где је l дата дужина. Маса m' се тада зове *редукована маса инерције датог система у односу на дату осу и на дато растојање редуковане масе од те осе*. Тако, на пр., момент инерције неког хомогеног цилиндра полупречника r и масе m у односу на његову осу једнак је $J = 0{,}5\, mr^2 = m' l^2$, где је m' редукована маса за отстојање l. Специјално за $l = r$ имамо $m' = 0{,}5\, m$.

§ 1·41. Релативна вредност аксијалних момената инерције. Веза између аксијалних момената и поларног квадратног момента инерције

Ако узмемо три момента инерције око координатних оса

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (y_i^2 + z_i^2) \,, \qquad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (z_i^2 + x_i^2) \,,$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_i^2 + y_i^2) \,,$$

можемо пре свега закључити да те три величине не могу узимати у општем случају потпуно произвољне вредности. Заиста, начинимо збир $J_x + J_y$, тако видимо да је

$$J_x + J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 ,$$

тј.

$$J_x + J_y = J_z + 2 \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 .$$

Из те једначине непосредно следује неједнакост

$$(1) \qquad J_x + J_y > J_z ,$$

тј. збир два момента инерције око ортогоналних оса увек је већи од момента инерције око треће осе.

С друге стране, ако образујемо разлику

$$J_x - J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 - x_i^2) ,$$

видимо да је десна страна мања од $\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$, а према

$$(2) \qquad J_x - J_y < J_z ,$$

тј. разлика момената инерције око две осе ортогоналног триједра увек је мања од момента инерције око треће осе.

Односи изражени неједнакостима (1) и (2) слични су односима који постоје између страна ма ког троугла.

Ако саберемо сва три аксијална момента, добићемо

$$J_x + J_y + J_z = 2 K_0 ,$$

где је K_0 поларни момент инерције у односу на почетак координатног система. Ова једначина поставља везу између аксијалних момената инерције око три ортогоналне осе и поларног квадратног момента у односу на пресек тих оса.

§ 1·5. Производ инерције. Девијациони момент

Упоредо са моментом инерције J_u, који смо изразили векторским обрасцем

$$J_u = \sum_{i=1}^{u} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i] [\vec{u}\,\vec{r}_i] \right),$$

природно је саставити израз

$$\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i] [\vec{v}\,\vec{r}_i] \right),$$

који се разликује од претходног тиме што су код скаларног производа ортови векторских производа различити.

Израз Π_{uv} зове се *производ инерције* датог система за две осе $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Ортови $\vec{u}$ и $\vec{v}$ у производу инерције могу бити потпуно произвољни, само да припадају правима које се секу.

Уочимо пре свега два специјална случаја:

1. Ако је

$$\vec{v} = \vec{u},$$

или су уопште две праве са ортовима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ *колинеарне*, производ инерције се претвара у момент инерције, тј.

$$\Pi_{uu} = J_u .$$

2. Као други специјални случај узмимо случај *ортогоналних* ортова, тј. претпоставимо да је

$$\vec{v} \perp \vec{u} .$$

Том производу дајемо назив *девијационог момента*.

Израчунајмо девијациони момент за осе Ox и Oy, који је одређен изразом

$$\Pi_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{i}\,\vec{r}_i] [\vec{j}\,\vec{r}_i] \right).$$

Пошто координате првог и другог векторског производа имају вредности

$$[\vec{i}\,\vec{r}_i] \; . \; . \; . \; . \qquad 0, \; -z_i, \; y_i;$$

$$[\vec{j}\,\vec{r}_i] \; . \; . \; . \; . \qquad z_i, \; 0, \; -x_i,$$

за девијациони момент имамо

$$\Pi_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i .$$

Обично се у литератури за девијациони момент узима збир $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$, који се разликује од претходног знаком, али ћемо ми задржати наш израз, јер је у природној вези са општим појмом производа инерције.

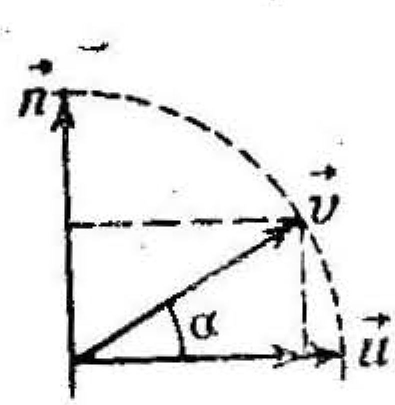
Покажимо сад да се сваки производ инерције може саставити од два члана, од којих један зависи од момента инерције, а други од девијационог момента.

У изразу

$$\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i][\vec{v}\,\vec{r}_i]\right) \tag{1}$$

орт $\vec{v}$ можемо раставити у две компоненте и то једну у правцу првог орта $\vec{u}$ и другу у правцу нормале $\vec{n}$ на орт $\vec{u}$ у равни ортова $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Ако угао између $\vec{v}$ и $\vec{u}$ (сл. 26) означимо са α, имаћемо

$$\vec{v} = \vec{u}\cos\alpha + \vec{n}\sin\alpha .$$



Слика 26

Ако ту вредност орта $\vec{v}$ ставимо у (1), добијамо

$$\Pi_{uv} = \cos\alpha \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i][\vec{u}\,\vec{r}_i]\right) + \sin\alpha \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i][\vec{n}\,\vec{r}_i]\right)$$

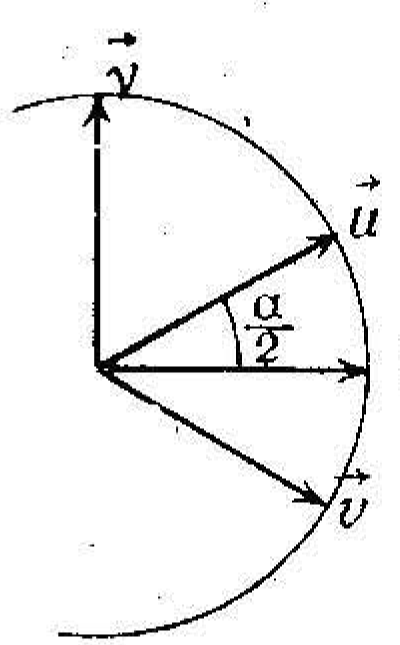
или

$$\Pi_{uv} = J_u \cos\alpha + \Pi_{un} \sin\alpha = J_u \cos(\vec{u}\,\vec{v}) + \Pi_{un} \sin(\vec{u}\,\vec{v}),$$

при чему је J_u — момент инерције око прве осе, а Π_{un} девијациони момент за ту осу и нормалу на њу.

Покажимо сад да сваки производ инерције можемо претставити као разлику величина пропорционалних моментима инерције.

Упоредо са ортовима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ узмимо у обзир правац симетрале угла између тих ортова са ортом $\vec{\sigma}$ и правац нормале на ту симетралу са ортом $\vec{\nu}$ (сл. 27). Тада можемо написати:



Слика 27

$$\vec{u} = \vec{\sigma} \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{\nu} \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\vec{v} = \vec{\sigma} \cos\frac{\alpha}{2} - \vec{\nu} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ако те вредности ставимо у израз за производ инерције имаћемо

$$\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i]\,[\vec{v}\,\vec{r}_i]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\cos\frac{\alpha}{2}\,[\vec{\sigma}\,\vec{r}_i] + \sin\frac{\alpha}{2}\,[\vec{\nu}\,\vec{r}_i],\cos\frac{\alpha}{2}\,[\vec{\sigma}\,\vec{r}_i] - \sin\frac{\alpha}{2}\,[\vec{\nu}\,\vec{r}_i]\right) =$$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{\sigma}\,\vec{r}_i]\,[\vec{\sigma}\,\vec{r}_i]\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{u} m_i \left([\vec{\nu}\,\vec{r}_i]\,[\vec{\nu}\,\vec{r}_i]\right),$$

одакле долазимо до овог дефинитивног резултата

$$\Pi_{uv} = J_\sigma \cos^2\frac{\alpha}{2} - J_\nu \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

где смо са J_σ и J_ν означили моменте инерције система око оса са ортовима $\vec{\sigma}$ и $\vec{\nu}$.

Ако је $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тј. ако су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортогонални, а то значи да је Π_{uv} девијацијони момент, имаћемо

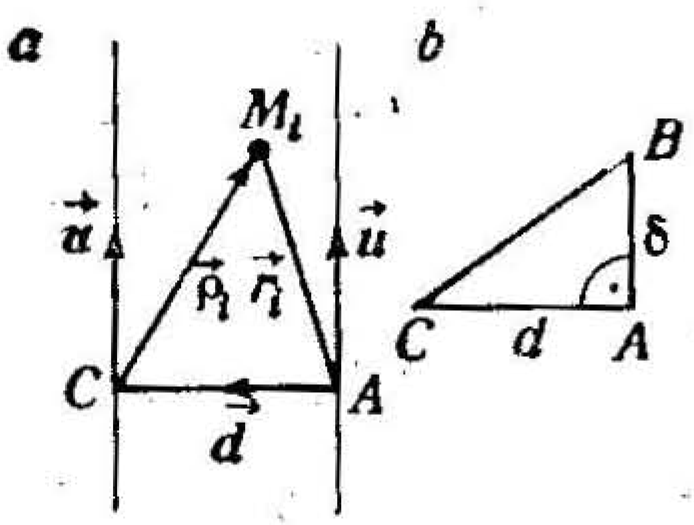
$$\Pi_{uv} = \frac{1}{2}(J_\sigma - J_\nu).$$

§ 1·6. Промена момента инерције и производа инерције у вези са променом положаја оса

Момент инерције датог материјалног система мења у општем случају своју вредност у вези са променом положаја осе у простору. Проучимо те промене прво претпостављајући да оса не мења свој правац, а затим узмимо у обзир и промену правца. Слична проучавања извешћемо и за производ инерције.

§ 1·61. Веза између момената инерције око паралелних оса

За упоређивање момената инерције око паралелних оса проучимо прво случај кад једна од паралелних оса пролази кроз центар инерције система (таква оса зове се *централна оса*). Ако момент инерције око централне осе са ортом $\vec{u}$ означимо са $J_u^{(C)}$, а вектор положаја тачке M_i система у односу на тачку C означимо са $\vec{\rho}_i$ (сл. 28, a), биће



Слика 28

$$J_u^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{u}\,\vec{\rho}_i]^2 .$$

Означимо даље са A подножје нормале спуштене из тачке C на другу од паралелних оса и са $\vec{r}_i$ вектор положаја тачке M_i у односу на A. Момент инерције око осе што пролази кроз тачку A, а паралелна је са првом осом означимо са $J_u^{(A)}$; тада је

$$J_u^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{u}\,\vec{r}_i]^2 .$$

Ако са $\vec{d}$ означимо вектор $\overrightarrow{AC}$, биће

$$\vec{r}_i = \vec{d} + \vec{\rho}_i .$$

Пошто је

$$[\vec{u}\,\vec{r}_i]^2 = [\vec{u},\,\vec{d} + \vec{\rho}_i]^2 = [\vec{u}\,\vec{d}]^2 + 2\,([\vec{u}\,\vec{d}]\,[\vec{u}\,\vec{\rho}_i]) + [\vec{u}\,\vec{\rho}_i]^2 ,$$

добијамо

$$J_u^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, [\vec{u}\,\vec{d}\,]^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i\, ([\vec{u}\,\vec{d}\,]\,[\vec{u}\,\vec{\rho}_i]) + \sum_{i=1}^{n} m_i\, [\vec{u}\,\vec{\rho}_i]^2,$$

што на основу једначина

$$[\vec{u}\,\vec{d}\,]^2 = d^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, ([\vec{u}\,\vec{d}\,]\,[\vec{u}\,\vec{\rho}_i]) = ([\vec{u}\,\vec{d}\,]\,[\vec{u}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\rho}_i]) = 0$$

доводи до резултата (Хајгенс-Штајнерова теорема):

$$J_u^{(A)} = J_u^{(C)} + m\,d^2, \tag{1}$$

где је m, као и раније, целокупна маса система.

Једначину (1) можемо овако формулисати речима:

Момент инерције око ма које осе једнак је збиру момента инерција око паралелне централне осе и производа масе система и квадрата растојања између оса.

Једначина (1) своди проучавање момента инерције око произвољних оса на проучавање тих момената око централних оса.

Ако желимо да упоредимо моменте инерције око две паралелне осе од којих ниједна није централна, онда можемо сваки момент инерције упоредити са моментом инерције око паралелне централне осе, па затим упоредити резултате. Ако растојање центра маса од једне осе, што пролази кроз тачку A, означимо са d, а од друге, што пролази кроз тачку B са d_1, имаћемо

$$J_u^{(A)} = J_u^{(C)} + m\,d^2,$$
$$J_u^{(B)} = J_u^{(C)} + m\,d_1^2;$$

одатле изводимо резултат:

$$J_u^{(B)} = J_u^{(A)} + m\,(d_1^2 - d^2),$$

који поставља везу између два момента инерције око паралелних оса али помоћу растојања центра инерције маса од тих оса.

У специјалном случају, кад нормални пресек паралелних правих што пролазе кроз тачке A, B, C доводи до правоуглог троугла са правим углом у тачци A (сл, 28, b), имамо

$$d_1^2 - d^2 = \delta^2,$$

где је δ растојање између оса кроз тачке A и B. У овом положају оса имамо везу

$$J_u^{(B)} = J_u^{(A)} + m\,\delta^2,$$

у којој више нема централног момента инерције, већ само два момента за упоређивање, узајамно растојање њихових оса и маса система.

§ 1·62. Промена момента инерције у вези са променом правца осе

Претпоставимо да орт $\vec{u}$ са почетком у почетку O координатног система има за координате α, β, γ, тј.

$$\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}.$$

Ако вектор положаја масе m_i у односу на тачку O означимо са $\vec{r}_i$, за момент инерције система у односу на осу $\vec{u}$ имамо

$$J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{u}\,\vec{r}_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k},\ \vec{r}_i\,]^2$$

или

$$J_u = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{i}\,\vec{r}_i]^2 + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{j}\,\vec{r}_i]^2 + \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{k}\,\vec{r}]^2 +$$

$$+ 2\,\beta\,\gamma \sum_{i=1}^{u} m_i\,([\vec{j}\,\vec{r}]\,[\vec{k}\,\vec{r}_i]) + 2\,\gamma\,\alpha \sum_{i=1}^{n} m_i\,([\vec{k}\,\vec{r}_i]\,[\vec{i}\,\vec{r}_i]) +$$

$$+ 2\,\alpha\,\beta \sum_{i=1}^{n} m_i\,([\vec{i}\,\vec{r}_i]\,[\vec{j}\,\vec{r}_i]).$$

Ако сад уведемо моменте и производе инерције, и, на пр., ставимо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,[\vec{i}\,\vec{r}_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(y_i^2 + z_i^2) = J_x,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i ([\vec{j}\,\vec{r}_i]\,[\vec{k}_i\vec{r}\,]) = -\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i\, z_i = \Pi_{yz}\,,$$

може се написати

$$J_u = J_x\,\alpha^2 + J_y\,\beta^2 + J_z\,\gamma^2 + 2\,\Pi_{yz}\,\beta\,\gamma + 2\,\Pi_{zx}\,\gamma\,\alpha + 2\,\Pi_{xy}\,\alpha\,\beta\,. \tag{1}$$

Овај образац омогућава израчунавање момента инерције око осе произвољне оријентације, ако су познати моменти и производи инерције за осе ортогоналног триједра.

§ 1·63. Елипсоид инерције

Узмимо у простору одређену тачку A. Кроз ту тачку повуцимо један правац са ортом $\vec{u}$. Од тачке A на том правцу одмеримо дужину AM обрнуто пропорционалну квадратном корену из момента инерције J_u нашег материјалног система око осе $\vec{u}$, тј. ставимо

$$AM = \frac{l}{\sqrt{J_u}}\,,$$

гдеје l коефицијент пропорционалности са димензијом $[l] = L^2 M^{\frac{1}{2}}$. Према томе вектор положија тачке M према A има вредност

$$\vec{r} = \overrightarrow{AM} = \frac{l}{\sqrt{J_u}}\,\vec{u}\,,$$

а Декартове координате тог вектора се изражавају једначинама

$$x = \frac{l}{\sqrt{J_u}}\,\alpha\,, \qquad y = \frac{l}{\sqrt{J_u}}\,\beta\,, \qquad z = \frac{l}{\sqrt{J_u}}\,\gamma\,.$$

Обрнуто, из тих једначина се сваки косинус може изразити у облику

$$\alpha = \frac{\sqrt{J_u}}{l}\,x\,, \qquad \beta = \frac{\sqrt{J_u}}{l}\,y\,, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{J_u}}{l}\,z\,.$$

Ако те вредности косинуса ставимо у образац (1) претходног параграфа, добијамо једначину

(1) $$J_x\, x^2 + J_y\, y^2 + J_z\, z^2 + 2\,\Pi_{yz}\, yz + 2\,\Pi_{zx}\, zx + 2\,\Pi_{xy}\, xy = l^2\,.$$

Кад правац са ортом $\vec{u}$ почне да се мења, мења се положај тачке M; њено геометриско место је површина чија је једначина (1). За $l = 1$ та једначина добија облик

(2) $$J_x\, x^2 + J_y\, y^2 + J_z\, z^2 + 2\,\Pi_{yz}\, yz + 2\,\Pi_{zx}\, zx + \Pi_{xy}\, xy = 1\,.$$

То је једначина површине другога реда. Пошто је то површина са центром, а нема тачака у бесконачности ($J_u \neq 0$), можемо тврдити да је то елипсоид. Тај елипсоид се зове *елипсоид инерције* (Поансо-Кошијев елипсоид) датог материјалног система за дату тачку A.

Пошто сваки елипсоид има бар три главне осе, има их и наш елипсоид инерције. Те осе зову се *главне осе инерције* за дату тачку A. Ако за координатне осе узмемо главне осе инерције и координате тачке у односу на те осе означимо са X, Y, Z једначина (2) добија облик

(3) $$J_X\, X^2 + J_Y\, Y^2 + J_Z\, Z^2 = 1,$$

где су J_X, J_Y, J_Z *главни моменти инерције нашег материјалног система за тачку* A.

Како једначина (3) нема чланова са производима координата, можемо тврдити да су за главне осе инерције производи инерције једнаки нули.

Ако се тачка A поклапа са центром маса система, елипсоид инерције се зове *централни елипсоид инерције*; његове осе су *главне централне осе инерције*, а моменти инерције око тих оса су *главни централни моменти инерције*. Ако те моменте инерције означимо са A, B, C, а осе тих момената на Ξ, Υ, Z, онда једначину централног елипсоида инерције можемо написати у облику

$$A\,\Xi^2 + B\,\Upsilon^2 + C\,Z^2 = 1\,.$$

Ако са a, b, c означимо краке инерције за моменте инерције A, B, C, тј, ставимо

$$A = m\,a^2\,, \qquad B = m\,b^2\,, \qquad C = mc^2\,.$$

онда, узимајући вредност коефицијента пропорционалности l помоћу услова $l^2 = m$, можемо једначину централног елипсоида инерције написати овако:

$$a^2\,\Xi^2 + b^2\,\Upsilon^2 + c^2\,Z^2 = 1\,.$$

У сличним облицима бисмо могли написати и друге форме једначине елипсоида инерције.

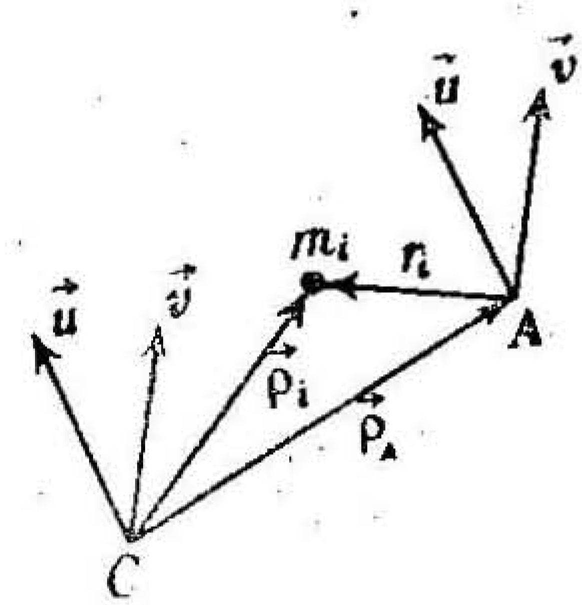
§ 1·64. Промена производа инерције у вези са променом положаја оса

1. Прво упоредимо два производа инерције $\overset{(A)}{\Pi}_{uv}$ и $\overset{(C)}{\Pi}_{uv}$, кад су осе у првом и другом случају паралелне али за први производ оне пролазе кроз произвољну тачку A, а за други кроз центар маса — тачку C.

Ако са $\vec{\rho}_i$ и $\vec{r}_i$ означимо векторе положаја тачке m_i система у односу на C и A (сл. 29), може се написати

$$\overset{(A)}{\Pi}_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i ([\vec{u}\,\vec{r}_i]\,[\vec{v}\,\vec{r}_i]),$$

$$\overset{(C)}{\Pi}_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i ([\vec{u}\,\vec{\rho}_i]\,[\vec{v}\,\vec{\rho}_i]).$$



Слика 29

Ако у први израз ставимо

$$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_A,$$

где је $\vec{\rho}_A = \overrightarrow{CA}$, онда, узимајући у обзир да је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0,$$

можемо написати

$$\overset{(A)}{\Pi}_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i ([\vec{u}\,\vec{\rho}_i]\,[\vec{v}\,\vec{\rho}_i]) + \sum_{i=1}^{n} m_i ([\vec{u}\,\vec{\rho}_A]\,[\vec{v}\,\vec{\rho}_A]),$$

што даје

$$\overset{(A)}{\Pi}_{uv} = \overset{(C)}{\Pi}_{uv} + m ([\vec{u}\,\vec{\rho}_A]\,[\vec{v}\,\vec{\rho}_A]),$$

где је, као и раније,

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Ако скаларни производ два векторска производа на десној страни развијемо на познати начин, добићемо

$$\overset{(A)}{\Pi}_{uv} = \overset{(C)}{\Pi}_{uv} + m\,\rho_A{}^2\,(\vec{u}\,\vec{v}) - m\,(\vec{u}\,\vec{\rho}_A)\;(\vec{v}\,\vec{\rho}_A).$$

За девијационе моменте, кад је $\vec{u} \perp \vec{v}$ и према томе је $(\vec{u}\,\vec{v}) = 0$, имамо образац

$$\overset{(A)}{\Pi}_{uv} = \overset{(C)}{\Pi}_{uv} - m\,(\vec{u}\,\vec{\rho}_A)\,(\vec{v}\,\vec{\rho}_A).$$

Ако су осе $\vec{u}$ и $\vec{v}$ осе координатног триједра $Cxyz$, и вектор $\vec{\rho}_A$ има за координате x_A, y_A, z_A, претходни образац даје

$$\begin{aligned} &\overset{(A)}{\Pi}_{yz} = \overset{(C)}{\Pi}_{yz} - m\,y_A\,z_A\,,\\ (1)\qquad &\overset{(A)}{\Pi}_{zx} = \overset{(C)}{\Pi}_{zx} - m\,z_A\,x_A\,,\\ &\overset{(A)}{\Pi}_{xy} = \overset{(C)}{\Pi}_{xy} - m\,x_A\,y_A\,. \end{aligned}$$

Најзад, ако са тачком C, центром маса система, вежемо триједар $CXYZ$ главних оса инерције, за које су производи инерције једнаки нули, имаћемо за осе са почетком у A, а које стоје паралелно осама $OXYZ$

$$\overset{(A)}{\Pi}_{YZ} = -m\,Y_A\,Z_A\,,$$

$$\overset{(A)}{\Pi}_{ZX} = -m\,Z_A\,X_A\,,$$

$$\overset{(A)}{\Pi}_{XY} = -m\,X_A\,Y_A\,,$$

где су X_A, Y_A, Z_A координате тачке A у односу на триједар $CXYZ$.

2. Изведимо сад образац који пружа могућност да се проучи промена производа $\overset{(O)}{\Pi}_{uv}$, који се односи на исти пол, тачку O, али $\vec{u}$ и $\vec{v}$ мењају своју оријентацију у простору.

Ако ставимо

$$\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}\,,$$

$$\vec{v} = \alpha_1\,\vec{i} + \beta_1\,\vec{j} + \gamma_1\,\vec{k}$$

у образац за производ инерције

$$\overset{(O)}{\Pi}_{uv} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left([\vec{u}\,\vec{r}_i]\,[\vec{v}\,\vec{r}_i] \right),$$

где je

$$\vec{r}_i = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j} + z_i\,\vec{k},$$

добићемо после извршеног множења

$$\overset{(O)}{\Pi}_{uv} = J_x\,\alpha\alpha_1 + J_y\,\beta\beta_1 + J_z\,\gamma\gamma_1 + (\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma)\,\Pi_{yz} +$$
$$+ (\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha)\,\Pi_{zx} + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\,\Pi_{xy}.$$

Овај образац даје вредност производа инерције за произвољан положај ортова $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Ако за триједар $Oxyz$ узмемо триједар $OXYZ$ главних оса инерције, за производ инерције добићемо овај прост израз:

$$\overset{(O)}{\Pi}_{uv} = J_X\,\alpha\alpha_1 + J_Y\,\beta\beta_1 + J_Z\,\gamma\gamma_1. \tag{2}$$

§ 1·65. Тензор инерције

Посматрајмо у исто време три вектора $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ са координатама у односу на исти координатни триједар

$$\begin{aligned} &\vec{A}_1\ (a_{11},\ a_{12},\ a_{13}), \\ &\vec{A}_2\ (a_{21},\ a_{22},\ a_{23}), \\ &\vec{A}_3\ (a_{31},\ a_{32},\ a_{33}). \end{aligned} \tag{1}$$

Схема бројева

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix} \right. \tag{2}$$

састављена од координата наведених вектора али узета сама по себи претставља један математички објект, који се зове *афинор* тачније *тродимензиони афинор*[1]). Афинор можемо сматрати као број нарочите природе. Обични, скаларни бројеви a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$

[1]) У књизи „Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и Афинор" (Београд. 1930) изложио сам елементарно алгебру афинора на геометриској основи.

су његови *елементи* или *скаларне афинорове координате*; вектори (1) су његови *координатни вектори.*

Са афинором се могу довести у везу и нека друга три вектора $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, чије координате означимо на овај начин

$$\vec{B}_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

и који исто тако могу служити као афинорови координатни вектори; ови вектори (1) се разликују у општем случају од вектора (3). Из извесних разлога вектори (3) зову се *претходни* (вертикални), а вектори (1) *идући* (хоризонтални) координатни вектори афинора.

Симетричан афинор, чији елементи задовољавају услове

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

зове се *тензор.* Код тензора се претходни и идући координатни вектори не разликују, тј.

$$\vec{A}_i = \vec{B}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Код многих савремених писаца реч "афинор" уопште се не употребљује, већ се и за несиметричан афинор употребљује реч „тензор" у најширем смислу те речи.

Тензор са елементима

$$\boldsymbol{J} = \begin{cases} J_x, \ \Pi_{xy}, \ \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx}, \ J_y, \ \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx}, \ \Pi_{zy}, \ J_z \end{cases} \tag{4}$$

зове се *инерциони тензор* или *тензор инерције.*

Нарочита правила у тзв. тензорском рачуну утврђују операције са тензорима. Од тих операција употребићемо операцију *скаларног множења тензора вектором.*

Под скаларним производом тензора J и вектора $\vec{r}$ здесна (за прави тензор, тј. за симетрични афинор производи здесна и слева се не разликују) са ознаком

$$(\boldsymbol{J}, \vec{r})$$

треба разумети вектор са координатама

$$(\boldsymbol{J}, \vec{r})_x = J_x\, x + \Pi_{xy}\, y + \Pi_{xz}\, z\,,$$

$$(\boldsymbol{J}, \vec{r})_y = \Pi_{yx}\, x + J_y\, y + \Pi_{yz}\, z\,,$$

$$(\boldsymbol{J}, \vec{r})_z = \Pi_{zx}\, x + \Pi_{zy}\, y + J_z\, z\,,$$

при чему су x, y, z координате вектора $\vec{r}$ у односу на исти триједар за који је састављен и тензор инерције.

Ако добијени вектор са своје стране помножимо скаларно вектором $\vec{r}$, добићемо производ у облику

$$((\boldsymbol{J}, \vec{r})\,\vec{r}) = J_x\, x^2 + J_y\, y^2 + J_z\, z^2 + 2\,\Pi_{yz}\, yz + 2\,\Pi_{zx}\, zx + 2\,\Pi_{xy}\, xy\,.$$

Помоћу тог производа једначину елипсоида инерције можемо написати

$$((\boldsymbol{J}, \vec{r})\,\vec{r}) = 1\,.$$

Ако ову површину трансформишемо на главне осе, тој површини одговара тензор трансформисан на његове главне осе и то са координатама

$$(5) \qquad \boldsymbol{J} = \begin{cases} J_X\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & J_Y\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & J_Z \end{cases} \qquad = m \begin{cases} a^2\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & b^2\,, & 0\,, \\ 0\,, & 0\,, & c^2 \end{cases}$$

где су a, b, c, као и раније, краци инерције главних момената инерције.

§ 1·66. Реципрочни тензор инерције. Гирациони елипсоид

У даљем излагању ћемо се зауставити само на симетричном афинору, тј. на тензору.

Са сваким тензором T са координатама a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ можемо повезати детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Сваки члан те детерминанте има своју алгебарску допуну, тј. субдетерминанту са знаком који одговара положају тог члана; на пр. члану a_{11} одговара алгебарска допуна

$$+\begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

а члану, рецимо, a_{32}

$$-\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Означимо са Δ_{ij} алгебарску допуну члана a_{ij} подељену вредношћу саме детерминанте Δ под условом да је $\Delta \neq 0$; тако, на пр., имамо

$$\Delta_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тензор састављен од елемената Δ_{ij} зове се *тензор реципрочан* тензору од елемената a_{ij}. Ако тај тензор означимо са $\boldsymbol{T}^*$, имамо

$$\boldsymbol{T}^* = \left\{ \begin{matrix} \Delta_{11}, & \Delta_{12}, & \Delta_{13} \\ \Delta_{21}, & \Delta_{22}, & \Delta_{23} \\ \Delta_{31}, & \Delta_{32}, & \Delta_{33} \end{matrix} \right. .$$

Није тешко показати да је реципрочни тензор реципрочном тензору полазни тензор, тј.

$$(\boldsymbol{T}^*)^* = \boldsymbol{T}.$$

Тензору инерције одговара реципрочни тензор инерције. Ако тензор инерције узмемо у облику (5) § 1·65 за реципрочни тензор инерције добићемо

$$\boldsymbol{J}^* = \left\{ \begin{matrix} J_X^{-1}, & 0, & 0 \\ 0, & J_Y^{-1}, & 0 \\ 0, & 0, & J_Z^{-1} \end{matrix} \right. = \frac{1}{m} \left\{ \begin{matrix} a^{-2}, & 0, & 0 \\ 0, & b^{-2}, & 0 \\ 0, & 0, & c^{-2} \end{matrix} \right.$$

Ако тензору инерције одговара елипсоид инерције чија је једначина

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \text{const.}$$

реципрочном тензору одговара елипсоид са једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{const.}$$

Тај елипсоид се зове *гирациони елипсоид* или *Мак-Кулахов* (Mac-Cullagh).

Покажимо сад геометриску везу која постоји између једне и друге површине и која може да служи као дефиниција гирационог елипсоида на основу елипсоида инерције и која је слободна од појмова тензорског рачуна.

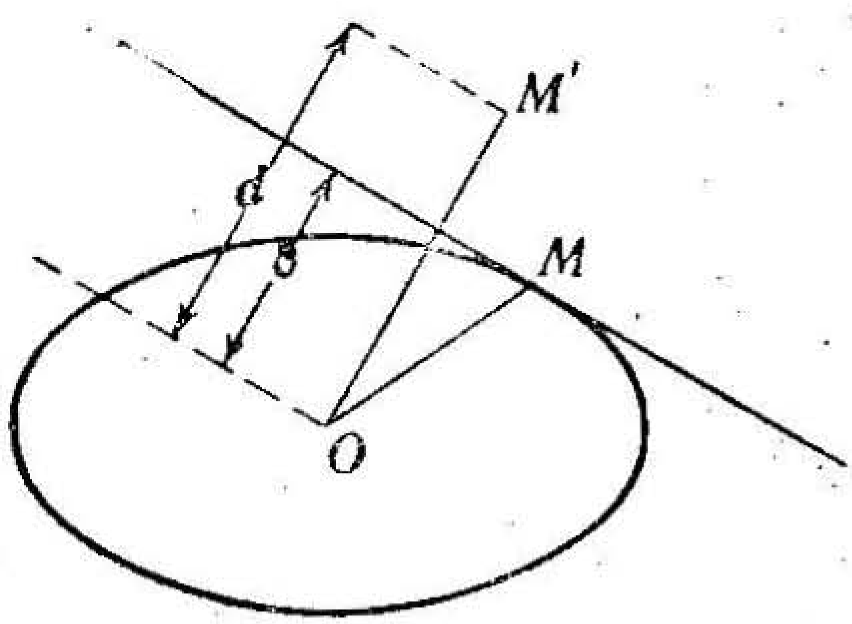
Узмимо површину елипсоида инерције, чија је једначина, рецимо,

$$(1) \qquad a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

и на њој тачку M (x, y, z) (сл. 30). У тој тачки на површину елипсоида положимо тангентну раван. Њена је једначина

$$a^2 x(\xi - x) + b^2 y(\eta - y) + \\ + c^2 z(\zeta - z) = 0,$$

где су ξ, η, ζ координате произвољне тачке равни.



Слика 30

Ако са λ, μ, ν означимо косинусе углова нормале на ту раван, можемо написати

$$(2) \qquad \lambda = a^2 x \delta, \qquad \mu = b^2 y \delta, \qquad \nu = c^2 z \delta,$$

где је δ растојање центра елипсоида од те равни и

$$\delta^2 = (a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2)^{-1}.$$

Ако сад на тој нормали узмемо тачку M' са координатама X, Y, Z на растојању d, које је обрнуто пропорционално растојању δ, тј. ставимо

$$d = \frac{k^2}{\delta}$$

или за $k = 1$

$$d = \frac{1}{\delta},$$

онда је, рецимо,

$$\lambda = X : d = X\delta.$$

На тај начин упоредо са једначинама (2) могу се написати једначине

$$(3) \qquad \lambda = X\delta, \qquad \mu = Y\delta, \qquad \nu = Z\delta.$$

Упоређивање вредности (2) и (3) доводи до једначина

$$a^2 x = X, \qquad b^2 y = Y, \qquad c^2 z = Z,$$

које успостављају везу између тачака M и M′. Помоћу тих једначина можемо заменити x, y, z у једначини (1), па ћемо добити једначину

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

која одговара гирационом елипсоиду.

Извршена трансформација тачке M у тачку M' зове се *реципрочна трансформација.*

1·67. Елипса инерције

Замислимо да су масе система распоређене у једној равни. Проучавање таквог распореда маса игра важну улогу и у случају маса које заузимају запреминску област, јер се проучавање и таквих маса често пута своди на проучавање танких плоча.

Покажимо пре свега да се проучавање момента инерције ма око које осе у простору, у случају маса у равни, своди на проучавање момената инерције око оса које су у тој равни. Заиста, поставимо осе Ox и Oy ортогоналног координатног триједра у раван маса; како је тада за сваку масу m_i координата $z_i = 0$, имамо

$$J_x = \Sigma\, m_i\, y_i^2, \qquad J_y = \Sigma\, m_i\, x_i^2,$$

$$J_z = \Sigma\, m_i\, (x_i^2 + y_i^2) = J_x + J_y,$$

$$\Pi_{yz} = 0, \qquad \Pi_{zx} = 0, \qquad \Pi_{xy} = -\Sigma\, m_i\, x_i\, y_i.$$

Према томе једначина елипсоида инерције за почетак координата има облик

$$(1) \qquad J_x\, x^2 + J_y\, y^2 + (J_x + J_y)\, z^2 + 2\, \Pi_{xy}\, xy = l^2,$$

где је, као и раније, l^2 коефицијент пропорционалности са димензијом

$$[l^2] = L^4 M.$$

Једначина (1) показује да је за сваку тачку равни маса нормала на тој равни, оса z, главна оса инерције и то оса највећег главног момента инерције. Пошто је тај момент једнак збиру момената око две произвољне ортогоналне осе у равни маса и тиме је потпуно одређен, довољно је проучити само елипсу пресека нашег елипсоида са равни маса. Та елипса, чија је једначина

$$(2) \qquad J_x\, x^2 + J_y\, y^2 + 2\, \Pi_{xy}\, x\, y = l^2$$

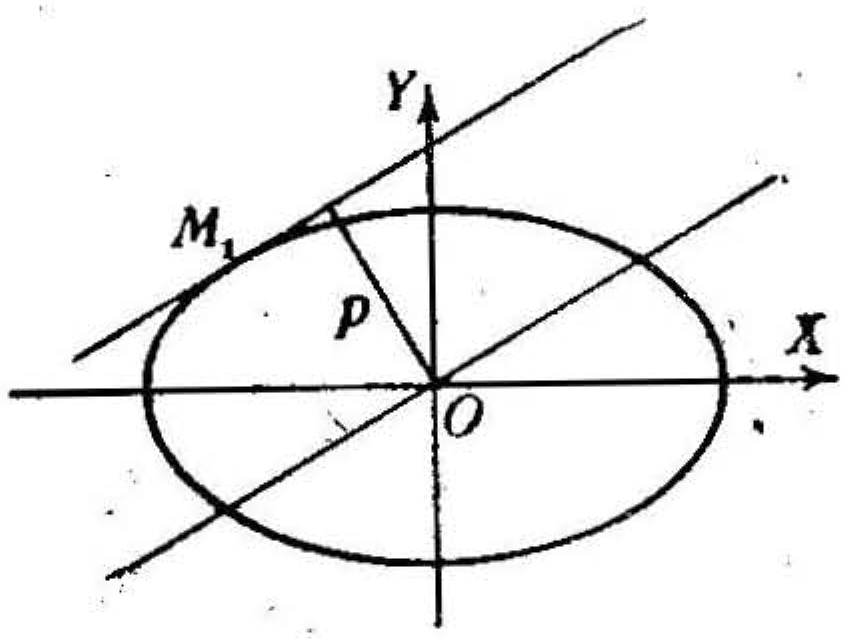
зове се *елипса инерције* датог материјалног система у равни.

Ако почетак координатних оса сместимо у центар маса система, елипса се зове *централна елипса инерције.*

Сваку елипсу инерције можемо одредити у односу на главне осе инерције у равни маса; њену једначину напишимо у облику

$$(3) \qquad J_1\, X^2 + J_2\, Y^2 = l^2$$

где су J_1 и J_2 главни моменти инерције, X и Y координате тачке елипсе у односу на главне осе (сл. 31).



Слика 31

Изаберимо сад за коефицијент пропорционалности специјалну вредност, стављајући

$$(4) \qquad l^2 = \frac{J_1 J_2}{m},$$

што одговара димензији тог коефицијента. Елипса инерције са таквим коефицијентом зове се *нормирана елипса инерције.*

Нормирана елипса има ову важну особину: момент инерције око сваке праве, што пролази кроз центар нормиране елипсе, једнак је моменту инерције целокупне масе система која се налази на тангенти паралелној датој правој на елипси. Докажимо ту особину. Момент инерције око праве која пролази кроз почетак координата и гради произвољан угао α са осом OX има вредност

$$(5) \qquad J = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha\,.$$

С друге стране, тангента елипсе чија је једначина

$$(6) \qquad J_1\, X_1\, \xi + J_2\, Y_1\, \eta - l^2 = 0\,,$$

где су X_1 и Y_1 координате тачке M_1 додира које задовољавају услов

$$(7) \qquad J_1\, X_1^2 + J_2\, Y_1^2 = l^2$$

а ξ и η координате неке тачке тангенте, налази се на отстојању p од координатног почетка. При томе је

(8) $$p = \frac{l^2}{\lambda},$$

где смо са λ означили величину

(9) $$\lambda = \sqrt{J_1^2 X_1^2 + J_2^2 Y_1^2}\ .$$

Како права (6) гради са OX осом угао α, имаћемо

$$\cos\alpha = \frac{1}{\lambda} J_2 Y_1, \qquad \sin\alpha = -\frac{1}{\lambda} J_1 X_1 .$$

На основу ових вредности из (5) добијамо

$$J = \frac{J_1 J_2}{\lambda^2}(J_1 X_1^2 + J_2 Y_1^2),$$

одакле на основу (7) и (8) изводимо

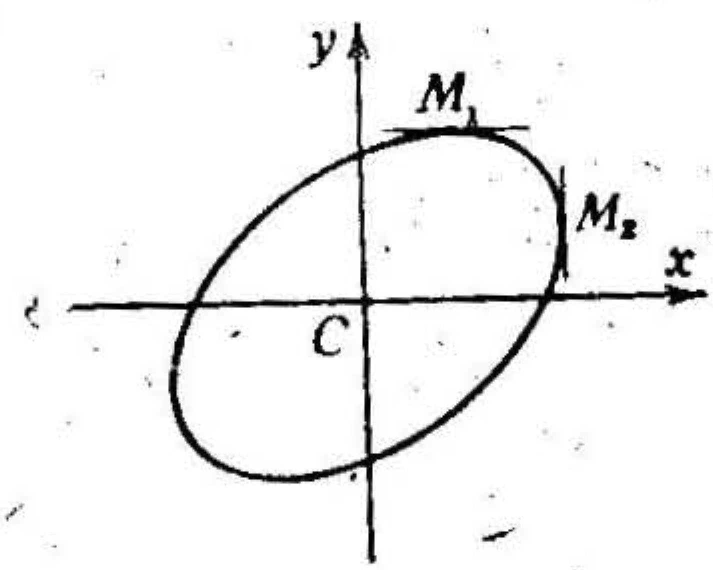
$$J = \frac{J_1 J_2}{\lambda^2} l^2 = \frac{J_1 J_2}{l^2} p^2,$$

па према (4) дефинитивно имамо

(10) $$J = m p^2,$$

а то и потврђује наведену особину нормиране елипсе, јер је производ mp^2 момент инерције целокупне масе система m која се налази на тангенти паралелној оној правој око које узимамо момент инерције.

Искористимо сад особине нормиране елипсе инерције за решавање овог задатка. Дата је централна нормирана елипса инерције (сл. 32). Потребно је одредити моменте инерције J_x, J_y и производ инерције Π_{xy} око ортогоналних оса Cxy са почетком у центру елипсе и произвољног положаја према главним осама инерције.



Слика 32

Једначину елипсе инерције за те осе можемо написати

(11) $$J_x x^2 + J_y y^2 + 2\,\Pi_{xy} xy = l^2 = \frac{J_1 J_2}{m}.$$

Ако координате додирних тачака M_1 и M_2 тангената паралелних са Cx одн. Cy осом означимо са x_1, y_1 одн. x_2, y_2, на основу доказане особине (10) нормиране елипсе инерције непосредно имамо

$$J_x = my_1^2, \quad J_y = mx_2^2.$$

За одређивање производа Π_{xy} диференцирајмо једначину (11)

$$J_x\, x\, dx + J_y\, y\, dy + \Pi_{xy}\,(x\, dy + y\, dx) = 0$$

и применимо тај резултат, који важи за све тачке елипсе, рецимо на тачку M_1, за коју је $dy = 0$. Тада имамо

$$J_x x_1 + \Pi_{xy} y_1 = 0,$$

одакле одређујемо

$$\Pi_{xy} = -J_x \frac{x_1}{y_1} = -mx_1 y_1.$$

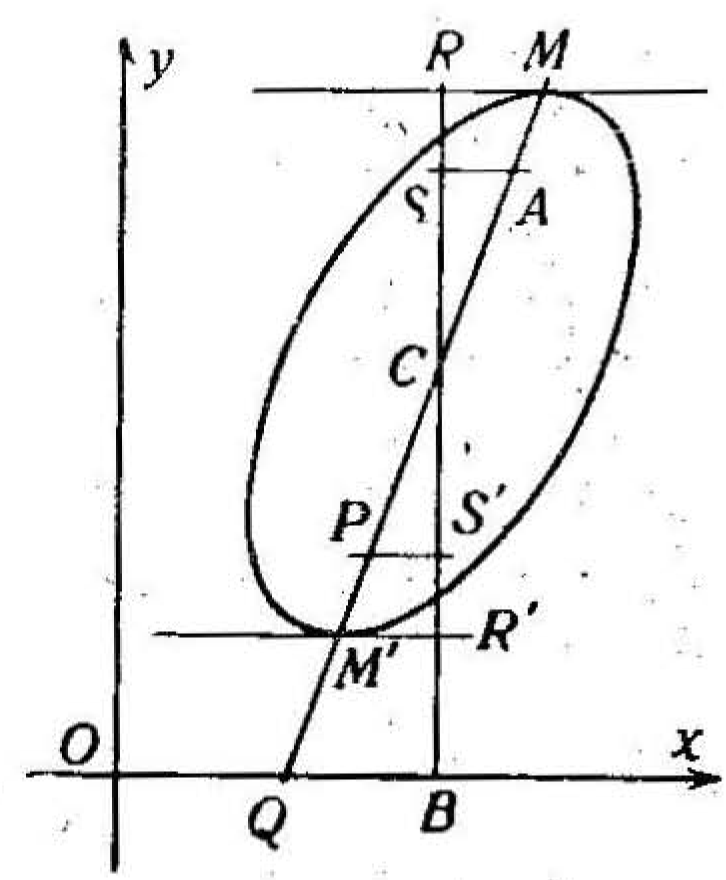
За тачку M_2 са $dx = 0$ добијамо сличан резултат и према томе имамо

$$\Pi_{xy} = -m\, x_1 y_1 = -m\, x_2 y_2, \tag{12}$$

што се речима изражава: производ инерције за централне ортогоналне осе можемо заменити производом инерције у односу на исте осе само једне материјалне тачке са целокупном масом система. Та се тачка налази у тачки додира тангенте на нормирану елипсу инерције, која стоји паралелно једној било којој од датих централних оса.

Најзад да видимо како помоћу централне нормиране елипсе инерције можемо одредити моменте инерције и производ инерције у односу на ортогоналне осе потпуно произвољног положаја (не централног) у равни маса.

Нека је дата централна нормирана елипса инерције и ортогоналне осе Oxy потпуно произвољног положаја у односу на елипсу (сл. 33). Треба одредити J_x, J_y и Π_{xy}.



Слика 33

Пре израчунавања ових величина објаснимо геометриске елементе нацртане слике. Тачке M и M' су додирне тачке тангената паралелних оси Ox. Тачке R и R' пресеци су тих тангената са нормалом на Ox осу која пролази кроз центар елипсе, тачку C. Тачка Q је пресек праве MCM' са Ox осом. Тачка P је *пол:* она је четврта хармониска тачка, конјугована тачки Q, у односу на дуж CM'; према томе за њу важи

$$\overline{CM'}^2 = \overline{CP} \, . \, \overline{CQ} \, .$$

Тачке S' и R' су пројекције тачака P и M' на нормалу RB и према томе имамо и једначину

$$\overline{CR'}^2 = \overline{CS'} \, . \, \overline{CB} \, . \tag{13}$$

Најзад тачка A је *антипол;* то је тачка симетрична тачки P у односу на тачку C. Тачка S је пројекција антипола на нормалу RB. Координате тачке C означимо са x_c, y_c, а антипола са x_A, y_A.

За израчунавање J_x према теореми о моменту инерције око паралелних оса имамо

$$J_x = m \, \overline{CR}^2 + m \, y_c^2,$$

где је $m \, \overline{CR}^2$ момент инерције око централне осе изражен према обрасцу (10). Пошто је $\overline{CR} = \overline{CR'}$ и $\overline{CS'} = CS$ из (13) имамо

$$\overline{CR}^2 = \overline{CS} \, . \, y_c \, .$$

Према томе претходни образац даје

$$J_x = m y_c (CS + y_c)$$

или дефинитивно

$$J_x = m y_c \, y_A \, .$$

Слично се изводи и образац

$$J_y = m \, x_c \, x_A \, .$$

Речима ове резултате можемо изразити овако: момент инерције материјалног система у равни око неке праве у тој равни једнак је производу масе система и растојања дате праве од центра маса и од антипола.

За производ инерције према (1) § 1·64 имамо

$$\Pi_{xy} = - m \, x_c \, y_c - m \, \overline{CR} \, . \, \overline{RM} \, , \tag{14}$$

при чему је други члан разлике састављен по правилу (12). Како је $\overline{CR} = \overline{CR'}$ и $\overline{RM} = \overline{R'M'}$ може се ставити

$$\overline{CR} \, . \, \overline{RM} = \overline{CR'} \, . \, \overline{R'M'} = \overline{CR'}^2 \, . \, \frac{\overline{R'M'}}{\overline{CR'}}$$

или према (13)

$$\overline{CR} \cdot \overline{RM} = \frac{\overline{R'M'}}{\overline{CR'}} \cdot \overline{CS'} \cdot y_c = \overline{PS'} \cdot y_c ,$$

јер из сличности троуглова CPS' и $CM'R'$ следује

$$\frac{\overline{R'M'}}{\overline{CR'}} = \frac{\overline{PS'}}{\overline{CS'}} .$$

Са тим резултатом, узимајући у обзир да је $\overline{PS'} = \overline{AS}$ из (14) имамо

$$\Pi_{xy} = -m\, x_c\, y_c - m\, y_c\, \overline{AS} = -m\, y_c\, (x_c + \overline{SA})$$

или дефинитивно

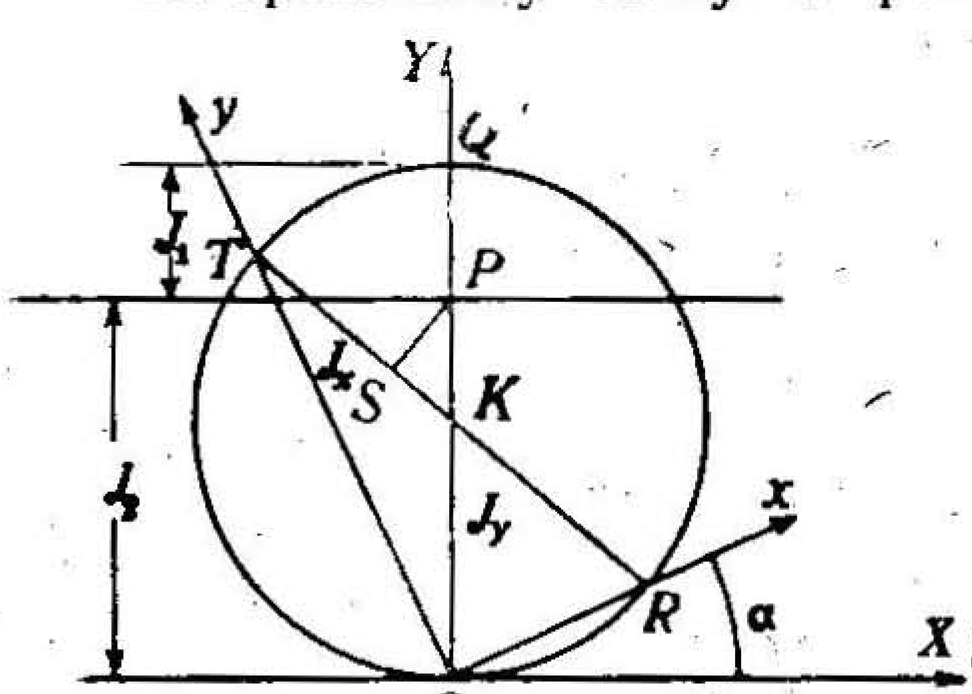
$$\Pi_{xy} = -m\, y_c\, x_A .$$

Ова једначина показује да је производ инерције материјалног система у равни у односу на две ортогоналне праве у тој равни једнак негативном производу масе система и растојања центра маса од једне праве и антипола од друге.

§ 1·671. Моров круг

За проучавање распореда момената инерције у случају маса у равни постоје још и друге, сем у претходном параграфу наведене, геометриске конструкције. Навешћемо једну такву конструкцију чија основа није елипса већ круг.

За произвољну тачку O равни конструишимо главне осе инерције OX и OY са главним моментима инерције J_1 и J_2. За исту тачку конструишимо и други пар ортогоналних оса Ox и Oy и означимо угао који гради оса Ox са осом OX са α (сл. 34)



Слика 34

Помоћу J_1, J_2 и угла α моменти инерције J_x, J_y и производ Π_{xy} се изражавају на овај начин

$$J_x = J_1 \cos^2\alpha + J_2 \sin^2\alpha ,$$
$$J_y = J_1 \sin^2\alpha + J_2 \cos^2\alpha ,$$
$$\Pi_{xy} = (J_2 - J_1)\sin\alpha\cos\alpha .$$

Последњи израз смо добили из обрасца (2) § 1.64 узев у обзир ове координате ортова $\vec{u}$ и $\vec{v}$: $\vec{u}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\vec{v}(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$.

Наведене вредности J_x, J_y, Π_{xy} могу се добити на основу ове геометриске конструкције.

Одмеримо на OY оси прво $OP = J_2$, а затим $PQ = J_1$ (сл. 34). На дужини $OQ = J_1 + J_2$, као на пречнику, конструишимо круг. Тај круг се зове *Моров круг.* Помоћу тог круга одређивање горе поменутих величина врши се на овај начин.

Конструишимо осу Ox под углом α према OX оси. Нека та оса сече Моров круг у тачки R. За ту тачку конструишимо пречник $\overline{RT}$. Из тачке P спустимо нормалу на тај пречник. Тада подножје те нормале, тачка S, дели пречник круга на два дела $\overline{SR} = J_y$ и $\overline{ST} = J_x$. Дужина $\overline{PS}$ саме нормале даје апсолутну вредност производа инерције. При одређивању знака тог производа можемо се придржавати правила; ако се тачке P и Q налазе са различитих страна од пречника RT знак производа инерције се поклапа са знаком производа $\sin\alpha\cos\alpha$, тј. позитиван је кад се оса Ox налази у првом и трећем квадранту а негативан кад се она налази у другом и четвртом квадранту. Кад се тачке P и O налазе са исте стране од пречника TR, знак производа супротан је знаку производа $\sin\alpha \cos\alpha$.

Доказаћемо тачност наведене конструкције.

Пошто је полупречник Моровог круга једнак

$$\frac{1}{2}(J_1 + J_2)$$

и

$$KP = J_2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_2) = \frac{1}{2}(J_2 - J_1),$$

а угао TKQ једнак је 2α, имаћемо

$$SR = RK + KS = RK + KP\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(J_1 + J_2) + \frac{1}{2}(J_2 - J_1)\cos 2\alpha =$$

$$= J_1 \sin^2\alpha + J_2\cos^2\alpha = J_y .$$

Слично се показује да је $ST = J_x$. За израчунавање Π_{xy} потребно је узети троугао KSP из кога имамо

$$PS = PK\sin 2\alpha,$$

одакле је

$$PS = (J_2 - J_1) \sin\alpha \cos\alpha = \Pi_{xy} ,$$

тј. и овде геометриска конструкција одговара наведеним обрасцима. Што се тиче правила о знаку, оно се може потврдити непосредним посматрањем израза за Π_{xy}.

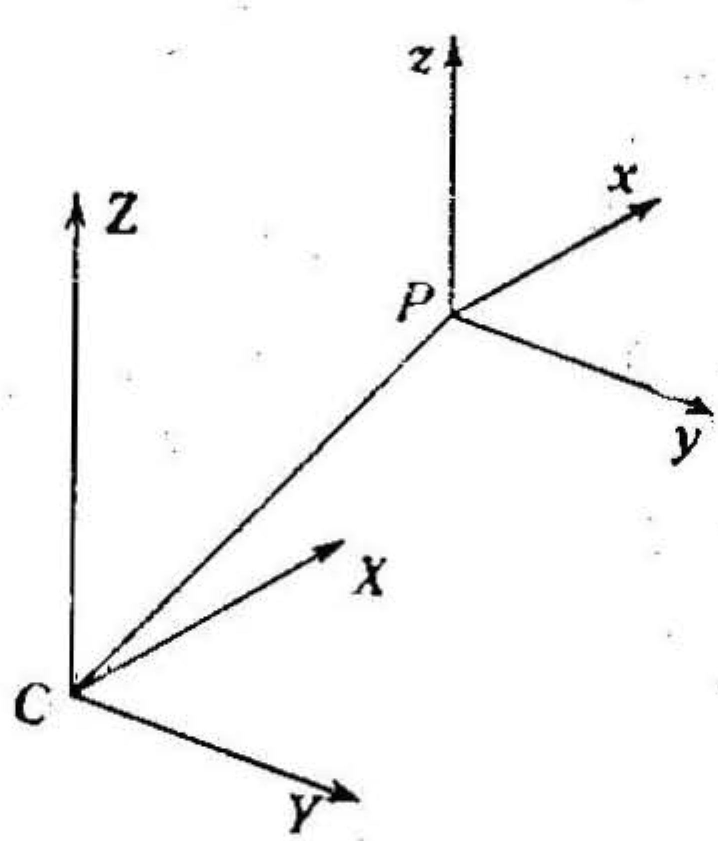
Искористили смо Моров круг за одређивање J_x, J_y, Π_{xy}, ако су дати: положај главних оса инерције и вредности главних момената инерције J_1 и J_2,

Обрнуто, тај исти круг може послужити за одређивање положаја главних оса и вредности J_1 и J_2, ако су дате величине J_x, J_y, Π_{xy} за одређене осе Oxy. У том се циљу може, прво, одредити, ма где, угао α из троугла PSK са катетама $PS = \Pi_{xy}$, $SK = \frac{1}{2}(J_y - J_x)$ и углом 2α код тачке K. Углом α одређен је правац OX, а према томе и правац OY. Затим можемо конструисати Моров круг и његов пречник $RT = J_x + J_y$ са тачком S. Нормала у тој тачки на RT својим пресеком са OY осом одређује тачку P, а тиме и вредности J_1 и J_2.

§ 1·68. Момент инерције система око произвољне осе у простору. Инерциона матрица

Нека су дати за одређени материјални систем:

1. маса m система,
2. положај центра маса, тачка C,
3. положај главних централних оса инерције, триједра $CXYZ$,
4. вредности A_c, B_c, C_c главних централних момената инерције система.



Слика 35

Поставимо задатак да се одреди момент инерције тог система око осе, која пролази кроз тачку P са координатама X_P, Y_P, Z_P и има за орт вектор $\vec{u}$ са координатама α, β, γ у односу на исти триједар $CXYZ$. Означимо тај момент инерције са $J_u^{(P)}$.

Ако замислимо помоћни триједар $Pxyz$ (сл. 35) са осама паралелним осама триједра $CXYZ$, онда на основу познатог обрасца можемо написати:

$$(1)\quad J_u^{(P)} = J_x^{(P)} \alpha^2 + J_Y^{(P)} \beta^2 + J_z^{(P)} \gamma^2 + 2\,\Pi_{YZ}^{(P)} \beta\gamma + 2\,\Pi_{zx}^{(P)} \gamma\alpha + 2\,\Pi_{XY}^{(P)} \alpha\beta .$$

Пошто су осе једног и другог триједра паралелне, на основу (1) § 1·61 имамо:

$$(2)\quad \begin{aligned} J_x^{(P)} &= A_c + m\,(Y_P{}^2 + Z_P{}^2)\,, \\ J_Y^{(P)} &= B_c + m\,(Z_P{}^2 + X_P{}^2)\,, \\ J_z^{(P)} &= C_c + m\,(X_P{}^2 + Y_P{}^2)\,. \end{aligned}$$

С друге стране на основу једначина (1) § 1·64 овако одређујемо производе инерције:

$$(3)\quad \begin{aligned} \Pi_{YZ}^{(P)} &= -m\, Y_P\, Z_P\,, \\ \Pi_{zx}^{(P)} &= -m\, Z_P\, X_P\,, \\ \Pi_{XY}^{(P)} &= -m\, X_P\, Y_P\,. \end{aligned}$$

Пошто су у једначинама (2) и (3) на десним странама све величине познате, можемо у једначини (1) одредити све коефицијенте и на тај начин тај образац одређује тражени момент инерције.

Горња анализа показује да у геометрији маса играју улогу ови, тзв. *динамички*, параметри:

1 параметар — маса система,
3 параметра — координате центра маса,
3 „ — три величине (на пр. Euler'ови углови), које одређују правац главних централних оса инерције,
3 параметра — главни централни моменти инерције.

Тих десет параметара играју нарочиту улогу у теорији кретања чврстог тела.

У вези са динамичким параметрима материјалног система уводи се једна таблица, нарочито згодна у механици чврстог тела, која карактерише динамичке особине материјалног система. Ову таблицу зваћемо *матрица инерционих коефицијената*, кратко, *инерциона матрица* датог материјалног система. За Декартов координатни систем елементи те матрице са 36 чланова изгледају

$$\left\| \begin{matrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_c & -my_c \\ 0 & m & 0 & -mz_c & 0 & mx_c \\ 0 & 0 & m & my_c & -mx_c & 0 \\ 0 & -mz_c & my_c & J_x & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ mz_c & 0 & -mx_c & \Pi_{yx} & J_y & \Pi_{yz} \\ -my_c & mx_c & 0 & \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & J_z \end{matrix} \right\|$$

Нарочити распоред чланова ове матрице има, како ћемо видети, своје дубоко образложење у њеним применама на динамику чврстог тела.

Први део те матрице стоји у вези са масом m система која у класичној механици има исту вредност за све правце.

Други део те таблице, на истој дијагонали са првим делом, је тензор инерције (§ 1·65).

Остала два дела, на другој дијагонали, састављена су према (3) § 1·21 од координата векторског планарног линеарног момента и вектора супротног том моменту. Ова два дела стоје у вези са положајем центра маса система.

§ 1·681. Распоред главних оса инерције у простору

Видели смо да момент инерције око произвољне осе, која пролази кроз тачку P има вредност

$$(1)\qquad J_u^{(P)} = J_x^{(P)}\alpha^2 + J_y^{(P)}\beta^2 + J_z^{(P)}\gamma^2 + 2\Pi_{yz}^{(P)}\beta\gamma + 2\Pi_{zx}^{(P)}\gamma\alpha + 2\Pi_{xy}^{(P)}\alpha\beta\,,$$

где су α, β, γ координате орта осе и према томе везане једначином

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,.$$

Поставимо задатак да се одреди положај главних оса инерције у тачки P.

Пошто за правце главних оса момент инерције има стационарне вредности, потражимо те вредности од $J_u^{(P)}$ као функције α, β, γ; тај задатак спада у релативни extremum, јер су означене променљиве везане једначином (2). Ако ту једначину помножимо неодређеним множитељем $-S$, добићемо низ овакних услова за стационарност функције $J_u^{(P)} - S\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
(J_x^{(P)} - S)\alpha + \Pi_{xy}^{(P)}\beta + \Pi_{xz}^{(P)}\gamma &= 0, \\
\Pi_{xy}^{(P)}\alpha + (J_y^{(P)} - S)\beta + \Pi_{yz}^{(P)}\gamma &= 0, \\
\Pi_{xz}^{(P)}\alpha + \Pi_{yz}^{(P)}\beta + (J_z^{(P)} - S)\gamma &= 0.
\end{aligned}
$$

Пошто су то линеарне хомогене једначине, детерминанта тог система мора бити једнака нули:

$$
\begin{vmatrix}
J_x^{(P)} - S, & \Pi_{xy}^{(P)}, & \Pi_{xz}^{(P)} \\
\Pi_{xy}^{(P)}, & J_y^{(P)} - S, & \Pi_{yz}^{(P)} \\
\Pi_{xz}^{(P)}, & \Pi_{yz}^{(P)} & J_z^{(P)} - S
\end{vmatrix} = 0.
$$

Ово је једначина трећег степена по S. У теорији детерминаната се показује да она има три стварна корена. Означимо те корене са S_1, S_2, S_3 и покажимо да је сваки од њих одговарајући момент инерције. За први корен, према (3) може се написати:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
J_x^{(P)}\alpha_1 + \Pi_{xy}^{(P)}\beta_1 + \Pi_{xz}^{(P)}\gamma_1 &= S_1\alpha, \\
\Pi_{xy}^{(P)}\alpha_1 + J_y^{(P)}\beta_1 + \Pi_{yz}^{(P)}\gamma_1 &= S_1\beta_1, \\
\Pi_{xz}^{(P)}\alpha_1 + \Pi_{yz}^{(P)}\beta_1 + J_z^{(P)}\gamma_1 &= S_1\gamma_1,
\end{aligned}
$$

где су α_1, β_1, γ_1 координате оног орта $\vec{u}_1$, чији је правац везан за корен S_1. Ако те једначине помножимо редом са α_1, β_1, γ_1 и саберемо, добићемо

$$
J_x^{(P)}\alpha_1^2 + J_y^{(P)}\beta_1^2 + J_z^{(P)}\gamma_1^2 + 2\Pi_{yz}^{(P)}\beta_1\gamma_1 + 2\Pi_{xz}^{(P)}\gamma_1\alpha_1 + 2\Pi_{xy}^{(P)}\alpha_1\beta_1 =
$$
$$
= J_{u_1}^{(P)} = S_1 = J_1
$$

а то и потврђује наш став да је S_1 момент инерције J_1 за правац са ортом $\vec{u}_1$.

Ако у једначинама (4) ставимо према § 1·67:

$$
J_x^{(P)} = m(a^2 + y^2 + z^2), \qquad J_y^{(P)} = m(b^2 + z^2 + x^2),
$$
$$
J_x^{(P)} = m(c^2 + x^2 + y^2),
$$
$$
\Pi_{yz}^{(P)} = -myz, \qquad \Pi_{zx}^{(P)} = -mzx, \qquad \Pi_{xy}^{(P)} = -mxy,
$$

где су a, b, c краци инерције, тј. на пр. $A_c = ma^2$, а x, y, z координате тачке P у односу на триједар главних централних оса, а сем тога уведемо и крак инерције k_1 за J_1, тј. ставимо $J_1 = mk_1^2$, онда се, рецимо, прва од једначина (4) може написати

$$(a^2 + y^2 + z^2)\,\alpha_1 - xy\,\beta_1 - xz\,\gamma_1 = k_1^2\,\alpha_1 .$$

Ако означимо

$$x^2 + y^2 + z^2 - k_1^2 = -\lambda_1 ,$$

долазимо до овог резултата

$$\alpha_1 = \frac{x}{a^2 - \lambda_1}\,(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,. \tag{5}$$

Слично се добијају и два остала косинуса

$$\beta_1 = \frac{y}{b^2 - \lambda_1}\,(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,, \tag{6}$$

$$\gamma_1 = \frac{z}{c^2 - \lambda_1}\,(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,. \tag{7}$$

Из једначина (5) — (7) можемо извести ове закључке:

I. Ако једначине редом помножимо са x, y, z и саберемо, долазимо до једначине:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_1} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_1} = 1\,. \tag{8}$$

Пошто ова једначина одговара конфокалној површини гирационог елипсоида, можемо тврдити да елиптичне координате тачке P (види: Рационална механика. I. Механика тачке. Друго издање. Стр. 18) λ_1, λ_2, λ_3 одређују према једначинама

$$k_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_i \qquad i = 1,\,2,\,3 \tag{9}$$

краке, а према томе и саме главне моменте инерције за тачку P.

II. Пошто су косинуси углова што гради нормала $\vec{n}_1$ на површини (8) пропорционални величинама (делимичним изводима):

$$\frac{x}{a^2 - \lambda_1}\,,\quad \frac{y}{b^2 - \lambda_1}\,,\quad \frac{z}{c^2 - \lambda_1}\,,$$

а тим истим величинама су пропорционални и косинуси α_1, β_1, γ_1, може се тврдити да правац главне осе инерције има правац нормале на једну од површина конфокалних са гирационим елипсоидом. Пошто је систем елиптичних координата ортогоналан имамо овај резултат:

За сваку тачку простора као триједар главних оса инерције служи триједар оса елиптичних координата те тачке кад је основни елипсоид гирациони елипсоид.

Ако је
$$-\infty < \lambda_1 < c^2 < \lambda_2 < b^2 < \lambda_3 < a^2,$$
корену λ_1 одговара елипсоид, λ_2 — једнокрилни хиперболоид и λ_3 — двокрилни. Према једначини (9) нормала на елипсоиду одговара најмањем главном моменту инерције, а нормала на двокрилном хиперболоиду — највећем.

§ 1·7. Планарни квадратни момент инерције

Ако са h_i означимо растојање масе m_i од одређене равни ε, онда се збир
$$P_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2$$
зове *планарни квадратни момент инерције* датог материјалног система у односу на дату раван ε.

Ако са ξ, η, ζ означимо координатне равни Oyz, Ozx, Oxy, биће планарни квадратни моменти за те равни
$$P_\xi = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2, \qquad P_\eta = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \qquad P_\zeta = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2.$$

Између квадратних планарних и аксијалних момената инерције постоје ове везе:
$$J_x = P_\eta + P_\zeta, \qquad J_y = P_\zeta + P_\xi, \qquad J_z = P_\xi + P_\eta,$$
одакле је
$$P_\xi = \frac{1}{2}(J_y + J_z - J_x),$$
$$P_\eta = \frac{1}{2}(J_z + J_x - J_y),$$
$$P_\zeta = \frac{1}{2}(J_x + J_y - J_z).$$

Поларни квадратни момент инерције K_o у односу на координатни почетак изражава се помоћу планарних момената једначином:

$$K_o = P_\xi + P_\eta + P_\zeta .$$

Пошто се планарни момент инерције мало употребљује у изражавању механичких појава, нећемо га детаљно проучавати.

§ 1·8. Моменти вишега реда

У претходним излагањима смо видели да обрасци који аналитички изражавају моменте зависе од збирова проширених на све тачке система који су облика

$$\sum_i m_i \, x_i^{\alpha} \, y_i^{\beta} \, z_i^{\gamma} ,$$

где је: m_i — маса тачке, x_i, y_i, z_i — њене Декартове координате, α, β, γ — природни бројеви одн. нуле, који задовољавају услов

$$\alpha + \beta + \gamma = \nu .$$

За линеарни момент треба ставити $\nu = 1$, за квадратни $\nu = 2$. Број ν одређује *степен момента*. Ако је $\nu > 2$ момент је вишега реда. Моменти вишега реда се веома ретко употребљују у проблемима механике, али се њима служе математичари (*метода момената*).

Ако су масе распоређене непрекидно, моменти се изражавају интегралима

$$\int\int\int \rho \, (x, y, z) \, x^{\alpha} \, y^{\beta} \, z^{\gamma} \, dx \, dy \, dz ,$$

проширеним на целокупну запремину тела. Функција ρ је запреминска густина тела. Слични интеграли одговарају масама непрекидно распоређеним по површини или дуж линије, а такође и проширеним на вишедимензионе области.

Ако је $\rho = \text{const.}$ за све тачке тела, момент зависи од интеграла

$$\int\int\int x^{\alpha} \, y^{\beta} \, z^{\gamma} \, dz \, dy \, dz$$

који претставља односни геометриски момент дате запремине.

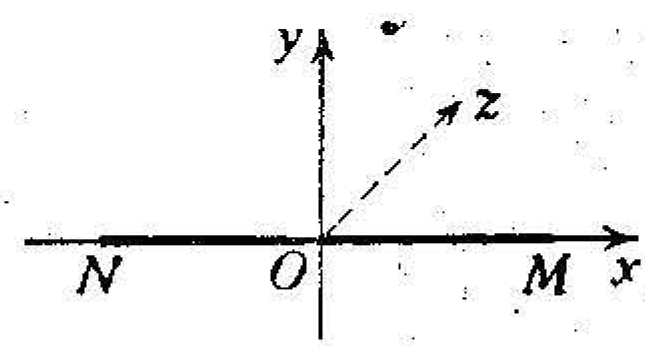
§ 1·9. Примери за израчунавање аксијалних момената инерције

1. *Хомогена дуж*

Нека је дата хомогена дуж MN (сл. 36) дужине $2a$ са масом m. Моменти инерције око Ox, Oy, Oz оса имају вредности:

$$J_x = 0, \qquad J_y = 2\sigma_2 \int_0^a x^2\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sigma_2 a^3 = \frac{1}{3} ma^2, \qquad J_z = J_y,$$



Слика 36

а производи

$$\Pi_{zy} = 0, \quad \Pi_{xz} = 0, \quad \Pi_{xy} = 0,$$

где је σ_2 — густина дужи а m њезина маса. Пошто су сви производи инерције једнаки нули а тачка O је центар маса дужи, триједар $Oxyz$ је главни централни триједар оса инерције.

У специјалним положајима дужи према оси моменти инерције имају наредне вредности:

a. Ако је дуж паралелна оси $\vec{u}$, а на растојању d,

$$J_u = md^2.$$

b. Ако је дуж управна на осу $\vec{u}$ и њена средина се налази на растојању d од осе

$$J_u = \frac{1}{3} ma^2 + md^2,$$

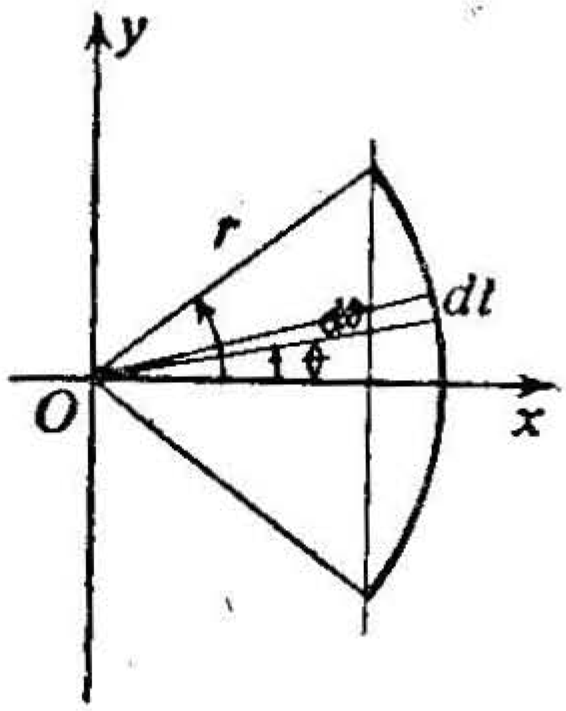
при чему је, ако је $d = a$, тј. оса пролази кроз један крај дужи,

$$J_u = \frac{4}{3} ma^2 = \frac{1}{3} ml^2,$$

ако са $l = 2a$ означимо целокупну дужину дужи.

2. *Хомогени лук кружне линије*

Непосредно са слике (сл. 37) за овај случај имамо:



Слика 37

$$J_x = 2\sigma_2 \int_0^\alpha y^2\, dl = 2\sigma_2 r^3 \int_0^\alpha \sin^2\alpha\, d\alpha =$$

$$= 2\sigma_2 r^3 \cdot \frac{1}{2} (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) r^2 .$$

И на сличан начин

$$J_y = \frac{1}{2}\, m \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) r^2 .$$

Најзад је $J_z = mr^2$.

Триједар $Oxyz$ не одговара централним осама инерције иако се тачка O поклапа са центром кружног лука.

Ако се лук продужи на цео круг, имаћемо:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} mr^2 , \quad J_z = mr^2 .$$

3. *Хомогена површина троугла*

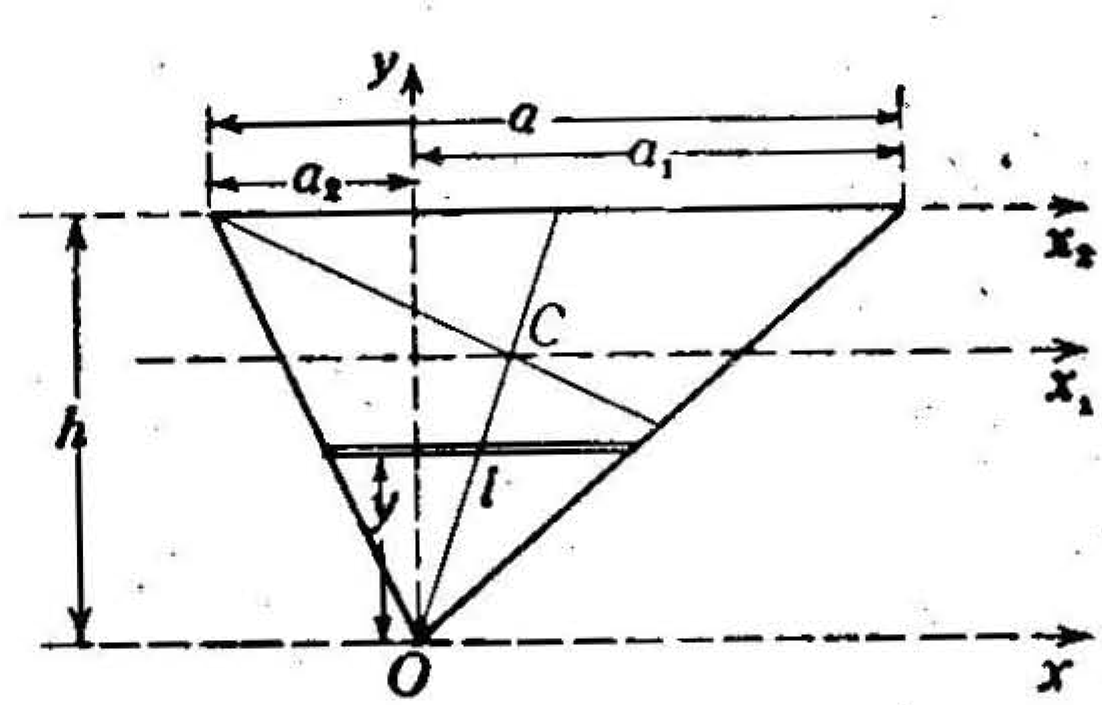
Са ознакама, које су очигледне са слике (сл. 38), имамо

$$l : a = y : h ,$$

одакле је

$$l = \frac{a}{h} y$$

и према томе за момент инерције добијамо



Слика 38

$$J_x = \sigma_1 \int_0^h y^2 l\, dy = \sigma_1 \frac{a}{h} \int_0^h y^3\, dy = \sigma_1 \frac{a}{h} \frac{h^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sigma_1 ah \cdot h^2 = \frac{1}{2} mh^2 .$$

За паралелну осу x_1, која пролази кроз центар C маса, имаћемо

$$J_{x_1} = J_x - m\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{18} mh^2 .$$

Најзад за осу x_2, која је такође паралелна са осом x, а на њој лежи основица троугла, имамо

$$J_{x_2} = J_{x_1} + m\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{6} m h^2 .$$

За осу y према претходним резултатима имаћемо

$$J_y = \frac{1}{6} m_1 a_1^2 = \frac{1}{6} m_2 a_2^2 ,$$

где су m_1 и m_2 масе правоуглих троуглова са катетама a_1 и a_2. Пошто је $m_1 = \frac{1}{2} h a_1 \sigma_1$, $m_2 = \frac{1}{2} h a_2 \sigma_1$, за J_y добијамо

$$J_y = \frac{1}{6} m \frac{a_1^3 + a_2^3}{a} .$$

Одредимо још момент инерције око осе z која стоји управно на раван троугла и пролази кроз теме. Пошто је тај момент $J_z^{(O)}$ једнак збиру $J_x + J_y$, може се написати

$$J_z^{(O)} = \frac{1}{6} m \left(\frac{a_1^3 + a_2^3}{a} + 3h^2 \right),$$

За момент $J_z^{(C)}$ после малих трансформација добићемо израз

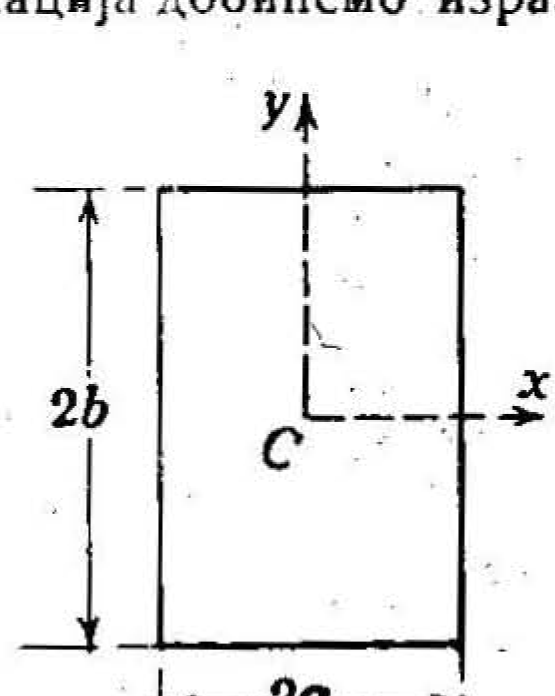
$$J_z^{(C)} = \frac{1}{36} m (a^2 + b^2 + c^2),$$

где су a, b, c стране троугла.

4. *Правоугаоник*

За правоугаоник са димензијама $2a$ и $2b$ (сл. 39) лако добијамо за централне осе паралелне странама правоугаоника

$$J_x = \frac{1}{3} m b^2 , \quad J_y = \frac{1}{3} m a^2, \quad \Pi_{xy} = 0 ,$$



Слика 39

јер је, на пр.,

$$J_x = \sigma_1 \int_{-b}^{+b} 2\,a\,y^2\,dy = 2\,\sigma_1\,a \Big/_{-b}^{+b} \frac{1}{3}\,y^3 = 2\,\sigma_1\,a \cdot \frac{1}{3}\,[\,b^3 - (-b^3)\,] =$$

$$= \frac{1}{3}\,\sigma_1\,4\,a\,b \cdot b^2 = \frac{1}{3}\,m \cdot b^2$$

и

$$\Pi_{xy} = -\,\sigma_1 \int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a} x\,y\,dx\,dy = -\,\sigma_1 \int_{-b}^{+b} y\,dy \int_{-a}^{+a} x\,dx =$$

$$= -\,\sigma_1 \int_{-b}^{+b} y\,dy \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = 0\,.$$

Момент J_z око централне осе, која стоји управно на раван правоугаоника, има вредност

$$J_z = \iint\limits_{Q} (x^2 + y^2)\;dx\,dy = \iint\limits_{Q} x^2\,dx\,dy + \iint\limits_{Q} y^2\,dx\,dy = J_y + J_x =$$

$$= \frac{1}{3}\,m\,(a^2 + b^2)\,,$$

где је двоструки интеграл проширен на целокупну површину Q правоугаоника.

5. *Круг*

За одређивање момента инерције површине круга израчунајмо пре свега J_z око централне осе управне на раван круга.

Ако се положај тачке круга одређује помоћу поларних координата ρ и θ (сл. 40, *a*) добићемо

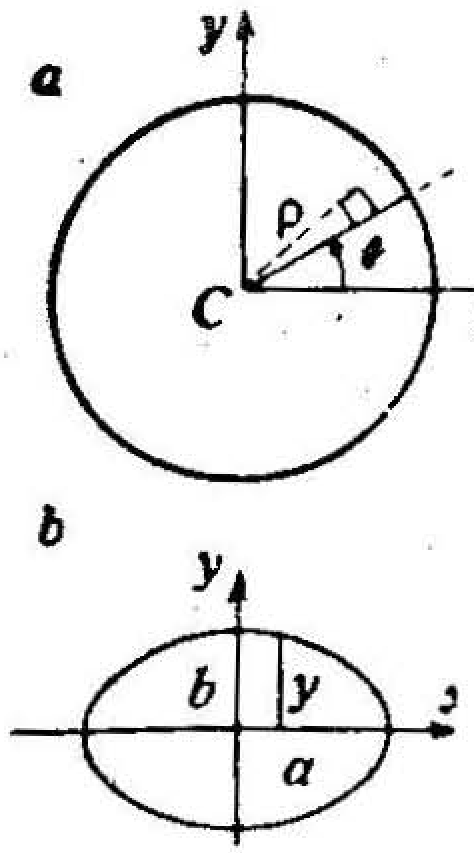
$$J_z = \sigma_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho^2 \cdot \rho\,d\theta \cdot d\rho = \frac{1}{2}\,\pi r^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2}\,m r^2\,.$$

После тога из једначине

$$J_z = J_x + J_y$$

под условом $J_x = J_y$ долазимо до резултата

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m r^2 .$$



Слика 40

6. *Елипса*

За одређивање момента инерције, рецимо J_y, површине елипсе (сл. 40, *b*) имамо

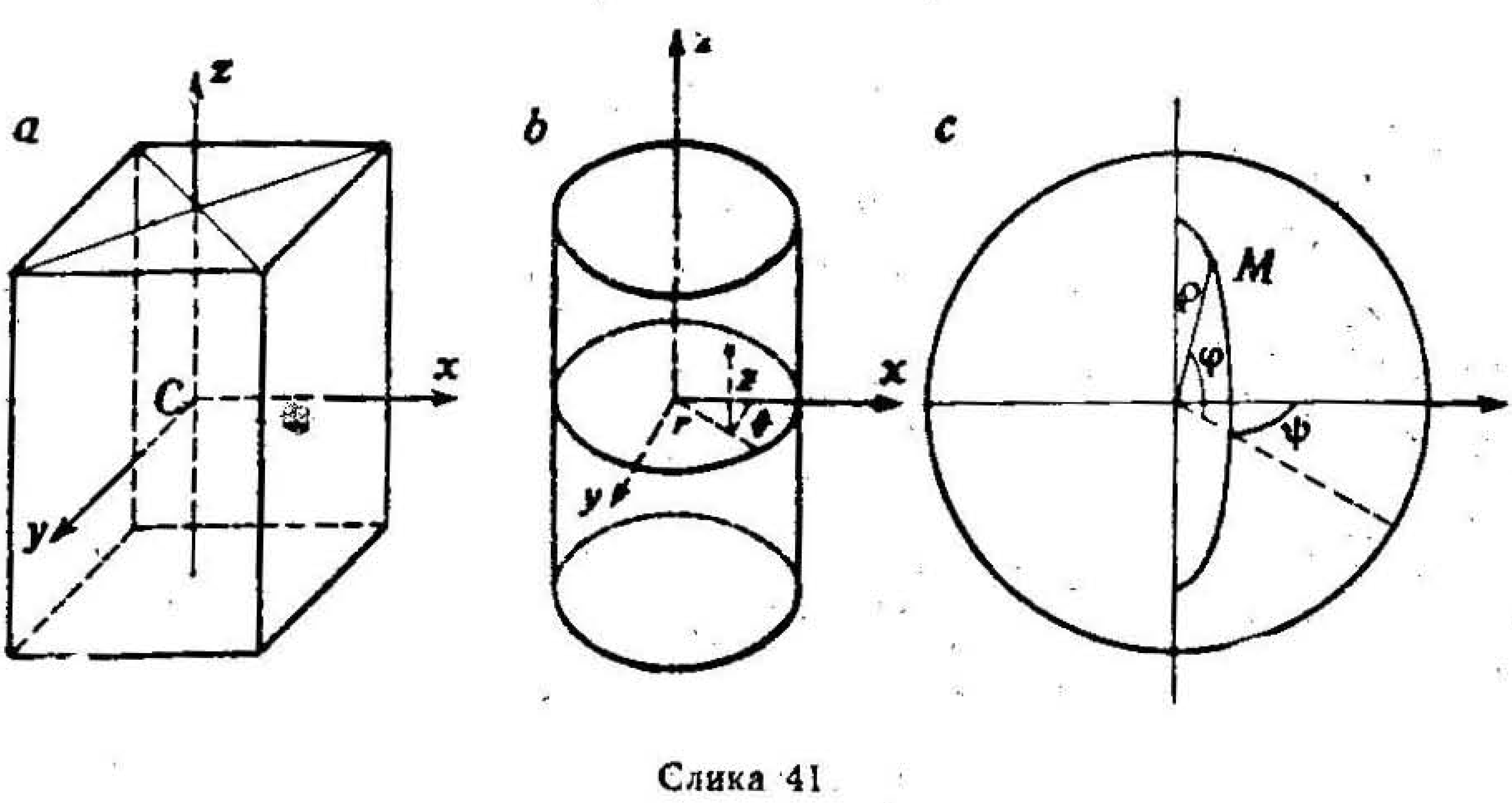
$$J_y = 4\sigma_1 \int_0^a x^2 y\, dx = 4\frac{b}{a}\sigma_1 \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 4\frac{b}{a}\sigma_1 \Big/_0^a \frac{1}{8} a^4 \left\{ \arc\sin\frac{x}{a} - \frac{1}{a^4}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(a^2 - 2x^2\right)\right]\right\} = \frac{1}{4}\pi ab\,\sigma_1 a^2 = \frac{1}{4} m a^2 .$$

Остали моменти инерције имају вредности: $J_x = \frac{1}{4} m b^2$, $J_z = J_x + J_y = \frac{1}{4} m (a^2 + b^2)$.

7. *Правоугли паралелепипед*



Слика 41

За момент инерције правоуглог паралелепипеда (сл. 41, *a*) са димензијама $2a$, $2b$, $2c$ око осе симетрије која пролази кроз центар симетрије супротних страна, рецимо око осе Cx, имамо

$$J_x = \sigma \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = 2\,\sigma\, a \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} (y^2+z^2)\,dy\,dz =$$

$$= 4\,\sigma\, a\, b \int_{-c}^{c} \left(\frac{b^2}{3}+z^2\right) dz = \sigma \cdot 8\, a\, b\, c \cdot \frac{1}{3}(b^2+c^2) = \frac{1}{3}\, m\,(b^2+c^2).$$

Исто тако за друге моменте инерције добијамо:

$$J_y = \frac{1}{3}\, m\,(c^2+a^2)\,, \qquad J_z = \frac{1}{3}\, m\,(a^2+b^2).$$

8. *Цилиндар*

Ако се положај тачке запремине неког цилиндра (сл. 41, b) одређује помоћу цилиндричних координата r, θ, z, онда за J_x имамо:

$$J_x = \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} (z^2 + r^2 \sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta\, dz\,,$$

где је R полупречник цилиндра и h његова висина. После извршеног рачуна добијамо

$$J_x = \frac{1}{12}\, m\,(3R^2+h^2)\,.$$

За осу цилиндра имамо

$$J_z = \frac{1}{2}\, m\, R^2.$$

9. *Лопта*

Ако за координате тачке лопте узмемо сферне координате ρ, φ, ψ (сл. 41, c), за поларни момент инерције имамо израз

$$J_o = \sigma \int_{0}^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{R} \rho^2\, d\rho \,.\, \rho\, d\varphi \,.\, \rho \cos\varphi\, d\psi = \frac{4}{5}\,\sigma\,\pi\, R^5 = \frac{3}{5}\, m\, R^2.$$

Како је

$$2\,J_o = J_x + J_y + J_z\,,$$

а за лопту је

$$J_x = J_y = J_z\,,$$

може се закључити да је

$$J_x = \frac{2}{5}\, m\, R^2.$$

ОДЕЉАК ДРУГИ

МЕХАНИКА СИСТЕМА

ГЛАВА ДРУГА

Материјални системи — слободни и неслободни

§ 2·1. Појам материјалног система

Скуп материјалних тела претставља материјални систем. Сваки материјални систем може се раставити на коначан или бесконачно велики број материјалних тачака, које се све могу сматрати као заступници транслаторно покретних чврстих тела, коначне или бескрајно мале масе.

Ако Сунце, планете и њихове сателите сматрамо као материјалне тачке, наш Сунчев систем пружа пример материјалног система са коначним бројем материјалних тачака.

Као пример материјалног система са бескрајно великим бројем материјалних тачака може се навести течност: извесна количина воде у чаши је материјални систем са бескрајно великим бројем материјалних тачака.

Материјалне системе, које можемо поделити само на бескрајно велики број материјалних тачака, можемо сврстати у две групе. Системи прве групе имају ту особину да је за одређивање положаја свих материјалних тачака тог система довољно одредити положај само неког коначног броја тачака. Пример таквог система је, рецимо, неко чврсто тело, које се обрће око сталне осовине. Такво тело можемо поделити само на бескрајно велики број делића, који имају транслаторно кретање, према томе оно има бескрајно велики број материјалних тачака, али је довољно узети само три тачке — две на осовини обртања и једну ван те осовине — да положај тог тела буде потпуно одређен.

Системи друге групе немају ту особину и за одређивање положаја тих система потребно је одредити положај бескрајно великог броја тачака. Као пример система те групе може послужити течност, коју смо већ навели раније.

У овој књизи ћемо се углавном зауставити на проучавању материјалних система са коначним бројем материјалних тачака. Сем тога методама ове књиге може се проучити и механика оних система са бескрајно великим бројем тачака, за чије је одређивање положаја потребно знати само коначан број тачака. Што се тиче система, као што је течност, на њих се могу односити само опште теореме о кретању материјалног система и општи принципи механике.

§ 2·2. Слободни и неслободни системи. Појам броја степена слободе система

Ако свака материјална тачка неког система може узимати за све време кретања произвољан положај и може имати произвољну брзину, материјални систем се зове *слободни систем.*

Ако Сунце, планете и остале чланове нашег Сунчевог система сматрамо као материјалне тачке, тај систем је пример слободног материјалног система.

Ако се слободни материјални систем састоји од n тачака са масама $m_1, m_2, \cdots, m_n$, положај тог система може се одредити помоћу вектора положаја $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$ у односу на непомичну тачку O простора. Ако уведемо непомични триједар оса $Oxyz$ и означимо координате i'те тачке система са

$$\vec{r}_i\,(x_i, y_i, z_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

треба за одређивање положаја свих тачака система знати $3n$ координата.

Уместо Декартових координата тачака могу се увести друге величине, рецимо $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}$ њих свега $3n$ и то тако да се из једначина

$$x_i = x_i\,(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}; t),$$
$$y_i = y_i\,(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}; t),$$
$$z_i = z_i\,(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}; t)$$

могу одредити за сваки тренутак t Декартове координате тачака, кад су познате величине $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}$. Приметимо да је у случају система тачака свака координата, рецимо x_1 везана не само са три од величина $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$, већ у општем случају може бити у вези и са свима величинама $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$. M_1

Величине, у нашем случају $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$, које одређују положај свих тачака система, зову се *координате материјалног система.* Систем од n слободних тачака има свега $3n$ координата.

Број независних скаларних величина неопходних за одређивање положаја материјалног система зове се *број степена слободе тог система.*

Систем од n слободних материјалних тачака има $3n$ степена слободе.

Систем, рецимо, од Сунца, Земље и Месеца, сматраних као тачке, има девет степена слободе.

У случају слободног материјалног система свака од координата може узимати произвољне вредности у оној области, која одговара слободном кретању система.

Ако положај тачака материјалног система или брзине тих тачака не могу бити произвољне, већ су ограничене неким условима, систем се зове *неслободни материјални систем.* На пр., две материјалне тачке везане штапом непроменљиве дужине, пружају пример неслободног материјалног система.

Ограничење у кретању система може бити аналитички изражено на тај начин што између вектора положаја тачака, брзина тих тачака и времена постоји једна или више веза. Те везе можемо изразити у облику

$$F_L(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) = 0, \tag{1}$$

$$L = 1, 2, \ldots, K; \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

где је $\vec{r}_i$ вектор положаја i'те тачке, $\vec{v}_i$ — брзина те тачке и t време. K означава број веза, а n — број тачака.

Ако векторе $\vec{r}_i$ и $\vec{v}_i$ одређујемо Декартовим координатама, једначине веза у скаларном облику изгледаће:

$$F_L(x_i, y_i, z_i;\; x_i', y_i', z_i';\; t) = 0, \tag{1'}$$

$$L = 1, 2, \ldots, K; \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Време t улази у једначине (1) у оним случајевима, кад се веза мења у току времена.

Ако неке од веза (1) — (1') не зависе од брзина тачака $\vec{v}_i\,(x_i', y_i', z_i')$, једначине таквих веза биће облика

$$(2) \qquad f_l\,(\vec{r}_i, t) = f_l\,(x_i, y_i, z_i;\, t) = 0,$$
$$l = 1, 2, \ldots, k_1;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Везе облика (2) зову се *коначне* или *холономне* (ὅλος — цели, потпуни; νόμος — закон).

Неслободни материјални систем, чије је кретање ограничено само коначним везама, зове се *холономни* систем.

Зауставимо се прво само на проучавању холономних система.

Ако уместо Декартових координата тачака уведемо произвољне координате $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$, једначине (2) се могу написати

$$(3) \qquad f_l\,(\xi_s, t) = 0$$
$$l = 1, 2, \ldots, k_1;\ s = 1, 2, \ldots, 3n.$$

На основу тих једначина можемо казати, да у случају таквог неслободног материјалног система за одређивање положаја система треба знати само

$$3n - k_1$$

координата од свих $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$ координата. Осталих k_1 координата можемо одредити из једначина датих веза. Другим речима, у случају k_1 коначних веза имамо $3n - k_1 = N$ независних координата. Тај број *независних* координата, неопходних за одређивање положаја система у простору, такође се зове *број степена слободе датог неслободног материјалног система*.

Примери. 1. Две тачке везане штапом имају пет степена слободе, јер за одређивање положаја једне тачке треба знати три координате, а за одређивање друге само две као тачке која се налази на сфери полупречника дужине штапа.

2. Две тачке везане штапом, које се налазе на једној површини (на пр. равни), имају три степена слободе.

3. Слободно чврсто тело има шест степена слободе, јер за одређивање положаја тог тела треба одредити положај три тачке тела, које не припадају истој правој. За прву тачку потребно је три координате, за другу две и за трећу само једна координата.

4. Нека фабрика, где сваки делић машине има потпуно одређени положај за сваки положај главног точка главног мотора фабрике, има само један степен слободе.

5. Човек, сматран као материјални систем, има бескрајно велики број степена слободе.

За независне координате можемо одабрати ма којих N координата од $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$, само да се помоћу њих могу изразити остале координате. Али се N независних координата могу увести и на други начин.

Претпоставимо да смо решили једначине (3) и одредили $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_1}$ у функцији осталих N координата $\xi_{k_1+1}, \xi_{k_1+2}, \ldots, \xi_{3n}$, тј. имамо:

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_1(\xi_{k_1+1}, \xi_{k_1+2}, \ldots, \xi_{3n}, t), \\
\xi_2 &= \xi_2(\xi_{k_2+1}, \xi_{k_2+2}, \ldots, \xi_{3n}, t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{k_1} &= \xi_{k_1}(\xi_{k_1+1}, \xi_{k_1+2}, \ldots, \xi_{3n}, t).
\end{aligned}
$$

Уведимо сад уместо независних координата $\xi_{k_1+1}, \xi_{k_1+2}, \ldots, \xi_{3n}$ нове независне координате $q_1, q_2, \ldots, q_N$ помоћу образаца

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
\xi_{k_1+1} &= \xi_{k_1+1}(q_1, q_2, \ldots, q_N, t), \\
\xi_{k_1+2} &= \xi_{k_1+2}(q_1, q_2, \ldots, q_N, t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{3n} &= \xi_{3n}(q_1, q_2, \ldots, q_N, t),
\end{aligned}
$$

при чему десне стране треба сматрати као функције независних промењљивих $q_1, q_2, \ldots, q_N$, а у општем случају и времена; те нове промењљиве могу бити изабране по нашој вољи.

Ако вредности (5) независних координата ставимо у (4), онда и зависне координате постају функције $q_1, q_2, \ldots, q_N$ и у општем случају времена. На тај начин може се уопште написати

$$
(6) \qquad \xi_s = \xi_s(q_1, q_2, \ldots, q_N, t), \qquad s = 1, 2, \ldots, 3n.
$$

Ако једначине (3) коначних веза не садрже време, нема потребе уводити време ни у једначине (5), па према томе неће бити времена ни у једначинама (6); према томе у овом случају имамо

$$
(7) \qquad \xi_s = \xi_s(q_1, q_2, \ldots, q_N), \qquad s = 1, 2, \ldots, 3n.
$$

Ако везе не садрже време, оне се зову *склерономне* (σκληρός- сув, чврст, крут, непромењљив; νόμος — закон). У супротном случају оне су *реономне* (ῥέω — тећи, мењати се; νόμος — закон).

Може се десити да се материјални систем дели на материјалне тачке у бескрајно великом броју, али број независних координата остаје коначан, а то због тога што је број веза бескрајно велики. Тако, на пр., сваке две тачке, i'та и j'та, чврстог тела имају координате, које задовољавају једначину везе

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0\,,$$

где је l_{ij} стално растојање између тих тачака. Од свих координата тачака тела за независне се могу одабрати три координате x_1, y_1, z_1 једне тачке тела, затим само две координате од координата x_2, y_2, z_2 друге тачке, јер између њих постоји веза

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_{12}^2 = 0\,,$$

и најзад само једна координата од координата x_3, y_3, z_3 треће тачке, јер за те величине имамо две везе

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - l_{13}^2 = 0\,,$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - l_{23}^2 = 0\,.$$

Свака даља тачка, на пр., четврта са координатама x_4, y_4, z_4 потпуно је одређена са прве три тачке, јер имамо на расположењу три једначине

$$(x_4 - x_i)^2 + (y_4 - y_i)^2 + (z_4 - z_i)^2 - l_{i4}^2 = 0$$

$$i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,.$$

Често пута је згодно увођењем нових координата задовољити само један део коначних веза, други део веза тада остаје и за нове координате. Тако, на пр., ако са q_1, q_2, . . ., q_6 означимо шест независних координата слободног чврстог тела, у случају неслободног чврстог тела може постојати једна или више оваких веза

$$F(q_1\,,\ q_2\,,\ .\ .\ .\,,\ q_6\,;\ t) = 0\,.$$

§ 2·21. Нехолономне везе и нехолономни системи

Пређимо сад на анализу веза, које зависе и од брзина тачака система, тј. изражавају се једначинама

$$F_L(\vec{r}_i\,,\ \vec{v}_i\,,\ t) = 0 \tag{1}$$

$$L = 1\,,\ 2\,,\ .\ .\ .\,,\ K\,;\ i = 1\,,\ 2\,,\ .\ .\ .\,,\ n$$

или у облику

$$(1') \qquad F_L(x_i\,,\ y_i\,,\ z_i;\ x_i'\,,\ y_i'\,,\ z_i'\,;\ t) = 0\,,$$

кад су величине изражене помоћу Декартових координата.

Може се догодити да се једна или више од веза (1) — (1′) могу добити као резултат извршеног диференцирања функција у којима нема брзина. Тако се, на пр., може добити нека веза диференцирањем

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0\,,$$

где је Φ позната функција координата и времена. У том случају

$$(2) \qquad \Phi(x_i\,,\ y_i\,,\ z_i\,;\ t) = \Gamma,$$

где је Γ произвољна константа, замењује одговарајућу везу са брзинама.

Ако се везе (1) — (1′) не могу добити диференцирањем неког система коначних веза, оне се зову *диференцијалне* или *нехолономне*, а систем која се покорава и таквим везама зове се *нехолономни систем*.

Коначне везе, које зависе од произвољних констананата, као што је на пр. веза (2), зову се *семихолономне*. При решавању сваког проблема са семихолономним везама потребно је одабрати одређене вредности за оне произвољне константе које се налазе у једначинама тих веза. После таквог избора свака семихолономна веза постаје коначна или холономна веза.

У општем случају диференцијалне везе типа (1) могу зависити од брзина на произвољан начин. Али у већини конкретних проблема употребљују се само оне диференцијалне везе које зависе од брзина линеарно. Сваку линеарну диференцијалну везу можемо написати у облику

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n}(A_{ij}\,x_i' + B_{ij}\,y_i' + C_{ij}\,z_i') + D_j = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2$$

где су A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_j функције координата x_i, y_i, z_i и времена t.

Приметимо да се линеарност диференцијалних веза не може доказати или извести из природе самих механичких проблема. Обрнуто, могу се конструисати помоћу нарочитих механизама и таква ограничења у слободи кретања система да везе буду изражене и помоћу квадратних функција брзина.

Зауставићемо се само на линеарним диференцијалним везама. Према томе код нас ће систем коначних и диференцијалних веза у општем случају имати облик;

$$f_l\,(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i\,;\,t)=0\,,\qquad l=1,\,2,\,\ldots,\,k_1$$

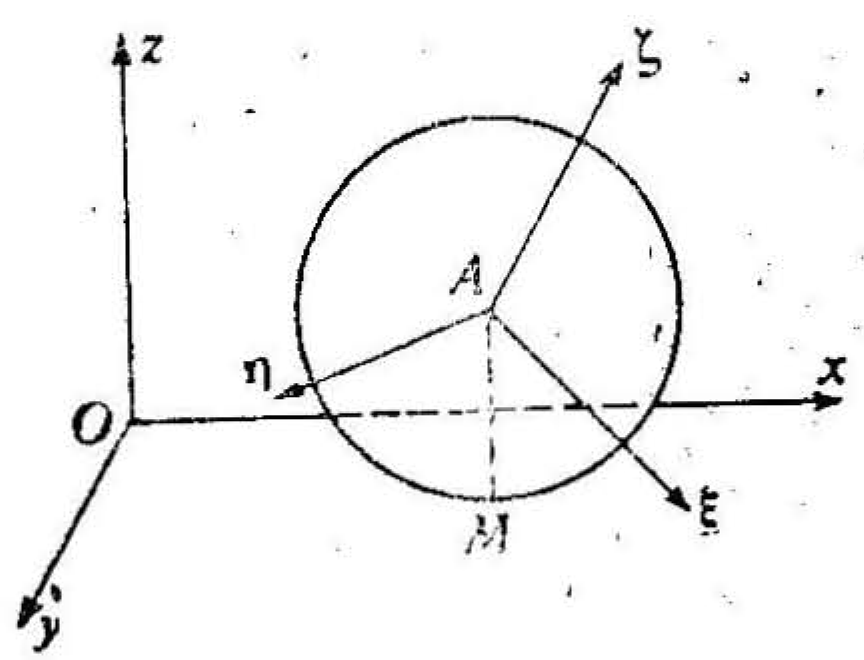
$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}\,x_i'+B_{ij}\,y_i'+C_{ij}\,z_i')+D_j=0,\qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,k_2$$

$$i=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

§ 2·211. Пример нехолономних веза

Навешћемо класични пример нехолономних веза[1]).

Узмимо лопту која се котрља без клизања по равни. Услов котрљања без клизања изражава се тиме што се тачка додира M (сл. 42) површине и равни налази у тренутном миру, тј. има брзину једнаку нули. Ако са лоптом повежемо координатни систем $A\xi\eta\zeta$ са тачком A у центру лопте и положај тог координатног система одређујемо помоћу координата x_A, y_A, z_A тачке A у односу на систем $Oxyz$ и *Euler*'ових углова φ, ψ, θ, онда, како је познато из кинематике чврстог тела, пројекције P, Q, R тренутне угаоне брзине лопте на осе непомичног триједра имају вредности:



Слика 42

$$P=-\varphi'\sin\psi+\theta'\sin\varphi\cos\psi\,,$$

$$Q=\quad\varphi'\cos\psi+\theta'\sin\varphi\sin\psi\,,$$

$$R=\quad\psi'+\theta'\cos\varphi\,.$$

Исто тако из кинематике чврстог тела је познато да се брзина произвољне тачке M чврстог тела може изразити

$$\vec{v}_M=\vec{v}_A+[\vec{\Omega},\overrightarrow{AM}]\,.$$

[1]) Овај пример претпоставља знање кинематике чврстог тела. Ако читалац није упознат са елементима те кинематике, овај се пример може изоставити.

Ако тај образац применимо на тачку додира, $\vec{v}_M = 0$. Вектор $\vec{v}_A$ има за координате x'_A, y'_A, z'_A, вектор $\vec{\Omega}$ — P, Q, R и најзад вектор $\overrightarrow{AM}$ — $0, 0, -a$, где је a полупречник лопте. Према томе три скаларне једначине које одговарају претходној векторској једначини изгледају:

$$\frac{dx_A}{dt} - Q a = 0,$$

$$\frac{dy_A}{dt} + P a = 0,$$

$$\frac{dz_A}{dt} \qquad = 0$$

или

$$\frac{dx_A}{dt} - a\left(\cos\psi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\sin\psi\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

$$\frac{dy_A}{dt} + a\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\cos\psi\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

$$\frac{dz_A}{dt} = 0.$$

Прве две везе су нехолономне, јер се систем тих диференцијалних једначина не може заменити коначним једначинама. Из треће једначине следује

$$z_A = \text{const.},$$

па према томе је она семихолономна. Ако узмемо у обзир да је растојање тачке A од равни једнако полупречнику, тј. ставимо

$$z_A = a,$$

наша трећа веза се претвара у коначну везу.

На основу наведеног можемо тврдити да лопта која се котрља без клизања по равни пружа пример нехолономног материјалног система.

§ 2·22. Везе задржавајуће и незадржавајуће

Слично ономе како смо у теорији једне неслободне тачке имали случај, рецимо, једне задржавајуће везе са једначином

$$f(x, y, z; t) = 0,$$

која захтева да за све време кретања тачка остане на тој површини и не може се удаљити ни на једну ни на другу страну, и затим случај незадржавајуће везе

$$f(x, y, z; t) \geqslant 0,$$

која ограничава само област приступачних положаја тачке, рецимо, са једне стране од површине, исто тако и у случају система, везе, било коначне било диференцијалне, могу бити задржавајуће и незадржавајуће.

Ако систем задржавајућих веза кратко напишемо у облику

$$f_l = f_l(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, x_i' + B_{ij}\, y_i' + C_i\, z_i') + D_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

незадржавајуће везе се изражавају овим неједнакостима:

$$f_l \geqslant 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$\varphi_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Свака незадржавајућа веза дели положаје система (коначне везе) или положаје и брзине (диференцијалне везе) у две области — приступачну и неприступачну, могућу за систем и немогућу.

Јасно је да везе могу бити или све задржавајуће или све незадржавајуће или се један део може састојати из задржавајућих а други из незадржавајућих веза.

§ 2·3. Услови за брзине тачака неслободног система

Свака од коначних веза

$$\text{(1)} \qquad f_l(\vec{r}_i; t) = f_l(x_i, y_i, z_i; t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

може зависити у општем случају од вектора положаја сваке тачке система, тј. од координата сваке тачке. Ако функцију f_l сматрамо као скаларну функцију вектора положаја $\vec{r}_i$, можемо увести градијент те функције по том вектору положаја. Пошто остале векторе положаја при томе сматрамо као константе, зваћемо наш градијент *делимични градијент*. Означујемо га са

$$\operatorname{grad}_i f_l$$

и читамо: градијент за i'ту тачку функције f_l. Његове су координате

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_l}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial f_l}{\partial z_i}.$$

Тај се вектор исто тако зове и *диференцијални параметар првог реда* l'те везе у односу на i'ту тачку. Тај назив је увео *G. Lamé*. Диференцијални параметар се често пута означује и са $\vec{\Delta}_i^{(l)}$. Према томе је

$$\operatorname{grad}_i f_l = \Delta_i^{(l)}.$$

Ако једначину (1) диференцирамо по времену, имамо

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial f_l}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial f_l}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1.$$

Помоћу $\operatorname{grad}_i f_l$ и скаларног производа ту исту једначину можемо написати

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n}(\operatorname{grad}_i f_l, \vec{v}_i) + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0.$$

На сличан начин за сваку диференцијалну везу

$$(4) \qquad \varphi_j = \sum_{i=1}^{n}(A_{ij}\,x_i' + B_{ij}\,y_i' + C_{ij}\,z_i') + D_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, k_2$$

можемо узети у обзир вектор са координатама

$$(5) \qquad A_{ij}, \; B_{ij}, \; C_{ij}.$$

Тај вектор ћемо звати *квазиградијент линеарне диференцијалне везе* φ_j за i'ту тачку и означавати га са $\operatorname{qgrad}_i \varphi_j$. Помоћу тог вектора једначину диференцијалне везе можемо написати

$$(6) \qquad \varphi_j = \sum_{i=1}^{n}(\operatorname{qgrad}_i \varphi_j, \vec{v}_i) + D_j = 0.$$

Једначине (2) и (4) или (3) и (6) дају услове које треба да задовољавају брзине тачака неслободног материјалног система.

Скрећемо пажњу да квазиградијент не задовољава онај услов, који задовољава сваки градијент, наиме да је

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}_i f_l = 0,$$

јер разлике

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial y_i}-\frac{\partial B_{ij}}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial z_i}-\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_i}-\frac{\partial A_{ij}}{\partial y_i},$$

које су координате вектора

$$\operatorname{rot}\operatorname{qgrad}_i \varphi_j$$

нису једнаке нули.

Ако су везе незадржавајуће и при томе је у одређеном положају система

$$f_l > 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1$$

ове везе не ограничавају брзине. Само у случају, кад је

$$f_l = 0,$$

можемо написати

$$\frac{df_l}{dt} \geqslant 0.$$

Према томе имамо две врсте услова

$$\frac{df_l}{dt} \geqslant 0, \quad \varphi_j \geqslant 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2$$

који ограничавају брзине у случају незадржавајућих веза.

§ 2·4. Услови за убрзања тачака неслободног система

Ако диференцирамо по времену једначине

$$\frac{df_l}{dt} = 0, \quad \varphi_j = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2$$

добићемо једначине

$$(1)\quad \frac{d^2 f_l}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial f_l}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial f_l}{\partial z_i} z_i''\right) + D_2 f_l = 0,\ l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(2)\quad \frac{d\varphi_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(A_{ij} x_i'' + B_{ij} y_i'' + C_{ij} z_i''\right) + D_2 \varphi_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

где су

$$D_2 f_l = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ x_i' \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_s} x_s' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial y_s} y_s' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial z_s} z_s' \right) +$$

$$+ y_i' \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial y_i \partial x_s} x_s' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial y_i \partial y_s} y_s' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial y_i \partial z_s} z_s' \right) +$$

$$+ z_i' \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial z_i \partial x_s} x_s' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial z_i \partial y_s} y_s' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial z_i \partial z_s} z_s' \right) +$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial t} x_i' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial y_i \partial t} y_i' + \frac{\partial^2 f_l}{\partial z_i \partial t} z_i' \right) \Big\} + \frac{\partial^2 f_l}{\partial t^2},$$

$$D_2 \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ x_i' \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_s} x_s' + \frac{\partial A_{ij}}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial A_{ij}}{\partial z_s} z_s' \right) +$$

$$+ y_i' \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_s} x_s' + \frac{\partial B_{ij}}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_s} z_s' \right) +$$

$$+ z_i' \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_s} x_s' + \frac{\partial C_{ij}}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_s} z_s' \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial D_j}{\partial x_i} \right) x_i' + \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial D_j}{\partial y_i} \right) y_i' + \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial D_j}{\partial z_i} \right) z_i' \Big\} + \frac{\partial D_j}{\partial t}.$$

Подвлачимо да су функције $D_2 f_l$ и $D_2 \varphi_j$ квадратне у односу на координате брзина тачака система. Оне су хомогене квадратне функције (квадратне форме) под условима 1. да коначне везе не зависе од времена $\left(\frac{\partial f_l}{\partial t} = 0 \right)$; 2. да диференцијалне везе исто тако не зависе од времена $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0 \right)$, а да су хомогене $(D_j = 0)$.

Једначине (1) и (2) можемо кратко написати:

$$\sum_{i=1}^{n} (\text{grad}_i f_l, \vec{w}_i) + D_2 f_l = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\, \varphi_j, \vec{w}_i) + D_2\, \varphi_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

где је $\vec{w}_i$ убрзање i'те тачке.

Ако су везе незадржавајуће, али је у датом положају

$$f_l = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1.$$

$$\frac{df_l}{dt} = 0, \quad \varphi_j = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2$$

убрзања морају задовољавати услове:

$$\frac{d^2 f_l}{dt^2} \geqslant 0, \quad \frac{d\varphi_j}{dt} \geqslant 0. \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

§ 2·5. Могуће брзине, могућа померања, могуће варијације

Ако је систем потпуно слободан, свака тачка система може имати произвољну брзину; скуп свих таквих брзина је скуп *могућих* брзина тог система.

Ако је систем неслободан, тј. имамо коначне и диференцијалне везе са једначинама:

$$f_l\,(x_i, y_i, z_i;\, t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1$$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, x'_i + B_{ij}\, y'_i + C_{ij}\, z'_i) + D_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2$$

онда, како смо видели у § 2·3, брзине тачака система морају задовољавати услове:

$$\frac{df_l}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i\, f_l, \vec{v}_i) + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\, \varphi_j, \vec{v}_i) + D_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Скуп брзина, које задовољавају те услове, скуп је могућих брзина датог материјалног система.

Скуп померања тачака система са вредностима могућих брзина за исти интервал времена зове се скуп *могућих померања* система. Ако могуће померање i'те тачке система за интервал времена Δt означимо са $\overrightarrow{\Delta s_i}$, из услова за брзине имамо две врсте услова за могућа померања:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i f_l, \overrightarrow{\Delta s_i}) + \frac{\partial f_l}{\partial t} \Delta t = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q\,grad}_i \varphi_j, \overrightarrow{\Delta s_i}) + D_j \Delta t = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Ако су коначне везе склерономне $\left(\frac{\partial f_l}{\partial t} = 0\right)$ и диференцијалне хомогене $(D_j = 0)$, услови за могућа померања изгледаће:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i f_l, \overrightarrow{\Delta s_i}) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q\,grad}_i \varphi_j, \overrightarrow{\Delta s_i}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Замислимо сад два ма која могућа померања: једно $\overrightarrow{\Delta s_i}$ и друго $\overrightarrow{\Delta' s_i}$. Да и друго померање буде могуће оно мора задовољавати једначине сличне (1) и (2), тј.:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i f_l, \overrightarrow{\Delta' s_i}) + \frac{\partial f_l}{\partial t} \Delta t = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q\,grad}_i \varphi_j, \overrightarrow{\Delta' s_i}) + D_j \Delta t = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Геометриска разлика два могућа померања

$$\overrightarrow{\Delta' s_i} - \overrightarrow{\Delta s_i} = \overrightarrow{\delta s_i}$$

зове се *могућа варијација* тачке система. Одузимањем (1) од (5) а (2) од (6) долазимо до једначина

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l \, , \, \overrightarrow{\delta s_i}) = 0 \, , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 \, ,$$

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{q\,grad}_i \varphi_j \, , \, \overrightarrow{\delta s_i}) = 0 \, , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 \, ,$$

које задовољавају могуће варијације. Једначинама (7) и (8) одговарају ове једначине написане у развијеном облику:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_l}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_l}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \, , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{ij} \, \delta x_i + B_{ij} \, \delta y_i + C_{ij} \, \delta z_i) = 0 \, , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 \, ,$$

где су δx_i, δy_i, δz_i координате вектора могуће варијације или тзв. варијације координата тачке.

У општем случају скуп могућих варијација система је различит од скупа могућих померања тог система, јер прве треба да задовољавају једначине (7) и (8), а друга једначине (1) и (2). Међутим у случају кад је $\frac{\partial f_l}{\partial t} = 0$, $D_j = 0$ ($l = 1, 2, \ldots, k_1$; $j = 1, 2, \ldots, k_2$), могућа померања задовољавају једначине (3) и (4) идентичне са једначинама (7) и (8). Према томе је у овом случају свако могуће померање и могућа варијација и обрнуто.

Дубља анализа механизама, помоћу којих се остварују везе, показује да присуство времена у једначинама коначних веза и присуство члана D_j у диференцијалним везама стоји у вези са кретањем оних спољашњих маса, које остварују везу. Ако те масе заустивимо или замислимо у миру, биће

$$\frac{\partial f_l}{\partial t} = 0 \, , \qquad D_j = 0 \, , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 ; \; j = 1, 2, \ldots, k_2$$

па ишчезава разлика између варијација и могућих померања.

На тај начин можемо казати да могуће варијације претстављају могућа померања али са претпоставком да су заустављене спољашње масе које остварају механизам везе.

Подвлачимо да скуп могућих варијација игра врло значајну улогу у теорији кретања неслободног система.

ГЛАВА ТРЕЋА

Диференцијалне једначине кретања материјалног система

§ 3·1. Диференцијалне једначине кретања слободног материјалног система

Ако се материјални систем састоји од n слободних материјалних тачака са масама m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и на сваку од тих тачака дејствује резултујућа сила $\vec{F}_i$, диференцијална једначина кретања те тачке може се написати према правилу диференцијалне једначине кретања посебне тачке у облику:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

где је $\vec{w}_i$ убрзање тачке са вредношћу

$$\vec{w}_i = \dot{v}_i = \ddot{r}_i,$$

при чему смо са $\dot{v}_i$ означили извод брзине по времену, а са $\ddot{r}_i$ други извод по времену вектора положаја $\vec{r}_i$ покретне тачке M_i са масом m_i у односу на непокретну тачку, рецимо тачку O.

Векторској једначини (1) одговарају ове скаларне једначине за Декартове координате:

$$\begin{aligned} m_i x_i'' &= X_i, \\ m_i y_i'' &= Y_i, \\ m_i z_i'' &= Z_i, \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

где су x_i, y_i, z_i Декартове координате покретне тачке и X_i, Y_i, Z_i — координате силе $\vec{F}_i$ у односу на исти Декартов триједар.

Пошто сила $\vec{F_i}$, која дејствује на i'ту тачку, претставља резултанту сила чији се извори могу налазити и у масама самог система, за унутрашње силе, и у масама које не припадају систему, за спољашње силе, а спољашње масе могу бити при томе и покретне, свака од координата, рецимо X_1, може зависити од ових аргумената:

$$X_1 = fonct\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n;\; x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2', \ldots, x_n', y_n', z_n';\; t).$$

Према томе једначине (2) дају систем диференцијалних једначина: у општем случају не можемо решавати посебице, одвојено, три једначине за сваку тачку, него је потребно решавати све једначине у исто време, повезано, јер све непознате величине могу да улазе у сваку од једначина.

После интеграције система (2) треба да добијемо интеграле у облику

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\,(t;\, C_1, C_2, \ldots, C_{6n}), \\ y_i &= y_i\,(t;\, C_1, C_2, \ldots, C_{6n}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ z_i &= z_i\,(t;\, C_1, C_2, \ldots, C_{6n}), \end{aligned}$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_{6n}$ произвољне константе интеграције којих има $6n$. Ових $6n$ константата се одређују из почетних услова, тј. из почетног положаја система, кад за $t = t_0$ координате тачака имају вредности

$$x_{i0},\; y_{i0},\; z_{i0}$$

и из почетних брзина

$$x'_{i0},\; y'_{i0},\; z'_{i0}$$

за исти тренутак.

Дефинитивно проблем о кретању система решавају коначне једначине кретања у облику

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\,(t, t_0;\, x_{s0}, y_{s0}, z_{s0};\, x'_{s0}, y'_{s0}, z'_{s0}), \\ y_i &= y_i\,(t, t_0;\, x_{s0}, y_{s0}, z_{s0};\, x'_{s0}, y'_{s0}, z'_{s0}), \\ z_i &= z_i\,(t, t_0;\, x_{s0}, y_{s0}, z_{s0};\, x'_{s0}, y'_{s0}, z'_{s0}), \\ & i, s = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ако се положај сваке тачке не одређује помоћу Декартових координата, него помоћу ма којих других криволиниских координата, али тако да Декартове координате сваке тачке зависе само од криволиниских координата те тачке, тј. на пр.

$$x_1 = x_1\ (q_1,\ q_2,\ q_3)\ ,$$
$$y_1 = y_1\ (q_1,\ q_2,\ q_3)\ ,$$
$$z_1 = z_1\ (q_1,\ q_2,\ q_3),$$

а

$$x_2 = x_2\ (q_4,\ q_5,\ q_6)\ ,$$
$$y_2 = y_2\ (q_4,\ q_5,\ q_6)\ ,$$
$$z_2 = z_2\ (q_4,\ q_5,\ q_6),$$

итд., онда из векторске једначине (1) после пројицирања на осе криволиниских координата, рецимо, за прву тачку добијамо једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_s'} - \frac{\partial T_1}{\partial q_s} = Q_s\ , \qquad s = 1,\ 2,\ 3 \tag{3}$$

где је: T_1 жива сила прве тачке изражена помоћу криволиниских координата, тј.

$$2\,T_1 = m_1\,v_1^2 = m_1\ (A_1^2\,q_1'^2 \ldots + 2\,B_1\,q_2'\,q_3' + \ldots)$$

при чему су коефицијенти A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 у општем случају функције координата q_1, q_2, q_3 и само њих; Q_s — генералисана сила, на пр.

$$Q_1 = A_1\,F_1 \cos\,(\vec{F_1},\ \vec{q_1})\,,$$

где $\vec{q_1}$ означава орт координатне линије дуж које се мења само координата q_1. Пошто $A_1\,\delta q_1$ одређују величину померања $\vec{\delta s_{11}}$ прве тачке кад се промени само координата q_1 за δq_1, производ

$$Q_1\,\delta q_1 = (\vec{F_1},\ \vec{\delta s_{11}})$$

претставља рад сила које дејствују на прву тачку кад она изврши померање што одговара промени само координате q_1 за δq_1.

Ако уведемо живу силу целокупног система, тј. ставимо

$$T = T_1 + T_2 + \ .\ .\ . + T_n\,,$$

може се уместо T_1 у једначинама (3) ставити T, јер живе силе осталих тачака не зависе од координата q_1, q_2, q_3 и брзина q_1', q_2', q_3' за прву тачку. Према томе целокупни систем једначина за криволиниске координате може се написати у облику

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s\,, \qquad s = 1, 2, \ldots, 3n. \tag{4}$$

Пошто на сваку тачку може дејствовати сила која зависи од положаја и других тачака система, свака генералисана сила може бити функција координата свих тачака, а и извода тих координата по времену (генералисаних брзина) и самог времена тј.

$$Q_s = Q_s\,(q_1, q_2, \ldots, q_{3n};\ q_1', q_2', \ldots, q'_{3n}, t),$$
$$s = 1, 2, \ldots, 3n.$$

Интеграција једначина (4) треба да доведе до решења проблема о кретању система у облику интеграла

$$q_s = q_s\,(t, t_0;\ q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{3n0};\ q'_{10}, q'_{20}, \ldots, q'_{3n0}),$$
$$s = 1, 2, \ldots, 3n,$$

где су уведене почетне генералисане координате тачака и почетне генералисане брзине.

§ 3·11. Примери

1. *Проблем двају тела*

Нека су дате две материјалне тачке M_1 и M_2 са масама m_1 и m_2 на које дејствује Њутнова сила гравитације са интензитетом

$$F = \varepsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где је ε^2 коефицијент пропорционалности и r узајамно растојање једне тачке од друге. Коефицијент ε^2 зове се *гравитациона константа*. Она има димензију

$$[\varepsilon^2] = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

и бројну вредност

$$\varepsilon^2 = 6{,}6_5 \,.\, 10^{-8}\,\mathrm{gr}^{-1}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{sec}^{-2} = 6{,}6_5 \,.\, 10^{-8} \,.\, \mathrm{dyn} \,.\, \mathrm{cm}^2 \,.\, \mathrm{gr}^{-2}.$$

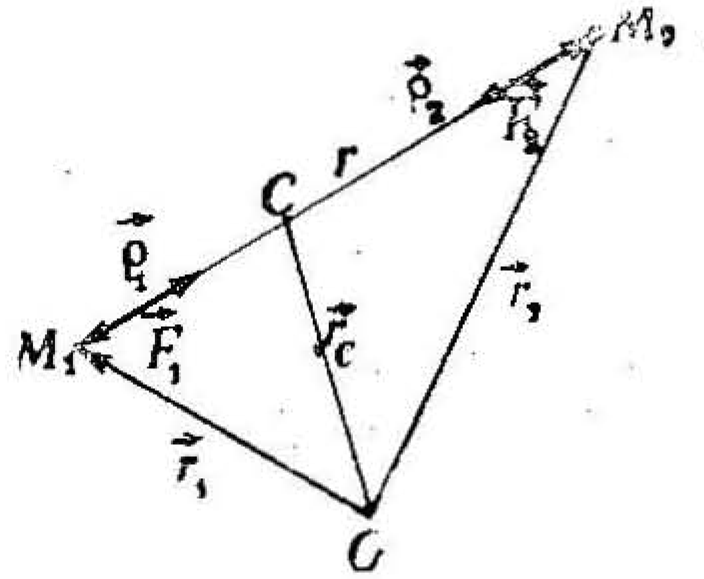
Диференцијалне једначине кретања тих тачака у векторском облику можемо написати овако: за прву тачку

$$m_1 \ddot{r}_1 = \varepsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathrm{ort}\,\overrightarrow{M_1 M_2} = \varepsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{I}$$

и за другу

$$(2) \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \varepsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

где су $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ вектори положаја тачке M_1 односно M_2 у односу на непокретну тачку O (сл. 43), а r је растојање између тачака M_1 и M_2.



Слика 43

Уочимо прво, тачку C — центар маса m_1 и m_2. Ако са $\vec{r}_c$ означимо вектор положаја те тачке, из основне особине те тачке добија се:

$$m\vec{r}_c = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2,$$

где је $m = m_1 + m_2$.

Ако двапут диференцирамо претходну једначину и искористимо једначине кретања (1) и (2), добија се

$$m\ddot{\vec{r}}_c = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \varepsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0,$$

тј.

$$\ddot{\vec{r}}_c = 0.$$

Другим речима, тачка C нема убрзања, она се креће праволиниски и равномерно односно остаје непомична; ово следује из векторског интеграла претходне једначине

$$\vec{r}_c = \vec{A}t + \vec{B},$$

где су $\vec{A}$ и $\vec{B}$ произвољни константни вектори интеграције; њихова вредност се одређује из почетних услова кретања.

Пошто је положај тачке C одређен, положај тачака M_1 и M_2 можемо одредити у односу на тачку C. Означимо векторе положаја $\overrightarrow{CM}_1$ и $\overrightarrow{CM}_2$ са $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$, па ће бити

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \vec{\rho}_1;$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_c + \vec{\rho}_2,$$

при чему је

$$m_1 \vec{\rho}_1 + m_2 \vec{\rho}_2 = 0 ,$$

одакле

$$\vec{\rho}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{\rho}_1 .$$

Трансформишимо сад једну од претходних једначина (1) или (2), рецимо једначину

$$(1) \qquad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \varepsilon^2 m_1 m_2 \frac{1}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

на нов променљив вектор, рецимо, вектор $\vec{\rho}_1$.

Пошто је

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{\rho}}_1 = \ddot{\vec{\rho}}_1$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1 = -\frac{m_1}{m_1} \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_1 = -\frac{m}{m_2} \vec{\rho}_1 ,$$

$$r = \rho_1 + \rho_2 = \frac{m}{m_2} \rho_1 ,$$

где су ρ_1 и ρ_2 интензитети одговарајућих вектора, једначина (1) се може заменити једначином

$$m_1 \ddot{\vec{\rho}}_1 = -\varepsilon^2 m_1 m_2 : \frac{m_2^3}{m^3} \cdot \frac{1}{\rho_1^3} \cdot \frac{m}{m_2} \vec{\rho}_1$$

или дефинитивно једначином

$$(2) \qquad m_1 \ddot{\vec{\rho}}_1 = -\varepsilon^2 \frac{m_1 \mu}{\rho_1^3} \vec{\rho}_1$$

где је $\mu = \frac{m_2^3}{m^2}$. Написана једначина је диференцијална једначина кретања само једне тачке са масом m_1 која се налази под утицајем Њутнове силе привлачења од стране масе μ у почетку вектора $\vec{\rho}_1$. Пошто смо тај проблем решили у динамици тачке, можемо сматрати $\vec{\rho}_1$ као познату функцију времена. После тога се без тешкоће одређују вектори $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, а тиме и кретање нашег система.

У практичним применама проблема двају тела на решавање астрономских проблема као непознати вектор служи вектор положаја једне тачке у односу на другу, рецимо, планете у односу на Сунце. Уведимо вектор положаја $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}$, чију смо дужину раније означили са r.

Како је

$$\vec{r} = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1 ,$$

а

$$\vec{\rho}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{\rho}_1 ,$$

може се ставити

$$\vec{r} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_1 = -\frac{m}{m_2}\vec{\rho}_1 ,$$

одакле је

$$\vec{\rho}_1 = -\frac{m_2}{m}\vec{r} .$$

Ако ову вредност ставимо у једначину (2) добивамо једначину

$$m_2 \ddot{r} = -\varepsilon^2 \frac{m_2 m}{r^3}\vec{r} ,$$

која је векторска диференцијална једначина другога реда кретања тачке m_2 у односу на тачку m_1. Ту исту једначину можемо написати овако

$$\ddot{r} = -\varepsilon^2 \frac{(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r} .$$

Уведимо сад нови вектор $\vec{\rho}$, везан са вектором $\vec{r}$ једначином

$$\vec{r} = \sqrt[3]{\varepsilon^2 (m_1 + m_2)}\ \vec{\rho}$$

тада се претходна једначина своди на једначину

$$\ddot{\rho} = -\frac{1}{\rho^3}\vec{\rho} , \tag{3}$$

коју можемо написати и у облику

$$\rho^3 \ddot{\rho} + \vec{\rho} = 0 . \tag{4}$$

Једначина (3) односно (4) зове се *стандардна једначина проблема двају тела.* У стандардној једначини нема никаквих констаната; она зависи само од вектора $\vec{\rho}$, његовог интензитета ρ и другог извода вектора $\ddot{\rho}$ по времену. Вектор $\vec{\rho}$ нема димензију дужине; димензије вектора $\vec{\rho}$, $\dot{\rho}$ и $\ddot{\rho}$ зависе зато од времена и то овако:

$$[\vec{\rho}] = T^{\frac{2}{3}}, \quad [\dot{\rho}] = T^{-\frac{1}{3}}, \quad [\ddot{\rho}] = T^{-\frac{4}{3}}.$$

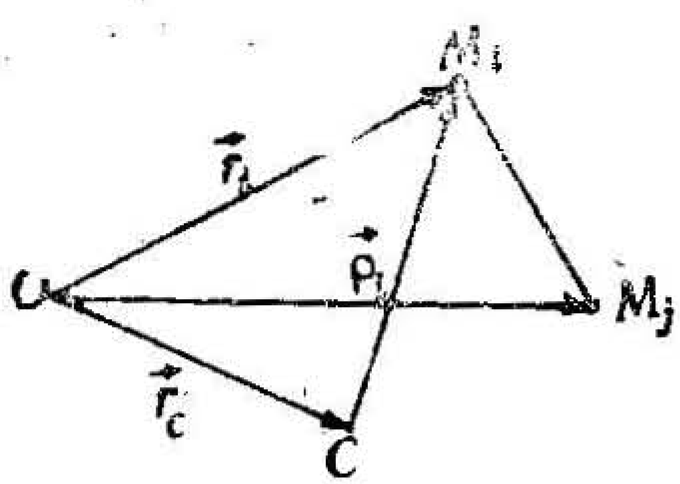
Стандардна једначина показује да се проучавање кретања сваке планете само под утицајем Сунца своди на проучавање исте диференцијалне једначине чији чланови зависе само од времена. Приметимо да свођење проблема двају тела на стандардну једначину не захтева никакве услове, које треба да задовољавају масе тих тела.

2. *Проблем n тела у случају сила привлачења пропорционалних масама тачака и растојању између тачака.*

Није тешко показати да диференцијална векторска једначина за i'ту тачку у овом проблему изгледа

$$(5) \qquad m_i \ddot{r}_i = \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i),$$

где су ознаке с обзиром на слику (сл. 44) очигледне.



Слика 44

Слично претходном задатку уводимо тачку C једначином

$$m\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i.$$

Кад се ова једначина диференцира двапут по времену добијамо на основу (5)

$$m\ddot{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_i = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = 0,$$

одакле је

$$\ddot{r}_c = 0$$

и према томе је и овде

$$\vec{r}_c = \vec{A}t + \vec{B}.$$

Ако ставимо

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i$$

и узмемо у обзир једначине

$$\ddot{r}_i = \ddot{r}_c + \ddot{\rho}_i = \ddot{\rho}_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{\rho}_j = 0\,,$$

онда се свака од једначина (3) може на наредни начин трансформисати

$$m_i \ddot{\rho}_i = \varepsilon^2 m_i \sum_{j=1}^{n} m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \varepsilon^2 m_i \sum_{j=1}^{n} m_j (\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i) = -\varepsilon^2 m_i m \vec{\rho}_i\,.$$

Према томе једначина за i'ту тачку дефинитивно изгледа овако

$$m_i \ddot{\rho}_i = -\varepsilon^2 m_i m \vec{\rho}_i\,,$$

а то је диференцијална векторска једначина кретања само једне тачке под утицајем силе привлачења ка центру пропорционалне растојању тачке од центра. Овај проблем смо решили у динамици тачке па према томе можемо сматрати да је решен и проблем о кретању нашег система.

§ 3·2. Диференцијалне једначине кретања неслободног материјалног система са множитељима веза (Лагранжеве једначине прве врсте)

Ако материјални систем није слободан већ је приморан да се покорава везама чије су једначине

$$(1) \qquad f_l\,(x_i\,,\, y_i\,,\, z_i\,;\, t) = 0\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(2) \qquad \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, x_i' + B_{ij}\, y_i' + C_{ij}\, z_i') + D_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

онда, како смо видели (§ 2·4), убрзања тачака система морају задовољавати ове услове:

$$(3) \qquad \frac{d^2 f_l}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i\, f_l\,;\ \vec{w}_i) + D_2 f_l = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(4) \quad \frac{d\varphi_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\text{qgrad}_i \, \varphi_j, \vec{w}_i) + D_2 \varphi_j = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 .$$

Ако напишемо диференцијалне једначине кретања нашег материјалног система као слободног система у облику

$$(5) \qquad m_i \ddot{\vec{r}}_i = m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

одредимо из тих једначина убрзања

$$\vec{w}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i$$

и ставимо те вредности у једначине (3) и (4), добићемо

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\text{grad}_i \, f_l , \frac{1}{m_i} \vec{F}_i) + D_2 f_l = 0 , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1$$

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\text{qgrad}_i \, \varphi_j , \frac{1}{m_i} \vec{F}_i) + D_2 \varphi_j = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 .$$

Ако се једначине (6) и (7), или све или само неке од њих, претварају у идентитете, можемо закључити да непосредно из једначина (5) следују једначине

$$(8) \qquad \frac{d^2 f_l}{dt^2} = 0 , \qquad \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 , \quad l = 1, 2, \ldots, k_1 ; \; j = 1, 2, \ldots, k_2 ,$$

све или само оне, које одговарају појединим идентитетима (6) и (7).

Из једначина (8) добијамо једначине

$$(9) \qquad f_l = a_l t + b_l , \quad \varphi_j = c_j , \quad l = 1, 2, \ldots, k_1 ; \quad j = 1, 2, \ldots, k_2 ,$$

где су a_l, b_l, c_j — произвољне константе. Написане једначине треба сматрати као опште интеграле диференцијалних једначина кретања (5). Пошто се за специјалне вредности констаната

$$a_l = b_l = 0 , \qquad c_j = 0 , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 ; \; j = 1, 2, \ldots, k_2$$

интеграли (9) своде на једначине (1) и (2) може се тврдити да ове једначине претстављају партикуларне интеграле диференцијалних једначина (5) кретања материјалног система сматраног као слободног.

Ако тај случај, кад једначине (1) и (2) служе као партикуларна решења једначина (5), оставимо на страну, може се тврдити да убрзања одређена из једначина (5) не задовољавају услове (3) и (4). Тада је потребно увести, сем *активних* сила $\vec{F}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ још нове силе, које својим допунским дејством претварају немогућа убрзања из (5) у могућа убрзања, која задовољавају услове (3) и (4). Извори тих сила су у оним масама које остварују везе (1) и (2). Нове силе се зову *реакције*. Означимо силу реакције што дејствује на i'ту тачку са $\vec{R}_i$. Тада диференцијалне једначине кретања нашег неслободног система изгледају овако:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Сваку реакцију R_i што дејствује на i'ту тачку у општем случају треба сматрати као векторски збир реакција од сваке везе, коначне и диференцијалне, што дејствује на ту i'ту тачку.

Свака веза у општем случају може дати реакцију, која има две компоненте — једну у правцу градијента (или квазиградијента) и другу у правцу нормалном на градијент односно квазиградијент. Овде ћемо се зауставити само на случају кад су реакције веза само у правцу градијената односно квазиградијената. Везе такве природе се зову *идеалне*.

За идеалне везе сваку реакцију $\vec{R}_i$ можемо изразити овим збиром:

$$\vec{R}_i = \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q\,grad}_i \varphi_j, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

где су λ_l $(l=1, 2, \ldots, k_1)$, μ_j $(j=1, 2, \ldots, k_2)$ фактори пропорционалности, који се зову *множитељи веза* било *коначних* било *диференцијалних*.

Ако искористимо написане вредности реакција диференцијалне једначине кретања неслободног система можемо написати

$$(10) \quad m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q\,grad}_i \varphi_j, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Том систему векторских једначина одговара овај систем скаларних једначина за Декартове координате

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
m_i\, x''_i &= X_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\, A_{ij}\,, \\
m_i\, y''_i &= Y_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\, B_{ij}\,, \\
m_i\, z''_i &= Z_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\, C_{ij}\,, \\
i &= 1, 2, \ldots, n\,.
\end{aligned}
$$

Тај систем скаларних једначина зове се *систем диференцијалних једначина кретања неслободног материјалног система са множитељима веза или Лагранжев систем диференцијалних једначина кретања прве врсте.*

Векторске једначине (10) садрже ове непознате: векторе положаја тачака $\vec{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и множитеље веза λ_l $(l = 1, 2, \ldots, k_1)$ и μ_j $(j = 1, 2, \ldots, k_2)$. Одговарајуће скаларне једначине (11) садрже координате x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тачака и исте множитеље. Према томе имамо свега $3n + k_1 + k_2$ непознатих скалара. У односу на сваку од координата x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ове једначине су диференцијалне једначине другог реда, а у односу на множитеље веза оне су коначне и линеарне. За одређивање тих $3n + k_1 + k_2$ непознатих служе сем једначина (11) и једначине (8), које се добијају из једначина веза (1') и (2) диференцирањем.

Слично решавању проблема о кретању неслободне тачке помоћу једначина са множитељима веза и овде, у случају система, проблем о кретању неслободног система можемо решавати помоћу једначина са множитељима веза на овај начин.

Ставимо у једначине (3) и (4) вредности убрзања одређене из једначина (10). Тада је

$$
\frac{d^2 f_l}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{grad}_i f_l\,, \frac{1}{m_i} \left\{ \vec{F}_i + \sum_{r=1}^{k_1} \lambda_r \operatorname{grad}_i f_r + \sum_{s=1}^{k_2} \mu_s\, q \operatorname{grad}_i \varphi_s \right\} \right) +
$$
$$
+ D_2 f_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, k_1\,,
$$

$$\frac{d^2\varphi_j}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\,,\ \frac{1}{m_i}\left\{\vec{F}_i + \sum_{r=1}^{k_1}\lambda_r\,\mathrm{grad}_i\,f_r + \sum_{s=1}^{k_2}\mu_s\,\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_s\right\}\right) +$$

$$+ D_2\,\varphi_j = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k_2\,.$$

Ове једначине, линеарне по множитељима λ_r $(r = 1, 2, \ldots, k_1)$ и μ_s $(s = 1, 2, \ldots, k_2)$ могу се одредити на наредни начин:

$$(12)\quad \begin{aligned} &\sum_{r=1}^{k_1} L_{lr}\,\lambda_r + \sum_{s=1}^{k_2} M_{ls}\,\mu_s + N_l = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1\,,\\ &\sum_{r=1}^{k_1} L_{jr}^*\,\lambda_r + \sum_{s=1}^{k_2} M_{js}^*\,\mu_s + N_j^* = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2\,,\end{aligned}$$

где је

$$L_{lr} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,(\mathrm{grad}_i\,f_l\,,\ \mathrm{grad}_i\,f_r)\,,$$

$$M_{ls} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,(\mathrm{grad}_i\,f_l\,,\ \mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_s)\,,$$

$$N_l = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,(\mathrm{grad}_i\,f_l\,,\ \vec{F}_i) + D_2\,f_l\,;$$

$$l = 1, 2, \ldots, k_1\,; \quad r = 1, 2, \ldots, k_1; \quad s = 1, 2, \ldots, k_2\,.$$

$$L_{jr}^* = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,(\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\,,\ \mathrm{grad}_i\,f_r)\,,$$

$$M_{js}^* = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,(\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\,,\ \mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_s)\,,$$

$$N_j^* = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,(\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\,,\ \vec{F}_i) + D_2\,\varphi_j\,;$$

$$j = 1, 2, \ldots, k_2\,; \quad r = 1, 2, \ldots, k_1\,; \quad s = 1, 2, \ldots, k_2\,.$$

На сличан начин као у динамици тачке (§ 8·7, стр. 152 првог издања или стр. 191 другог) и овде се доказује да детерминанта система једначина (12) може бити једнака нули само под условима да између веза, било коначних било диференцијалних има зависних или противуречних. Изузимањем тих специјалних случајева можемо тврдити да је та детерминанта различита од нуле и да се према томе систем (12) може решити по величинама множитеља λ_r $(r = 1, 2, \ldots, k_1)$ и μ_s $(s = 1, 2, \ldots, k_2)$.

Кад добијене вредности множитеља λ_r $(r = 1, 2, \ldots, k_1)$ и μ_s $(s = 1, 2, \ldots, k_2)$ уврстимо у једначине (10) односно (11), добићемо систем диференцијалних једначина са $3n$ непознатих скаларних величина x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Интеграција ових једначина, од којих је свака другог реда, доводи до $3n$ првих и $3n$ других интеграла, који садрже $6n$ произвољних константата, рецимо,

$$C_1,\ C_2, \ldots, C_{6n}. \tag{13}$$

Како смо за формирање нашег система диференцијалних једначина употребили не саме једначине веза у облику

$$\begin{aligned} f_l &= 0, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\ \varphi_j &= 0, & j &= 1, 2, \ldots, k_2, \end{aligned} \tag{14}$$

већ резултате њиховог диференцирања

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_l}{dt^2} &= 0, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\ \frac{d\varphi_j}{dt} &= 0, & j &= 1, 2, \ldots, k_2, \end{aligned} \tag{15}$$

изведени интеграли треба да задовољавају идентично једначине

$$\begin{aligned} f_l &= \alpha_l t + \beta_l, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\ \varphi_j &= \gamma_j, & j &= 1, 2, \ldots, k_2, \end{aligned} \tag{16}$$

где величине α_l, β_l, γ_j могу бити унапред дате. Пошто једначине (16) морају бити задовољене идентично, њихове леве стране морају бити исте форме као и десне, тј. имати облик

$$\begin{aligned} \alpha_l^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n})\, t + \beta_l^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}), \quad & l = 1, 2, \ldots, k_1, \\ \gamma_j^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}), \quad & j = 1, 2, \ldots, k_2, \end{aligned}$$

где су α_l^*, β_l^*, γ_j^* функције означених аргумената (13). Ако су константе α_l, β_l, γ_j унапред дате, ове функције морају задовољавати услове

$$
(17) \qquad
\begin{aligned}
\alpha_l^* (C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) &= \alpha_l, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\
\beta_l^* (C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) &= \beta_l, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\
\gamma_j^* (C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) &= \gamma_l, & j &= 1, 2, \ldots, k_2,
\end{aligned}
$$

према томе константе интеграције $C_1, C_2, \ldots, C_{6n}$ нису у овом случају произвољне већ између њих постоје $2k_1 + k_2$ веза. Произвољних констаната остаје свега $6n - 2k_1 - k_2$. Ако су везе дате једначинама (14), константе α_l, β_l, γ_j једнаке су нули и везе између констаната добијају облик

$$
(18) \qquad
\begin{aligned}
\alpha_l^* (C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) &= 0, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\
\beta_l^* (C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) &= 0, & l &= 1, 2, \ldots, k_1, \\
\gamma_j^* (C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) &= 0, & j &= 1, 2, \ldots, k_2.
\end{aligned}
$$

Из наведених расуђивања се види да метода решавања проблема о кретању неслободног материјалног система помоћу диференцијалних једначина са множитељима веза има особину да у тој методи не решавамо дати проблем са везама (14) већ у ствари решавамо проблем општијег карактера са везама (16). Уопштавање проблема обично га отежава. И овде $6n$ констаната добијених интеграцијом, од којих су само $6n - 2k_1 - k_2$ независне, показују да је процес интеграције био општији, компликованији него што је тражио задатак. Због такве особине ова метода се за решавање задатака о кретању неслободног система обично не употребљује. Она служи углавном за одређивање реакција веза кад је кретање система већ познато. У том случају су сви коефицијенти у једначинама (12) познате функције времена, а према томе могу се одредити и сви множитељи λ_r $(r = 1, 2, \ldots, k_1)$, μ_j $(j = 1, 2, \ldots, k_2)$. После тога се реакције, које дејствују на сваку тачку система, израчунавају помоћу векторских израза

$$
(19) \qquad \vec{R}_i = \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{qgrad}_i \varphi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n
$$

или помоћу одговарајућих скаларних једначина.

Претходна расуђивања су изведена под претпоставком да за све време кретања система све везе имају карактер задржавајућих веза.

Претпоставимо сад да су неке везе незадржавајуће. Нека је, на пр., једна коначна веза незадржавајућа. Узмимо је за прву везу и изразимо условом

$$(20) \qquad f_1 \geqslant 0 .$$

Ако у почетном тренутку та веза не дејствује, образујемо диференцијалне једначине кретања без обзира на ту везу и одређујемо кретање система према тим једначинама. Ако добијено решење после интеграције тих једначина, тј. координате система изражене у функцији времена за све време кретања система задовољавају услов

$$f_1 > 0 ,$$

може се тврдити да је одређено кретање такве природе да је систем заобишао дату везу и понашао се у односу на ту везу као слободан. Тако, на пр., систем материјалних тачака може да се креће у унутрашњости неке области чија је граница изражена једначином $f_1 = 0$ а да при томе ниједна тачка система за све време кретања не ступи на ту границу.

Други случај, који треба анализирати, то је случај кад од почетка кретања или од једног одређеног тренутка t_1 после почетка координате тачака система задовољавају услов

$$(21) \qquad f_1 = 0$$

и то за све наредно време кретања или до одређеног тренутка t_2 после којег добијено решење поново доводи до услова

$$(22) \qquad f_1 > 0 .$$

Тада можемо тврдити да се за све време кретања, укључујући и интервал времена од t_1 до t_2, када је испуњен услов (21), систем креће као слободан и једначину (21) за наглашени интервал треба сматрати као партикуларни интеграл диференцијалних једначина кретања система без обзира на везу (20). Ова веза у том случају није извор никакве силе реакције која дејствује на систем. Систем се и у интервалу од t_1 до t_2 креће такође као слободан у односу на везу (20) и то без обзира на то што се систем налази на тој вези.

Може се десити и случај да се систем прво креће као слободан, и да је $f_1 > 0$, али у тренутку t_1 систем је дошао на везу, тј. за тај тренутак је испуњен услов $f_1 = 0$. Сем тога је испуњен и услов за брзине

$$\frac{df_1}{dt} = 0,$$

али за наредно време једначина везе (21) стоји у противуречности са интегралима оних диференцијалних једначина које немају члана са множитељем λ_1 везе $f_1 = 0$. У овом случају треба ставити у систем диференцијалних једначина члан $\lambda_1 \operatorname{grad}_i f_1$ за сваку i'ту тачку система и решавати нов систем једначина са тим чланом. Аналитички критеријум дејства везе, како то показује анализа слична оној коју смо извели у случају динамике материјалне тачке, у томе је да вредност множитеља λ_1 не може бити негативна, тј. треба да буде испуњен услов

$$\lambda_1 \geqslant 0.$$

Диференцијалне једначине кретања са члановима $\lambda_1 \operatorname{grad}_i f_1$ остају на снази под условима

$$f_1 = 0, \quad \lambda_1 > 0.$$

Ако је за неки одређени тренутак t_1 множитељ λ_1 једнак нули, а после тога постаје негативан, од тог тренутка поново треба решавати систем диференцијалних једначина, у коме нема $\lambda_1 \operatorname{grad}_i f_1$.

Најзад треба узети у обзир и случај кад, после кретања система као слободног, систем у тренутку t_1 долази на везу $f_1 = 0$ али брзине са којима је дошао систем на ту везу не задовољавају неопходан услов

$$\frac{df_1}{dt} \geqslant 0,$$

већ је у том тренутку

$$\frac{df_1}{dt} < 0,$$

тада имамо нарочити случај, случај *удара* система о везу. Томе важном случају је посвећена нарочита глава ове књиге.

Ова анализа случаја једне коначне незадржавајуће везе може се лако проширити на случај ма ког броја било коначних било диференцијалних незадржавајућих веза.

§ 3·21. Рад сила реакција на могућим варијацијама

Докажимо за реакције идеалних веза ову теорему:

Тотални рад сила реакција идеалних веза на могућим варијацијама једнак је нули.

Пошто је рад реакције $\vec{R}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, која дејствује на i'ту тачку, у случају промене положаја те тачке одређене вектором $\delta\vec{s}_i$ могуће варијације, једнак скаларном производу $(\vec{R}_i, \delta\vec{s}_i)$, тотални рад свих сила реакција у систему на могућим варијацијама изражава се збиром

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{R}_i, \delta\vec{s}_i). \tag{1}$$

Уврстимо сад у тај израз вредности реакција идеалних веза из једначина (19) претходног параграфа, па ћемо добити

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \, \mathrm{q} \operatorname{grad}_i \varphi_j, \ \delta\vec{s}_i \right).$$

Написани збир може се трансформисати на наредни начин

$$\delta A = \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{grad}_i f_l, \ \delta\vec{s}_i \right) \right] + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \left[\sum_{i=1}^{u} \left(\mathrm{q}\operatorname{grad}_i \varphi_j, \delta\vec{s}_i \right) \right] \tag{2}$$

У § 2·5 извели смо услове (7) и (8) које треба да задовољавају могуће варијације тачака система. Пошто су ти услови

$$\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l, \ \delta\vec{s}_i) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q}\operatorname{grad}_i \varphi_j, \ \delta\vec{s}_i) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2, \tag{4}$$

видимо да су у једначини (2) коефицијенти уз сваки од множитеља λ_l и μ_j једнаки нули и према томе добијамо једначину

$$\delta A = 0,$$

која потврђује исказану теорему.

У претходном параграфу смо дефинисали идеалне везе као такве које дају реакције само у правцима својих градијената односно квазиградијената. Овде смо извели важну особину тих веза да је рад њихових реакција на свим могућим варијацијама једнак нули. Ова је особина толико битна за идеалне везе да се она може поставити као дефиниција идеалних веза па се из те особине може извести особина раније постављена у дефиницији. Заиста, докажимо теорему:

Ако је рад сила реакција веза на свима могућим варијацијама једнак нули, реакције таквих веза имају правац градијената односно квазиградијената тих веза.

Претпоставимо да је

$$\delta A = 0 ,$$

тада из (1) имамо

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{R}_i , \delta\vec{s}_i) = 0 . \tag{5}$$

У случају потпуно произвољних вектора $\delta\vec{s}_i$, тј. у случају слободног система, из ове једначине следује да је $\vec{R}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. У случају неслободног система, када су варијације $\delta\vec{s}_i$ везане једначинама (3) и (4) за извођење особина реакција $\vec{R}_i$ можемо поступити на овај начин. Помножимо сваку од једначина (3) са $(-\lambda_r)$, а сваку једначину (4) са $(-\mu_j)$, где су λ_r и μ_j величине произвољне и њима можемо располагати на произвољан начин, и све добијене производе додамо услову (5); тада ћемо добити услов у облику

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{R}_i - \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l - \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \, q \operatorname{grad}_i \varphi_j , \ \delta\vec{s}_i \right) = 0 . \tag{6}$$

У овој скаларној једначини вектори $\delta\vec{s}_i$, као и у (5) нису произвољни, они су везани са $k_1 + k_2$ скаларних једначина (3) и (4). За елиминисање, рецимо, $k_1 + k_2$ зависних координата из свих координата δx_i, δy_i, δz_i варијација $\delta\vec{s}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ изаберимо такве вредности множитеља λ_r и μ_j $(r = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$ да коефицијенти уз зависне координате буду једнаки нули. После тога у једначини (6) остају само оне од координата δx_i, δy_i, δz_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, које су независне; коефицијенти уз њих морају бити једнаки нули под условом да једначина (6) важи за све могуће вредности тих независних координата. Као резултат добијамо да сви коефицијенти уз $\overrightarrow{\delta s_i}$ морају бити једнаки нули па према томе долазимо до векторских једначина

$$\vec{R}_i = \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q} \operatorname{grad}_i \varphi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

које одређују реакције веза у оној форми, коју смо раније поставили као дефиницију реакција идеалних коначних и диференцијалних веза.

Доказана теорема показује важност улоге коју играју могуће варијације у проучавању кретања материјалног, нарочито неслободног, система.

§ 3·3. Диференцијалне једначине кретања неслободног материјалног система за произвољне координате. Лагранжеве једначине друге врсте

У § 3·2 извели смо диференцијалне једначине кретања за неслободни материјални систем са множитељима веза.

Ако су

$$f_l(x_i, y_i, z_i; t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1, \tag{1}$$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij} x'_i + B_{ij} y'_i + C_{ij} z'_i) + D_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k_2, \tag{2}$$

коначне и диференцијалне везе, поменуте диференцијалне једначине гласе у векторском облику

$$m_i \vec{w}_i - \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q} \operatorname{grad}_i \varphi_j \tag{3}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тим једначинама одговарају за Декартове координате ове скаларне једначине

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
m_i x_i'' &= X_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j A_{ij} \,, \\
m_i y_i'' &= Y_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j B_{ij} \,, \\
m_i z_i'' &= Z_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j C_{ij} \,,
\end{aligned}
$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Поставимо себи сад задатак да напишемо диференцијалне једначине кретања неслободног материјалног система кад се положај система одређује помоћу произвољних, *генералисаних координата*

$$(5) \qquad q_1 \,, \; q_2 \,, \; q_3 \,, \ldots , \; q_{N-1} \,, \; q_N \,,$$

при чему је $N = 3n$.

У таквом случају вектор положаја $\vec{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сваке тачке треба сматрати кзо функцију координата (5) и, у општем случају, и времена t, тј.

$$(6) \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_i \; (q_1 \,, \; q_2 \,, \ldots , \; q_N \,, \, t) \,.$$

Коначне и диференцијалне везе можемо написати овако

$$(7) \qquad f_l \; (\vec{r}_i \,, \; t) = 0 \,, \qquad\qquad l = 1, 2, \ldots , k_1 \,,$$

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i \varphi_j , \; \dot{\vec{r}}_i) + D_j = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots , k_2 \,,$$

$$i = 1, 2, \ldots , \; n \,,$$

при чему функције f_l треба сматрати као сложене функције координата (5) и времена, а леве стране једначина (8) могу се трансформисати на нове координате на овај начин.

Како је из (6)

$$(9) \qquad \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\sigma} \, q'_\sigma + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

једначине (8) после замене дају

(10) $$\varphi_j = \sum_{\sigma=1}^{N} P_{j\sigma}\, q'_\sigma + P_j = 0\,,$$

где је

(11) $$P_{j\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left(\text{grad}_i\, \varphi_j,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\sigma} \right),$$

(12) $$P_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\text{grad}_i\, \varphi_j,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) + D_j = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, k_2.$$

Видели смо у динамици тачке и у динамици слободног материјалног система (§ 3·1) да у односним диференцијалним једначинама за генералисане координате основну улогу игра израз

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu}$$

где је T жива сила тачке односно слободног материјалног система. Тај израз зваћемо *Лагранжев бином.* Израз супротног знака

$$\frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}$$

зове се понекад *Лагранжев* или *варијациони извод.*

Искористимо тај исти израз и у случају нашег неслободног материјалног система и то са оним уопштавањем као у § 3·1 да сваки од вектора $\vec{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ може бити, у општем случају, функција од свих генералисаних координата и времена, како то показује једначина (6).

Жива сила система дата је помоћу једначине

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{v}_i,\ \vec{v}_i).$$

За израчунавање Лагранжевог бинома треба пре свега израчунати извод

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i,\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q'_\nu} \right);$$

како из једначина (9) следује да је

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu},$$

биће

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right).$$

Диференцирањем тог израза по времену добија се

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \dot{\vec{v}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i, \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right). \tag{13}$$

Како, са једне стране, непосредно диференцирање даје

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\nu \partial q_\sigma} q'_\sigma + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\nu \partial t},$$

а, са друге стране, из (9) изводимо

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\sigma \partial q_\nu} q'_\sigma + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\nu}$$

долазимо до једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\nu}.$$

На основу ове једначине једначина (13) постаје

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \dot{\vec{v}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\nu} \right),$$

а како је

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\nu} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_\nu},$$

из претходне једначине следује овај израз за Лагранжев бином

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\nu'} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{w}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

где смо заменили $\dot{\vec{v}}_i$ са $\vec{w}_i$, убрзањем i'те тачке.

Ако ставимо сада вредност убрзања из векторске једначине (3), добијамо једначине:

$$(14)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\,\mathrm{grad}_i f_l,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\,q\,\mathrm{grad}_i\varphi_j,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)$$

$$\nu=1,2,\ldots,N.$$

Први збир десне стране означимо са Q_ν, тј. ставимо

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)=Q_\nu .$$

Овај збир се зове *генералисана сила* за односну координату. Сама за себе она може и да нема непосредно механичког тумачења, али је њен механички значај непосредно везан за ову особину производа $Q_\nu\,\delta q_\nu$. Тај производ претставља рад, који изврше активне силе $\vec{F}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ на оним елементарним померањима тачака система, кад се само једна кордината q_ν промени за δq_ν. Заиста, за тај производ имамо израз

$$Q_\nu\,\delta q_\nu=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\,\delta q_\nu\right).$$

Како је

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\,\delta q_\nu=\delta_\nu\vec{s}_i ,$$

где смо са $\delta_\nu\vec{s}_i$ означили елементарно померање i'те тачке са претпоставком да се мења само координата q_ν за δq_ν, може се написати

$$Q_\nu\,\delta q_\nu=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i,\ \delta_\nu\vec{s}_i),$$

а то и потврђује исказану особину, јер сваки члан написаног збира изражава рад активне силе на одговарајућем померању своје нападне тачке.

Други члан десне стране једначине (14) може се трансформисати на наредни начин

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l \operatorname{grad}_i f_l,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)=\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{grad}_i f_l,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right),$$

а како је

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{grad}_i f_l,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)=\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu},$$

где смо са

$$F_l\ (q_1,\ q_2,\ldots,\ q_N,\ t)$$

означили функцију, која се добија из функције $f_l\ (\vec{r}_i, t)$, кад векторе положаја изразимо помоћу променљивих (5), из (16) имамо

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l \operatorname{grad}_i f_l,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)=\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu}.$$

Једначину (17) можемо протумачити и у скаларној форми при прелазу од Декартових координата на генералисане. Ако је

$$f_l\ (x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ldots;\ x_n,\ y_n,\ z_n;\ t)\equiv$$
$$F_l\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ldots,\ q_N;\ t)=0,$$

имамо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{grad}_i f_l,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}+\frac{\partial f_l}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\nu}+\frac{\partial f_l}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\nu}\right)=$$
$$=\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu},$$

а то потврђује једначину (17).

Најзад за трећи збир десне стране једначине (14) имамо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_1}\mu_j\, q\operatorname{grad}_i\varphi_j,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)=\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\sum_{i=1}^{n}\left(q\operatorname{grad}_i\varphi_j,\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)$$

или на основу једначине (11) овај резултат

$$(19)\qquad \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j P_{j\nu}.$$

Ако искористимо резултате (15), (18) и (19), добићемо из једначина (14) овај систем диференцијалних једначина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu+\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu}+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j P_{j\nu} \tag{20}$$

$$\nu=1,2,\ldots,N.$$

Уз тај систем треба коначне и диференцијалне везе написати у облику

$$F_l(q_1, q_2, \ldots, q_N; t)=0\,, \qquad l=1,2,\ldots,k_1\,, \tag{21}$$

$$\varphi_j=\sum_{\sigma=1}^{N}P_{j\sigma}\,q'_\sigma+P_j=0\,, \qquad j=1,2,\ldots,k_2\,. \tag{22}$$

Систем једначина (20) зове се *систем диференцијалних једначина кретања неслободног материјалног система са множитељима веза, холономних односно нехолономних, у генералисаним координатама.*

За холономни систем последњи збир у једначинама (20) отпада и диференцијалне једначине кретања изгледају овако:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\nu'}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu+\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu} \tag{23}$$

$$\nu=1,2,\ldots,N.$$

Најзад, ако су координате (5) изабране као независне и $N=3n-k_1$, изрази (6) задовољавају једначине (7) идентично и према томе су сви изводи $\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu}$ једнаки нули. У овом случају систем (23) добија облик

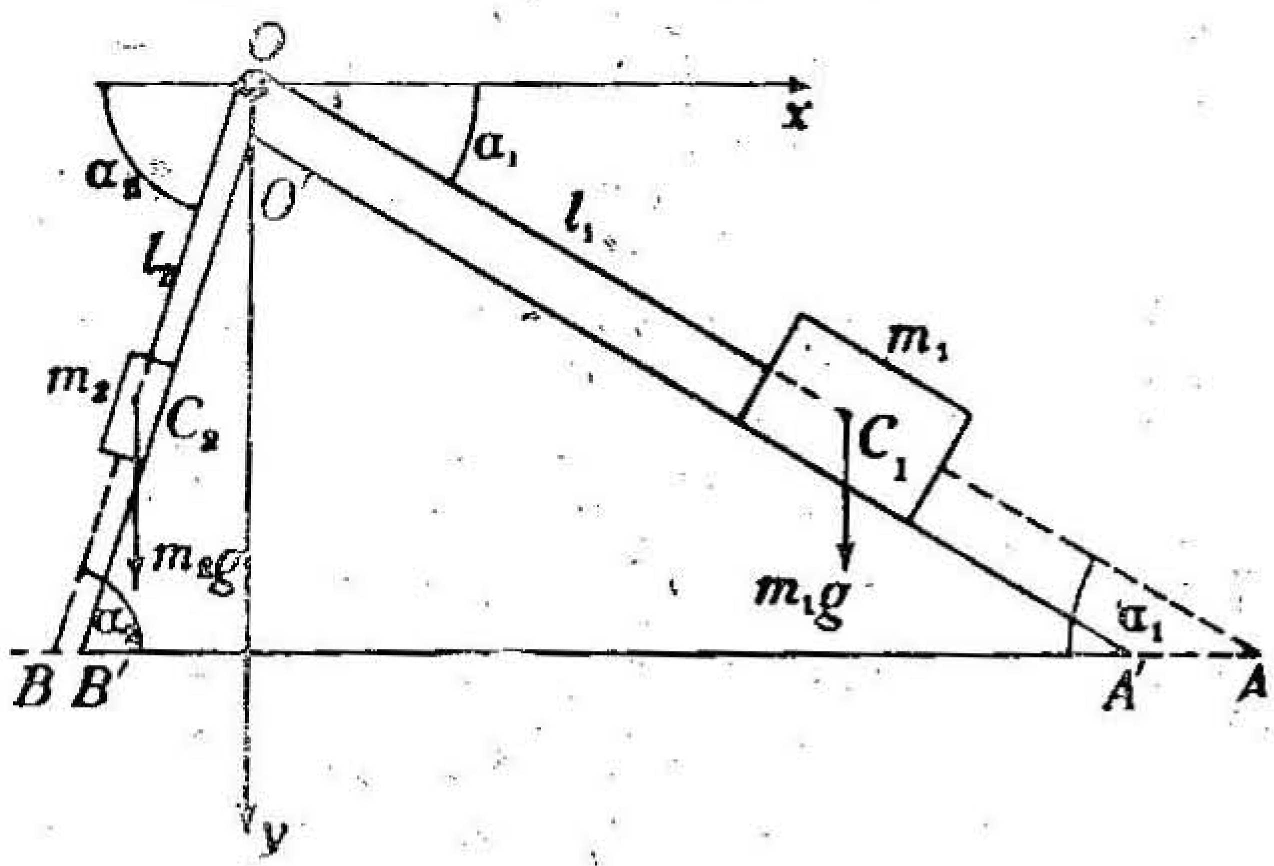
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\nu'}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu\,, \qquad \nu=1,2,\ldots,N. \tag{24}$$

Овај систем претставља *систем диференцијалних једначина кретања неслободног холономног материјалног система без множитеља веза у независним генералисаним координатама;* те једначине се зову *Лагранжеве једначине друге врсте.*

Јасно је, да се једначине (24) могу применити и на слободни систем и то и на тај случај када се независне координате (5) одаберу тако да сваки од вектора положаја тачака система зависи не само од три одговарајуће независне координате, већ уопште од свих независних координата (5) и времена.

§ 3·31. Примери

1. У вертикалној равни се налазе две косе праве $O'A'$ и $O'B'$, нагнуте под угловима α_1 и α_2 према хоризонту (сл. 45). По првој правој се креће маса m_1, по другој маса m_2, једна и друга без трења; масе су тешке и везане ужетом, које је пребачено преко котура намештеног над тачком O'. Положај котура



Слика 45

је такав да се центри маса C_1 и C_2 маса m_1 и m_2 крећу по правим OA и OB паралелним са $O'A'$ и $O'B'$ и да дужина C_1OC_2 има сталну вредност l.

Потребно је одредити кретање тих маса.

Решимо тај елементарни задатак на више начина ради проучавања и упоређивања тих начина.

I. Прво за одређивање положаја тачака система употребимо Декартове координате тачке у равни. За почетак координата узмимо тачку O, осу Ox наперимо хоризонтално у равни кретања тачака на страну прве тачке, осу Oy узмимо вертикално наниже оријентисану. Координате тачака означимо: $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$.

Претпоставимо да масе m_1 и m_2 не могу напуштати праве $O'A'$ односно $O'B'$ и да уже не може мењати своју дужину, а његови делови OC_1 и OC_2 увек задржавају праволиниски облик.

Под таквим условима три везе, које треба да буду испуњене за све време кретања, имају задржавајући карактер и одређене су једначинама

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
f_1 &= x_1 \sec\alpha_1 - x_2 \sec\alpha_2 - l = 0\,,\\
f_2 &= x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1 = 0\,,\\
f_3 &= x_2 \sin\alpha_2 + y_2 \cos\alpha_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Ради одређивања кретања образоваћемо Лагранжеве једначине са множитељима веза за Декартове координате

$$
\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,,\\
m_1 y_1'' &= m_1 g + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\,,\\
m_2 x_2'' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\,,\\
m_2 y_2'' &= m_2 g + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2}\,.
\end{aligned}
$$

Како је

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \sec\alpha_1\,, &\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -\sec\alpha_2\,;\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \sin\alpha_1\,, &\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} &= -\cos\alpha_1\,;\\
\frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= \sin\alpha_2\,, &\quad \frac{\partial f_3}{\partial y_2} &= \cos\alpha_2\,,
\end{aligned}
$$

претходне једначине постају

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= \lambda_1 \sec\alpha_1 + \lambda_2 \sin\alpha_1\,,\\
m_1 y_1'' &= m_1 g - \lambda_2 \cos\alpha_1\,,\\
m_2 x_2'' &= -\lambda_1 \sec\alpha_2 + \lambda_3 \sin\alpha_2\,,\\
m_2 y_2'' &= m_2 g + \lambda_3 \cos\alpha_2\,.
\end{aligned}
$$

За одређивање множитеља веза λ_1, λ_2, λ_3 имамо на расположењу три једначине

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = x_1'' \sec \alpha_1 - x_2'' \sec \alpha_2 = 0\,,$$

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} = x_1'' \sin \alpha_1 - y_1'' \cos \alpha_1 = 0\,,$$

$$\frac{d^2 f_3}{dt^2} = x_2'' \sin \alpha_2 + y_2'' \cos \alpha_2 = 0\,;$$

заиста, ако у те једначине ставимо вредности других извода координата из (2), добићемо три линеарне једначине за одређивање λ_1, λ_2, λ_3. Решења тих линеарних једначина су

$$\lambda_1 = -g \mu k\,,$$
$$\lambda_2 = g\ (m_1 + \mu k \operatorname{tg} \alpha_1),$$
$$\lambda_3 = -g\ (m_2 + \mu k \operatorname{tg} \alpha_2),$$

где је

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad k = \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2\,.$$

Пошто су λ_1, λ_2, λ_3 константне величине, једначине (2) своде се на једначине

$$(3) \qquad x_1'' = a_1\,, \quad y_1'' = b\,; \quad x_2'' = a_2\,, \quad y_2'' = b_2\,,$$

где су a_1, b_1; a_2, b_2 исто тако константе и то:

$$a_1 = \frac{g}{m_1}(m_1 \sin \alpha_1 - \mu k \cos \alpha_1)\,,$$

$$b_1 = a_1 \operatorname{tg} \alpha_1\,,$$

$$a_2 = a_1 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}\,,$$

$$b_2 = -a_1 \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_1}\,.$$

Интеграција једначина (3) доводи прво до првих интеграла

$$x_1' = a_1 t + C_1\,,$$
$$y_1' = b_1 t + C_2\,,$$
$$x_2' = a_2 t + C_3\,,$$
$$y_2' = b_2 t + C_4\,,$$

а затим и до других

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + C_1 t + C_5 ,$$

$$y_1 = \frac{1}{2} b_1 t^2 + C_2 t + C_6 ,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + C_3 t + C_7 ,$$

$$y_2 = \frac{1}{2} b_2 t^2 + C_4 t + C_8 ,$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_8$ константе интеграције везане међу собом са шест једначина: три једначине добијамо из (1) кад ставимо, рецимо, $t = 0$ и то

$$C_5 \sec \alpha_1 - C_7 \sec \alpha_2 - l = 0 ,$$

$$C_5 \sin \alpha_1 - C_6 \cos \alpha_1 = 0 ,$$

$$C_7 \sin \alpha_2 + C_8 \cos \alpha_2 = 0$$

и три остале из резултата диференцирања једначина (1) по времену, тј.

$$C_1 \sec \alpha_1 - C_3 \sec \alpha_2 = 0 ,$$

$$C_1 \sin \alpha_1 - C_2 \cos \alpha_1 = 0 ,$$

$$C_3 \sin \alpha_2 + C_4 \cos \alpha_2 = 0 .$$

Према томе произвољних констаната остаје две — једна се одређује почетним положајем само једне тачке система, јер је положај друге првом тачком потпуно одређен, друга константа се одређује почетном брзином поново само једне тачке.

Како се види, изведено решење је доста компликовано без обзира на то што су једначине веза линеарне и што су све рачунске операције потпуно елементарне.

II. Претпоставимо сад да су за одређивање положаја тачака C_1 и C_2 (сл. 45) узете дужине $OC_1 = l_1$ и $OC_2 = l_2$, између којих постоји очевидна веза

$$F(l_1, l_2) = l_1 + l_2 - l = 0 .$$

За решавање проблема о кретању ових тачака можемо се послужити диференцијалним једначинама кретања у произвољним координатама али под условом да између тих координата постоји веза. За искоришћавање једначина (23) § 2·3 у овом случају саставимо пре свега израз за живу силу. Пошто апсолутне вредности брзина тачака C_1 и C_2 имају вредности $|l_1'|$ и $|l_2'|$, жива сила система одређена је једначином

$$2\,T = m_1\,l_1'^2 + m_2\,l_2'^2\,.$$

Кад дужина l_1 порасте за δl_1, сила теже прве тачке изврши рад

$$m_1\,g\sin\alpha_1\cdot\delta l_1$$

према томе генералисана сила за координату l_1 има вредност

$$Q_1 = m_1\,g\sin\alpha_1\,.$$

Слично за другу тачку имамо

$$Q_2 = m_2\,g\sin\alpha_2\,.$$

Како је

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = 1\,; \qquad \frac{\partial F}{\partial l_2} = 1\,,$$

диференцијалне једначине кретања постају

(4) $$m_1\,l_1'' = m_1\,g\sin\alpha_1 + \lambda\,,$$

(5) $$m_2\,l_2'' = m_2\,g\sin\alpha_2 + \lambda\,.$$

Како из једначине везе следује

$$l_1'' + l_2'' = 0\,,$$

множењем једначине (4) са m_2 и једначине (5) са m_1 и сабирањем долазимо до резултата

$$m_1\,m_2\,g\,(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) + (m_1 + m_2)\,\lambda = 0\,,$$

одакле је

$$\lambda = -\,g\,\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = \text{const.}$$

На основу тога закључујемо да је

$$l_1'' = \text{const.} = p_1\,,$$

где је

$$p_1 = \frac{g}{m_1 + m_2}\,(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)\,.$$

Интеграција ове једначине даје: први интеграл

$$l_1' = p_1\,t + c_1$$

и други

$$l_1 = \frac{1}{2} p_1 t^2 + c_1 t + c_2 .$$

Интеграционе константе c_1 и c_2 можемо сматрати као произвољне; оне се одређују из почетног положаја тачке и њене почетне брзине.

Кретање друге тачке одређено је интеграцијом једначине

$$l_2'' = p_2 = -p_1 .$$

Нове константе c_3 и c_4 у интегралима

$$l_2' = -p_1 t + c_3 ,$$
$$l_2 = -\frac{1}{2} p_1 t^2 + c_3 t + c_4$$

одређују се помоћу констанаата c_1 и c_2 из услова

$$l_1 + l_2 - l = 0 ,$$
$$l_1' + l_2' = 0 .$$

Ова метода решава задатак много једноставније од претходне, али и она, с једне стране, има сувишних елемената, јер интеграција уводи сувишне константе, а, са друге стране, она не даје потпун одговор, јер су остале неодређене реакције нагнутих правих на тачке, а то значи да су остали неодређени и притисци са којима тачке дејствују на нагнуте праве. За одређивање тих величина треба узети координате тачака тако да у односним диференцијалним једначинама учествују и поменуте реакције. Пошто је кретање тачака познато, из нових диференцијалних једначина лако се одређују реакције односно притисци тачака на праве.

III. Најзад решићемо исти задатак помоћу Лагранжеве једначине за јединy независну координату, која одређује положај система. За такву координату можемо узети растојање тачке C_1 од тачке O. Ово растојање означимо са q. Живу силу система можемо сад, очигледно, претставити у облику

$$2T = m_1 q'^2 + m_2 q'^2 = (m_1 + m_2) q'^2 = m q'^2 ,$$

где смо са m означили целокупну масу система.

За израчунавање генералисане силе Q треба израчунати њен елементарни рад $Q \delta q$. Тај рад се показује у раду силе теже прве тачке који износи

$$m_1 g \sin \alpha_1 \cdot \delta q$$

и у раду силе теже друге тачке

$$-m_2 g \sin\alpha_2 \cdot \delta q .$$

На основу тих резултата диференцијална једначина кретања имала би облик

$$(m_1 + m_2)\, q'' = (m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2)\, g .$$

Одавде можемо закључити да је

$$q'' = \text{const.} = \frac{g}{m_1 + m_2}(m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2) = p .$$

Интеграција доводи до резултата, који смо имали и раније, наиме

$$q' = pt + c_1 ,$$

$$q = \frac{1}{2}\, pt^2 + c_1 t + c_2 .$$

Константе c_1 и c_2 овде су произвољне и треба их одредити из почетних услова кретања. Ако је за тренутак $t=0$, тачка била на растојању q_0 од тачке O и имала брзину q_0', коначна једначина кретања има дефинитивни облик

$$q = \frac{1}{2}\, pt^2 + q_0' t + q_0 .$$

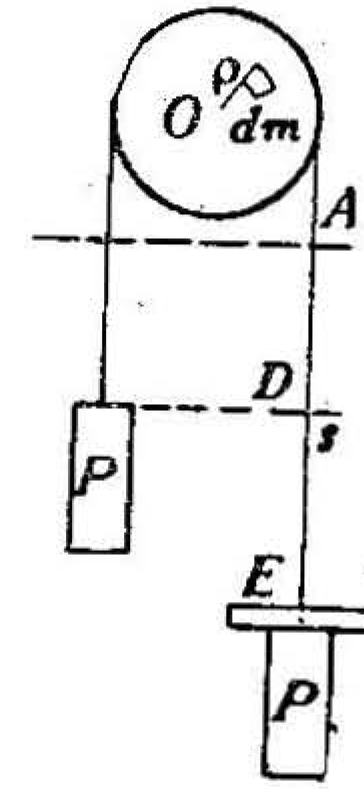
Ова метода најкраћим путем решава проблем о кретању система, али потпуно игнорише употребу сила реакција. За одређивање тих сила треба искористити једначине, које су написане за друге, зависне координате и из тих једначина на основу познатог кретања система лако се одређују реакције решавањем само линеарних једначина.

2. Као други пример узмимо кретање тегова и точка у Атвудовој машини. 1784 г. G. Atwood (1745—1807) је конструисао у Кембрицу своју машину која служи за демонстрирање кретања тела под утицајем силе теже.

Суштина механизма састоји се из два тега једнаке тежине, рецимо P, везаних концем који је пребачен преко точка хоризонталне осовине O (сл. 46). Један од тегова носи на себи додатак тежине p; машина је удешена тако да се у одређеном положају тај додатак може скинути са тега на коме се налази. Положај система можемо одредити растојањем s тежишта једног од тегова од полазног положаја.

Кретање система одредимо интеграцијом Лагранжеве једначине за независну координату s. Пре свега треба саставити живу силу система, који се састоји из:

1. Тегова P, P и p,
2. Конца дужине l тежине p_1 и
3. Точка полупречника R.



Слика 46

Ако, рецимо, десни тег има брзину s' у свом кретању наниже, сви тегови, сви елементи конца и тачке периферије точка имају брзину апсолутне вредности $|s'|$.

Према томе жива сила T_1 тегова износи

$$\frac{1}{2g}(2P+p)s'^2.$$

Жива сила конца T_2 има вредност

$$\frac{1}{2g}p_1 s'^2.$$

За израчунавање живе силе точка поделимо целокупну масу точка на елементе и масу једног таквог елемента означимо са Δm, а његово растојање од осе обртања точка са ρ. Како тачке на периферији точка полупречника R имају брзину s', угаона брзина точка је $\omega=\frac{s'}{R}$, а брзина елемента Δm износи $\omega\rho=\frac{\rho}{R}s'$. Према томе жива сила тог елемента износи $\frac{\rho^2}{2R^2}s'^2\Delta m$, а жива сила целокупног точка биће

$$T_3=\frac{1}{2}\int\frac{\rho^2}{R^2}s'^2\,dm,$$

при чему је интеграл проширен на целокупну масу точка. Како су R и s' исти за све тачке система претходни израз даје

$$T_3=\frac{1}{2}\frac{s'^2}{R^2}\int\rho^2\,dm=\frac{1}{2}\frac{s'^2}{R^2}J,$$

где је J момент инерције точка око осовине. Тај момент инерције може се бројно заменити изразом

$$J=\mu R^2,$$

где је μ одређена маса, која даје исти момент инерције око осе

O на растојању R као и точак свима својим елементима. Означимо тежину масе μ са p_2, тада је жива сила точка

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{p_2}{g} s'^2 .$$

Целокупна жива сила система биће

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}\frac{1}{g}(2P + p + p_1 + p_2)\, s'^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{g} P_0 s'^2 ,$$

где је

$$P_0 = 2P + p + p_1 + p_2 .$$

За израчунавање генералисане силе израчунајмо рад сила, које дејствују на систем кад он изврши померање са прираштајем δs координате s. Од сила узећемо у обзир само силе теже и трење точка у осовини O. Како су радови сила теже десног и левог тега P супротни, њихов заједнички рад једнак је нули. Остаје само рад тега p са вредношћу $p\delta s$. Од целокупне тежине конца треба узети у обзир само онај део конца DE (он може бити и негативан), којим се дужина десне стране конца разликује од дужине леве стране. Ако са l_1 означимо дужину конца изнад нивоа тачке A, где смо тачком A означили почетак координате s, дужина DE износиће

$$2s - (l - l_1) .$$

Како је тежина тог конца

$$\frac{p_1}{l}(2s - l + l_1) ,$$

биће рад те силе једнак

$$\left(\frac{2p_1}{l} s - p_1 + p_1 \frac{l_1}{l}\right) \delta s .$$

Узимајући у обзир добијене резултате, за онај део генералисане силе који долази од сила теже можемо ставити

$$Q_1 = p + \frac{2p_1}{l} s - p_1 + p_1 \frac{l_1}{l}$$

или

$$Q_1 = p - p_1\left(1 - \frac{l_1}{l}\right) + \alpha^2 s ,$$

где је

$$\alpha^2 = \frac{2p_1}{l}.$$

Што се тиче трења **у осовини** O, дејство тог трења **можемо** изједначити са дејством **силе** на периферији точка. Означимо **ту** силу са f; она увек дејствује супротно кретању точка, **према** томе њен рад износи

$$-f\,\delta s,$$

а генералисана сила што одговара тој сили биће

$$Q_2 = -f.$$

Заједничка генералисана **сила** има вредност

$$Q = Q_1 + Q_2 = p - f - p_1\left(1 - \frac{l_1}{l}\right) + \alpha^2 s.$$

Сад можемо написати односну Лагранжеву једначину

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s'} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q.$$

Како је

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial s'} = \frac{P_0}{g}s',$$

Лагранжена једначина даје

$$\frac{P_0}{g}s'' = p - f - p_1\beta + \alpha^2 s,$$

где је

$$\beta = 1 - \frac{l_1}{l}.$$

Претходну једначину можемо заменити једначином

$$s'' - n^2 s = a, \tag{6}$$

где убрзање a има вредност

$$a = \frac{p - f - p_1\beta}{P_0}g = \frac{p - f - p_1\beta}{2P + p + p_1 + p_2}g \tag{7}$$

и

$$n^2 = \frac{\alpha^2}{P_0} g \, .$$

Ако занемаримо тежину конца ($p_1 = 0$), масу точка, а тада је и $p_2 = 0$, најзад силу трења у осовини ($f = 0$), убрзање тегова ће износити

$$a = \frac{p}{2P + p} g \, .$$

То је елементарни образац, који се може извести непосредно из услова да се маса $\frac{1}{g}(2P + p)$ креће под утицајем силе p. Ако убрзање те масе означимо са a, из другог Њутновог закона непосредно имамо

$$\frac{1}{g}(2P + p) \, a = p ,$$

а то одговара претходној једначини. Са убрзањем a систем се креће једнако убрзано и ако, после одређеног интервала времена, додатак p напушта тег, тегови се крећу равномерно са постигнутом брзином. То, у некој мери, може потврдити експеримент.

Ради решења задатка са већом приближношћу стварности за одређивање убрзања треба узети у обзир израз (7), а за одређивање кретања диференцијалну једначину (6). У изразу за a треба ставити сем P и p и вредности других констаната. Величина p_1, тежина конца, одређује се непосредним мерењем. Сила f може се одредити посматрањем неког додатка p под чијим се утицајем кретање врши равномерно; тада из услова $p - f - p_1 \beta = 0$ можемо одредити f. Најзад константу p_2 можемо одредити извођењем два или више експеримената са различитим додацима p. Ако за један додатак p' имамо убрзање

$$a' = \frac{p' - f - p_1 \beta}{2P + p' + p_1 + p_2} g ,$$

а за други

$$a'' = \frac{p'' - f - p_1 \beta}{2P + p'' + p_1 + p_2} g ,$$

можемо деобом једног израза другим добити једначину за одређивање величине p_2. Сва ова расуђивања смо вршили под претпоставком да убрзања a' и a'' стварно можемо мерити и да она не зависе од n^2. Кад n^2 односно α^2 имају вредност, коју не можемо занемарити, на пр. при кретању маса у рударском окну, треба интегрисати једначину (6). Како је њен општи интеграл

$$s = -\frac{a}{n^2} + Ae^{nt} + Be^{-nt},$$

а константе интеграције A и B се одређују из услова: за $t=0$, $s=s'=0$, интеграл нашег решења добија облик

$$s = \frac{a}{n^2}\left[-1 + \frac{1}{2}\left(e^{nt} + e^{-nt}\right)\right].$$

Његова приближна форма даје

$$s = \frac{a}{n^2}\left(\frac{n^2 t^2}{2!} + \frac{n^4 t^4}{4!}\right)$$

или

$$s = \frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{24} an^2 t^4.$$

Ако сматрамо да је $n^2=0$, решење даје

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

и претставља једнако убрзано кретање са убрзањем a.

§ 3·32. Анализа Лагранжевих једначина

У аналитичкој механици Лагранжеве једначине (§ 3·3)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

играју врло важну улогу и зато извршимо анализу тих једначина. Пошто у основи те анализе лежи и разликовање природе величина, које улазе у те једначине, изменићемо мало у овом параграфу ознаке генералисаних координата и означићемо их са

$$q^1, q^2, \ldots, q^i, \ldots, q^n,$$

стављајући односне индексе горе (ознака такозваних контраваријантних величина, које имају природу компонената вектора, и које се разликују од коваријантних величина, које имају природу пројекција и за чије се означавање употребљује индекс доле, на пример, код Q_i). Са новим ознакама Лагранжеве једначине изгледају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{i\prime}}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i\,. \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Ако је прелаз од Декартових координата тачака неког материјалног система на независне генералисане координате извршен помоћу једначина које у општем случају садрже време, жива сила T система биће квадратна функција генералисаних брзина. Ту квадратну функцију можемо написати

$$T=\frac{1}{2}g+\sum_{\lambda}g_{\lambda}\,q^{\lambda\prime}+\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}\,q^{\mu\prime}\,q^{\nu\prime}, \tag{2}$$

где су g, g_{λ}, $g_{\mu\nu}$ дате функције независних координата q^i ($i=1, 2,\ldots,n$) и времена. Једнострука односно двострука сума, на пр. $\sum\limits_{\mu\nu}$, проширена је на све вредности индекса од 1 до n, где је n број степена слободе система.

Ако је систем склерономан и једначине веза не садрже време, једначине помоћу којих прелазимо од Декартових на генералисане координате могу исто тако да не садрже време. У том случају жива сила T биће квадратна форма, тј. хомогена квадратна функција генералисаних брзина. У изразу (2) за живу силу треба тада задржати само последњи збир.

Ради упрошћавања излагања зауставимо се на овом последњем случају; израчунавања у општем случају се не разликују принципски од наведеног специјалног случаја.

Према томе за живу силу система ставимо

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}\,q^{\mu\prime}\,q^{\nu\prime}.$$

Из тог израза за Лагранжеве једначине (1) израчунавамо

$$\frac{\partial T}{\partial q^{i\prime}}=\sum_{\nu}g_{i\nu}\,q^{\nu\prime}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^i}q^{\mu\prime}\,q^{\nu\prime}=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^i}q^{\mu\prime}\,q^{\sigma\prime}, \tag{3}$$

па према томе из првих једначина имамо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{i'}} = \sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu''} + \sum_{\nu,\sigma} \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^{\sigma}} q^{\nu'} q^{\sigma'} . \tag{4}$$

Пошто је

$$\sum_{\nu,\sigma} \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^{\sigma}} q^{\nu'} q^{\sigma'} \quad \sum_{\nu,\sigma} \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^{\nu}} q^{\nu'} q^{\sigma'} = \frac{1}{2}\sum_{\nu,\sigma}\left(\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^{\sigma}} + \frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial q^{\nu}}\right) q^{\nu'} q^{\sigma'}, \tag{5}$$

могу се Лагранжеве једначине (1) с обзиром на једначине (4) и (3) написати

$$\sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu''} + \sum_{\mu,\sigma} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial q^{\sigma}} + \frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial q^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^{i}}\right) q^{\mu'} q^{\sigma'} = Q_i , \tag{6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n ,$$

при чему смо овде индекс ν у обрасцима (5) заменили са μ ради јасније структуре написаних збирова.

Ако сад уведемо познату ознаку у облику такозваног *тро-индексног угластог* или *прве врсте Кристофеловог симбола*

$$\begin{bmatrix} \mu\ \sigma \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial q^{\sigma}} + \frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial q^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^{i}}\right)$$

за који ћемо употребити и другу, Вајлову, ознаку, рационалнију са гледишта систематике ознака, у форми

$$\begin{bmatrix} \mu\ \sigma \\ i \end{bmatrix} = \Gamma_{i},$$

која подвлачи његову сличност природи троструко коваријантних величина, онда се једначине (6) краће могу изразити у облику

$$\sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu''} + \sum_{\mu,\sigma} \begin{bmatrix} \mu\ \sigma \\ i \end{bmatrix} q^{\mu'} q^{\sigma'} = Q_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{7}$$

или са Вајловим ознакама

$$\sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu''} + \sum_{\mu,\sigma} \Gamma_{i,\mu\sigma}\, q^{\mu'} q^{\sigma'} = Q_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{8}$$

Једначине (7) односно (8) показују да су Лагранжеве једначине линеарне у односу на генералисана убрзања а другог степена у односу на генералисане брзине.

Једначине (7) односно (8) могу се решити по генералисаним убрзањима. Означимо главну детерминанту система тих линеарних једначина са g, тј. ставимо

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{nn} \end{vmatrix}$$

Са g^{ik} означимо кофактор елемента g_{ik} детерминанте g подељен самом детерминантом. Како је познато, кофактори задовољавају једначине

$$(9)\qquad \begin{aligned} \sum_i g_{ip}\, g^{iq} &= \delta_p{}^q\,, \\ \sum_i g_{pi}\, g^{qi} &= \delta_p{}^q\,, \end{aligned}$$

где је $\delta_p{}^q$ *Кронекеров симбол* чија је вредност нула, ако је $p \neq q$, и јединица, ако је $p = q$.

Помножимо сад сваку, редом, од једначина (7) са g^{ij} и резултате саберимо. После тих операција збир првих чланова једначина (7) на основу (9) даје само члан $q^{j\prime\prime}$. Збир других чланова даје

$$\sum_i g^{ij} \sum_{\mu,\sigma} \begin{bmatrix} \mu\ \sigma \\ i \end{bmatrix} q^{\mu\prime}\, q^{\sigma\prime}.$$

Ако сад уведемо други Кристофелов симбол са одговарајућом Вајловом ознаком

$$\begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ j \end{Bmatrix} = \sum_i g^{ij} \begin{bmatrix} \mu\ \sigma \\ i \end{bmatrix} = \Gamma^j{}_{\mu\sigma}\,,$$

који се зове *троиндексни фигурни* или *друге врсте Кристофелов симбол*, тај се збир може написати

$$\sum_{\mu,\sigma} \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ j \end{Bmatrix} q^{\mu\prime}\, q^{\sigma\prime} = \sum_{\mu,\sigma} \Gamma^j{}_{\mu\sigma}\, q^{\mu\prime}\, q^{\sigma\prime}.$$

Најзад од генералисаних сила на десној страни једначина (7) добићемо збир

$$\sum_i g^{ij} Q_i$$

који ћемо означити са Q^j.

На тај начин дефинитивно добијамо систем једначина

$$(10) \qquad q^{j''} + \sum_{\mu,\sigma} \left\{ {\mu\ \sigma \atop j} \right\} q^{\mu'} q^{\sigma'} = Q^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$(11) \qquad q^{j''} + \sum_{\mu,\sigma} \Gamma^j_{\mu\sigma}\, q^{\mu'} q^{\sigma'} = Q^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

који је еквивалентан систему Лагранжевих једначина (1), али је решен по генералисаним убрзањима.

Једначине (10) односно (11) могу служити како за решавање конкретних задатака, тако и за општа теориска проучавања особина кретања материјалног система заснована на проучавању особина интеграла система диференцијалних једначина и кад ти интеграли нису изражени у потпуности.

§ 3·33. Почетно кретање система

За одређивање кретања материјалног система потребно је, како знамо, интегрисати изабрани систем диференцијалних једначина кретања тог система и одредити произвољне константе интеграције из почетних услова кретања. Ако искористимо Лагранжеве диференцијалне једначине у решеном облику (10) или (11) § 3·32 и напишемо њихове интеграле такође у решеном облику

$$q^i = f_i\,(t;\, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

за одређивање произвољних констаната треба да искористимо вредности генералисаних координата и генералисаних брзина

$$q_0{}^i, \ q_0{}^{i\,\prime}$$

за почетни момент t_0, а при томе да се послужимо и једначинама које одређују генералисане брзине

$$q^{i\prime} = f_i'\,(t;\, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}).$$

Као резултат треба да добијемо једначине

$$q^i = q^i \,(t,\, t_0\,;\; q_0^{\nu},\; q_0^{\nu\prime}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\;\; \nu = 1, 2, \ldots, n,$$
$$q^{i\prime} = q^{i\prime} \,(t,\, t_0;\; q_0^{\nu},\; q_0^{\nu\prime}),$$

које у потпуности одређују кретање материјалног система и његове брзине.

Како је процес интеграције диференцијалних једначина кретања врло тежак, природно је поставити питање: како и уколико можемо проучавати кретање материјалног система без дефинитивног извођења процеса интеграције?

Ради упрошћавања форме расуђивања претпоставимо да време рачунамо од почетка кретања, тј. ставимо $t_0 = 0$. Исто тако без ограничења у суштини можемо претпоставити да су почетне вредности свих координата једнаке нули, тј. $q_0^{\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Замислимо сад, упоредо са кретањем нашег материјалног система, друго кретање из истог почетног положаја, са истим почетним брзинама, али да оно даље не мора имати заједнички карактер са стварним кретањем система. Под тим условом је најједноставније претпоставити да су сва убрзања, а такође и њихови изводи по времену — убрзања виших редова — за наше замишљено кретање једнака нули. Такво кретање према томе одређено је једначинама

$$(1) \qquad \bar{q}^i = q_0^{i\prime}\, t, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где смо са $\bar{q}^i$ означили генералисане координате нашег материјалног система за све време његовог замишљеног кретања. Кретање система одређено једначинама (1) можемо сматрати као *почетно кретање система у првом приближном посматрању*. Како су променљиве величине $\bar{q}^i$, према једначинама (1), пропорционалне времену, ово почетно кретање има карактер *равномерног (једноликог) процеса*.

За одређивање убрзања стварног кретања система за почетни момент потребно је у једначине (10) односно (11) § 3·32

$$(2) \qquad \begin{aligned} q^{i\prime\prime} &= Q^i - \sum_{\mu,\sigma} \left\{ {\mu\,\sigma \atop i} \right\} q^{\mu\prime} q^{\sigma\prime} = \\ &= Q^i - \sum_{\mu,\sigma} \Gamma^i_{\mu\sigma}\, q^{\mu\prime} q^{\sigma\prime} \end{aligned}$$

ставити

$$q^\nu = q_0{}^\nu, \quad q^{\nu'} = q_0{}^{\nu'}$$

па ћемо добити вредности почетних убрзања, која ћемо означити са

$$q_0{}^{i''}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако помоћу тих убрзања замислимо ново кретање са једначинама

$$(3) \qquad \overline{q}^i = q_0{}^{i'} t + \frac{1}{2} q_0{}^{i''} t^2,$$

које има исте почетне брзине и иста почетна убрзања као стварно кретање система, ново кретање је *почетно кретање система у другом приближном посматрању* или *почетно кретање другог реда*. Једначинама (3) одговара *једнако променљив процес*.

Како су десне стране једначина (2) познате функције координата и брзина, диференцирањем тих израза по времену можемо изразити извод $q^{i'''}$, прво, као функцију координата, брзина и убрзања, а затим га опет помоћу једначина (2) можемо изразити као функцију само координата и брзина, тј. написати

$$q^{i'''} = \varphi_i\,(q^\nu, q^{\nu'}), \qquad i, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

Из тих једначина добијамо вредности тих функција за почетни момент кретања. Ако означимо те вредности са $q_0{}^{i'''}$ можемо замислити ново кретање са једначинама

$$(4) \qquad \overline{q}^i = q_0{}^{i'} t + \frac{1}{2!} q_0{}^{i''} t^2 + \frac{1}{3!} q_0{}^{i'''} t^3, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

које има са стварним кретањем система исти почетни положај, исте почетне брзине, иста почетна убрзања првог и другог реда. То је *почетно кретање система у трећем приближном посматрању*, односно *трећега реда*.

На сличан начин може се конструисати *почетно кретање m'ога реда* помоћу једначина

$$(5) \qquad \overline{q}_i{}^i = q_0{}^i t + \frac{1}{2} q_0{}^{i''} t^2 + \ldots + \frac{1}{m!} q_0{}^{i\,(m)} t^m, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

и то само диференцирањем, али под условима: 1. да је заиста могуће извести наглашена диференцирања и да изводи имају коначне вредности и 2. да је увек могуће одредити такву позитивну вредност t да за ту вредност буде

$$|q^i - \overline{q}^i| < \varepsilon,$$

где је ε унапред изабрани број. Јасно је да чланови једначина (5) одговарају развијању функције q^i у Taylor'ов ред и то помоћу узастопних диференцирања израза (2) и да конструисање почетних кретања важи само утолико уколико је могуће функције q_i претставити означеним редом и то са одговарајућим коначним бројем чланова.

Треба приметити да су почетна кретања згодна за проучавање диференцијалних особина кретања, на пример, за одређивање кривине и торзије трајекторија појединих тачака система, али она су, често пута, врло незгодна за опис општег карактера кретања система, нарочито кад је кретање периодичног или блиско периодичног карактера.

§ 3·4. Трајекторије система

Претпоставимо да је жива сила материјалног система квадратна форма генералисаних брзина са коефицијентима, који не зависе од времена, и да генералисане силе, што дејствују на систем, такође не зависе од времена. Тада Лагранжевим једначинама кретања система, решеним по убрзањима, према (10) § 3·32 можемо дати облик

$$(1) \qquad q^{i''} + \sum_{\mu,\sigma} \left\{ {\mu\,\sigma \atop i} \right\} q^{\mu'} q^{\sigma'} = Q^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где су суме по μ и σ проширене у границама од 1 до n. Ове једначине садрже време само у облику диференцијала dt. Тај диференцијал можемо елиминисати из написаних једначина и на тај начин добити диференцијалне једначине трајекторија система, тачније кривих линија трајекторија; нове једначине постављају диференцијалне везе само између координата система. Према томе под учињеним претпоставкама проучавање трајекторија система се може извршити без проучавања закона по коме се врши кретање система по тим трајекторијама.

Проучавање кривих линија трајекторија, као и проучавање обичне криве, може се вршити на два начина: 1. постављањем непосредних веза између координата система, узимајући једну од координата за независно променљиву, и 2. искоришћавањем параметарских једначина. У последњем случају згодније је да улогу параметра игра величина аналогна дужини лука при проучавању обичне криве у Еуклидовом простору.

Ниже наводимо једну и другу методу. Прву је искористио P. Painlevé (1863—1933) у својим проучавањима трајекторија система. Почетак друге методе треба везати за H. Hertz-a (1857—94); сад је она у најтешњој вези са савременим проучавањем механичких проблема у аспекту вишедимензионе диференцијалне геометрије.

Прву методу третирамо чисто аналитички. У излагању те методе ради упрошћавања означимо поново генералисане координате са q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ без обзира на њихову контраваријантну природу.

Систем једначина (1) кратко напишимо овако

$$q_i'' = P_i + \beta_i, \tag{2}$$

где је

$$P_i = -\sum_{\mu,\sigma} \left\{ {\mu\,\sigma \atop i} \right\} q^{\mu\prime} q^{\sigma\prime} \qquad i=1, 2 \ldots, n$$

квадратна форма по генералисаним брзинама q_i' $(i=1, 2, \ldots, n)$ и

$$\beta_i = Q^i = \sum_j g^{ij} Q_j$$

и према томе је β_i линеарна форма по генералисаним силама Q_j коваријантне природе.

Узмимо за независно промењљиву једну од оних координата, које у току кретања нису константне. Нека то буде координата q_1 и означимо је са q. Изводе осталих координата по координати q означаваћемо тачком; тако је, на пр.

$$\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dq}, \qquad \ddot{q}_2 = \frac{d^2 q_2}{dq^2}, \qquad \dddot{q}_2 = \frac{d^3 q_2}{dq^3}.$$

За елиминисање времена из једначина (2) израчунаћемо прво

$$q_s' = \frac{dq_s}{dt} = \frac{dq_s}{dq} \cdot q' = \dot{q}_s \cdot q'$$

па затим

$$q_s'' = \frac{d}{dt} (\dot{q}_s q') = \ddot{q}_s q'^2 + \dot{q}_s q''.$$

На основу тих образаца из (2) добијамо

$$\ddot{q}_s q'^2 + \dot{q}_s (P_1 + \beta_1) = P_s + \beta_s, \qquad s=2, 3, \ldots, n, \tag{3}$$

при чему смо q'' исто према (2) заменили са $P_1 + \beta_1$.

Како је свака функција P_s односно P_1 хомогена квадратна функција генералисаних брзина q_i' $(i=1, 2, \ldots, n)$, можемо је претставити у облику

$$(4) \qquad P_s = q'^2 \Pi_s ,$$

где функција Π_s више не зависи од генералисане брзине q' и не садржи диференцијал dt. Помоћу функција Π_s из (4) једначине (3) добијају изглед

$$(5) \qquad q'^2 (\ddot{q}_s - \Pi_s + \dot{q}_s \Pi_1) = \beta_s - \dot{q}_s \beta_1 , \qquad s=2, 3, \ldots, n.$$

Ако уведемо ознаке

$$(6) \qquad \begin{aligned} \Phi_s &= \ddot{q}_s - \Pi_s + \dot{q}_s \Pi_1 , \\ B_s &= \beta_s - \dot{q}_s \beta_1 , \end{aligned} \qquad s=2, 3, \ldots, n$$

једначине (5) можемо написати

$$(7) \qquad q'^2 \Phi_s = B_s \qquad s=2, 3, \ldots, n .$$

Пре свега из тих једначина непосредно следује наредни систем једначина слободних од q', а тиме и од диференцијала dt

$$(8) \qquad \frac{\Phi_r}{B_r} = \frac{\Phi_2}{B_2} , \qquad r=3, 4, \ldots, n .$$

Како је тај систем од $n-2$ једначине недовољан за одређивање $n-1$ променљиве $q_2, q_3, \ldots, q_n$ у функцији координате q, изведимо још једну једначину. За тај циљ узмимо из система (7) једначину која одговара $s=2$

$$q'^2 \Phi_2 = B_2$$

и за елиминисање q'^2 диференцирајмо је по q. Пошто је

$$\frac{d}{dq} (q'^2) = 2q' \frac{dq'}{dt} \frac{dt}{dq} = 2q'' = 2q_1'' = 2 (P_1 + \beta_1) = 2 (\beta_1 + q'^2 \Pi_1)$$
$$= 2 \frac{1}{\Phi_2} (\beta_1 \Phi_2 + B_2 \Pi_1) ,$$

резултат диференцирања даје

$$(9) \qquad B_2 \dot{\Phi}_2 + \Phi_2 [2 (\beta_1 \Phi_2 + B_2 \Pi_1) - \dot{B}_2] = 0 .$$

То је тражена диференцијална једначина трећега реда у односу на функцију q_2, јер је

$$\dot{\Phi}_2 = \dddot{q}_2 - \dot{\Pi}_2 + \ddot{q}_2 \Pi_1 + \dot{q}_2 \dot{\Pi}_1 .$$

Једначине (8) и (9) образују *систем диференцијалних једначина трајекторија система*. Тај систем после интеграције одређује трајекторије система, а може да послужи и пре интеграције за општа проучавања особина трајекторија материјалног система.

Ради конкретности узмимо случај кретања тачке у равни под утицајем силе која зависи само од положаја тачке. Како у овом случају имамо $n=2$, за одређивање трајекторије служи само једначина (9) трећег реда. За Декартове координате x, y тачке имамо једначине (1) у облику

$$x''=X(x, y),$$
$$y''=Y(x, y),$$

где смо са X и Y означили пројекције силе одређене на јединицу масе материјалне тачке.

Узмимо за независно промењиву x. Како је у овом случају $\Pi_2=\Pi_1=0$ и према томе је

$$\Phi_2=\frac{d^2 y}{dx^2}=\ddot{y},$$

а са друге стране је

$$\beta_1=X,\ \beta_2=Y,\ B_2=Y-\dot{y}X,$$

за једначину (9) се добија

$$(Y-\dot{y}X)\dddot{y}+[2X\ddot{y}-(\dot{Y}-\dot{y}\dot{X}-\dot{y}\dot{X})]\ddot{y}=0$$

и она у развијеном облику изгледа

$$(Y-\dot{y}X)\dddot{y}+\left[3X\ddot{y}+\frac{\partial X}{\partial y}\dot{y}^2+\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\dot{y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right]\ddot{y}=0.$$

Ова диференцијална једначина је специјалног облика једначина типа

$$\dddot{y}=G(x, y, \dot{y})\ddot{y}+H(x, y, \dot{y})\ddot{y}^2,$$

где су G и H функције означених аргумената. Овај тип једначина је сад предмет многих проучавања.

Навешћемо и другу методу проучавања трајекторија, методу диференцијалне геометрије за проучавање кривих линија у параметарском облику са специјално изабраним параметром. Овде ћемо разликовати ознаке коваријантних и контраваријантних величина.

Упоредо са живом силом материјалног система која је одређена једначином

$$(10) \qquad 2T = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, q^{\mu\prime}\, q^{\nu\prime}\,,$$

уочимо квадратну метричку форму

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dq^{\mu}\, dq^{\nu}$$

тако да је

$$2T = \frac{ds^2}{dt^2}\,.$$

Величину s, аналогну дужини лука криве узмимо за нову независно промењљиву и помоћу те промењљиве елиминишимо време из диференцијалних једначина кретања система. Према (1) те једначине кратко можемо написати

$$(11) \qquad q^{j\prime\prime} + \overline{K}^j = Q^j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

где је

$$\overline{K}^j = \sum_{\mu,\sigma} \left\{ {\mu\,\sigma \atop j} \right\} q^{\mu\prime}\, q^{\sigma\prime} = \sum_{\mu,\sigma} \Gamma^{\,j}_{\mu\sigma}\, q^{\mu\prime}\, q^{\sigma\prime}$$

а Q^j контраваријантна генералисана сила везана са коваријантним силама једначинама

$$Q^j = \sum_i g^{ij}\, Q_i\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Први извод по времену се трансформише

$$q^{j\prime} = \frac{dq^j}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \overset{,}{q}{}^j \cdot s'\,,$$

где запета горе означава извод по промењљивој s.

Према томе упоредо са (10) могу се написати ове две једначине

$$(12) \qquad s'^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, q^{\mu\prime}\, q^{\nu\prime}\,,$$

$$(13) \qquad 1 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, \overset{,}{q}{}^{\mu}\, \overset{,}{q}{}^{\nu}\,.$$

За други извод имамо

$$q^{j\prime\prime} = \frac{d}{dt}(\overset{,}{q}{}^j s') = \overset{,,}{q}{}^j s'^2 + \overset{,}{q}{}^j s''.$$

Ако ту вредност ставимо у једначине (11), добићемо

$$(14) \qquad \overset{,}{q}{}^j s'^2 + \overset{,}{q}{}^j s'' + s'^2 K^j = Q^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

где смо означили

$$K^j = \frac{1}{s'^2} \overline{K}^j.$$

и према томе је

$$K^j = \sum_{\mu, \sigma} \Gamma^j_{\mu\sigma} \overset{,}{q}{}^\mu \overset{,}{q}{}^\sigma.$$

Из једначина (14) изводимо једначине

$$(15) \qquad \overset{,,}{q}{}^j + K^j = \frac{1}{s'^2}(Q^j - \overset{,}{q}{}^j s''), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

које, ако означимо

$$(16) \qquad U^j = \overset{,,}{q}{}^j + K^j,$$

изгледају

$$(17) \qquad U^j = \frac{1}{s'^2}(Q^j - \overset{,}{q}{}^j s''), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

За елиминисање величина s'^2 и s'', које зависе од диференцијала dt, из једначина (15) односно (17) уведимо функцију у облику квадратне форме

$$(18) \qquad G^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$$

са којом је у вези једначина

$$1 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu,$$

где смо увели ознаке

$$G u^\mu = U^\mu.$$

Приметимо да у случају кад имамо две Декартове координате $q_1 = q^1 = x$, $q_2 = q^2 = y$ са метричком формом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

величине U^j имају вредности

$$U^1 = \frac{d^2 x}{ds^2}, \qquad U^2 = \frac{d^2 y}{ds^2}$$

и

$$G^2 = \left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2;$$

према томе величина G одговара кривини криве линије у равни. Величине u^1 и u^2 тада су косинуси углова што гради нормала на криву са координатним осама.

Сем величине G уведимо величину

$$N = \frac{1}{G} \sum_\rho Q_\rho\, U^\rho = \sum Q_\rho\, u^\rho, \tag{19}$$

при чему су Q_ρ коваријантне генералисане силе, које фигуришу у полазним Лагранжевим једначинама (1) § 3·32.

Покажимо пре свега да је

$$s'' = S, \tag{20}$$

где је

$$S = \sum_\nu Q_\nu\, q^{\nu'} \tag{21}$$

линеарна функција генералисаних сила Q_ν и извода q_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

За доказ (20), с једне стране, диференцирајмо (12) по времену

$$s'\, s'' = \sum_{\mu, \nu} \left[g_{\mu\nu}\, q^{\nu'}\, q^{\mu''} + \frac{1}{2} q^{\mu'}\, q \;\left\{ \sum_\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} q^{\sigma'} \right\} \right], \tag{22}$$

а, са друге стране, искористимо једначине (8) § 3·32 са малом променом ознака у облику

$$Q_\nu = \sum_\mu g_{\mu\nu}\, q^{\mu''} + \sum_{\mu, \sigma} \Gamma_{\nu, \mu\sigma}\, q^{\mu'}\, q^{\sigma'}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако сваку од ових једначина помножимо са $q^{\nu'}$ и резултате саберемо, добићемо

$$\sum_\nu Q_\nu\, q^{\nu'} = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu}\, q^{\nu'}\, q^{\mu''} + \sum_{\nu, \mu, \sigma} \Gamma_{\nu, \mu\sigma}\, q^{\nu'}\, q^{\mu'}\, q^{\sigma'}. \tag{23}$$

Како се непосредним упоређивањем може показати да је

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu,\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} q^{\mu\prime} q^{\nu\prime} q^{\sigma\prime} = \sum_{\nu,\mu,\sigma}\Gamma_{\nu,\mu\sigma} q^{\nu\prime} q^{\mu\prime} q^{\sigma\prime},$$

јер је

$$\Gamma_{\nu,\mu\sigma} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu}\right\}$$

и

$$\sum_{\nu,\mu,\sigma}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q^\mu} q^{\nu\prime} q^{\mu\prime} q^{\sigma\prime} = \sum_{\nu,\mu,\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} q^{\nu\prime} q^{\mu\prime} q^{\sigma\prime},$$

из (22) и (23) изводимо једначину

$$s' s'' = \sum_\nu Q_\nu q^{\nu\prime} = s' \sum_\nu Q_\nu \dot{q}^\nu$$

а то са (21) и потврђује једначину (20).

Приметимо да за случај једне материјалне тачке једначини (20) одговара природна једначина кретања за правац тангенте, тј. једначина

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = F\cos(\vec{F}, \vec{D})$$

са познатим ознакама.

Помоћу (20) једначине (17) изражавамо

$$(24) \qquad U^j = \frac{1}{s'^2}(Q^j - \dot{q}^j S), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из ових једначина треба елиминисати још величину s'^2. За тај циљ помножимо сваку од једначина (24) са Q_j и резултате саберимо, па се добија

$$\sum_j Q_j U^j = \frac{1}{s'^2}\left\{\sum_j Q_j Q^j - S\sum_j Q_j \dot{q}^j\right\},$$

одакле је на основу (19) и (20)

$$(25) \qquad GN = \frac{1}{s'^2}\left\{\sum_j Q_j Q^j - S^2\right\}.$$

Са друге стране, из истог система једначина (24) изводимо

$$(26)\quad G^2=\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, U^\mu\, U^\nu=\frac{1}{s'^4}\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(Q^\mu-q'^\mu S)\,(Q^\nu-q'^\nu S)=$$

$$=\frac{1}{s'^4}\left\{\sum_j Q_j\, Q^j-S^2\right\}$$

при чему смо искористили једначине (13), (20) и једначине

$$\sum_\mu g_{\mu\nu}\, Q^\mu=Q_\nu\,,$$

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, Q^\mu\, Q^\nu=\sum_j Q_j\, Q^j\,.$$

Упоређивање једначина (25) и (26) доводи до једначине

$$(27)\qquad Gs'^2=N\,.$$

И ова једначина у случају кретања једне материјалне тачке одговара природној једначини кретања али у односу на нормалу.

Помоћу једначине (27) дефинитивно искључујемо време из једначина (17) и добијамо систем једначина трајекторија система

$$(28)\quad U^j=q''^j+\sum_{\mu,\nu}\Gamma^j_{\mu\nu}\, q'^\mu\, q'^\nu=\frac{G}{N}\,(Q^j-q'^j S),\quad j=1,2,\ldots,n,$$

у параметарском облику са параметром s. У овом систему свака једначина је другога реда; према томе проблем интеграције тог система изгледа као проблем $2n$'ога реда. Али је за тај систем једначина познат један интеграл првога реда у облику једначине (13)

$$1=\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, q'^\mu\, q'^\nu$$

и према томе се проблем своди на проблем $2n-1$'ога реда.

У проучавању трајекторија велику улогу игра величина G која се зове *прва* или *геодезиска кривина трајекторије система*. За ову величину може се извести нарочита диференцијална једначина. Из једначине (27) у облику

$$s'^2=\frac{N}{G}$$

после диференцирања по времену следује

$$2s' s'' = s' \frac{d}{ds}\left\{\frac{N}{G}\right\}$$

одакле на основу (20) имамо

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{N}{G}\right\} = 2S.$$

У развијеном облику

$$N\frac{dG}{ds} = G\left\{\frac{dN}{ds} - 2GS\right\}$$

ова једначина може да послужи за проучавање геодезиске кривине упоредо са интеграцијом једначина (28).

Навешћемо још образац за одређивање кретања система после одређивања трајекторија, тј. решимо проблем о увођењу времена.

Ако смо одредили све координате $q_1, q_2, \ldots, q_n$ у функцији промењиве s, из једначине (27) можемо написати

$$dt = \pm\sqrt{\frac{G}{N}}\, ds, \tag{29}$$

при чему питање знака решавају почетни услови. Из ове једначине следује квадратура

$$t - t_0 = \pm\int_{s_0}^{s}\sqrt{\frac{G}{N}}\, ds = \varphi\,(s\,;\, s_0)\,,$$

чија инверзија уводи дефинитивно врѐме у облику

$$s = s\,(t)\,.$$

Једначина (29) губи свој смисао, ако је $N=0$, али тада је, према (27), и $G=0$. У овом случају за увођење времена можемо искористити једначину (20). Како после интеграције система једначина (28) десну страну једначине (20) можемо сматрати као функцију s, тј. $S=S(s)$, из једначине

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = S\,(s) \tag{30}$$

добијамо два интеграла:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\int S(s)\,ds + h = f(s) + h\,,$$

$$t - t_0 = \pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{f(s)+h}}\,,$$

где су ознаке очигледне. Први интеграл одређује брзину система као функцију положаја, а други положај у функцији времена.

§ 3·41. Трајекторије по инерцији. Геодевиске трајекторије. Особене трајекторије

Као што знамо, за састављање диференцијалних једначина кретања материјалног система под раније учињеним претпоставкама треба располагати подацима двојаке врсте: 1. треба имати на расположењу израз за живу силу система или, што је исто, метричку форму

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\,dq^\mu\,dq^\nu = 2T\,dt^2 \tag{1}$$

и 2. треба знати генералисане силе, односно израз за елементаран рад спољашњих сила, тј. величине Q_i или Q^j. Индекси свуда, ако не наводимо нешто друго, узимају вредности од 1 до n, где је n број степена слободе система.

Метричка форма (1) карактерише геометриску структуру система. Проучавање те структуре у односу на кретање система може се вршити без обзира на оне спољашње силе које дејствују на систем. Претпоставимо пре свега да спољашње силе не дејствују на систем. Такво кретање система се зове *кретање по инерцији*, а одговарајуће трајекторије су *трајекторије по инерцији*.

Пошто су генералисане силе у случају кретања по инерцији једнаке нули, тј.

$$Q_i = 0\,,\qquad Q^j = 0\,,\qquad i, j = 1, 2, \dots, n\,,$$

диференцијалне једначине кретања система по инерцији изгледају у Лагранжевој форми

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{i\prime}} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = 0\,,\qquad i = 1, 2, \dots, n\,;$$

и у решеном облику

$$U^j = q^{j\prime\prime} + \sum_{\mu,\sigma}\Gamma^j_{\mu\sigma}\,q^{\mu\prime}\,q^{\sigma\prime} = 0\,,\qquad j = 1, 2, \dots, n\,. \tag{2}$$

Како је у том случају, према претходном параграфу, $N=0$, из једначине $Gs'^2=N=0$ закључујемо да је

$$G=0 \tag{3}$$

сем тога је и $S=0$, па према томе имамо једначину

$$s''=0,$$

која говори да се при кретању по инерцији променљива s мења равномерно у току времена:

$$s'=\text{const.}=s_0', \qquad s=s_0'\,t+s_0\,. \tag{4}$$

Под условима (4) из једначина (2) после елиминисања диференцијала dt добијемо једначине

$$\overset{''}{q}{}^{j}+\sum_{\mu,\sigma}\Gamma_{\mu\sigma}\,\overset{'}{q}{}^{\mu}\,\overset{'}{q}{}^{\sigma}=0, \qquad j=1,2,\ldots,n \tag{5}$$

које треба сматрати као једначине трајекторије по инерцији у параметарском облику са параметром s.

Како је на тим трајекторијама према (3) геодезиска кривина једнака нули, а линије са том особином се зову *геодезиске линије*, можемо тврдити да су трајекторије по инерцији увек геодезиске линије. Једначине (5) можемо сматрати као диференцијалне једначине геодезиских линија за систем са метричком формом (1) и то у параметарском облику са параметром s.

Једнакост геодезиске кривине са нулом је диференцијална особина геодезиских линија. Покажимо сад да те линије имају и интегралну особину која се изражава тиме што вредност променљиве s, која игра улогу растојања између два положаја система, има дуж геодезиске линије стационарну вредност односно екстремум, тј. прва варијација δs интеграла

$$s=\int_{t_0}^{t}ds=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}\,q^{\mu'}\,q^{\nu'}}\;dt$$

при прелазу од геодезиске линије на суседну линију што спаја исте положаје система једнака је нули.

Правило варијационог рачуна тврди да из услова

$$\delta s=0$$

следују ове Euler'ове једначине

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^{i\prime}} - \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где смо са F означили подинтегралну функцију

$$F = \sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, q^{\mu\prime}\, q^{\nu\prime}} = s'.$$

Како је

$$\frac{\partial F}{\partial q^i} = \frac{1}{2s'} \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^i} q^{\mu\prime}\, q^{\nu\prime},$$

$$\frac{\partial F}{\partial q^{i\prime}} = \frac{1}{s'} \sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu\prime},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^{i\prime}} = \frac{1}{s'} \sum_{\nu,\sigma} \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q_\sigma} q^{\nu\prime} q^{\sigma\prime} + \frac{1}{s'} \sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu\prime\prime} - \frac{s''}{s'^2} \sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu\prime},$$

једначине (6) после множења са s' дају

$$(7) \qquad \sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu\prime\prime} + \sum_{\nu,\sigma} \Gamma_{i,\nu\sigma}\, q^{\nu\prime} q^{\sigma\prime} - \frac{s''}{s'} \sum_{\nu} g_{i\nu}\, q^{\nu\prime} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

где је

$$\Gamma_{i,\nu\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q^i}\right),$$

тј. Кристофелов симбол прве врсте са Вајловом ознаком.

Једначине (7) су једначине (6) у развијеном облику. Решимо те једначине по изводима другога реда. За тај циљ помножимо сваку од једначина (7) са $g^{i\mu}$ и резултате саберимо. Тада према једначинама

$$\sum_{i} g^{i\mu}\, g_{i\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu},$$

где је $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ познати Кронекеров симбол, и једначинама

$$\sum_{i} g^{i}{}_{\mu}\, \Gamma_{i,\nu\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma},$$

где са десне стране стоји Кристофелов симбол друге врсте поново са Вајловом ознаком, из (7) изводимо једначине

$$(8) \qquad q^{j''} + \sum_{\nu,\sigma} \Gamma^j{}_{\nu\sigma} q^{\nu'} q^{\sigma'} - \frac{s''}{s'} q^{j'} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

при чему смо на крају извођења ознаку индекса μ заменили са ознаком j.

Једначине (8), решене по другим изводима, одређују линије са стационарном вредношћу променљиве s. Покажимо да су те линије геодезиске линије. За доказ изаберимо место произвољне независно променљиве t променљиву s; тада треба да ставимо у једначине (8)

$$t = s, \quad s' = 1, \quad s'' = 0,$$

после чега оне узимају облик

$$(9) \qquad \overset{''}{q}{}^j + \sum_{\nu,\sigma} \Gamma^j{}_{\nu\sigma} \overset{'}{q}{}^\nu \overset{'}{q}{}^\sigma = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

и поклапају се са једначинама (5) трајекторија система по инерцији. Како смо, међутим, видели, да је геодезиска кривина дуж тих трајекторија једнака нули, она је једнака нули и на линијама одређеним једначинама (9) односно (8). Према томе можемо тврдити да су линије са стационарном вредношћу s геодезиске линије. При дубљем проучавању се показује да, под извесним претпоставкама, ове линије одговарају не само стационарној вредности s већ минимуму те вредности. Оне су, према томе, линије, тако рећи, најкраћег растојања. Једначине (8) можемо сматрати као диференцијалне једначине геодезиских линија у општем облику са произвољним параметром.

Сад обратимо пажњу на то да је свака трајекторија по инерцији геодезиска линија, али обрнут став да свака геодезиска линија мора да буде трајекторија по инерцији није тачан. Материјални систем у специјалним случајевима може да се креће по геодезиској трајекторији и под утицајем сила. Анализирајмо тај случај.

Једначине (28) претходног параграфа показују да се те једначине трајекторија система у општем случају претварају у једначине (9) геодезиских линија не само под условом $G = 0$, већ и под условима

$$Q^j - \overset{'}{q}{}^j S = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

или у облику

$$(10) \qquad \frac{Q^1}{dq^1} = \frac{Q^2}{dq^2} = \ldots = \frac{Q^n}{dq^n},$$

при чему заједничка вредност тих количника има вредност

$$\frac{S}{ds} = \frac{S}{s'} \cdot \frac{1}{dt}.$$

Услове (10) можемо изразити и друкчије. Како је

$$Q_i = \sum_\nu g_{i\nu} Q^\nu = \frac{S}{s'} \sum_\nu g_{i\nu} q^{\nu\prime} = \frac{S}{s'} \frac{\partial T}{\partial q^{i\prime}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

непосредно из (10) добијамо

$$(11) \qquad Q_1 : Q_2 : \ldots : Q_n = \frac{\partial T}{\partial q^{1\prime}} : \frac{\partial T}{\partial q^{2\prime}} : \ldots : \frac{\partial T}{\partial q^{n\prime}}.$$

Ако спољашње силе, што дејствују на систем, задовољавају услове (10) односно (11), материјални систем може да се креће по геодезиској линији не само по инерцији већ и под дејством таквих специјалних сила. Овакве трајекторије система зову се *особене трајекторије система* (trajectoires remarquables по Painlevé'у). Јасно је да је свака особена трајекторија система у исто време и геодезиска, али од свих геодезиских трајекторија особена трајекторија, ако постоји, изузетна је и има специјалан карактер. Покажимо то на елементарном примеру. Нека је материјални систем тешка тачка на стрмој равни. Кроз сваку тачку равни пролазе у свим правцима праве у тој равни — то су геодезиске линије. Ако на тачку не дејствује никаква сила у тој равни, на пр. кад је раван хоризонтална, трајекторије по инерцији су те исте праве — геодезиске линије. Кад раван није хоризонтална, кроз сваку тачку равни поново пролази бескрајно много правих које играју улогу геодезиских линија, али од тих правих постоји само једна права највећег пада која може да буде трајекторија и под дејством силе теже — та права је особена трајекторија за наш механички проблем.

Једначине (10) можемо сматрати као диференцијалне једначине особених трајекторија за дате силе. Јасно је да потпуно одређивање тих трајекторија зависи само од $n-1$ произвољне константе. Тако је у наведеном примеру са $n=2$ за одређивање праве највећег пада довољно знати само положај пресечне тачке те линије са хоризонталном линијом у стрмој равни, а то захтева знање само једног скаларног броја. Разуме се да то важи само под условом кад се трајекторија одређена једначинама (10) поклапа са одговарајућом геодезиском линијом система.

Свака особена трајекторија има ту важну особину да њен облик не зависи од почетне живе силе система, јер не зависи, рецимо, од интензитета почетне брзине, која се одређује величином s_0' и која може бити произвољна. Тако у наведеном примеру тачка ће остати увек на правој највећег пада без обзира на интензитет почетне брзине, у обичном смислу брзине тачке, ако та брзина има смер праве тог пада.

За увођење времена при одређивању кретања система по особеној трајекторији можемо поћи, рецимо, и овде од једначине

$$s'' = S = \sum_{\nu} Q_\nu \, \dot{q}^\nu . \tag{12}$$

Из ове једначине множењем са ds изводимо

$$\frac{ds}{dt}\, d\left(\frac{ds}{dt}\right) = \sum_{\nu} Q_\nu \, dq^\nu .$$

Пошто све координате после одређивања особене трајекторије можемо сматрати као функције само једне координате, рецимо q_1, претходну једначину можемо заменити овом

$$\frac{ds}{dt}\, d\left(\frac{ds}{dt}\right) = \varphi\,(q^1)\, dq^1 ,$$

одакле долазимо до интеграла

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\Phi\ (q^1) + 2h ,$$

где је

$$\Phi\,(q^1) = \int \varphi\,(q^1)\, dq^1$$

и h је произвољна константа која се одређује из почетних услова.

После поновне интеграције имамо

$$t - t_0 = \int_{q_0^1}^{q^1} \frac{ds}{\sqrt{2\Phi\,(q^1) + 2h}} ,$$

при чему ds треба претходно изразити помоћу једначине

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dq^\mu\, dq^\nu$$

као функцију променљиве q^1 и диференцијала те променљиве, а знак пред кореном одредити из почетних услова. Дефинитивно последња квадратура изгледа

$$t - t_0 = \int_{q_0^1}^{q^1} \sqrt{\frac{\sum\limits_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, \dot{q}^\mu\, \dot{q}^\nu}{2\Phi\,(q^1) + 2h}}\, dq^1 ,$$

где тачка означује изводе по променљивој q^1. Те изводе и коефицијенте $g_{\mu\nu}$ треба сматрати као функције променљиве q^1.

У нашем конкретном примеру стрме равни положај тачке на линији пада можемо одредити дужином пута s те линије и тада једначина (12) даје

$$s'' = g \sin\alpha ,$$

где је α угао стрме равни са хоризонтом. Интеграција даје

$$s' = gt \sin\alpha + s_0' ,$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2 \sin\alpha + s_0' t + s_0 ,$$

где су s_0' и s_0 односне константе. Ове једначине одређују кретање тачке по особеној трајекторији.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Опште теореме и интеграли

§ 4·1. Теорема о количини кретања система

Диференцијалне једначине кретања материјалног система од n тачака у векторском облику имају облик (§ 3·2)

$$(1) \qquad m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q\,grad}_i \varphi_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где су: m_i маса i' те тачке система, $\vec{w}_i = \dot{\vec{v}}_i$ — убрзање те тачке, извод по времену брзине тачке $\vec{v}_i$, $\vec{F}_i$ — сила, која дејствује на i' ту тачку; k_1 — број коначних веза изражених једначинама

$$f_l(x_i, y_i, z_i; t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1; \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

λ_l — множитељ l' те коначне везе, $\operatorname{grad}_i f_l$ — делимични градијент за i' ту тачку l' те коначне везе, k_2 — број диференцијалних веза одређених једначинама

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij} x_i' + B_{ij} y_i' + C_{ij} z_i') + D_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

μ_j — множитељ j' те диференцијалне везе, $\operatorname{q\,grad}_i \varphi_j$ — квазиградијент за i' ту тачку j' те диференцијалне везе.

Једначине (1) напишимо скраћено

$$m_i \dot{v}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i^{(1)} + \vec{R}_i^{(2)},$$

где су $\vec{R}_i^{(1)}$ и $R_i^{(2)}$ реакције коначних и диференцијалних веза које дејствују на i' ту тачку.

Ако саберемо те реакције у једну силу, тј. ставимо

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i^{(1)} + \vec{R}_i^{(2)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

претходне једначине добијају облик

$$m_i \dot{v}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Како знамо, вектор

$$m_i \vec{v}_i = \vec{K}_i$$

зове се количина кретања или импулс i'те покретне материјалне тачке. Векторски збир количина кретања свих материјалних тачака система, тј. вектор

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \vec{K}$$

зове се *количина кретања* или *импулс датог материјалног система*.

Ако саберемо све векторске једначине (2), добићемо векторску једначину

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i. \tag{3}$$

Лева страна ове векторске једначине претставља извод по времену количине кретања датог материјалног система, тј. вектор

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{v}_i. \tag{4}$$

Први члан десне стране је збир свих сила, сем сила реакција које дејствују на масе нашег система. То су такозване *активне силе*. Активне силе, које дејствују на тачке система, можемо поделити у две категорије: у спољашње силе и унутрашње. *Спољашње силе* имају своје изворе у масама које не припадају масама датог материјалног система. Извори *унутрашњих сила*, напротив, налазе се у масама самог система. Како унутрашње силе улазе по две истог правца, истог интензитета и супротног смера, њихов збир проширен на целокупан материјални систем, увек је једнак нули. Према томе први члан

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F} \tag{5}$$

је збир само спољашњих активних сила. Како силе $\vec{F_i}$ треба сматрати као везане векторе, вектор $\vec{F}$ је главни вектор система тих везаних вектора, њихова резултанта као слободних вектора.

Други члан десне стране једначине (3) вектор

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R_i} = \vec{R} \tag{6}$$

је резултанта реакција. Како и силе реакција можемо поделити у реакције од спољашњих маса и од унутрашњих маса, — маса самог система, при формирању вектора $\vec{R}$ учествоваће само реакције спољашних маса.

На основу (4), (5) и (6) једначину (3) можемо заменити једначином

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{7}$$

Ова векторска једначина изражава *теорему* или *закон количине кретања за материјални систем у диференцијалном облику*. Она гласи:

Извод по времену количине кретања материјалног система једнак је збиру две резултанте спољашњих сила: резултанте активних сила и резултанте сила реакција спољашњих маса.

Из једначине (7) интеграцијом у интервалу времена од t_0 до t изводимо једначину

$$\vec{K} - \vec{K_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt + \int_{t_0}^{t} \vec{R}\,dt. \tag{8}$$

На левој страни имамо коначан прираштај количине кретања система, на десној два интеграла. Први интеграл је импулс резултанте $\vec{F}$ спољашњих активних сила за време $t - t_0$, други је импулс одговарајуће резултанте сила реакција.

Векторска једначина (8) даје *теорему* или *закон количине кретања за материјални систем у интегралном облику*. Њен садржај је:

Прираштај количине кретања материјалног система за коначни интервал времена једнак је збиру импулса резултанте спољашњих активних сила и импулса резултанте спољашњих сила реакција и то за исти интервал времена.

Обе ове теореме се могу формулисати и друкчије.

Узмимо у обзир центар маса датог материјалног система, тачку C. Ако са $\vec{r}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ означимо векторе положаја материјалних тачака у односу на непомичну тачку O, а са $\vec{r}_c$ вектор положаја центра маса у односу на исту тачку O, постоји позната веза

$$m\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

где је

$$m = m_1 + m_2 + \ldots m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Ако сад ову векторску једначину диференцирамо по времену, добићемо

$$m\dot{\vec{r}}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i . \tag{9}$$

Како је

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i , \qquad \dot{\vec{r}}_c = \vec{v}_c$$

и према томе

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{K} ,$$

$$m\vec{v}_c = \vec{K}_c$$

где смо са $\vec{K}_c$ означили количину кретања једне материјалне тачке у положају тачке C са целокупном масом система, можемо из (9) закључити да је

$$\vec{K} = \vec{K}_c ,$$

тј. да је количина кретања читавог система увек једнака количини кретања једне материјалне тачке са положајем у центру маса и са масом целокупне масе система.

На основу овог резултата теореме изражене једначинама (7) и (8) можемо изразити једначинама

$$\dot{K}_c = \vec{F} + \vec{R} \tag{10}$$

односно

$$\vec{K}_c - \vec{K}_{c0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt + \int_{t_0}^{t} \vec{R}\,dt.$$

Једначину (10) можемо написати

$$m\ddot{r}_c = m\dot{v}_c = \vec{F} + \vec{R} = \vec{\Phi} \tag{11}$$

и у том облику она изражава *теорему* или *закон центра инерције.* Тај закон гласи:

Центар маса сваког материјалног система креће се на исти начин као и материјална тачка са масом целокупне масе система, а на коју дејствује резултанта свих сила које дејствују на тај систем.

Овај закон, закон центра инерције, служи као подлога и објашњава прави смисао механике само једне материјалне тачке, јер се на основу тог закона проучавање кретања сваког материјалног система може раставити на два дела: 1. на проучавање кретања центра инерције и 2. на проучавање кретања система око центра инерције. Први део проучавања спада у механику тачке.

Овај исти закон показује да је сасвим природно увођење појма материјалне тачке као геометриске тачке са којом је везана одређена маса. Та маса може бити бесконачна мала, као маса такозване *честице*, а може бити и коначна, као што је, на пр., маса наше Земље или Сунца. Узимање Земље за материјалну тачку није приближно посматрање већ сасвим тачно, ако под одговарајућом материјалном тачком разумемо Земљин центар инерције са којим је везана целокупна Земљина маса. Овај закон пружа могућност проширења појма материјалне тачке не само на коначну масу која се креће транслаторно већ и на материјални систем са произвољним кретањем, подразумевајући при томе једну геометриску тачку, центар маса тог система са којим је везана целокупна маса система.

Учинимо још ову важну примедбу.

Претпоставимо да се положај тачака система и тачке C не одређује у односу на непомични пол, тачку O векторима $\vec{r}_i$ односно $\vec{r}_c$ већ у односу на покретну тачку A векторима $\vec{\rho}_i$, и $\vec{\rho}_c$, при чему су

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_A ,\qquad \vec{\rho}_c = \vec{r}_c - \vec{r}_A . \tag{12}$$

Решимо питање да ли за нови пол важи закон количине кретања и ако важи, за која кретања тачке A.

Ако са $\vec{K}^{(A)}$ означимо количину кретања система у односу на тачку A, тј. ставимо

$$\vec{K}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}_i$$

извод по времену има вредност

$$\dot{K}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\rho}_i .$$

Са друге стране, за тачку O имамо

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_i ,$$

одакле после замене на основу (12)

$$\ddot{r}_i = \ddot{\rho}_i + \ddot{r}_A$$

добијамо

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\rho}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_A =$$

$$= \dot{K}^{(A)} + m \ddot{r}_A .$$

На тај начин се закон количине кретања за пол A изражава једначином

$$\dot{K}^{(A)} + m \ddot{r}_A = \vec{\Phi} ,$$

где је $\vec{\Phi}$ резултанта свих сила које дејствују на систем. Тај закон биће изражен на исти начин за покретни пол као и за непокретни само под условом

$$\ddot{r}_A = 0,$$

тј. под условом да се тачка A креће равномерно и праволиниски. У том случају имамо једначину

$$\dot{K}^{(A)} = \vec{\Phi}.$$

И ову једначину у облику

$$m\ddot{\rho}_c = \vec{\Phi} \tag{13}$$

можемо протумачити као векторску диференцијалну једначину за одређивање кретања материјалне тачке, заступника материјалног система у његовом транслаторном кретању. Упоређивање ове једначине са једначином (11) доводи до резултата да се кретање тачке одређује истом векторском диференцијалном једначином у односу на непомичан пол као и у односу на пол који се креће праволиниски и равномерно. Ако векторску једначину (13) желимо заменити системом скаларних једначина, можемо увести нов систем координатних оса $A\xi\eta\zeta$ са почетком у тачки A и са правцима оса паралелним осама триједра $Oxyz$ непокретног у простору. Ако се тачка A креће праволиниски и равномерно систем оса $A\xi\eta\zeta$ зове се *инерцијални систем*. Према томе можемо тврдити да се проучавање кретања центра инерције система у односу на непокретни триједар поклапа са проучавањем тог кретања у односу на инерцијални систем. Последњем кретању се додаје само она транслација, коју има пол A.

§ 4·2. Интеграли количине кретања.

Претпоставимо да је резултанта свих сила што дејствују на материјални систем једнака нули; другим речима, да је систем сила еквивалентан или нули или једном спрегу. Како је

$$\vec{\Phi} = 0, \tag{1}$$

закон количине кретања изгледа

$$\dot{K} = 0$$

и доводи до овог векторског интеграла

$$\vec{K} = \vec{A}$$

где је $\vec{A}$ константан вектор. Написана векторска једначина је *интеграл количине кретања система у векторском облику.*

Претходној векторској једначини одговарају три скалзрне једначине

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i' = A_1\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i' = A_2\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i' = A_3\,,$$

које се зову *интеграли количине кретања система у скаларном облику.*

Помоћу закона центра инерције исти интеграли се формулишу овако: у векторском облику

$$(2) \qquad \vec{v}_c = \vec{a}$$

где је $\vec{a}$ сталан вектор са вредношћу

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{A}\,,$$

и у скаларном

$$x_c' = a_1\,, \qquad y_c' = a_2\,, \qquad z_c' = a_3\,.$$

Из векторског интеграла (2) следује други векторски интеграл

$$(3) \qquad \vec{r}_c = \vec{a}t + \vec{b}\,,$$

где је $\vec{b}$ нови стални вектор. Овај интеграл показује да се под условом (1) центар инерције креће праволиниски и равномерно. Интегралу (3) одговарају три скаларна интеграла

$$(4) \qquad x_c = a_1 t + b_1\,, \quad y_c = a_2 t + b_2\,, \quad z_c = a_3 t + b_3\,.$$

Векторски интеграл (3) односно скаларни интеграли (4) зову се *интеграли кретања центра инерције.*

Ако резултанта $\vec{\Phi}$ свих сила не задовољава векторски услов (1), већ само неки скаларни услов изражени тиме да је пројекција резултанте на сталан правац, рецимо са ортом $\vec{u}_1$, једнака нули, тј.

$$(5) \qquad (\vec{\Phi}\,,\ \vec{u}_1) = \Phi \cos(\vec{\Phi}\,,\ \vec{u}_1) = 0\,,$$

из закона количине кретања изводимо једначину

$$(\dot{K}, \vec{u}_1) = \frac{d}{dt}(\vec{K}, \vec{u}_1) = 0\,,$$

која доводи до скаларног интеграла

$$(\vec{K}, \vec{u}_1) = K\cos(\vec{K}, \vec{u}_1) = A_1'$$

где је A_1' константа интеграције.

Одговарајући интеграл кретања центра инерције за тај правац даје

$$(\vec{v}_c, \vec{u}_1) = v_c\cos(\vec{v}_c, \vec{u}_1) = a_1'$$

где је a_1' константа интеграције.

Из тог интеграла следи и други интеграл

$$(6) \qquad (\vec{r}_c, \vec{u}_1) = r_c\cos(\vec{r}_c, \vec{u}_1) = a_1' t + b_1'\,,$$

где је b_1' нова константа интеграције. Тај интеграл показује да се под условом (5) центар инерције система креће у правцу орта $\vec{u}_1$ равномерно.

Ако резултанта $\vec{\Phi}$ задовољава, сем (5), још и други сличан услов за орт $\vec{u}_2$, неколинеаран орту $\vec{u}_1$, али у општем случају и неортогоналан на $\vec{u}_1$, тј.

$$(\vec{\Phi}, \vec{u}_2) = \Phi\cos(\vec{\Phi}, \vec{u}_2) = 0\,,$$

имамо још један интеграл

$$(\vec{K}, \vec{u}_2) = K\cos(\vec{K}, \vec{u}_2) = A_2'\,,$$

где је A_2' нова константа. Том интегралу одговарају први, а затим из њих изведени и други интеграли кретања центра инерције:

$$(\vec{v}_c, \vec{u}_2) = v_c\cos(\vec{v}_c, \vec{u}_2) = a_2'\,,$$

$$(7) \qquad (\vec{r}_c, \vec{u}_2) = r_c\cos(\vec{r}_c, \vec{u}_2) = a_2' t + b_2'$$

са константама a_2' и b_2'.

Из интеграла (6) и (7) следује да се у овом случају пројекције центра инерције на раван паралелну ортовима $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ креће праволиниски и равномерно.

Најзад, ако би резултанта $\vec{\Phi}$ задовољавала још и трећи услов, сличан услову (5), за орт $\vec{u}_3$, некомпланаран ортовима $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, али који, у општем случају, не стоји ортогонално на равни ортова $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, имали бисмо још и трећи интеграл. У том случају центар инерције се креће у простору праволиниски и равномерно. Према томе видимо поново да услов (1) доводи до три друга интеграла кретања центра инерције.

На тај начин имамо врло важан наредни став механике материјалног система:

Ако је резултанта свих сила које дејствују на систем једнака нули, за систем диференцијалних једначина кретања таквог система можемо унапред написати шест интеграла, који изражавају праволиниско и равномерно кретање центра инерције таквог система.

У такве системе спадају пре свега такозвани *изоловани системи*, на чије масе дејствују само унутрашње силе. Како је за њих испуњен услов (1), центар инерције изолованог материјалног система или стоји у месту или се креће праволиниски и равномерно.

Ако наш Сунчев систем са свима планетама сматрамо као изолован систем на који не дејствују спољашње силе, морамо закључити да се центар инерције тог система креће равномерно у сталном правцу. Према астрономским посматрањима тај правац је наперен у област сазвежђа Херкулеса; наш систем се креће према тој области са брзином отприлике 20 km у секунду. То је брзина са којом бисмо прелетели од Београда до Авале за једну секунду.

§ 4·3. Закон момента количина кретања

Узмимо поново систем векторских једначина

$$m_i \dot{v}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$

помножимо векторски слева сваки члан те једначине вектором положаја $\vec{r}_i$ одговарајуће тачке и резултате саберимо за све тачке система

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i,\, m_i \dot{v}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i,\, \vec{F}_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i,\, \vec{R}_i\right]. \tag{1}$$

Уведимо сад вектор

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i , m_i \vec{v}_i \right]. \tag{2}$$

који се зове *момент количина кретања* у односу на дати пол, тачку O. За конструисање тог вектора треба конструисати поједине моменте количине кретања сваке посебне тачке система у односу на исти пол и тек тада извршити векторско сабирање таквих момената. У тој конструкцији количина кретања целокупног система, вектор $\vec{K}$, непосредно не игра улогу.

Диференцирајмо сад вектор $\vec{l}$ непосредно по времену

$$\dot{l} = \sum_{i=1}^{n} [\dot{r}_i , m_i \vec{v}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i , m_i \dot{v}_i].$$

Како је први збир једнак нули, добијамо

$$\dot{l} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i , m_i \dot{v}_i]. \tag{3}$$

Даље уведимо векторе

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i , \vec{F}_i], \tag{4}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i , \vec{R}_i]. \tag{5}$$

Први вектор је главни момент свих активних сила што дејствују на систем, а други главни момент свих реакција. Како унутрашње силе не дају моменте, јер улазе паровима истог правца али супротног смера, при израчунавању главних момената треба узимати у обзир само спољашње силе.

На основу (3), (4) и (5) из (1) имамо

$$\dot{l} = \vec{M} + \vec{L}. \tag{6}$$

Ова векторска једначина изражава *теорему* или *закон момента количина кретања*. Тај закон гласи:

Извод по времену момента количина кретања у односу на непокретни пол једнак је векторском збиру главног момента спољашњих активних сила и главног момента спољашњих реакција у односу на исти пол.

У скаларном облику тај исти закон за Декартове координате треба изразити са три једначине, од којих, рецимо, прва изгледа

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = \sum_{i=1}^{n}(y_i Z_i - z_i Y_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i R_{iz} - z_i R_{iy}).$$

Из једначине (6) могли бисмо извести исти закон у интегралном облику

$$\vec{l} - \vec{l}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{M}\, dt + \int_{t_0}^{t} \vec{L}\, dt, \tag{7}$$

где са леве стране стоји коначни прираштај момента количина кретања, а са десне векторски збир импулса главног момента спољашњих сила и импулса главног момента спољашњих реакција.

Претпоставимо сад да за конструисање свих момената који учествују у закону момента количина кретања изаберемо не непокретну тачку O, већ покретну тачку A, која има своје сопствено кретање у односу на непомичан простор триједра $Oxyz$.

Употребимо исте, као и у претходном параграфу, ознаке вектора положаја, који су везани једначином

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_A ,$$

и констуишимо моменте помоћу вектора $\vec{\rho}_i$. Уводимо ове ознаке

$$\vec{l}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i \vec{v}_i],$$

$$\vec{M}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, \vec{F}_i],$$

$$\vec{L}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, \vec{R}_i].$$

Диференцирајмо сад вектор $\vec{l}^{(A)}$ по времену

$$\dot{l}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\dot{\rho}_i, m_i \vec{v}_i]$$

и трансформишимо други збир

$$\sum_{i=1}^{n} [\dot{\rho}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{n} [\dot{r}_i - \dot{r}_A, m_i \vec{v}_i] = -\sum_{i=1}^{n} [\vec{v}_A, m_i \vec{v}_i] =$$

$$= -[\vec{v}_A, \vec{K}],$$

јер је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{K},$$

тада добијамо

$$\dot{l}^{(A)} + [\vec{v}_A, \vec{K}] = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i].$$

После замене збира десне стране на основу диференцијалних једначина кретања тачака система са збировима момената активних сила и реакција, дефинитивно долазимо до једначине

$$\dot{l}^{(A)} + [\vec{v}^{(A)}, \vec{K}] = \vec{M}^{(A)} + \vec{L}^{(A)}, \tag{8}$$

која изражава *закон моменша количина крешања за йокрешни йол.*

Слично (7) у интегралном облику претходној једначини одговара векторска једначина исто у интегралном облику

$$\vec{l}^{(A)} - \vec{l}_0^{(A)} + \int_{t_0}^{t} [\vec{v}^{(A)}, \vec{K}]\, dt = \int_{t_0}^{t} \vec{M}^{(A)}\, dt + \int_{t_0}^{t} \vec{L}^{(A)}\, dt. \tag{9}$$

Једначина (8) се разликује од одговарајуће једначине за непокретни пол допунским чланом $[\vec{v}_A, \vec{K}]$. Ако брзину $\vec{v}_A$ нацртамо из тачке A, крај те брзине зове се *изводни йол.* Помоћу тог пола наведени допунски члан можемо протумачити као момент количине кретања система са нападном тачком у изводном полу око датог покретног пола.

Анализирајмо сад питање кад је тај допунски члан једнак нули и кад, према томе, једначина која изражава закон момента количина кретања за покретни пол има исту форму као и једначина за непокретни пол. Како вектор $\vec{K}$ можемо написати

$$\vec{K} = m\vec{v}_c,$$

где је $\vec{v}_c$ брзина центра инерције, вредност допунског члана зависи од векторског производа

$$[\vec{v}_A, \vec{v}_c].$$

Навешћемо сад оне специјалне случајеве кад је тај производ једнак нули.

1. Тачка A је непокретна, $\vec{v}_A = 0$.

2. Тачка A је покретна, али је центар маса непокретан, $\vec{v}_c = 0$.

3. Брзина $\vec{v}_A$ је колинеарна са брзином $\vec{v}_c$.

4. Важан посебан потслучај претходног случаја кад се тачка A поклапа са тачком C, другим речима, кад је за покретни пол изабран центар маса датог материјалног система. Према томе за тачку C увек важи једначина

$$\dot{I}^{(c)} = \vec{M}^{(c)} + \vec{L}^{(c)},$$

без обзира на то да ли се тачка C креће или не.

§ 4·4. Интеграли момента количина кретања

Претпоставимо да су активне силе и силе реакција такве да не дају моменте око одређене сталне тачке O у простору, тј.

$$\vec{M} = 0, \quad \vec{L} = 0.$$

Тада из закона момента количина кретања

$$\dot{I} = 0$$

следује овај векторски интеграл

$$\vec{I} = \vec{\Gamma},$$

где је $\vec{\Gamma}$ сталан вектор. Тај важан интеграл зове се *интеграл момента количина кретања.* Том интегралу можемо дати неколико геометриских интерпретација.

Како је вектор $\vec{\Gamma}$ сталан, он одређује неку раван, нормалну на њему, која је такође стална у простору. То је такозвана *непроменљива* или *Лапласова* раван система. Ако кроз тачку O повучемо произвољну раван са нормалом $\vec{n}$, резултантни момент количина кретања материјалних тачака система око осе правца $\vec{n}$ има сталну вредност величине $\Gamma \cos(\vec{\Gamma}, \vec{n})$. Јасно је да за Лапласову раван тај момент има највећу вредност.

Ако је материјални систем изолован и на њега не дејствују спољашње силе, за њега важи интеграл момента количина кретања. Сматрамо ли наш Сунчев систем изолован, за њега треба да постоји Лапласова непроменљива раван.

За израчунавање положаја те равни треба знати све масе нашег Сунчевог система, њихов положај у неком тренутку времена и њихове брзине у том тренутку. Тачно израчунавање те равни је немогуће из ових разлога. 1. Нама још нису познате све масе система. Сем малих планета, чији списак још није потпун, у систему има још таквих тела, која се показују само тада, кад дођу у додир са Земљом; о таквим телима имамо још сувише мало података, нарочито кад се траже подаци о кинематичком стању свих тих непознатих тела. 2. При израчунавању стварне непроменљиве равни нашег Сунчаног система, свако небеско тело се више не сме сматрати као материјална тачка, тј. као маса која има само транслаторно кретање, јер момент количина од обртања сваког тела око осе која пролази кроз центар маса тог тела чини део целокупног момента количина кретања за читав материјални систем. Међутим израчунавање момената од обртања због непознавања распореда маса у самим телима и природе обртања тих тела (као крутих тела или зонално покретних) не може се извести са довољном тачношћу. Према томе Лапласову непроменљиву раван можемо израчунати само приближно. Такав приближни рачун показује да пол те равни има отприлике ове координате у односу на еклиптику за 1900 годину:

$$\text{латитуда} \; - \; 88^{\circ}\,25'\,1'', \quad \text{лонгитуда} \; - \; 16^{\circ}\,35'\,1'',$$

другим речима, нагиб те равни према еклиптици износи $1^{\circ}\,34'\,59''$, а лонгитуда узлазног чвора је $106^{\circ}\,35'\,1''$.

Видели смо у претходном параграфу да се може написати диференцијална једначина закона момента количина кретања не покретни пол, већ и за покретни. Претпоставимо сад да постоји таква тачка A за коју су моменти свих активних сила и свих реакција једнаки нули. У том случају закон момента количина кретања доводи до једначине

$$\dot{l}^{(A)} + [\vec{v}_A \vec{K}] = 0 .$$

Ако је допунски члан у тој једначини такође једнак нули, тј. ако је испуњен неки од у § 4·3 наведених услова, из претходне једначине имамо интеграл

$$\vec{l}^{(A)} = \vec{\Gamma}^{(A)} .$$

Нарочито је важан случај, кад је тачка A центар маса система. Допунски члан $[\vec{v}_C \vec{K}]$ увек је у том случају нула, и према томе, ако све силе, које дејствују на систем, не дају момента око тачке C, постоји интеграл

$$\vec{l}^{(C)} = \vec{\Gamma}^{(C)} .$$

Може се десити да постоји како интеграл за тачку C, тако и интеграл за неку другу, на пр., непомичну тачку O, али векторске константе $\vec{\Gamma}^{(C)}$ и $\vec{\Gamma}^{(O)}$ могу бити различите. На пр., у случају кретања Земље око Сунца као привлачног центра, тачке O, важи интеграл момента количина кретања како за тај центар, тако и за центар маса саме Земље. Међутим, константе $\vec{\Gamma}^{(C)}$ и $\vec{\Gamma}^{(O)}$ су различите. Друга константа је одређена збиром

$$\vec{\Gamma}^{(O)} = \vec{\Gamma}^{(C)} + [\vec{r}_C , m\vec{v}_C] ,$$

где на десној страни други сталан сабирак има вредност момента количине кретања Земље као тачке масе m у њеном елиптичном кретању око тачке O.

Аналогно интегралима количине кретања и овде можемо анализирати случајеве кад резултанта свих момената активних сила и реакција има пројекцију само на један односно пројекције на два стална правца једнаке нули. У првом случају за сталан пол имамо један интеграл

$$\Gamma \cos (\vec{\Gamma}\, \vec{u}_1) = \Gamma_1 ,$$

где је $\vec{u}_1$ орт сталног правца. У другом случају имамо још један, за други сталан орт $\vec{u}_2$

$$\Gamma \cos (\vec{\Gamma}\, \vec{u}_2) = \Gamma_2 ,$$

где су Γ_1 и Γ_2 скаларне константе.

Навешћемо још једну геометриску интерпретацију интеграла момента количина кретања.

Како знамо још из механике тачке вектор

$$[\vec{r}_i \, \vec{v}_i]$$

можемо протумачити као двоструку секторску брзину тачке; ту брзину сматрамо као вектор и означаваћемо са $2\vec{S}_i$. Пројекција покретне тачке на раван управну на тај вектор врши своје кретање у тој равни са односном скаларном секторском брзином. Интеграл момента количина кретања можемо претставити у облику

$$2\sum_i m_i \vec{S}_i = \vec{\Gamma}\,.$$

У том облику интеграл се зове *интеграл површина за систем.*

§ 4·5. Закон живе силе за систем

Жива сила материјалног система је збир живих сила свих тачака које сачињавају тај систем. Ако живу силу система означимо са T, имамо према дефиницији

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, v_i^2\,.$$

Како се тај образац можемо написати

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, (\vec{v}_i\,,\, \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\sum_i (\vec{v}_i\,,\, m_i \vec{v}_i)\,,$$

може се казати да је жива сила система једнака полузбиру скаларних производа брзина и односних количина кретања тачака.

Диференцирамо ли ту једначину, добићемо

$$dT = \sum_i m_i \, (\vec{v}_i\,,\, d\vec{v}_i)\,.$$

Ако, с друге стране, сваку диференцијалну једначину кретања система

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$

помножимо скаларно елементарним померањем $\vec{ds_i}$ одговарајуће тачке и резултате саберемо, добићемо

$$(1) \qquad \sum_i (m_i \dot{\vec{v}}_i, \vec{ds}_i) = \sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) + \sum_i (\vec{R}_i, \vec{ds}_i).$$

Лева страна ове једначине

$$\sum_i (m_i \dot{\vec{v}}_i, \vec{ds}_i) = \sum_i (m_i \, d\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \sum_i m_i \, (\vec{v}_i, d\vec{v}_i)$$

једнака је диференцијалу живе силе, тј. dT. На десној страни сваки скаларни производ је рад одговарајуће силе на датом елементарном померању. Једначина (1) написана у облику

$$dT = \sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) + \sum_i (\vec{R}_i, \vec{ds}_i)$$

изражава *теорему* или *закон живе силе у диференцијалном облику;* тај закон гласи:

За време кретања материјалног система диференцијал живе силе једнак је збиру радова свих активних сила и реакција на одговарајућим елементарним померањима.

Исти закон у интегралном облику изражава једначина

$$(2) \qquad T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) + \int_{t_0}^{t} \sum_i (\vec{R}_i, \vec{ds}),$$

где на левој страни стоји коначан прираштај живе силе, а на десној страни рад свих активних сила и реакција за време кретања система у одговарајућем коначном размаку времена.

Ако је систем неслободан и брзине тачака система морају задовољавати једначине: за коначне веза (3) § 2·3

$$(3) \qquad \sum_i (\mathrm{grad}_i \, f_l, \vec{v}_i) + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

а за диференцијалне (6) § 2·3

$$(4) \qquad \sum_i (\mathrm{q\,grad}_i \, \varphi_j, \vec{v}_i) + D_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

силе реакције имају облик

$$\vec{R}_i = \sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_j \mu_j \operatorname{q grad}_i \varphi_j ,$$

где су λ_l и μ_j множитељи коначних односно диференцијалних веза.

Пошто је

$$\sum_i (\vec{R}_i, \vec{ds}_i) = \sum_l \lambda_l \sum_i (\operatorname{grad}_i f_l, \vec{ds}_i) + \sum_j \mu_j \sum_i (\operatorname{q grad}_i \varphi_j, \vec{ds}_i),$$

а на основу (3) и (4) је

$$\sum_i (\operatorname{grad}_i f_l, \vec{ds}_i) = -\frac{\partial f_l}{\partial t} dt ,$$

$$\sum_i (\operatorname{q grad} \varphi_j, \vec{ds}_i) = - D_j \, dt ,$$

можемо написати

$$\sum_i (\vec{R}_i, \vec{ds}_i) = - \sum_l \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial t} dt - \sum_j \mu_j D_j \, dt .$$

Према томе закон живе силе можемо изразити у облику

$$dT = \sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) - \sum_l \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial t} dt - \sum_j \mu_j D_j \, dt .$$

Ако су све коначне везе склерономне, тј.

$$\frac{\partial f_l}{\partial t} = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 ,$$

а диференцијалне хомогене

$$D_j = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2$$

рад реакција таквих веза једнак је нули и закон живе силе садржи само рад активних сила

$$dT = \sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) .$$

Овој једначини одговара закон живе силе у интегралном облику

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) .$$

Приметимо да се како овде, тако и у општем случају, у једначини (2), интеграли десне стране могу израчунати само у случају кад је кретање познато.

§ 4·6. Интеграл живе силе

Претпоставимо да су коначне везе материјалног система склерономне, тј. задовољавају услове

(1) $$\frac{\partial f_l}{\partial t}=0, \qquad l=1, 2, \ldots, k_1,$$

а диференцијалне линеарне и хомогене, тј.

(2) $$D_j=0, \qquad j=1, 2, \ldots, k_2$$

тада, како смо видели у претходном параграфу, закон живе силе даје

(3) $$dT=\sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i).$$

Претпоставимо још да силе, које дејствују на систем, имају *функцију сила*. То значи да постоји функција положаја тачака система такве природе да су све активне силе $\vec{F}_i$, које дејствују на тачке система, делимични градијенти те функције по вектору положаја односне тачке. Ако ту функцију означимо са U, тј. ставимо

$$U=U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n),$$

свака сила $\vec{F}_i$ има вредност

(4) $$\vec{F}_i=\mathrm{grad}_i\, U.$$

Последњој векторској једначини одговарају ове скаларне једначине

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

За такве силе биће њихов рад на елементарним померањима тотални диференцијал функције U, тј.

(5) $$\sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i)=dU.$$

Заиста, непосредни рачун даје

$$\sum_i (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) = \sum_i (\mathrm{grad}_i\, U, \vec{ds}_i) = dU.$$

Овај резултат може се потврдити и аналитички, јер је

$$\sum_i (\mathrm{grad}_i\, U, \vec{ds}_i) = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} dz_i \right) = dU.$$

Ако искористимо вредност (5) за рад спољашњих сила, из (3) добијамо

$$dT = dU,$$

а одавде непосредно следује интеграл

$$T = U + h,$$

где је h произвољна константа. Тај интеграл зове се *интеграл живе силе.*

Интегралу живе силе можемо дати и друге форме.

Ако место функције U уведемо функцију супротног знака

$$\Pi = -U,$$

која се зове *потенцијал сила,* интеграл живе силе даје

$$T + \Pi = h. \tag{6}$$

Жива сила система зове се друкчије *кинетичка енергија* система, а потенцијал сила је *потенцијална енергија.* Претходна једначина изражава сталност збира кинетичке и потенцијалне енергије.

Ако са T_0 означимо кинетичку енергију у почетку кретања и са Π_0 потенцијалну енергију за исти тренутак, из (6) изводимо

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Збир кинетичке и потенцијалне енергије зове се *тотална енергија,* тачније тотална механичка енергија материјалног система. Ако тоталну енергију означимо са E, тј. ставимо

$$T + \Pi = E,$$

интеграл живе силе добија облик

$$E = E_0 = \mathrm{const.}$$

и изражава *интеграл* или *закон одржавања механичке енергије.*

Материјални системи, чије се кретање врши у сагласности са законом одржавања енергије, зову се *конзервативни системи.*

Да систем буде конзервативан треба да буду испуњени ови услови:

1. Коначне везе не зависе од времена. Тај услов стоји у вези с тим да спољашње масе, које остварују механизме коначних веза, треба да буду непокретне.

2. Диференцијалне везе треба да буду хомогене. Али како сам то показао[1]), оне могу зависити од времена.

3. Спољашње силе, које дејствују на систем, треба да имају функцију сила односно потенцијал, који не зависи од времена.

§ 4·61. Лагранжеве једначине за системе са потенцијалом сила. Случај конзервативних система

У проучавању кретања холономног система са независним генералисаним координатама q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ можемо искористити Лагранжеве једначине друге врсте

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\,; \qquad i=1, 2, \ldots, n\,.$$

У случају кад су коначне везе склерономне, жива сила T је хомогена функција генералисаних брзина q_i' $(i=1, 2, \ldots, n)$ и за њу важи Ајлерова теорема

$$(2)\qquad 2T=\sum_i\frac{\partial T}{\partial q_i'}q_i'\,.$$

Генералисане силе Q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ су коефицијенти уз dq_i у изразу за елементаран рад спољашњих активних сила, које дејствују на тачке материјалног система, чији број означимо овде са N, дакле

$$(3)\qquad \sum_{\nu}^{N}(\vec{F}_\nu, \vec{ds}_\nu)=\sum_i Q_i\,dq_i\,.$$

[1]) Sur les systèmes conservatifs non holonomes avec des liaisons dépendantes du temps. Comptes Rendus. t. 156. Paris. 1913.

Покажимо пре свега да, ако силе $\vec{F}_\nu$ имају функцију сила као функцију положаја тачака $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$, генералисане силе Q_i исто тако имају функцију сила, при чему под тим треба разумети да је свака генералисана сила Q_i делимични извод функције $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ по односној генералисаној координати.

Заиста, ако трансформишемо леву страну једначине (3)

$$\sum_\nu^N (\vec{F}_\nu, \vec{ds}_\nu) = \sum_\nu^N (X_\nu\, dx_\nu + Y_\nu\, dy_\nu + Z_\nu\, dz_\nu) =$$

$$= \sum_\nu^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) =$$

$$= \sum_\nu^N \left[\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \left(\sum_i^n \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} \left(\sum_i^n \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} dq_i \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \left(\sum_i^n \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \partial q_i \right) \right] =$$

$$= \sum_i^n \left[\sum_\nu^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right) \right] dq_i =$$

$$= \sum_i^n \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i ,$$

онда после упоређивања са десном страном (3) имамо

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} .$$

Приметимо да ова особина функције сила важи и у оном случају кад ова функција садржи као параметар, време t, јер при извођењу горње трансформације није била коришћена једначина

$$\sum_\nu^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \partial z_\nu \right) = dU ,$$

која важи само за случај кад U не зависи од времена. У тој трансформацији смо искористили само претпоставку да једначине које изражавају координате x_ν, y_ν, z_ν у функцији координата q_i зависне од времена.

Ако претпоставимо да генералисане силе Q_i имају функцију сила, која може зависити и од времена, Лагранжеве једначине (1) добијају облик

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{4}
$$

Ако уведемо функцију

$$
L=T+U
$$

и обратимо пажњу да је

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i'}=\frac{\partial T}{\partial q_i'},
$$

јер функција U не зависи од брзина, претходне једначине изгледају

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{5}
$$

Функција L, коју можемо изразити и разликом

$$
L=T-\Pi
$$

кинетичке и потенцијалне енергије, зове се *кинетички потенцијал* или *Лагранжева функција*.

Сем функције L уведимо још функцију

$$
E=T-U,
$$

тоталну енергију система, и докажимо да она на основу једначина (4) односно (5) задовољава једначину

$$
\frac{dE}{dt}=\frac{\partial E}{\partial t} \tag{6}
$$

и то у случају кад функција U зависи експлицитно од времена.

Заиста, диференцирајмо E по времену

$$
\frac{dE}{dt}=\frac{dT}{dt}-\frac{dU}{dt}=\frac{dT}{dt}-\sum_i\frac{\partial U}{\partial q_i}q_i'-\frac{\partial U}{\partial t} \tag{7}
$$

и ставимо вредност извода dT/dt.

Тај извод рачунамо на овај начин. Прво из једначине (2) после диференцирања добијамо

$$2\frac{dT}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\cdot q_i'+\sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i}\cdot q_i'',$$

а са друге стране непосредно диференцирање даје

$$\frac{dT}{dt}=\sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'}q_i''+\sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i}q_i'\,.$$

Одузимањем друге једначине од прве добијамо

$$\frac{dT}{dt}=\sum_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)q_i'\,.$$

Ако ову вредност извода ставимо у (7), долазимо до резултата

$$\frac{dE}{dt}=\sum_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)q_i'-\frac{\partial U}{\partial t},$$

који на основу једначина (4) доводи до једначине

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial t}$$

а како је

$$-\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial E}{\partial t},$$

јер жива сила не зависи експлицитно од времена, добијамо дефинитивно тражену једначину (6).

Ако функција сила U не зависи експлицитно од времена, функција E задовољава услов

$$\frac{\partial E}{\partial t}=0\,.$$

Једначина (6) доводи до интеграла

$$E=T-U=\text{const.}$$

Како у овом случају можемо увести потенцијалну енергију

$$\Pi=-U\,,$$

која, као енергија положаја зависи само од координата система и не зависи експлицитно од времена, претходни интеграл није ништа друго до интеграл одржања тоталне механичке енергије система

$$E=T+\Pi=\text{const.}=E_0\,.$$

§ 4·62. Јакобијеве једначине за конзервативне системе

У случају конзервативног система Лагранжева функција L не зависи експлицитно од времена. У једначине (5) претходног параграфа време улази само помоћу диференцијала dt и према томе може се искључити из тих једначина. Сем тога, једначине (5) имају интеграл живе силе, који ћемо написати

(1) $$T = U + h,$$

где је h, као и раније, почетна тотална енергија система. У овом случају може се саставити систем диференцијалних једначина другога реда њих $n - 1$ на броју и тиме свести проблем $2n$-ог реда на проблем $2n - 2$-ог реда.

У том циљу узмимо за независно промењиву једну од независних координата система. За такву координату можемо изабрати ма коју од независних координата само под условом да једном од интеграла Лагранжевих једначина не одговара сталност изабране координате. Означимо ту координату са q_1, а остале за систем са n степена слободе са

(2) $$q_2, q_3, \ldots, q_n.$$

Координате (2) можемо сматрати као функције координате q_1, а ову последњу као функцију времена. Изводе координата (2) по координати q_1 означаваћемо са

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dq_1} = \frac{q_j'}{q_1'}. \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Пошто је жива сила хомогена квадратна функција генералисаних брзина, можемо ставити

(3) $$T = q_1'^2 G,$$

где G може бити функција само од координата $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и извода $\dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_n$.

Ако искористимо (3), интеграл живе силе (1) даје

$$q_1'^2 G = U + h,$$

одакле имамо једначину

$$q_1' = \pm \sqrt{\frac{U + h}{G}},$$

која доводи до квадратуре

$$dt = \pm \sqrt{\frac{G}{U+h}}\, dq_1$$

за увођење времена после одређивања свих координата (2) у функцији координате q_1. Питање двоструког знака решавају почетни услови.

Узмимо сад $n-1$ Лагранжеву једначину

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{4}$$

и елиминишемо из њих време.

Према правилима за диференцирање у случају смене променљиве имамо

$$\frac{\partial T}{\partial q_j'} = \frac{\partial}{\partial q_j'}(q_1'^2 G) = q_1'^2 \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{1}{q_1'} = q_1' \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} = \pm \sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(q_1'^2 G) = q_1'^2 \frac{\partial G}{\partial q_j} = \frac{U+h}{G}\frac{\partial G}{\partial q_j}.$$

Уведимо сада *Јакобијеву функцију*

$$P = \sqrt{G(U+h)},$$

диференцирањем те функције имамо

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j},$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{\partial G}{\partial q_j} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{U+h}} \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

После упоређивања ових резултата са претходним изводимо ове обрасце

$$\frac{\partial T}{\partial q_j'} = \pm 2 \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 2\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{\partial P}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} = \pm 2 q_1' \frac{\partial P}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

На основу ових образаца из једначина (4) добијемо прво једначине у облику

$$\pm \frac{d}{dt} 2 \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} \mp 2 q_1' \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n,$$

које непосредно доводе до *Јакобијевих једначина*

$$\frac{d}{dq}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial P}{\partial q_j}=0, \qquad j=2, 3, \ldots, n,$$

које су формално сличне Лагранжевим једначинама (6) § 4·61, али, прво, место Лагранжеве функције стоји Јакобијева функција и, друго, време је замењено једном од координата система. После интеграције ових једначина, квадратуре за увођење времена и узимања у обзир интеграла живе силе, треба сматрати проблем о кретању система као решен.

Јасно је да се Јакобијеве једначине могу сматрати као диференцијалне једначине трајекторија конзервативног система.

Приметимо да је практична употреба Јакобијевих једначина скопчана са аналитичким тешкоћама због компликованости Јакобијеве функције. Како сам показао [1]) ирационалност се лако може искључити, али тада једначине губе свој једноставни облик.

§ 4·7. Силе отпора са дисипативном функцијом

Силе отпора, које дејствују на масе материјалног система, могу бити различите по својој природи. Закони по којима дејствују те силе у различитим конкретним случајевима утврђују експерименти. Из експерименталних података се изводи математичка форма тих закона. Са том формом се силе отпора уводе у тачна расуђивања рационалне механике. У овом параграфу се зауставимо на оним отпорним силама које су линеарне, и то хомогене, функције од брзина тачака, а сем тога те функције задовољавају одређене услове.

Замислимо да је систем холономан са n степена слободе, са координатама $q_1, q_2, \ldots, q_n$, да коначне везе не зависе од времена и да генералисане силе имају функцију сила $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ која исто тако не зависи од времена. Диференцијалне једначине кретања таквог материјалног система, а под условом да на њега дејствују силе отпора могу се изразити

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}-P_i$$

---

[1]) 1. Die Bewegungsgleichungen konservativer Systeme mit linearen Bewegungsintegralen. Mathematische Annalen. B. 69. Leipzig. 1910.

2. Уравненія движенія для консервативнихъ системъ и ихъ приложенія. Кіев. 1912.

где је: T жива сила система и $-P_i$ односна *генералисана отпорна сила*, при чему производ

$$-P_i\,\delta q_i$$

изражава рад отпорних сила на оном елементарном померању система, кад се мења само координата q_i за δq_i.

Претпоставимо сад да је P_i хомогена линеарна функција генералисаних брзина, тј.

$$P_i=\sum_{j=1}^{n}\pi_{ij}\,q_j', \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

где су π_{ij} функције координата, па често пута чак и константе. Под условима

$$(1) \qquad \pi_{ij}=\pi_{ji} \qquad i,\,j=1,2,\ldots,n,$$

постоји квадратна функција

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_{ij}\,q_i'\,q_j'=\frac{1}{2}\,(\pi_{11}\,q_1'^2+2\pi_{12}\,q_1'\,q_2'+\ldots),$$

за коју је

$$\frac{\partial V}{\partial q_i'}=P_i, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Функција V, аналогна по форми живој сили, зове се *Релијева* (Rayleigh) *дисипативна функција* или *функција расипања.*

Диференцијалне једначине кретања у случају постојања дисипативне функције изгледају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i'}, \qquad [i=1,2,\ldots,n.$$

Изведимо сад из ових једначина једначину аналогну закону односно интегралу живе силе. Ако сваку од ових једначина помножимо са q_i' и резултате саберемо добићемо

$$\sum_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)q_i'-\sum_i\frac{\partial T}{\partial q_i}q_i'=\sum_i\frac{\partial U}{\partial q_i}q_i'-\sum_i\frac{\partial V}{\partial q_i'}q_i'.$$

После познатих трансформација, изведених у детаљима у § 4·61, из написане једначине изводимо

$$(2) \qquad \frac{dE}{dt}=-2V,$$

где је E тотална енергија система, тј. збир кинетичке и потенцијалне енергије

$$E = T - U = T + \Pi ,$$

а последњи сабирак на десној страни заменили смо на основу особине хомогене функције

$$2V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i'} q_i' .$$

Ако претпоставимо да су коефицијенти (1) такви да је квадратна форма V увек позитивна, тада једначина 2 тврди да под утицајем отпорних сила тотална енергија система опада. Коначни губитак енергије за размак времена од t_0 до t_1 се изражава једначином

$$E_1 - E_0 = -2 \int_{t_0}^{t_1} V\, dt .$$

Величина $-2V$ показује *брзину опадања енергије* у току времена, а десна страна претходне једначине одређује целокупни губитак енергије за интервал времена $t_1 - t_0$.

§ 4·8. Лагранжеве једначине за силе општег карактера

Као допуну проучавања Лагранжевих једначина после увођења нарочитих сила отпора, које имају дисипативну функцију, саставимо диференцијалне једначине кретања холономног система у случају дејства сила најопштијег карактера.

Нека су, као увек, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ независне координате система, T жива сила система која у случају реономних веза, тј. зависних од времена али коначних, може садржати у својим коефицијентима сем координата и време и бити квадратна функција општег карактера, тј. садржати не само квадратне чланове већ и чланове првог степена и члан независан од брзина.

Претпоставимо даље да се активне силе, које зависе од положаја, а у општем случају и од времена, у својој генералисаној форми Q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ могу раздвојити на генералисане силе које имају функцију сила $U = U\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ и на силе које немају потенцијала. Ако ове друге генералисане силе означимо са Q_i^* $(i=1, 2, \ldots, n)$, имамо

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^* .$$

Најзад можемо и силе отпора, нарочито онај део који зависи од брзина рашчланити на силе које се изражавају помоћу дисипативне функције V и силе отпора које у ту категорију не спадају. Према томе силе отпора можемо изразити у облику

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i'} - P_i^* ,$$

где су ознаке очигледне.

Узимајући у обзир све наведене изразе за силе, које могу дејствовати на масе система, можемо написати Лагранжеве једначине у облику:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^* - \frac{\partial V}{\partial q_i'} - P_i^* ,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n .$$

Приметимо да наведена аналитичка подела сила, које дејствују на материјални систем, нема јединствен и обавезан карактер; тако, на пр., константна генералисана сила, која може ући у сваку од четири категорије, рецимо, и у силе са потенцијалом и у силе са дисипативном функцијом, треба да се распореди према механичкој природи самог проблема и према оној улози коју игра таква сила у датом проблему.

§ 4·9. Диференцијалне једначине кретања за системе са линеарним интегралима. Случај цикличних координата

Нека су q_s $(s=1, 2, \ldots, n+k)$ независне генералисане координате материјалног система, T жива сила система и U функција сила. Систем Лагранжевих једначина гласи

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n+k. \tag{1}$$

Претпоставимо да тај систем једначина има k интеграла линеарних у односу на генералисане брзине. Изразимо ове интеграле

$$(2) \qquad q'_{n+\nu} = \sum_i a_{\nu i}\, q_i' + a_\nu\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k\,,$$

где су $a_{\nu i}$ и a_ν функције координата, времена и произвољних констаната. *Брзине* $q'_{n+\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ су *зависне*, а остале q_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *независне*.

Помоћу интеграла (2) из једначина (1) могу се искључити зависне брзине $q'_{n+\nu}$ и зависна убрзања $q''_{n+\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ и тада ће проблем о кретању система бити сведен на интеграцију система од n једначина из (1) другога реда и на k једначина (2) првога реда. Једначине другога реда могу се добити овим путем.

Искључимо зависне брзине из живе силе

$$T\,(q_s\,,\, q_s') = \Theta\,(q_s\,,\, q_i')\,, \qquad s = 1, 2, \ldots, n+k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

и израчунајмо

$$(3) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial q_i'} + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} \frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_i'}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial q_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} \frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_s}\,, \qquad s = 1, 2, \ldots, n+k\,.$$

Једначине (1) поделимо у две групе

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} - \frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_{n+\nu}} = 0\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Заменом (3) и (4) из једначине (5) добијамо

$$(7) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_i'} - \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} \frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} \frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0\,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

После елиминисања зависних брзина из импулса

$$\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} = \theta_\mu\,(q_s\,,\, q_i') \qquad s = 1, 2, \ldots, n+k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

а с обзиром на (б) претходне једначине дају тражене једначине другога реда:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q_i'}-\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_i}-\sum_\nu\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_{n+\nu}}\frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_i'}-$$

$$-\sum_\mu\theta_\mu\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q'_i}-\frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i}-\sum_\nu\frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+\nu}}\frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q'_i}\right)=0.$$

$$i=1,2,\ldots,n.$$

После извршених операција ове једначине можемо дефинитивно написати

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q_i'}=\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_i}+\sum_\nu\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_{n+\nu}}a_{\nu i}+ \tag{8}$$

$$\sum_\nu\theta_\nu\left(\sum_j A_{ij}^{(\nu)}q_j'+A_i^{(\nu)}\right),$$

где је

$$A_{ij}^{(\nu)}=\left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j}+\sum_\mu\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_{n+\mu}}a_{\mu j}\right)-\left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i}+\sum_\mu\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_{n+\mu}}a_{\mu i}\right),$$

$$A_i^{(\nu)}=\left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial t}+\sum_\mu\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_{n+\mu}}a_\mu\right)-\left(\frac{\partial a_\nu}{\partial q_i}+\sum_\mu\frac{\partial a_\nu}{\partial q_{n+\mu}}a_{\mu i}\right).$$

$$i,j=1,2,\ldots,n;\quad \nu,\mu=1,2,\ldots,k.$$

Написане једначине (8) припадају П. В. Воронцу, који их је применио на више механичких проблема.

Интеграција система једначина (8) и (2) решава проблем о кретању материјалног система.

Ако је систем конзервативан, могу се написати једначине у којим нема више диференцијала времена и тиме проблем интеграције диференцијалних једначина кретања снизити још за две јединице.

Зауставимо се сад на случају цикличних координата. Како знамо, ако ни жива сила ни функција сила не зависе од неке генералисане координате, координата се зове *циклична*. Претпоставимо да систем са $n+k$ степена слободе има k цикличних координата

$$q_{n+1},\ q_{n+2},\ldots,\ q_{n+k}. \tag{9}$$

Непосредно из Лагранжевих једначина следује да свакој цикличној координати одговара интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}} = \theta_\nu = \Gamma_\nu\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k \tag{10}$$

где је Γ_ν произвољна константа интеграције. Такви интеграли су линеарни у односу на генералисане брзине и према томе у овом случају можемо искористити претходна расуђивања.

Како у овом случају цикличне координате (9) уопште не улазе у једначине (5), елиминисањем зависних брзина и убрзања из њих добићемо систем од n диференцијалних једначина другога реда само за одређивање променљивих q_1, $q_2, \ldots, q_n$. После одређивања тих координата у функцији времена цикличне координате се одређују из једначина (10) написаних у облику (2) помоћу k квадратура.

Систем једначина другога рада непосредно следује из једначина (7). Ако заменимо импулсе (10) са константама Γ_ν и уведемо функцију

$$T_1 = T - \sum_\nu \Gamma_\nu\, q'_{n+\nu}\,,$$

при чему и живу силу T и брзине $q'_{n+\nu}$ изразимо помоћу независних брзина из (10) у облику (2), једначине (7) добијају облик

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_i'} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ове једначине спадају у Routh-ове једначине, чији систем ћемо навести у идућој глави.

Ако је систем конзервативан, из ових се једначина такође може елиминисати диференцијал времена и тиме снизити ред проблема још за две јединице.

ГЛАВА ПЕТА

Канонични једначине Пфафова метода

§ 5·1. Линеарна диференцијална форма

Нека су

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

n независно променљивих, а

(2) $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

исти број функција тих променљивих, тако да је

$$X_i = X_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и најзад

(3) $$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

n диференцијала променљивих (1).

Израз

(4) $$\Phi = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \cdots + X_n\, dx_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i,$$

који претставља линеарну хомогену функцију диференцијала (3), зове се *линеарна диференцијална фарма* од n променљивих, кратко, *Пфафов израз* или *Пфафијан* (J. F. Pfaff, 1765—1825).

Ако замислимо n-димензиони Еуклидов простор и величине (1) сматрамо као координате вектора $\vec{x}$ у том простору, а величине (2) као координате вектора $\vec{X}$, Пфафов израз (4) може се сматрати као скаларни производ вектора $\vec{X}$ и вектора $\vec{dx}$, тј.

$$\Phi = (\vec{X}, \vec{dx}),$$

где су округле заграде симбол скаларног производа. Вектор $\vec{X}$ са координатама $X_1, X_2, \ldots, X_n$ зваћемо *Пфафов вектор*.

§ 5·2. Појам чистог прираштаја линеарне диференцијалне форме. Чисти изводи и диференцијали

Уочимо линеарну диференцијалну форму, рецимо, од три променљиве x_1, x_2, x_3:

$$\Phi = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3,$$

где су X_1, X_2, X_3 функције тих променљивих.

Нека $\Delta x_1 = dx_1$ буде прираштај променљиве x_1. Проучимо односни прираштај форме Φ.

Пре свега, прираштај функције Φ се даје разликом

$$\Delta_1 \Phi = \Phi(x_1 + dx_1, x_2, x_3;\, dx_1, dx_2, dx_3) - \Phi(x_1, x_2, x_3;\, dx_1, dx_2, dx_3).$$

Тај прираштај можемо звати *делимични функционални прираштај форме Φ за променљиву x_1*. Линеарни део тог прираштаја има вредност

$$d_1 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\, dx_1$$

и претставља *делимични функционални диференцијал форме Φ за променљиву x_1*.

Али при проучавању оног прираштаја форме Φ, који одговара прираштају променљиве x_1, треба узети у обзир да та форма већ има члан

$$X_1(x_1, x_2, x_3)\, dx_1,$$

који, тако рећи, аутоматски уноси један прираштај пропорционалан dx_1 и то кад од вредности променљивих x_1, x_2, x_3 прелазимо на вредности $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$. Тај прираштај има вредност

$$\Delta_1' \Phi = [X_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - X_1(x_1, x_2, x_3)]\, dx_1$$

и можемо га звати *делимични сопствени прираштај форме Φ за променљиву* x_1. Његов линеарни део чија је вредност

$$d_1'\,\Phi = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1 = dX_1 \cdot dx_1$$

претставља *делимични сопствени диференцијал форме Φ за променљиву* x_1.

Разлику

$$\Delta_1^{\cdot}\,\Phi \overset{\text{def}}{=} \Delta_1\,\Phi - \Delta_1'\,\Phi$$

између функционалног и сопственог делимичног прираштаја зваћемо *делимични чист прираштај форме Φ за променљиву* x_1. Линеарни део тог прираштаја чија је вредност

$$d_1^{\cdot}\,\Phi = d_1\,\Phi - d_1'\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}dx_1 - dX_1 \cdot dx_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - dX_1\right)dx_1$$

претставља *чист диференцијал форме Φ за променљиву* x_1.

Ако поделимо претходни израз са dx_1 добићемо израз

$$\frac{\partial^{\cdot}\Phi}{\partial^{\cdot}x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - dX_1\,,$$

који ћемо звати *делимични чист извод форме Φ по променљивој* x_1. Јасно је да тај извод, са своје стране, претставља линеарну диференцијалну форму: заиста, после извршених операција имамо

$$\frac{\partial^{\cdot}\Phi}{\partial^{\cdot}x_1} = (0)\,dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)dx_2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right)dx_3\,.$$

На сличан начин можемо написати и два остала извода:

$$\frac{\partial^{\cdot}\Phi}{\partial^{\cdot}x_2} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)dx_1 + (0)\,dx_2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)dx_3\,,$$

$$\frac{\partial^{\cdot}\Phi}{\partial^{\cdot}x_3} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)dx_2 + (0)\,dx_3\,.$$

У општем случају форме

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i$$

која зависи од n променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са коефицијентима

$$X_i = X_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

функцијама тих променљивих, делимични чист извод за j'ту променљиву x_j можемо написати

$$\frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, dx_i\,,$$

где је

$$a_{ji} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\,.$$

У развијеном облику тај извод има вредност

$$\begin{aligned}\frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_j} &= \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \\ &+ \left(\frac{\partial X_{j-1}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_{j-1}}\right) dx_{j-1} + (0)\, dx_j + \left(\frac{\partial X_{j+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_{j+1}}\right) dx_{j+1} + \ldots + \\ &+ \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_{n-1}}\right) dx_{n-1} + \left(\frac{\partial X_n}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_n}\right) dx_n\,.\end{aligned}$$

Аналогно диференцијалним изразима у обичном диференцијалном рачуну од низа делимичних чистих извода

$$(1) \qquad \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_1}, \ \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_n}$$

можемо начинити низ *делимичних чистих диференцијала* са одговарајућим ознакама

$$(2) \qquad d_1\cdot\Phi = \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_1}\, dx_1, \quad d_2\cdot\Phi = \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_2}\, dx_2, \ \ldots, \ d_n\cdot\Phi = \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_n}\, dx_n\,.$$

Пошто је сваки делимични чист извод линеарна диференцијална форма, сваки делимични чист диференцијал је квадратна форма у односу на диференцијале $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Даље проширена аналогија са обичним диференцијалним рачуном доводи до појма *тоталног чистог диференцијала форме* Φ као збира свих делимичних диференцијала (2). Означимо га са $d\cdot\Phi$. Према томе имамо

$$(3) \qquad d\cdot\Phi = \sum_{i=1}^{n} d_i\cdot\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\cdot\Phi}{\partial\cdot x_i}\,dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} - dX_i\right) dx_i\,.$$

Покажимо сад да је тај збир идентично једнак нули. Заиста, сваком члану првог збира

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\,dx_j\,dx_i$$

одговара са супротним знаком члан другога збира

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\,dx_j\,dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\,dx_j\,dx_i$$

и преме томе можемо закључити да постоји идентичност

$$d\cdot\Phi = 0$$

и то без обзира на то да коефицијенти (1) тог диференцијала нису идентично једнаки нули. Према томе за концизнија претстављања и трансформације тих коефицијената и даље можемо да се служимо формама (3) тоталног чистог диференцијала.

Ако искористимо векторску интерпретацију, тај диференцијал можемо претставити

$$d\cdot\Phi = (\operatorname{grad}\Phi - d\vec{X},\ d\vec{s})\,,$$

где је grad Φ вектор са координатама

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Исти диференцијал можемо написати и овако

$$d\cdot\Phi = d\Phi - (d\vec{X},\ d\vec{s})\,.$$

Први члан десне разлике је *тотални функционални диференцијал* форме Φ, а други можемо сматрати као *тотални сопствени диференцијал* исте форме.

Најзад, ако уведемо још и појам *чистог извода дате линеарне диференцијалнс форме у датом правцу,* који је одређен косинусима углова правца одређеног диференцијалима dx_i

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \ldots, \frac{dx_n}{ds},$$

где је

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdot \cdot \cdot + dx_n^2$$

чист извод у том правцу има вредност

$$\frac{d \cdot \Phi}{d \cdot s} = \left(\operatorname{grad} \Phi, \frac{d\vec{s}}{ds} \right) - \left(d\vec{X}, \frac{d\vec{s}}{ds} \right),$$

где смо употребили, ради доследности, ознаку $d \cdot s = ds$; тај израз исто тако претставља неку модификацију форме коју изражава тотални чист диференцијал $d \cdot \Phi$.

§ 5·3. Пфафове једначине

Видели смо да је тотални чисти диференцијал форме Ф идентично једнак нули, али његови коефицијенти нису идентично једнаки нули. Поставимо сад услов да и сами коефицијенти тог диференцијала буду једнаки нули. Тада имамо једначине

$$\frac{\partial \cdot \Phi}{\partial \cdot \mathbf{x}_j} = 0,$$

које развијене изгледају овако

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - dX_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или, најзад, овако

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Написане једначине претстављају *први систем Пфафових једначина за форму* Φ.

У векторској форми се једначине (1) замењују једначином

$$d\vec{X} = \operatorname{grad} \Phi.$$

Тај резултат речима можемо изразити:

Први систем Пфафових једначина изражава да је тотални диференцијал Пфафовог вектора једнак градијенту одговарајућег Пфафовог израза.

У општем случају кад је Пфафов израз претстављен у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{k} (\vec{Z}_i, d\vec{z}_i) + \sum_{j=1}^{k_1} U_j \, du_j$$

са k вектора у N_1-димензионом простору и са k_1 скалара, за сваки вектор $\vec{z}_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ имамо векторску једначину

$$d\vec{Z}_i = \mathrm{grad}_{z_i} \Phi ,$$

где смо за $\mathrm{grad}_{z_i} \Phi$ означили делимични градијент Пфафовог израза у односу на вектор $\vec{z}_i$, а за сваки скалар u_j $(j=1,2,\ldots,k_1)$ скаларну једначину

$$d U_j = \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} , \qquad j=1,2,\ldots,k_1 .$$

§ 5·31. Инваријантност Пфафових једначина

Два Пфафова израза Φ и Θ од истих променљивих

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n$$

сматрамо као еквивалентна, ако су њихови системи Пфафових једначина еквивалентни. Еквивалентност Пфафових израза означаваћемо знаком $\approx$ и према томе писати

$$\Phi \approx \Theta .$$

У вези са еквивалентношћу Пфафових израза можемо пре свега навести ове теореме.

1. Два Пфафова израза су еквивалентна, ако се разликују тоталним диференцијалом ма које функције.

Заиста, ако узмемо два Пфафова израза: Φ и

$$(2) \qquad \Theta = \Phi + dF ,$$

где је F произвољна функција променљивих (1), подложна само услову да вредност других извода не зависи од реда диференцирања, величине

$$a_{ji} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

имају исте вредности за Φ и Θ, јер је додатак од dF у тим величинама

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}$$

идентично једнак нули. И према томе напоредо са (2) имамо

$$\Phi \approx \Phi + dF .$$

2. Два Пфафова израза су еквивалентна, ако се разликују сталним множитељем.

Заиста, два израза Φ и $k\Phi$, где је k константа, имају за коефицијенте у Пфафовим једначинама величине

$$a_{ji} \text{ и } k\,a_{ji}$$

а пошто су Пфафове једначине хомогене у односу на те коефицијенте, једначине за израз $k\Phi$ се скраћују са k и прелазе у систем једначина за Φ. Према томе је

$$\Phi \approx k\Phi .$$

Приметимо на основу теореме 1. сваки члан Пфафовог израза, рецимо облика $X_1\,dx_1$, можемо заменити са $-x_1\,dX_1$, јер Пфафов израз остаје еквивалентан, ако од њега одузмемо тотални диференцијал $d(X_1 x_1)$. На основу теореме 2. сваки Пфафов израз остаје еквивалентан, ако га скратимо сталним множитељем или му променимо знак.

Докажимо сада врло важну теорему која се односи на трансформацију променљивих код Пфафовог израза.

Ако место променљивих

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

уведемо нове променљиве

$$(3) \qquad y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$$

обрасцима

$$(4) \qquad x_i = x_i\,(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n), \qquad i=1,2,\ldots\, n,$$

а под условима да систем једначина (4) можемо решити по y_i, тако да имамо

$$(5) \qquad y_i = y_i\,(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n),$$

Пфафов израз

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i$$

се трансформише у нове променљиве и добива облик

$$\Phi = (\vec{X}, \vec{dx}) = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i\, dy_i = (\vec{Y}, \vec{dy})$$

где су $\vec{dy}$ и $\vec{Y}$ вектори са координатама

$$\vec{dy}\ (dy_1, dy_2, \ldots, dy_n),$$

$$\vec{Y}\ (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

при чему је

$$(6) \qquad Y_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \left(\vec{X}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

На тај начин имамо исти Пфафов израз претстављен у два облика

$$(7) \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i,$$

$$(8) \qquad \Phi^* = \sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda\, dy_\lambda.$$

Између величина X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и Y_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ сем веза (6), имамо такође везе

$$(9) \qquad X_i = \sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} = \left(\vec{Y}, \frac{\partial \vec{y}}{\partial x_i}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Саставимо сад Пфафове једначине прво за Пфафов израз (7), а затим за израз (8). Систем тих једначина за први израз изгледа овако

$$(10) \qquad dX_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

а за други

$$(11) \qquad dY_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial Y_\mu}{\partial y_\lambda} dy_\lambda = \frac{\partial}{\partial y_\mu} \Phi^* = \frac{\partial}{\partial y_\mu}\left(\sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda\, dy_\lambda\right), \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажимо сад теорему:

3. Системи Пфафових **једначина образовани** за полазни **и** за трансформисани Пфафов **израз еквивалентни су.**

За тај циљ покажимо да је **сваку једначину** из (10), **на пр.** прву, **могуће извести** као **закључак из једначина** (11).

Ако прву једначину напишемо овако

$$dX_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i\right),$$

онда је на основу (9) можемо **заменити једначином**

$$d\left(\sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\, dx_i\right).$$

Сад је потребно **показати** да је **ова једначина** закључак **из** једначина (11).

Ако извршимо показано **диференцирање** из **претходне једначине имамо**

$$\sum_{\lambda=1}^{n} dY_\lambda \cdot \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_1} + \sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda\, d\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial Y_\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\, dx_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i\, \partial x_1}\, dx_i .$$

Пошто је

$$\sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda\, d\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_1} = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Y_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i\, \partial x_1}\, dx_i$$

из претходне једначине следује

$$\text{(12)}\quad \sum_{\lambda=1}^{n} dY_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial Y_\lambda}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}\, dy_\nu ,$$

јер је

$$\frac{\partial Y_\lambda}{\partial x_1} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial Y_\lambda}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_1}$$

и

$$dx_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} dy_\nu .$$

Како је

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} = \begin{cases} 1 \text{ за } \lambda = \nu, \\ 0 \text{ за } \lambda \neq \nu, \end{cases}$$

то из једначине (12) имамо

$$\sum_{\lambda=1}^{n} dY_\lambda \cdot \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_1} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial Y_\lambda}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} dy_\lambda .$$

Ову једначину можемо написати и у облику

$$\sum_{\mu=1}^{n} dY_\mu \cdot \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_\mu} \left(\sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda dy_\lambda \right) \cdot \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} .$$

Пошто се ова једначина добива из система једначина (11) множењем сваке једначине тог система са $\dfrac{\partial y_\mu}{\partial x_1}$ и сабирањем резултата множења, то отуда следује да је прва једначина система (10) непосредни закључак система (11). То важи и за сваку другу једначину система (10). Обрнуто, свака једначина система (11) може ће извести из једначина система (10). Тиме је доказана еквивалентност једначина (10) и (11).

Према доказаној теореми, у случају прелаза на нове променљиве није потребно вршити трансформацију самих Пфафових једначина, већ је довољно трансформисати односни Пфафов израз и из њега познатим поступком добити нове Пфафове једначине. Ову особину треба сматрати као фундаменталну у Пфафовој методи.

§ 5·32. Интеграли Пфафових једначина

Ако је Пфафов израз

(1) $$\Phi = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_N dx_N$$

са

$$N = 2n + 1$$

промењљивих трансформисан на еквивалентан облик

$$\Phi = P_1\, d\,Q_1 + P_2\, d\,Q_2 + P_n\, d\,Q_n - d\,F, \tag{2}$$

где су P_i, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и F функције промењљивих

$$x_1, x_2, \ldots, x_N,$$

онда су једначине

$$P_i = \alpha_i, \quad Q_i = \beta_i$$

где су α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произвољне константе, интеграли Пфафових једначина израза (1).

Заиста, величине P_i, Q_i, F $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можемо сматрати као нове промењљиве. За те промењљиве из (2) имамо Пфафове једначине у облику:

за промењљиве Q_i: $\quad d\,P_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial Q_i} = 0,$

„ „ P_i: $\quad d0 = 0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial P_i} = d\,Q_i,$

„ промењљиву F: $\quad d(-1) = 0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial F} = 0,$

одакле непосредно следују наведени интеграли.

§ 5·4. Каноничне једначине

Претпоставимо да је Пфафов израз дат у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - Hdt, \tag{1}$$

где су p_i, q_i, t $(i = 1, 2, \ldots, n)$ нове промењљиве и H је функција тих промењљивих, и саставимо Пфафове једначине. Према познатом поступку имамо:

$$dp_i = \frac{\partial}{\partial q_i}(-Hdt), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$d0 = 0 = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - Hdt\right) = dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$d(-H) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - Hdt\right).$$

Прве и друге једначине дају једначине

$$
\left.
\begin{aligned}
&(2) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\
&(3) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},
\end{aligned}
\right\} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

а трећа једначина се на основу претходних претвара у идентичност. Заиста, на левој страни је

$$
\begin{aligned}
d(-H) &= -\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\, dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\, dq_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt\right] = \\
&= -\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}\,\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) dt + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt\right] = \\
&= -\frac{\partial H}{\partial t}\, dt,
\end{aligned}
$$

а ту исту вредност има и десна страна

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt\right) = -\frac{\partial H}{\partial t}\, dt.
$$

Диференцијалне једначине у облику (2) и (3) зову се *каноничне једначине*.

Нарочите особине каноничних једначина састоје се у овом:

1. Каноничне једначине садрже само изводе првог реда по независној промењљивој.

2. Каноничне једначине су решене у односу на прве изводе.

3. Каноничне једначине зависе само од једне функције

$$
H = H(p_1, p_2, \ldots, p_n;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ t),
$$

која се зове *Хамилтонова функција*.

Последња особина је врло важна и врло карактеристична за каноничне једначине. Природу каноничних једначина одређује природа само једне функције H.

§ 5·41. Интеграли каноничних једначина

1. Ако функција H не зависи експлицитно од времена, каноничне једначине (2) и (3) претходног параграфа имају интеграл

$$H = h,$$

где је h произвољна константа интеграције. Заиста, на основу каноничних једначина имамо

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(- \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dt \equiv 0 .$$

2. Ако функција H не зависи ма од које координате, на пр. од координате q_1, тј.

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0,$$

систем каноничних једначина има очевидан интеграл

$$p_1 = \text{const.}$$

Координата q_1 игра улогу *цикличне координате.*

3. Ако форма

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - Hdt \tag{1}$$

после прелаза на нове координате w_j, J_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, које су везане са старим једначинама

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \ (w_j, J_j), \\ q_i &= q_i \ (w_j, J_j), \end{aligned} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

добија облик

$$\sum_{i=1}^{n} J_i \, dw_i - Kdt , \tag{2}$$

где функција K зависи само од променљивих $J_1, J_2, \ldots J_n$. Пфафове једначине за форму (2) изгледају овако

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial w_i} = 0 ,$$

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial J_i} .$$

Из првих једначина следује

$$J_i = \text{const.} = c_i ,$$

где су c_i произвољне константе интеграције; после тога из других једначина закључујемо да због једначина

$$\frac{\partial K}{\partial J_i} = f(J_1, J_2, \ldots, J_n) = \text{const.} = \omega_i ,$$

где су ω_i константе, али нису произвољне, имамо интеграле

$$w_i = \omega_i t + \alpha_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

са новим произвољним константама α_i.

На основу добијених једначина долазимо до резултата да каноничне једначине форме (1) имају ове интеграле

$$p_i = p_i (\omega_j t + \alpha_j , c_j) ,$$

$$q_i = q_i (\omega_j t + \alpha_j , c_j) .$$

Променљиве w_j и J_j имају нарочите називе: w_j, како смо навели, то су *цикличне* или *угаоне променљиве* односно *координате*, а J_j су *променљиве акције* или *дејства*. Пфафов израз у облику (2) је *циклично-акциони израз*. Из претходног следује да трансформација Пфафовог израза на циклично-акциони облик решава питање интеграције Пфафових једначина. Често пута се функције p_i и q_i јављају као периодичне функције променљиве t и то помоћу аргумента $\omega_i t + \alpha_i$. Период, у вези са сваком од тих функција, има вредност

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \text{fonct.} (c_i) .$$

Учинимо још једну примедбу. Ако функција K има облик

$$K = K(w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_n ; J_1, J_2, \ldots, J_n),$$

тј. не зависи само од једног дела променљивих w_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, тим цикличним координатама одговарају интеграли

$$J_1 = c_1 , J_2 = c_2 , \ldots , J_k = c_k .$$

Саме промењиве $w_1, w_2, \ldots, w_k$ могу се одредити квадратурама

$$w_i = \int \frac{\partial K}{\partial J_i} dt + \alpha_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

после одређивања осталих промењивих, које улазе у подинтегралне функције, у функцији промењиве t.

§ 5·5. Диференцијалне једначине кретања материјалног система као Пфафове једначине

Претпоставимо да силе које дејствују на систем имају функцију сила U.

1. У случају слободног материјалног система диференцијалне једначине кретања тог система биће

$$(1) \qquad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \mathrm{grad}_{\vec{r}_i} U , \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

где су, као и раније, m_i маса i'те тачке, $\vec{r}_i$ вектор положаја те тачке у односу на непокретни пол и $\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} U$ делимични градијент функције U за вектор положаја $\vec{r}_i$.

Ако уведемо живу силу система T помоћу обрасца

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\vec{r}}_i , \dot{\vec{r}}_i) ,$$

можемо закључити да је

$$m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{p}_i = \mathrm{grad}_{\dot{\vec{r}}_i} T .$$

Вектор $\vec{p}_i$, како знамо, зове се *импулс* дате *покретне тачке*. Ако живу силу изразимо помоћу импулса, можемо написати

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \vec{p}_i^{\,2} .$$

Из ове једначине следи да је

$$\mathrm{grad}_{\vec{p}_i} T = \frac{1}{m_i} \vec{p}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

$$(2) \qquad \dot{\vec{p}}_i = \mathrm{grad}_{\vec{r}_i} U , \qquad \dot{\vec{r}}_i = \mathrm{grad}_{\vec{p}_i} T .$$

Уведимо сада функцију

$$H = T - U$$

при чему у нашем случају функција T не зависи од $\vec{r}_i$ и функција U не зависи од $\vec{p}_i$, тј.

$$\operatorname{grad}_{r_i} T = 0, \qquad \operatorname{grad}_{p_i} U = 0.$$

На основу ових једначина једначине (2) можемо заменити једначинама

$$\dot{p}_i = -\operatorname{grad}_{r_i} H, \qquad \dot{r}_i = \operatorname{grad}_{p_i} H.$$

Ове једначине могу се сматрати као Пфафове једначине које одговарају форми

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (\vec{p}_i, d\vec{r}_i) - H dt. \tag{3}$$

Написани Пфафијан одговара проблему кретања слободног материјалног система под утицајем сила, које имају функцију сила.

За писање диференцијалних једначина кретања таквог система за ма које друге координате довољно је трансформисати Пфафијан (3) на те координате и помоћу трансформисаног Пфафијана написати нове Пфафове једначине — оне ће бити нове диференцијалне једначине кретања нашег материјалног система.

Тако у случају прелаза на произвољне координате

$$q_1, \ldots, q_N, \qquad N = 3n, \tag{4}$$

збир

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{p}_i, d\vec{r}_i)$$

можемо трансформисати овако

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{p}_i, d\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i' dx_i + y_i' dy_i + z_i' dz_i) = \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 dt = 2T dt.$$

Са друге стране, ако координате

$$x_i, y_i, z_i$$

сматрамо као функције промењљивих (4) и једначине трансформације не садрже време, жива сила T биће поново квадратна форма генералисаних брзина q_i' ($i=1, 2, \ldots, N$) и зато на основу Ајлерове теореме можемо ставити

$$2T = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} q'_\sigma$$

Упоређивањем са (5) долазимо до резултата

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{p}_i, d\vec{r}_i) = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} dq_\sigma .$$

Ако $\dfrac{\partial T}{\partial q'_\sigma}$, линеарну функцију генералисаних брзина, означимо са p_σ, можемо дефинитивно написати

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{p}_i, d\vec{r}_i) = \sum_{\sigma=1}^{N} p_\sigma \, dq_\sigma .$$

Величина

$$p_\sigma = \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma}$$

зове се *генералисани импулс.*

После наведене трансформације Пфафијан (3) треба заменити са

$$\sum_{\sigma=1}^{N} p_\sigma \, dq_\sigma - H\, dt , \tag{6}$$

при чему у функцији

$$H = T - U$$

треба живу силу изразити помоћу генералисаних импулса p_σ и функцију сила U помоћу генералисаних координата (4).

Пфафове једначине, које одговарају форми (6) имају канонички облик

$$\frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}, \qquad \frac{dq_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, N.$$

Ако Пфафијан (3) трансформишемо само на нове координате (4) али нећемо уводити генералисане импулсе, он ће изгледати

$$\sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} dq_\sigma - (T - U)\, dt .$$

Ако сада напишемо Пфафове једначине, које одговарају коефицијентима уз dq_σ, добићемо једначине

$$d \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} = \frac{\partial}{\partial q_\sigma} (T + U)\, dt, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, N \tag{7}$$

при чему смо поново искористили Ајлерову теорему у облику

$$\sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} dq_\sigma = 2\, T\, dt .$$

Ако једначине (7) напишемо у облику

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial U}{\partial q_\sigma}, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

видимо да оне не претстављају ништа друго већ Лагранжеве једначине друге врсте за слободни материјални систем под условом да генералисане силе имају функцију сила.

2. Ако је систем неслободан, рецимо, са N степена слободе, а на систем дејствују поново силе са функцијом сила, диференцијалне једначине кретања можемо узети поново у облику (8) Лагранжевих једначина друге врсте.

За те једначине односни Пфафијан треба написати у облику

$$\sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} dq_\sigma - H dt ,$$

где је

$$H = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q'_\sigma} q'_\sigma - T - U$$

при чему функција T може и да се не јавља као квадратна форма већ може бити и само квадратна функција од генералисаних брзина.

За коефицијент уз dq_σ Пфафова једначина изгледа овако

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left[\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q'_s}\,dq_s-Hdt\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left[\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,dq_s-\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,q_s'\,dt\right)+\left(T+U\right)dt\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\,(T+U)\,dt\,,$$

одакле поново долазимо до Лагранжевих једначина у облику (8).

Друга серија Пфафових једначина за промењиве q'_σ, чији диференцијали не учествују у Пфафијану биће

$$d\,0=\frac{\partial}{\partial q'_\sigma}\left[\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,dq_s-\left(\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q_s'}\,q_s'-T-U\right)dt\right].$$

Оне после извршеног диференцирања доводе до идентичности

$$0=\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q'_\sigma}\right)dt\,.$$

И у случају неслободног система можемо увести место генералисаних брзина генералисане импулсе помоћу образаца

$$p_\sigma=\frac{\partial T}{\partial q'_s}\,.$$

Пфафијан тада добија облик

$$\sum_{\sigma=1}^{N}p_\sigma\,dq_\sigma-Hdt$$

и доводи поново до каноничних једначина, али Хамилтонова функција у овом случају има облик

$$H=\sum_{\sigma=1}^{N}p_\sigma\,q'_\sigma-T-U\,,$$

при чему и генералисану брзину и живу силу система треба изразити помоћу генералисаних импулса.

§ 5·51. Routh'ове једначине

Показали смо како, помоћу Пфафовог израза, можемо написати диференцијалне једначине кретања материјалног система с једне стране, у каноничном облику, с друге стране, у облику Лагранжевих једначина. Енглески математичар E. J. Routh написао је систем диференцијалних једначина кретања који се делимично, за једну групу координата, састоји од каноничних једначина, а делимично, за остале кооронинате, од Лагранжевих једначина. Изведимо тај систем једначина полазећи од одређеног Пфафовог израза.

Поделимо координате система у две групе. Координате прве групе означимо са

(1) $$w_1, w_2, \ldots, w_\nu$$

координате друге са

(2) $$q_1, q_2, \ldots, q_\mu,$$

при чему је збир $\mu + \nu = n$ број степена слободе система. Генералисане брзине за те координате означимо са w'_j $(j=1,2,\ldots,\nu)$, q'_i $(i=1,2,\ldots,\mu)$. Живу силу система изразимо као функцију

$$T = T\,(w_j\,,\; w'_j\,;\; q_i,\, q_i',\, t)\,,$$

па формирајмо једначине, и то само за координате (1),

$$\frac{\partial T}{\partial w'_j} = u_j$$

за увођење генералисаних импулса u_j $(j=1,2,\ldots,\nu)$. Помоћу тих једначина можемо генералисане брзине w'_j одредити као функције импулса u_j и после тога живу силу система претставити као функцију

$$T = T\,(w_j\,,\; u_j\,,\; q_i\,,\; q'_i\,,\; t)\,.$$

Помоћу те функције можемо саставити и Лагранжеву функцију

$$L = T + U\,,$$

где је U функција сила.

Саставимо сад према ранијим правилима Пфафов израз

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\nu} u_j\, dw_j + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, dq_i - \left(\sum_{j=1}^{\nu} u_j\, w'_j + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, q_i' - T - U\right) dt$$

који се после увођења ознаке

$$\sum_{j=1}^{\nu} u_j\, w_j' - T - U = -L + \sum_{j=1}^{\nu} u_j\, w_j' = R \tag{3}$$

може краће написати

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\nu} u_j\, dw_j + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, dq_i - \left(\sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, q_i' + R \right) dt\,.$$

Формирајмо сад Пфафове једначине и то:

1. за променљиве w_j

$$du_j = \frac{\partial \Phi}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\, \partial w_j}\, dq_i - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\, \partial w_j}\, dq_i - \frac{\partial R}{\partial w_j}\, dt,$$

одакле изводимо каноничне једначине

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial w_j}. \tag{4}$$

2. за променљиве u_j из

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = dw_j + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\, \partial u_j}\, dq_i - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i' \cdot \partial u_j}\, dq_j - \frac{\partial R}{\partial u_j}\, dt$$

имамо нове каноничне једначине

$$\frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial u_j}. \tag{5}$$

3. за променљиве q_i

$$d\,\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\, \partial q_i}\, dq_i - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\, \partial q_i}\, q_i'\, dt - \frac{\partial R}{\partial q_i}\, dt\,.$$

добијамо једначине

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_i'} + \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0,$$

а како из (3) следи

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i'}=\frac{\partial R}{\partial q_i'}$$

претходне једначине дају Лагранжеве једначине

$$(6)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_i'}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0$$

са функцијом R, која је заменила функцију L у обичним Лагранжевим једначинама.

4. најзад за променљиве q_k' имамо идентичности

$$0=\frac{\partial \Phi}{\partial q_k'}=\sum_{i=1}^{\mu}\frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\partial q_k'}dq_j-\sum_{i=1}^{\mu}\frac{\partial^2 T}{\partial q_i'\,\partial q_k'}dq_i-\frac{\partial T}{\partial q_k'}dt-\frac{\partial R}{\partial q_k'}dt,$$

јер је из (3)

$$\frac{\partial R}{\partial q'_k}=-\frac{\partial T}{\partial q'_k}.$$

Систем једначина (4), (5), (6) претставља Routh'ов систем једначина

$$\frac{du_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial w_j},\qquad \frac{dw_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial u_j},\qquad j=1,2,\ldots,\nu,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_i'}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0,\qquad i=1,2,\ldots,\mu.$$

§ 5·6. Теорија последњег фактора

Прво ћемо навести неколико помоћних ставова из теорије детерминаната и теорије трансформација.

I. Претпоставимо да од променљивих

$$(1)\qquad x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

прелазимо на нове променљиве

$$(2)\qquad y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n,$$

које су уведене једначинама

$$(3)\qquad y_i=y_i\,(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n),\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Означимо са Δ функционалну детерминанту (Јакобијан) те трансформације

(4) $$\Delta = \frac{\partial (y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)} .$$

Ако сматрамо променљиве (1) као функције променљивих (2), тј. изводимо из (3) једначине

(5) $$x_i = x_i (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

можемо увести нову функционалну детерминанту

(6) $$D = \frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \ldots, y_n)} .$$

Познати став теорије детерминаната тврди да је

(7) $$D . \Delta = 1 .$$

II. Изводи функција (3) по променљивим (1) и функција (5) по променљивим (2) везани су једначинама

(8) $$\sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \delta^k{}_j ,$$

где је $\delta^k{}_j$ Кронекеров симбол чије су вредности

$$\delta^k{}_j = 1 \quad \text{за } k = j ,$$

$$\delta^k{}_j = 0 \quad \text{за } k \neq j .$$

Из система једначина (8), које су линеарне у односу на $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$, следује да сваки такав извод има вредност

(9) $$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{1}{D} A_{ki}$$

где је A_{ki} минор детерминанте D, који одговара елементу $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_k}$, са знаком према положају тог елемента.

III. Да наведемо из теорије детерминаната још и израз за извод Јакобијана D по једној од променљивих (3).

Може се непосредним рачуном показати да је

$$(10) \qquad \frac{\partial D}{\partial y_j} = \sum_i \sum_k A_{ki} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \, \partial y_j} .$$

Ако детерминанту D претставимо

$$D = A_{11} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + A_{21} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \cdots + A_{n1} \frac{\partial x_1}{\partial y_n} = \sum_k A_{k1} \frac{\partial x_1}{\partial y_k}$$

и диференцирамо по y_j, добићемо две серије чланова

$$\frac{\partial D}{\partial y_j} = \sum_k A_{k1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_k \, \partial y_j} + \sum_k \frac{\partial x_1}{\partial y_k} \frac{\partial A_{k1}}{\partial y_j} .$$

Прва серија сачињава први ред збира (10) по i за $i = 1$, а у другој серији сваку субдетерминанту A_{k1} треба пре диференцирања развити по елементима друге врсте и тада ћемо видети да друга серија чланова доводи до збира

$$\sum_k A_{k2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_k \, \partial y_j} ,$$

који сачињава други збир у збиру (10) по i за $i = 2$. Ако применимо исти поступак и на остале субдетерминанте, добићемо све чланове десне стране обрасца (10) и само те чланове.

IV. Нека је дат систем диференцијалних једначина

$$(11) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt ,$$

где су X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дате функције промењљивих (1). Претпоставимо да је после трансформације (3), односно (4) тај систем прешао у систем

$$(12) \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \cdots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt .$$

Доказаћемо једначину

$$(13) \qquad \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{1}{D} \sum_i \frac{\partial (D Y_i)}{\partial y_i} ,$$

где је D функционална детерминанта (6).

Трансформишимо функције X_i на нове променљиве (2); пошто је

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j ,$$

после дељења са dt на основу (11) и (12) добијамо

$$X_i = \sum_j Y_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} .$$

Ако ову вредност за X_i унесемо у леву страну једначине (13), добићемо

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j Y_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \sum_i \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_j Y_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) =$$

$$(14) \qquad = \sum_i \sum_k \sum_j \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\left(Y_j \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_j \, \partial y_k} + \frac{\partial Y_j}{\partial y_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) .$$

Збирови проширени на други сабирак на основу (8) дају

$$\sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial y_j} .$$

За израчунавање првог збира

$$\sum_i \sum_k \sum_j \frac{\partial y_k}{\partial x_i} Y_j \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_j \, \partial y_k}$$

из (9) унесимо вредност извода $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ па добијамо

$$\frac{1}{D} \sum_j Y_j \sum_i \sum_k A_{ki} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_j \, \partial y_k} .$$

Искористимо сад једначину (10) и трансформишимо претходни израз на облик

$$\frac{1}{D} \sum_j Y_j \frac{\partial D}{\partial y_j} .$$

На основу добивених резултата из (14) имамо једначину

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{1}{D} \sum_j \left(D \frac{\partial Y_j}{\partial y_j} + Y_j \frac{\partial D}{\partial y_j}\right),$$

која дефинитивно доводи до резултата (13).

Пређимо сад на теорију последњег фактора.

Нека је дат систем диференцијалних једначина

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdot \cdot \cdot = \frac{dx_n}{X_n},$$

где су X_i $(i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n)$ функције променљивих (1). Потпуна интеграција тог система тражи $n-1$ интеграл, који постављају везе између променљивих (1) и произвољних констаната

$$c_1, c_2, \cdot \cdot \cdot, c_{n-1}.$$

Претпоставимо да је од тих тражених интеграла познато само њих $n-2$

$$(16) \qquad f_i(x_1, x_2, \cdot \cdot \cdot, x_n) = c_i, \qquad i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n-2.$$

На основу ових интеграла можемо $n-2$ променљиве сматрати као функције само две променљиве, рецимо x_{n-1} и x_n. Тада ће од система (15) остати за дефинитивно интегрисање само једна једначина

$$(17) \qquad \frac{dx_{n-1}}{X^*_{n-1}} = \frac{dx_n}{X^*_n},$$

где смо звездицама показали да смо извршили смену применљивих $x_1, x_2, \cdot \cdot \cdot, x_{n-2}$ функцијама од x_{n-1} и x_n, а на основу интеграла (16).

Напишимо претходну једначину

$$(18) \qquad X^*_n \, dx_{n-1} - X^*_{n-1} \, dx_n = 0$$

и потражимо за њу интеграциони фактор μ такав да функција

$$\mu X^*_n \, dx_{n-1} - \mu X^*_{n-1} \, dx_n$$

буде тотални диференцијал, тј. да буде испуњен познати услов

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} (\mu X^*_{n-1}) + \frac{\partial}{\partial x_n} (\mu X^*_n) = 0.$$

Као што је познато, ако је фактор μ одређен, интеграција једначине (18) односно (17) своди се на квадратуру

$$\int \mu (X_n^* \, dx_{n-1} - X^*_{n-1} \, dx_n) = \text{const.} = c_{n-1}.$$

Фактор μ се зове *Ајлеров интеграциони фактор једначине* (18).

За одређивање фактора μ трансформишимо диференцијалне једначине (15) на нове променљиве. За $n-2$ нове променљиве узмимо функције $f_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ са $i=1, 2, \ldots, n-2$, а две последње променљиве x_{n-1} и x_n оставимо исте. Како су функције f_i константне, систем једначина (15) се трансформише у систем

$$\frac{df_1}{0}=\frac{df_2}{0}=\ldots=\frac{df_{n-2}}{0}=\frac{dx_{n-1}}{X^*_{n-1}}=\frac{dx_n}{X_n^*}.$$

Применимо сад на изведену трансформацију образац (13); у овом случају он даје

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(DX^*_{n-1})+\frac{\partial}{\partial x_n}(DX_n^*)\right], \tag{20}$$

где је

$$D=\frac{\partial\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial\,(f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}, x_{n-1}, x_n)}.$$

Ако место детерминанте D уведемо детерминанту

$$\Delta=\frac{\partial\,(f_1, f_2, \ldots, f_{n-2})}{\partial\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})},$$

сматрајући при томе x_{n-1} и x_n као непроменљиве параметре и извршимо у Δ као функцији од $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ замену на функције само од x_{n-1} и x_n, можемо из (20) написати

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}=\Delta^*\left[\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\left(\frac{X^*_{n-1}}{\Delta^*}\right)+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{X_n^*}{\Delta^*}\right)\right], \tag{21}$$

при чему смо искористили везу (7) између D и Δ.

Уведимо сад функцију

$$M\,(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{22}$$

која задовољава диференцијалну једначину

$$\sum_i \frac{\partial\,(MX_i)}{\partial x_i}=\frac{\partial\,(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial\,(MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\,(MX_n)}{\partial x_n}=0 \tag{23}$$

или у развијеном облику

$$M\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}+\sum_i X_i\frac{\partial M}{\partial x_i}=0. \tag{24}$$

Ако нађено решење (22) једначине (23) односно (24) трансформишемо само на промењиве x_{n-1}, x_n, можемо из једначине

$$dM = dM^*$$

на основу једначина (15) извести

$$\sum_i X_i \frac{\partial M}{\partial x_i} = X^*_{n-1} \frac{\partial M^*}{\partial x_{n-1}} + X^*_n \frac{\partial M^*}{\partial x_n}.$$

Једначина (24) тада даје

$$M^* \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X^*_{n-1} \frac{\partial M^*}{\partial x_{n-1}} + X^*_n \frac{\partial M^*}{\partial x_n} = 0.$$

Овај резултат доводи једначину (21) до нове форме

$$M^* \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\frac{X^*_{n-1}}{\Delta^*} \right) + \frac{X^*_{n-1}}{\Delta^*} \frac{\partial M}{\partial x_{n-1}} + M^* \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{X^*_n}{\Delta^*_n} \right) + \frac{X^*_n}{\Delta^*} \frac{\partial M^*}{\partial x_n} = 0,$$

која дефинитивно даје

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\frac{M^*}{\Delta^*} X^*_{n-1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{M^*}{\Delta^*} X_n \right) = 0.$$

Ако упоредимо ову једначину са једначином (19) за одређивање Ајлеровог интеграционог фактора μ, видимо да је

$$\mu = \frac{M^*}{\Delta^*}.$$

Према томе, ако је познато решење M једначине (23), и то ма које решење, а сем тога су позната $n-2$ интеграла једначина (15), последња интеграција се завршава квадратуром. Из тог разлога се функција M зове *последњи фактор* или *Јакобијев фактор* датог система диференцијалних једначина. Диференцијална једначина (23) односно (24) је *делимична диференцијална једначина* за тај фактор. Важно је приметити да је за одређивање Јакобијевог последњег фактора довољно знати само неко партикуларно решење делимичне једначине за тај фактор.

Теорија последњег фактора је врло важна у теорији диференцијалних једначина уопште, а нарочито у теорији диференцијалних једначина механике. Често пута је врло лако наћи тражено партикуларно решење делимичне једначине за фактор. Ово решење обезбеђује квадратуру последњег интеграла. Како је показала историја решавања важних динамичких проблема (на пр., случај С. В. Ковалевске при решавању проблема о кретању тешког чврстог тела око непомичне тачке), сигурност да се последњи интеграл одређује квадратуром даје јак потстрек за проналажење претходних интеграла.

§ 5·61. Примена теорије последњег фактора на каноничне једначине

Нека је дат систем каноничних једначина написан у облику

$$\frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}}=\frac{dp_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}}=\ldots=\frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}}=\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dq_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=\ldots=\frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=dt.$$

Пошто је у овом случају

$$\sum_i\left[\frac{\partial}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right]\equiv 0\,,$$

диференцијална једначина (24) за фактор M

$$\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial M}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial M}{\partial p_i}\right)=0$$

има очевидно партикуларно решење

$$M=\text{const.}=1\,.$$

Према томе можемо тврдити да последњи интеграл система каноничних једначина увек можемо израчунати помоћу квадратура.

Ако је материјални систем са n степена слободе конзервативан, интеграл живе силе и квадратура за увођење времена дају могућност снизити тај проблем на проблем $2n-2$'ог реда. Ако знамо још један интеграл, сигурни смо да се последњи интеграл рачуна такође помоћу квадратуре; према томе проблем треба сматрати као проблем $2n-4$'ог реда. Ако је $n=2$, тј. имамо конзервативни систем са два степена слободе, можемо тврдити да се познавањем једног интеграла проблем своди на квадратуру.

§ 5·7. Здружене каноничне промењиве и њихови интеграли

Узмимо у обзир Пфафов израз

$$\Phi = \sum_i p_i \, dq_i - H \, dt$$

и са њим везане Пфафове једначине у каноничном облику

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где је

$$H = T - U,$$

при чему ћемо се зауставити на конзервативним системима, за које ни функција сила U, ни жива сила T — хомогена квадратна функција импулса p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — не зависе од времена експлицитно.

Ако један пар каноничних промењивих, рецимо, p_1 и q_1 улази у функцију H само помоћу функције

$$f_1(p_1, q_1),$$

може се казати да су те две *каноничне променљиве здружене* помоћу функције f_1. Пфафов израз ћемо тада написати у облику

$$(2) \qquad \Phi = p_1 dq_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i \, dq_i - H\,[f_1(p_1, q_1), p_2, p_3, \ldots, p_n, q_2, q_3, \ldots, q_n]\, dt.$$

Покажимо да сваком пару здружених каноничних промењивих одговара интеграл каноничних једначина (1) у облику

$$(3) \qquad f_1(p_1, q_1) = c_1$$

где је c_1 константа интеграције.

Заиста, узмимо у обзир две једначине из система (1)

$$(4) \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}.$$

Пошто за здружене промењиве имамо

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial p_1}$$

после елиминисања времена долазимо до једначине:

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial p_1} dp_1 = df_1 = 0\,,$$

која и потврђује интеграл (3).

Пошто на основу (3) променљиву p_1 можемо сматрати као функцију од q_1 израз $p_1\,dq_1$ у Пфафовој форми (2) претставља тотални диференцијал па се може конструисати форма Φ_1 еквивалентна форми

$$(5)\quad \Phi \approx \Phi_1 = \sum_{i=2}^{n} p_i\,dq_i - H\,(c_1, p_2, p_3, \ldots, p_n;\, q_2,\, q_3, \ldots, q_n)\,dt$$

у којој више нема здружених променљивих p_1 и q_1. Пфафове једначине за форму (5) сачињавају систем каноничних једначина $2n-2$'ог реда. Према томе присуство здружених променљивих снижава ред основног система једначина за две јединице. Одређивање променљивих p_1 и q_1 се врши одвојено од одређивања осталих променљивих; врши се такозвано *одвајање* или *сепарација* променљивих.

После одређивања променљиве p_1 у функцији q_1 на основу (3) за одређивање променљиве q_1 у функцији времена може послужити друга од једначина (4), која доводи до квадратуре

$$(6)\qquad q_1 = \int \frac{\partial H}{\partial p_1}\,dt + \text{const.}$$

и то пошто су све остале променљиве одређене у функцији времена.

Као дегенеративни случај треба сматрати случај цикличне координате q_1, која сасвим не улази у функцију H и за коју се интеграл (3) своди на интеграл

$$p_1 = c_1\,.$$

Ако је при томе испуњен услов

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \text{const.} = \nu_1\,;$$

интеграл (6) даје

$$q_1 = \nu_1 t + \alpha_1\,,$$

где је α_1 нова константа интеграције.

Други је важан случај кад су све променљиве подељене у парове здружених променљивих, тј. кад функција H има облик

$$H\left[f_1(p_1, q_1), f_2(p_2, q_2), \ldots, f_n(p_n, q_n)\right].$$

Тада имамо n интеграла

$$f_i(p_i, q_i) = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Кад узмемо функције f_i за нове променљиве и ставимо

$$f_i(p_i, q_i) = P_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пфафова форма се трансформише на облик

$$\sum_i P_i\, dQ_i - H(P_1, P_2, \ldots, P_n)\, dt,$$

где је идентички

$$P_i\, dQ_i = p_i\, dq_i.$$

Диференцирањем ове идентичности по P_i добијамо једначину за одређивање Q_i у функцији q_i:

$$Q_i = \int \frac{\partial p_i}{\partial P_i}\, dq_i.$$

Координате Q_i постају све цикличне и како за њих имамо

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \text{const.} = \nu_i$$

оне су *угаоне* координате са интегралима

$$Q_i = \nu_i\, t + \alpha_i$$

са новим константама α_i.

Ако се од променљивих P_i, Q_i вратимо на променљиве p_i, q_i, једначина

$$f_i(p_i, q_i) = P_i = \text{const.}$$

одређује криву у равни p_i, q_i, обично затворену линију, која карактерише одређени *циклус*. По тој кривој тачка (p_i, q_i) врши периодично кретање.

Најзад анализирајмо још један нарочити услов.

Претпоставимо да функција H зависи на овај начин од здружених промењивих

$$H\left\{ \cdot \cdot \cdot f_3 \left(f_2 \left[f_1 (p_1, q_1), p_2, q_2 \right], p_3, q_3 \right) \cdot \cdot \cdot \right\}.$$

Јасно је да у овом случају можемо узастопно ставити

$$\begin{aligned} f_1 \ (p_1, q_1) &= c_1, \\ f_2 \ (c_1, p_2, q_2) &= c_2, \\ f_3 \ (c_2, c_1, p_3, q_3) &= c_3 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{aligned}$$

и поново применити исту методу за решавање проблема о кретању система као и у претходним случајевима.

§ 5·71. Примери

1. У многим проблемима динамике функција H има облик

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 q_2^2 .$$

Како у овом случају имамо две групе здружених промењивих, имамо два интеграла

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k_1 \ q_1^2 &= P_1 = \text{const.}, \\ \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k_2 \ q_2^2 &= P_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Функција H се трансформише на

$$H = P_1 + P_2 .$$

Како је

$$(2) \qquad p_i = \sqrt{2m P_i - mk_i q_i^2},$$

из једначине

$$P_i \, dQ_i = p_i \, dq_i$$

изводимо

$$dQ_i = \frac{\partial p_i}{\partial P_i} dq_i ,$$

одакле имамо две квадратуре

$$(3) \qquad Q_i = \sqrt{\frac{m}{k_i}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k_i}{2P_i}}\, q_i\right);$$

са друге стране, из једначине

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} = 1$$

имамо

$$(4) \qquad Q_i = t + \alpha_i\,.$$

На тај начин из (3) и (4) имамо

$$q_i = \sqrt{\frac{2P_i}{k_i}} \sin\left[\sqrt{\frac{k_i}{m}}(t+\alpha_i)\right],$$

а затим из (2)

$$p_i = \sqrt{2m\,P_i} \cos\left[\sqrt{\frac{k_i}{m}}(t+\alpha_i)\right].$$

Ако је, рецимо, k_1 позитивно, прва од једначина (1) показује да је циклус елипса. По том циклусу тачка (p_1, q_1) врши периодично кретање са периодом

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}.$$

Под сличним условима период другог кретања износи

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}.$$

2. Као други пример узмимо Кеплерово кретање за које узимамо функцију H у облику

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r{}^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta{}^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} p_\psi{}^2\right) - \frac{1}{r},$$

где су: r — дужина потега, θ — допуна до астрономске ширине и ψ — астрономска дужина p_r, p_θ, p_ψ су односни импулси.

Како ψ не улази у H, ова координата је циклична са интегралом

$$p_\psi = P_1 = \text{const}.$$

После тога променљиве p_θ и θ можемо сматрати као здружене и то помоћу функције

$$f_2(p_\theta, \theta, P_1) = p_\theta^2 + \frac{P_1^2}{\sin^2\theta} = P_2 = \text{const.},$$

која је дала односни интеграл.

После те две интеграције функција H добија облик

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}P_2\right)$$

и показује на здруженост промењивих p_r и r и, као закључак, на интеграл

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}P_2\right) = \text{const.} = P_3 .$$

Последњи интеграл не претставља ништа друго већ интеграл живе силе.

На основу изведених интеграла није тешко написати и оне квадратуре, које решавају проблем до краја. Пошто је тај проблем већ био решен још у динамици тачке, нећемо се овде задржавати на извршењу познатих рачунских операција.

§ 5·8. Поасонове заграде

Напишимо услов који мора бити испуњен да функција

$$\varphi\ (q_1, q_2, \ldots, q_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n;\ t)$$

буде интеграл

$$\varphi = \text{const.} \tag{1}$$

каноничних једначина

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Под условом (1) из једначине

$$d\varphi = 0$$

после диференцирања и коришћења једначина (2) имамо ову једначину

$$\sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

која важи за сваки интеграл каноничних једначина (2) и, обратно ако функција φ задовољава услов (3), она даје интеграл.

Ако за две функције φ и ψ уведемо ознаку

$$(4) \qquad (\varphi, \psi) = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right),$$

услов (3) можемо кратко написати

$$(5) \qquad (\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Израз (φ, ψ) зове се *Поасонова заграда.*

Лако је доказати ове особине Поасонових заграда:

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),$$

$$(-\varphi, \psi) = (\varphi, -\psi) = -(\varphi, \psi),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right),$$

а затим доказати и *Поасонову* односно *Јакобијеву идентичност* за три функције

$$(f_1, (f_2, f_3)) + (f_2, (f_3, f_1)) + (f_3, (f_1, f_2)) = 0.$$

Пошто је лева страна те идентичности линеарна форма извода другога реда, довољно је без потпуног израчунавања показати да је коефицијент ма код којег од тих извода идентично једнак нули. На пр., коефицијент код извода

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_i \, \partial q_j},$$

а тај извод фигурише само у другом и трећем сабирку идентичности, има у другом члану вредност

$$\frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial f_3}{\partial p_j} + \frac{\partial f_2}{\partial p_j} \frac{\partial f_3}{\partial p_i},$$

у трећем исту вредност, али супротног знака.

На основу показаних особина Поасонових заграда и Поасонове идентичности изводи се ова Поасонова теорема:

Поасонова заграда (φ, ψ), састављена од два интеграла φ и ψ каноничних једначина (2) има сталну вредност

$$(\varphi, \psi) = \text{const.}$$

и према томе или доводи до новог интеграла, ако тај интеграл није последица претходних, или се једноставно претвара у константу.

За доказ теореме треба извести, из једначина

$$(6) \qquad (\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$(7) \qquad (\psi, H) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

као закључак једначину

$$(\theta, H) + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

ако је

$$(8) \qquad \theta = (\varphi, \psi).$$

За три функције φ, ψ, H саставимо Поасонову идентичност у овом облику

$$((\varphi, \psi), H) + ((\psi, H), \varphi) + ((H, \varphi), \psi) = 0;$$

на основу (8), (6) и (7) изводимо једначину

$$(\theta, H) + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi\right) = 0,$$

а како је

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

дефинитивно имамо једначину

$$(\theta, H) + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

која према (5) и потврђује Поасонову теорему.

Као пример узмимо проблем о кретању материјалне тачке јединичне масе под утицајем централне силе која зависи само од растојања. За тај проблем функција H изгледа

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2),$$

где смо са q_1, q_2, q_3 означили Декартове координате тачке, а са p_1, p_2, p_3 импулсе са вредностима

$$p_1 = q_1', \; p_2 = q_2', \; p_3 = q_3'.$$

Претпоставимо да су позната два интеграла

$$\varphi = q_2 p_3 - q_3 p_2 = c_1 ,$$

$$\psi = q_3 p_1 - q_1 p_3 = c_2 .$$

Према Поасоновој теореми (φ, ψ) је такође интеграл. Ако саставимо тај израз у облику

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) = q_1 p_2 - q_2 p_1 ,$$

долазимо до трећег познатог интеграла тог проблема

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = c_3 .$$

Претпоставимо сад да је холономни материјални систем конзервативан са интегралом одржавања енергије у облику

$$H = h = \text{const.}$$

и да сем тога каноничне једначине кретања тог система имају још један интеграл

$$f_1 \,(q_1 , q_2 , \ldots , q_n ; p_1 , p_2 , \ldots , p_n ; t) = c_1 .$$

Према услову (5) имамо

$$(f_1 , H) + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 ; \tag{9}$$

са друге стране на основу Поасонове теореме имамо

$$(f_1 , H) = c_2 \tag{10}$$

као нови интеграл. Упоређивање (9) и (10) доводи до резултата да ако је

$$f_1 = c_1$$

интеграл, онда је и

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = - c_2$$

интеграл. Исту особину можемо проширити и на делимичне изводе по времену вишега реда.

Не треба мислити да се формирањем нових интеграла из већ познатих помоћу Поасонових заграда могу увек исцрпсти сви интеграли проблема. У већини случајева баш напротив: сви интеграли формирани на тај начин чине такву групу интеграла

(11) $$f_1, f_2, \ldots, f_k$$

да Поасонове заграде

$$(f_i, f_j)$$

ма од која два интеграла те групе не дају више нове интеграле већ доводе или до константе или до функције већ познатих интеграла. Тако, на пр., три интеграла површина сачињавају и сами групу и са интегралом одржавања енергије чине исто групу. За довршавање решавања тог проблема треба тражити нове путеве за добијање нових интеграла.

Нарочито је важан случај кад интеграли (11) испуњавају услове

(12) $$(f_i, f_j) \equiv 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

за сваки пар тих интеграла. За интеграле (11) у том случају се каже да су *у инволуцији*.

Групе интеграла у инволуцији играју важну улогу у проучавању питања снижавања реда основног система канончних једначина.

Докажимо једну значајну особину функција, које се налазе у инволуцији.

Нека је дато k функција (11) које се налазе у инволуцији, тј. за њих важе идентичности (12).

Покажимо да ако имамо, рецимо, две функције u и v као функције функција (11), тј.

$$u = u(f_1, f_2, \ldots, f_k),$$
$$v = v(f_1, f_2, \ldots, f_k),$$

онда 1. свака од тих функција налази се у инволуцији са функцијама $f_1, f_2, \ldots, f_k$, тј. постоје идентичности

$$(u, f_i) \equiv 0, \qquad (v, f_i) \equiv 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

и 2. оне се налазе у инволуцији и између себе, тј.

$$(u, v) \equiv 0.$$

За доказ првога дела израчунајмо заграде (u, f_i). Према основном обрасцу имамо

$$(u, f_i) = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_s} \frac{\partial f_i}{\partial p_s} - \frac{\partial u}{\partial p_s} \frac{\partial f_i}{\partial q_s} \right).$$

Сматрајући u као сложену функцију имамо

$$\frac{\partial u}{\partial q_s}=\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_s}=\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_s},$$

па добијамо

$$(u,\,f_i)=\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial q_s}\right)\frac{\partial f_i}{\partial p_s}-\left(\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_s}\right)\frac{\partial f_i}{\partial q_s}\right]=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial q_s}\frac{\partial f_i}{\partial p_s}-\frac{\partial f_\mu}{\partial p_s}\frac{\partial f_i}{\partial q_s}\right)\right]=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\,(f_\mu\,,\;f_i)\,.$$

Како је

$$(f_\mu\,,\,f_i)\equiv 0,\qquad\qquad \mu\,,\;i=1,2,\ldots,k,$$

из претходног обрасца следи да је и

$$(u\,,\,f_i)\equiv 0$$

и то за сваку функцију f_i. Јасно је да то важи и за сваку другу функцију, која зависи од функција (11).

На сличан начин за доказ идентичности

$$(u\,,\,v)\equiv 0$$

треба израчунати

$$(u,\,v)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_s}\frac{\partial v}{\partial p_s}-\frac{\partial u}{\partial p_s}\frac{\partial v}{\partial q_s}\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial q_s}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial v}{\partial f_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_s}\right)-\left(\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_s}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial v}{\partial f_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial q_s}\right)\right]=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial v}{\partial f_\nu}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial q_s}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_s}-\frac{\partial f_\mu}{\partial p_s}\frac{\partial f_\nu}{\partial q_s}\right)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial f_\mu}\frac{\partial v}{\partial f_\nu}(f_\mu,\ f_\nu).$$

Из тог резултата непосредно следи да под условима

$$(f_\mu,\ f_\nu)\equiv 0, \qquad \mu,\ \nu=1,2,\ldots,k,$$

имамо идентичност

$$(u,\ v)\equiv 0.$$

У општем случају кад место две функције u, v од аргумената (11) имамо k функција

(14) $$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_k$$

од истих аргумената (11), а функције (11) су у инволуцији, онда су и функције (14) у инволуцији, тј.

$$(\varphi_i,\ \varphi_j)\equiv 0, \qquad i,j=1,2,\ldots,k.$$

Према томе, ако за каноничне једначине имамо систем интеграла који су у инволуцији, онда после трансформације тог система интеграла на други систем, биће интеграли новог система такође у инволуцији.

§ 5·81. Лиувилова теорема

Лиувилова теорема тврди:

Ако је за систем каноничних једначина

(1) $$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad i=1,2,\ldots,n$$

познато n независних интеграла

(2) $$f_i(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n,t)-c_i=0 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

који су у инволуцији, тј.

$$(f_i,f_j)\equiv 0, \qquad i,j=1,2,\ldots,n,$$

одређивање осталих n интеграла се врши на тај начин што се Пфафов израз

$$(3) \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H dt$$

на основу (2) претвара у тотални диференцијал

$$\Phi = d\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n; c_1, c_2, \ldots, c_n; t)$$

и интеграли се изражавају обрасцима

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_i} = C_i,$$

где су C_i нове произвољне константе.

За доказ напишимо интеграле (2) у облику решеном по p_j;

$$(4) \qquad p_i - \varphi_i(q_1, q, \ldots, q_n; c_1, c_2, \ldots, c_n; t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Како ове једначине морају бити последице једначина (2), њихове леве стране су функције функција f_i, а како су ове функције у инволуцији, у инволуцији су и функције $p_i - \varphi_i$, тј. треба да буду испуњени услови

$$(p_i - \varphi_i, p_j - \varphi_j) \equiv 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако применимо општи образац, добићемо

$$\sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial (p_i - \varphi_i)}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial (p_j - \varphi_j)}{\partial p_s} - \frac{\partial (p_i - \varphi_i)}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial (p_j - \varphi_j)}{\partial q_s} \right] =$$

$$= -\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} - \left(-\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \right) \equiv 0,$$

тј. низ једначина

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} = 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Како Пфафов израз (3) на основу (4) можемо написати

$$(6) \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, dq_i - H^*(q_1, q_2, \ldots, q_n; c_1, c_2, \ldots, c_n, t) \, dt,$$

где смо звездицом означили да су у функцији H промењљиве p_i замењене функцијама φ_i, тј.

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = H^*(q_1, q_2, \ldots, q_n; c_1, c_2, \ldots, c_n, t),$$

услове (5) можемо сматрати као један део услова да је Φ тотални диференцијал. Ти услови се односе на коефицијенте код диференцијала dq_i. Да испунимо и остале услове, треба показати тачност једначина

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial H^*}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Како је, с једне стране, на основу (1)

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

а, са друге стране, из (4) је

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_s},$$

имамо после упоређивања једначину

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

која према резултату диференцирања

$$\frac{\partial H^*}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial q_i}$$

доводи до једначине

$$\frac{\partial \varphi_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}$$

и потврђује тачност услова (6).

Услови (5) и (7) показују да је форма (6) тотални диференцијал функције аргумената $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$; ако ту функцију означимо са

$$\Theta^*(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

можемо написати

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - Hdt = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, dq_i - H^* \, dt = d\Theta^* .$$

Ако упоредо са функцијом Θ^* анализирамо исту функцију Θ сматрајући је и као функцију констаната $c_1, c_2, \ldots, c_n$, које улазе при одређивању те функције, можемо написати да је

$$d\Theta^* = d\Theta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial c_i} \, dc_i .$$

Према томе дефинитивно можемо навести ову форму нашег Пфафијана

$$\Phi = d\Theta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial c_i} \, dc_i =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial c_i} \, df_i + d\Theta . \tag{8}$$

Полазни систем каноничних једначина (1), као систем Пфафових једначина треба да буде еквивалентан Пфафовим једначинама добијене форме. Како последња форма зависи од променљивих

$$f_i , \quad \frac{\partial \Theta}{\partial c_i} , \quad \Theta$$

имамо ове Пфафове једначине:

за променљиве f_i : $\quad d\left(-\dfrac{\partial \Theta}{\partial c_i}\right) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial f_j} = 0 ,$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial c_i} : \quad d0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\dfrac{\partial \Theta}{\partial c_i}\right)} = - df_i ,$$

$$\Theta \quad : \quad d1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0$$

и према томе имамо две врсте интеграла

$$f_i = c_i , \quad \frac{\partial \Theta}{\partial c_i} = C_i ,$$

где су C_i нове интеграционе константе.

Тим резултатом је Лиувилова теорема доказана.

ГЛАВА ШЕСТА

Општи принципи механике

§ 6·1. Појам и класификација принципа

Као што смо видели, основни задатак кинетике материјалног система, тог важног дела механике система, састоји се у одређивању кретања система, ако су познати: почетно кинематичко стање датог система (положај и брзине), везе, које ограничавају кретање тог система, и силе, које дејствују на масе система. Први корак у решавању тог задатка је образовање диференцијалних једначина кретања система. За образовање тих једначина послужиле су нам: Њутнове аксиоме о силама и допунски услови о силама реакција веза. То су два битна елемента довољна за утврђивање правила по којима треба да образујемо диференцијалне једначине кретања материјалног система.

Али поред овог поступка за образовање диференцијалних једначина кретања материјалног система, који произлази из Њутнових закона и услова за реакције, постоје и други поступци који доводе до истих диференцијалних једначина кретања. Ови се поступци — а има их више — обично формулишу помоћу услова, које треба да задовољава неки нарочити аналитички израз. Свако такво формулисање у вези са односним аналитичким изразом претставља *општи принцип механике.*

Из општих принципа механике, који се односе на системе у кретању, тј. који су кинетичког карактера могу се извести и општи принципи за системе у мировању, тј. за случај сила у равнотежи, другим речима општи принципи статике. Јасно је да је форма општих статичких принципа једноставнија од форме општих кинетичких принципа. Сем тога, у историском развитку механике, статика је пре динамике добила израђени теориски облик. Из наведених разлога се неке форме статичких принципа са односним тумачењима искоришћују и за формулисање општих принципа механике кинетичког карактера.

Има две категорије општих принципа механике. Прва категорија — то су *диференцијални принципи:* аналитички израз помоћу кога се формулише принцип ове категорије има диференцијални облик. У диференцијалне принципе спадају: Даламберов принцип, Лагранжев принцип могућих померања, Гаусов принцип и др. Друга категорија принципа — то су *интегрални принципи.* Аналитички израз тих принципа има облик интеграла. У ову категорију спадају: Хамилтонов принцип, Лагранжев принцип најмањег дејства, Хелмхолцов принцип и др.

Приметимо одмах да без обзира на назив „општи принцип" сваки општи принцип се не може употребити за извођење диференцијалних једначина кретања сваког материјалног система. Понеки од принципа могу бити примењени само на холономне системе, а неки чак само на конзервативне системе.

У нашем излагању ћемо се зауставити само на неким диференцијалним принципима, наиме на Даламберовом принципу, на Лагранжевом принципу могућих померања и на Гаусовом принципу, а од интегралних принципа на Хамилтоновом принципу и на Лагранжевом принципу најмањег дејства.

§ 6·2. Даламберов принцип у Лагранжевом облику

Нека нам буде дат материјални систем најопштијег карактера по својој структури. Тај систем може бити нехолономан систем, тј. са диференцијалним везама, и при томе реономан, кад везе зависе од времена.

Векторе положаја означимо са

$$\vec{r}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Коначне везе нека имају облик

$$f_l(\vec{r}_i, t) \geqslant 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1$$

Знак једнакости одговара задржавајућим, неједнакости — незадржавајућим везама.

Диференцијалне везе изразимо поново помоћу

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{qgrad}_i\, \varphi_j, \vec{v}_i) + D_j \geqslant 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

где је: $\vec{v}_i$ брзина i'те тачке, $\mathrm{qgrad}_i\, \varphi_j$ квазиградијент j'те везе за i'ту тачку, D_j дата функција у општем случају положаја тачака и времена. У Декартовим координатама координате квазиградијента означићемо са

$$\mathrm{qgrad}_i\, \varphi_j\, (A_{ij}\,,\, B_{ij}\,,\, C_{ij})\,.$$

Са наведеним ознакама диференцијалне једначине кретања тачака система према (10) § 3·2 изгледају

$$(1) \qquad m_i\, \vec{w}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l\, \mathrm{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\, \mathrm{qgrad}_i\, \varphi_j\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где су: m_i маса одговарајуће тачке, $\vec{w}_i$ њено убрзање, $\vec{F}_i$ резултанта свих активних сила, које дејствују на ту тачку, λ_l множитељ l'те коначне везе и μ_j множитељ j'те диференцијалне везе.

Узмимо сад у обзир систем могућих варијација вектора положаја тачака. Те варијације, као и раније, означимо за i'ту тачку са $\vec{\delta s}_i$. Као што смо видели, могуће варијације треба да задовољавају ове услове.

$$(2) \qquad \delta f_l = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i f_l\,, \vec{\delta s}_i) \geqslant 0\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$(3) \qquad \delta \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{qgrad}_i\, \varphi_j\,, \vec{\delta s}_i) \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Векторске једначине кретања тачака (1) напишимо у облику

$$\vec{F}_i - m_i\, \vec{w}_i = -\sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l\, \mathrm{grad}_i\, f_l - \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\, \mathrm{q\,grad}_i\, \varphi_j\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

и израчунајмо збир скаларних производа написаних вектора са векторима односних варијација проширен на све тачке система

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i, \vec{\delta s}_i) = -\Big[\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{grad}_i f_l, \vec{\delta s}_i) + \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{q\,grad}_i\ \varphi_j, \vec{\delta s}_i)\Big]$$

Зауставимо се прво на случају задржавајућих веза. Сваки коефицијент уз λ_l и μ_j на основу услова (2) и (3) за могуће варијације једнак је нули и зато из (4) имамо једначину

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i, \vec{\delta s}_i) = 0.$$

У Декартовим координатама иста једначина у развијеном облику гласи

$$(6)\sum_{i=1}^{n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\Big] = 0.$$

Једначина (5) односно (6) претставља *Даламберов принцип у Лагранжевом облику* за случај задржавајућих веза.

Ако су везе незадржавајуће, коефицијенти код λ_l и μ_j према (2) и (3) могу бити или позитивни, кад везе не дејствују, тј. систем напушта везе, или једнаки нули, кад везе дејствују, систем на везама. Сем тога, у § 3·2 смо видели да и множитељи веза могу бити или нуле или позитивни. На основу тога можемо закључити да у општем случају, како задржавајућих тако и незадржавајућих веза, из једначине (4) следује услов

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i, \vec{\delta s}_i) \leqslant 0$$

или у Декартовим координатама

$$(8)\sum_{i=1}^{n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\Big] \leqslant 0.$$

Формулисана особина написаног аналитичког диференцијалног израза (7) односно (8) изражава Даламберов принцип у Лагранжевом облику за општи случај како за задржавајуће тако и за незадржавајуће везе.

Даламберов принцип у Лангранжевом облику гласи:

Свако стварно кретање материјалног система се врши тако да убрзања тачака система морају задовољавати услов (7) за све могуће варијације из положаја тачака на том путу.

Наведени принцип може се заиста сматрати као општи принцип механике тек пошто се покаже да се, обрнуто, из тог принципа могу извести диференцијалне једначине кретања материјалног система. Покажимо то.

1. Прво претпоставимо да је систем слободан. Тада су за сваки положај система варијације $\delta \vec{s}_i$ потпуно произвољни вектори.

Из једначине

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i, \; \delta \vec{s}_i) = 0, \tag{9}$$

која треба да постоји за све могуће вредности вектора $\delta \vec{s}_i$, следује да је

$$\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

То се показује на познати начин на основу ових расуђивања. Да докажемо прву од једначина (10) ставимо у (9)

$$\delta \vec{s}_2 = \delta \vec{s}_3 = \cdot \; \cdot \; \cdot = \delta \vec{s}_n = 0,$$

тада се једначина (9) своди на једначину

$$(\vec{F}_1 - m_1 \vec{w}_1, \; \delta \vec{s}_1) = 0, \tag{11}$$

која треба да важи за све произвољне вредности вектора $\delta \vec{s}_1$. Ако скаларни производ два вектора $(\vec{A}, \vec{B})$ мора бити једнак нули за све произвољне вредности, рецимо, другог вектора $\vec{B}$, први вектор $\vec{A}$ мора бити једнак нули. Заиста, претпоставимо супротно, да вектор $\vec{A}$ није једнак нули и има одређену вредност $\vec{A}$. Узмимо онда за вредност произвољног вектора $\vec{B}$ вредност вектора $\vec{A}$, скаларни производ тих вектора, који мора бити једнак нули, у том случају има вредност

$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \vec{A}) = A^2 = 0$$

и према томе је $\vec{A} = 0$.

Из једначине (11) изводимо на основу наведеног једначину

$$\vec{F}_1 - m_1 \vec{w}_1 = 0 .$$

Тако исто се изводе и остале једначине система (10).

Како једначине (10) можемо написати у облику

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i . \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

видимо да се заиста из Даламберовог принципа за слободни систем могу извести диференцијалне једначине кретања тог система.

2. Претпоставимо сад да је систем неслободан али су све везе тог система задржавајуће.

Једначина (9) треба да буде задовољена али под претпоставком да вектори $\vec{\delta s_i}$ задовољавају услове

$$(12) \qquad \delta f_l = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l , \vec{\delta s_i}) = 0 , \qquad l = 1, 2,\ldots, k_1 ,$$

$$(13) \qquad \delta \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i \varphi_j , \vec{\delta s_i}) = 0 , \qquad j = 1, 2,\ldots, k_2 .$$

Сад за извођење закључака из једначине (9) треба применити познату Ајлерову методу множитеља. Та метода пружа могућност да се после додавања једначини (9) једначина (12) и (13) претходно помножених множитељима λ_l и μ_j формално сматрају сви вектори као слободни. Образложење те методе овде, у случају више тачака материјалног система и више веза, лакше се тумачи у скаларном облику.

Од $3n$ координата, рецимо, Декартових

$$\delta x_i , \ \delta y_i , \ \delta z_i$$

$3n - k_1 - k_2$ координата треба сматрати као независне, а остале као зависне. У једначини, која следује из (9) односно (6) после додавања (12) и (13),

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - m_i x_i'' + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j A_{ij}\right)\delta x_i + \right.$$

$$\left. + (\ldots)\,\delta y_i + (\ldots)\,\delta z_i\right] = 0$$

коефицијенте код чланова, на броју $k_1 + k_2$, са зависним варијацијама (које од тих варијација сматрамо као зависне, а које као независне не мења суштину расуђивања) можемо изједначити са нулом подесним избором величина множитеља λ_l и μ_j, а кофицијенти код осталих, независних варијација *морају* бити једнаки нули; то следује после истог расуђивања које смо навели у претходном случају. На тај начин видимо да су формално сви коефицијенти једнаки нули, а то и доводи до диференцијалних једначина кретања система у скаларном облику који одговара векторским једначинама (1). Из Даламберовог принципа смо извели и у овом случају диференцијалне једначине кретања материјалног система и то холономног и нехолономног, без икаквог ограничења.

3. Анализирајмо сад случај кад су поједине, па чак и све, везе незадржавајуће природе. У том случају се изражава Даламберов принцип

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i, \overrightarrow{\delta s_i}) \leqslant 0,$$

и везе пишемо

$$(16) \qquad \delta f_l \geqslant 0, \qquad \delta\varphi_j \geqslant 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Како из оних варијација које задовољавају услове (16) можемо бирати потпуно произвољне склопове тих варијација, узмимо прво један такав склоп, за који је

$$(17) \qquad \delta f_l = 0, \qquad \delta\varphi_j = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Означимо варијације једног таквог склопа са

$$(18) \qquad (\overrightarrow{\delta s_i})_1 .$$

У сагласности са Даламберовим принципом имамо тада алтернативу или

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i, (\overrightarrow{\delta s_i})_1) = 0$$

или

$$(20)\qquad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i,\ (\delta\vec{s}_i)_1) < 0\,.$$

Покажимо да је други резултат немогућ. Заиста, у исто време са склопом (18) услове (17) задовољава због хомогености тих услова и склоп

$$(\delta\vec{s}_i)_2 = -(\delta\vec{s}_i)_1\,,$$

али варијације $(\delta\vec{s}_i)_2$ стављене у Даламберов израз дају тада на основу (20) овај резултат

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i,\ (\delta\vec{s}_i)_2) > 0\,,$$

а то је у супротности са Даламберовим принципом. Према томе за све варијације, које задовољавају услове (17), а биране су и за случај незадржавајућих веза, Даламберов принцип мора бити изражен помоћу једнакости. После тог закључка долазимо као и у случају 2. до диференцијалних једначина кретања система у облику (1).

За дефинитивно решавање питања о употреби једначина (1) треба још решити питање под каквим условима треба у тим једначинама задржати множитеље λ_l и μ_j ($l=1,2,\ldots,k_1$; $j=1,2,\ldots,k_2$). За тај циљ уврстимо вредности $\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i$ из једначина (1) у Даламберов принцип (15), па тада на основу (12) и (13) добијамо

$$-\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\,\delta f_l - \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\,\delta\varphi_j \leqslant 0\,.$$

Пошто варијације можемо одабрати тако да остане само, рецимо, $\delta f_1 > 0$, а остале све буду једнаке нули, тј.

$$\delta f_2 = \delta f_3 = \cdots = \delta f_{k_1} = \delta\varphi_1 = \cdots = \delta\varphi_{k_2} = 0\,,$$

тада из једначине

$$-\lambda_1\,\delta f_1 \leqslant 0$$

закључујемо да множитељ λ_1 не може бити негативан, а то се проширује и на све остале множитеље

$$\lambda_l \geqslant 0,\quad \mu_j \geqslant 0\,.$$

Тај резултат стоји у сагласности са оним условима за множитеље λ_l, μ_j које смо навели у § 3·2.

Даламберов принцип у Лагранжевом облику може се кратко формулисати у нарочитом облику.

Ради тога, сем резултате $\vec{F}_i$ свих активних сила, што дејствују на i'ту тачку уведимо још вектор

$$\vec{J}_i = - m_i \vec{w}_i \,.$$

Овај вектор се зове *фиктивна сила инерције*. Тај вектор има димензију силе, али се не може сматрати као права сила, јер за њу не можемо показати извор, а то је неопходан услов према трећем Њутновом закону који треба да задовољава свака права сила.

Збир сила

$$\vec{F}_i + \vec{J}_i = \vec{F}_i - m_i \vec{w}_i = \vec{\Pi}_i$$

зове се *изгубљена сила*. Изгубљена сила је такође фиктивна сила, јер за њу у целости такође не можемо показати извор односно изворе.

Помоћу изгубљене силе Даламберов принцип у Лагранжевом облику се формулише као услов

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{\Pi}_i , \vec{\delta s}_i) \leqslant 0 \,.$$

Пошто скаларни производ силе и елементарног померања, односно варијације, која има исту димензију са померањем тачке, претставља рад дате силе на тој варијацији, претходни услов можемо формулисати речима:

За време кретања материјалног система збир елементарних радова изгубљених сила на свима могућим варијацијама не може бити позитиван.

§ 6·3. Лагранжев принцип могућих померања

За један материјални систем се каже да се налази у равнотежи кад се под утицајем датих активних сила и реакција налази у трајном миру. Пошто у таквом стању брзине и убрзања морају бити једнаке нули за сваки тренутак времена, коначне и диференцијалне везе не могу имати произвољан облик. Заиста, из коначне везе

$$f_l\,(\vec{r}_i\,,\,t)=0$$

имамо услов за брзине

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{grad}_i\,f_l\,,\,\vec{v}_i)+\frac{\partial f_l}{\partial t}=0\,.$$

У положају равнотеже за сваки тренутак времена t имамо

$$\vec{v}_i=0\,,\qquad\qquad i=1,2,\ldots,n$$

па према томе из претходне једначине следи

$$\frac{\partial f_l}{\partial t}=0\,,$$

а то исто важи и за све коначне везе. На исти начин из облика диференцијалних веза

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{q\,grad}_i\;\varphi_j\,,\,\vec{v}_i)+D_j=0$$

закључујемо да је у случају равнотеже система $D_j=0$. Према томе у случају равнотеже имамо две категорије услова

$$(1)\qquad \frac{\partial f_l}{\partial t}=0\,,\quad D_j=0\,,\qquad l=1,2,\ldots,k_1;\ j=1,2,\ldots,k_2\,.$$

тј. коначне везе треба да буду склерономног карактера а диференцијалне хомогене. У анализи могућих варијација (§ 2·5) видели смо да за материјалне системе са везама које задовољавају услове (1) могуће варијације у исто време претстављају и могућа померања. На тај начин у Даламберовом принципу, где фигуришу могуће варијације, за случај равнотеже система варијације можемо сменити са могућим померањима. Ако могућа померања означимо са $\vec{\Delta s}_i$ из Даламберовог принципа за случај равнотеже, кад су

$$\vec{w}_i=0\,,$$

следује услов

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i\,,\,\vec{\Delta s}_i)\leqslant 0\,.$$

Овим условом се изражава *Лагранжев принцип могућих померања.*

Тај принцип гласи:

Рад свих активних сила на свим могућим померањима материјалног система, који се налази у равнотежи, не може бити позитиван.

За системе са задржавајућим везама тај рад је једнак нули, а за системе са незадржавајућим везама он може бити и негативан.

Извели смо Лагранжев принцип могућих померања, статички принцип, из Даламберовог, кинетичког принципа. Обрнуто, могуће је, после увођења фиктивних сила, формално изразити Даламберов принцип као статички принцип. Пошто се помоћу изгубљених сила Даламберов принцип формулише

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{\Pi}_i, \vec{\delta s}_i) \leqslant 0,$$

што одговара Лагранжевом принципу (2), а Лагранжев принцип одговара условима равнотеже активних сила и сила реакција, навешћемо и ово формулисање Даламберовог принципа:

За време кретања материјалног система изгубљене силе се налазе у равнотежи са силама реакција. То је она форма у којој је Даламбер сам формулисао свој принцип о равнотежи сила за време кретања кад у силе убројимо такође и фиктивне силе инерције. Ово Даламберово формулисање не претставља ништа друго већ на други начин формулисане Њутнове законе о силама и услове за силе реакција. Заиста, по Њутну имамо

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i ,$$

Слика 47

а по Даламберу (сл. 47)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{J}_i = 0 \tag{3}$$

а то је исто, кад ставимо $\vec{J}_i = -m_i \vec{w}_i$, Лагранжево формулисање Даламберовог принципа има ту огромну вредност што у њега формално не улазе силе реакција и према томе кад постигнемо трансформацијом координата такав резултат да све независне варијације буду искључене, онда се појављује могућност решавања проблема о кретању система уопште без увођења сила реакција.

Приметимо да са претпоставком да је раније изведени став (§ 3·21) да је рад сила реакција на свим могућим варијацијама једнак нули, односно већи од нуле за случај незадржавајућих веза, тј. да је раније изведен резултат

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{R}_i,\ \vec{\delta s}_i) \geqslant 0$$

из једначине (3) непосредно следује Даламберов принцип у Лагранжевој форми

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{J}_i,\ \vec{\delta s}_i) \leqslant 0$$

или, ако уведемо изгубљену силу

$$\vec{\Pi}_i = \vec{F}_i + \vec{J}_i,$$

у облику

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{\Pi}_i,\ \vec{\delta s}_i) \leqslant 0 .$$

§ 6·4. Гаусов принцип најмање принуде

Гаус (K. F. Gauss, 1777—1855), творац такозване методе најмањих квадрата, применио је ту исту методу на проучавање кретања материјалног система и дошао до резултата који се може формулисати као општи принцип механике. Тај принцип је диференцијалног карактера и зове се *Гаусов принцип најмање принуде*.

Гаус посматра два кретања сваке тачке материјалног система из истог положаја са истом произвољном брзином: једно, слободно кретање, кад се тачка креће само под утицајем резултанте активних сила, што дејствују на ту тачку, и друго, неслободно или принудно кретање, кад сем активних сила на тачку дејствују такође и непознате силе реакција, које треба према Гаусовом принципу одредити. За свако могуће принудно кретање Гаус уводи појам отступања принудног кретања од слободног, затим формира квадратну меру тог отступања и проширује ту меру на целокупни систем, узимајући у обзир масе материјалних тачака. Како је то отступање везано за дејство сила реакција на материјални систем које принуђују систем да отступи од слободног кретања, формирану меру Гаус зове *принудом* (Zwang) и поставља, као принцип, да се од свих могућих неслободних кретања као стварно кретање показује оно за које принуда има најмању вредност. Изразимо сад тај принцип математички.

Узмимо ма коју материјалну тачку система са масом m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и означимо са $\vec{r}_{io}$ и $\dot{\vec{r}}_{io}$ вектор положаја и брзину те тачке у тренутку t. Ако са $\vec{w}_i$ означимо убрзање те тачке за исти тренутак, вектор положаја $\vec{r}_i$ исте тачке у тренутку $t + \Delta t$ можемо, задржавајући чланове само другог реда по Δt, изразити

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{io} + \dot{\vec{r}}_{io}\,\Delta t + \frac{1}{2}\vec{w}_i(\Delta t)^2. \tag{1}$$

Ако је кретање система слободно, кретање сваке њене тачке је такође слободно и према томе имамо једначину

$$m_i \vec{w}_i^{\,*} = \vec{F}_i$$

или

$$\vec{w}_i^{\,*} = \frac{\vec{F}_i}{m_i}, \tag{2}$$

где је $\vec{F}$ резултанта свих активних сила што дејствују на ту тачку, а $\vec{w}_i^{\,*}$ је убрзање слободне тачке.

Означимо ли вектор положаја тачке са масом m_i, као слободне тачке, са $\vec{r}_i^{\,*}$, за кретање из истог положаја $\vec{r}_{io}$ са истом брзином $\dot{\vec{r}}_{io}$ имамо место (1) на основу (2) једначину

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_{io} + \dot{\vec{r}}_{io}\,\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_i}{m_i}(\Delta t)^2. \tag{3}$$

Векторску разлику

$$\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*}$$

треба сматрати као отступање тачке са убрзањем $\vec{w}_i$ од тачке која се за исто време Δt кретала као слободна тачка са убрзањем $\vec{w}^{\,*}_i$. Према (1) и (3) за то отступање имамо:

$$\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*} = \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\vec{w}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right).$$

Ако је $\vec{w}_i$ убрзање тачке ма у ком принудном кретању, тај вектор изражава отступање тачке у принудном кретању од слободног кретања за време Δt.

Квадратна мера тог отступања је

$$(\vec{r} - \vec{r}_i^{\,*})^2 = \frac{1}{4}(\Delta t)^4 (\vec{w}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i})^2 .$$

Сада слично методи најмањих квадрате треба узети у обзир важност улоге сваке појединe тачке у заједничком збиру свих отступања за материјални систем. Пошто је природно оценити важност учешћа сваке материјалне тачке у том збиру масом те тачке, квадратну меру отступања за сваку тачку треба помножити њеном масом и сабрати; тада ћемо добити

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, (\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*})^2 = \frac{1}{4}(\Delta t)^4 \sum_{i=1}^{n} m_i\, (\vec{w}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i})^2 .$$

Пошто сталан множитељ $\frac{1}{4}(\Delta t)^4$ не игра улогу у проучавању промене написане величине, Гаус се зауставља на величини

$$Z = \sum_{i=1}^{n} m_i\, (\vec{w}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(\vec{F}_i - m_i\,\vec{w}_i)^2 \tag{4}$$

и зове је *принуда*.

У скаларном облику, рецимо за Декартове координате, исту величину можемо написати

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\left[(X_i - m_i\,x_i'')^2 + (Y_i - m_i\,y_i'')^2 + (Z_i - m_i\,z_i'')^2\right].$$

Покажимо сад да услов стационарности принуде, наиме њен минимум, доводи до оних убрзања која одговарају стварном кретању материјалног система, било слободног, било неслободног.

За слободно кретање из квадратне форме (4) непосредно следује да за потпуно произвољне векторе $\vec{w}$, ова форма узима најмању вредност под условом да је сваки квадрат једнак нули и према томе тај услов доводи до једначина кретања слободног система

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i, \qquad i=1,2,\ldots, n.$$

Ако је систем неслободан, треба саставити диференцијалну варијацију принуде Z у вези са диференцијалним варијацијама $\delta\vec{w}_i$ вектора убрзања. Правила диференцирања дају

$$\delta Z = -2\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i,\ \delta\vec{w}_i)$$

и према томе услов стационарности

$$\delta Z = 0$$

доводи до једначине

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i,\ \delta\vec{w}_i) = 0, \tag{5}$$

која треба да важи за све варијације $\delta\vec{w}_i$, које спадају у могуће варијације за дати материјални систем.

У § 2·4 смо видели да убрзања неслободног система у случају кад везе раде морају задовољавати услове

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{grad}_i f_l, \vec{w}_i) + D_2 f_l = 0, \qquad l=1,2,\ldots,k_1.$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{qgrad}_i\ \varphi_j, \vec{w}_i) + D_2\varphi_j = 0, \qquad j=1,2,\ldots,k_2.$$

Из ових једначина непосредно следује да за два неслободна кретања система из истог положаја и са истим брзинама варијације δw_i треба да задовољавају ове услове

$$\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l , \delta\vec{w}_i) = 0 , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 ,$$

(6)

$$\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{qgrad}_i \varphi_j , \delta\vec{w}_i) = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 .$$

Ако сад упоредимо једначину (5) за одређивање убрзања $\vec{w}_i$ стварног кретања под условима да $\delta\vec{w}_i$ задовољавају услове (6) са једначином која изражава Даламберов принцип (§ 6·2)

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i , \vec{\delta s}_i) = 0$$

при чему вектори $\vec{\delta s}_i$ задовољавају услове

$$\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l , \vec{\delta s}_i) = 0 , \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{qgrad}_i \varphi_j , \vec{\delta s}_i) = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 ,$$

видимо да убрзања $\vec{w}_i$ стварног кретања, одређена из Даламберовог принципа морају бити иста са убрзањима одређеним према Гаусовом принципу. Даламберов и Гаусов принцип су на тај начин еквивалентни.

Лагранжева метода неодређених множитеља доводи и на основу Гаусовог принципа после елиминисања зависних варијација убрзања из (5) до једначина кретања

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{qgrad}_i \varphi_j , \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Приметимо да се извођење сличних једначина кретања из Гаусовог принципа без тешкоће проширује и на случај кад диференцијалне везе нису линеарне у односу на брзине; заиста, ако диференцијална веза има облик

$$\varphi\,(\vec{v}_i,\ \vec{r}_i,\ t)=0,$$

за варијације убрзања имамо тада линеарне услове

$$\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{grad}_{v_i}\varphi,\ \delta\vec{w}_i)=0, \tag{7}$$

где уведени вектор $\operatorname{grad}_{v_i}\varphi$ претставља делимични градијент функције φ за одговарајући вектор $\vec{v}_i$, брзину i'те тачке. Ако је функција φ линеарна у односу на брзине, имамо

$$\operatorname{grad}_{v_i}\varphi = q\operatorname{grad}_i\varphi\,.$$

У општем случају вектор $\operatorname{grad}_{v_i}\varphi$ може бити и сам функција брзина тачака система.

Пошто је услов (7) линеаран у односу на $\delta\vec{w}_i$, он може да послужи за извођење једначина кретања система са истим правом као и сваки услов из (6).

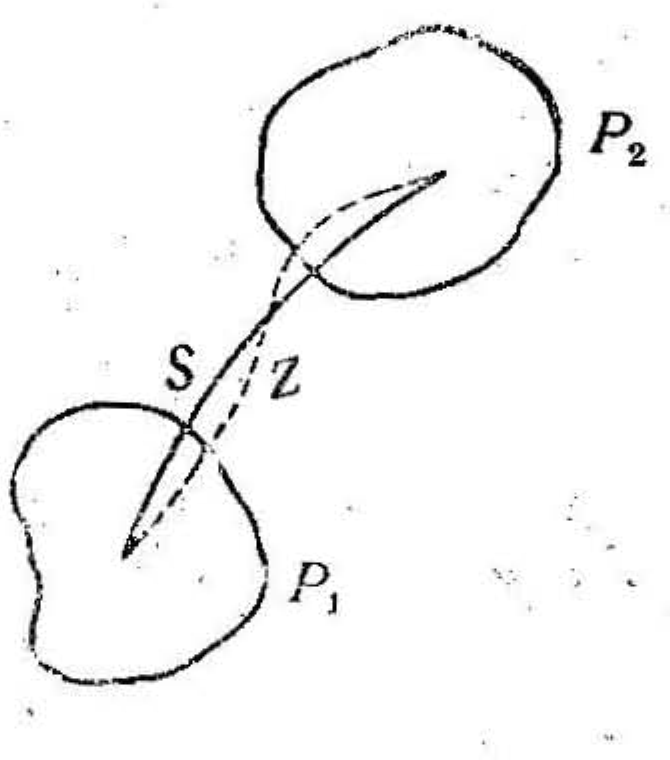
Пошто је услов (5) формулисан у векторском облику, можемо се њиме користити за извођење диференцијалних једначина материјалног система не само за Декартове координате, већ и за сваке друге. Обратно, ако претпоставимо да се материјални систем креће на основу одређених диференцијалних једначина кретања, на основу тих једначина можемо доказати истинитост Гаусовог принципа. Према томе можемо заиста поставити Гаусов принцип као општи принцип механике. Кратко га можемо формулисати овако:

<u>Сваки материјални систем увек се креће са најмањом принудом од стране маса које ограничавају кретање система.</u>

§ 6·5. Хамилтонов принцип

При извођењу неких диференцијалних принципа, на пр. Гаусовог принципа најмање принуде, упоређивали смо на диференцијалним путевима једно кретање материјалног система са другим. При том упоређивању мењали смо карактер кретања, што се показало у варирању одговарајућих величина. Такви се принципи понекад зову *варијациони диференцијални принципи.* Сад постављамо задатак проучити опште принципе механике другог, наиме интегралног карактера. У тим принципима се упоређују два кретања материјалног система из једног положаја у други, кад су ти положаји одвојени један од другог коначним путевима. Пошто се и овде упоређивање врши помоћу варирања одговарајућих елемената трајекторија, ови принципи се зову *варијациони интегрални принципи.* У ове принципе пре свега спада *Хамилтонов принцип.*

Уочимо један неслободан материјални систем. Ограничимо се на проучавање само холономних система, јер се при извођењу Хамилтоновог принципа претпоставља да се положај система може одредити помоћу независних координата чије промене нису везане никаквим диференцијалним једначинама. Означимо са P_1 положај тог система у тренутку t_1 и са P_2 у тренутку t_2, што је схематично показано на слици (сл. 48). Скуп трајекторија свих тачака система кратко ћемо звати *пут система* из једног положаја у други. Претпостављамо да је за време $t_2 - t_1$ систем извршио коначан пут, тј. да је коначна дужина трајекторије сваке појединe тачке система.



Слика 48

Ако независне координате система означимо, као и раније, са

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \tag{1}$$

где је n број степена слободе система, коначне једначине стварног кретања система из положаја P_1 у положај P_2 можемо написати

$$q_i = q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Ове функције на *стварном путу* морају задовољавати Лагранжеве једначине кретања друге врсте

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где је L кинетички потенцијал система, а сем тога за $t = t_1$ координате (1) треба да имају вредности координата у положају P_1, а за $t=t_2$ оних у положају P_2.

Упоредо са стварним путем, који означимо са P_1SP_2, кратко S, замислимо други пут система кроз исте положаје P_1 и P_2 извршен за исто време t_2-t_1, тј. пут *синхрон* са стварним путем. Тај пут означимо са P_1ZP_2, кратко Z. Нека је кретање система на том путу одређено једначинама

$$(4) \qquad \bar{q}_i = q_i(t), \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Ако упоредимо друго кретање са првим, разлике

$$(5) \qquad \bar{q}_i(t) - q_i(t), \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

карактеришу за сваки тренутак отступање другог кретања од првог. Претпоставимо да друго кретање мало отступа од првог, што математички можемо изразити условима

$$(6) \qquad \bar{q}_i(t) - q_i(t) = \eta\, k_i(t), \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

где функције $k_i(t)$ могу бити изабране произвољно са познатим ограничењима њихове природе, наиме да имају непрекидне друге изводе; сем тога ове функције треба да задовољавају граничне услове:

$$k_i(t_1) = 0, \qquad k_i(t_2) = 0, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Са η смо означили сталну величину коју увек можемо изабрати толико малу да највеће отступање буде мање од унапред дате величине ε. Јасно је да се за $\eta=0$ друго кретање поклапа са првим кретањем.

Пут P_1ZP_2 под наведеним условима зове се *заобилазни пут* материјалног система из положаја P_1 у положај P_2. Сваки заобилазни пут задовољава ове услове:

1. Спаја исте положаје система као и стварни пут.

2. Заобилазни и стварни пут су синхрони.

3. У сваком заобилазном путу кретања се врши у сагласности са свима везама које ограничавају кретање система и на стварном путу. То се оправдава тиме што је положај система увек одређен помоћу истих независних координата.

4. Заобилазни пут мало отступа од стварног пута, што утврђују једначине (6) под наведеним условима.

Разлике (5) означићемо са δq_i и зваћемо *варијације генера-*

лисаних координата q_i при прелазу од стварног кретања на заобилазно. Дакле имамо

$$(7)\qquad \delta q_i = \overline{q_i}\,(t) - q_i\,(t) = \eta\, k_i\,(t)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако сад, са једне стране, образујемо варијацију генералисане брзине, као разлику брзина за исти тренутак у заобилазном и стварном кретању,

$$\delta q'_i = \overline{q_i}'\,(t) - q_i'\,(t),$$

а, са друге стране, диференцирамо по времену једначине (7)

$$\frac{d}{dt}\,\delta q_i = \overline{q_i}'\,(t) - q_i'\,(t) = \eta\, k_i'\,(t)\,,$$

долазимо до резултата

$$(8)\qquad \frac{d}{dt}\,\delta q_i = \delta\,\frac{d}{dt}\,q_i\,,$$

који можемо написати и овако

$$d\,\delta q_i = \delta\, d q_i\,.$$

Ове једначине показују да резултат не зависи од тога којим узастопним редом примењујемо процес диференцирања и варирања: извод варијације једнак је варијацији извода.

Уведимо сад интеграл

$$(9)\qquad W = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt,$$

који се зове *дејство у Хамилтоновом смислу* или *главна Хамилтонова функција*. Подинтегрална функција тог интеграла, кинетички потенцијал, зависи, у општем случају, од координата система, генералисаних брзина и времена, јер претпостављамо да функција U у изразу

$$L = T + U$$

може зависити од времена. За стварно израчунавање интеграла (9) потребно је знати координате и брзине као функције времена.

Означимо вредности Хамилтоновог дејства на стварном путу са W_s и на обилазном са W_z и саставимо разлику

$$(10)\qquad W_z - W_s = \Delta W$$

која претставља прираштај Хамилтоновог дејства при прелазу од стварног на заобилазни пут. За дато стварно кретање и за дате функције $k_i(t)$ тај прираштај је функција само величине η. Ако развијемо тај прираштај у ред по степенима η, можемо написати

$$\Delta W = \eta\, \delta W + \frac{1}{2}\, \eta^2\, \delta^2 W + \ldots$$

Члан независан од η отпада, јер за $\eta = 0$ имамо $W_z = W_s$ и према томе је $\Delta W = 0$. Први члан написаног реда садржи δW; ова величина се зове *прва варијација Хамилтоновог дејства*, други члан садржи *другу варијацију* $\delta^2 W$ итд. Ако се нарочито не наводи ред варијације, реч „варијација" обично означава прву варијацију.

За израчунавање прве варијације узмимо извод од ΔW по η и ставимо $\eta = 0$. Пошто на левој страни једначине (10) W_s не зависи од η, имамо

$$\delta W = \left(\frac{dW_z}{d\eta}\right)_{\eta=0} = .$$

Како је

$$\frac{dW}{d\eta} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL_z}{d\eta}\, dt,$$

а

$$\frac{dL_z}{d\eta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_z}{\partial \bar{q}_i}\, k_i + \frac{\partial L_z}{\partial \bar{q}_i'}\, k_i' \right),$$

јер је

$$\frac{d\bar{q}_i}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\,(q_i + \eta\, k_i) = k_i\,,$$

и

$$\frac{d\bar{q}_i'}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\,(q_i' + \eta\, k_i') = k_i',$$

можемо ставити

$$\delta W = \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_z}{\partial \bar{q}_i}\, k_i + \frac{\partial L_z}{\partial \bar{q}_i'}\, k_i' \right) dt \right]_{\eta=0} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} k_i + \frac{\partial L}{\partial q_i'} k_i' \right) dt .$$

Пошто делимично интегрисање сваког другог члана даје

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i'} k_i' \, dt = \Big/_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i'} k_i - \int_{t_1}^{t_2} k_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} dt ,$$

можемо изразити варијацију у облику

$$\delta W = \Big/_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i'} k_i + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \right) k_i \, dt ,$$

а како су, за t_1 и за t_2, k_i једнаки нули дефинитивно имамо

$$(11) \qquad \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \right) k_i \, dt .$$

Овај израз треба сматрати као основни за утврђивање Хамилтоновог принципа помоћу Лагранжевих једначина друге врсте за одређивање кретања материјалног система.

Ако прво претпоставимо да су тачне Лагранжеве једначине (3), из (11) следује

$$(12) \qquad \delta W = 0 ,$$

тј. на стварном путу прва варијација Хамилтоновог дејства једнака је нули. Другим речима, Хамилтоново дејство на стварном путу има стационарну вредност.

Учинимо сад другу претпоставку да за време кретања на неком путу координате система задовољавају једначину (12), тј. за такво кретање Хамилтоново дејство има стационарну вредност. Докажимо да се такво кретање врши у сагласности са Лагранжевим једначинама (3).

За доказ узмимо једначину (12) и напишимо је у скраћеном облику према (11) овако

$$(13) \qquad \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} f_i \, k_i \, dt = 0 ,$$

где је

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'}.$$

Докажимо да у случају произвољности функције k_i из једначине (13) следују једначине[1]

(14) $$f_i = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Претпоставимо, обратно, да је, рецимо, f_1 различито од нуле. Ако сад ставимо у једначину (13)

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0\,,$$

добићемо једначину

(15) $$\int_{t_1}^{t_2} f_1\, k_1\, dt = 0\,,$$

при чему функција k_1 остаје произвољна,

Како је f_1 различито од нуле, рецимо, позитивно (доказ после одговарајуће промене остаје на снази и за случај претпоставке да је f_1 негативно), можемо тврдити да због непрекидности те функције постоји такав интервал времена, рецимо од τ_1 до τ_2 унутра интервала од t_1 до t_2 да за свако t, које задовољава услов

$$\tau_1 < t < \tau_2$$

функција f_1 има вредности веће од неке позитивне величине α, тј.

(16) $$f_1 > \alpha > 0.$$

Ставимо у једначину (15) за вредности t у интервалу од τ_1 до τ_2 функцију k_1 овако састављену

(17) $$k_1 = (t - \tau_1)^4\,(t - \tau_2)^4\,,$$

а ван тог интервала нека буде

(18) $$k_1 = 0\,.$$

Функција k_1 са вредностима (17) и (18) и сама је непрекидна и има непрекидни први и други извод, јер у тренуцима τ_1 и τ_2 је други извод функције (17) такође једнак нули.

Интеграл у једначини (15) тада добија вредност

(19) $$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (t - \tau_1)^4\,(t - \tau_2)^4\, f_1\, dt$$

и под условом (16) очевидно има позитивну вредност. Према томе смо дошли до закључка да је

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1 k_1 \, dt > 0 \, ,$$

а ово противречи услову (15) односно (13). На тај начин можемо тврдити да је наша претпоставка да је $f_1 \neq 0$ немогућа и да је према томе

$$f_1 = 0 \, .$$

То исто можемо доказати и за друге функције из f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; другим речима, из услова (12) долазимо, обратно, до Лагранжевих једначина (3). Према томе услов (12) може се сматрати као израз једног општег принципа механике проширеног само на специјалне материјалне системе, наиме на холономне који се налазе под утицајем сила са функцијом сила. То је Хамилтонов принцип, који гласи:

Сваки холономни материјални систем, на који дејствују силе са функцијом сила, креће се тако да на његовом стварном путу Хамилтоново дејство има стационарну вредност у поређењу са вредностима тог дејства на заобилазним путевима.

Хамилтонов принцип у овде изведеној форми не може се применити на нехолономне системе, јер смо при извођењу тог принципа искористили независне координате које нису везане никаквим диференцијалним једначинама. Ако између генералисаних брзина постоје везе, не може се извести једначина (11) са произвољним функцијама k_i, па према томе не може се извести ни Хамилтонов принцип. На нехолономне системе могу се применити други принципи у интегралном облику, на пр, принцип П. В. Воронца, али у та питања нећемо овде улазити.

§ 6·6. Мопертији-Лагранжев принцип

1740 године Мопертији (Moreau de Maupertuis) изразио је у нејасној и нетачној форми један принцип, који је прво 1747 године прихватио Ајлер, а затим 1760 године разрадио Лагранж. На том принципу су радили многи математичари, разјашњавали његов прави садржај и ослобађали га од метафизичких елемената. Овде ћемо прво показати како се тај принцип добија из Хамилтоновог принципа, а затим ћемо га повезати са односним диференцијалним једначинама кретања система.

Према Хамилтоновом принципу прва варијација дејства по Хамилтону, тј. интеграла

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{1}$$

где је

$$L = T + U,$$

при упоређивању кретања по стварном путу са кретањем по заобилазном путу треба да буде једнака нули

$$\delta W = 0. \tag{2}$$

Претпоставимо сада да је систем конзервативан, тј. постоји интеграл живе силе

$$T = U + h \tag{3}$$

где је h константа, вредност тоталне енергије система.

Како је под условом (3)

$$L = 2T - h,$$

Хамилтонов интеграл се може трансформисати

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (2T - h)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt - h(t_2 - t_1) = S - h(t_2 - t_1), \tag{4}$$

где смо са S означили интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt. \tag{5}$$

Како су, под претпоставком да се кретање између два положаја система што одговарају тренуцима t_1 и t_2 врши на стварном и на заобилазним путевима са истом тоталном енергијом, величине h, t_1, t_2 константне, из једначине (4) на основу (2) имамо

$$\delta W = \delta S = 0.$$

Једначина

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T\, dt = 0$$

изражава Мопертији-Лагранжев принцип.

Ако за интеграл (5) уведамо назив *дејства по Лагранжу* или *карактеристичне функције*, тај принцип можемо овако формулисати:

Сваки холономни конзервативни систем се креће тако да на његовом стварном путу Лагранжево дејство има стационарну вредност у поређењу са вредностима тог дејства на заобилазним путевима, а под претпоставком да се кретање на стварном и на обилазним путевима врши са истом тоталном енергијом.

Поставимо сад задатак да се из Мопертији-Лагранжевог принципа изведу диференцијалне једначине кретања конзервативног система у Јакобијевом облику.

У случају конзервативног система жива сила T је хомогена функција генералисаних брзина q_1', q_2', ..., q_n' и према томе, ако уведемо ознаку

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dq_1} = \frac{q_j'}{q_1'} \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

можемо написати слично (3) § 4 · 62

$$T = q_1'^2\, G,$$

где функција G више не зависи од диференцијала dt ни од самог времена.

Из интеграла живе силе

$$T = q_1'^2 G = U + h$$

имамо

$$(6) \qquad dt = \pm \sqrt{\frac{G}{U+h}}\, dq_1,$$

где питање знака треба да буде решено из почетних услова.

Помоћу једначина (6) можемо елиминисати време из интеграла S и тада ћемо добити

$$S = 2 \int_{q_{11}}^{q_{12}} (U + h) \sqrt{\frac{S}{U+h}}\, dq_1$$

или

$$S = 2 \int_{q_{11}}^{q_{12}} P\,dq_1$$

где је

$$P = \sqrt{S(U+h)}$$

и q_{11}, q_{12} вредности координате q_1 за положаје система у тренуцима t_1 и t_2.

Ако сад на интеграл S применимо иста расуђивања варијационог рачуна што смо применили у проучавању прве варијације дејства по Хамилтону, добићемо из услова $\delta S = 0$ диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{7}$$

а то су Јакобијеве једначине кретања конзервативних система.

Обрнуто, помоћу једначина (7) може се извести услов $\delta S = 0$, који потврђује истинитост Мопертији-Лагранжевог принципа. На овај начин смо показали да се услов стационарности дејства по Лагранжу заиста може сматрати као општи принцип механике за холономне конзервативне системе.

За случај само једне материјалне тачке имамо

$$2\,T = m v^2,$$

где је m маса тачке и v интензитет брзине, и према томе Лагранжево дејство има облик

$$S = \int_{t_1}^{t_2} m v^2\,dt = m \int_{P_1}^{P_2} v\,ds, \tag{8}$$

где је ds елемент пута и P_1 и P_2 означују положаје тачке између којих је узет интеграл. Према томе за случај само једне материјалне тачке означени принцип стоји у вези са стационарношћу интеграла (8).

У тој форми прво се проучавао тај принцип у вези са Фермаовим принципом о простирању светлости по коме интеграл (*оптички пут*)

$$\int_{P_1}^{P_2} \mu\,ds,$$

где је μ индекс преламања средине кроз коју пролази светлост, треба да буде најмањи (најкраћи) или, како се сад то строжије формулише, треба да има стационарни карактер, ако се у принципу проучава само прва варијација.

§ 6·7. Херцов принцип

Чувени физичар Херц (1857—1894) у својој књизи „Die Prinzipien der Mechanik", која је изашла из штампе, са Хелмхолцовим предговором, 1894 године после пишчеве смрти, формулисао је један општи принцип механике помоћу појма кривине трајекторије система. Тај принцип је у најближој вези са Гаусовим принципом најмање принуде. Но и поред тога навешћемо и Херцов принцип. Разлог за то је нов, геометриски облик формулисања тог принципа; ово формулисање спада у прве кораке оног правца изучавања механичких појава који се сад развио у велику грану рационалне механике, у такозвану геометрију динамике. У овој грани основну улогу играју методе тензорског рачуна.

Нека је дат материјални систем од n материјалних тачака са масама које ћемо означити према Херцу са

$$m_1 = m_2 = m_3\,;\; m_4 = m_5 = m_6\,;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\,;\; m_{3n-2},\; m_{3n-1}\; m_{3n}\,.$$

Положај ових тачака одредимо помоћу Декартових координата са ознакама

$$x_1\,,\; x_2\,,\; x_3;\; x_4\,,\; x_5\,,\; x_6\,;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\,;\; x_{3n-2}\,,\; x_{3n-1}\,,\; x_{3n}\,.$$

Уведимо променљиву s, коју дефинишемо као дужину лука трајекторије материјалног система, помоћу обрасца

$$(1) \qquad m\,ds^2 = \sum_{i=1}^{3n} m_i\,dx_i^2 = 2\,T\,dt^2\,,$$

где је

$$m = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3n} m_i$$

целокупна маса система и T жива сила, тј.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2.$$

Затим дефинишимо правац тангенте на трајекторију система помоћу једначина

$$(2) \qquad \cos(\vec{T}, x_i) = \sqrt{\frac{m_i}{m}} \frac{dx_i}{ds},$$

где смо са $\vec{T}$ означили орт тангенте, а са x_i осу означене координате.

Очигледно је да је према (1)

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{3n} \cos^2(\vec{T}, x_i) = 1.$$

Најзад дефинишимо кривину c трајекторије са вредношћу

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds},$$

где је $d\varepsilon$ угао између две суседне тангенте са ортовима $\vec{T}_1$ и $\vec{T}$, при чему се у граничном положају орт $\vec{T}_1$ поклапа са ортом $\vec{T}$.

Као и у случају Еуклидовог тродимензионог простора и овде можемо применити образац за косинус угла између два правца, на основу кога је

$$\cos(d\varepsilon) = \cos(\vec{T}_1, \vec{T}) = \sum_{i=1}^{3n} \cos(\vec{T}_1, x_i) \cos(\vec{T}, x_i).$$

Зауставимо се на члановима другог реда у овој једначини. Са леве стране имамо

$$\cos(d\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}(d\varepsilon)^2,$$

на десној ставимо

$$\cos(\vec{T}_1, x_i) = \cos(\vec{T}, x_i) + d\cos(\vec{T}, x_i),$$

па добијамо

$$(4)\quad 1-\frac{1}{2}(d\varepsilon)^2=\sum_{i=1}^{3n}\cos(\vec{T},x_i)\,[\cos(\vec{T},x_i)+d\cos(\vec{T},x_i)]\,.$$

Узев у обзир једначину (3) и једначину

$$\sum_{i=1}^{3n}[\cos(\vec{T},x_i)+d\cos(\vec{T},x_i)]^2=1\,,$$

из које изводимо везу

$$2\sum_{i=1}^{3n}\cos(\vec{T},x_i)\,d\cos(\vec{T},x_i)=-\sum_{i=1}^{3n}[d\cos(\vec{T},x_i)]^2,$$

закључујемо из (4) да је

$$(d\varepsilon)^2=\sum_{i=1}^{3n}[d\cos(\vec{T},x_i)]^2$$

и према томе за одређивање кривине имамо једначину

$$(5)\qquad c^2=\sum_{i=1}^{3n}\left[\frac{d\cos(\vec{T},x_i)}{ds}\right]^2.$$

Како из (2) имамо

$$\frac{d\cos(T,x_i)}{ds}=\sqrt{\frac{m_i}{m}}\,\frac{d^2x_i}{ds^2}$$

из (5) изводимо

$$mc^2=\sum_{i=1}^{3n}m_i\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2.$$

Узмимо сад за независно променљиву време t. Како је

$$\frac{dx_i}{ds}=\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dt}{ds}$$

и

$$\frac{d^2x_i}{ds^2}=\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\left[\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{ds}{dt}-\frac{dx_i}{dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right],$$

имамо за кривину једначину

$$(6)\qquad mc^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4=\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\sum_{i=1}^{3n}m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{ds}{dt}-\frac{dx_i}{dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2$$

Пошто из (1) имамо

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2$$

и према томе је

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)\left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right),$$

једначина (6) даје

$$mc^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2.$$

Ако сад уведемо функцију

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)^2$$

која се зове *енергија убрзања система*, та се функција може довести у везу са кривином трајекторије

(7) $$S = \frac{1}{2}\, m\left[c^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2\right].$$

Сад се зауставимо на случају кретања система који је анализирао Херц, наиме, на случају кретања система по инерцији, тј. без дејства активних сила, а само под утицајем сила реакција идеалних веза, које не зависе од времена. За такво кретање важи Херцов принцип који гласи:

Од свих трајекторија материјалног система стварна трајекторија има најмању кривину.

Изведимо тај принцип из Гаусовог принципа најмање принуде.

За специјалан Херцов случај Гаусов принцип тврди да принуда, која има за тај случај на основу (4) § 6·4 вредност

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right).$$

треба да има најмању вредност. Како је $Z = 2S$ и функција S

такође треба да има најмању вредност. Пошто је функција S збир два позитивна сабирка, сваки од њих мора имати најмању вредност. За други сабирак минимална вредност је нула, тј.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

одакле следује да је

$$\frac{ds}{dt} = \text{const.}$$

Под условом те сталности први члан збира (7) има најмању вредност кад има најмању вредност c^2, а тиме је доказан Херцов принцип.

Обратно, из Херцовог принципа се може извести Гаусов принцип за кретање по инерцији а у случају идеалних веза. Заиста, ако се материјални систем креће по инерцији, а везе су идеалне, рад сила на сваком померању једнак је нули и према томе је испуњен услов

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

одакле следује особина кретања

$$\frac{ds}{dt} = \text{const.}$$

Тада из услова минимума c^2 из (7) следује минимум у функције

$$S = \frac{1}{2} Z,$$

а то доводи до Гаусовог принципа у овом специјалном случају.

Херцов принцип се може формулисати и у интегралном облику помоћу варијације интеграла

$$\int_{A_0}^{A_1} ds\,,$$

који изражава према (1) дужину пута материјалног система између почетног A_0 и коначног A_1 положаја система. Стационарност тог интеграла доводи до кретања система по геодезиској линији за коју Херцова кривина има најмању вредност. На доказу тих резултата нећемо се заустављати.

§ 6·8. Апелове једначине

Апел (P. Appell, 1855—1930) је увео у рационалну механику такозвану *енергију убрзања*, која је добила назив *Апелове функције*. За Декартове координате тачака материјалног система ова функција, како смо видели, има облик

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i \, x_i''^2, \tag{1}$$

при чему смо задржали ознаке претходног параграфа.

Апелове једначине могу се извести на више начина. Искористимо Даламберов принцип у Лагранжевом облику, који захтева да у случају задржавајућих веза треба да важи једначина

$$\sum_{i=1}^{3n} \left[(X_i - m_i \, x_i'') \, \delta x_i \right] = 0 \tag{2}$$

за све независне варијације δx_i.

У случају слободног материјалног система из (1) имамо

$$m_i \, x_i'' = \frac{\partial S}{\partial x_i''} \qquad i = 1, 2, \ldots, 3n$$

и према томе место (2) пишемо

$$\sum_{i=1}^{3n} \left[\left(X_i - \frac{\partial S}{\partial x_i''} \right) \delta x_i \right] = 0,$$

одакле у случају независних варијација δx_i добијемо једначине

$$\frac{\partial S}{\partial x_i''} = X_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 3n$$

које и претстављају Апелове једначине за слободни систем у случају Декартових координата.

Ако је систем неслободан, Апелове једначине се могу поставити како за холономан тако и за нехолономан систем. Изведимо те једначине за холономни систем.

Уведимо независне координате q_s система којих нека има N, тј. ставимо

$$x_i = x_i \, (q_1, q_2, \ldots, q_N, t).$$

Свака варијација δx_i има вредност

$$\delta x_i = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s .$$

Како се брзина одређује из једначине

$$x_i' = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q_s' + \frac{\partial x_i}{\partial t} ,$$

а убрзање из једначине

$$x_i'' = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q_s'' + \cdot \cdot \cdot ,$$

где су исписани само потребни чланови, можемо закључити да је

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial x_i''}{\partial q_s''} .$$

Трансформишимо сад чланове једначине (2) на независне координате.

Збир

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \, \delta x_i$$

се трансформише у збир

$$\sum_{s=1}^{N} Q_s \, \delta q_s ,$$

где је Q_s генералисана сила са познатом вредношћу.

Други збир трансформишимо на наредни начин

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \, x_i'' \, \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} m_i \, x_i'' \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s = \sum_{i=1}^{3n} m_i \, x_i'' \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x''}{\partial q_s''} \delta q_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{3n} m_i \, x_i'' \, \frac{\partial x_i''}{\partial q_s''} \right) \delta q_s = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial q_s''} \delta q_s .$$

После тих трансформација Даламберов принцип доводи до једначине

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\left(Q_s - \frac{\partial S}{\partial q_s''}\right)\delta q_s\right] = 0\,,$$

из које због независности варијација δq_s изводимо Апелове једначине:

$$\frac{\partial S}{\partial q_s''} = Q_s\,, \qquad s = 1, 2, \ldots, N.$$

На извођењу Апелових једначина за нехолономни систем нећемо се заустављати без обзира на то што те једначине у случају узимања односних параметара за одређивање положаја система не садрже множитеље веза.

ГЛАВА СЕДМА

Аналогија између механике и оптике. Јакобијева метода

§ 7·1. Хамилтонова аналогија између механике и оптике

Ирски математичар и астроном Хамилтон (William Rowan Hamilton 1805—1865) посветио је низ чланака геометриској оптици и аналогији која постоји између оптике и механике. Помоћу те аналогије Хамилтон је пронашао нову методу за решавање механичких проблема. У прво време та метода је била врло мало позната, нарочито на континенту. Тек после Јакобијевих радова, који је дубље разрадио ту методу, нарочито у примени на теорију поремећаја, ова метода је прихваћена као средство за решавање механичких проблема. Ми ћемо навести елементе те методе помоћу упоредног проучавања оптичких и механичких појава.

§ 7·11. Фермагов принцип. Диференцијалне једначине светлосног зрака

Ако са c означимо сталну брзину светлости у вакууму и са v интензитет брзине светлости одређене боје у датој средини, тј. у датој тачки средине и у датом правцу, количник

$$(1) \qquad \mu = \frac{c}{v}$$

зове се *индекс преламања даше средине у односу на вакvvм за шу боју у дашој шачки и у дашом йравцу*. Производ

$$(2) \qquad \mu\, ds = dS$$

где je ds елемент геометриског пута светлости у датом правцу, зове се елемент *оптичког пута* S за време одговарајућег интервала времена dt. Ако ставимо вредност (1) индекса преламања у израз (2), имамо

$$(3) \qquad dS = \mu\, ds = \frac{c}{v}\, ds = c dt,$$

jер je

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Једначина (3) показује да je оптички пут dS пропорционалан времену и коефицијент пропорционалности има сталну вредност, вредност брзине светлости у вакууму. Према томе je оптички пут светлости у датој средини једнак геометриском путу светлости за исто време али у вакууму; из тог разлога се оптички пут понекад зове *редуковани пут*.

За одређивање оптичког пута кад светлост прелази из тачке A_0 у тачку A_1 треба израчунати вредност интеграла

$$(4) \qquad S = \int_{A_0}^{A_1} \mu\, ds = c\,(t_1 - t_0)$$

узетог дуж геометриског пута прелаза светлости између наведених тачака. t_0 и t_1 су тренуци пролаза светлости кроз тачке A_0 и A_1.

Индекс преламања μ са гледишта геометриске оптике може у општем случају зависити:

1. од природе светлости, тj. од њене боје;
2. од положаја тачке у средини кроз коју пролази светлост и
3. од правца у коме се кроз дату тачку простире светлост.

У даљим излагањима претпостављамо да je светлост *монохроматична;* за такву светлост индекс преламања може да зависи само од положаја тачке и од правца светлосног зрака, тj.

$$\mu = \mu\,(\vec{r}, \vec{T}),$$

где je $\vec{r}$ вектор положаја тачке са Декартовим координатама x_1, x_2, x_3, а $\vec{T}$ орт тангенте са координатама $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$. Према томе можемо написати за *анизотропну* средину

$$\mu = (x_1, x_2, x_3; \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}).$$

Ако је средина *изотропна,* тај индекс не зависи од правца зрака, тј.

$$\mu = \mu(\vec{r}) = \mu(x_1, x_2, x_3).$$

Најзад, ако је средина и *хомогена,* индекс преламања има сталну вредност $\mu = \text{const.}$

За изотропну средину оптички пут S се изражава интегралом

$$(5) \qquad S = \int_{A_0}^{A_1} \mu\,(x_1, x_2, x_n)\, ds\,.$$

На основу проучавања разних специјалних случајева простирања светлости Ферма (P. Fermat, 1601—1665) је поставио општи принцип геометриске оптике, који се може изразити речима:

Од свих кривих линија које спајају две тачке A_0 и A_1 простора за криву стварног могућег простирања светлости интеграл (4) има најмању односно стационарну вредност у поређењу са вредностима на другим кривим које спајају исте тачке[1]).

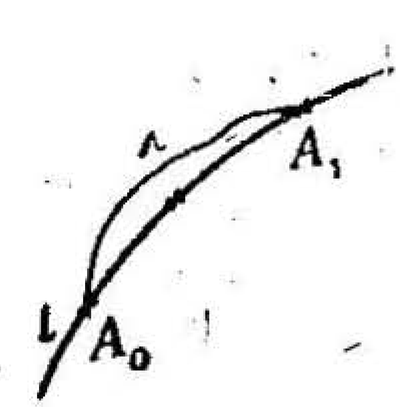
Како се оптички пут разликује само множитељем c од времена за које светлост пролази из тачке A_0 до тачке A_1, према Ферматовом принципу време прелаза светлости треба да има стационарну вредност односно минимум.

Ако криву геометриског пута светлости претпоставимо у параметарском облику

$$(6) \qquad x_i = x_i(\tau),$$

---

[1]) Строжије тај принцип можемо изразити овако: Крива l (сл. 49) може бити светлосни зрак тада и само тада кад за сваку тачку A те криве можемо показати такав њен део $A_0 A A_1$ где је A тачка између A_0 и A_1, да интеграл (5) дуж тог дела буде мањи од интеграла између истих крајњих тачака дуж криве λ која се налази у близини криве $A_0 A A_1$.



Слика 49

где је τ параметар, и ставимо

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i'^2 \, d\tau^2 = \dot{s}^2 \, d\tau^2$$

са $x_i' = \frac{dx_i}{d\tau}$ и вредношћу

$$\dot{s} = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2},$$

интеграл (5) треба написати

$$S = \int_{A_0}^{A_1} \mu(x_1, x_2, x_3) \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \, d\tau =$$

$$= \int_{A_0}^{A_1} F(x_1, x_2, x_3; \, x_1', x_2', x_3') \, d\tau,$$

$$F = \frac{dS}{d\tau} = \mu(x_1, x_2, x_3) \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}.$$

Према Ферматовом принципу прва варијација тог интеграла треба да буде једнака нули, ако прелазимо од стварног пута на заобилазни. Тај принцип своди решење оптичког проблема на проблем варијационог рачуна. На основу правила тог рачуна за одређивање облика функција $x_i(\tau)$ за стварни пут светлости треба решити Ајлерове једначине

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial x_i'} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Како је

$$\frac{\partial F}{\partial x_i'} = \mu \frac{x_i'}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} = \mu \cos(\vec{T}, x_i) = \mu \, T_i$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} = \dot{s} \, \frac{\partial \mu}{\partial x_i},$$

Ајлерове једначине добијају облик

$$\frac{d}{d\tau}(\mu \, T_i) - \dot{s} \, \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

То су *скаларне диференцијалне једначине светлосног зрака.*

Систем ових једначина можемо заменити векторском једначином

$$\frac{d}{d\tau}(\mu \vec{T}) = \dot{s}\,\mathrm{grad}_r\,\mu,$$

где је уведени градијент узет у односу на вектор положаја тачке.

Ако за параметар узмемо време, последња једначина изгледа

$$\frac{d}{dt}(\mu \vec{T}) = v\,\mathrm{grad}_r\,\mu. \tag{7}$$

Најзад, ако за параметар узмемо дужину лука s трајекторије светлосне честице, претходна једначина даје

$$\frac{d}{ds}(\mu \vec{T}) = \mathrm{grad}_r\,\mu.$$

За хомогену и изотропну средину, кад је $\mu = \mathrm{const.}$, $\mathrm{grad}_r\,\mu = 0$, имамо векторски интеграл $\vec{T} = \mathrm{const.}$, из кога следује праволиниски облик светлосног зрака.

§ 7 · 12. Хајгенсов принцип. Ејконал и његова површина

Применимо сад на проучавање светлосних појава другу концепцију, која припада Хајгенсу (Ch. Huygens, 1629—1695) и коју је касније развио Френел (Aug. Fresnel, 1788—1827) нарочито у такозваној *физичкој оптици,* која проучава светлосне појаве дубље од геометриске оптике.

Замислимо у простору тачку A_0 (x_0, y_0, z_0) и геометриско место тачака A (x, y, z) за које интеграл

$$S = \int_{A_0}^{A} \mu\, ds$$

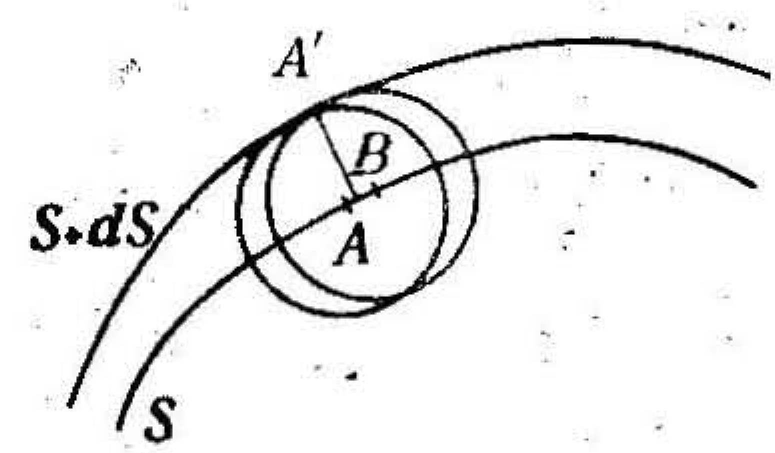
има сталну вредност, другим речима, анализирајмо геометриско место тачака на истом оптичком отстојању од тачке A_0. Наведени интеграл се зове *ејконал* (од грчке речи εἰκών — слика, икона), а односна површина *ејконална површина* тачкастог извора са оптичким растојањем $S = \mathrm{const.}$ Из тачке A_0 за време $t = S:c$ светлост се простире до ејконалне површине

$$S(x, y, z) = S = ct = \mathrm{const}.$$

Према Хајгенсовом схватању, које је познато под називом *Хајнгенсовог принципа*, светлост се шири из извора површином, која се зове *таласна површина*. Таласна површина се поклапа сваког тренутка с ејконалном површином. Она се зове таласна због тога што собом носи осцилаторну особину светлости; проучавање светлости у вези са том особином спада у физичку оптику. Према Хајгенсовом принципу свака тачка таласне површине са своје стране је извор нове делимичне таласне површине. Анвелопа свих тих делимичних површина образује нову таласну површину — ејконалну површину која одговара новом тренутку времена. Јасно је да Хајгенсов принцип даје могућност да се конструише таласна односно ејконална површина не само за случај једног тачкастог извора, већ и у оном случају кад је извор нека површина — граница светлосног тела.

Ако површину $F_0\ (x_0, y_0, z_0) = 0$ сматрамо као површину светлосног извора или објекта оптичког инструмента, ејконалну површину треба сматрати као површину слике; при томе су светлосни зраци прошли средину између светлосног зрака и слике и били су подвргнути трансформацији која се одређује функцијом S. Из тог разлога је Хамилтон назвао функцију S *карактеристична функција*. У конкретном случају она зависи од особина оног оптичког инструмента који од објекта са површином $F_0 = 0$ даје слику са површином $F = 0$.

Саставимо диференцијалну једначину ејконалне површине. Од ејконалне површине са вредношћу S прелазимо на бескрајно блиску ејконалну површину са вредношћу оптичког пута $S + dS$ (сл. 50). Како у бесконачној близини тачке A површине S индекс преламања треба сматрати сталним, бесконачно мала ејконална површина за тачку A је сфера полупречника $ds = \frac{1}{\mu}\, dS$.



Слика 50

За одређивање оне тачке анвелопе, која одговара тачки A, замислимо тачке B на површини S бескрајно блиске тачки A. За сваку тачку B ејконална површина је исто тако бескрајно мала сфера полупречника ds. У граничном положају под условом да тачке B теже тачки A заједничка тачка тих малих сфера заузима положај тачке A' анвелопе и то на нормали на површину S кроз тачку A. Према томе тангента на криву светлосног зрака стоји управно на ејконалну површину. Градијент функције S колинеаран је са тангентом на зрак. Пошто интензитет градијента има вредност односа $\frac{dS}{ds}$, а тај количник једнак је индексу преламања μ, можемо написати

$$(\mathrm{grad}_r\, S)^2 = \mu^2$$

или у случају Декартових координата x_1, x_2, x_3

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = \mu^2.$$

Ова једначина је делимична диференцијална једначина првога реда за одређивање ејконалне површине.

§ 7·13. Аналогија између Ферматовог и Хамилтоновог принципа

Како смо видели (6·5) у Хамилтоновом принципу се проучава интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (T + U)\, dt,$$

где је: W — дејство по Хамилтону, L — кинетички потенцијал, T — жива сила система и U — функција сила.

Ако живу силу система претставимо према Херцу у облику

$$T = \frac{1}{2}\, m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\, mv^2, \tag{1}$$

где је m маса система и ds^2 квадратна форма од диференцијала генералисаних координата са коефицијентима који су дати функцијама тих координата, и претпоставимо да је систем конзервативан, тј. важи интеграл живе силе

$$T - U = h = \mathrm{const.}, \tag{2}$$

Хамилтоново дејство можемо прво изразити обрасцем

$$W = \int_{t_1}^{t_2} 2\, T\, dt - h\,(t_2 - t_1),$$

а затим, пошто је на основу (1) и (2)

$$2\,T\,dt = m\,v\,ds = \sqrt{2m(U+h)}\,ds\,,$$

претставити овако

$$W = \int_{A_0}^{A} \sqrt{2m(U+h)}\,ds - h\,(t_2 - t_1),$$

где смо са A_0 и A означили положаје система за тренутке t_1 и t_2.

Издвојимо из те разлике интеграл и означимо га са S:

$$S = \int_{A_0}^{A} \sqrt{2m(U+h)}\,ds\,.$$

Тај интеграл, како смо видели (§ 6·6), зове се карактеристична функција материјалног конзервативног система или дејство по Лагранжу.

Упоредимо сад два интеграла: израз за ејконал

$$S = \int_{A_0}^{A} \mu\,ds$$

и карактеристичну функцију материјалног система

$$S^* = \int_{A_0}^{A} \sqrt{2m(U+h)}\,ds\,,$$

при чему смо овде додали звездицу да бисмо разликовали једну функцију од друге.

Према Ферматовом принципу је

(3) $$\delta S = 0\,,$$

а према Хамилтоновом односно Мопертуи-Лагранжевом

(4) $$\delta S^* = 0\,.$$

Обрасци (3) и (4) показују да су са математичког гледишта два проблема: кретање светлости у одређеној средини и кретање материјалне тачке односно материјалног система — два аналогна проблема, са том разликом што у првом случају проблем зависи од μ, а у другом од функције $\sqrt{2m(U+h)}$. Аналогија се неће покварити ако се те функције помноже или поделе константним величинама.

У оптици назив функције S као карактеристичне функције дошао је због тога што функција карактерише оптички инструмент; исти назив је увео Хамилтон у механику по аналогији.

§ 7 · 14. Аналогија између светлосних зракова и трајекторија материјалног система

Видели смо да се из Ферматовог принципа изведене диференцијалне једначине светлосног зрака могу написати у облику једначина (7) § 7 · 11

$$\frac{d}{dt}(\mu \vec{T}) = \nu \operatorname{grad}_r \mu, \tag{1}$$

где је μ подинтегрална функција карактеристичне функције S у оптици

Применимо сад поступак састављања диференцијалних једначина (1) на механичку карактеристичну функцију S^* чија је вредност

$$\mu = \sqrt{2m(U+h)}\,.$$

Тада имамо

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2m(U+h)}\,\vec{T}\right) = \nu \operatorname{grad}_r \sqrt{2m(U+h)}$$

и пошто је

$$\frac{dS^*}{ds} = \sqrt{2m(U+h)} = mv\,,$$

горња једначина даје

$$\frac{d}{dt}(mv\vec{T}) = \nu \operatorname{grad}_r (mv)\,.$$

Како је

$$mv\vec{T} = m\vec{v}$$

и

$$\frac{d}{dt}(mv\vec{T}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{w}\,,$$

где је $\vec{w}$ убрзање тачке, било праве било репрезентативне у случају материјалног система, а са друге стране је

$$v \operatorname{grad}_r (mv) = \frac{1}{2m} \operatorname{grad}_r (mv)^2 =$$

$$= \frac{1}{2m} \operatorname{grad}_r [2m(U+h)] =$$

$$= \operatorname{grad}_r U,$$

имаћемо дефинитивно

$$m\vec{w} = \operatorname{grad}_r U,$$

а то су Њутнове једначине кретања било за тачку било за систем. Ако узмемо пројекције убрзања на осе криволиниских координата добићемо Лагранжеве једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

На тај начин се види да између оптике и механике постоји аналогија: Ферматовом принципу одговара Хамилтонов односно Мопертији-Лагранжев принцип и екстремали у оптици, светлосном зраку, одговара екстремали у механици — трајекторија тачке односно материјалног система.

§ 7·15. Хамилтонова делимична диференцијална једначина у механици за конзервативне системе

Ако између проучавања ширења светлости и проучавања кретања система постоји аналогија, онда се методе проучавања у једној области могу применити на другу област и обратно. Пошто смо видели да у проучавању ширења светлости постоје две методе — помоћу зракова и помоћу ејконалних односно таласних површина, што одговара Ферматовој и Хајгенсовој концепцији, морају постојати две методе и у проучавању кретања материјалног система. Видели смо да светлосним зрацима одговарају трајекторије система. Ејконалним површинама морају одговарати површине везане за кретање система. Те површине исто тако имају своју делимичну диференцијалну једначину. Напишимо ту једначину.

При проучавању оптичких појава имали смо Хамилтонову једначину за функцију S у облику

$$(\mathrm{grad}_r\, S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = \mu^2.$$

Ова једначина одређује интензитет градијента; што се тиче правца тог градијента, он се поклапа, као што смо видели, са правцем тангенте на светлосни зрак.

У случају кретања, рецимо, материјалне тачке за састављање Хамилтонове једначине за функцију S^* треба заменити μ са $\sqrt{2m(U+h)}$. Хамилтонова једначина за овај случај изгледа

$$(1) \qquad (\mathrm{grad}_r\, S^*)^2 = \left(\frac{\partial S^*}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^*}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^*}{\partial x_3}\right)^2 = 2m(U+h).$$

Како је из интеграла живе силе

$$\sqrt{2m(U+h)} = mv$$

и правац градијента $\mathrm{grad}_r\, S^*$ се поклапа са тангентом на трајекторију тачке, можемо тврдити да наш градијент има вредност количине кретања или импулса, тј.

$$\mathrm{grad}_r\, S^* = m\vec{v}\,.$$

Ако координате тог импулса означимо са p_1, p_2, p_3, тј. ставимо

$$\frac{\partial S^*}{\partial x_i} = p_i\,, \qquad i = 1, 2, 3$$

Хамилтонову једначину можемо написати и у облику

$$\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U = h$$

или

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right] - U = h$$

у ком се она највише пише. При томе смо ради једноставности изоставили звездицу, која је била уведена само при истовременом посматрању и друге карактеристичне функције.

За материјални систем Хамилтонова једначина гласи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] - U = h\,.$$

Из написаних облика јасно се види да се за случај конзервативних система Хамилтонова једначина једноставно добија из интеграла живе силе

$$H = T - U = h$$

кад живу силу изразимо помоћу импулса, а координате импулса заменимо са делимичним изводима карактеристичне функције по одговарајућим Декартовим координатама тачака.

Што се тиче Хамилтонове једначине за холономне системе општег типа, о њој ћемо говорити у наредном параграфу.

§ 7·2. Хамилтонова делимична диференцијална једначина за холономне системе

Ако је дат материјални систем са независним координатама $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и генералисаним импулсима $p_1, p_2, \ldots, p_n$ чија је Хамилтонова функција H позната

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' - T - U = \mathrm{fonct}\,(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t), \tag{1}$$

диференцијалне једначине кретања таквог холономног система можемо написати у каноничном облику

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Ове једначине, написане у облику

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dp_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}} = dt$$

можемо сматрати, као што је познато из теорије делимичних диференцијалних једначина, као обичне диференцијалне једначине, чији систем одговара делимичној диференцијалној једначини

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}; t\right) = 0, \tag{3}$$

где је W непозната функција, при чему смо ставили

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Да је то тачно, довољно је написати једначину (3) у облику

$$F = p + H(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t) = 0,$$

где смо увели ознаку

$$p = \frac{\partial W}{\partial t}$$

и затим поступити по правилима поменуте теорије делимичних диференцијалних једначина. У примени на наш случај та правила доводе до ових обичних диференцијалних једначина

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dq_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dp_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_2}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_n}} = \frac{dt}{1} = \frac{dp}{-\dfrac{\partial H}{\partial t}}.$$

Пошто последњи количник можемо изоставити, видимо да се написани систем једначина поклапа са каноничним системом (2). Потпуни интеграл једначине (3) у облику

$$W = W(t, t_0, q_1, q_2, \ldots, q_n; c_1, c_2, \ldots, c_n) + c_{n+1},$$

где су $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ произвољне константе, зове се *главна функција*, а делимична диференцијална једначина (2) *Хамилтонова једначина* за ту функцију.

Лако је показати да вредност главне функције не претставља ништа друго већ Хамилтоново дејство (§ 6·5). Заиста, пошто је W потпуни интеграл једначине (2), треба да имамо

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial W}{\partial t} dt$$

или на основу (3) и (4)

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' - H$$

а то према (1) даје

$$\frac{dW}{dt} = T + U = L$$

одакле следује да је

(5) $$W = \int_{t_0}^{t} L\, dt,$$

а то је вредност Хамилтоновог дејства. Тек овај резултат даје стварну могућност изједначити појмове Хамилтоновог дејства и главне функције као решења једначине (3).

У специјалном случају конзервативног система из ове опште теорије непосредно следују резултати, који су за материјалну тачку били показани у § 7·15. Место Хамилтонове функције W можемо увести карактеристичну функцију S помоћу једначине

$$W = S - h\,(t - t_0). \tag{6}$$

Како је за конзервативни систем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -h$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

Хамилтонова једначина за такве системе изгледа

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = h.$$

Пошто функција W има вредност (5), за карактеристичну функцију S на основу (6) добијамо

$$S = W + h\,(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} L\,dt + h\,(t - t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} (L + h)\,dt = \int_{t_0}^{t} (T + U + h)\,dt,$$

па због интеграла живе силе

$$T = U + h$$

дефинитивно имамо

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

а то је израз за дејство у Лагранжевом смислу (§ 6·6).

§ 7 · 3. Јакобијева теорема

Претпоставимо да је за Хамилтонову једначину

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}; t\right) = 0$$

нађен потпуни интеграл

$$\text{(2)} \qquad W = W(t, t_0, q_1, q_2, \ldots, q_n; c_1, c_2, \ldots, c_n) + c_{n+1}.$$

Јакобијева теорема тврди да систем једначина

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial c_i} = \alpha_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

где су α_i нове произвољне константе, претставља потпуни систем интеграла каноничних једначина

$$\text{(4)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

које одговарају једначини (1).

Прво можемо тврдити да једначине (3) садрже довољан број $2n$ произвољних константата c_i и α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Затим можемо показати да резултати диференцирања по времену сваке од једначина (3) доводе до идентичности на основу каноничних једначина (4), ако функцију W сматрамо као потпуни интеграл једначине (1), тј. такву функцију која после смене у (1) доводи ту једначину до идентичности.

Заиста, прве једначине из (3) дају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \, \partial q_j} q_j' - \frac{dp_i}{dt} = 0$$

што после замене из (4) доводи до

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\, \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 W}{\partial q_i\, \partial q_j} =$$

$$= \frac{\partial^2 W}{\partial q_i\, \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_i\, \partial q_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right] = 0,$$

а ова последња једначина заиста претставља идентичност, јер у средњој загради стоји израз леве стране једначине (1), коју потпуни интеграл (2) претвара идентично у нулу, а овим се потврђује да се резултат диференцирања претвара у идентичност.

Слично се поступа са другом од једначина (3). Диференцирајмо по времену

$$\frac{\partial^2 W}{\partial c_i\, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial c_i\, \partial q_j} q'_j = 0.$$

Одатле узастопце имамо

$$\frac{\partial^2 W}{\partial c_i\, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial c_i\, \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} =$$

$$= \frac{\partial^2 W}{\partial c_i\, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_j\, \partial c_i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial c_i}\left[\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right] = 0,$$

при чему последња једначина претставља идентичност, јер је то извод по c_i од идентичности, ако је W потпуни интеграл (2).

У специјалном случају кад су за константе $c_1, c_2, \ldots, c_n$ узете почетне координата система са вредностима $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$, константе α_i једнаке су почетним вредностима генералисаних импулса са знаком минус, тј.

$$\alpha_i = - p_{i0}$$

и интеграли (3) изгледају:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial q_{i0}} = - p_{i0}. \tag{5}$$

За доказ узмимо главну функцију у облику

$$W = W(t, t_0, q_1, q_2, \ldots, q_n; q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}) \tag{6}$$

и образујмо варијацију те функције под претпоставком да се мењају координате q_i и почетне вредности тих координата q_{i0} и да су варијације δq_i и δq_{i0} потпуно произвољне. Таква варијација функције W има вредност

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W}{\partial q_{i0}} \delta q_{i0} \right). \tag{7}$$

Са друге стране, пошто је

$$W = \int_{t_0}^{t} L\, dt,$$

исту варијацију можемо израчунати и овако:

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t} L\, dt = \int_{t_0}^{t} \delta L\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i'} \delta q_i' + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i'} d\delta q_i + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i\, dt =$$

$$= \Big/_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \delta q_i + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=n}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \right] \delta q_i\, dt =$$

$$= \Big/_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \delta q_i;$$

јер је на основу диференцијалних једначина кретања система последњи интеграл једнак нули. Пошто је

$$\frac{\partial L}{\partial q_i'} = p_i\,,$$

претходни резултат даје

$$(8) \qquad \delta W = \sum_{i=1}^{n} (p_i\,\delta q_i - p_{io}\,\delta q_{io})\,;$$

изједначење две вредности (7) и (8) варијације δW даје

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - p_i \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial W}{\partial q_{io}} + p_{io} \right) \delta q_{io} \right] = 0\,.$$

Пошто су варијације δq_i и δq_{io} потпуно произвољне, истинитост претходне једначине доводи до једначина

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} - p_i = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_{io}} + p_{io} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

које потврђују форму (5) интеграла каноничних диференцијалних једначина кретања холономног материјалног система; у тој форми се интеграли добијају из потпуног интеграла у облику (6).

Учинимо једну важну практичну примедбу. При интеграцији Хамилтонове једначине, пошто сама функција W не улази у једначину, потпуни интеграл садржи и адитивну константу. При примени Јакобијеве теореме, при диференцирању било по променљивим координатама било по сталним почетним вредностима тих координата, ова константа отпада. Међутим у случају претходне трансформације на нове променљиве адитивну константу треба искључити; треба сматрати функцију W као решење, које треба да задовољава почетне услове.

§ 7·4. Примери

Решимо сад применом интеграције Хамилтонове делимичне диференцијалне једначине два проста задатка.

1. Одредити кретање тешке тачке у безваздушном простору у вертикалној равни (проблем косог хитца).

Оса Ox_1 је хоризонтална, Ox_2 вертикална навише. Тачка има јединичну масу. Хамилтонова једначина изгледа

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2\right]+gx_2=0. \tag{1}$$

Пошто време t и координата x_1 не улазе у ову једначину, може се ставити

$$\frac{\partial W}{\partial t}=c_1, \quad \frac{\partial W}{\partial x_1}=c_2;$$

после тога једначина (1) даје

$$\frac{\partial W}{\partial x_2}=(-2gx_2-2c_1-c_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Затим из једначине

$$dW=\frac{\partial W}{\partial t}dt+\frac{\partial W}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial W}{\partial x_2}dx_2$$

одређујемо потпуни интеграл у облику

$$W=c_0+c_1t+c_2x_1-\frac{1}{3g}(-2gx_2-2c_1-c_2^2)^{3/2}; \tag{2}$$

где су c_0, c_1, c_2 произвољне константе.

Каноничне једначине проблема гласе

$$\frac{dp_1}{dt}=0, \quad \frac{dp_2}{dt}=-g, \quad \frac{dx_1}{dt}=p_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=p_2.$$

Према Јакобијевој теореми интеграле овог система можемо написати

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}=c_2=p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2}=(-2gx_2-2c_1-c_2^2)^{\frac{1}{2}}=p_2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial c_1}=t+\frac{1}{g}(-2gx_2-2c_1-c_2^2)^{\frac{1}{2}}=\alpha_1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial c_2}=x_1+\frac{c_2}{g}(-2gx_2-2c_1-c_2^2)^{\frac{1}{2}}=\alpha_2.$$

Решимо те интеграле по x_1 и x_2:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_2 + c_2(t - \alpha_1), \\ x_2 &= -\frac{g}{2}(t-\alpha_1)^2 - \frac{2c_1 + c_2^2}{2g} \end{aligned}$$

и уведимо нове константе x_{10} и x_{20} за $t = 0$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_{10} &= \alpha_2 - c_2\alpha_1, \\ x_{20} &= -\frac{g}{2}\alpha_1^2 - \frac{2c_1 + c_2^2}{2g}. \end{aligned}$$

На основу (3) и (4) можемо одредити вредности констаната c_1 и c_2 у функцији величина x_1, x_2, x_{10}, x_{20}:

$$c_2 = \frac{x_1 - x_{10}}{t},$$

$$(5)\qquad c_1 = -\frac{1}{2}\frac{(x_1 - x_{10})^2}{t^2} + g x_2 + \frac{g^2}{2}\left(\frac{x_2 - x_{20}}{2gt} - \frac{t}{2}\right)^2.$$

Пошто константу c_0 такође морамо искључити из израза (2) функције W, ако желимо да пређемо на нове промењиве, образујемо разлику

$$W^* = W - W_0,$$

где је

$$W_0 = W_{t=0}.$$

Тада имамо

$$W^* = c_1 t + c_2(x_1 - x_{10}) - \frac{1}{3g}\left[(-2gx_2 - 2c_1 - c_2^2)^{3/2} - \right.$$
$$\left. -(-2gx_{20} - 2c_1 - c_2^2)^{3/2}\right].$$

Ако сад искористимо из (5) вредности констаната c_1 и c_2, можемо написати

$$W^* = \frac{1}{2t}(x - x_{10})^2 + \frac{1}{2t}(x_2 - x_{20})^2 - \frac{gt}{2}(x_2 + x_{20}) - \frac{1}{24}g^2 t^3.$$

Примена Јакобијеве теореме на ову функцију доводи до интеграла у овом облику:

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_{10}}{t} = p_1, \qquad \frac{\partial W^*}{\partial x_{10}} = -\frac{x_1 - x_{10}}{t} = -p_{10},$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_2}=\frac{x_2-x_{20}}{t}-\frac{gt}{2}=p_2, \quad \frac{\partial W^*}{\partial x_{20}}=-\frac{x_2-x_{20}}{t}-\frac{gt}{2}=-p_{20}.$$

Ако сад узмемо у обзир да су

$$p_1=x_1', \quad p_{10}=x'_{10}, \quad p_2=x_2', \quad p_{20}=x'_{20},$$

дефинитивно изводимо познате интеграле проблема косог хитца

$$x_1'=x'_{10}, \qquad x_2'=x'_{20}-gt,$$
$$x_1=x_{10}+x'_{10}\,t, \qquad x_2=x_{20}+x'_{20}\,t-\frac{gt^2}{2}.$$

2. Треба решити систем једначина

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \tag{6}$$

где је

$$H=\frac{1}{2}\,p^2-\frac{k}{q},$$

при чему је k константа.

Хамилтонова једначина која одговара једначинама (6) изгледа

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2-\frac{k}{q}=0.$$

Потпуни интеграл тражимо у облику

$$W=\theta(t)+\varphi(q),$$

где су θ и φ функције које подлеже одређивању. Ако ставимо тај израз у претходну једначину добићемо једначину

$$\theta'(t)+\frac{1}{2}\,[\varphi'(q)]^2-\frac{k}{q}=0,$$

коју можемо задовољити овим вредностима

$$\theta'(t)=\frac{k}{c_1}$$

$$\frac{k}{q}-\frac{1}{2}\,[\varphi'(q)]^2=\frac{k}{c_1}$$

где је c_1 произвољна константа.

После израчунавања одговарајућих квадратура имамо

$$\theta(t) = \frac{k}{c_1} t,$$

$$\varphi(q) = \sqrt{\frac{2k}{c_1}} \left(\sqrt{c_1 q - q^2} + \frac{c_1}{2} \arcsin \frac{2q - c_1}{c_1} \right).$$

Функција W добије облик

$$W = c_0 + \frac{k}{c_1} t + \frac{1}{2} \sqrt{2kc_1} \arcsin \frac{2q - c_1}{c_1} + \sqrt{\frac{2kq}{c_1}(c_1 - q)},$$

а интеграли система (6) се одређују из једначина

$$\frac{\partial W}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial W}{\partial c_1} = \alpha_1$$

где је α_1 нова константа интеграције. Одговарајућа израчунавања не причињавају тешкоће.

ГЛАВА ОСМА

Статика система

§ 8·1. Равнотежа система

Ако се материјални систем, тј. више материјалних тачака, без обзира на то што на те тачке дејствују силе, налази у одређеном положају у простору у трајном миру, тада се за систем каже да се налази у положају *равнотеже*, а за силе да су *уравнотежене* или *стоје у равнотежи*. Онај део динамике система, који проучава равнотежу материјалног система у вези са силама које дејствују на систем, зове се *статика система*.

Из истих разлога, које смо навели у механици тачке, излагање статике система само као једног специјалног дела динамике система, и при томе са претпоставком претходног познавања теорије вектора, много скраћује то излагање у поређењу са излагањем статике пре динамике. У овој књизи се ограничавамо само на изглагање елемената статике система; врло важан део статике, статика чврстог тела, биће предмет нарочите главе у књизи посвећеној механици чврстог тела. Тамо ћемо изложити и основе графостатике.

§ 8·2. Услови равнотеже материјалног система

Проучимо опште услове под којим материјални систем може остати у неком одређеном положају у трајном миру, тј. бити у равнотежи.

Означимо масе тачака са m_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, векторе положаја тих тачака у односу на непокретни пол са $\vec{r}_i$, брзине са

$\dot{r}_i = \vec{v}_i$ и убрзања са $\ddot{r}_i = \vec{w}_i$. Нека тај систем буде у општем случају неслободан и нека се покорава коначним и диференцијалним везама, рецимо, задржавајуће природе, тј. нека постоје једначине

$$f_l\,(\vec{r}_i,\ t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j,\ \vec{v}_i) + D_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Знамо (§ 3 · 2) да се кретање таквог система врши у сагласности са овим диференцијалним векторским једначинама

$$m_i\,\vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l\,\mathrm{grad}_i\,f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\,\mathrm{q}\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Претпостављајући да услови равнотеже постављени за један тренутак времена остају исти за све време мировања, можемо набројити ове услове равнотеже неког неслободног материјалног састема:

1. Систем не може имати почетних брзина. Тај услов је тривијално очигледан.

2. Коначне и диференцијалне везе треба да буду стационарне, тј. треба да задовољавају услове

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad D_j = 0.$$

Ово непосредно следује из чињенице да вредности брзина

$$\vec{v}_i = 0$$

треба да спадају у могуће брзине за све време трајања мира.

3. Силе и реакције за исто време треба да задовољавају услове:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Покажимо да су ови услови неопходни и довољни. Неопходност првог и другог услова већ смо показали а трећи услов следује из чињенице да за време мира убрзања $\vec{w}_i$ морају бити једнаки нули. Ови услови су и довољни, јер последњи услов под 3. повлачи за собом да су $\vec{w}_i = 0$ и то за све време мира, а како су на основу услова 1. почетне брзине једнаке нули, биће и брзине за све време једнаке нули, и према томе систем остаје у трајном миру.

Често пута се наводи и четврти услов равнотеже:

4. Активне силе које дејствују на систем не смеју зависити од времена.

Овај услов се налази у сагласности са захтевом да услови равнотеже постављени за један тренутак времена остају исти за све време равнотеже система, али он није неопходан уопште за равнотежу система, јер неопходни услови (1) за равнотежу система могу бити испуњени и кад силе $\vec{F}_i$ зависе од времена, пошто у збиру $\vec{F}_i + \vec{R}_i$ могу оба члана зависити од времена, али њихов збир може увек бити једнак нули. Тако, на пр., ако камен лежи на хоризонталној равни и ми га притискујемо вертикално наниже промењивом силом, камен ће остати у миру, само и реакција равни вертикално навише мења своју вредност. Обично се проучавање равнотеже материјалног система под утицајем промењивих активних сила издваја у посебни део статике система. Тај део је исто тако врло важан, нарочито у практичним применама, где су активне силе, такозвано оптерећење система, промењиве. На пример, покретно оптерећење моста, дизалице и других грађевинских и машинских конструкција.

Услови (1) равнотеже система зову се *једначине равнотеже материјалног система.* Оне захтевају да резултанта свих сила, активних и реакција, које дејствују на сваку поједину тачку система, мора бити једнака нули.

Услови (1) написани у развијеном облику изгледају

$$\vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q} \operatorname{grad}_i \varphi_j = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Приметимо да у случају ма које незадржавајуће везе множитељ те везе само тада улази у једначине равнотеже кад има позитивну вредност; другим речима, реакције могу бити наперене само у ону област простора куд могу да се помере одговарајуће материјалне тачке. При томе се узима у обзир услов да саме по себи силе реакције не могу да одвоје систем од одговарајуће везе.

Једначине (1) односно (2) су основа за решавање свих проблема везаних са статику материјалног система. Ове једначине се могу користити или рачунском или графичком методом.

Из тих једначина могу се извести помоћни ставови, који су понекад од велике користи за проучавање равнотеже специјалних материјалних система, нарочито чврстог тела. Наведимо неке од тих ставова.

Ако саберемо чланове свих једначина (1) добићемо векторску једначину

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i = 0. \tag{3}$$

Први збир садржи све активне силе, које дејствују на тачке система. Од тих сила унутрашње силе увек улазе у паровима, по две силе истог правца и интензитета, али супротног смера; пошто је збир таквих сила увек једнак нули, можемо тврдити да је први збир једнак резултанти само спољашњих сила. Означимо ту резултанту са $\vec{F}_E$. Што се тиче сила реакција и оне могу бити двојаке природе. Ако масе, које остварују механизам везе, не припадају систему, реакције су спољашње силе, а ако су извори реакција у масама самог система, реакције су унутрашње силе, оне улазе у паровима и не утичу на вредност резултанте другог збира, која се на тај начин састоји само од спољашњих реакција. Ако резултанту спољашњих реакција означимо са $\vec{R}_E$, из једначине (3) изводимо једначину

$$\vec{F}_E + \vec{R}_E = 0, \tag{4}$$

коју можемо формулисати ставом:

Ако је материјални систем у равнотежи, збир свих спољашњих сила (активних сила и реакција) једнак је нули.

За извођење другог става узмимо у простору произвољну тачку O и означимо, као увек, векторе положаја тачака система у односу на ту тачку са $\vec{r}_i$. Из једначина (1) после векторског множења добијамо једначине

$$[\vec{r}_i, \vec{F}_i] + [\vec{r}_i, \vec{R}_i] = 0,$$

које показују да је збир момента активне силе и момента реакције, које дејствују на једну тачку система једнак нули. Сабирањем свих таквих једначина имамо

$$\sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{R}_i] = 0 .$$

И овде у означеним збировима треба задржати само спољашње силе, јер је збир момената сваког пара унутрашњих сила (активних односно реакција) једнак нули. На тај начин можемо написати векторску једначину

$$\vec{M}_{EA} + \vec{M}_{ER} = 0 , \tag{5}$$

где први вектор означава резултујући момент свих спољашњих активних сила, које дејствују на систем, а други вектор се односи на реакције. Наведеној векторској једначини одговара став:

Ако је материјални систем у равнотежи, збир свих момената спољашњих сила (активних сила и реакција) у односу на произвољан пол једнак је нули.

Једначине (4) и (5) показују да, ако систем свих спољашњих сила сматрамо као систем везаних вектора, у случају равнотеже материјалног система тај систем вектора еквивалентан је нули.

Услови равнотеже изражени једначинама (4) и (5) зову се понекад *општи услови равнотеже материјалног система*.

За равнотежу сваког материјалног система услови (4) и (5) су неопходни, али, разуме се, у општем случају нису довољни. За једно чврсто тело, како ћемо то видети у статици чврстог тела, услови (4) и (5) су не само неопходни већ и довољни. Према томе, ако се наш материјални систем, који се налази у равнотежи претворио тренутно у непроменљив систем или га ми сматрамо као такав, тј. као чврсто тело, онда ће и то чврсто тело, пошто су задовољени довољни услови, остати у равнотежи. Дакле важи став:

Ако се неки променљиви материјални систем под утицајем спољашњих сила налази у равнотежи, он ће остати у равнотежи и кад га сматрамо као чврсто тело или, како се каже, кад га солидификујемо.

Овај став се понекад зове *принцип солидификације*. Према томе принципу, ако проучавамо равнотежу неког променљивог система, можемо пре свега искористити услове равнотеже тог система сматрајући га као чврсто тело.

Ако је систем холономан и склерономан, за одређивање положаја равнотеже таквог неслободног материјалног система много може да користи употреба независних координата система. Ако је положај система одређен помоћу независних координата q_1, $q_2, \ldots, q_n$, из Лагранжевих једначина кретања у облику (5) § 3·32 за $q_i'' = 0$ и $q_i' = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непосредно следују услови равнотеже система у облику

$$Q_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

тј. за положај равнотеже све генералисане силе морају бити једнаке нули.

Најзад, ако су координате $q_1, q_2, \ldots, q_n$ независне и спољашње силе имају функцију сила U, тј.

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

услови равнотеже с обзиром на (6) гласе

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 1, \ldots, n.$$

Према томе можемо тврдити да положајима равнотеже система одговарају стационарне вредности функције сила односно потенцијалне енергије система.

Ако координате система нису независне већ између њих постоје везе

$$F_l\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

за одређивање положаја равнотеже треба анализирати релативне стационарне вредности функције

$$U + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l\, F_l,$$

где су λ_l стални неодређени множитељи. Услови стационарности доводе до ових једначина равнотеже

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

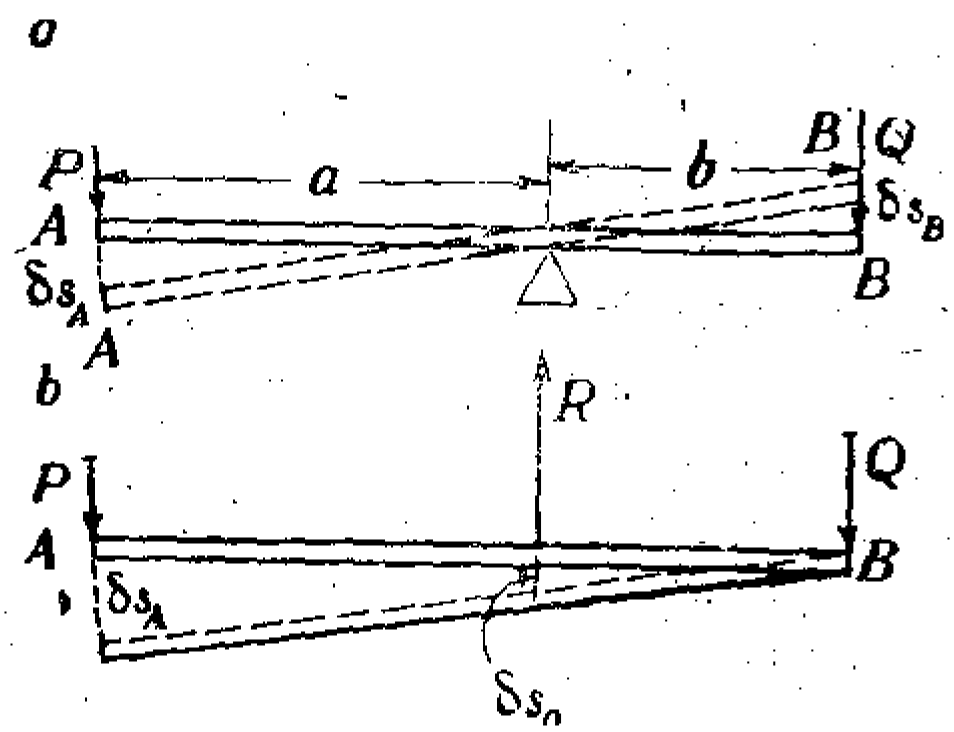
које заједно са једначинама (7) омогућују одређивање: 1. координата $q_1, q_2, \ldots, q_n$ положаја равнотеже, ако ти положаји постоје, и 2. множитеља веза $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ за одређивање реакција тих веза.

§ 8·3. Принцип могућих померања

У § 6·3 смо навели Лагранжев принцип могућих померања који гласи: Рад свих спољашњих активних сила на свим могућим померањима материјалног система, који се налази у равнотежи не може бити позитиван. За системе са задржавајућим везама тај рад је увек једнак нули, а за случај незадржавајућих веза он може бити и негативан.

Покажимо сад на простим примерима како тај принцип може да послужи за проучавање равнотеже материјалног система.

Равнотежа полуге. Нека на крај A хоризонталне полуге (сл. 51,a) подупрте у тачки O дејствује вертикална сила P наниже, а на други крај B таква сила Q. Отстојање тачке A од O је a, а тачке B од O је b. Треба методом могућих померања наћи услове равнотеже полуге.



Слика 51

Обрнимо полугу око тачке O за бескрајно мали угао $\delta\theta$. Тачке A и B изврше мала померања δs_A δs_B која можемо сматрати као праволиниска и вертикална. Ако искористимо аритметичке вредности сила и померања, добићемо ову једначину као израз принципа могућих померања:

$$(1) \qquad P\delta s_A - Q\delta s_B = 0.$$

Како је

$$\delta s_A = a \cdot \delta\theta, \qquad \delta s_B = b \cdot \delta\theta$$

из претходне једначине следује познати Архимедов услов равнотеже полуге:

$$(2) \qquad Pa = Qb$$

који одговара услову једнакости момената сила P и Q око тачке O.

Покажимо овде и начин како се може помоћу истог принципа одредити реакција R која дејствује на полугу у тачки O (сл. 51, b).

Ако је полуга у равнотежи под утицајем датих сила P и Q и реакције R, тачку O можемо уклонити и сматрати полугу као слободну, која се налази под утицајем сила P, Q и R. Тој полузи, као слободној, можемо дати произвољно померање. Обрнимо је око тачке B за бесконачно мали угао $\delta\varphi$ како је то показано на слици. Тада рад сила даје

$$P\,\delta s_A - R\,\delta s_O = 0\,.$$

Пошто је

$$\delta s_A = (a+b)\,\delta\varphi\,, \quad \delta s_O = b\,\delta\varphi\,,$$

из претходне једначине добијамо

$$R = P\,\frac{\delta s_A}{\delta s_O} = P\,\frac{a+b}{b}\,,$$

одакле на основу (2) изводимо

$$R = P + Q\,,$$

како то следује из услова једнакости са нулом свих сила што дејствују на полугу.

Учинимо још једну историску примедбу. Ако замислимо да се наша полуга креће из хоризонталног положаја, можемо сматрати δs_A и δs_B као елементарна стварна померања крајева; поделом тих померања са одговарајућим елементом времена δt добићемо у граничним вредностима брзине v_A и v_B тачака A и B. Према томе из (1) добијамо

$$P v_A = Q v_B\,.$$

Ова једначина тврди да нападну тачку, рецимо, веће силе Q можемо покретати мањом силом P. Али при томе ће брзина v_B нападне тачке B веће силе Q бити онолико пута мања од брзине v_A нападне тачке A мање силе P колико је сила P мања од силе Q. Одавде потиче још одавно познато механичко правило, које је формулисао Галилеј:

Quanto si guadagna di forza, tanto perdersi in velocitá[1]:

Колико добијемо у сили, толико губимо у брзини.

Равнотежа простих машина. Иста расуђивања се могу применити и на друге такозване *просте машине*. Под простом машином разумемо материјални систем са једним степеном слободе који доводи до равнотеже две спољашње силе: једну, *покретач машине*, и другу — *пасивну силу, силу корисног отпора*.

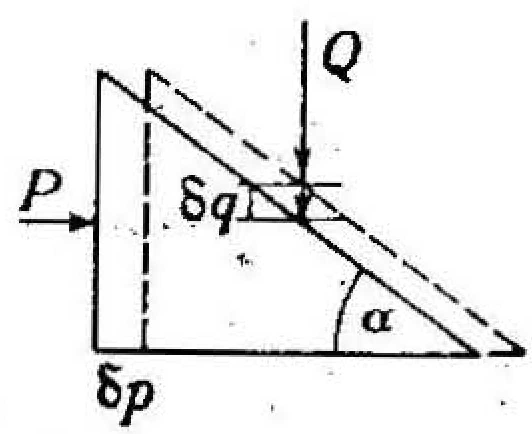
[1]) *Galilei* — Opere 2, p. 183.

Ако прву силу означимо са P, другу са Q, а елементарна померања нападних тачака тих сила у правцу самих сила са δp и δq, принцип могућих померања даје:

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0 .$$

Пошто између померања δp и δq треба да буде из природе механизма машине позната линеарна веза, коју можемо написати

$$\alpha\,\delta p + \beta\,\delta q = 0 ,$$



Слика 52

за сваку просту машину поставља се услов равнотеже у облику

$$P\beta - Q\alpha = 0 .$$

Узмимо, на пр., стрму раван као просту машину (сл. 52). Рад силе покретача има вредност $P\delta p$, где је δp померање силе P према оштрици стрме равни, а рад силе отпора Q једнак је $-Q\delta q$, јер сила Q и померање са апсолутном вредношћу δq имају супротне смерове. Према томе принцип могућих померања даје:

$$P\,\delta p - Q\,\delta q = 0 .$$

Са друге стране, између δp и δq постоји веза

$$\delta q - \delta p \cdot tg\,\alpha = 0 ,$$

где је α угао стрме равни. Из претходних једначина имамо услов равнотеже, који одређује силу покретача:

$$P = Q\,tg\,\alpha .$$

§ 8·4. Врсте равнотеже. Стабилност равнотеже. Лежен-Диришлеова теорема

Уочимо материјални систем са n степена слободе. Независне координате тог система означимо са

$$q_1, q_2, \ldots, q_n .$$

Рачунајмо, ради упрошћавања излагања, те координате тако да у положају равнотеже система све ове координате буду једнаке нули, тј.

$$(q_i)_0 = 0 ,$$

где су ознаке очигледне. У положају равнотеже изводи од тих координата по времену, генералисане брзине, исто тако морају бити једнаки нули, наиме

$$(q_i')_0 = 0 .$$

Упоредо са положајем равнотеже система, који ћемо сматрати као непоремећено стање система, замислимо да смо поставили систем у други положај, различит од положаја равнотеже, са координатама

$$(q_i)_0 = \varepsilon_i ,$$

где су ε_i константне величине, и саопштили тачкама система такве могуће брзине, да генералисане брзине имају вредности

$$(q_i')_0 = \varepsilon_i' ,$$

где су ε_i' нове константе. Тиме смо пореметили стање равнотеже система; систем, пошто има почетне брзине, почеће да се креће из новог положаја. Ово његово кретање зове се *поремећено кретање* система у односу на положај равнотеже. Карактер тог поремећеног кретања одређује природу положаја равнотеже и то на овај начин.

Изаберимо $2n$ произвољних, колико год желимо малих, позитивних величина

(1) $$L_i , L_i' ,$$

за које ћемо казати да одређују област L.

Ако за све вредности величина (1) увек можемо одредити такве позитивне величине

$$E_i , E_i' \qquad \text{(област } E\text{)}$$

да за све стварне вредности горе наведених величина

$$\varepsilon_i , \varepsilon_i' , \qquad \text{(област } \varepsilon\text{)}$$

које задовољавају услове

$$|\varepsilon_i| \leqslant E_i , \ |\varepsilon_i'| \leqslant E_i' ,$$

буду за све време кретања испуњени услови

$$|q_i| \leqslant L_i , \ |q_i'| \leqslant L_i' ,$$

онда се каже за положај равнотеже да је *стабилан*.

Ако горе наведени услови нису задовољени, положај равнотеже је *нестабилан* или *лабилан*.

Везу између наведених области можемо схематски претставити сликом (сл. 53).

Слика 53

Помоћу те схеме услове стабилности равнотеже можемо изразити речима:

Ако се из сваког произвољног кинематичког стања ε, које се налази у области OE (а E се одређује према вредностима L изабраним по жељи), систем креће тако да његово кинематичко стање остане у OL, положај равнотеже је O стабилан.

Понекад се из нестабилних положаја издвајају такозвани *индиферентни* или *астатички* положаји равнотеже. Услове индиферентне равнотеже формулишемо речима:

Ако можемо показати такву област L са по жељи изабраним малим позитивним величинама $L_1, L_2, \ldots, L_n$ да у сваком положају ε_i области ε материјални систем без почетних брзина ($\varepsilon_i' = 0$) остане у миру, биће положај равнотеже индиферентан. Али у смислу горенаведене дефиниције стабилности, тај положај је нестабилан, јер и најмања вредност ε_i' почетне брзине уопште изводи систем из области L, ако је та област у вези и са почетним брзинама.

Наведимо једноставан пример. Узмимо тешко чврсто тело, које се може обртати око хоризонталне осовине са геометриском осом OO'. Ако се тежиште тог тела налази у вертикалној равни што пролази кроз осу OO', тело је у равнотежи. При чему, ако је тежиште испод те осе, равнотежа је стабилна, ако је пак изнад или на оси, равнотежа је нестабилна. Специјално, кад се тежиште налази на оси, равнотежа је индиферентна. У овом случају тело, стављено ма у који положај без почетне брзине, остаће у миру, биће у равнотежи. Али и најмања почетна брзина ставља то тело у равномерно обртање око осовине, ако се кретање претпоставља без трења. У смислу постављене дефиниције стабилности ови индиферентни положаји равнотеже су нестабилни.

Претпоставимо сад да силе, које дејствују на систем, имају функцију сила U. Увек можемо тако рачунати вредности те функције да она у положају равнотеже буде једнака нули, тј

$$U_0 = 0\,.$$

Како она треба да задовољава услове равнотеже, имамо за тај положај

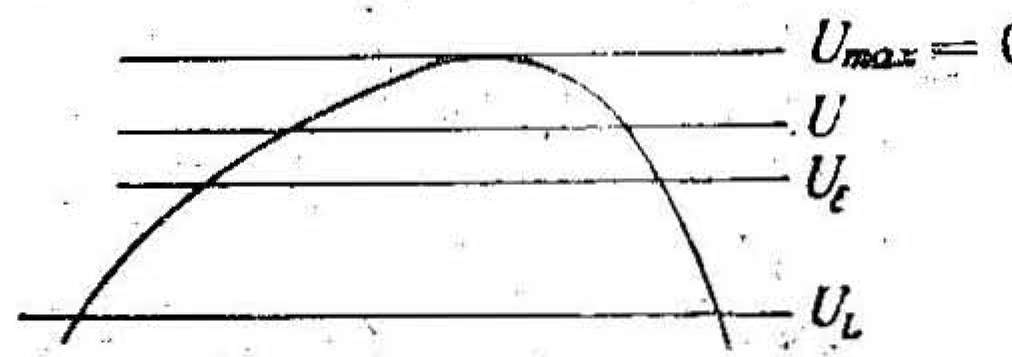
$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Нека је, сем тога, дато да функција U у том положају има максимум, а не ма коју другу стационарну природу. Потенцијална енергија система тада има минимум.

Докажимо да и за материјални систем важи Лежен-Диришлеова теорема, коју је без доказа први изнео Лагранж. Ова теорема гласи:

Ако у положају равнотеже материјалног система функција сила има максимум (потенцијална енергија — минимум), равнотежа система је стабилна.

Ако у положају равнотеже функција U има максимум, постоји област тог максимума, у којој су све вредности те функције негативне (сл. 54). Ограничимо ту област по жељи изабраном вредношћу U_L, која може бити мала колико год желимо; тада свака вредност функције U у тој области мора задовољавати услов



Слика 54

(2) $$U > U_L .$$

И обратно: ако у току даљег кретања функција U задовољава услов (2), систем не може изаћи из указане области максимума, јер је ван те области

$$U < U_L .$$

Ако покажемо да увек можемо поставити систем у такав положај са вредношћу функције силе U_ε и са вредношћу живе силе $T_{\varepsilon'}$ да за све време даљег кретања буде испуњен услов (2), систем ће остати у области максимума и равнотежа ће бити стабилна.

За доказ пре свега искористимо интеграл живе силе

$$T - U = T_{\varepsilon'} - U_\varepsilon ,$$

из кога, због позитивности живе силе, следује да је

(3) $$U > U_\varepsilon - T_{\varepsilon'} .$$

Са друге стране, почетну живу силу $T_{\varepsilon'}$ можемо увек изабрати толико малом, али различитом од нуле, да буде

$$T_{\varepsilon'} < U_\varepsilon - U_L .$$

Одавде следује да је

(4) $$U_\varepsilon > T_{\varepsilon'} + U_L\,.$$

Сабирањем неједнакости (3) и (4) долазимо до резултата

$$U > U_L\,,$$

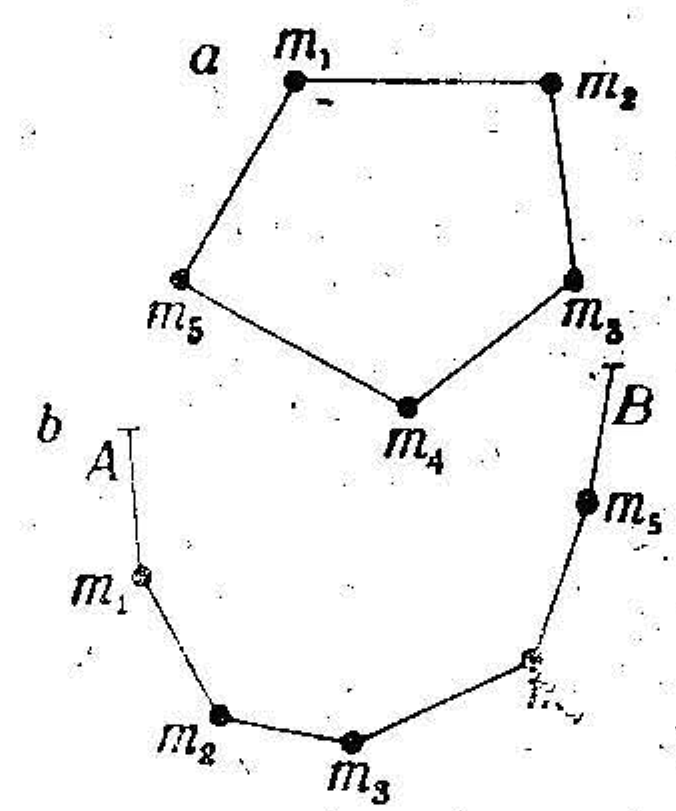
који потврђује Лежен-Диришлеову теорему.

Важно је приметити да обрнути став није тачан: систем може бити у стабилној равнотежи и кад функција силе нема максимум. Питање услова нестабилности равнотеже компликовано је. Проучавање тих услова не може бити предмет овог елементарног течаја рационалне механике.

У примени на такозване *тешке системе*, тј. материјалне системе на које, сем унутрашњих сила, као спољашње силе дејствују само силе теже, Лежен-Диришлеова теорема доводи до резултата да је положај равнотеже таквих система са најнижим положајем тежишта стабилан.

§ 8·5. Равнотежа полигона

Замислимо низ од n материјалних тачака m_1, m_2, ..., m_n (пример за $n=5$ на слици 55, a), везаних између себе штаповима односно ужетима тако да је свака тачка везана само са дведруге тачке система. Сваки од штапова, чије масе занемарујемо[1]), остварује задржавајућу везу између две суседне тачке. Ужета, исто без маса остварују незадржавајуће једностране везе; за системе са ужетима анализираћемо само оне положаје кад су сва ужета затегнута и имају између две тачке праволиниски облик. У сваком темену, чвору полигона, штапови односно ужета могу имати произвољан положај један према другом; другим речима, сматрамо да сам по себи,



Слика 55

[1]) Од овог апстрактног ограничења може се ослободити у статици чврстог тела. Тамо извршена допуна оснажује теорију са штаповима односно ужетима без маса, које се овде придржавамо.

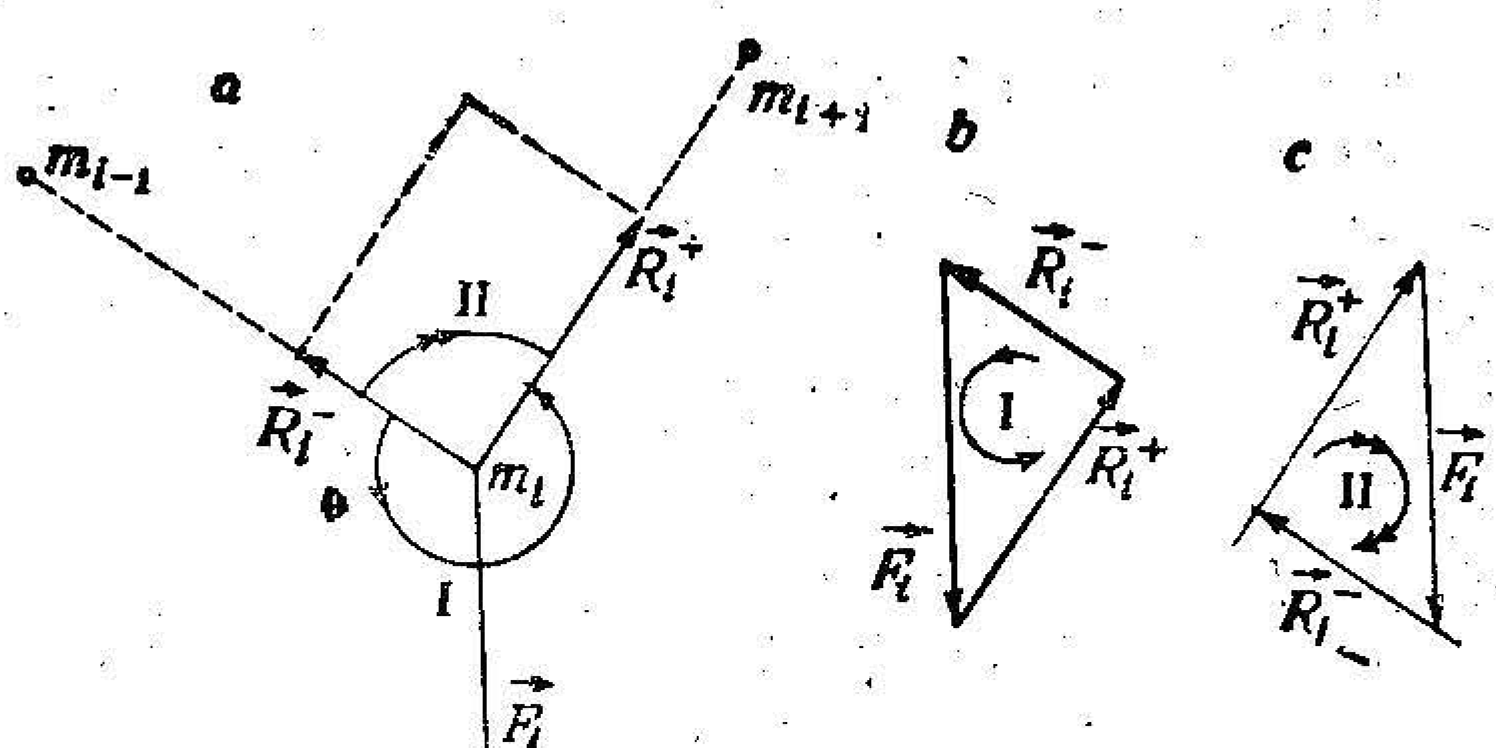
без утицаја сила, полигон може имати произвољан облик, али задржава при томе увек дата растојања између везаних тачака. Материјални систем од тачака тако везаних штаповима или ужетима зове се *затворени верижни полигон.*

Ако у систему (пример на слици 55, *b*) постоје две тачке, које су спојене са по једном тачком система, а, сем тога, су везане са масама које не припадају систему (на слици у тачкама *A* и *B*), материјални систем чини *отворен верижни полигон.*

На сваку i'ту тачку затвореног верижног полигона дејствују три силе: спољашња сила $\vec{F_i}$ и две реакције, једна од претходне $i-1$ тачке, коју означимо са $\vec{R_i^-}$, и друга од наредне $i+1$ са ознаком $\vec{R_i^+}$. Пошто те силе треба да буду у равнотежи, имамо ових n услова равнотеже за целокупни систем

$$\vec{R_i^-} + \vec{F_i} + \vec{R_i^+} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

На слици 56, *a* показан је распоред сила, које дејствују, рецимо, на i'ту тачку верижног полигона. На сликама 56, *b* и *c* засебно су показани полигони (троуглови) сила које одговарају



Слика 56

равнотежи исте тачке; при чему на слици *b* ред троуглових страна одговара једном реду елемената на слици *a*, а на слици *c* другом реду тих елемената. Видимо да између слике *a* и слике *b* односно *c* постоји извесна веза.

Пошто је увек, према трећем Њутновом закону,

$$R_i^+ = -R_{i+1}^-,$$

при чему на споју прве и последње тачке имамо

$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_n^{+},$$

у систем векторских једначина (1) улазе свега n величина реакција, других n реакција се разликују само знаком.

У случају отвореног полигона за крајње тачке имамо

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\vec{R}_1 + \vec{F}_1 + \vec{R}_1^{+} = 0\,, \\ &\vec{R}_n^{-} + \vec{F}_n + \vec{R}_n = 0\,, \end{aligned}$$

где су са $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_n$ означене реакције спољашњих маса, рецимо, места (A и B на слици 55, b) учвршћења крајњих штапова или ужета, а за остале тачке поново важе једначине

$$(3) \qquad \vec{R}_i^{-} + \vec{F}_i + \vec{R}_i^{+} = 0\,, \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

Према томе за отворен полигон имамо $n-1$ унутрашњу реакцију и две спољашње.

Примена општих ставова о условима равнотеже материјалног система изражених једначинама (4) и (5) § 8·2 на случај равнотеже верижних полигона даје:

за затворени полигон

$$\vec{F}_E = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0,$$

$$(4) \qquad \vec{M}_{EA} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = 0,$$

где су $\vec{r}_i$ вектори положаја тачака у односу на дати произвољан пол, рецимо тачку O;

за отворени полигон

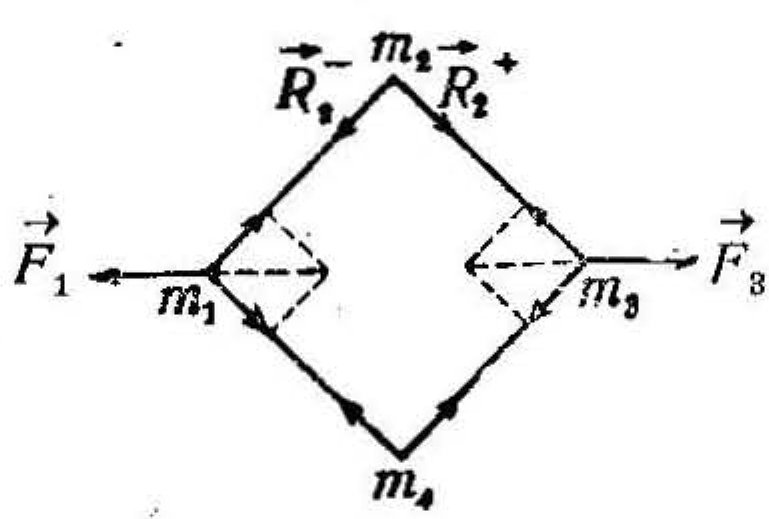
$$\vec{F}_E + \vec{R}_E = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{R}_1 + \vec{R}_n = 0\,,$$

$$(5) \qquad \vec{M}_{EA} + \vec{M}_{ER} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + [\vec{r}_1, \vec{R}_1] + [\vec{r}_n, \vec{R}_n] = 0\,.$$

У зависности од врсте проблема о равнотежи верижног полигона и средстава проучавања тог проблема, једначине (1) односно (2) и (3), и закључци из њих (4) или (5), могу се искористити или у чисто векторској форми са графичким извођењем операција или после пројицирања на осе у скаларном облику за бројна израчунавања.

Једна врста проблема, важних и у практичним применама, састоји се 1. у одређивању облика верижног полигона и 2. у израчунавању реакција, унутрашњих евентуално и спољашњих (реакција ослонаца) за отворени полигон, под условом да су дате спољашње силе које дејствују на полигон. Те спољашње силе у случају равнотеже исто тако треба да задовољају одређене услове.

Важно је приметити да испуњење општих услова равнотеже за спољашње силе (4) односно (5) у општем случају није довољно за равнотежу верижног полигона, Тако, на пр., квадрат $m_1 m_2 m_3 m_4$ (сл. 57) не може да се налази у равнотежи само под утицајем две спољашње силе $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ истог правца и једнаког интензитета али супротног смера и то без обзира на то што ове силе очевидно задовољавају опште услове равнотеже (4), јер на тачку m_2 могу да дејствују само две управне силе, и то различите од нуле, које саме по себи не могу бити у равнотежи.

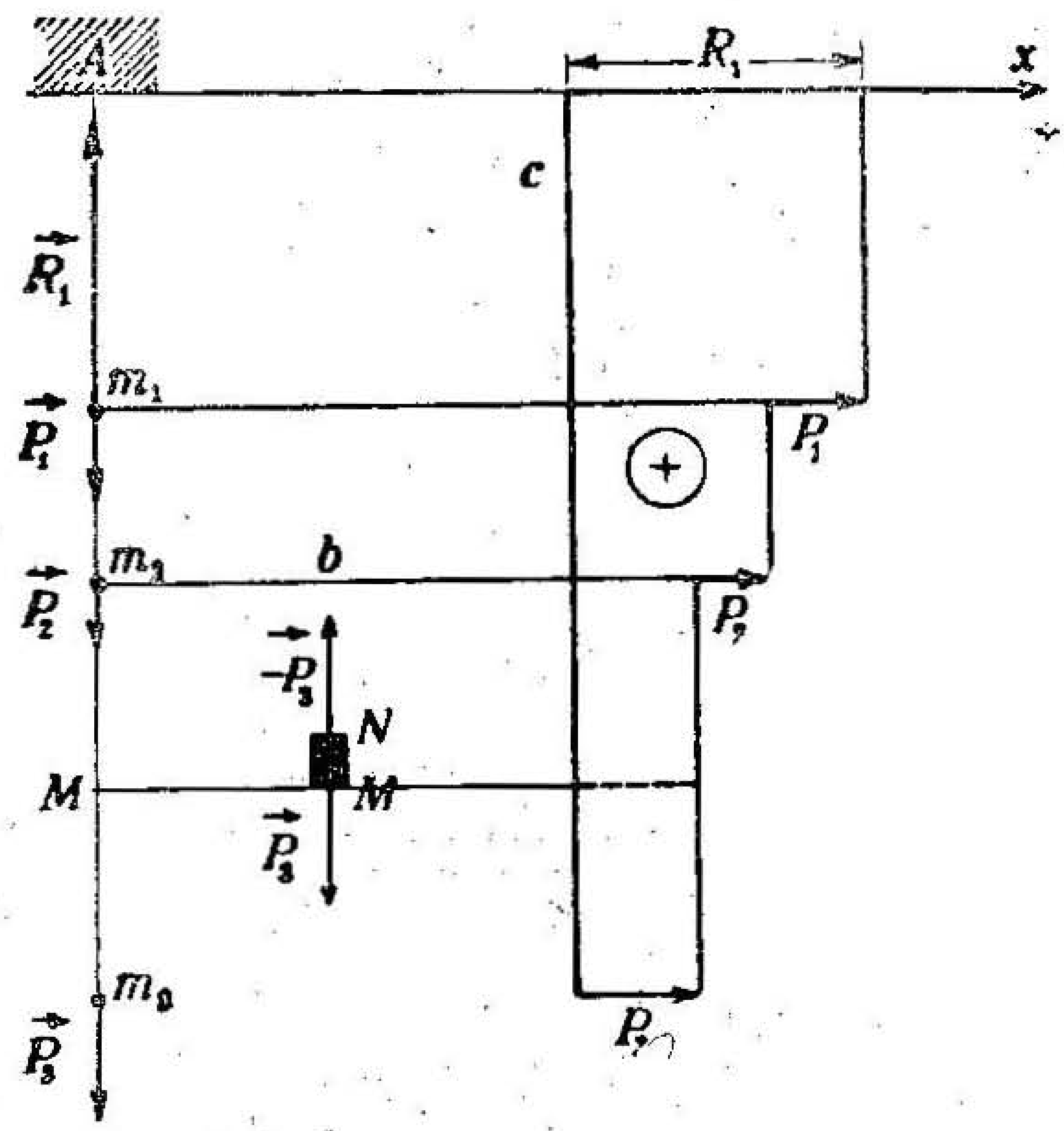


Слика 57

Протумачимо још нека питања статике на специјалним случајевима равнотеже верижних полигона.

Узмимо пре свега најједноставнији случај, кад отворен верижни полигон дегенерише у праволиниску дуж, на којој се налазе материјалне тачке (сл. 58,*a*). Пошто сваке две стране тог полигона падају у исту праву, мора и активна сила, која дејствује на тачку, имати правац те линије; и обратно: правац активне силе одређује правац дужи таквог полигона. Тако, на пр., тешке масе m_1, m_2, m_3 (сл. 58, *a*) на које дејствују силе теже P_1, P_2, P_3 морају припадати вертикалној линији. На прву тачку дејствује и спољашња реакција $\vec{R}_1$. Пошто из општег услова равнотеже следује да је главни вектор сила једнак нули, имамо једначину

$$\vec{R}_1 + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 0,$$



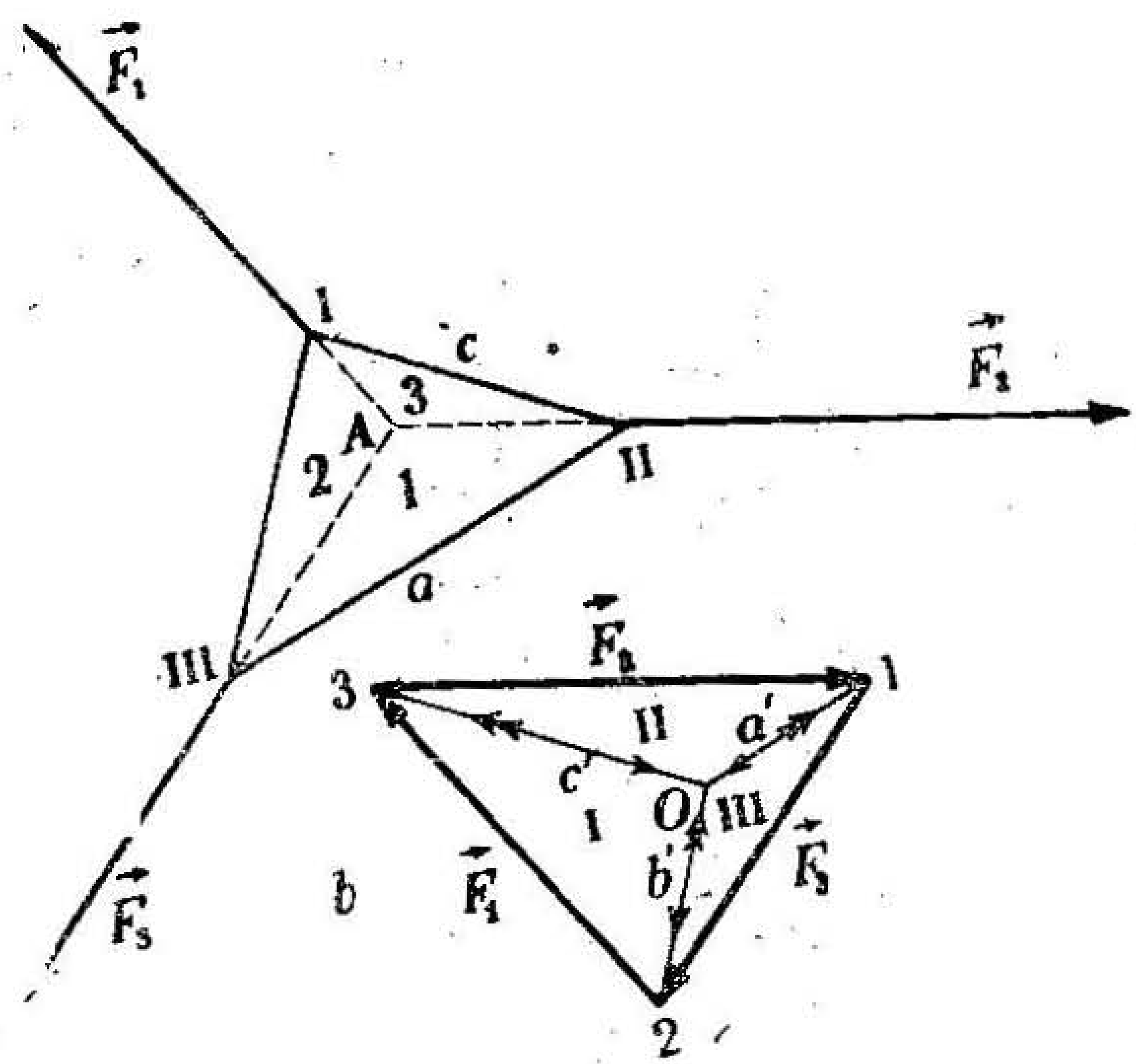
Слика 58

из које се одређује величина реакције $\vec{R}_1$. Ако вертикалу оријентишемо наниже, биће

$$R_1 = -(P_1 + P_2 + P_3).$$

Према томе спољашње масе, које служе као извор реакције $\vec{R}_1$, треба да издрже силу $-R = P_1 + P_2 + P_3$ која тежи да отргне штап Am_1 од тачке A.

Узмимо сад у обзир одређени штап, рецимо $m_2\,m_3$, који веже тачке m_2 и m_3 и, не узимајући у обзир апстракцију, вратимо му материјалност. Расецимо га у тачки M (сл. 58, b) и око тог пресека узмимо елемент MN. Тај елемент такође треба да буде у равнотежи. На њега дејствују, не рачунајући тежину самог штапа у нашем конкретном случају две силе: сила $\vec{P}_3$ у тачки M и сила $(-\vec{P}_3)$ у тачки N. Под утицајем ових сила наш елемент је изложен *затезању*. Затезање се претставља овако ←▬→, а *притисак* овако →▬←. У сваком пресеку штапа затезање тежи да раздвоји материјал штапа у том пресеку, а притисак да елемент штапа у близини тог пресека спљошти, да га згњечи, здроби. Затезање и притисак имају заједнички назив *напона* штапа у датом пресеку. Напони су вектори, али пошто се правац напона за случај полигона увек поклапа са страном тог полигона, довољно је одредити алгебарску вредност тог вектора. Усвојено је да се затезање сматра као позитиван напон, а притисак као негативан. На сл. 58, c дат је график напона затезања. Затезања дуж линије Am_3 показана су на нормалама у правцу Ax осе.



Слика 59

Ако од материјалног система издвојимо један део помоћу два пресека, исечени део остаће у равнотежи, ако на оне крајеве штапова, који припадају делу система, дејствује на сваки крај сила једнака напону тог пресека и то у смеру од штапа у случају затезања, тј. позитивног напона, а у смеру самог штапа у случају притиска — негативног напона.

Узмимо други конкретни пример. Нека је дат троугао I, II, III (сл. 59) произвољног облика. Зауставимо се на троуглу од штапова, који не може мењати свој облик и према томе се може сматрати као непроменљив систем. Покажимо да је за равнотежу таквог троугла довољно да буду испуњени само општи услови равнотеже, тј. да буду једнаки нули главни вектор сила које дејствују на систем и њихов главни момент ма око које тачке равни троугла.

Нека на тачке I, II, III троугла дејствују силе $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, које задовољавају два услова:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0\,,$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0\,,$$

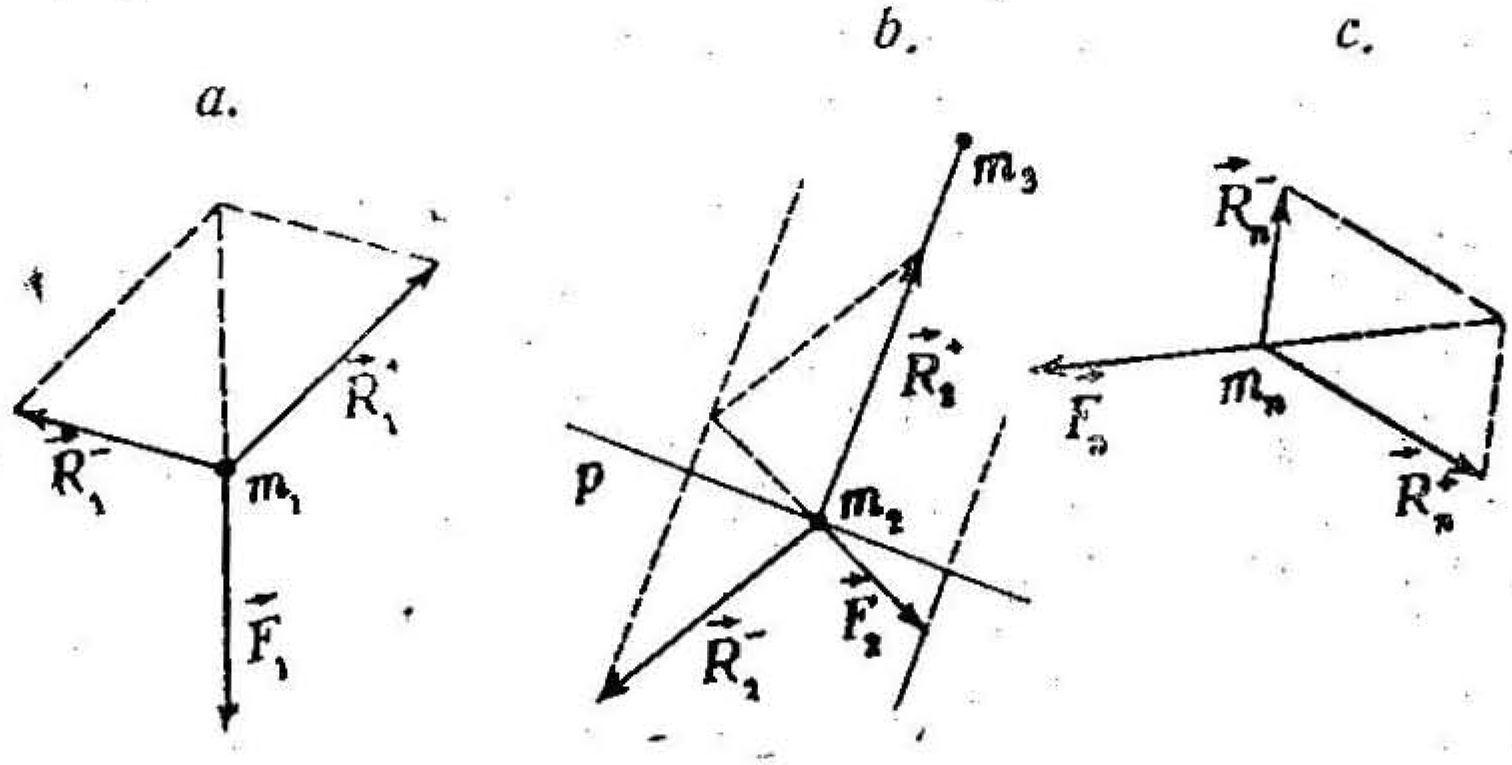
где смо са $\vec{M}_i$ кратко означили момент силе $\vec{F}_i$ око одређене али у равни троугла произвољно изабране тачке, исте за све силе.

Покажимо, пре свега, да силе $\vec{F}_i$ $(i=1, 2, 3)$, сматране као вектори везани за праве, морају да се секу у истој тачки, коју означимо са A. Претпоставимо да се у тачки A секу само две силе $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и да трећа сила $\vec{F}_3$ не пролази кроз ту тачку. Пошто су тада моменти сила $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ око те тачке A једнаки нули, а момент силе $\vec{F}_3$ није једнак нули, главни момент за ту тачку не би био једнак нули, а то је супротно претпоставци; према томе и трећа сила пролази кроз тачку A.

Ако пренесемо силе $\vec{F}_i$ $(i=1, 2, 3)$ у тачку A, њихов збир мора бити једнак нули. Конструкција збира тих сила може се извести засебно на *слици плана* или *полигона сила* (сл. 59, b); у случају равнотеже тај полигон мора бити затворен. Приметимо да се величине сила на верижном полигону и полигону сила могу нацртати у различитим размерама. На слици полигона сила конструишимо за силу $\vec{F}_i$ (помоћу правих b' и c' паралелних правима b и c на слици верижног полигона) троугао I који одговара равнотежи тачке I на слици верижног полигона. Означимо теме, супротно сили $\vec{F}_1$, тог троугла са O. На странама тог троугла једна стрелица означава смер оних сила које, као реакције, дејствују на тачку I. Пређимо сад на равнотежу тачке II. На слици полигона сила видимо да на ту тачку дејствује сила $\vec{F}_2$, реакција c' са смером обележеним са две стрелице и сила a' са смером обележеним са једном стрелицом. Страна a' је паралелна страни a верижног полигона. Најзад, троугао III полигона сила одговара равнотежи тачке III верижног полигона. Полазећи од општих услова равнотеже дошли смо до равнотеже свих темена верижног троугла.

Између две слике — слике верижног полигона и слике полигона сила постоји одређена геометриска веза која се карактерише као *реципрочност*. Ту везу можемо изразити набројавањем ових особина слика:

1. Свака слика има исти број правих, наиме шест за наш случај троугла.



Слика 60

2. Свакој правој једне слике одговара паралелна права друге слике.

3. Свакој тачки са три праве једне слике одговара троугао са друге слике.

Слична расуђивања могу се применити и на проучавање равнотеже равног верижног полигона са више страна. Али за равнотежу полигона са бројем страна већим од три, општи услови равнотеже нису довољни. Силе које дејствују у теменима таквог полигона треба да задовољавају још и допунски услове. Број тих допунских услова за случај равног верижног полигона можемо израчунати овако. Почнимо од равнотеже првог темена са силом $\vec{F}_1$; ова сила може бити потпуно произвољна, јер увек може бити уравнотежена силама реакција у штаповима са крајевима у првом темену (сл. 60, *a*). Пошто нам је у другом темену (сл. 60, *b*) већ одређана једна реакција од првог темена и дат је правац друге реакције, који се одређује положајем штапа $m_2 m_3$, пројекција силе $\vec{F}_2$ на праву p нормале на штап $m_2\,m_3$ мора бити исте величине али супротног смера у поређењу са пројекцијом реакције $\vec{R}_2$ на исту праву. То је услов који треба да задовољава сила $\vec{F}_2$. Сличан услов треба да задовољава спољашња сила у сваком наредном темену затвореног верижног полигона сем последњег темена, где сила $\vec{F}_n$ (сл. 60, c) треба да задовољава два услова, јер су реакције у два штапа тог темена већ унапред одређене. Преме томе број скаларних услова за равнотежу затвореног верижног полигона са n страна износи

$$0+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-2}+2=n\,,$$

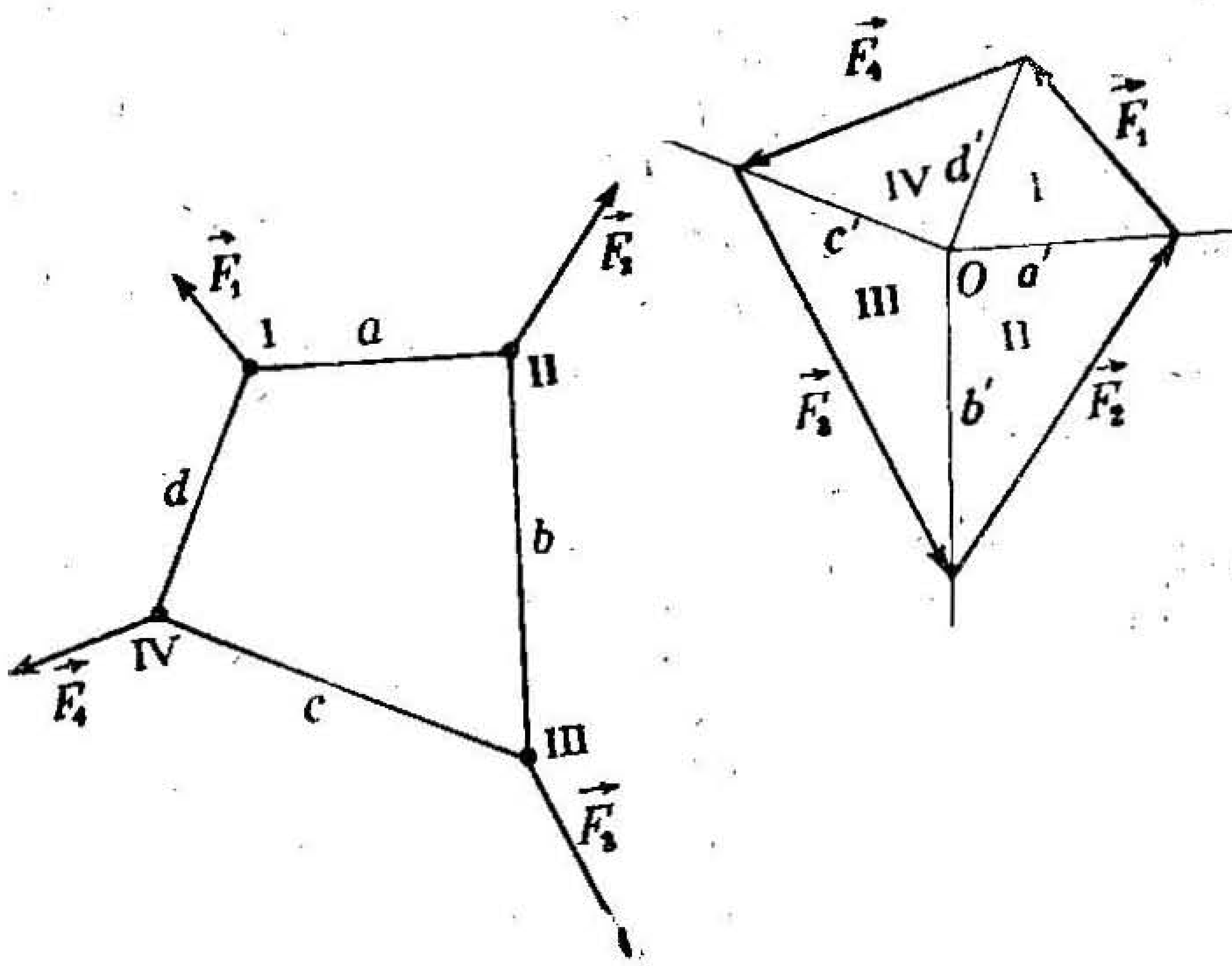
тј. једнак је броју темена. Пошто број скаларних општих услова за равнотежу верижног полигона у равни износи три, допунских услова имамо

$$n-3=k\,.$$

Приметимо да је број k једнак најмањем броју штапова којим треба везати темена нашег верижног полигона да се он претвори у непроменљив систем. Према томе тај број показује *меру променљивости* верижног полигона. За троугао он је једнак нули, за четвороугао 1, за петоугао 2 итд. Пошто сваки верижни полигон дијагоналама из једног темена можемо претворити у троуглове, тј. створити од њега непроменљив систем, број тих дијагонала $n-3$ такође одговара мери променљивости верижног полигона.

Извршимо још анализу равнотеже верижног четвороугла. Узмимо четвороугао датог облика састављен од штапова (сл. 61). Нека на тачку I дејствује произвољна сила $\vec{F}_1$. На слици полигона сила из крајева силе, која је нацртана у двострукој размери, повуцимо праве a' и d' паралелне правима страна a и d верижног полигона. Добићемо тачку O, која се зове *пол полигона сила*. Из тог пола повуцимо праве b' и c' паралелне осталим странама верижног полигона. Јасно је да сила $\vec{F}_2$ може бити само таква да се њен почетак налази на правој b', сила $\vec{F}_3$ само таква да се њен почетак налази на правој c'. Сила $\vec{F}_4$ после тога је потпуно одређена, јер су већ утврђени крајеви те силе. Лако је пропратити реципрочност нацртаних сила.

Горња расуђивања лако се проширују на *кончане полигоне*, а такође и на отворене полигоне. Анализирајмо ове последње за у пракси врло важан случај паралелних сила.

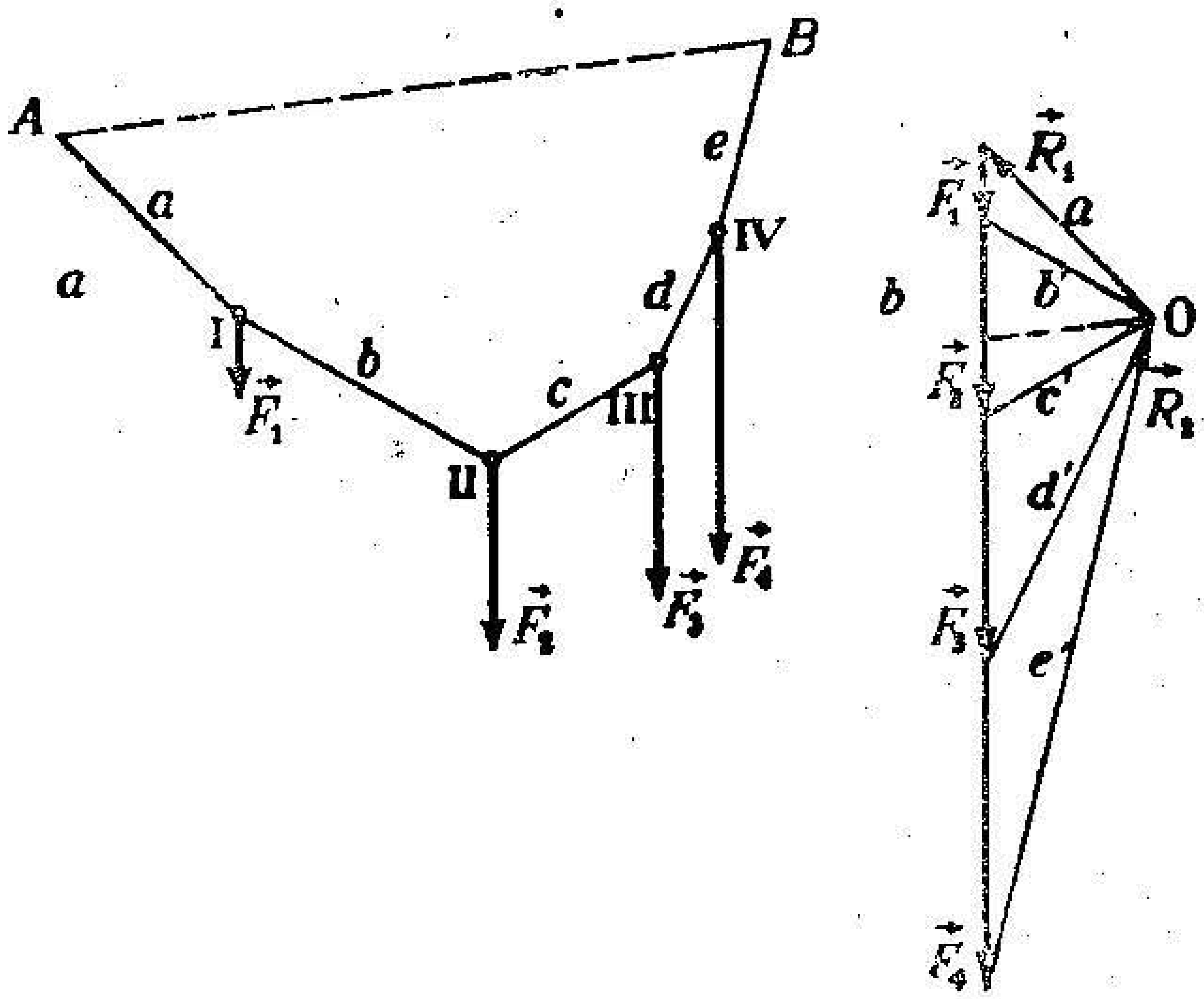


Слика 61

Замислимо отворени верижни полигон од пет страна (сл. 62, *a* и *b*), чије су крајње тачке A и B утврђене, а на остале дејствују паралелне силе, рецимо, истог смера. Конкретно можемо замислити целокупну слику у вертикалној равни, а силе су терети који дејствују у теменима полигона.

Ако је облик верижног полигона дат, као и раније, прву силу $\vec{F}_1$ можемо изабрати произвољно; она заједно са странама a и b верижног полигона одређује на плану сила положај пола O. Затим положај пола на плану и дате стране c, d, e верижног полигона одређују паралелне праве c', d', e' на плану сила, а према томе и величине сила $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$. На истом плану сила одређене су и реакције $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ ослонаца A и B. Исто тако су на плану сила одређени и напони у штаповима или ужетима.

Хоризонтална компонента тих напона је у свим штаповима иста; она има вредност нормале спуштене из пола O на правац сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_4$.



Слика 62

Обратно, ако се тражи облик верижног полигона под условом да он поднесе дате терете и да му стране буду дате дужине, правац тих страна се одређује из плана сила, рецимо, на овај начин. Правце прве две стране узимамо произвољно; њиховим избором одређујемо положај пола O. Ако после тога крајеве сила F_2, F_3, итд. спојимо са полом O, праве c', d', e' одређују правце страна верижног полигона; на тим правцима се одмеравају дужине датих страна тог полигона.

§ 8·51. Ланчаница

У претходном параграфу проучавали смо равнотежу верижног полигона са странама коначних дужина. Резултати тог проучавања могу се проширити и на случај кад се верижни полигон претвара у криву линију, чији бескрајно мали елементи одговарају странама верижног полигона. Таква линија се зове *ланчаница* у најширем смислу те речи. Ланчаницу ћемо сматрати као нерастегљиву и апсолутно гипку, тј. као линију која може мењати свој облик а да та промена не изазива у материјалу, од кога је остварена линија, никакве унутрашње силе, силе еластичности.

У случају верижног полигона имали смо спољашње силе које су дејствовале у теменима тог полигона. Пошто на кривој линији, која сад замењује верижни полигон, има на коначној дужини бескрајно много темена, у сваком темену не може дејствовати сила коначног интензитета, јер резултанта таквих сила може бити бесконачно велика, а тај случај се искључује. Коначне силе могу нападати само поједине тачке; овај ћемо случај такође изоставити. Према томе претпоставићемо да су спољашње силе, које у претходном посматрању дејствују на крајевима елемената ланчанице, бескрајно мале. Увођење таквих сила у рачун са коначним величинама можемо извршити на овај начин. Означимо бескрајно малу дужину линије са Δs. Нека почетак те дужине игра улогу неког темена верижног полигона. Означимо даље са $\overrightarrow{\Delta F}$ ону бескрајно малу силу која дејствује у тој тачки. Уведимо количник $\overrightarrow{\Delta F} : \Delta s$ и пређимо на граничну вредност

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta s} = \vec{f}.$$

Ако та гранична вредност постоји, оно се зове *векторско специфичко оптерећење* дате ланчанице у датој тачки израчунато на јединицу дужине линије.

Јасно је да је димензија овог специфичког оптерећења

$$[\vec{f}] = [\vec{F} : s] = MT^{-2}.$$

Сем силе $\overrightarrow{\Delta F}$ на изабрано теме дејствују још две реакције, које смо за случај i'тог темена верижног полигона означили са $\vec{R}_i{+}$ и $\vec{R}_i{-}$; ова се последња сила може претставити и силом $-\vec{R}_{i-1}^{+}$. За постављање услова равнотеже сваке тачке ланчанице можемо сад искористити једначину (1) претходног параграфа:

$$\vec{R}_i{-} + \vec{F}_i + \vec{R}_i{+} = 0.$$

Како ову једначину можемо заменити једначином

$$\vec{F}_i + (\vec{R}_i{+} - \vec{R}_{i-1}^{+}) = 0,$$

ова једначина у примени на тачку криве линије са два елемента, наредним и претходним, у чијим правцима су реакције R_i^+ и R_{i-1}^+, после поделе са Δs даје

$$\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta s}+\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta s}=0,$$

а после прелаза на граничне вредности дефинитивно имамо

$$\vec{f}+\frac{d}{ds}\vec{R}=0,$$

где је $\vec{R}$ сила реакције или напона у датој тачки ланчанице. Пошто тај напон у граничној векторској вредности има правац тангенте на ланчаницу, претходну једначину можемо претставити и овако

$$\vec{f}+\frac{d}{ds}(R\vec{D})=0, \tag{1}$$

где је R алгебарска вредност напона у датој тачки, а $\vec{D}$ орт тангенте на криву у истој тачки, чији је смер одређен позитивним смером рачунања променљиве s на кривој. $\vec{f}$ је векторско специфичко оптерећење. Једначину (1) треба сматрати као основну векторску диференцијалну једначину равнотеже ланчанице под утицајем векторског оптерећења.

У скаларном облику за Декартове осе из (1) добијамо једначине:

$$\begin{aligned} f_x+\frac{d}{ds}\left(R\frac{dx}{ds}\right)&=0,\\ f_y+\frac{d}{ds}\left(R\frac{dy}{ds}\right)&=0,\\ f_z+\frac{d}{ds}\left(R\frac{dz}{ds}\right)&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Не би било тешко написати скаларне једначине и за ма које криволиниске координате тачке у простору.

Напишимо скаларне једначине у природној форми, тј. у односу на природни триједар оса.

Ако извршимо диференцирање у једначини (1)

$$\vec{f}+\vec{D}\frac{dR}{ds}+R\frac{d\vec{D}}{ds}=0$$

и приметимо да је

$$\frac{d\vec{D}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N},$$

где је $\vec{N}$ орт главне нормале и ρ полупречник кривине у датој тачки, векторска једначина (1) може се написати

$$\vec{f} + \vec{D}\frac{dR}{ds} + \frac{R}{\rho}\vec{N} = 0 .$$

После пројицирања чланова те једначине на правце тангенте, главне нормале и бинормале добићемо три скаларне једначине

$$f_D + \frac{dR}{ds} = 0 ,$$

$$f_N + \frac{R}{\rho} = 0 ,$$

$$f_B = 0 ,$$

где су употребљене ознаке очигледне. Добивене једначине имају јасно геометриско тумачење и показују везу између природних геометриских елемената ланчанице, напона у њеним тачкама и датог специфичког оптерећења.

Поставимо сад задатак о одређивању облика равнотеже ланчанице под утицајем датог оптерећења. Решење тог задатка стоји у вези са интегрисањем, рецимо, једначина (2) у Декартовим координатама. Ове једначине садрже непознате

(4) $$x, y, z ; R ,$$

које треба да буду одређене у функцији изабране независно променљиве s. Пошто та променљива стоји у вези са променљивим x, y, z још и помоћу једначине

(5) $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 ,$$

проблем се своди на интегрисање система једначина (2) и (5) за одређивање променљивих (4) у функцији s. Пошто је систем једначина (2) другог реда у односу на x, y, z и првог реда у односу на R, при чему треба да буде задовољена једначина (5) првог реда у односу на x, y, z, решење система (2), (5) у општем случају треба да садржи не седам већ шест произвољних констаната. Напишимо то решење кратко

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$
$$R = R\,(s\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$

где је, као обично, $\vec{r}$ вектор положаја тачке. Произвољне константе интеграције треба да буду одређене из допунских услова. Наведимо примере тих допунских услова.

1. Дато је: положај једне крајње тачке ланчанице, правац тангенте и вредност реакције у тој тачки. Ако дужину лука s рачунамо од почетне тачке, наведени подаци се изражавају једначинама:

$$\vec{r}_0 = r\ (0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$
$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_0 = \dot{\mathbf{r}}\ (0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$
$$R_0 = R\,(0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$

при чему треба да буде испуњен услов

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_0^2 = 1\,,$$

и према томе други векторски услов даје само два скаларна услова за одређивање произвољних констаната.

2. Дато је: положај две крајње тачке и целокупна дужина ланчанице. Једначине за одређивање констаната треба да изгледају

$$\vec{r}_0 = \vec{r}\ \ (0,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1\ (l,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,,$$

где су $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$ вектори положаја крајњих тачака и l дужина линије. Помоћу тих података се одређује форма ланчанице и напони у свима њеним тачкама.

3. Дато је: положај једне крајње тачке, целокупна дужина ланчанице и површина на којој треба да се налази друга крајња тачка. Једначине за константе су ове: за прву крајњу тачку

$$\vec{r}_0 = \vec{r}\,(0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots,\ c_6)\,;$$

за другу крајњу тачку, која треба да се налази на површини чија је једначина

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z) = 0,$$

прво имамо услов

$$\varphi[\vec{r}(l, c_1, c_2, \ldots, c_6)] = 0;$$

затим из услова да тангента на криву у тој тачки треба да буде нормална на површини (при томе смо искључили случај кад је реакција у другој крајњој тачки једнака нули), тј.

$$\vec{D} = \operatorname{grad}_r \varphi,$$

имамо још два услова, који се у Декартовим координатама изражавају пропорцијама

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 : \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 : \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1 : \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1 : \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1,$$

где индекс 1 показује да одговарајуће функције од s треба узети за $s = l$.

На тај начин смо добили шест услова за одређивање свих произвољних констаната.

Слично може бити решен задатак под условом да и прва тачка мора да лежи на датој површини.

4. Најзад претпоставимо да је дато: положај прве тачке, дужина целокупне ланчанице и услов да други крај мора да се налази на датој кривој чија је векторска једначина

$$\vec{r}^* = \vec{r}^*(\sigma),$$

где је: r^* вектор положаја гачке на тој кривој и σ дужина лука те криве.

За прву тачку, као и раније, имамо

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0, c_1, c_2, \ldots, c_6),$$

а за другу тачку, прво, можемо написати услов

$$\vec{r}(l, c_1, c_2, \ldots, c_6) = \vec{r}^*(\sigma).$$

Ова векторска једначина даје једну скаларну једначину за одређивање вредности параметра σ и две остале скаларне једначине за одређивање произвољних констаната. Још једну једначину за одређивање тих констаната добићемо из услова, поново са претпоставком да у другој тачки реакција није нула, да та реакција мора да стоји управно на тангенти на дату криву у другој тачки; тај услов се изражава једначином

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{r}^*}{d\sigma}\right)_1 = 0,$$

где смо вредност скаларног производа узели за $s = l$ и за одговарајућу вредност параметра σ.

§ 8.511. Аналогија између проблема о равнотежи ланчанице и проблема о кретању материјалне тачке

Уочимо диференцијалну једначину (1) § 8·51 равнотеже ланчанице у облику

$$\frac{d}{ds}(\vec{R}) + \vec{f} = 0,$$

где је $\vec{R}$ сила реакције или напон, $\vec{f}$ специфичко векторско оптерећење и s дужина лука ланчанице.

С друге стране, узмимо диференцијалну једначину кретања слободне материјалне тачке у векторском облику

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$

где је m маса тачке, $\vec{v}$ њена брзина, $\vec{F}$ сила и t време. Ако ставимо

$$\frac{1}{dt} = \frac{v}{ds},$$

претходну једначину можемо заменити једначином

$$\frac{d}{ds}(\vec{v}) - \frac{\vec{F}}{mv} = 0,$$

коју можемо сматрати, ако сила не зависи непосредно од времена, као једначину трајекторије тачке.

Упоредимо две једначине

$$(1) \qquad \frac{d}{ds}(\vec{R}) + \vec{f} = 0, \qquad \text{(статика)},$$

$$(2) \qquad \frac{d}{ds}(\vec{v}) - \frac{\vec{F}}{mv} = 0, \qquad \text{(динамика)}:$$

Видимо да једна једначина прелази у другу, ако ставимо

$$\vec{R} = \vec{v}, \tag{3}$$

$$\vec{f} = -\frac{1}{mv}\vec{F}. \tag{4}$$

Према томе се може поставити аналогија између проблема о кретању материјалне тачке и одређивања трајекторије те тачке, с једне стране, и проблема одређивања облика равнотеже једне линије са датим оптерећењем, са друге стране. Сваком решењу или ма којој особини динамичког проблема одговара решење или особина статичког проблема, и обрнуто. Тако на основу проучавања динамичког проблема, познатог из механике тачке, можемо навести ове особине статичког проблема:

a. Ако је пројекција специфичког оптерећење на сталан правац једнака нули, пројекција напона на тај правац има сталну вредност. Лако је извести и непосредни доказ тог става.

b. Ако је пројекција специфичког оптерећења на сталну раван једнака нули, крива ланчанице је у равни управној на сталну раван. Пројекција напона на ту раван је стална. Доказ се оснива на претходном ставу.

c. Ако је момент специфичког оптерећења у односу на неку одређену осу једнак нули, тј. правац оптерећења или сече ту осу или је са њом паралелан, пројекција ланчанице на раван управну на ту осу има особину изражену једначином

$$Rr^2 \frac{d\theta}{ds} = \text{const.}, \tag{5}$$

где су r и θ поларне координате пројекције тачке ланчанице на ту раван. Заиста, ако је момент силе једнак нули, имамо интеграл површине у поменутој равни

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

Пошто за статички проблем из (3) имамо

$$\frac{1}{dt} = R \frac{1}{ds},$$

написани интеграл доводи до интеграла (5).

d. Ако специфично оптерећење увек пролази кроз сталну тачку у простору, ланчаница је равна крива и у тој равни важи интеграл (5).

e. Најзад претпоставимо да специфичко оптерећење има *функцију ойтерећења*, тј.

$$\vec{f} = \operatorname{grad} U,$$

тада множењем векторске једначине (1) скаларно са $\frac{\vec{ds}}{ds}$ добијамо

$$\frac{dR}{ds} + \frac{dU}{ds} = 0, \tag{6}$$

јер су

$$\left(\operatorname{grad} U, \frac{\vec{ds}}{ds}\right) = \frac{1}{ds}(\operatorname{grad} U, \vec{ds}) = \frac{dU}{ds},$$

$$\left(\frac{\vec{dR}}{ds}, \frac{\vec{ds}}{ds}\right) = \left(\frac{d\vec{R}}{ds}, \frac{\vec{R}}{R}\right) = \frac{dR}{ds}$$

Из једначине (6) изводимо интеграл

$$R + U = k, \tag{7}$$

где је k произвољна константа интеграције.

Интеграл (7) одговара интегралу живе силе у динамичком проблему. Функција силе се тада одређује из једначине (4) на овај начин. Ставимо

$$\vec{F} = -mv\vec{f} = -mR \operatorname{grad} U$$

и закључујемо на основу (7) да је

$$\vec{F} = -m(k-U)\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} \frac{1}{2} m(k-U)^2,$$

одакле следује да је

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U_1,$$

где је

$$U_1 = \frac{1}{2} m (k-U)^2 - h,$$

са произвољном константом h. Интеграл (7) заиста се трансформише у интеграл живе силе на овај начин. Пошто је $R = v$, из (7) имамо

$$v = k - U,$$

одакле је

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m (k-U)^2$$

и према томе добијамо

$$T = U_1 + h,$$

где је T жива сила тачке, а то је интеграл живе силе.

§ 8·52. Случај равног оптерећења

Претпоставимо сад да сви вектори специфичког оптерећења припадају истој равни. Очевидно је да је у том случају ланчаница равна крива и да се реакције у крајњим тачкама налазе у истој равни. Векторска диференцијална једначина у облику

$$\vec{f} + \frac{d}{ds}(R\vec{D}) = 0$$

остаје на снази и у овом случају, али у скаларном облику имамо само две једначине

$$f_x + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dx}{ds}\right) = 0, \tag{1}$$

$$f_y + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dy}{ds}\right) = 0, \tag{2}$$

које заједно са једначином

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

омогућују да се одреде три величине: x, y, R у функцији дужине лука s. При томе треба да буду постављени и услови за крајеве ланчанице.

У природној форми имамо такође ове једначине

$$f_D + \frac{dR}{ds} = 0,$$

$$f_N + \frac{R}{\rho} = 0,$$

са очевидним ознакама.

Нећемо улазити у проучавање детаља тог општег случаја равног оптерећења и зауставимо се само на важним специјалним случајевима и пре свега на случају паралелних сила.

§ 8·521. Случај оптерећења паралелним силама. Линија оптерећења

Претпоставимо сад да су силе оптерећења паралелне; за такве силе можемо, с једне стране задржати специфичко оптерећење израчунато на јединицу дужине ланчанице, које у случају паралелних сила можемо изразити овако

$$\vec{f} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta s} = f_a \vec{j},$$

где је $\vec{j}$ сталан орт правца паралелних сила, и где f_a означава алгебарску вредност тог специфичког оптерећења.

Са друге стране, згодно је увести специфичко оптерећење израчунато на јединицу растојања између паралелних сила са вредношћу

$$\vec{q} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta x} = q_a \cdot \vec{j},$$

где је Δx елемент таквог растојања, а q_a је алгебарска вредност новог специфичког оптерећења. Са $\overrightarrow{\Delta F}$ је означена резултанта сила на елементу Δs, односно Δx.

Пошто је

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha,$$

где је α угао између тангенте на ланчаницу и правца x осе, управне на правац сила, између једног и другог оптерећења постоји веза

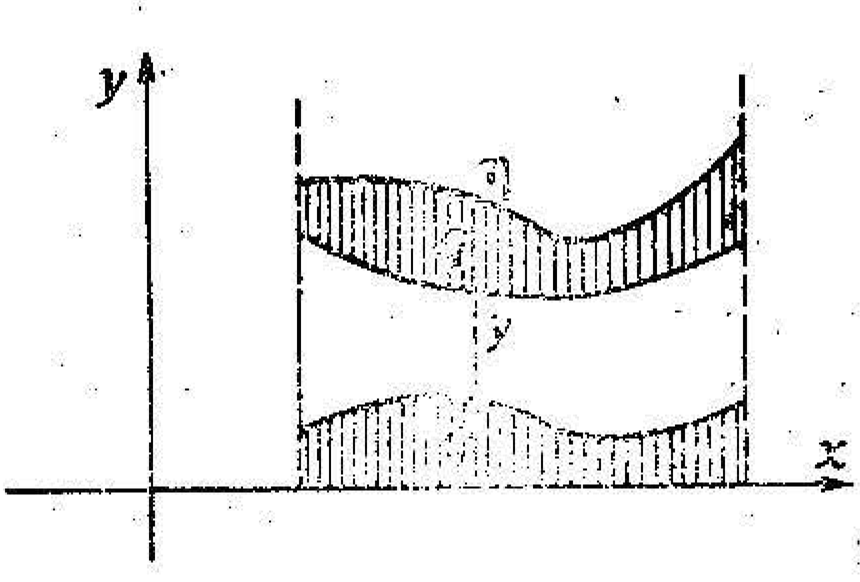
$$f_a = q_a \cos\alpha.$$

Ако су паралелне силе — силе теже, вектор $\vec{q}$ показује специфичко оптерећење израчунато на јединицу хоризонталне дужине. Његов интензитет можемо сматрати као функцију x, тј.

$$q = q(x)$$

и као сваку функцију можемо претставити графички. Дијаграм те функције се зове *линија оптерећења*. (сл. 63). Вредност q можемо одмерити или непосредно од x осе или од криве линије ланчанице; у последњем случају једначина линије оптерећења изгледа

$$\eta = y + q.$$



Слика 63

Применимо сад на случај паралелних сила једначине (1) и (2) § 8·52 равнотеже ланчанице. Пошто је за тај случај

$$f_x = 0$$

из прве једначине имамо интеграл

$$R\frac{dx}{ds} = \text{const.} = H, \tag{1}$$

који тврди да хоризонтална компонента напона у свакој тачки ланчанице има сталну вредност за свако вертикално оптерећење.

За искоришћавање друге једначине

$$f_y + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

узмимо у обзир ово: 1. ако y осу наперимо навише, имамо

$$f_y = -\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta s} = -\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} = -q\frac{dx}{ds}$$

и 2. на основу (1) имамо

$$R\frac{dy}{ds} = H\frac{dy}{dx}.$$

После тога претходна једначина даје

$$\frac{d}{ds}\left(R\frac{dy}{ds}\right) = q\frac{dx}{ds}$$

и доводи дефинитивно до једначине

$$H\frac{d^2y}{dx^2} - q = 0. \tag{2}$$

То је диференцијална једначина равнотеже ланчанице са специфичким оптерећењем израчунатим на јединицу хоризонталне дужине. Кад је то оптерећење дато као функција x, двострука квадратура решава проблем интеграције једначине (2). Две произвољне константе се одређују из допунских услова. На пр., из услова да ланчаница треба да прође кроз две дате тачке, или да прође кроз једну тачку и у тој тачки има дати правац реакције односно напона. Сем тога, разуме се, треба да буде дата константа H, хоризонтална компонента напона, која према интегралу (1) треба да има сталну вредност у свима тачкама ланчанице.

§ 8·5211. Параболична ланчаница

Ако специфичко оптерећење израчунато на јединицу хоризонталне дужине има сталну вредност, тј.

$$q = \text{const.},$$

из једначине (2) претходног параграфа имамо прво

$$H\frac{dy}{dx} = qx + c_1,$$

а затим и

$$Hy = \frac{1}{2}qx^2 + c_1 x + c_2, \tag{1}$$

где су c_1 и c_2 произвољне константе интеграције.

Ако поставимо услов да у тачки x_0, y_0 наша крива има тангенту паралелну са x осом, добићемо два услова за одређивање констаната

$$qx_0 + c_1 = 0,$$

$$Hy_0 = \frac{1}{2}qx_0^2 + c_1 x_0 + c_2.$$

Ако после тога извршимо трансформацију координата

$$x = x_0 + \xi,$$

$$y = y_0 + \eta,$$

није тешко извести да у новим координатама ξ и η једначина (1) има облик

$$\xi^2 = 2\frac{H}{q}\eta$$

и показује да је наша крива *парабола*.

Различите особине параболе могу се протумачити и на параболичној ланчаници. У та елементарна проучавања нећемо овде улазити. Исто тако нећемо се заустављати на одређивању констаната интеграције c_1 и c_2 из разних других података.

§ 8·5212. Обична ланчаница

Одредимо сад облик ланчанице са сталним паралелним специфичким оптерећењем али израчунатим не на јединицу хоризонталне дужине већ на јединицу дужине саме ланчанице, тј. под условом да је

$$f = \text{const.}$$

У овом случају једначина (1) § 8·521 доводи поново због услова $f_x = 0$ до интеграла

$$R\,\frac{dx}{ds} = H = \text{const.}, \tag{1}$$

а друга добија облик

$$\frac{d}{ds}\left(R\,\frac{dy}{ds}\right) - f = 0. \tag{2}$$

Пошто у овом случају специфичко оптерећење $\vec{f}$ има функцију силе

$$\vec{f} = \operatorname{grad}(-fy),$$

где је y растојање тачке од одређене хоризонталне равни, према једначини (7) § 8·511 имамо интеграл

$$R + U = k,$$

који у нашем случају даје

$$R - fy = k, \tag{3}$$

где је k произвољна константа. Ту константу можемо изједначити са нулом, а под условом да се раније изабрана хоризонтална раван налази на таквом растојању y_0 од тачке са хоризонталним напоном H да је

$$H - fy_0 = 0.$$

У таквом случају из (3) имамо

$$R = fy. \tag{4}$$

Тај резултат можемо протумачити: у свакој тачки наше ланчанице интензитет напона једнак је ординати тачке оптерећене истим специфичким оптерећењем као и дужина саме ланчанице.

Ако добијену вредност напона уврстимо у једначину (2), добићемо

$$\frac{d}{ds}\left(y\,\frac{dy}{ds}\right) = 1. \tag{5}$$

Са друге стране, са истом вредношћу напона из (1) имамо

$$y\,\frac{1}{ds} = a\,\frac{1}{dx}, \tag{6}$$

где смо ставили

$$a = \frac{H}{f} = y_0.$$

После смене (6) једначина (5) добија облик

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = 0 .$$

Као линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима, а са негативним коефицијентом код промењљиве на првом степену, она има овај интеграл

$$y = c_1 e^{\frac{x}{a}} + c_2 e^{-\frac{x}{a}} .$$

Пошто за $x = 0$ имамо

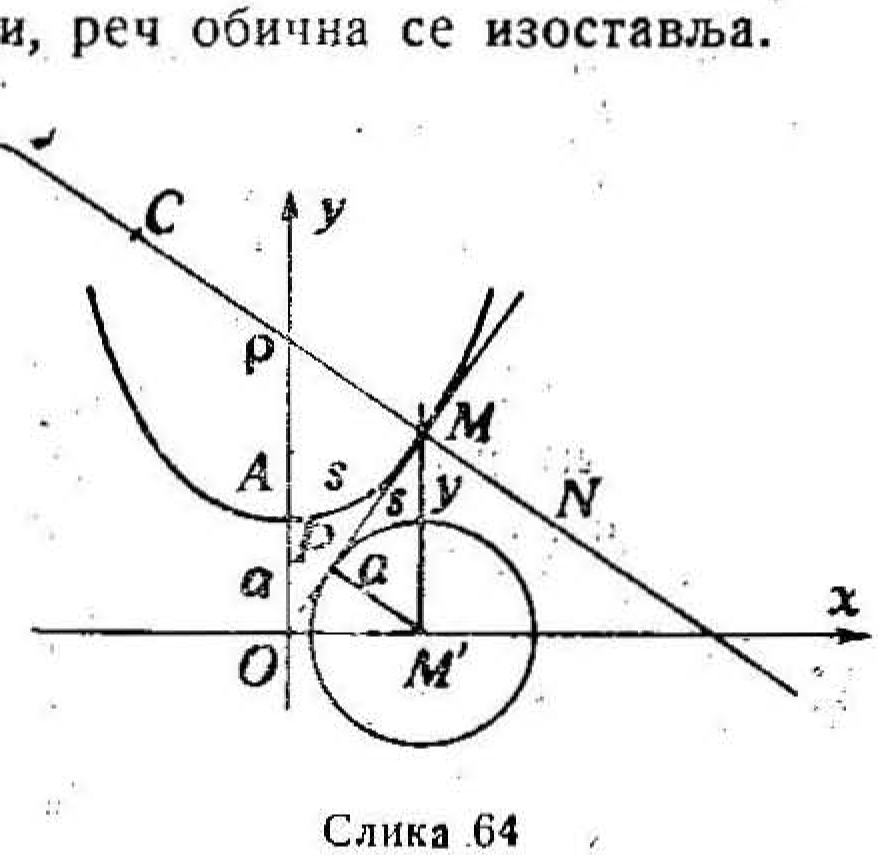
$$y = y_0 = a , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0 ,$$

после одређивања произвољних констаната имамо дефинитивно једначину

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) .$$

У теорији кривих ова се линија због своје механичке особине зове *ланчаница*; да је разликујемо од линија општих одговарајућих особина, можемо је звати *обична ланчаница*. Кад се говори само о обичној ланчаници, реч обична се изоставља.

Обична ланчаница (сл. 64) има више интересантних особина, геометриских и механичких. Ево неких од тих особина, чији доказ може послужити за вежбања.



Слика 64

a. Ланчаница је симетрична у односу на y осу. Она лежи са једне стране од x осе, која је *база ланчанице*, и сече y осу на растојању a од базе. Дужина a зове се *параметар ланчанице*. Ланчаница је конвексна крива за посматрача на бази; она нема ни сингуларних тачака ни асимптота.

b. Ордината тачке ланчанице је средња пропорционална између дужине нормале N и параметра a, тј.

$$y^2 = Na = ay\sqrt{1 + y'^2} .$$

Одавде добијамо једначину

$$a^2 \, y'^2 = y^2 - a^2 ,$$

коју можемо сматрати као диференцијалну једначину првога реда наше ланчанице.

c. Тангента ланчанице додирује круг полупречника a са центром у подножју ординате тачке додира на ланчаници. Одавде следује једноставан начин конструкције нормале и тангенте на ланчаницу.

d. Дужина лука s од темена до тачке на ланчаници једнака је дужини тангенте MP повучене из тачке ланчанице на горе поменути круг и према томе је

$$s^2 = y^2 - a^2 .$$

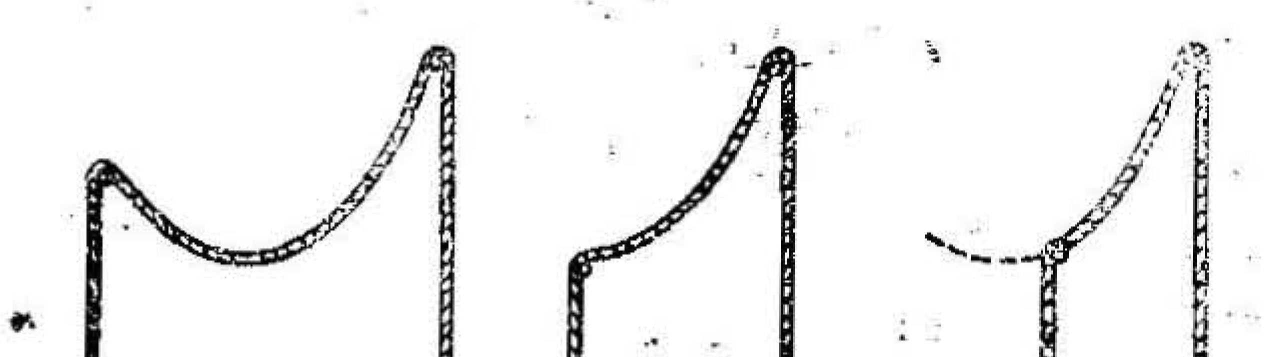
e. Полупречник кривине ρ ланчанице у свакој тачки је једнак дужини нормале, тј.

$$\rho = N = \frac{y^2}{a} .$$

f. Еволвента ланчанице је *трактриса* чија је једначина

$$x = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} .$$

g. Сваки лук ланчанице (сл. 65, *a*, *b*, *c*) остаће у равнотежи, ако на крајеве преко малих котурова надовежемо ужета исте специфичке тежине као и лук ланчанице са дужинама једнаким ординатама крајњих тачака.



Слика 65

h. Ако поставимо питање који облик треба да има тешка хомогена линија учвршћена у двема тачкама простора, да њено тежиште има најнижи положај, облик ланчанице одговара на то питање.

ГЛАВА ДЕВЕТА

Мале осцилације система

§ 9·1. Теорија осцилација

Из мноштва разноврсних кретања, било природних било вештачких, издвајају се кретања осцилаторног карактера. Теорија таквих кретања чини *теорију осцилација.*

Издвајање теорије осцилација из проучавања општих динамичких проблема у засебну грану је дошло, углавном, из два разлога. Прво због тога што осцилаторна кретања играју огромну улогу како у теориском тумачењу низа физичких појава тако и у практичном извођењу односно у функционисању разних творевина наше материјалне културе. Други разлог је тај што се основни проблеми теорије осцилација решавају баш оним математичким апаратом, наиме интеграцијом линеарних диференцијалних једначина другога реда пре свега са константним коефицијентима, који је много једноставније од оног математичког апарата који се примењује у општем случају.

Као и механика уопште и теорија осцилација се дели на два дела: на теорију осцилација материјалних система са коначним бројем степена слободе и на теорију осцилација система са бесконачно великим бројем степена слободе. Прва је у вези са интегрисањем обичних диференцијалних једначина, друга са интегрисањем делимичних диференцијалних једначина. Овде ћемо изложити само елементе прве теорије.

Проучаваћемо углавном кретање материјалног система око стабилних положаја равнотеже и то или *малих осцилација* или *коначних,* које се врше по истим линеарним законима као и мале.

На специјалној теорији такозваних *нелинеарних осцилација* овде се нећемо заустављати. Под малим осцилацијама се разумеју такве, чија област кретања може бити колико год желимо мала, ако само ставимо материјални систем у погодно почетно кинематичко стање. Проучавање малих осцилација је важно још и по томе што се на могућности тих осцилација оснива такозвана *прва метода* проучавања стабилност уопште. Расуђивање, које смо применили при доказу Лежен-Диришлеове теореме о стабилности положаја равнотеже, спада у *другу методу*.

Теорија осцилација се бави и проучавањем оних кретања материјалних система која карактеришу мала отступања система не од положаја равнотеже, већ од одређеног кретања тог система.

Наше излагање обухвата како мале осцилације холономних система тако и оне нехолономних. Прво проучавамо мале осцилације материјалних система са једним степеном слободе, а после и са више степена слободе. Анализираћемо случајеве конзервативног и неконзервативног кретања, тј. са отпорним силама, а и такозване *принудне осцилације*.

Пошто теорија осцилација материјалног система, нарочито са једним степеном слободе, има много заједничког са теоријом осцилација материјалне тачке, коју смо изложили у механици тачке, овде можемо, с једне стране, скратити наше излагање на неким местима, а, са друге, ако понављамо, можемо употребити другу форму ради допуне и проширење материјала и методике излагања.

§ 9·2. Диференцијалне једначине кретања холономног материјалног система у примени на осцилације око положаја равнотеже

Посматрајмо неки холономни материјални систем са n степена слободе. Нека $q_1, q_2, \ldots, q_n$ буду независне генералисане координате тог система. Ако проучавамо кретање система око неког одређеног положаја равнотеже, сваку од независних координата можемо рачунати тако да у том положају равнотеже она има вредност једнаку нули.

Пошто је положај равнотеже система могућ само у случају кад коначне везе не зависе од времена, а диференцијалне везе су хомогене, увођење генералисаних координата може се извести помоћу једначина у којима исто тако нема времена и жива сила T система под тим условима биће хомогена функција генералисаних брзина. Ставимо

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} q_i' q_j',$$

где су $\overline{a}_{ij}$ у општем случају функције координата. Претпостављамо да се ове функције могу развити у редове и у првом приближном посматрању се заустављамо само на константном члану; тај константни члан означимо са a_{ij}. Према томе за мала кретања можемо узети

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i' q_j',$$

где су a_{ij} константе које се зову *инерциони коефицијенти* материјалног система за дате генералисане координате; њихове вредности одговарају конфигурацији система у положају равнотеже.

Са претпоставком да су a_{ij} константе, жива сила не зависи непосредно од координата и према томе је

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Како су делимични изводи живе силе по генералисаним брзинама линеарне форме са константним коефицијентима

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j'$$

биће Лагранжев бином линеарна форма убрзања

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j''.$$

Што се тиче десних страна Лагранжевих једначина, генералисаних сила Q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), при анализи малих кретања те силе се обично деле у две категорије:

1. Силе, које зависе од положаја система. Ове силе играју улогу покретача система; ако се систем отклони од положаја

равнотеже, ове силе у случају стабилности имају тенденцију да га врате у положај равнотеже; то су *силе успостављања*. У случају тешког система то је сила теже или њена компонента; у еластичном систему то су силе еластичности итд.

У приближном посматрању тај део генералисаних сила се изражава помоћу линеарних хомогених функција генералисаних координата, тј. има облик

$$-\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, q_j\,,$$

где су c_{ij} константе; знак минус смо ставили ради једноставнијег писања једначина у даљем излагању. У већини третираних конкретних случајева ове силе су конзервативне и према томе за њих постоји потенцијална енергија Π (односно функција сила $U=-\Pi$) облика

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, q_i\, q_j\,,$$

кад константе c_{ij} задовољавају услове

$$c_{ij} = c_{ji}\,, \qquad\qquad i,\ j=1,2,\ldots,n.$$

У случају еластичних сила величине c_{ij} се зову *коефицијенти еластичности*, а у општем случају то су *коефицијенти успостављања*.

2. Другу категорију сачињавају *отпорне силе*. Ове силе узимамо у облику линеарних хомогених функција брзина, тј. у облику

$$-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, q_j'\,,$$

где су b_{ij} константе. И овде је најглавнији случај, кад ове силе зависе од дисипативне функције

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, q_i'\, q_j'\,,$$

тј. тако да је одговарајући део у генералисаној сили

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i'}\,.$$

У отпорне силе спада и *сила трења*. Сем компоненте, која је пропорционална брзини (случај подмазаних површина), сила трења може да има према *Кулон-Мореновом закону* и сталну компоненту која је пропорционална притиску између тела. Ако је у случају малих кретања тај притисак сталан, сила трења има сталан интензитет, а знак је подешен тако да одговара супротном смеру брзине. Ту силу за координату q_i' можемо претставити изразом

$$\pm k R_i$$

где је k коефицијент трења и R_i интензитет реакције.

3. Најзад у трећу категорију спадају силе периодичног карактера које се изражавају функцијом времена. Мала кретања у присуству таквих допунских сила зову се *принудна кретања*, специјално *принудне осцилације*.

Претпостављајући да је таква периодична сила изражена тригонометриским коначним или конвергентним бесконачним редом, тај део генералисане силе који одговара i'тој координати је

$$\frac{1}{2}\alpha_{i0} + \sum_{\nu=1}^{N} (\alpha_{i\nu} \cos \nu\omega_i t + \beta_{i\nu} \sin \nu\omega_i t),$$

где цео број N може бити или коначан или тежити бесконачности. Величина ω_i је стална основна учестаност за одговарајућу координату q_i.

Ако узмемо у обзир све наведене силе и зауставимо се само на оним силама које се покоравају поменутим ограничењима, из Лагранжевих једначина § 4·8 можемо написати ове једначине за проучавање малих кретања:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\, q_j'' + b_{ij}\, q_{ij}' + c_{ij}\, q_j) = -k R_i \operatorname{sign} q_i' +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{i0} + \sum_{\nu=1}^{N} (\alpha_{i\nu} \cos \nu\omega_i t + \beta_{i\nu} \sin \nu\omega_i t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

овде је R_i интензитет одговарајуће силе реакције а симбол sign q_i' (signum) означава знак функције q_i'.

Написане једначине образују у општем случају систем нехомогених линеарних једначина другога реда са константним коефицијентима. Састављање ових једначина из конкретних услова проблема, интегрисање добијених једначина и анализа решења са механичког гледишта — све ово сачињава углавном теорију малих кретања. Специјално проучавање могућности осцилаторних кретања стоји у вези са проучавањем стабилности кретања.

Почнимо прво са случајем кретања система са једним степеном слободе.

§ 9·3 Осцилације система са једним степеном слободе

Ако материјални систем има само један степен слободе са независном координатом q, диференцијална једначина кретања има у општем случају облик

$$aq'' + 2\,bq' + cq = -\,kR\,\mathrm{sign}\,q' +$$

$$+\frac{1}{2}\,\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{N} (\alpha_\nu \cos \nu\omega t + \beta_\nu \sin \nu\omega t),$$

где је: a инерциони коефицијент система за координату q, b коефицијент отпорне силе, c коефицијент успостављања, први члан десне стране претставља силу трења, а остали чланови дају израз силе која изазива *принудно* кретање система. Ако тих чланова нема, кретање је *слободно*, са трењем или без трења у вези са вредношћу коефицијента k. Ако је десна страна претходне једначине једнака нули, тј. имамо једначину

$$aq'' + 2\,b\,q' + cq = 0\,,$$

имамо *просто кретање* са отпорном силом $(b \neq 0)$ и без отпора $(b = 0)$ са једначином

$$aq'' + cq = 0\,,$$

којој у случају осцилаторног кретања одговара *хармониска осцилација*.

Пошто смо у првој књизи рационалне механике анализирали мале осцилације материјалне тачке по кривој, а диференцијална једначина тих осцилација је иста са диференцијалном једначином осцилација материјалног система са једним степеном слободе, можемо овде односну анализу за систем изложити конспективно са оним допунама које одговарају систему и са проширењем које допушта продубљење материјала.

§ 9·31. Хармониска осцилација система

У диференцијалној једначини

$$aq'' + cq = 0 \tag{1}$$

инерциони коефицијент a треба увек сматрати позитивним. У полазном облику кад се једначина (1) добије из Лагранжеве једначине без дељења односно множења ма којом именованом величином, производ $aq''\delta q$ треба да има именовање рада. То значи инерциони коефицијент увек треба да задовољава услов

$$[aq''\delta q] = ML^2 T^{-2},$$

а то значи да је

$$[aq^2] = ML^2 = [J],$$

тј. производ инерционог коефицијента и квадрата генералисане координате увек треба да има димензију момента инерције. Тако, на пр., ако је q дужина, a има димензију масе, ако је q угао, a има димензију момента инерције.

Што се тиче коефицијента c треба пре свега навести да у случају кад је унапред познато да се говори о малом кретању око стабилног положаја равнотеже са максимумом функције силе

$$U = -\frac{1}{2} cq^2,$$

имамо из услова максимума те функције да је

$$c > 0.$$

Обрнуто, ако незнамо карактер равнотеже, знак коефицијента c, под условом $c \neq 0$, одређује тај карактер, јер само за позитивну вредност c имамо осцилаторно кретање и према томе стабилност равнотеже.

Што се тиче димензије коефицијента c, она треба да задовољава услов

$$[cq\delta q] = [cq^2] = ML^2 T^{-2}.$$

Ако a и c сматрамо као позитивне величине, једначина (1) може се заменити једначином

$$(2) \qquad q'' + p^2 q = 0 ,$$

где је

$$p^2 = \frac{c}{a} > 0 .$$

Из услова за именовање величина a и c лако је видети да p има димензију T^{-1}, а то значи да је производ pt апстрактни број.

Једначина (2) има интеграл

$$(3) \qquad q = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt ,$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе. Ако уведемо нове константе A и θ_0 помоћу образаца

$$C_1 = A \sin \theta_0 , \qquad C_2 = A \cos \theta_0 ,$$

одакле је

$$A = + \sqrt{C_1^2 + C_2^2} , \qquad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{C_1}{C_2} ,$$

интеграл (3) можемо претставити у облику

$$q = A \sin (pt + \theta_0) .$$

То је једначина хармониске осцилације са периодом $T = 2\pi/p$ и бројем n осцилација у секунди, при чему је $n = p/2\pi$. A је амплитуда те осцилације и θ_0 почетна фаза.

Генералисана брзина се одређује једначином

$$q' = Ap \cos (pt + \theta_0) .$$

Није тешко извести да се интеграционе константе C_1 и C_2 односно A, θ_0 одређују помоћу почетне координате q_0 и почетне брзине q_0' за $t=0$ на овај начин

$$C_1 = q_0 , \qquad C_2 = \frac{q_0'}{p} ,$$

$$A = + \sqrt{q_0^2 + \frac{q_0'^2}{p^2}} , \qquad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{q_0}{q_0'} p .$$

Кретање система у овом случају је конзервативно; интеграл живе силе се изражава

$$(4) \qquad T - U = \frac{1}{2} a q'^2 + \frac{1}{2} c q^2 = E_0 ,$$

где је E_0 константна енергија система. Како је

$$(5) \qquad 2E_0 = aq_0'^2 + cq_0^2 = c\left(q_0^2 + \frac{q_0'^2}{p^2}\right) = cA^2,$$

где је

$$c = ap^2 = \frac{4\pi^2 a}{T^2} = 4\pi^2 an^2,$$

можемо закључити да је енергија хармониске осцилације пропорционална пре свега квадрату амплитуде, а затим или коефицијенту успостављања c активне силе или односу коефицијента инерције према квадрату периода односно производу тог коефицијента и квадрата броја осцилација у секунди.

Ако q и q' сматрамо као такозване *фазне координате* нашег материјалног система са једним степеном слободе, тачка, чије су Декартове координате у *фазној равни* ове величине, за време кретања описује криву линију, *фазну криву*, која карактерише промену стања система. У нашем случају из (4) на основу (5) добијамо једначину

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{q'^2}{p^2A^2} = 1,$$

која показује да је фазни график елипса са центром у почетку координата који одговара положају равнотеже система. Разним вредностима почетне енергије одговарају различите елипсе, које су сличне једна другој, јер p^2 има сталну вредност за исти материјални систем у истом пољу сила. Те елипсе можемо сматрати као интегралне криве наше осцилације. За те линије је почетак координата *сингуларна тачка*. Према Поенкареовој терминологији таква сингуларна тачка се зове, у датом случају, *центар породице фазних кривих*. Кроз сам центар не пролази ниједна фазна крива.

§ 9·32. Осцилације са отпорном силом. Случај отпора пропорционалног првом степену брзине

Претпоставимо да се осцилација врши са отпорном силом пропорционалном првом степену брзине. Према § 9·3 диференцијална једначина таквог простог кретања изгледа

$$aq'' + 2bq' + cq = 0,$$

где је b нови коефицијент, *коефицијент отпорне силе.* У случају отпора његову вредност треба сматрати позитивном, тј. $b > 0$.

Ако претходну једначину поделимо са a и искористимо раније уведену ознаку $p^2 = \frac{c}{a}$, можемо написати

$$q'' + 2lq' + p^2 q = 0 , \tag{1}$$

где је $l = b/a$. Ова једначина је била проучена у § 15·11 прве књиге. Овде ћемо само навести резултате са незнатним допунама.

I. $p^2 - l^2 > 0$. Кретање је квази-периодично према једначини

$$q = Ae^{-lt} \sin (p_1 t + \theta_0),$$

где су A и θ_0 произвољне константе, а $p_1 = \sqrt{p^2 - l^2}$.

Ако период периодичног фактора означимо са T_1 и упоредимо га са периодом T хармониске осцилације, можемо из једначина

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}, \qquad T = \frac{2\pi}{p}$$

написати

$$T_1 = \frac{p}{p_1} T = \frac{T}{\sqrt{1 - \mu^2}},$$

где је

$$\mu = \frac{l}{p}.$$

Ако је l релативно мало у поређењу са p, претходни образац се може заменити приближним

$$T_1 \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2\right).$$

Овај образац пружа могућност да се израчуна μ, ако се посматрањем одреде вредности T и T_1.

Логаритамски декремент λ овог кретања износи

$$\lambda = \frac{1}{2} l T_1 = \pi \frac{l}{p_1}.$$

Пошто је у приближном рачуну

$$\lambda = \pi \frac{l}{p_1} = \pi \frac{l}{\sqrt{p^2 - l^2}} = \pi \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \approx \pi \mu \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right),$$

можемо ставити

$$\lambda \approx \pi \mu .$$

Упоредимо утицај мале силе отпора пропорционалне брзине с једне стране на период, а са друге на амплитуду осцилације. Претпоставимо да се период продужи за $n°/_{0}$, тј. $T_1 = T\left(1 + \frac{n}{100}\right)$, тада из једначине

$$\frac{n}{100} = \frac{1}{2}\mu^2$$

имамо

$$\mu = 0{,}1\sqrt{2n}$$

и према томе је

$$\lambda \approx 0{,}1\,\pi\sqrt{2n},$$

тј. однос две узастопне амплитуде a_ν и $a_{\nu+1}$ износи

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = e^{0{,}1\pi\sqrt{2n}} .$$

Кад се, на пр., период повећа за $2°/_{0}$, тј. $n = 2$, горњи однос ће износити приближно 1,9 и према томе се амплитуда смањи готово два пута. Видимо да се амплитуда мења куд и камо брже него што се мења период. Због толико великог смањења амплитуда ове осцилације спадају у такозване *амортизоване осцилације.*

За што јаснију претставу овог кретања проучимо још и његову фазну криву. Ако ставимо

$$p_1 t + \theta_0 = \theta,$$

имамо

$$q = Ae^{-lt}\sin\theta,$$

$$q' = Ae^{-lt}(p_1\cos\theta - l\sin\theta).$$

За упрошћавање анализе ове криве линије, задржавајући координату q само са ознаком x, уведимо координату y помоћу обрасца

$$y = \frac{1}{p_1}(q' + lq).$$

Тада, сматрајући x и y као Декартове координате тачке, имамо:

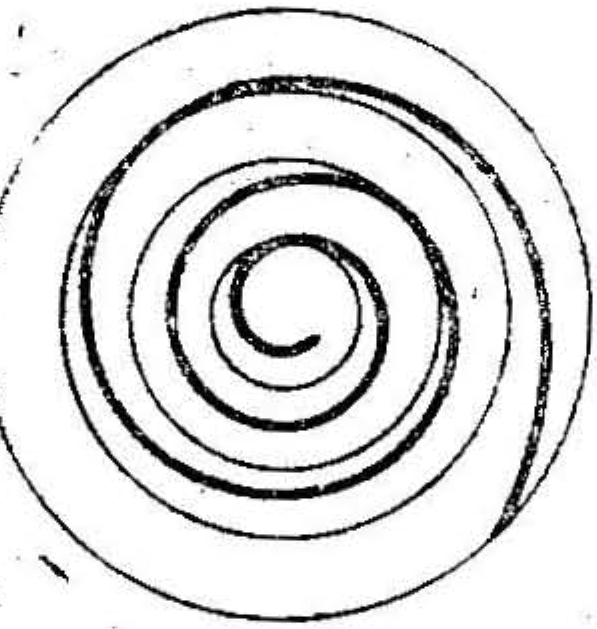
$$x = Ae^{-lt}\sin\theta,$$

$$y = Ae^{-lt}\cos\theta.$$

Јасно је да су то једначине *спирале*, која се бескрајно приближује почетку координата, јер се дужина потега $\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$ мења по закону

$$\rho = Ae^{-lt}.$$

Чим се тачка нашла у области круга малог полупречника, она неће да изађе из тог круга и све се више, асимптотски, приближује почетку координата, који одговара положају равнотеже, јер су за $x=0$, $y=0$ и $q=0$, $q'=0$. Пошто крива врши бескрајно много обртања око почетка координата, према Поенкареовој терминологији тај почетак је *фокус (стабилан)* породице фазних кривих (сл. 66). Ако нема отпорне силе фазне криве у променљивим x и y претстављају кругове, чији су полупречници пропорционални почетној енергији система. У случају отпора тачка на фазној спирали напушта кругове са већом енергијом и прелази на криве са мањом, како то следује и из опште теореме § 4·7 о енергији система са дисипативном функцијом. У једначини која одговара тој теореми



Слика 66

$$\frac{dE}{dt} = -2V$$

дисипативна функција у нашем случају има вредност

$$V = bq'^2 > 0.$$

II. $p^2 - l^2 < 0$. Кретање система се врши према интегралу

$$q = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}, \tag{2}$$

где су

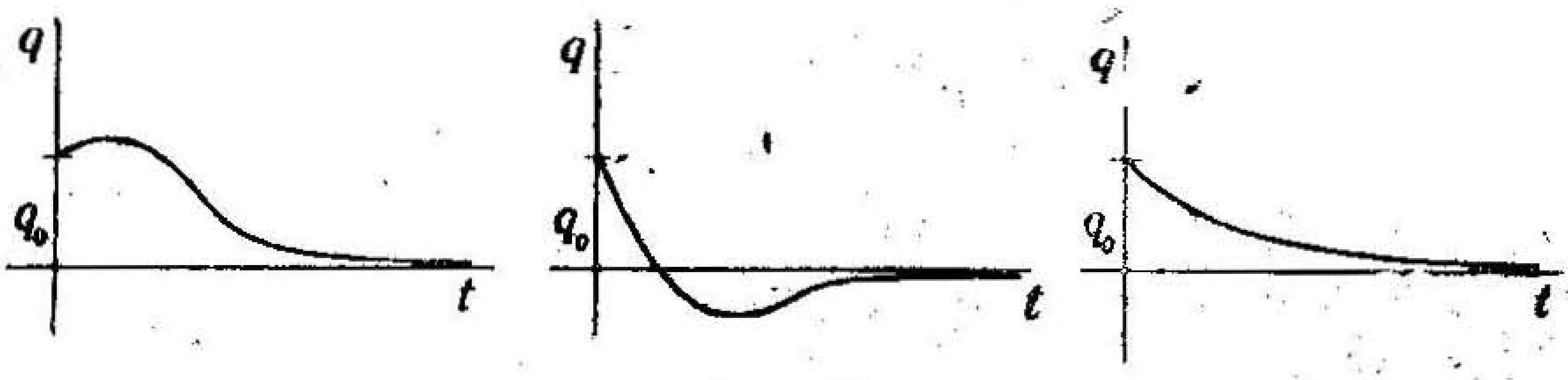
$$z_1 = -l + p_2, \qquad z_2 = -l - p_2,$$

са $p_2 = \sqrt{l^2 - p^2}$, два стварна негативна корена карактеристичне једначине за диференцијалну једначину (1), а C_1 и C_2 произвољне константе.

Кретање има *апериодичан* карактер. Помоћу почетне координате q_0 и почетне брзине q_0' одређују се произвољне константе C_1 и C_2 обрасцима

$$C_1 = \frac{1}{2p_2}(q_0' - q_0 z_2), \qquad C_2 = \frac{1}{2p_2}(q_0 z_1 - q_0').$$

Нећемо вршити детаљнију анализу интеграла (2) под могућим претпоставкама о почетном стању система. Извођење те анализе може послужити као вежба. Приметимо да се она може ограничити само на случајеве кад је $q_0 > 0$ и $q_0 = 0$, јер у случају $q_0 < 0$ можемо променити смер одговарајуће осе координате q. На слици (сл. 67, a, b, c) наведени су случајеви основних типова таквог кретања за $q_0 > 0$.



Слика 67

Учинимо само једну примедбу о фазној кривој овог кретања. У параметарском облику једначине фазне криве јесу:

$$x = q = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t},$$

$$y = q' = C_1 z_1 e^{z_1 t} + C_2 z_2 e^{z_2 t}.$$

Пошто су z_1 и z_2 негативне величине, координате x и y теже нули, кад t тежи бесконачности. Као и у претходном случају тачка фазне криве се асимптотски приближује почетку координата, али сасвим на други начин него у претходном случају. У претходном случају тангента на криву у почетку координата нема граничног положаја; правац те тангенте врши бескрајно много пуних обртања. У овом случају, обрнуто, тангента има гранични положај кад $t \to \infty$. Заиста, за угаони коефицијент те тангенте из претходних једначина имамо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1 z_1^2 e^{z_1 t} + C_2 z_2^2 e^{z_2 t}}{C_1 z_1 e^{z_1 t} + C_2 z_2 e^{z_2 t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 e^{(z_2 - z_1) t}}{C_1 z_1 + C_2 z_2 e^{(z_2 - z_1) t}} =$$

$$= z_1 = -l + p_2,$$

јер је разлика $z_2 - z_1 = -2p_2$ негативна. Према Поенкареовој терминологији почетак координата је у овом случају *стабилни чвор* нашег кретања.

Ако и у овом случају извршимо такву трансформацију координата да фазне криве за случај кретања без отпора буду концентрични кругови, фазна крива за случај кретања са отпором поново иде ван тих кругова у унутрашњост али у овом случају тако да тангента тежи правцу нормале на кругове

III. $p^2 - l^2 = 0$. Кретање система се врши према интегралу

$$q = e^{-lt}\ (c_1 t + c_2),$$

где су поново c_1 и c_2 константе интеграције. Кретање је *апериодично граничног карактера:* координата q тежи нули, кад $t \to \infty$. Из почетних услова константе се одређују обрасцима

$$c_1 = q_0' + lq_0, \qquad c_2 = q_0.$$

Пошто је у овом случају

$$q' = e^{-lt}\ [q_0' - l\ (q_0' + lq_0)\ t],$$

видимо да график координате q по времену има екстремум за t_1 који задовољава једначину

$$q_0' - l\ (q_0' + lq_0)\ t_1 = 0.$$

Како је

$$t_1 = \frac{q_0'}{l\,(q_0' + lq_0)}$$

а ова величина треба да буде позитивна, екстремум може постојати у овим случајевима:

α. $q_0' > 0$. За ту вредност координата q има вредност

$$q_1 = e^{-lt_1}\ (q_0 + \frac{q_0'}{l}).$$

График има карактер показан на слици 67, a. Специјално кад је $q_0' = 0$, $q_1 = q_0$, полазни положај одговара случају екстремума.

β. $q_0' < 0$ под условом да буде $|\,q_0'\,| > lq_0$. У овом случају q_1 је негативно и према томе имамо случај показан на слици 67, b.

Ако је $q_0' < 0$ и $|\,q_0'\,| < lq_0$, t_1 је негативно и график нема екстремума. Том случају одговара слика 67, c.

Фазна крива апериодичног граничног случаја има исти карактер као и општег апериодичног кретања. Угаони коефицијент тангенте једнак је $(-l)$.

§ 9·33. Осцилације са трењем

У претходном параграфу анализирали смо кретања амортизована услед отпорне силе пропорционалне првом степену брзине. Амортизација осцилација може наступити и услед отпорних сила друге природе. Проучимо још специјалан случај отпорних сила, наиме: кретање са трењем.

Према § 9·3 диференцијалну једначину кретања материјалног система са једним степеном слободе који се креће у близини положаја равнотеже а под утицајем само две силе — силе успостављања и силе трења, која дејствује по Кулоновом закону — треба написати овако

$$(1) \qquad aq'' + cq = -kR \operatorname{sign} q',$$

где је: q координата система, a инерциони коефицијент система у односу на координату q, c коефицијент силе успостављања, k коефицијент трења за време кретања система. У случају мировања тај коефицијент означимо са k_0: сматрамо при томе да је $k_0 > k$. Величина R се сматра за случај кретања у малој области као константа; она зависи од сила реакција које постоје између маса које припадају материјалном систему и маса које остварују механизме са трењем чији је задатак створити кретање система само са једним степеном слободе. Множитељ $\operatorname{sign} q'$ има вредност $(+1)$, кад је $q' > 0$, и (-1), кад је $q' < 0$.

Пре проучавања кретања система према једначини (1) учинимо једну примедбу. Како је кретање система са трењем без почетне брзине могуће само онда кад је апсолутна вредност силе успостављања $|cq|$ већа од силе трења у стању мировања $k_0 R$, тј. под условом

$$|cq| > k_0 R,$$

постоји у близини положаја равнотеже таква зона са границама

$$-D \leqslant q \leqslant +D,$$

где је

$$D = \frac{k_0 R}{c},$$

из које систем не може изаћи, кад је $q' = 0$, а под дејством силе успостављања, јер трење то не дозвољава. Ова зона око положаја равнотеже зове се *мртва зона*. Кад узмемо у обзир мању вредност коефицијента трења k, што одговара кретању, ову зону можемо сузити до зоне са границом

$$(2) \qquad \delta = \frac{kR}{c} = \frac{k}{k_0} D.$$

За ту мању зону још сигурније можемо тврдити да систем, долазећи у ту зону са брзином једнаком нули, не може у њој добити ни најмању брзину због дејства силе успостављања, већ ће остати у тој зони у миру.

Пређимо сад на анализу једначине (1). Ако ту једначину поделимо са a, па уведемо ознаку $c/a = p^2$ а сем тога искористимо и ознаку (2), можемо једначину рашчланити у две једначине

$$q'' + p^2 q = -p^2 \delta, \qquad \text{за } q' > 0, \tag{3}$$

$$q'' + p^2 q = p^2 \delta, \qquad \text{за } q' < 0. \tag{4}$$

Интеграле ових једначина можемо написати

$$q = -\delta + A \sin(pt + \alpha), \qquad \text{за } q' > 0 \tag{5}$$

$$q = \delta + B \sin(pt + \beta), \qquad \text{за } q' < 0 \tag{6}$$

где су A, α; B, β произвољне константе интеграције. Генералисана брзина према тим интегралима има вредност

$$q' = Ap \cos(pt + \alpha), \qquad \text{за } q' > 0 \tag{7}$$

$$q' = Bp \cos(pt + \beta), \qquad \text{за } q' < 0. \tag{8}$$

Проучимо сад карактер кретања система помоћу написаних интеграла.

Нека за $t = 0$ буде и $q' = 0$, а

$$q_0 > D > 0. \tag{9}$$

Како је систем ван мртве зоне, сила успостављања је довољна да савлада трење и систем почне да се креће, да се приближује положају равнотеже са $q' < 0$. Према томе треба да искористимо једначине (6) и (8). После одређивања произвољних констаната имамо једначину кретања и брзину

$$\begin{aligned} q &= \delta + (q_0 - \delta) \cos pt, \\ q' &= -p(q_0 - \delta) \sin pt. \end{aligned} \tag{10}$$

Брзина остаје негативна у интервалу од $t = 0$ до $t = \frac{1}{2} T$, са $T = \frac{2\pi}{p}$. У том интервалу q се смањује, систем пролази кроз положај равнотеже и у положају са координатом $q_1 = -q_0 + 2\delta$ систем се зауставља. Ако полазна координата q_0 задовољава услов

$$q_0 > D + 2\delta, \tag{11}$$

вредност $|q_1| > D$, систем се налази ван мртве зоне и почне поново да се креће. Како је сада $q' > 0$, треба да искористимо интеграле (5) и (7). За одређивање констаната интеграције треба узети ове почетне услове:

$$t = \frac{\pi}{p}, \qquad q = -q_0 + 2\,\delta, \qquad q' = 0.$$

После одређивања тих констаната добијамо

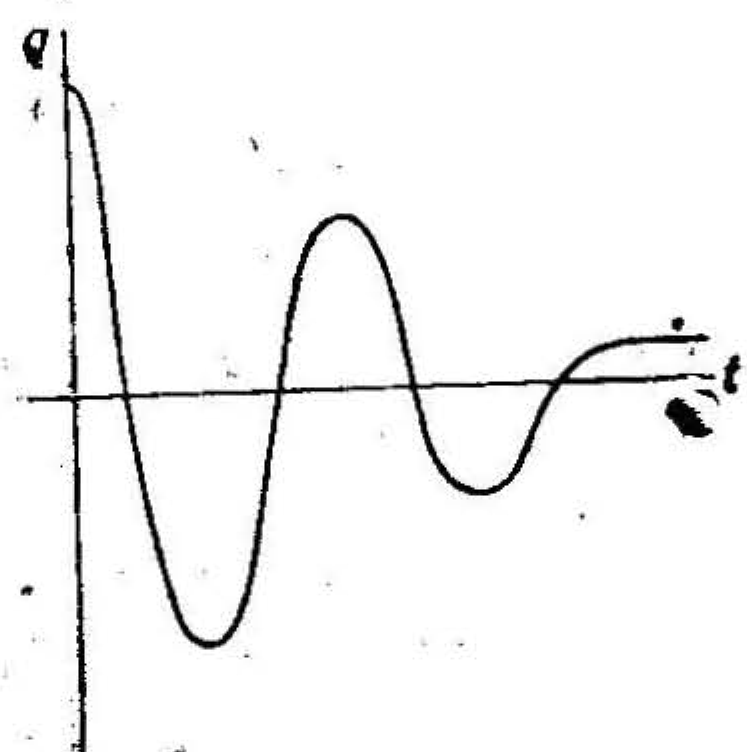
$$(12) \qquad \begin{aligned} q &= -\delta + (q_0 - 3\,\delta)\cos pt, \\ q' &= -p\,(q_0 - 3\,\delta)\sin pt. \end{aligned}$$

Ове једначине важе у интервалу од $\frac{1}{2}\,T$ до $T = \frac{2\pi}{p}$; на крају интервала поново је $q' = 0$ и $q = q_2 = q_0 - 4\,\delta$. Ако се услови (9) и (11) допуњују новим условом

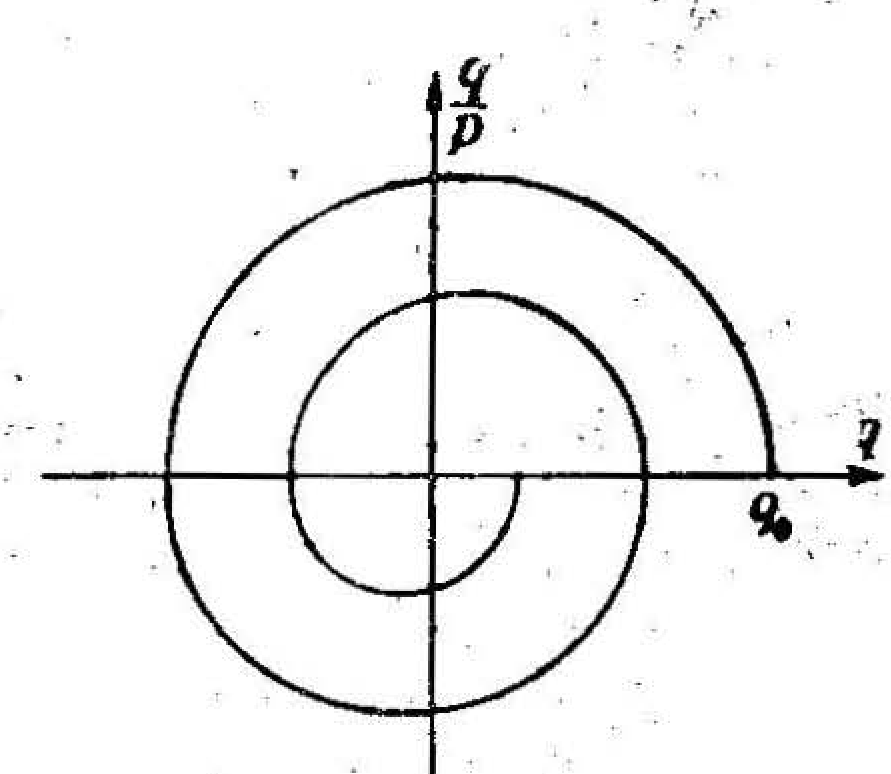
$$q_0 > D + 4\,\delta$$

систем, пошто заврши једну осцилацију, поново почне да се креће итд.

Према томе видимо да кретање има периодичан карактер са периодом $\frac{2\pi}{p}$ на чију вредност не утиче трење. После сваког полупериода апсолутна вредност отступања координате q се смањује за 2δ, тј. ове вредности чине аритметичку прогресију. Кад се то отступање смањи до величине мање од D, систем се зауставља у мртвој зони. Слика 68 показује општи карактер таквог кретања помоћу графика координата q у функцији времена.



Слика 68



Слика 69

Што се тиче фазне криве, из једначина (10) и (12) следује да за промењљиве $x = q$ и $y = \frac{q'}{p}$ овој кривој одговарају једначине кругова

$$(x-\delta)^2 + y^2 = (q_0 - \delta)^2\,,$$
$$(x+\delta)^2 + y^2 = (q_0 - 3\delta)^2,$$

при чему полукруг једног круга прелази у полукруг другог. Координате центра тих полукругова имају вредности: првог $(+\delta)$, другог $(-\delta)$. Полупречници тих полукругова се смањују за 2δ. На слици 69 је нацртана фазна крива за кретање коме одговара слика 68.

§ 9·34. Принудне осцилације система са једним степеном слободе

Према § 9·2 диференцијалну једначину кретања система са једним степеном слободе можемо у општем случају написати

$$aq'' + 2bq' + cq = -\,kR\,\mathrm{sign}\,q' + \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{\nu=1}^{N}(a_\nu \cos \nu\omega t + b_\nu \sin \nu\omega t).$$

Ако једначину поделимо инерционим коефицијентом, добићемо

$$(1)\quad q'' + 2lq' + p^2 q = -\,p^2\delta\,\mathrm{sign}\,q' + \frac{1}{2}\,a_0' + \sum_{\nu=1}^{N}(a_\nu' \cos \nu\omega t + b_\nu' \sin \nu\omega t),$$

где су уведене ознаке

$$l = \frac{b}{a}\,,\quad p^2 = \frac{c}{a}\,,\quad \delta = \frac{kR}{c}\,,\quad a_0' = \frac{a_0}{a}\,,\quad a_\nu' = \frac{a_\nu}{a}\,,\quad b_\nu' = \frac{b_\nu}{a}\,.$$

Пошто смо, како у првој књизи (§§ 15·2, 15·21, 15·211) тако и овде, у довољној мери разрадили одређивање општег решења диференцијалне једначине написаног типа, овде ћемо навести само резултат са кратким извођењем неких рачуна.

Опште решење (1) се састоји:

1. Из општег решења диференцијалне једначине „без десне стране" у облику

$$c_1\,e^{z_1 t} + c_2\,e^{z_2 t}\,,$$

где су z_1 и z_2 корени једначине

$$z^2 + 2lz + p^2 = 0\,,$$

а c_1 и c_2 произвољне константе.

За нас је најважнији случај општег решења, кад је $p^2 - l^2 > 0$ и кад претходно решење има тригонометриски облик

$$q_1 = Ae^{-lt}\sin(p_1 t + \theta_0)\,, \tag{2}$$

где је $p_1 = +\sqrt{p^2 - l^2}$, а A и θ_0 су произвољне константе.

2. Из партикуларних решења, што одговарају константним члановима десне стране. Та решења јесу:

$$q_2 = -\delta \quad \text{за } q' > 0 \text{ и } q_2 = \delta \text{ за } q' < 0. \tag{3}$$

$$q_3 = \frac{\Gamma}{2}\,\frac{a_0'}{p^2}\,. \tag{4}$$

3. Најзад из збира партикуларних решења што одговарају сваком пару чланова

$$a_\nu' \cos \nu\omega t + b_\nu' \sin \nu\omega t$$

израза за принудну силу.

Ако ово последње партикуларно решење претставимо у облику

$$q_4 = M_\nu \cos \nu\omega t + N_\nu \sin \nu\omega t\,, \tag{5}$$

после његовог уношења у једначину (1) и упоређивања коефицијената уз $\cos \nu\omega t$ и $\sin \nu\omega t$, добићемо две линеарне једначине

$$s_\nu M_\nu + 2l\nu\omega N_\nu = a_\nu'\,,$$

$$-2l\nu\omega M_\nu + s_\nu N_\nu = b_\nu'\,,$$

где је $s_\nu = p^2 - (\nu\omega)^2$. Решење ових једначина даје

$$M_\nu = \frac{s_\nu a_\nu' - 2l\nu\omega b_\nu'}{s_\nu^2 + 4l^2(\nu\omega)^2}\,,$$

$$N_\nu = \frac{s_\nu b_\nu' + 2l\nu\omega a_\nu'}{s_\nu^2 + 4l^2(\nu\omega)^2}\,.$$

Решење q_4 можемо претставити и у облику

$$q_4 = A_\nu \sin(\nu\omega t + \theta_\nu)\,, \tag{6}$$

где се константе A_ν и θ_ν одређују из једначина

$$A_\nu \sin\theta_\nu = M_\nu\,,$$

$$A_\nu \cos\theta_\nu = N_\nu$$

и према томе имају вредности

$$A_\nu = +\sqrt{M_\nu^2 + N_\nu^2},$$

$$\theta_\nu = \operatorname{arctg} \frac{M_\nu}{N_\nu}.$$

После узимања у обзир свих добивених резултата решење једначине (1) можемо написати за случај који нас највише интересује у облику

$$q = Ae^{-lt} \sin(p_1 t + \theta_0) \mp \delta + \frac{1}{2} \frac{a_0'}{p^2} + \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu \sin(\nu\omega t + \theta_\nu).$$

Пошто је анализа оних кретања материјалног система која одговарају том решењу, узетом у целини, сувише компликована и нема нарочитог интереса ни са теориског ни са практичког гледишта, зауставимо се на проучавању само једноставних типичних случајева.

§ 9·341. Проста принудна осцилација без отпора

Ако се зауставимо на принудној сили само једне фреквенције и претпоставимо да силе отпора не дејствују, диференцијалну једначину кретања система можемо довести до облика

$$q'' + p^2 q = a_1 \sin \omega t. \tag{1}$$

Тој једначини одговара интеграл

$$q = A \sin(pt + \alpha) + A_1 \sin(\omega t + \beta),$$

где су A и α произвољне константе интеграције; константе A_1 и β одређују се из услова да израз $A_1 \sin(\omega t + \beta)$ буде партикуларни интеграл једначине (1). То одређивање даје

$$\beta = 0, \qquad A_1 = \frac{a_1}{p^2 - \omega^2}$$

и према томе имамо интеграл

$$q = \frac{a_1}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(pt + \alpha).$$

Том интегралу можемо дати облик

$$q = R \sin(pt + \varphi), \tag{2}$$

где су R и φ функције времена и то:

$$R^2 = A^2 + A_1^2 + 2AA_1 \cos(\delta t - \alpha),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \delta t + A \sin \alpha}{A_1 \cos \delta t + A \cos \alpha},$$

при чему смо увели ознаку

$$\delta = \omega - p.$$

И овде поновимо анализу променљиве вредности амплитуде R. Видимо да је то периодична функција времена са периодом T који има вредност

$$T = \frac{2\pi}{|\delta|}. \tag{3}$$

Ако период сопствене осцилације система означимо са T_s принудне осцилације са T_p, имамо

$$T_s = \frac{2\pi}{p}, \qquad T_p = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Са овим вредностима из (3) изводимо

$$T = \frac{1}{\left|\frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{2\pi}\right|} = \frac{T_p\ T_s}{|T_s - T_p|}.$$

За време периода T амплитуда R добива вредност максимума

$$R_1 = A + A_1$$

и минимума

$$R_2 = |A - A_1|.$$

Таква промена осцилаторног карактера амплитуде осцилације претставља једну нарочиту појаву *подрхтавања, лебдења* или *бијења*, коју смо графички приказали у § 15·21 прве књиге.

У случају, кад је

$$\delta = \omega - p = 0,$$

тј. сопствена осцилација система има исти период као и периодична принудна сила, место диференцијалне једначине (1) имамо једначину

$$q'' + p^2 q = a_1 \sin pt.$$

Интеграл те једначине

$$q = -\frac{a_1}{2p} t \cos pt + A \sin (pt + \alpha)$$

исто тако можемо трансформисати на облик

$$q = Q \sin (pt + \psi),$$

где су Q и ψ функције времена са вредностима

$$Q^2 = A^2 \cos^2 \alpha + \left(A \sin \alpha - \frac{a_1}{2p} t\right)^2, \tag{4}$$

$$tg\,\psi = tg\,\alpha - \frac{a_1 t}{2pA} \sec \alpha .$$

Једначина (4) показује да величина Q бескрајно расте кад време бескрајно расте. Појава овог случаја претставља *резонанцију*.

§ 9·342. Проста принудна осцилација са отпором

Ако претпоставимо да је отпорна сила пропорционалн брзини, диференцијална једначина кретања се може написати у облику

$$q'' + 2\,l q' + p^2 q = a_1 \sin \omega t. \tag{1}$$

Зауставимо се на случају кад је $p^2 - l^2 > 0$. Како интеграл једначине без десне стране можемо према § 9·32 узети у форми

$$Ae^{-lt} \sin (p_1 t + \alpha),$$

где су $p_1 = \sqrt{p^2 - l^2}$ и α произвољне константе, а партикуларни интеграл једначине са десном страном даје израз

$$B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t,$$

где је

$$B_1 = a_1 (p^2 - \omega^2) M, \qquad B_2 = -2\,\omega\, l\, a_1 M,$$

са

$$M^{-1} = (p^2 - \omega^2)^2 + 4\,l^2 \omega^2, \tag{2}$$

интеграл наше једначине има облик

$$q = Ma_1 [(p^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\,\omega\, l \cos \omega t] + Ae^{-lt} \sin (p_1 t + \alpha).$$

Ако ставимо

$$Ma_1 (p^2 - \omega^2) = A_1 \cos \alpha_1, \qquad 2\,Ma_1 \omega\, l = A_1 \sin \alpha_1,$$

имамо дефинитивно

$$(3) \qquad q = A_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + Ae^{-lt}\sin(p_1 t + \alpha).$$

Амплитуда A_1 принудне осцилације има вредност

$$(4) \qquad A_1 = a_1 M^{\frac{1}{2}},$$

а фаза α_1 се одређује из једначине

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2\omega l}{p^2 - \omega^2}.$$

Због присуства множитеља e^{-lt} други члан у изразу (3) за q при довољно великом t постаје незнатан и према томе можемо сматрати да после извесног времена систем изводи само принудне осцилације са амплитудом (4)

$$A_1 = \frac{a_1}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 + 4l^2\omega^2}}.$$

Осцилацију са амплитудом A_1 и фазом α_1 из наведеног разлога можемо звати *асимптотска осцилација*.

За проучавање промене те осцилације уведимо у расуђивање величину

$$A_1^* = \frac{a_1}{p^2},$$

која би одговарала такозваној *статичкој* $(q' = q'' = 0)$ *промени координате* q, кад би принудна сила имала највећу вредност a_1. Кад ту промену означимо са q^*, из једначине (1) имамо

$$q^* = \frac{a_1}{p^2},$$

тј. заиста $A_1^* = q^*$.

Упоредимо сад амплитуду A_1 са вредношћу A_1^* помоћу односа

$$\mu = \frac{A_1}{A^*_1} = \frac{p^2}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 + 4l^2\omega^2}},$$

који се зове *коефицијент динамичности* или, специјално, *коефицијент пораста* осцилација. Кад уведемо два количника

$$\frac{\omega}{p} = \frac{T}{T_1} = u, \quad \frac{l}{p} = \beta,$$

где су T и T_1 периоди осцилација сопствене и принудне силе, од којих се први количник зове *коефицијенш размимоилажења* осцилација, коефицијент μ се може изразити у облику

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{T^2}{T_1^2})^2 + 4\beta^2 \frac{T^2}{T_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\beta^2 u^2}} .$$

Проучимо промену овог коефицијента у вези са променом коефицијента размимоилажења u. Коефицијент μ има максимум кад поткорена величина

$$v = (1-u^2)^2 + 4\beta^2 u^2$$

има минимум. Како је

$$\frac{dv}{du} = -4u(1-u^2-2\beta^2),$$

екстремуму одговарају два услова: $u=0$ и $u^2 = 1-2\beta^2$. Први услов треба искључити, јер из $u=0$ следује $\omega = 0$, а то значи принудна сила отпада. Узмимо у обзир друго решење једначине $\frac{dv}{du} = 0$

$$u^2 = 1 - 2\beta^2. \tag{6}$$

Пре свега треба анализирати случај, кад је $1-2\beta^2 < 0$, тј. $\beta^2 > \frac{1}{2}$ и значи $\beta > \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. Величина u је имагинарна, функција v ма од које вредности u стално расте, кад расте само u, а коефицијент μ монотоно опада, тј. са повећавањем фреквенције ω принудне силе при сталној фреквенцији сопствене осцилације p амплитуда A_1 опада.

У другом случају кад је $1-2\beta^2 > 0$, вредност решења u^2 је позитивна и како је

$$\left[\frac{d^2 v}{du^2}\right]_{ext.} = \Big[-4u(-2u)\Big]_{ext} = 8(1-2\beta^2) > 0$$

имамо за функцију v минимум, а за коефицијент μ максимум. Тај максимум има вредност

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}};$$

њему одговара према (6) ова веза између фреквенција

$$\omega^2 = p^2(1-2\beta^2). \tag{7}$$

Ако је β мало, ту везу можемо заменити овом приближном вредношћу

$$\omega \approx p\,(1-\beta^2).$$

Обратимо пажњу да максимуму коефицијента μ не одговара случај резонанције принудне силе ни са сопственом осцилацијом без отпора ни са сопственом осцилацијом са отпором. Заиста, у првом случају имамо $\omega = p$, а у другом $\omega = p_1 = \sqrt{p^2 - l^2} = p\sqrt{1-\beta^2}$, а то ни једно ни друго не стоји у сагласности са условом (6).

Сем извршене анализе промене у вези са променом амплитуде A_1 коефицијента u можемо извршити анализу промене фазе асимптотске осцилације на основу обрасца (5). На тој анализи нећемо се заустављати.

§ 9·4. Осцилације система са више степена слободе

Пређимо сада на проучавање малих кретања материјалног система са више степена слободе и зауставимо се на случају слободних осцилација без отпорних сила.

У § 9·2 видели смо да у случају проучавања кретања система са n степена слободе око положаја равнотеже живу силу T и потенцијалну енергију Π можемо за мала кретања претставити изразима, квадратним формама

$$2\,T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_i'\, q_j',$$

$$2\,\Pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, q_i\, q_j,$$

где су: q_i координате система са вредностима $q_{i0} = 0$ у положају равнотеже, a_{ij} стални инерциони коефицијенти и c_{ij} стални коефицијенти сила успостављања.

Диференцијалне једначине (1) тог истог параграфа изгледају

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\, q_j'' + c_{ij}\, q_j) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

За интеграцију овог система линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима можемо искористити познате методе.

У примени на механичке проблеме заслужује пажњу једна нарочита метода која се заснива на увођењу нарочитих генералисаних координата система.

§ 9·41. Главне координате система

Претпоставимо да су место полазних генералисаних координата

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

уведене нове генералисане координате

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

помоћу линеарних хомогених једначина

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} q_j, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

где су α_{ij} константни коефицијенти. Јасно је да је тада и

$$u_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} q'_j$$

са цртом као ознаком извода по времену.

За одређивање констаната α_{ij} поставимо услов да се жива сила и потенцијална енергија, одређене у старим координатама једначинама

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i' q_j',$$

$$2\Pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j,$$

после прелаза на нове координате изражавају у облику

$$2T^* = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i'^2,$$

$$2\Pi^* = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i^2 ,$$

где су a_i и c_i нове константе; у новој форми жива сила и потенцијална енергија не садрже чланове са производом променљивих чинилаца.

Координате система, које задовољавају исказани услов, зову се *главне генералисане координате система*. Често пута се главне координате зову и нормалне координате. Ми ћемо нешто мало разликовати та два појма и као *нормалне генералисане координате* сматрати оне, за које жива сила добије облик

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'^2 .$$

Јасно је да због позитивности свих коефицијената a_i код квадрата генералисаних брзина u_i' увек можемо помоћу једначина

$$v_i = u_i \sqrt{a_i}$$

прећи од главних координата u_i на нормалне координате v_i.

После прелаза на главне координате Лагранжеве једначине кретања система добијају облик

$$u_i'' + \lambda_i u_i = 0 , \qquad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{1}$$

где је λ_i константа са вредношћу

$$\lambda_i = \frac{c_i}{a_i} .$$

Исти облик

$$v_i'' + \lambda_i v_i = 0$$

имају и једначине за нормалне координате.

Природа интеграла једначина (1) одређује се знацима констаната c_i, односно λ_i, јер су a_i позитивне величине.

За свако позитивно c_i можемо ставити

$$\lambda_i = \frac{c_i}{a_i} = p_i^2$$

и тада имамо односни интеграл

$$u_i = A_i \sin (p_i t + \alpha_i) , \tag{2}$$

где су A_i и α_i произвољне константе интеграције. У односу на такву главну координату систем врши хармониску осцилацију у близини положаја равнотеже и према томе је равнотежа стабилна, али *релативно стабилна* само у односу на односну координату. Ако је положај равнотеже стабилан у односу на све координате — стабилност се може звати *општа* или *апсолутна*.

Наведена метода проучавања малих кретања система око положаја равнотеже помоћу главних координата захтева пре свега решење алгебарског задатка одређивања главних координата за дату живу силу и дату потенцијалну енергију система.

§ 9·411. Одређивање главних координата. Једначина главних фреквенција

Како систем диференцијалних једначина (1) § 9·4

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\,q_j''+c_{ij}\,q_j)=0\,,\qquad i=1,2,\ldots,n\,,\tag{1}$$

после увођења главних координата

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,q_j\,,\qquad i=1,2,\ldots,n,\tag{2}$$

треба да пређе у систем једначина

$$u_i''+\lambda_i\,u_i=0\,,\qquad i=1,2,\ldots,n\,,\tag{3}$$

свака од једначина (3) треба да буде последица једначина (1).

Узмимо, рецимо, прву једначину из (3)

$$u_1''+\lambda_1\,u_1=0\tag{4}$$

и изведимо услове да та једначина буде последица система (1). Трансформишимо једначину (4) помоћу (2) на променљиве q_i, тада ћемо имати

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\,q_j''+\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\,q_j=0\,.$$

Са друге стране, помножимо сваку од једначина (1) редом константним множиоцем m_{i1} и резултате саберимо, добићемо једначину

$$\sum_{i=1}^{n} m_{1i} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\, q_j'' + c_{ij}\, q_j) = 0,$$

која треба да буде идентична са претходном једначином. Изједначење коефицијената доводи до једначина

$$\alpha_{1j} = \sum_{i=1}^{n} m_{1i}\, a_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\lambda_1\, \alpha_{1j} = \sum_{i=1}^{n} m_{1i}\, c_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако из тих једначина елиминишемо n коефицијената α_{1j}, добићемо систем линеарних једначина за одређивање величина m_{1i} и то

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_{1i}\, (a_{ij}\, \lambda_1 - c_{ij}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Како је то систем хомогених линеарних једначина, услов да постоји решење, сем тривијалног, захтева да детерминанта

$$\Delta = \| a_{ij}\, \lambda_1 - c_{ij} \|$$

буде једнака нули. Овај услов треба да важи за сваку једначину (3), другим речима за сваку величину λ_i. Према томе свака од тих величина λ треба да буде корен једначине

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda - c_{11} & a_{21}\lambda - c_{21} & \cdots & a_{n1}\lambda - c_{n1} \\ a_{12}\lambda - c_{12} & a_{22}\lambda - c_{22} & \cdots & a_{n2}\lambda - c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}\lambda - c_{1n} & a_{2n}\lambda - c_{2n} & \cdots & a_{nn}\lambda - c_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминантна једначина (6) игра основну улогу у анализи малих кретања око положаја равнотеже; то је *једначина фреквенција* за она кретања којима одговарају интеграли у облику (2) § 9·41. Детерминанта од које је састављена једначина (6) зове се *Лагранжева детерминанта*.

Нуле Лагранжеве детерминанте односно корени детерминантне једначине $\Delta = 0$ имају ове особине:

I. Сви корени, њих n на броју, стварни су.

II. Ако је потенцијална енергија система изражена дефинитном позитивном квадратном формом координата, сви су корени позитивни.

Пре свега покажимо да корен λ не може бити имагинаран. Претпоставимо да је λ_1 имагинарно, тј.

$$\lambda_1 = \lambda_1' + i\lambda_1'', \tag{7}$$

где су λ_1' и λ_1'' два реална броја, тада је потребно претпоставити да и решења система једначина (5) у општем случају имају имагинаран карактер, тј. да је

$$m_{1i} = m_{1i}' + i\, m_{1i}'', \tag{8}$$

где, као и у претходном обрасцу, једна цртица означава реалан део а две цртице коефицијент код $i = \sqrt{-1}$.

Ако ставимо вредности (7) и (8) у (5) и раздвојимо реални део од имагинарног, добићемо два система једначина за сваку вредност индекса j

$$\sum_{i=1}^{n} m_{1i}' (a_{ij}\lambda_1' - c_{ij}) - \lambda_1'' \sum_{i=1}^{n} m_{1i}'' a_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{1i}'' (a_{ij}\lambda_1' - c_{ij}) + \lambda_1'' \sum_{i=1}^{n} m_{1i}' a_{ij} = 0.$$

Помножимо сад сваку једначину прве врсте са $-m_{1j}''$, а друге врсте са m_{1j}' и резултате саберимо. Тада излази једначина

$$\lambda_1'' \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (m_{1i}'' m_{1j}'' + m_{1i}' m_{1j}') = 0. \tag{9}$$

Пошто сваки двоструки збир

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_{1i}' m_{1j}', \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_{1i}'' m_{1j}''$$

не претставља ништа друго до двоструке вредности живе силе, под условом да су вредности генералисаних брзина замењене са $m_{1i}' \, m_{1j}$ односно $m_{1i}'' \, m_{1j}''$, оба су та два збира позитивна. Према томе је коефицијент код λ_1'' у једначини (9) увек позитиван. Једначина (9) може бити задовољена само решењем

$$\lambda_1'' = 0 ,$$

које утврђује реалан карактер свих корена детерминантне једначине, а такође и реалан карактер свих величина, рецимо m_{1i}, у једначинама (5).

Докажимо сад да су под претпоставком да је

$$\sum_{i,j}^{n} c_{ij} \, q_i \, q_j > 0$$

сви корени λ позитивни. За доказ помножимо сваку једначину система (5) са m_{1j} и резултате саберимо. После тога добијамо једначину

$$\lambda_1 \sum_{i,j}^{n} a_{ij} \, m_{1i}' \, m_{1j} - \sum_{i,j}^{n} c_{ij} \, m_{1i} \, m_{1j} = 0 .$$

Како су обадва збира у овој једначини позитивна, корен λ_1 односно уопште сваки корен λ позитиван је.

Приметимо да ни у доказу реалности корена ни у доказу њихове позитивности нисмо искоришћавали услов да су сви корени различити; расуђивања остају на снази и за случај једнаких корена.

Како смо навели, после одређивања главних односно нормалних координата проблем о кретању система се решава помоћу интеграла

$$u_i = A_i \sin (p_i \, t + \alpha_i) ,$$

где су A_i и α_i произвољне константе, а $p_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Једнаки корени, а то значи и једнаке фреквенције p_i показују само то да две или више главних осцилација имају исту учестаност. У вези са овим је чувена Лагранжева грешка, коју је исправио Вајерштрас. Лагранж је мислио да случају једнаких корена одговара аналогно интегралу линеарних диференцијалних једначина интеграл облика

$$(A + Bt)\sin(pt + \alpha).$$

У овде наведеном излагању могућност такве грешке је избегнута.

Ако потенцијална енергија није увек позитивна за све положаје система, доведена на нормални облик

$$2\Pi^* = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^2,$$

она сем позитивних коефицијената може имати и негативне коефицијенте; сваком негативном коефицијенту тада одговара једначина облика

$$u'' - k^2 u = 0.$$

Интеграл ове једначине

$$u = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt},$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе, показује да у односу на такву главну координату равнотежа система више нема стабилан карактер.

У вези са изложеном теоријом покажимо важну улогу коју играју уведени коефицијенти m_{1i} односно m_{ji}.

Ако напишемо основни систем диференцијалних једначина у облику

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} q_i'' + c_{ij} q_i) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

који је еквивалентан облику (1) и потражимо за свако q_i партикуларно решење, које зависи од једне фреквенције, рецимо, са $p_1^2 = \lambda_1$, онда то решење можемо написати у облику

$$q_i = m_{1i} \sin(p_1 t + \alpha_1)$$

са истим чиниоцима које смо употребили раније. Заиста, ако узмемо у обзир да је

$$q_i'' = -m_{1i} \lambda_1 \sin(p_1 t + \alpha_1)$$

из (9) после скраћивања са $\sin(p_1 t + \alpha_1)$ и промене знака долазимо до услова које треба да задовољавају чиниоци m_{1i}

$$\sum_{i=1}^{n} m_{1i} (a_{ij} \lambda_1 - c_{ij}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Како је тај систем једначина еквивалентан систему (5), можемо тврдити да за формирање партикуларних решења, која одговарају одређеној фреквенцији, можемо узети решења система једначина (10) односно (5).

Ако је, рецимо, λ_1 корен једначине (6), за решење система (10) се могу узети минори Δ_{i1} са односним знацима Лагранжеве детерминанте за $\lambda = \lambda_1$ за елементе одговарајуће врсте; приметимо да за израчунавање минора, које искоришћујемо за састављање решења не можемо претходно скраћивати ма којим чиниоцем поједине врсте односно колоне како то треба радити при упрошћавању детерминантне једначине. После одређивања наведених минора опште решење за координату q_i има облик

$$q_i = \sum_{s=1}^{n} C_s \Delta_{is} \sin(p_s t + \alpha_s), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где су C_s и α_s произвољне константе интеграције.

Ово решење показује да интеграли који одговарају главним координатама имају облик

$$u_s = C_s \sin(p_s t + \alpha_s), \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

За одређивање тих координата у функцији полазних координата q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можемо решити систем једначина (11) написан у облику

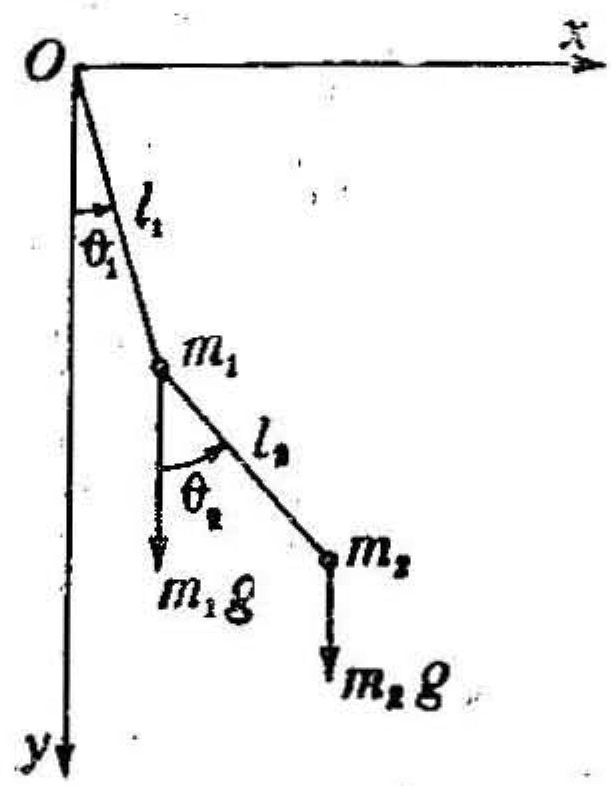
$$q_i = \sum_{s=1}^{n} \Delta_{is} u_s$$

по променљивим u_s.

§ 9·4111. Пример. Двоструко математичко клатно

Замислимо математичко клатно од тешке тачке масе m_1 која је концем дужине l_1 везана за тачку O непомичну у простору. Нека је за ту материјалну тачку везана концем дужине l_2 друга тешка тачка масе m_2. Ако се кретање тог материјалног система од две тачке врши у једној вертикалној равни, посматрани систем претставља *двоструко математичко клатно*. Проучимо мале осцилације тог клатна око стабилног положаја равнотеже кад се обе тачке налазе на истој вертикали са O испод те тачке.

За координате тачака узмимо два угла θ_1 и θ_2 (сл. 70) које чине дужи l_1 и l_2 са вертикалним правцем Oy; смер тих углова узимамо како је на слици назначено.



Слика 70

Пошто Декартове координате тачака можемо написати

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1, \qquad y_1 = l_1 \cos\theta_1,$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\theta_2, \qquad y_2 = y_1 + l_2 \cos\theta_2,$$

за живу силу T система имамо једначину

$$2\,T = m_1\,(x_1'^2 + y_1'^2) + m_2\,(x_2'^2 + y_2'^2) = \\ = m l_1^2 \theta_1'^2 + m_2\, l_2^2\, \theta_2'^2 + \\ + 2 m_2 l_1 l_2\, \theta_1' \theta_2' \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

где је $m = m_1 + m_2$.

Пошто се у проучавању малих осцилација задржавамо у изразу за живу силу само на квадратним члановима у односу на брзине са константним коефицијентима, у претходном изразу треба $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ заменити јединицом и према томе живу силу система треба узети из једначине

$$(1) \qquad 2\,T = m l_1^2\, \theta_1'^2 + m_2\, l_2^2\, \theta_2'^2 + 2\, m_2\, l_1\, l_2\, \theta_1'\, \theta_2'.$$

Потенцијалну енергију Π система рачунамо на овај начин. Пошто се диференцијал те енергије одређује из једначине

$$-\, d\Pi = m_1\, g\, dy_1 + m_2\, g\, dy_2,$$

где је g убрзање силе теже, имамо

$$\Pi = -\, m_1\, g\, y_1 - m_2\, g\, y_2\,.$$

Ако сад y_1 и y_2 заменимо њиховим приближним вредностима

$$l_1\left(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2\right), \quad l_1\left(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2\right) + l_2\left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right)$$

и занемаримо константни члан који, како знамо, не игра улогу при састављању диференцијалних једначина кретања, добићемо за одређивање промењивог дела потенцијалне енергије ову једначину

$$(2) \qquad 2\Pi = m g l_1\, \theta_1^2 + m_2 g l_2\, \theta_2^2\,.$$

Једначине (1) и (2) показују да коефицијенти живе силе и потенцијалне енергије имају вредности:

$$a_{11} = m\, l_1^2 , \qquad a_{12} = m_2\, l_1\, l_2 , \qquad c_{11} = m g\, l_1 , \qquad c_{12} = 0 ,$$
$$a_{21} = m_2\, l_1\, l_2 , \quad a_{22} = m_2\, l_2^2 , \qquad c_{21} = 0 , \qquad c_{22} = m_2\, g l_2 .$$

Према томе детерминантна једначина изгледа

$$\Delta = \begin{vmatrix} m\, l_1^2 \lambda - m g\, l_1 , & m_2\, l_1\, l_2 \lambda \\ m_2\, l_1\, l_2 \lambda , & m_2\, l_2^2 \lambda - m_2 g l_2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{3}$$

После упрошћавања имамо једначину

$$\begin{vmatrix} l_1 \lambda - g , & \mu_2\, l_2\, \lambda \\ l_1 \lambda , & l_2 \lambda - g \end{vmatrix} = 0 ,$$

где је $\mu_2 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2}{m}$, или

$$\mu_1\, l_1\, l_2 \lambda^2 - g\,(l_1 + l_2)\,\lambda + g^2 = 0$$

са

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m} .$$

Корени ове једначине λ_1 и λ_2 имају вредности

$$2 l_1\, l_2\, \mu_1\, \lambda_{1,2} = g\, [(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - 4\mu_1\, l_1\, l_2}\,] .$$

Пошто је

$$(l_1 + l_2)^2 - 4\mu_1\, l_1\, l_2 > (l_1 + l_2)^2 - 4\, l_1\, l_2 ,$$

јер је $\mu_1 < 1$, а

$$(l_1 + l_2)^2 - 4\, l_1\, l_2 = (l_1 - l_2)^2 \geqslant 0 ,$$

закључујемо да су оба корена λ_1 и λ_2 реална и позитивна. Ни за које вредности l_1, l_2, μ_1 ови корени не могу бити једнаки, јер из услова једнакости корена

$$(l_1 + l_2)^2 - 4\,\mu_1\, l_1\, l_2 = 0 \tag{4}$$

следи да је

$$\mu_1 = \frac{(l_1 + l_2)^2}{4\, l_1\, l_2} = 1 + \frac{(l_1 - l_2)^2}{4\, l_1\, l_2} \geqslant 1 ,$$

а тај резултат је супротан услову

$$\mu_1 < 1 .$$

Кад је $l_1 = l_2$ и $\mu_1 = 1$, услов (4) једнакости корена је задовољен али целокупна маса система се тада своди само на масу

m_1 и проблем малих осцилација двоструког клатна дегенерише у сличан проблем за обично математичко клатно.

Корени $\lambda_1 = p_1^2$ и $\lambda_2 = p_2^2$ одређују две главне осцилације са диференцијалним једначинама

$$u_1'' + p_1^2 u_1 = 0 ,$$
$$u_2'' + p_2^2 u_2 = 0 .$$

Њихови интеграли имају облик

$$u_1 = C_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) ,$$
$$u_2 = C_2 \sin(p_2 t + \alpha_2)$$

са произвољним константама C_1, C_2; α_1, α_2.

Ако желимо изразити полазне координате θ_1 а θ_2 у функцији главних, треба да се вратимо на детерминанту (3) и искористимо миноре те детерминанте за λ_1 и λ_2. Тада ћемо добити

$$\theta_1 = m_2 l_2 (l_2 \lambda_1 - g) - m_2 l_1 l_2 \lambda_2 u_2 ,$$
$$\theta_2 = - m_2 l_1 l_2 \lambda_1 u_1 + m l_1 (l_1 \lambda_2 - g) u_2 .$$

Пошто у тим изразима коефицијенти код u_1 имају заједнички чинилац l_2, а коефицијенти код u_2 заједнички чинилац l_1, можемо те чиниоце укључити у константе c_1 и c_2 и претходне једначине ради упрошћавања рачуна заменити овим

$$\theta_1 = m_2 (l_2 \lambda_1 - g) u_1 - m_2 l_2 \lambda_2 u_2 ,$$
$$\theta_2 = - m_2 l_1 \lambda_1 u_1 + m (l_1 \lambda_2 - g) u_2 .$$

Помоћу ових једначина живу силу система и потенцијалну енергију можемо заменити са овим квадратним формама

$$2T = a_1 u_1'^2 + a_2 u_2'^2 ,$$
$$2\Pi = c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 ,$$

где коефицијенте a_1, a_2, и c_1, c_2 можемо изразити овако

$$a_1 = m_2 l_1^2 (m_1 l_2^2 \lambda_1^2 - 2 m_1 g l_2 \lambda_1 + m g^2) ,$$
$$a_2 = m m_2 l_2^2 (m_1 l_1^2 \lambda_2^2 - 2 m_1 g l_1 \lambda_2 + m g^2) ,$$
$$c_1 = m_2^2 g l_1 [l_2 (m l_2 + m_2 l_1) \lambda_1^2 - 2 m g l_2 \lambda_1 + m g^2] ,$$
$$c_1 = m m_2 g l_2 [l_1 (m l_1 + m_2 l_2) \lambda_2^2 - 2 m g l_2 \lambda_2 + m g^2] .$$

После доста дугачког рачуна може се директно утврдити да важе ови односи између написаних вредности коефицијената:

$$\frac{c_1}{a_1}=\lambda_1, \qquad \frac{c_2}{a_2}=\lambda_2.$$

На основу свега изложеног дефинитивно решење нашег проблема изгледа:

$$\theta_1=C_1 m_2 (l_2 p_1^2-g)\sin(p_1 t+\alpha_1)-C_2 m_2 l_2 p_2^2 \sin(p_2 t+\alpha_2),$$

$$\theta_2=-C_1 m_2 l_1 p_1^2 \sin(p_1 t+\alpha_1)+C_2 m (l_1 p_2^2-g)\sin(p_2 t+\alpha_2),$$

где су $p_1^2=\lambda_1$ и $p_2^2=\lambda_2$, а λ_1 и λ_2 имају вредности

$$\lambda_1=\frac{g}{2l_1 l_2 \mu_1}\left[l_1+l_2+\sqrt{(l_1+l_2)^2-4\mu_1 l_1 l_2}\right],$$

$$\lambda_2=\frac{g}{2l_1 l_2 \mu_1}\left[l_1+l_2-\sqrt{(l_1+l_2)^2-4\mu_1 l_1 l_2}\right]$$

са $\mu_1=m_1/m$.

Геометриско тумачење малих осцилација двоструког клатна може се извести помоћу сабирања две хармониске осцилације које одговарају главним координатама u_1 и u_2. Ако на x оси одмеримо променљиву u_1, а на y оси u_2, тачка са координатама (u_1, u_2) својим кретањем приказује кретање нашег клатна. У случају самерљивости главних фреквенција трајекторије те тачке су аналогне кривим линијама Лисажуових фигура.

§ 9·5. Мале осцилације нехолономног система

Зауставимо се сад на малим осцилацијама нехолономног система.

Искористимо диференцијалне једначине (20) § 3·3 за нехолономне системе

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu+\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\frac{\partial F_l}{\partial q_\nu}+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j P_{j\nu},$$

$$\nu=1,2,\ldots,N.$$

Применимо на случај малих осцилација те једначине са овим изменама, које одговарају садржају и ознакама ове главе.

Број степена слободе нека буде n, и $q_1, q_2, \ldots, q_n$ нека означавају независне координате. Тада треба да ставимо $N = n$ и бришемо чланове са λ_i. Како даље жива сила, квадратна функција од генералисаних брзина, има сталне коефицијенте и не зависи од координата, а генералисане силе имају потенцијалну функцију Π исто квадратну функцију од координата са константним коефицијентима, из (1) добијамо систем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{k_1} \mu_j P_{ji},$$

где су P_{ji} коефицијенти код диференцијалних веза:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ji} q'_i + P_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Пошто проучавамо мала кретања око положаја равнотеже система, у претходним једначинама треба ставити за приближно посматрање:
1. $P_j = 0$, и 2. $P_{ji} = \text{const.} = b_{ji}$. Под тим условима једначине диференцијалних веза

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} q_i' = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

после интеграције доводе до коначних веза између координата

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} q_i = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2,$$

при чему смо заменили произвољне константе нулама, јер ове везе треба да буду задовољене и у положају $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

На тај се начин проблем о малим осцилацијама нехолономног система око положаја равнотеже своди на проблем холономног система са линеарним коначним везама. Ако из тих веза одредимо k_2 генералисаних координата у функцији осталих $n - k_2$ независних координата, наш проблем спада у ону категорију проблема о малим осцилацијама коју смо проучавали у претходним параграфима.

Пример таквог кретања проучићемо у динамици чврстог тела.

§ 9·6. Мале осцилације система око стационарног кретања

Уочимо холономни материјални систем n степена слободе; независне координате тог система означимо, као увек, са

$$(1) \qquad q_1, q_2, \ldots, q_n .$$

Нека је познат израз за живу силу T тог система у облику квадратне форме одређене једначином

$$2T = \sum_{i,j} a_{ij}\, q_i'\, q_j' ,$$

где су a_{ij} функције само координата (1). Према томе претпостављамо да прелаз, рецимо, од Декартових координата тачака система на координате (1) није био везан са једначинама које садрже време.

Претпостављамо даље да на систем дејствују силе које имају функцију сила U која је исто тако функција само координата и не зависи од времена. Могли бисмо увести и отпорне силе са дисипативном функцијом; теорија, коју излажемо, може се применити и на тај случај, али, ради краткоће излагања, претпостављамо да се кретање врши без отпора.

Ако са L означимо Лагранжеву функцију, тј. ставимо

$$L = T + U ,$$

кретање система треба да се врши у сагласности са диференцијалним једначинама

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Нека нас интересује једно специјално кретање система за које знамо координате (1) као функције времена. Означимо те познате функције са

$$q_i^* = f_i(t) , \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Ове функције треба сматрати као партикуларно решење једначина (2). Пошто ћемо са овим кретањем упоређивати друга кретања тог истог система, сматрамо ово кретање као *основно.* Претпостављамо да та друга кретања могу да се разликују од основног само почетним условима кретања; приметимо да у том смислу сваки тренутак кретања можемо сматрати за почетни. Састав система, везе којима се покорава систем и силе које дејствују на систем остају исте. Координате (1) у неком кретању различитом од основног нека имају вредности

$$q_i = \varphi_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

За сваки тренутак t можемо посматрати разлику вредности координата за ново и основно кретање; означимо те разлике са $w_i(t)$; према томе имамо

$$\varphi_i(t) - f_i(t) = w_i(t)$$

или, кратко,

$$q_i = q_i^* + w_i.$$

Величине w_i могу се сматрати као нове независне координате система; његове вредности одређују релативна отступања положаја система за време новог кретања од положаја за време основног кретања за исти тренутак.

Нас ће интересовати само она кретања материјалног система за која постављамо као први услов да у почетку кретања како сама почетна отступања w_{i0}, тако и почетне брзине w_{i0}' имају мале апсолутне вредности, тј. могу бити мале колико год желимо.

За састављање диференцијалних једначина новог кретања развијемо функцију L у Тајлоров ред по степенима w_i и w_i':

$$\begin{aligned} L(q_i, q_i') &= L(q_i^* + w_i, q_i'^* + w_i') = \\ &= L(q_i^*, q_i'^*) + \\ &+ \sum_i w_i' \left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right)^* + \sum_i w_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)^* + \\ &+ \sum_{i,j} w_i' w_j' \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i' \partial q_j'}\right)^* + \sum_{i,j} w_i' w_j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i' \partial q_j}\right)^* + \\ &+ \sum_{i,j} w_i w_j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}\right)^* + \ldots \end{aligned}$$

Са звездицом смо означили вредности односних функција после замене q_i' са $q_i'^*$ и q_i са q_i^*; другим речима, треба узети вредности односних израза за основно кретање.

У општем случају коефицијенти написаног реда су функције времена. Сад поставимо као други услов да ћемо анализирати само она кретања материјалног система за која су сви коефицијенти написаног реда стални. Кретања, која задовољавају тај услов, зову се *стационарна кретања* система.

Ако координате материјалног система у односу на одређено кретање датог система можемо поделити у две групе: 1. у тако-зване *позиционе координате*, које за време тог кретања имају сталне вредност, и 2. у цикличне координате, од којих не зависи ни жива сила система ни функција сила и за које генералисани импулси имају сталну вредност, може се показати да је такво кретање система стационарно у горе наведеном смислу.

Пошто ћемо анализирати само она кретања за која су w_i и w_i' мале величине, зауставимо се у развијању функције L само на члановима до другог степена закључно, тј. ставимо

$$L = L_0 + L_1 + L_2 , \tag{3}$$

где су ознаке очигледне.

Образујмо сад помоћу функције (3) Лагранжеве једначине за промењљиве w_i

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial w_i'} - \frac{\partial L}{\partial w_i} = 0 . \tag{4}$$

Пошто је $L_0 = \text{const.}$, тај члан при састављању једначина отпада. Чланови који одговарају функцији L_1 такође отпадају и то из ових разлога. Како је

$$\frac{\partial L_1}{\partial w_i'} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right)^* = \text{const.},$$

прво можемо закључити да је

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial w_i'} \equiv 0 .$$

Са друге стране, пошто је основно кретање, за које је $w_i = 0$ решење једначина (4) у којим је први члан за $w_i = 0$ једнак нули, мора и други члан за $w_i = 0$ бити једнак нули, а то значи

$$\left(\frac{\partial L}{\partial w_i}\right)_{w_i = 0} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)^* = 0 .$$

На тај начин од функције L у облику (3) треба задржати само чланове L_2 .

Ако употребимо мало згодније ознаке, функција L добиће облик

$$L_2 = \frac{1}{2}(A_{11} w_1'^2 + 2A_{12} w_1' w_2' + \ldots + A_{22} w_2'^2 + 2A_{23} w_2' w_3' + \ldots$$
$$+ A_{nn} w_n'^2) +$$
$$+ B_{11} w_1' w_1 + B_{12} w_1' w_2 + \ldots + B_{1n} w_1' w_n +$$
$$+ B_{21} w_2' w_1 + B_{22} w_2' w_2 + \ldots + B_{2n} w_2' w_n +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ B_{n1} w_n' w_1 + B_{n2} w_n' w_2 + \ldots + B_{nn} w_n' w_n +$$
$$+ \frac{1}{2}(C_{11} w_1^2 + 2C_{12} w_1 w_2 + \ldots + C_{22} w_2^2 + 2C_{23} w_2 w_3 + \ldots$$
$$+ C_{nn} w_n^2).$$

Ако за такву функцију саставимо Лагранжеве једначине, добићемо овај систем диференцијалних једначина

$$\sum_k (A_{jk} w_k'' + E_{jk} w_k' - C_{jk} w_k) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где је

$$E_{jk} = B_{jk} - B_{kj}.$$

Потражимо сад партикуларно решење система једначина (5) у облику

$$w_k = m_{1k} e^{\gamma_1 t}. \tag{6}$$

Константе m_{1k} и γ_1 морају задовољавати услове

$$\sum_k m_{1k} (A_{jk} \gamma_1^2 + E_{jk} \gamma_1 - C_{jk}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пошто је то систем хомогених линеарних једначина у односу на m_{1k}, детерминанта коефицијената мора бити једнака нули. Та детерминанта има облик

$$\begin{vmatrix} A_{11}\gamma^2 - C_{11}, & A_{21}\gamma^2 - E_{21}\gamma - C_{21}, & \ldots & A_{n1}\gamma^2 - E_{n1}\gamma - C_{n1} \\ A_{12}\gamma^2 + E_{12}\gamma - C_{12}, & A_{22}\gamma^2 - C_{22}, & \ldots & A_{n2}\gamma^2 - E_{n2}\gamma - C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n}\gamma^2 + E_{1n}\gamma - C_{1n}, & A_{2n}\gamma^2 - E_{2n}\gamma - C_{2n}, & \ldots & A_{nn}\gamma^2 - E_{nn}\gamma - C_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

У тој детерминанти смо γ_1 заменили са γ, јер помоћу такве вредности можемо формирати и друга партикуларна решења. Како та детерминанта не мења свој облик, ако ставимо $-\gamma$

место γ, једначина, коју она претставља у односу на γ, садржи само парне степене од γ.

Ако једначина (7) има све корене негативне, можемо ставити

$$\gamma^2 = -p^2$$

и тада се решења облика (6) претварају у тригонометриска решења, која одговарају малим осцилацијама система око датог стационарног кретања. Само стационарно кретање тада се јавља као *стабилно стационарно кретање.* У детаљно проучавање могућности таквих кретања, које је везано са веома компликованим питањем о стабилности кретања уопште, овде не можемо улазити.

§ 9·61. Пример малих осцилација око стационарног кружног кретања

Узмимо проблем о кретању тачке под дејством централне силе која зависи само од растојања. Пошто је кретање, као што је познато, равно, за координате тачке узмимо поларне координата r и θ и саставимо Лагранжеву функцију

$$L = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2) - MmF(r),$$

где је m маса покретне тачке и $-MmF(r)$ функција силе. Сама централна сила има вредност $-Mmf(r)$, где је

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr} = F'(r).$$

Пошто је

$$\frac{\partial L}{\partial r'} = mr', \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\theta'^2 - Mmf(r),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = mr^2\theta', \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

Лагранжеве једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial r'} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

имају облик

$$(1) \qquad mr'' - mr\theta'^2 + Mmf(r) = 0\,,$$
$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta') = 0$$

и дају очевидно партикуларно решење

$$r = r^* = \text{const.}, \qquad \theta' = \theta'^* = \text{const.},$$

одакле је

$$\theta = \theta'^* t + \theta_0\,,$$

где су r^*, θ'^* и θ_0 произвољне константе. Ово партикуларно решење се приказује као равномерно кружно кретање. Приметимо да између констаната θ'^* и r^* на основу (1) треба да постоји веза

$$(2) \qquad r^*\theta'^{*2} = Mf(r^*)\,,$$

која омогућава кружно кретање.

Узмимо сада у обзир кретање блиско том кружном кретању и ставимо

$$r = r^* + w_1\,, \qquad \theta = \theta^* + w_2\,,$$

при чему је

$$r' = w_1'\,, \qquad \theta' = \theta'^* + w_2'\,.$$

Лагранжева функција за то ново кретање има облик

$$L = \frac{m}{2}[w_1'^2 + (r^* + w_1)^2(\theta'^* + w_2')^2] - MmF(r^* + w_1)\,.$$

После развијања те функције по степенима w_1, w_2, w_1', w_2' имамо

$$L = L_0 + L_1 + L_2\,,$$

где је

$$L_0 = \frac{m}{2}r^2\theta'^2 - MmF(r) = \text{const.}\,,$$
$$L_1 = [mr\theta'^2 - Mmf(r)]w_1 + mr^2\theta' w_2'\,,$$
$$L_2 = \frac{m}{2}[w_1'^2 + r^2 w_2'^2 + 4r\theta' w_1 w_2' + \theta'^2 w_1^2] - \frac{1}{2}Mm w_1^2 f'(r)\,,$$

при чему смо изоставили звездицу, сматрајући r и θ' као константе.

За састављање нових диференцијалних једначина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial w_1'} - \frac{\partial L}{\partial w_1} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial w_2'} - \frac{\partial L}{\partial w_2} = 0$$

можемо функцију L заменити само са L_2. Пошто та функција има сталне коефицијенте код свих чланова другог степена, кретање које се одређује том функцијом има стационарни карактер.

Ако помоћу једначине (2) искључимо из горе наведеног израза за L_2 константу θ', можемо написати:

$$L_2 = \frac{m}{2}\left[w_1'^2 + r^2 w_2'^2 + 4\sqrt{M r f(r)}\, w_1 w_2' + \left(\frac{f(r)}{r} - f'(r)\right) M w_1^2\right]$$

За ову функцију се Лагранжеве једначине изражавају у облику

$$(3)\qquad \begin{aligned} & w_1'' - 2\sqrt{M r f(r)}\, w_2' + M\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right] w_1 = 0, \\ & r^2 w_2'' + 2\sqrt{M r f(r)}\, w_1' = 0. \end{aligned}$$

Детерминантна једначина, која одговара том систему, изгледа

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 + M\left[f'(r) - \dfrac{f(r)}{r}\right], & -2\gamma\sqrt{M r f(r)} \\ 2\gamma\sqrt{M r f(r)}, & r^2\gamma^2 \end{vmatrix} = 0$$

и доводи до ове једначине

$$r\gamma^2\{r\gamma^2 + M[r f'(r) + 3 f(r)]\} = 0.$$

Та једначина даје два решења за γ^2:

$$\gamma_1^2 = 0,$$

$$\gamma_2^2 = -\frac{M}{r}[r f'(r) + 3 f(r)].$$

Прво решење доводи до овог решења система (3)

$$w_1 = \text{const.} = w_1^*, \qquad w_2' = \text{const.} = w_2'^*$$

при чему су те константе везане једначином

$$(4)\qquad M\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right] w_1^* = 2\sqrt{M r f(r)}\, w_2'^*.$$

Овом решењу одговара исто тако равномерно кружно кретање по кругу блиском датом кругу основног стационарног кретања. Услов (4) допуњује услов (2) за случај таквог кружног кретања.

Други корен γ_2^2 одговара стабилном кретању, кад му је вредност негативна, тј. под условом

$$(5) \qquad r f'(r) + 3f(r) > 0 .$$

За Њутнову силу, кад је $f(r) = r^{-2}$, претходни услов је испуњен, јер доводи до неједнакости $r^{-2} > 0$.

У случају стабилности у блиском кретању тачка врши синусну осцилацију око односних положаја на кругу основног кретања.

Кад се услов (5) замени супротним условом

$$r f'(r) + 3f(r) < 0 ,$$

основно кретање није стабилно; из почетног положаја блиског положају тачке на основном кругу, тачка се удаљује по експоненцијалном закону.

Најзад под условом

$$r f'(r) + 3f(r) = 0 ,$$

тј. у случају кад је

$$f(r) = \frac{C}{r^3} ,$$

где је C константа, други корен γ_2^2 је исто тако једнак нули. Како су сад оба корена једнака, задатак захтева детаљно проучавање тог случаја, у које нећемо овде улазити.

ГЛАВА ДЕСЕТА

Удар материјалног система

§ 10·1. Проблем удара материјалног система

Проучавајући кретање материјалног система наишли смо (§ 3·2, крај) на случај кад систем, слободан или неслободан, долази једног тренутка на незадржавајућу везу са брзинама које не задовољавају услов који поставља та веза за брзине. У том случају досад изнесене методе за проучавање кретања материјалног система нису довољне за одређивање кретања система *после* тог тренутка. Механичка појава, која се при томе проучава, претставља *удар материјалног система о везу*. Формулишимо математички услове те појаве за случај холономног система.

Замислимо материјални систем од n материјалних тачака чије масе означимо са m_i и векторе положаја у односу на непокретни пол са $\vec{r}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Нека су дате:

1. Коначне везе (§ 3·2)

$$f_l(\vec{r}_i, t) \geqslant 0\,, \qquad i=1, 2, \ldots, n;\; l=1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

које могу бити задржавајуће или незадржавајуће, али које се у последњем случају узимају у обзир само кад дејствују.

2. Активне силе са ознаком $\vec{F}_i$, резултанте свих активних сила које дејствују на i'ту тачку.

3. Почетно кинематичко стање система са почетним вредностима вектора положаја и почетним брзинама; време прво рачунамо од тог почетног тренутка кретања, тј. ставимо $t_0 = 0$.

Са овим подацима се кретање система одређује после интеграције диференцијалних једначина кретања које у векторском облику гласе

$$(2) \qquad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l = \vec{F} + \vec{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Искоришћене ознаке су познате из претходног излагања (§ 3·2).

После интеграције тог система и узимања у обзир почетних услова добићемо коначне једначине, једначине кретања система, које кратко можемо написати

$$(3) \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_i\,(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

и оне одређују кретање система од тренутка $t_0 = 0$.

Претпоставимо сад да сем веза (1) постоји још једна коначна веза незадржавајуће природе

$$(4) \qquad f(\vec{r}_i, t) \geqslant 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако почетни положај система не припада тој вези, тј. ако је

$$f(\vec{r}_{i0}, 0) > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

материјални систем ће почети да се креће као слободан у односу на везу (4).

Даље могу наступити два случаја: 1. систем никад не долази на везу (4) и она је, према томе, за такво кретање система беспредметна; 2. једног одређеног тренутка t_1 систем долази на везу; пошто је $t_1 > 0$, вредност t_1 се одређује као најмањи позитивни корен једначине

$$f(\vec{r}_i\,(t), t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где t треба сматрати као непознату, а $\vec{r}_i$ су функције одређене једначинама (3). Ако такав корен t_1 постоји, материјални систем је дошао у положај, кад је почела да дејствује, сем претходних, и веза (4). Почнимо сад проучавати појаву кретања система од тог тренутка t_1. Време од тог тренутка означаваћемо са τ и то тако да тренутку t_1 одговара $\tau = 0$.

Пошто је веза почела да дејствује, брзине тачака система треба да задовољавају услов за брзине

(5) $$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i\, f, \vec{v}_i) + \frac{\partial f}{\partial t} \geqslant 0 .$$

Вредности величина, које улазе у овај услов, за тренутак $\tau = 0$ означаваћемо индексом 0.

Ако је за тренутак $\tau = 0$ тај услов задовољен, тј.

(6) $$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \geqslant 0 ,$$

брзине система, са којима је систем дошао на везу, спадају у могуће брзине и даље проучавање кретања система се врши на тај начин што се у диференцијалне једначине (2) додаје са десне стране допунски члан у облику

$$\lambda\, \mathrm{grad}_i\, f ;$$

који одговара сили реакције везе (4) на i'ту тачку. У даљем кретању систем може или остати на вези или је поново напустити; то зависи, како знамо, од вредности множитеља везе λ. Према томе проучавање кретања материјалног система под условом (6) се врши на познати, раније изложени начин.

Учинимо сад другу претпоставку. Претпоставимо да материјални систем у тренутку доласка на везу за $\tau = 0$ има брзине које не задовољавају услов (6), већ упоредо са (5) имамо за $\tau = 0$

(7) $$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 < 0 .$$

Брзине доласка нашег система на везу се јављају према томе у овом случају као немогуће. Како се остварење везе (4) врши помоћу маса и те масе везе не допуштају да њихово место заузму масе нашег материјалног система, појављују се нове силе, силе реакција, које дејствују на масе нашег система, а њихови извори су у масама како везе (4), тако и у масама свих осталих веза (1).

Конкретно, у физичкој појави, треба сматрати, да се дејство тих реакција врши једно, макар и кратко, одређено време и доводи до резултата да материјални систем добије нове, могуће брзине. Са жељом да се упрости проучавање такве појаве сматра се да поменуте реакције спадају у категорију такозваних тренутних сила коначног импулса (Рационална механика, I, § 12·1). Таква идеализована појава и претставља оно што се у рационалној механици зове *удар система* о везу. Наведимо ове особине те појаве:

1. Време дејства свих тренутних реакција, другим речима, *време удара* је бескрајно мало и у граничном посматрању тежи нули. Удар почиње у тренутку $\tau=0$ и завршава се у тренутку $\tau_2=\Delta\tau$, при чему $\Delta\tau\to 0$.

2. За време $\Delta\tau$ импулси тренутних реакција, које се сматрају као бескрајно велике, теже одређеним коначним вредностима, а импулси коначних сила једнаки су нули.

3. За време удара у систему се не врше никаква коначна померања. Другим речима, вектори положаја како тачака система, тако и оних маса које остварују везе, остају непромењени.

4. За време удара се мењају само брзине тачака и оне величине, које су везане за те брзине (количине кретања, њихов момент, жива сила).

5. На крају времена удара брзине система постану такве да важи неједнакост

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_2>0, \tag{8}$$

при чему смо индексом 2 означили вредност извода за тренутак $\tau_2=\Delta\tau$.

Сматрајући да се вредност извода $\frac{df}{dt}$ мења за време удара непрекидно, треба да постоји тренутак, означимо га са τ_1, за који ће бити

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1=0. \tag{9}$$

6. Претпостављамо да тренутне силе реакција за време свог дејства имају правац градијента одговарајућих веза.

За решавање проблема о кретању система после удара треба да одредимо *брзине одласка*, тј. брзине тачака система после завршетка дејства тренутних сила реакција.

У вези са горе наведеним изразимо прво промену брзина од почетка удара до тренутка τ_1. За тај циљ интегришимо диференцијалне једначине кретања система, које сад треба написати

$$m_i\,\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\sum_{l=1}^{k}\lambda_l\,\mathrm{grad}_i\,f_l+\lambda\,\mathrm{grad}_i\,f,\qquad i=1,2,\ldots,n,$$

у границама од 0 до τ_1. После интеграције имамо

$$(10)\qquad m_i \vec{v}_{i1} - m_i \vec{v}_{i0} = \sum_{l=1}^{k} \Lambda_l^1 \operatorname{grad}_i f_l + \Lambda^1 \operatorname{grad}_i f, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где су: $\vec{v}_{i0}$ и $\vec{v}_{i1}$ брзине i'те тачке при почетку удара — брзине доласка, и за тренутак τ_1 и

$$(11)\qquad \Lambda_l^1 = \int_0^{\tau_1} \lambda_l\, dt, \qquad \Lambda^1 = \int_0^{\tau_1} \lambda\, dt$$

непознати множитељи импулсивних реакција, који својим вредностима одређују импулсе реакција.

Чланови са $\vec{F}_i$ отпали су, јер су те силе коначне и њихови импулси за бескрајно мали интервал времена једнаки нули. Градијенти свих веза су стални вектори за све време удара.

Сличне једначине можемо поставити за интервал од τ_1 до τ_2, тј. до краја удара,

$$(12)\qquad m_i \vec{v}_{i2} - m_i \vec{v}_{i1} = \sum_{l=1}^{k} \Lambda_l^2 \operatorname{grad}_i f_l + \Lambda^2 \operatorname{grad}_i f, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где су: $\vec{v}_{i2}$ брзине одласка и

$$(13)\qquad \Lambda_l^2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_l\, dt, \qquad \Lambda^2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda\, dt.$$

Сад се проблем може рашчланити у два дела:

I. Дате су брзине доласка $\vec{v}_{i0}$, треба одредити брзине $\vec{v}_{i1}$ и множитеље импулсивних реакција (11). За то одређивање служе векторске једначине (10) и $k+1$ скаларних једначина

$$(14)\qquad \left(\frac{df_l}{dt}\right)_1 = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l, \vec{v}_{i1}) + \left(\frac{\partial f_l}{\partial t}\right)_0 = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, k,$$

$$(15)\qquad \left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f, \vec{v}_{i1}) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0.$$

Како број непознатих одговара броју једначина и при томе су једначине (14) и (15) линеарне у односу на координате брзина, а векторским једначинама (10) одговара систем линеарних једначина у односу на исте координате непознатих брзина и множитеље (11), није тешко показати да тај део проблема без икаквих допунских услова увек има одређено решење. Према томе у наредним расуђивањима величине $\vec{v}_{i1}$ можемо сматрати као познате.

II. Дате су брзине $\vec{v}_{i1}$, а треба одредити брзине $\vec{v}_{i2}$ и множитеље импулсивних реакција (13). За одређивање тих величина служе векторске једначине (12) и само k скаларних једначина

$$(16) \qquad \left(\frac{df_l}{dt}\right)_2 = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad}_i f_l, \vec{v}_{i2}) + \left(\frac{\partial f_l}{\partial t}\right)_0 = 0 .$$

Пошто у овом случају место једначине (15) имамо неједнакост (8), недостаје једна скаларна једначина за дефинитивно решење овог дела проблема и одређивања брзина одласка.

Та се скаларна једначина уводи као допунски услов и то у облику који одговара појавама посматраним у природи. При овом излагању тај допунски услов можемо поставити у облику везе између импулсивних реакција за први и други период удара. У најпростијој форми та се веза поставља једначином

$$\Lambda^2 = \varepsilon \Lambda^1 ,$$

где је ε бројни коефицијент, који се зове *коефицијент успостављања* (Рац. мех. I. § 12·3). Додавањем ове једначине проблем постаје потпуно одређен и стоји у вези поново само са решавањем система линеарних једначина.

Ако се од оних веза, које смо увели једначинама односно неједнакостима (1), један део, на пример

$$f_1, f_2, \ldots, f_p, \qquad (p < k)$$

састоји од незадржавајућих веза, материјални систем после удара може напустити те везе. За такве везе се не може искористити услов (16) и према томе за сваку од тих веза треба да буде такође дат однос импулсивног множитеља за други део удара према импулсивном множитељу за први део, тј. однос

$$\Lambda_l^2 : \Lambda_l^1 , \qquad l = 1, 2, \ldots, p .$$

Тај однос исто тако претставља коефицијент успостављања l-те везе и датог система. Како сваки од њих има своју специјалну вредност према природи везе и система, означимо га са ε_l. Према томе у замену за један део једначина (16) треба ставити једначину

$$\Lambda_l^2 = \varepsilon_l \Lambda_l^1, \qquad l = 1, 2, \ldots, p.$$

У проучавању појаве удара рашчланили смо удар на два дела. За први део смо поставили једначине (10), за други једначине (12). Навешћемо још једначине које одговарају целокупној појави.

Ако саберемо (12) и (10), добићемо

$$m_i \vec{v}_{i2} - m_i \vec{v}_{i0} = \sum_{l=1}^{k} \Lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \Lambda \operatorname{grad}_i f, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где су

$$\Lambda_l = \int_0^{\tau_2} \lambda_l \, dt, \qquad \Lambda = \int_0^{\tau_2} \lambda \, dt.$$

Имамо n векторских једначина за одређивање n вектора $\vec{v}_{i2}$ и $k+1$ скалара Λ_l, Λ. За сваку задржавајућу везу из (1) имамо услов (16), а за незадржавајућу треба ставити

$$\Lambda_l = (1 + \varepsilon_l) \Lambda_l^1$$

исто као и за везу (4)

$$\Lambda = (1 + \varepsilon) \Lambda^1,$$

при чему су Λ_l^1 и Λ^1 импулсивни множитељи за први део удара.

§ 10·11. Пример

Ради конкретног тумачења наведене теорије узмимо прост пример.

Нека се материјални систем састоји из двеју тешких тачака маса m_1 и m_2 везаних штапом непромењљиве дужине l чију масу занемарујемо. Систем врши слободан пад из положаја са висинама H (тачке m_1) и $H+h$ (тачке m_2) над хоризонтом и једног тренутка врши први удар са хоризонталном равни, кад тачка m_1 долази у ту раван. Треба одредити брзине тачака после тог првог удара. Коефицијент успостављања ε хоризонталне равни и тачке m_1 је дат.

Како је у овом примеру кретање система до удара потпуно јасно, нећемо решавати задатак о кретању тачака од почетка кретања до удара, већ ћемо само навести решење.

Ако за координатну раван Oxy узмемо вертикалну раван кроз почетне положаје тачака, па осу Ox сместимо у хоризонталну раван, а осу Oy наперимо вертикално навише, можемо за почетне координате узети

$$m_1(a, H), \quad m_2(b, H+h),$$

где су H, h, a, b позитивне величине и $b > a$, при чему је

$$(1) \qquad (b-a)^2 + h^2 = l^2.$$

Координате тачака за време кретања

$$m_1(x_1, y_1), \quad m_2(x_2, y_2)$$

морају задовољавати три везе: једну задржавајућу и две незадржавајуће

$$(2) \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0,$$

$$(3) \qquad y_1 \geqslant 0,$$

$$(4) \qquad y_2 \geqslant 0.$$

Коначне једначине кретања до удара имају облик

$$x_1 = a, \qquad y_1 = H - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$x_2 = b, \qquad y_2 = H + h - \frac{1}{2} g t^2,$$

при чему време рачунамо од почетка слободног пада.

У тренутку t_1, који задовољава услов

$$H - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

тачка m_1 је дошла у хоризонталну раван и то са брзином

$$(5) \qquad x_{10}' = 0, \qquad y_{10}' = -g t_1 = -\sqrt{2Hg} = v_{10} = v_0.$$

Незадржавајућа веза (3) почела је да дејствује, тј. имамо

$$y_1 = 0,$$

а према томе брзина те тачка мора задовољавати услов

$$(6) \qquad y_1' \geqslant 0.$$

Како из (5) видимо да је брзина доласка y_{10}' негативна и према томе не задовољава претходни услов, настаје удар те тачке о хоризонталну раван, а пошто је са том тачком везана и друга тачка система и на ту тачку дејствује преко штапа тренутна сила, имамо појаву удара у систему.

У почетку удара ($\tau = 0$) положај система је одређен координатама

$$(7) \qquad x_{10} = a\,, \quad y_{10} = 0\,; \quad x_{20} = b\,, \quad y_{20} = h\,,$$

$$(8) \qquad x_{10}' = 0\,, \quad y_{10}' = v_{10}\,; \quad x_{20}' = 0\,, \quad y_{20}' = v_{20} = v_{10} = v_0\,.$$

Пре свега приметимо да за све време удара систем остаје у истом положају са координатама (7).

Узмимо сад у обзир тренутак τ_1 кад је испуњен услов од незадржавајуће везе у смислу једнакости, тј. за тај тренутак имамо

$$(9) \qquad y_{11}' = 0\,.$$

Саставимо сад једначине (10) претходног параграфа у скаларном облику. Узимајући у обзир вредности (7) и (8) добићемо

$$(10) \qquad m_1 x_{11}' = -\Lambda_1^1 d\,,$$

$$(11) \qquad m_1 y_{11}' - m_1 v_0 = -\Lambda_1^1 h + \Lambda^1\,;$$

$$(12) \qquad m_2 x_{21}' = \Lambda_1^1 d\,,$$

$$(13) \qquad m_2 y_{21}' - m_2 v_0 = \Lambda_1^1 h\,,$$

где смо са d означили разлику $b - a = d$, а Λ_1^1 и Λ^1 су множитељи импулсивних реакција. Задржавајућа веза (2) поставља у нашем положају система овај услов за брзине:

$$(14) \qquad -d \cdot x_{11}' + d \cdot x_{21}' - h \cdot y_{11}' + h\, y_{21}' = 0\,.$$

Сад имамо на расположењу шест линеарних једначина (9) — (14) за одређивање шест непознатих

$$x_{11}'\,, x_{21}'\,, y_{11}'\,, y_{21}'\,, \Lambda_1^1\,, \Lambda^1\,.$$

Решење тих једначина даје:

$$x_{11}' = -m_2 k\,, \qquad y_{11}' = 0\,,$$

$$x_{21}' = m_1 k\,, \qquad y_{21}' = v_0 + \frac{m_1 h}{d} k\,,$$

$$\Lambda_1^1 = \frac{m_1 m_2}{d} k\,, \qquad \Lambda^1 = -m_1\left(v_0 - \frac{m_2 h}{d} k \right),$$

где је

$$k = -\frac{v_0\, h\, d}{m_1 l^2 + m_2 d^2} > 0\,.$$

Сад ћемо према једначинама (12) поставити једначине за одређивање величина

$$x_{12}',\; x_{22}',\; y_{12}',\; y_{22}',\; \Lambda_1^2,\; \Lambda^2,$$

тј. координата брзина одласка и множитеља импулсивних реакција за време од τ_1 до краја удара.

Из (12) имамо овај систем једначина

$$m_1 x_{12}' - m_1 x_{11}' = -\Lambda_1^2 d\,, \tag{15}$$

$$m_1 y_{12}' - m_1 y_{11}' = -\Lambda_1^2 h + \Lambda^2\,, \tag{16}$$

$$m_2 x_{22}' - m_2 x_{21}' = \Lambda_1^2 d\,, \tag{17}$$

$$m_2 y_{22}' - m_2 y_{21}' = \Lambda_1^2 h\,, \tag{18}$$

где су ознаке јасне из претходног излагања. Сем тога из везе (2) имамо услов за нове брзине

$$-d \cdot x_{12}' + d \cdot x_{22}' - h \cdot y_{12}' + h \cdot y_{22}' = 0 \tag{19}$$

и најзад допунски услов за одређивање реакције успостављања

$$\Lambda^2 = \varepsilon \Lambda^1\,, \tag{20}$$

где је ε дати коефицијент успостављања.

Решење новог система линеарних једначина (15) — (20) са нађеним вредностима брзина за тренутак τ_1 има облик

$$\begin{aligned} x_{12}' &= x_{11}' - \frac{1}{m_1} A d\,, \\ x_{22}' &= x_{21}' + \frac{1}{m_2} A d\,, \\ y_{12}' &= y_{11}' - \frac{1}{m_1} A h + \varepsilon \Lambda^1\,, \\ y_{22}' &= y_{21}' + \frac{1}{m_2} A h\,, \end{aligned} \tag{21}$$

где се $A = \Lambda_1^2$ одређује из једначине

$$A = \frac{\varepsilon\, m_1\, m_2\, h\, \Lambda^1}{(m_1 + m_2)\, l^2} > 0\,.$$

На основу добијених резултата не би било тешко нацртати брзине тачака у почетку удара, у тренутку τ_1 и на крају удара, у тренутку τ_2.

Узимајући брзине из (21) за почетне брзине, у случају потребе, можемо проучити ново кретање система до тренутка новог удара итд. Ако коефицијент успостављања није једнак јединици, кретање се завршава тиме што се обе тачке заустављају у хоризонталној равни. Тај резултат одговара стварној физичкој појави схематски претстављеној нашим задатком.

§ 10·2. Закон количине кретања при удару

У § 10·1 анализирали смо проблем удара холономног материјалног система о једну незадржавајућу везу. Сад узмимо у обзир материјални систем општег карактера, који може да буде и нехолономан и на који могу дејствовати не само ударне реакције већ и ударне активне силе, остварене на било који начин, и покажимо у којој форми се могу применити опште теореме о кретању материјалног система на анализу појаве удара.

Према § 4·1 на свако кретање материјалног система можемо применити закон количине кретања у интегралном облику. Тај закон изражава ова векторска једначина (8) § 4·1

$$\vec{K}' - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt + \int_{t_0}^{t} \vec{R}\, dt ,$$

где су употребљене познате ознаке и главни вектор реакција $\vec{R}$ има вредност

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{q\,grad}_i \varphi_j \right) .$$

Ако применимо горњу једначину на удар и то за целокупно време удара, добићемо једначину

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_0 = \vec{J}_A + \vec{J}_R = \vec{J}, \tag{1}$$

која изражава *закон количине кретања при удару материјалног система.*

$\vec{J}_A$ означава главни импулс тренутних активних сила и $\vec{J}_R$ исто за силе реакција; $\vec{J}$ је њихов векторски збир. Вектор $\vec{J}_R$ се изражава помоћу импулсивних множитеља овом једначином

$$\vec{J}_R = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k_1} \Lambda_l \operatorname{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} M_j \, q \operatorname{grad}_i \varphi_j \right)$$

са датим вредностима импулсивних множитеља реакција

$$(2) \qquad \Lambda_l = \int_0^{\tau_2} \lambda_l \, dt\,, \quad M_j = \int_0^{\tau_2} \mu_j \, dt\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1; j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Последње једначине (2) показују везу између импулсивних множитеља Λ_l, M_j и множитеља веза λ_l, μ_j, али при решавању конкретних задатака (у области рационалне механике) множитељи λ_l и μ_j не играју улоге, већ улазе у расуђивања само импулсивни множитељи Λ_i, M. Проучавање те везе може бити предмет дубљег физичког проучавања појаве удара, где се узимају у обзир, рецимо, силе еластичности које дејствују за време удара.

Ако приметимо да су

$$\vec{K}_2 = m \vec{v}_{c2}\,, \qquad \vec{K}_0 = m \vec{v}_{c0}\,,$$

где је m целокупна маса система и $\vec{v}_{c2}$ и $\vec{v}_{c0}$ брзине центра маса система на крају и у почетку удара, једначину (1) можемо заменити овом

$$m(\vec{v}_{c2} - \vec{v}_{c0}) = \vec{J}.$$

Према томе за време удара центар маса система, не мењајући свој положај, мења своју брзину на исти начин као и једна материјална тачка масе m под утицајем једног импулса, главног импулса свих тренутних сила. Тај импулс може да се сведе само на главни импулс сила реакције, или да буде једнак нули кад је

$$\vec{J}_A + \vec{J}_R = 0\,.$$

У последњем случају центар маса система не мења за време удара своју брзину. Ако је он био непомичан, остаће непомичан и после удара.

§ 10·3. Закон момента количина кретања при удару

У § 4·3 смо извели закон момента количина кретања у интегралном облику, који се за непокретни пол изражава једначином (7) тог параграфа

$$\vec{l}-\vec{l}_0=\int_{t_0}^{t}\vec{M}\,dt+\int_{t_0}^{t}\vec{L}\,dt$$

са познатим ознакама.

У примени на удар претходна једначина даје

$$\vec{l}_2-\vec{l}_0=\int_{0}^{\tau_2}\vec{M}\,dt+\int_{0}^{\tau_2}\vec{L}\,dt$$

или

$$\vec{l}_2-\vec{l}_0=\vec{S}_A+\vec{S}_R \tag{1}$$

где смо са $\vec{S}_A$ и $\vec{S}_R$ означили главни момент тренутних активних сила односно тренутних реакција.

Једначина (1) изражава *закон момента количина кретања при удару материјалног система*. Детаљан израз, на пример, за $\vec{S}_R$ изгледа

$$S_R=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{k_1}\Lambda_l\,[\vec{r}_i,\operatorname{grad}_i f_l]+\sum_{j=1}^{k_2}M_j\,[\vec{r}_i,\,\operatorname{q}\operatorname{grad}_i \varphi_j]\right\},$$

где су, као и раније, Λ_l и M_j импулсивни множитељи.

Ако је пол у односу на који конструишемо моменте покретан, појављује се, као што знамо, један допунски члан у једначини која изражава закон момента количина кретања. Тај члан према (9) параграфа § 4·3 има вредност

$$\int_{t_0}^{t}[\vec{v}_A,\vec{K}]\,dt,$$

где је $\vec{v}_A$ брзина покретног пола и $\vec{K}$ количина кретања система. Како за време удара подинтегрални вектор претходног интеграла остаје коначан, сам интеграл, проширен на бескрајно мали интервал времена, тежи нули и према томе треба да се изостави. Из тог изводимо закључак да једначина (1) за случај удара важи не само за непокретни већ и за покретни пол.

Приметимо да су нарочито важни они специјални случајеви кад су у једначини (1) један или обадва вектора десне стране једнаки нули.

Законима количине кретања и момента количина кретања у векторској форми одговарају шест скаларних једначина. Пошто такозвани непроменљив материјални систем или чврсто тело има највише шест степена слободе, јасно је да оба закона играју врло важну улогу у решавању проблема удара у механици чврстог тела.

§ 10·4. Жива сила система при удару. Карноове теореме

При проучавању промене живе силе материјалног система за време удара зауставимо се само на случају холономног склерономног система кад све везе задовољавају услове

$$\frac{\partial f_l}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,. \qquad l = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Под тим условима брзине тачака система на крају првог дела удара, у тренутку τ_1, према (14) и (15) § 10·1 треба да задовољавају услове

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{df_l}{dt}\right)_1 = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i\, f_l\,,\, \vec{v}_{i1}) = 0\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, k\,,$$

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i\, f,\, \vec{v}_{i1}) = 0\,.$$

Узмимо сад једначине (10) § 10·1 за први део удара

$$m_i\, \vec{v}_{i1} - m_i\, \vec{v}_{i0} = \sum_{l=1}^{k} \Lambda_l^1\, \mathrm{grad}_i\, f_l + \Lambda^1\, \mathrm{grad}_i\, f\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

сваку једначину помножимо скаларно са $\vec{v}_{i1}$ и резултате саберимо. Тада ћемо добити

$$\text{(3)} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{i1}^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i\, (\vec{v}_{i1}\,,\, \vec{v}_{i0}) = 0\,,$$

при чему смо узели у обзир једначине (1) и (2).

Ако сада уведемо живу силу

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_{i1}^2$$

на крају првог дела удара, и живу силу T_0 са вредношћу

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_{i0}^2$$

у почетку удара, за разлику тих величина добијамо

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_{i1}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_{i0}^2 .$$

Ако од десне стране претходне једначине одузмемо нулу, претстављену левом страном једначине (3), можемо написати

$$T_1 - T_0 = - \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \, v_{i1}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} m_i \, (\vec{v}_{i1}, \vec{v}_{i0}) + \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_{i0}^2 \right]$$

или

$$(4) \qquad T_1 - T_0 = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, (\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{i1})^2 .$$

Ако разлике $\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{i1}$ сматрамо као *изгубљене брзине* за време првог дела удара, израз

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, (\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{i1})^2 = T_{10}$$

се може сматрати као жива сила система са изгубљеним брзинама. По самој својој природи та величина не може бити негативна. Једначина (4) у облику

$$(5) \qquad T_1 - T_0 = - T_{10}$$

изражава такозвану *прву Карноову теорему.* Она гласи: материјални систем са непомичним везама за први део удара смањује своју живу силу за величину живе силе система са изгубљеним брзинама.

Узмимо сад у обзир живу силу система на крају удара са вредношћу

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{i2}^2$$

и упоредимо је са живом силом T_1. Разлику

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{i2}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{i1}^2$$

трансформишимо сад помоћу једначине

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{v}_{i2}, \vec{v}_{i1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{i1}^2 = 0\,,$$

која се добија из једначина (12) § 10·1, ако сваку од тих једначина помножимо скаларно са $\vec{v}_{i1}$ и резултате саберемо, а при томе искористимо једначине (1) и (2). После те трансформације добићемо

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1})^2\,.$$

Разлике $\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}$ су *добијене брзине* за време другог дела удара. Ако живу силу система са тим брзинама означимо са T_{21}, место претходне једначине имамо

$$T_2 - T_1 = T_{21}\,. \tag{6}$$

Ова једначина изражава *другу Карноову теорему* која гласи: материјални систем са непомичним везама за други део удара повећава своју живу силу за величину живе силе система са добијеним брзинама.

Најзад за одређивање целокупне промене живе силе за време удара треба израчунати разлику

$$T_2 - T_0\,.$$

Према (5) и (6) та разлика има вредност

$$T_2 - T_0 = T_{21} - T_{10}\,. \tag{7}$$

Ако сад из (1) § 10·1 напишемо

$$(8) \qquad m_i\,(\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i0}) = \Phi_i\,(\Lambda_i^1, \Lambda^1)\,,$$

где смо са Φ_i означили хомогену линеарну функцију аргумената Λ_i и Λ, онда узимајући, као претпоставку, да су коефицијенти успостављања за све везе исти, можемо на основу једначина

$$\Lambda_i^2 = \varepsilon\,\Lambda_1^1\,, \quad \Lambda^2 = \varepsilon\,\Lambda^1$$

написати за остале разлике брзина

$$(9) \qquad m_i\,(\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}) = \Phi_i\,(\Lambda_i^2, \Lambda^2) = \varepsilon\,\Phi_i\,(\Lambda_i^1\,, \Lambda^1)$$

$$(10) \qquad m_i\,(\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i0}) = \Phi_i\,(\Lambda_i^1 + \Lambda_i^2, \Lambda_i^1 + \Lambda^2) = (1+\varepsilon)\,\Phi_i\,(\Lambda_i^1, \Lambda^1).$$

Из једначина (8), (9), (10) следује

$$T_{10} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{i1})^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,\Phi_i^2,$$

$$T_{21} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} m_i\,(\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1})^2 = \varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\,\Phi_i^2,$$

$$T_{02} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{i2})^2 = (1+\varepsilon)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\,\Phi_i^2,$$

одакле је

$$T_{21} = \varepsilon^2\,T_{10}\,, \qquad T_{02} = (1+\varepsilon)^2\,T_{10}\,.$$

На основу ових једначина место (7) пишемо

$$T_2 - T_0 = -\,(1-\varepsilon^2)\,T_{10}$$

или

$$T_2 - T_0 = -\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,T_{02}\,,$$

где је T_{02} жива сила система са изгубљеним брзинама за целокупно време удара.

Изведена једначина изражава такозвану *генералисану Карноову теорему;* она гласи: материјални систем са непомичним везама за целокупно време удара смањује своју живу силу за $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ део живе силе система са изгубљеним брзинама за то целокупно време удара.

Кад је $\varepsilon = 1$, материјални систем у потпуности успоставља ону своју живу силу коју је имао у почетку удара.

Тиме завршавамо излагање основних теорема из теорије удара. Важни део те теорије, који се односи на чврсто тело, образоваће нарочиту главу динамике чврстог тела.

ERRATA

Први број означава страну, други врсту са знаком плус одозго, са знаком минус одоздо.

			стоји	треба
Стр.	32	+ 0	32 Примери 1 · 23	§ 1·23 Примери 32
„	78	+ 1	$\int_0^\alpha \sin^2 \alpha \, d\alpha$	$\int_0^\alpha \sin^2 \theta \, d\theta$
„	78	+ 3	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{2} m$
„	140	— 10	Γ_i,	$\Gamma_{i, \mu\sigma}$
„	156	+ 12	по инерцији	по инерцији у
„	177	+ 1	покретни	само за непокретни
„	196	— 5	*фарма*	*форма*
„	232	+ 11	єа	за

РЕГИСТАР

Бројеви означавају страну