НАУКА • ТЕХНИКА • УМЕТНОСТ

12

БИБЛИОТЕКА
ПРИРУЧНЕ ЛИТЕРАТУРЕ ЗА НАСТАВНИКЕ

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ПРЕДАВАЊА ИЗ ОСНОВА ГЕОМЕТРИЈЕ

ЗАВОД ЗА ИЗДАВАЊЕ УЏБЕНИКА
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1963.

Наслов оригинала:

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЛЕКЦИИ
ПО
ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Издательство Харьковского университета
Харьков, 1959

Превела
МИЛИЦА ИЛИЋ-ДАЈОВИЋ

Штампа Београдски графички завод

ПРЕДГОВОР

Ја сам морао не једанпут предавати универзитетски курс основа геометрије. При том ми се јављао низ идеја у вези са излагањем појединих делова тог курса. Тим сам идејама био вођен приликом писања овог уџбеника.

Традиционални курс основа геометрије, не узимајући у обзир историјски осврт којим се курс обично почиње, садржи четири теме: аксиоматско изграђивање еуклидске геометрије, анализу аксиома еуклидске геометрије, геометрију Лобачевског, пројективну геометрију и остале геометрије.

Кад се излаже питање о аксиоматском изграђивању еуклидске геометрије, тада предавач поставља себи задатак да, полазећи од аксиома, систем последица које из ових произистичу развије до оног момента кад излагање у средњошколском курсу геометрије постаје довољно беспрекорно. Практично се ту мора строго засновати мерење одсечака и углова, морају се доказати основне теореме о конгруентности најпростијих фигура, извести познате неједнакости за странице и углове троугла, обрадити сличност троуглова и завршити Питагорином теоремом.

Без обзира на елементарност тог дела курса, његово излагање у наведеном обиму захтева знатно времена. И ту ствар стоји отприлике овако. Када се, напослетку, утврђује природни поредак следовања тачака на правој и за одсечке се доказује постојање дужине, аудиторијум постаје толико подозрив да почиње да сумња у могућност да се икад таквим путем дође до Питагорине теореме. Та сумња у току даљег излагања не само што не слаби него се још више појачава тиме што се, услед недостатка времена, предавач обично ограничава на врло малобројне последице аксиома конгруентности и прелази на разматрање разних ставова еквивалентних петом постулату.

Мени се чини да се ствар ту може донекле поправити на следећи начин.

Прво, неопходно је уместо Хилбертових аксиома поретка уводити систем аксиома заснован на односу следовања за пар тачака. Такав систем, као што је познато, еквивалентан је Хилбертовом систему аксиома, али се од овога раз-

ликује по својој једноставности и блискости уобичајеним представама о положају тачака на правој, и дозвољава да се помоћу две-три последице које из њега проистичу припреми питање увођења мере за одсечке и углове,

Друго, уместо аксиома конгруентности треба уводити аксиоме кретања. Управо на аксиомама кретања засновано је излагање у средњошколском курсу елементарне геометрије. Тешко да се може сматрати целисходним уводити аксиоме конгруентности засноване на таквим односима фигура које можемо себи представити само помоћу кретања — само ради тога да би се потом доказало постојање тог кретања.

Треће, треба само формулисати Дедекиндову аксиому непрекидности не утврђујући њену еквивалентност с Канторовом аксиомом и Архимедовом аксиомом. Томе питању поклања се и премного времена у теорији реалних бројева, која је студенту већ позната.

Што се тиче еквивалената V постулата, њих треба само поменути и то на одговарајућем месту у историјском прегледу. Сва та утврђивања еквивалентности постају тривијална пошто се утврди да је систем аксиома Лобачевског потпун.

Иако нису нова, наведена схватања су омогућила да се почетак излагања које следи непосредно за аксиомама олакша толико да постаје могућно да се заиста без нарочитих тешкоћа развије елементарна геометрија у горе поменутом обиму. А то не треба игнорисати ако се има у виду будућа професија највећег броја слушалаца — професија наставника средње школе.

Следећа тема курса — анализа аксиома елементарне геометрије — има задатак да размотри питање непротивречности, независности и потпуности система аксиома елементарне геометрије.

Ту је пре свега неопходно јасно формулисати основна питања која се постављају приликом аксиоматског изграђивања ма које теорије а посебно геометрије — питања доказивања непротивречности и потпуности система аксиома елементарне геометрије. Што се тиче њихове независности, довољно је ограничити се на доказ независности аксиоме непрекидности у облику који јој је дао Дедекинд и аксиоме паралелности. У последњем питању препоручљиво је користити се Клајновом интерпретацијом. Ствар је у томе што је у овој интерпретацији проверавање свих аксиома осим аксиома кретања заиста тривијално, а и проверавање аксиома кретања такође се може извршити прилично једноставно путем довођења произвољне тачке у центар на неки стандардни начин, а затим искоришћавањем еуклидских обртања око центра апсолуте и симетричног пресликавања у односу на њене пречнике.

Потребно је, чини нам се, битно изменити излагање теме геометрија Лобачевског. Њено традиционално излагање започиње теоријом паралелних у смислу Лабачевског. Задатак који се при том поставља састоји се не у томе да се покаже каква се парадоксална својства узајамног положаја правих могу извести из аксиоме паралелности Лобачевског већ у томе да се докаже потпуност система аксиома и изведе метричка форма равни Лобачевског. Овај задатак није лак и његово решавање својим битним делом обично прелази у такозвани необавезни раздео курса који се даје описно, без доказа.

Сматрамо да је природније и савременије да се почне другим делом постављеног задатка — извођењем линијског елемента равни у оквирима апсолутне геометрије, без искоришћавања било каквих претпоставака о паралелним. Испоставља се да такво прилажење не само што није безнадежно него је и једноставније и економичније. Строго утврђена потпуност система аксиома геометрије Лобачевског и изоморфизам свих њених реализација омогућују да се једноставно и без нарочитог труда изложе основне чињенице геометрије Лобачевског, рачунајући ту и теорију паралелних, користећи се за то најподеснијим интерпретацијама.

У последњој теми курса — пројективна геометрија и остале геометрије — основни задатак јесте строго аксиоматско заснивање пројективне геометрије. Остале геометрије обично се дају описно. Заснивање пројективне геометрије такође је по свом садржају прилично велика тема. Извесно олакшање њеног излагања постиже се на следећи начин.

Прво, уместо аксиома поретка, које се односе на појам раздвајања парова, могу се узети аксиоме следовања тројака. То је нарочито целисходно ако се преко односа следовања парова уводе аксиоме поретка еуклидске геометрије, јер се добија аналогија у тим системима аксиома.

Друго, после класичног расецања пројективне равни дуж бесконачно далеке праве треба сместа приступити изграђивању теорије вектора користећи се при том у највећој мери последицама аксиома везе, поретка, непрекидности и паралелности еуклидске геометрије, а затим увести афине координате. При том се испоставља да је могућно избећи *понављање одговарајућег раздела еуклидске геометрије и у току излагања утврдити потпуност система аксиома афине геометрије. Поред тога, строго геометријско заснивање теорије вектора такође је веома корисно. Пошто је утврђена потпуност система аксиома пројективне геометрије, њене основне чињенице могу се добити у аналитичкој реализацији.*

У овом уџбенику ми смо се руководили горе наведеним схватањима.

Општи план изграђивања курса, а такође и појединости неких доказа позајмљени су већином из књиге Н. В. Јефимова „Виша геометрија“.*

---

* У Београду је 1948. објављен српскохрватски превод „Више геометрије“ од Н. В. Јефимова (издање Београдског универзитета).

ПРЕДГОВОР ПРЕВОДИОЦА

Писац ове књиге је истакнути совјетски математичар А. В. Погорелов (рођен 1919. год.), дописни члан Академије наука СССР и професор Универзитета у Харкову, који је у свету познат по својим значајним радовима из модерне диференцијалне геометрије. Као универзитетски наставник А. В. Погорелов је предавао и предаје неколико геометријских курсева; из те наставничке делатности настали су и његови универзитетски уџбеници („Лекции по аналитической геометрии“, 1957; „Лекции по основаниям геометрии“, 1959; „Лекции по дифференциальной геометрии“, изд. III, 1961).

„Предавања из основа геометрије“ написана су по званичном програму обавезног курса основâ геометрије, који је аутор више година држао на Универзитету у Харкову. У поређењу са већином сличних уџбеника, ова књига одликује се модерном концепцијом и краткоћом излагања.*

На првом месту ваља истаћи да је овде еуклидска геометрија заснована на систему аксиома који је еквивалентан Хилбертовом систему. У свом предговору аутор је објаснио зашто није прихватио Хилбертов систем аксиома и које су предности система на којем је он овде темељио своја излагања. Аутор је такође показао с коликим је интересом, као предавач, пратио реаговања својих слушалаца и колики значај придаје чињеници да ће се већина њих посветити наставничком позиву (с обзиром на то је и нагласио важност аксиома кретања, које улазе у основу средњошколског курса елементарне геометрије). То је био несумњиво један од подстицаја да не прихвати традиционалан начин излагања и да изгради један модеран сажет курс основâ геометрије; други подстицај (иако не на другом месту) треба, по мом мишљењу, тражити у неуморној стваралачкој личности самог А. В. Погорелова, у оном његовом сталном настојању да у свему што пише оствари извесно кретање напред и томе дâ печат своје оригиналности. Стога како по основној концепцији и садржају прописаних тема тако

---

* Ово истичем за разлику од опционих, факултативних и специјалних курсева.

и по методи излагања и неким појединостима, а нарочито по оригиналном излагању основа геометрије Лобачевског (IV глава) и основа пројективне геометрије (V глава) у целини, ова књига представља значајан прилог литератури из основâ геометрије.

Као и остали уџбеници А. В. Погорелова, и „Предавања из основа геометрије“ су упадљиво малог обима, што нимало не иде на уштрб богатства њиховог садржаја. У њима је избегнуто понављање било оног што се, како аутор каже, довољно коректно обрађује у средњој школи, било оног што је, на универзитету, обухваћено другим курсевима; на тај начин су рељефније истакнуте основне и карактеристичне идеје курса основâ геометрије и њему својствена принципијелна питања. Чињеница да је аутор пажљиво одмеравао целисходност сваке појединости курса као и то што је у својој наставничкој делатности проверио оправданост својих схватања дају овој књизи посебну уверљивост.

„Предавања из основа геометрије“ користиће не само нашим професорима математике у средњим школама него и студентима математике као неопходна приручна литература из геометрије. Уверена сам да ће ова књига истакнутог геометричара допринети како сагледавању значаја модерног средњошколског курса елементарне геометрије заснованог на идеји трансформација тако и даљем модернизовању наших универзитетских курсева основâ геометрије.

Преводећи ова „Предавања“ настојала сам да што адекватније изразим ауторов карактеристичан језик и стил; при томе нисам допуштала себи никакве корекције, изузев кад се радило о очигледним омашкама. То ме обавезује да југословенског читаоца упозорим да ће овде наићи на неке неуобичајене особености у терминологији (на пример, одсечком је назван интервал, било отворен било затворен), које му, верујем, неће причињавати никакве тешкоће приликом читања ове заиста вредне књиге.

М. Илић-Дајовић

УВОД

Свакоме ко је учио елементарну геометрију познато је да њен садржај чине тврђења (теореме) у вези с геометријским фигурама која се путем логичких закључивања добијају, у крајњој линији, из извесног броја полазних поставки (аксиома).

У вези с тим постављају се три питања која се првенствено разматрају у основама геометрије:

1) пошто су основне поставке — аксиоме — такође нека тврђења која се односе на геометријске фигуре, није ли могућно да се неке од њих логички изведу из осталих;

2) можемо ли логичким расуђивањем, ослањајући се на аксиоме, добити две последице које се узајамно искључују;

3) може ли се систем аксиома допунити новим аксиомама које не би произлазиле из старих аксиома, а не би биле ни у опреци са овима.

Решење ових, за аксиоматску изградњу геометрије веома важних питања било је добијено сразмерно недавно. Највећа заслуга за то припада руском математичару Николају Ивановичу Лобачевском. Његово откриће нееуклидске геометрије и с тим повезано утврђивање независности аксиоме о паралелним правим поставило је темељ многобројним плодним истраживањима истакнутих математичара XIX столећа, у чијим су радовима горе поменута питања добила, у односу на геометрију, своје потпуно решење.

Глава I

ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЈЕ — ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ

§ 1. Еуклидови „Елементи“

Геометрија као емпиријска наука у раном периоду свог развитка достигла је нарочито висок степен у Египту, у вези са радовима на премеравању и наводњавању земљишта.

У првом миленијуму пре нове ере геометријска знања су из Египта пренета у Грчку, где је отпочела нова етапа у развитку геометрије. За време од VII до III столећа пре н. е. грчки геометри су не само обогатили геометрију многобројним новим чињеницама него и предузели озбиљне кораке у правцу њеног строго логичког заснивања.

Многовековни рад грчких геометара из тог времена сумирао је и систематизовао Еуклид (330—275. г. пре н. е.) у свом чувеном делу „Елементи“. Ово дело даје прву строго логичку конструкцију геометрије која је до нас дошла. У њему је излагање у толикој мери беспрекорно за своје време, да су у току две хиљаде година од своје појаве „Елементи“ били једини уџбеник за оне који су учили геометрију.

„Елементи“ обухватају тринаест књига, од којих су само геометрији посвећене књиге I—IV и VI, у којима се излаже планиметрија, и XI—XII, где је изложена стереометрија. Остале књиге „Елемената“ посвећене су аритметици у геометријском излагању.

Свака књига „Елемената“ почиње дефиницијама појмова који се први пут сретају. Тако су, на пример, у I књизи наведене 23 дефиниције. Међу њима су и:

Дефиниција 1. Тачка је оно што нема делова.

Дефиниција 2. Линија је дужина без ширине.

Дефиниција 3. Права је таква линија која заузима исти положај у односу на све своје тачке.

У првој књизи „Елемената“ за дефиницијама долазе постулати и аксиоме. На пример:

Постулат I. Захтева се да се од сваке тачке до сваке друге тачке може повући права.

Постулат V. Захтева се да се, сваки пут кад права секући се с двема другим правима образује са овима с једне исте стране унутрашње углове чији је збир мањи од два права угла, ове две праве секу на оној страни где је тај збир мањи од два права угла.

Аксиома I. Једнаке свака појединачно трећој једнаке су међу собом.

Аксиома II. Ако једнаким додамо једнаке, добићемо једнаке.

И постулати и аксиоме су тврђења која се узимају без доказа. По коме су се начелу једна тврђења убрајала међу постулате а друга међу аксиоме није познато.

Одмах за аксиомама излажу се теореме и конструктивни задаци под заједничким називом „ставови“, распоређени у строгом низу тако да се доказ (решење) сваког следећег става ослања на претходне ставове. Ево једнога од тих ставова:

Ако су у два троугла две странице једнога једнаке двема страницама другога и углови захваћени једнаким страницама једнаки, тада је и основица једнога троугла једнака основици другога и један троугао једнак је другоме, а и остали углови једног троугла једнаки су осталим угловима другога, и то су једнаки они углови који леже наспрам једнаких страница.

Иако су Еуклидови „Елементи“ у току многих столећа били узор беспрекорности, они ни из далека не достижу ниво данашње строгости излагања. Дефиниције геометријских облика дате у I књизи пре су описи ових облика, па и као такви су далеко од савршенства. Тако, на пример, дефиниција праве линије (дефиниција 3) не разликује ову од круга, а у дефиницији произвољне линије (дефиниција 2) помињу се дужина и ширина, које и саме захтевају да најпре буду дефинисане.

Али не треба мислити да све дефиниције на челу I књиге „Елемената“ пате од недостатака. Насупрот томе читав низ дефиниција, међу њима дефиниције круга, троугла, правог, оштрог, и тупог угла, или су беспрекорне или имају незнатне, лако отклоњиве недостатке. Ако се при том узме у обзир то да се она својства геометријских облика која су садржана у дефектним дефиницијама нигде у доказима не искоришћавају, тада се те дефиниције могу изоставити без штете по даље излагање.

Што се тиче постулатâ и аксиомâ, њихове формулације су беспрекорне, а у њима садржана тврђења битна су и чине основу доказа који за њима долазе.

Напослетку, пређимо на доказе. По замисли аутора „Елемената“, докази свих ставова треба да се у крајњој линији ослањају на својства геометријских облика одређена постулатима и аксиомама. Но већ и летимично упознавање с Еуклидовим доказима уверава нас да се у њима не једанпут искоришћавају таква својства геометријских обликâ и односâ између њих која се ни постулатима ни аксиомама не могу објаснити. Тако, на пример, у доказу горе поменутог става о подударности троуглова Еуклид се користи кретањем, а у низу других доказа позива се на својства узајамног положаја тачака на правој која се изражавају речима „лежи између“.

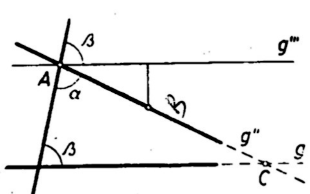
Природно, поставља се питање да ли се Еуклидови докази могу ослободити тог недостатка, можда путем замене другим доказима који се ослањају само на постулате и аксиоме. Одговор на то питање добијен је сразмерно недавно. Показало се да је то могућно учинити тек после неопходног попуњавања Еуклидовог система постулата и аксиома. У глави III ми ћемо се опет вратити на то питање.

§ 2. Покушаји да се докаже V постулат

Неке од горе поменутих недостатака Еуклидових „Елемената“ били су запазили још стари Грци, и у вези с тим било је покушаја да се излагање „Елемената“ усаврши. Главни задатак који су при том стари Грци себи поставили састојао се у томе да се Еуклидов систем постулата и аксиома сведе на најмању могућну меру.

Природан пут решавања овог задатка јесте тај да се неки од постулата и аксиома изведу из осталих. Управо тим путем „Елементи“ су били ослобођени IV постулата у коме се говори о једнакости свих правих углова.

Али, сви покушаји да се на тај начин систем ослободи V постулата остали су без резултата иако су се тим питањем геометри бавили током више од две хиљаде година. Типична грешка већине доказа V постулата било је свесно или несвесно искоришћавање неког



Сл. 1

тврђења које се не садржи отворено у осталим постулатима и аксиомама и не произлази из њих.

Ево, на пример, Прокловог доказа.

Дато је: $\alpha+\beta<2d$ (сл. 1). Треба доказати да се праве g' и g'' секу у некој тачки C.

Повуцимо кроз тачку A праву g''' паралелну g'. Узмимо на правој g'' тачку B и спустимо из ње нормалу на g'''. Како, кад се тачка B удаљује од A, одстојање тачке B од g''' неограничено расте, *а растојање између паралелних правих g' и g''' је стално*, то ће се на g'' наћи тачка C која припада g'. У тој тачки ће се сећи праве g' и g''.

Својство паралелних правих које је у том доказу искоришћено не садржи се отворено у осталим постулатима и аксиомама. Штавише, као што ћемо касније видети, оно се из њих не може ни извести.

Постоји врло много других теорема помоћу којих би се могао доказати V постулат. На пример:

1. Све нормале једног крака неког оштрог угла секу други крак.

2. Постоје слични а неједнаки троугли.

3. Постоје троугли произвољно велике површине.

4. Постоје троугли чији је збир углова једнак са два права угла.

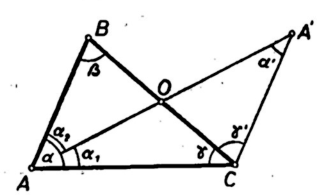
5. Кроз тачку ван дате праве може се повући највише једна њој паралелна права.

Премда нису довели до жељеног резултата, покушаји доказивања V постулата одиграли су несумњиво позитивну улогу у развитку геометрије, јер су је у низу случајева обогатили новим интересантним теоремама чији се доказ не ослања на V постулат. Једна од таквих теорема, коју је доказао Лежандр, гласи:

У сваком троуглу збир углова није већи од два права угла.

Ова се теорема искоришћава у даљем излагању; зато ћемо навести њен доказ. Он се заснива на двема лемама:

1. *У сваком троуглу збир два унутрашња угла мањи је од два права угла.*



Сл. 2

2. *За сваки троугао може се конструисати нов троугао са истим збиром углова, у коме један од углова неће бити већи од половине унапред задатог угла датог троугла.*

Према познатој теореми у чијем се доказу не искоришћава V постулат, спољашњи угао је већи од било којег унутрашњег несуседног угла. Зато, ако су α и β углови троугла а α' је спољашњи угао суседан са α, тада је $\beta<\alpha'$. Како је $\alpha+\alpha'=\pi$, мора бити $\alpha+\beta<\pi$.

Докажимо другу лему. Нека је ABC ма који троугао, а α, β и γ његови углови (сл. 2).

Повуцимо из темена A кроз средину O странице BC праву и положимо на њу из O одсечак OA' једнак OA. Из једнакости троуглова AOB и $A'OC$ следи $\alpha'=\alpha_2$, $\beta=\gamma'$. Одатле је

$$\beta+\gamma+\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1+\alpha'+\gamma+\gamma'.$$

Овде на левој страни једнакости стоји збир углова датог троугла ABC, а на десној страни збир углова троугла $AA'C$. Како је $\alpha'=\alpha_2$, а $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, то бар један од углова троугла ACA' α' или α неће бити већи од половине угла α.

Сада није тешко доказати Лежандрову теорему. Нека је збир углова неког троугла $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Примењујући неколико пута лему 2 можемо конструисати троугао чији ће збир углова бити исто толики, то јест $\pi+\varepsilon$, а један угао неће бити већи од $\frac{\alpha}{2^n}$. За довољно велико n биће $\frac{\alpha}{2^n}<\varepsilon$ те ће, према томе, збир остала два угла тог троугла бити већи од π, а то је у опреци с лемом 1. Тиме је теорема доказана.

§ 3. Откриће нееуклидске геометрије

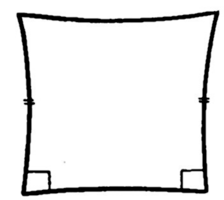
Један од начина прилажења доказивању V постулата којим су се користили многи геометричари XVIII и прве половине XIX столећа био је следећи.

V постулат замењује се својом негацијом или каквим било тврђењем еквивалентним тој негацији. Ослањајући се на тако измењен систем постулата и аксиома доказују се сви могућни ставови који из те негације логично произлазе, слично ономе како се то чини у „Елементима". Ако V постулат стварно произлази из осталих постулата и аксиома, тада је тај на показани начин измењен систем постулата и аксиома противречан. Зато ћемо пре или после доћи до два закључка који се узајамно искључују. Тиме ће V постулат бити доказан.

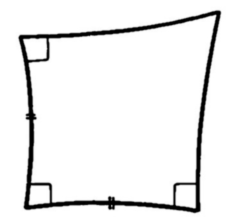
Управо таквим путем су Сакери, Ламберт и Лежандр покушали да докажу V постулат.

Сакери (1733) посматра четвороугао са два права угла на основици и једнаким бочним страницама (сл. 3). За два преостала угла, који су, што је лако видети, једнаки, могу се поставити три хипотезе: оба угла су права, тупа или оштра.

Сакери доказује да је хипотеза правог угла еквивалентна V постулату, тј. ако ту хипотезу постулирамо (узмемо као постулат), можемо доказати V постулат; и обратно, ако узмемо V постулат, можемо доказати хипотезу правог угла. Постулирајући хипотезу тупог угла Сакери долази



Сл. 3



Сл. 4

до противречности; напослетку, он постулира хипотезу оштрог угла.

Овде Сакери добија разне последице апсурдне с гледишта уобичајених геометријских представа. На пример: *Паралелне праве имају или само једну заједничку нормалу и од ове се на обе стране неограничено разилазе, или немају ни једну заједничку нормалу и, узајамно се приближујући асимптотски у једном правцу, неограничено се разилазе у другом.*

Закључак о противречности Сакери изводи не само на основу тога да резултати које је он добио не одговарају уобичајеним представама о узајамном положају правих већ упорно тражи логичку противречност. Такву противречност он је најзад и „нашао", али захваљујући грешци у рачуну.

Аналогну конструкцију посматрао је и Ламберт (1766. г.). Он је узимао четвороугао са три права угла (сл. 4) и, као и Сакери, разматрао је три хипотезе за угао код четвртог темена. Ламберт је доказао да је хипотеза правог угла еквивалентна V постулату, хипотеза тупог угла немогућна, а постулирајући хипотезу оштрог угла он је, као и Сакери, добио многе последице које откривају парадоксална својства узајамног положаја двеју правих.

Исто као Сакери, и Ламберт не види у томе никакву противречност, а логичку противречност није успео да нађе, тако да није могао оборити хипотезу оштрог угла.

Развијајући систем последицâ хипотезе оштрог угла Ламберт је открио аналогију тог система с геометријом на сфери и исказао тачну претпоставку да „та хипотеза важи на некој имагинарној сфери“. Од свих геометара XVIII столећа Ламберт је био најближи тачном решењу питања V постулата.

Лежандр је у свом „доказу“ V постулата размотрио три хипотезе у вези са збиром углова троугла:

1. Збир углова троугла једнак је са два права угла.
2. Збир углова троугла већи је од два права угла.
3. Збир углова троугла мањи је од два права угла.

Лежандр је доказао да је прва хипотеза еквивалентна V постулату, а друга хипотеза немогућна (в. § 2); узимајући, напослетку, трећу хипотезу он такође долази до противречности, прикривено се користећи у доказу V постулатом преко једног од његових еквивалената.

Велики руски математичар Н. И. Лобачевски (1793—1856. г.), коме припада част открића нове геометрије — геометрије Лобачевског, — такође је почео од покушаја да докаже V постулат.

Као што је напред поменуто (§ 2), један од еквивалената V постулата састоји се у тврђењу да кроз тачку ван дате праве не пролази више од једне праве паралелне датој. Лобачевски је V постулат заменио следећим:

Кроз тачку ван праве у равни пролазе две праве које не секу дату праву.

Слично својим претходницима, Лобачевски се надао да ће открити противречност у систему последицâ тако измењеног Еуклидовог система. Али, кад је свој систем развио до обима „Елемената“, Лобачевски није у њему открио противречност и на основу тога је извео онај изванредни закључак да постоји геометрија која је различита од Еуклидове геометрије и у којој V постулату нема места. То је било 1826. године.

На први поглед закључак Лобачевског може се учинити недовољно основаним. У самој ствари, шта нам јемчи да, развијајући систем даље, нећемо на крају доћи до противречности? Али, тај приговор се у подједнакој мери односи и на Еуклидову геометрију. Стога се, са становишта

логичке непротивречности, обе геометрије налазе у једнаком положају. Штавише, како су показала испитивања која су извршили геометричари после Лобачевског, између тих геометрија постоји тесна веза, и логичка непротивречност једне у зависности је од логичке непротивречности друге.

На тај начин, као логички системи, еуклидска геометрија и геометрија Лобачевског су равноправне. Питање која од тих геометрија боље одражава просторне односе света који нас окружује, може се решити само искуством. То је схватао и сам Лобачевски, који је у том циљу извршио мерења збира углова астрономског троугла.

Лобачевски је био први, али не и једини геометричар који је закључио да постоји геометрија различита од Еуклидове геометрије.

До закључка о постојању нове геометрије био је дошао и Гаус, о чему сведоче његове изјаве у писмима која је писао својим савременицима.

Три године пошто су објављени радови Лобачевског мађарски математичар Јанош Бојаи (1822—1860. г.), не знајући за истраживања Лобачевског, објавио је рад у коме је изложио ону исту теорију коју и Лобачевски, али у мање развијеном облику.

§ 4. Радови из основа геометрије у другој половини XIX столећа

Само малобројни савременици Лобачевског схватили су и признали његово откриће. Већина, а међу њима и многи велики математичари, односили су се према том открићу скептички.

Општем признавању геометрије Лобачевског у знатној су мери допринели радови геометричара после Лобачевског. Међу тим радовима треба на првом месту поменути рад Е. Белтрамија (1862. г.). Белтрами је доказао да на површи сталне негативне кривине важи равна геометрија Лобачевског ако се праве Лобачевског замисле као геодезијске линије, а кретање схвати у смислу изометричног пресликавања површи на саму себе.

Тај резултат био је прихваћен као доказ непротивречности геометрије Лобачевског. У ствари, противречности у геометрији Лобачевског одговарала би у наведеној интерпретацији противречност у теорији површи еуклидског простора, тј. противречност у еуклидској геометрији.

Болно место доказа непротивречности геометрије Лобачевског основаног на Белтрамијевој интерпретацији било је то што, како је показао Хилберт, у еуклидском простору не постоји потпуна површ негативне кривине без сингуларитета, и зато се на површи сталне негативне кривине може интерпретирати геометрија само дела равни Лобачевског. Овај недостатак уклоњен је у касније објављеним интерпретацијама Поенкареа и Клајна.

Клајнова интерпретација равне геометрије Лобачевског реализује се унутар круга на Еуклидовој равни, при чему се под правим разумеју тетиве тог круга, а кретањима се називају колинеарна пресликавања која не мењају периферију круга. На тој интерпретацији основан доказ непротивречности геометрије Лобачевског беспрекоран је. Ми ћемо га изложити у III глави.

Доказ непротивречности геометрије Лобачевског био је уједно и доказ независности V постулата од осталих Еуклидових постулата и аксиома. Заиста, ако би V постулат био последица осталих постулата и аксиома, тада би геометрија Лобачевског била противречна, јер би садржавала два тврђења која се узајамно искључују — постулат Лобачевског и Еуклидов V постулат.

Општа тежња ка строгости у математици, којом су обележени радови из друге половине XIX столећа, и решење проблема везаног с V постулатом поставили су пред геометричаре задатак да се потпуно испита систем аксиома геометрије. Ова су испитивања показала да је Еуклидов систем аксиома далеко од савршенства и да, пре свега, тај систем није потпун. Као што ћемо касније видети (гл. II), у том систему недостају читаве групе аксиома неопходних за извођење беспрекорних доказа.

У вези с тим геометричари друге половине XIX столећа су Еуклидов систем аксиома попунили аксиомама које су недостајале. Тако је Паш (1882. г.) Еуклидов систем аксиома попунио аксиомама поретка. Једна од тих аксиома носи његово име (Пашова аксиома).

Испитивање аксиоматике Еуклидове геометрије завршио је Д. Хилберт (1899. г.). Систем аксиома који је дао Хилберт састоји се од пет група; то су аксиоме везе, аксиоме поретка, аксиоме конгруентности, аксиоме непрекидности и аксиома паралелности. Аксиоме ових пет група односе се на објекте три врсте: тачке, праве и равни и на три односа између тих објеката, који се изражавају речима: „припада“, „између“ и „конгруентан“. Шта су тачка, права и раван и какав је конкретан смисао поменутих односа — то Хилберт не прецизира, а све што се претпоставља да је о њима познато јесте оно што је изражено у аксиомама. Захваљујући томе, геометрија изграђена на основи Хилбертових аксиома допушта конкретне реализације које су врло далеко од уобичајених просторних представа. Као пример може се навести аритметичка реализација коју разматрамо у III глави.

Хилберт је свој систем аксиома подвргао дубоком и свестраном испитивању. Посебно, он је доказао да је његов систем аксиома непротивречан ако је непротивречна аритметика. Поред тога, Хилберт је доказао независност неких аксиома, осим аксиоме паралелних. Напослетку, Хилберт је проучавао питање докле се геометрија може развити ако се у њену основу ставе ове или оне групе аксиома на које се сав систем рашчлањава.

Хилбертовим радом била су углавном завршена многовековна испитивања заснивања елементарне геометрије. Тај рад је добио врло високу оцену од савременика и „награду Лобачевског“ 1903. године.

Данас се у савременом аксиоматском излагању еуклидске геометрије не користи увек Хилбертовом аксиоматиком. Често се узима еквивалентан систем аксиома. Тако се систем аксиома који наводимо у следећој глави разликује од Хилбертовог система у другој и трећој групи. Преимућство наведеног система је у томе што он омогућује да се простије и брже добију првобитне геометријске чињенице, које олакшавају излагање. Осим тога, тај систем, како нам се чини, боље описује својства основних геометријских објеката са гледишта уобичајених просторних представа.

Глава II

САВРЕМЕНО АКСИОМАТСКО ИЗГРАЂИВАЊЕ ЕУКЛИДСКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

§ 1. Аксиоме везе. Последице аксиома везе

Аксиоматско излагање еуклидске геометрије, које је садржано у овој глави, ослања се на пет група аксиома; то су: аксиоме везе, аксиоме поретка, аксиоме кретања, аксиома непрекидности и аксиома паралелности.

У првој групи аксиома говори се о оним својствима узајамног положаја тачака, правих и равни која се изражавају речју „припада". При том се сматра да су истог значења изрази: тачка A припада правој a, тачка A лежи на правој a и права a пролази кроз тачку A, а такође: тачка A припада равни α, тачка A лежи у равни α и раван α пролази кроз тачку A.

Ми ћемо говорити да се праве a и b секу у тачки C ако тачка C припада и правој a и правој b; да права a припада равни α или да раван α пролази кроз праву a ако свака тачка праве a (тј. свака тачка која припада правој a) припада равни α. Најзад, говорићемо да се равни α и β секу дуж праве c ако свака од тих равни пролази кроз праву c.

Прва група садржи следећих осам аксиома:

Аксиома I_1. *Ма какве биле две тачке* A и B, постоји права c која пролази кроз тачку A и кроз тачку B.*

Аксиома I_2. *Ма какве биле две тачке A и B, постоји највише једна права која пролази кроз те тачке.*

Аксиома I_3. *На свакој правој леже бар две тачке. Постоје три тачке које не леже на једној правој.*

Аксиома I_4. *Ма какве биле три тачке A, B и C, постоји раван α која пролази кроз све те три тачке. У свакој равни лежи бар једна тачка.*

* Овде и свугде даље, кад говоримо: две тачке (праве, равни), имамо у виду различите тачке (праве, равни).

Аксиома I_5. *Ма какве биле три тачке A, B, C које не леже на једној правој, постоји највише једна раван која пролази кроз све те тачке.*

Аксиома I_6. *Ако две тачке A и B праве g (тј. које припадају правој g) леже у равни σ, тада права g лежи у равни σ.*

Аксиома I_7. *Ако две равни α и β имају једну заједничку тачку C (тачку која лежи у свакој од тих равни), тада оне имају бар још једну заједничку тачку D.*

Аксиома I_8. *Постоје бар четири тачке које не леже у једној равни.*

Из аксиома везе могу се извући разне, додуше не и многобројне последице. Навешћемо неке од њих.

Теорема 1. *Две праве имају највише једну заједничку тачку; две равни или немају заједничких тачака или имају заједничку праву; раван и права која не лежи у њој имају највише једну заједничку тачку.*

Доказ. Прво тврђење следи из аксиоме I_2. Доказаћемо друго тврђење. Нека равни α и β имају заједничку тачку P. По аксиоми I_7, оне тада имају још и заједничку тачку Q. Права која пролази кроз P и Q припада, по аксиоми I_6, равнима α и β. Тиме је тврђење доказано. Треће тврђење следи из аксиоме I_6.

Теорема 2. *Кроз праву и тачку која не лежи на њој, а такође и кроз две праве које се секу пролази једна и само једна раван.*

Доказ. Нека тачка B не лежи на правој a. На правој a леже две тачке P и Q (аксиома I_3). Постоји раван α која пролази кроз тачке B, P, Q (аксиома I_4). По аксиоми I_6, раван α пролази кроз праву a. Не постоји нека друга раван која пролази кроз праву a и тачку B, јер, пролазећи кроз тачке B, P, Q, које не леже на једној правој, та раван је једнозначно одређена (аксиома I_5).

Доказаћемо друго тврђење. Нека се праве a и b секу у тачки C. Према аксиоми I_3, на правој a постоји тачка A и на правој b тачка B, — обе различите од C. Тачке A, B, C не леже на једној правој. По аксиоми I_4, постоји раван σ која пролази кроз тачке A, B, C. Ова раван пролази кроз праве a и b (аксиома I_6). Јединост произлази из аксиоме I_5.

Теорема 3. *Свака раван садржи најмање три тачке које не леже на једној правој.*

Доказ. Обележимо дату раван са α. По аксиоми I_4, у њој лежи тачка A. По аксиоми I_8, постоје четири тачке B, B_1, B_2, B_3 које не леже у једној равни. Бар једна од ових тачака, на пример B, не лежи у равни α. Од трију равни ABB_1, ABB_2, ABB_3 најмање су две равни, β_1 и β_2, различите; у супротном случају би тачке B, B_1, B_2, B_3 лежале у једној равни. Како равнима β_1 и β_2 припада тачка B која не припада равни α, то су праве a_1 и a_2 дуж којих равни β_1 и β_2 секу раван α различите (теорема 2). На свакој од правих a_1 и a_2 леже, осим A, и тачке A_1 и A_2, различите од A (на основу аксиоме I_3). Три тачке A, A_1 и A_2 леже у равни α, али не леже на једној правој.

Теорема је доказана.

§ 2. Аксиоме поретка. Узајамни положај тачака на правој и у равни

Аксиоме поретка утврђују својства узајамних положаја тачака на правој и у равни.

Сматрамо да на правој постоје два један другоме супротна смера и да се, у односу на сваки од њих, сваки пар тачака A и B налази у извесном односу који се изражава речју „претходити".

Овај се однос обележава знаком $<$, те се израз „A претходи тачки B" симболично пише овако:

$$A < B.$$

Захтева се да поменути однос за тачке на правој задовољава следећих пет аксиома:

Аксиома II_1. Ако $A < B$ у једном смеру, тада $B < A$ у супротном смеру.

Аксиома II_2. У једном од два смера $A < B$ искључује $B < A$.

Аксиома II_3. У једном од два смера ако $A < B$ и $B < C$, тада $A < C$.

Аксиома II_4. У једном од два смера за сваку тачку B наћи ће се тачке A и C такве да $A < B < C$.

Свако од тврђења аксиома II_2—II_4 односи се на један од два смера на правој. По аксиоми II_1, свако то тврђење тачно је и за други (супротан) смер.

Пре него што формулишемо последњу аксиому дефинисаћемо неке појмове. Нека је a права и A тачка на њој. Кад је утврђен смер на правој, тачка A дели праву на

таква два дела (*полуправе*) да је за сваку тачку X једне од њих $X < A$, а за сваку тачку X друге $A < X$. Очигледно, ова подела праве на два дела не зависи од на њој изабраног смера (аксиома II_1).

Нека су A и B две тачке на правој a. Ако је за тачку C праве a испуњен услов $A < C < B$ или $B < C < A$, говорићемо да тачка C лежи *између* тачака A и B. Очигледно, својство тачке да лежи између двеју датих тачака не зависи од смера на правој. Онај део праве a чије све тачке леже између A и B зваћемо *одсечком* AB, а тачке A и B крајевима одсечка.

Аксиома II_5. *Права a у равни α дели ову раван на два дела (полуравни) тако да, ако су X и Y две тачке једне полуравни, тада се одсечак XY не сече с правом a, а ако X и Y припадају разним полуравнима, тада се одсечак XY сече с правом a.*

Говорићемо да две тачке X и Y равни α леже с једне стране праве a или са разних страна према томе да ли оне припадају истој полуравни или разним полуравнима на које a дели раван α.

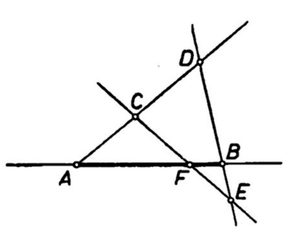
Размотрићемо неке последице аксиома везе и аксиома поретка.

Теорема 4. *Од три тачке A, B, C на правој g једна и само једна тачка лежи између двеју осталих.*

Доказ. У једном од два смера на правој g $A<C$. Ако B не лежи између A и C, онда то значи да или $B<A$ или $C<B$. Али, у првом случају A лежи између B и C, а у другом C лежи између A и B. Теорема је доказана.

Теорема 5. *Сваки одсечак садржи бар једну тачку.*

Доказ. Нека су A и B крајеви одсечка (сл. 5). По аксиоми I_3, ван праве AB постоји тачка C. Узмимо на правој AC тачку D тако да C буде између A и D. То је могућно по аксиоми II_4. Узмимо на правој BD тачку E тако да B буде између D и E. Права CE дели раван на две полуравни. Тачке B и D налазе се у једној полуравни, јер одсечак BD не сече праву CE, а тачке A и D су у разним полуравнима, јер одсечак AD сече праву CE (у тачки C). Одатле произлази да су тачке A и B у разним полуравнима и да, према томе, одсечак AB сече праву CE. Пресечна тачка F јесте тачка одсечка AB.



Сл. 5

Теорема 6. *Ако је B тачка одсечка AC, тада одсечци AB и BC припадају AC, то јест свака тачка одсечка AB и свака тачка одсечка BC припада одсечку AC.*

Доказ. У једном од два смера на правој која садржи одсечак AC имаћемо да $A<C$. Како B припада одсечку AC, то $A<B<C$. Ако је X тачка одсечка AB, тада $A<X<B$ и, према томе, $A<X<C$, то јест X припада одсечку AC. Аналогно се показује да тачка Y одсечка BC припада одсечку AC.

Теорема 7. *Ако је B тачка одсечка AC, а X тачка тог одсечка различита од B, тада X припада или одсечку AB или одсечку BC.*

Доказ. У једном од два смера на правој $A<C$. Како B припада одсечку AC, то $A<B<C$. За тачку X имамо или да $X<B$ или да $B<X$. У првом случају, пошто $A<X<C$ и, према томе, $A<X<B$, тачка X припада одсечку AB, а у другом случају она припада одсечку BC.

Теорема 8. *Нека је α раван и a права у њој, а b друга права или полуправа или одсечак у тој истој равни α.*

Тада, ако b не сече a, све тачке b леже с једне стране праве a, то јест у једној од полуравни одређених правом a.

Заиста, ако тачке X и Y које припадају b леже са разних страна a, тада одсечак XY сече a. Како пак све тачке одсечка XY припадају b, то b сече a, што противречи услову теореме.

Нека су A, B, C три тачке које не леже на једној правој. Фигура састављена од три одсечка AB, BC и CA зове се *троугао*, тачке A, B и C *темена* троугла, а одсечци AB, BC, AC *странице*.

Теорема 9. *Нека је ABC троугао у равни α и a права у тој равни која не пролази ни кроз једну од тачака A, B, C. Ако та права сече страницу AB, тада она сече и једну — и то само једну — од осталих двеју страница BC или AC.*

Доказ. Права a дели раван α на две полуравни (аксиома II_5). Тачке A и B леже у разним полуравнима. Ако тачка C лежи у истој полуравни у којој и B, тада a сече AC, али не сече BC. Ако тачка C лежи у истој полуравни у којој и A, тада a сече BC, а не сече AC. Теорема је доказана.

Примедба. Систем аксиома поретка којим смо се ми користили разликује се од Хилбертовог система аксиома поретка, који се заснива на односу који изражавамо речима „лежати између". Теорема 9, без тврђења о јединости, једна је од Хилбертових аксиома поретка. Ту аксиому увео је још Паш, те се зове Пашова аксиома.

§ 3. Узајамни положај зракова у прамену. Угао

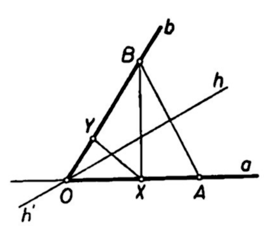
Теорема 10. *Нека из тачке O полазе две полуправе a и b које не припадају једној правој. Ако полуправа h која полази из тачке O сече одсечак AB с крајевима на полуправим a и b, тада она сече и ма који други одсечак с крајевима на тим полуправим.*

Заиста, по теореми 8, одсечци AB и XY и полуправе a и h налазе се у једној од полуравни одређених правом која садржи b, а допуна h' полуправе h до праве (обележићемо је са c) налази се у другој полуравни. Примењујући теорему 9 редом на троугле ABX и BXY и праву c закључујемо да ова права сече BX и YX. Како се h' и XY налазе у разним полуравнима и, према томе, не секу се, то одатле следи да h сече XY (сл. 6а).

Својство забележено у теореми омогућује да се однос „*између*" за полуправе (*зраке*) дефинише на следећи начин. Говорићемо да се зрак l који полази из тачке O, налази између зракова h и k, који такође полазе из те тачке и не леже на једној правој, ако l сече сваки одсечак HK с крајевима на полуправим h и k.

Теорема 11. *Нека су h, k, l три зрака у равни који полазе из тачке O. Ако зраци k и l леже у једној полуравни α' одређеној зраком h и његовим продужетком $\bar{h}$, тада се један од три зрака налази између два остала.*

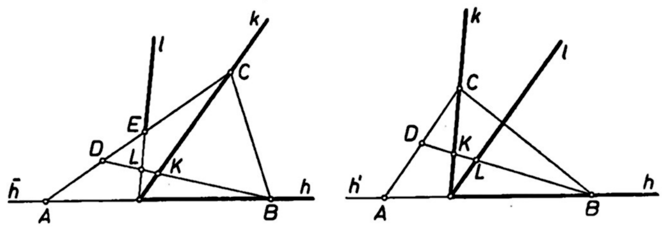
Доказ. Узмимо три тачке: A на $\bar{h}$, B на h и C на k. Изаберимо на AC тачку D по следећем правилу. Ако l не сече AC, тада је D било која тачка одсечка AC. Ако l сече AC у тачки E, тада за D узимамо ма коју тачку одсечка AE (сл. 6b).



Сл. 6а

По теореми 9, примењеној на троугао ADB, зраци k и l секу BD у тачкама K и L. При том, ако је L између B и K, l ће бити између k и h, а ако је K између B и L, тада је k између h и l. Теорема је доказана.

Теорема 12. *Нека имамо четири зрака који полазе из тачке O: h, k, l, m. Ако се l налази између h и m,* *а k између h и l, тада се k налази између h и m. Ако се k и l налазе између h и m, тада се k налази или између l и m или између h и l.*



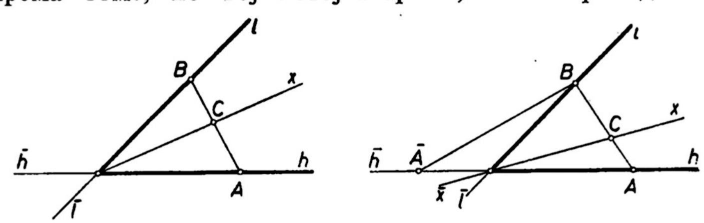
Сл. 6b

Доказ. Узмимо на зрацима h и m тачке H и M. Одсечак HM сече зраке k и l у тачкама K и L. Сада прво тврђење следи из теореме 6, а друго из теореме 7.

Нека су h и l зраци који полазе из једне тачке O и не припадају једној правој. *Углом* (h, l) звaћемо скуп свих зракова који полазе из тачке O и леже између зракова h и l. Зраци h и l зову се *краци угла*, а тачка O *теме угла*.

Теорема 13. *Сваки зрак x угла (h, l) пролази у полуравни која је одређена зраком h и његовим продужетком* $\bar h$ *и садржи зрак l, и у полуравни која је одређена зраком l и његовим продужетком* $\bar l$ *и садржи зрак h. Обратно, сваки зрак који пролази на наведени начин припада углу (h, l).*

Доказ. Нека је AB одсечак с крајевима на h и l (сл. 7). Ако зрак x припада (h, l), тада он сече AB у некој тачки C. По теореми 8, C припада поменутим полуравнима. Према томе, по тој истој теореми, овима припада и x.



Сл. 7

Нека сада зрак x припада тим полуравнима. Показаћемо да он припада углу (h, l). Узмимо на $\bar h$ тачку $\bar A$. Права која садржи x сече или AB или $\bar{A}B$. Пресечна тачка C не може бити на продужетку $\bar x$ зрака x јер се $\bar x$ налази у другој полуравни. Према томе, x сече AB или $\bar{A}B$. Али, x не може сећи $\bar{A}B$, јер би иначе C и A лежали у разним полуравнима одређеним зраком l и његовим продужетком. Дакле, зрак x сече AB. Теорема је доказана.

§ 4. Аксиоме кретања. Конгруентност фигура

Прелазећи на аксиоме III групе уводимо нов појам: кретање.

Захтевамо да постоје пресликавања тачака, правих и равни на тачке, праве и равни која се зову кретања и задовољавају следеће аксиоме.

Аксиома III$_1$. *Свако кретање H задржава однос припадања.* То јест, ако тачка A припада правој a (равни α), тада њен лик при кретању H (обележићемо га са HA) припада лику Ha праве a (односно лику $H\alpha$ равни α).

Аксиома III$_2$. *Свако кретање H задржава однос поретка на правој.* То јест, сваком од два смера на правој a можемо кореспондирати такав смер на правој Ha да сваки пут кад за тачке X и Y праве a важи да $X < Y$, за одговарајуће им тачке праве Ha важи $HX < HY$.

Из аксиома III$_1$ и III$_2$ следи да свако кретање преводи полуправу у полуправу, полураван у полураван.

Аксиома III$_3$. *Кретања образују групу.*

То значи:

a) Кореспондирање H^0 сваког елемента x (тачке, праве, равни) њему самоме јесте кретање. Ово кретање зове се идентично кретање.

b) Ако кретање H_1 кореспондира произвољном елементу x елемент y, а кретање H_2 кореспондира елементу y елемент z, тада је кореспондирање елемента z елементу x кретање. Оно се обележава са $H_2 H_1$ и зове се *производ* кретања H_2 и H_1.

c) За свако кретање H постоји кретање H^{-1} тако да је $H^{-1}H = H^0$.

Аксиома III$_4$. *Ако при кретању H полуправа h као целина и њена почетна тачка A остају непокретне, тада све тачке полуправе h остају непокретне.* — То јест, ако је $Hh = h$ и $HA = A$, тада је било за коју тачку X полуправе $HX = X$.

Аксиома III$_5$. *За сваки пар тачака A и B постоји кретање H које их размењује*: $HA = B$, $HB = A$.

Аксиома III$_6$. *За сваки пар зракова h, k (полуправих) који полазе из једне тачке постоји кретање H које им размењује места: $Hh=k$, $Hk=h$.*

Аксиома III$_7$. *Нека су α и β ма које равни, a и b праве у тим равнима, A и B тачке на правим a и b. Тада постоји једно једино кретање које преводи тачку A у B, задату полуправу праве a одређену тачком A у задату полуправу праве b одређену тачком B, задату полураван равни α одређену правом a у задату полураван равни β одређену правом b.*

Теорема 14. *Нека је α раван и a права која јој припада. Ако кретање H сваку од полуравни равни α одређених правом a преводи у њу саму и тачке праве a оставља непокретне, тада је то кретање идентично.*

Заиста, идентично кретање H^0 има у теореми наведена својства кретања па се, по аксиоми III$_7$, поклапа са H.

Дефинисаћемо сада појам конгруентности, важан у геометрији. Фигуру F_1 називаћемо *конгруентном* фигури F_2 ако постоји кретање H које преводи F_1 у F_2: $HF_1=F_2$. Из групних својстава кретања (аксиома III$_3$) произлазе следећа својства конгруентности:

1. *Свака фигура F конгруентна је сама себи.* — Заиста, идентично кретање преводи F у F.

2. *Ако је фигура F_1 конгруентна F_2, тада је фигура F_2 конгруентна F_1.*

У ствари, ако је H кретање које преводи фигуру F_1 у F_2 тада кретање H^{-1} преводи фигуру F_2 у фигуру F_1.

3. *Ако је фигура F_1 конгруентна F_2 а фигура F_2 конгруентна фигури F_3, тада је фигура F_1 конгруентна F_3.*

Заиста, ако је H' кретање које преводи F_1 у F_2, а H'' кретање које преводи F_2 у F_3, тада кретање $H''H'$ преводи F_1 у F_3.

Примедба. Хилбертова трећа група аксиома разликује се од групе аксиома кретања. Хилбертове аксиоме дефинишу однос конгруентности.

§ 5. Конгруентност одсечака, углова, троуглова

Доказаћемо неке теореме о конгруентности најпростијих фигура — одсечака, углова и троуглова. Сагласимо се да, ради краћег писања, конгруентност обележавамо знаком једнакости.

Теорема 15. *Одсечци AB и BA су конгруентни. Углови (h, k) и (k, h) су конгруентни.*

Конгруентност одсечака следи из аксиоме III$_5$. Конгруентност углова следи из аксиоме III$_6$.

Теорема 16. *Нека су дати одсечак AB и зрак h који полази из O. Тада на h постоји једна једина тачка P таква да је $AB=OP$.*

Доказ. Постојање P следи из аксиоме III$_7$. Доказаћемо јединост. Претпоставимо да постоје две тачке: P_1 и P_2. Како је $OP_1=OP_2$, постоји кретање H такво да је $HO=O$, $HP_1=P_2$. Ово кретање преводи зрак h у њега самог. По аксиоми III$_4$, $HP_1=P_1$. Према томе, $P_1\equiv P_2$.

Теорема 17. *Нека је (h, k) угао а l зрак који заједно са својим продужетком $\bar{l}$ одређује полураван α. Тада постоји у α један једини зрак m такав да је $(h, k)=(l, m)$.*

Доказ. Постојање зрака m следи из аксиоме III$_7$. Доказаћемо јединост. Претпоставимо да постоје два зрака: m_1 и m_2. Како је $(l, m_1)=(l, m_2)$, постоји кретање H такво да је $Hl=l$, $Hm_1=m_2$. Ово кретање преводи полураван α у њу саму. По аксиоми III$_4$, H је идентично на l и његовој допуни $\bar{l}$. Отуда по теореми 14 следи да је H идентично на α. Посебно је $Hm_1=m_1$. Одатле је $m_1\equiv m_2$.

Теорема 18. *Нека су AB и $A'B'$ два одсечка, а C и C' тачке ових одсечака. Ако је*

$$AB=A'B' \quad \text{и} \quad AC=A'C', \quad \text{тада је} \quad BC=B'C'.$$

Ако је

$$AC=A'C' \quad \text{и} \quad BC=B'C', \quad \text{тада је} \quad AB=A'B'.$$

Доказ. По аксиоми III$_7$, постоји кретање H које преводи тачку A' у A, полуправу $A'B'$ у полуправу AB. При том ће тачке B' и C' прећи у B'' и C''. По теореми 16, $B''\equiv B$, $C''\equiv C$, то јест H преводи одсечак $B'C'$ у BC. Одатле је $BC=B'C'$.

Друго тврђење доказује се аналогно.

Теорема 19. *Нека су (h, k) и (h', k') два угла, а l и l' два зрака који припадају тим угловима. Ако је*

$$(h, k)=(h', k') \quad \text{и} \quad (h, l)=(h', l'), \quad \text{тада је} \quad (l, k)=(l', k').$$

Ако је

$$(h, l)=(h', l') \quad \text{и} \quad (l, k)=(l', k'), \quad \text{тада је} \quad (h, k)=(h', k').$$

Доказ. По аксиоми III_7, постоји кретање H које зрак h' преводи у h, а полураван која је одређена зраком h' и његовим продужетком и садржи зраке l' и k' преводи у полураван која је одређена зраком h и његовим продужетком и садржи зраке l и k. При том зраци l' и k' прелазе у l'' и k''. По теореми 17, $k'' \equiv k$, $l'' \equiv l$, то јест H преводи угао (l', k') у (l, k). Одатле је $(l, k) = (l', k')$.

Друго тврђење доказује се аналогно.

Нека је (h, k) неки угао, а $\bar{h}$ и $\bar{k}$ нека су зраци који допуњују h и k до правих. Тада за угао $(k, \bar{h})$ кажемо да је суплементан са (h, k), а угао $(\bar{h}, \bar{k})$ да је *унакрсан* са (h, k).

Теорема 20. *Ако су углови (h, k) и (h', k') једнаки, тада су и њихови суплементни углови $(h, \bar{k})$ и $(h', \bar{k}')$ једнаки.*

Угао (h, k) једнак је унакрсном углу $(\bar{h}, \bar{k})$.

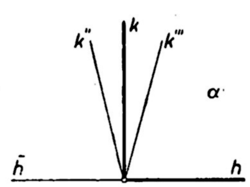
Доказ. Како је $(h, k) = (h', k')$, постоји кретање H такво да је $Hh' = h$, $Hk' = k$. На основу аксиома III_1 и III_2 је $H\bar{k}' = \bar{k}$. Према томе, $(h, \bar{k}) = (h', \bar{k}')$.

По аксиоми III_6, постоји кретање S такво да је $S\bar{k} = h$, $Sh = \bar{k}$. На основу аксиома III_1 и III_2 је $Sk = \bar{h}$, $S\bar{h} = k$. Одатле је $(h, k) = (\bar{h}, \bar{k})$. Теорема је доказана.

Угао једнак свом суплементном углу зове се *прав угао*. Доказаћемо постојање правих углова. Узмимо раван α, у њој праву a и на правој тачку A. Нека су α' и α'' две полуравни одређене правом a, а h једна од полуправих на које тачка A дели праву a. По аксиоми III_7, постоји такво кретање H да је $H\alpha' = \alpha'$, $Hh = h$, $HA = A$. По аксиоми III_4, H је идентично на a. Нека је B' тачка у полуравни α'. Спојмо B' с тачком $B'' = HB'$ правом b. Нека је C тачка пресека правих a и b. Тачка C дели праву a на полуправе a' и a'', а праву b на полуправе b' и b''. Очигледно, $Ha' = a'$, $Hb' = b''$. Стога је угао (a', b') једнак суплементноме углу (a', b'').

Теорема 21. *Сви прави углови су једнаки.*

Доказ. Нека су (h, k) и (h', k') прави углови (сл. 8).



Сл. 8

Нека је α раван угла (h, k), а α' она њена полураван одређена зраком h и његовим продужетком у којој лежи зрак k. По аксиоми III_7, постоји кретање H које преводи h' у h, а зрак k' у зрак k'' који лежи у полуравни α'.

Обележимо са S кретање које преводи h у његову допуну $\bar{h}$, а зрак

k у њега самог. То је могуће јер је $(h, k) = (h, \bar{k})$. Кретање S преводи зрак k'' у неки зрак k'''. Углови (k'', h) и (k''', h) једнаки су као углови добијени од једнаких углова кретањем.

По теореми 17, k'' се поклапа са k'''. Како се полуравни одређене зраком k и његовим продужетком размењују приликом кретања S, то је ово могуће тада и само тада кад се k'' поклапа са k. Ово пак значи да је $(h, k) = (h, k'')$ и, према томе, $(h, k) = (h', k')$. Теорема је доказана.

Праве које се секу зову се *нормалне праве* ако њихове полуправе одређене тачком пресека образују прав угао.

Теорема 22. *Нека је a права у равни α. Тада кроз сваку тачку B равни α пролази једна једина права b нормална на a.*

Доказ. Ако тачка B припада a, тада теорема следи из једнакости свих правих углова и теореме 17.

Нека B не лежи на a. Постоји кретање H које је идентично на правој a и које размењује полуравни равни α које су одређене правом a. Права која спаја B и HB нормална је на a.

Узмимо да постоје две праве које пролазе кроз B и нормалне су на a: b_1 и b_2. Кретање H сваку од правих b_1, b_2 преводи у њу саму. Одатле следи да је тачка HB заједничка за те праве, а то противречи аксиоми I_2. Теорема је доказана.

Теорема 23. *Ако је код троуглова ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle A = \angle A'$, они су конгруентни.*

Доказ. Како је $\angle A = \angle A'$, постоји кретање H које преводи тачку A' у тачку A, полуправу $A'B'$ у полуправу AB, полуправу $A'C'$ у полуправу AC. По теореми 16, H преводи тачку B' у B и C' у C. Теорема је доказана.

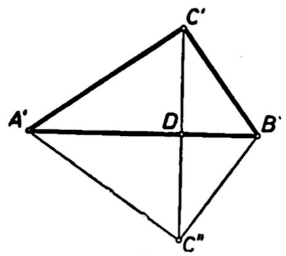
Троугао називамо *једнакокраким* ако су му две странице једнаке. Ове странице називамо бочним страницама (крацима), а трећу страницу *основицом*.

Теорема 24. *У једнакокраком троуглу углови на основици су једнаки.*

Ова теорема непосредно следи из претходне.

Теорема 25. *Ако је код троуглова ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, они су конгруентни.*

Доказ. Постоји кретање које преводи тачку A у A', полуправу AB у полуправу $A'B'$, полуправу AC у полуправу $A'C'$. По теореми 16, тачка B прелази при том у B', а по теореми 17, полуправа BC прелази у $B'C'$, јер је $\angle B = \angle B'$. Одатле произлази да C прелази у C'. Теорема је доказана.


Сл. 9

Теорема 26. *Ако је код шроуглова ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$, они су конгруентни.*

Доказ. Постоји кретање које преводи полуправу AB у $A'B'$ и равни троуглова доводи до поклапања тако да тачка C' и тачка C'', у коју прелази C, заузимају места у разним полуравнима одређеним правом $A'B'$. По теореми 16, ово кретање преводи тачку B у B'.

Троугли $C'A'C''$ и $C'B'C''$ су једнакокраки и $C'C''$ је њихова заједничка основица. Нека је D пресек одсечка $C'C''$ и праве $A'B'$. Како полуправе $C'A'$, $C'D$, $C'B'$ и $C''A'$, $C''D$, $C''B'$ имају исти поредак (овај је одређен поретком тачака A', D, B'), а углови на основици једнакокраког троугла су једнаки, то је, по теореми 19, угао између полуправих $C'A'$ и $C'B'$ једнак углу између полуправих $C''A'$ и $C''B'$. Одатле је угао C троугла ABC једнак углу C' троугла $A'B'C'$. А сада су, по теореми 23, троугли ABC и $A'B'C'$ конгруентни. Теорема је доказана.

§ 6. Упоређивање одсечака и углова и операције с њима

Кретање омогућује да се врши упоређивање одсечака и углова.

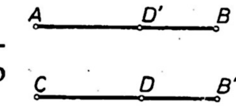
Нека су AB и CD неједнаки одсечци. Преведимо кретањем полуправу CD у полуправу AB. При том ће тачка D прећи у неку тачку D' различиту од B. Говорићемо да је AB мање од CD и писати $AB < CD$ ако се B налази између A и D'. Говорићемо да је AB веће од CD ($AB > CD$) ако је D' између A и B.

Ако је $AB > CD$, шада је $CD < AB$.

Заиста, преведимо кретањем полуправу AB у полуправу CD. При том ће B прећи у B', а D' у D (сл. 10). Према томе, тачке A, B, D' и C, B' D имају исти поредак

(аксиома III_2). Из тога да је D' између A и B следи да је D између C и B', то јест из $AB > CD$ следи $CD < AB$.

Ако је $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ и $AB < CD$, шада је $A'B' < C'D'$.



Сл. 10

Ово тврђење доказује се расуђивањем сличним претходном. То остављамо читаоцу.

Ако је $AB < CD$, а $CD < EF$, шада е $AB < EF$.

На основу претходног својства довољно је доказати то тврђење за случај кад се тачке A, C и E поклапају с неком тачком O, а остале тачке — B, D, F — леже на полуправој која полази из тачке O. Но, у овом случају тврђење следи из теореме 6.

За углове се односи „већи“ и „мањи“ дефинишу на аналоган начин и имају аналогна својства.

Дефинисаћемо сада операције сабирања и одузимања за одсечке.

Нека су AB и CD дати одсечци. Конструишимо на продужетку полуправе AB тачку D' тако да је $CD = AD'$. *Збиром* одсечака AB и CD зваћемо одсечак BD' и обележаваћемо га са $AB + CD$.

Сабирање одсечака има следећа својства:

1. Ако је $a = a'$ и $b = b'$, тада је
$$a + b = a' + b'.$$
2. $$a + b = b + a.$$
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Доказивање ових својстава не причињава тешкоће и оставља се читаоцу.

Нека су AB и CD два одсечка, при чему је $AB > CD$. Конструишимо на полуправој AB тачку D' такву да је $AD' = CD$. *Разликом* одсечака AB и CD зваћемо одсечак једнак DB' и обележаваћемо га са $AB - CD$.

Није тешко доказати да је

$$CD + (AB - CD) = AB.$$

Да бисмо дефинисали сабирање и одузимање за углове, уопштићемо појам угла. Нека су h и k два зрака који полазе из заједничке тачке O, а α једна од полуравни одређена зраком h и његовим продужетком.

Обележимо са $(h, k)^S_\alpha$ скуп зракова узетих одређен број пута који се (скуп) дефинише на следећи начин. Ако k припада α, тада се $(h, k)^1_\alpha$ састоји од зракова који леже између h и k. Ако се k поклапа с продужетком зрака h, тада се $(h, k)^1_\alpha$ састоји од зракова који леже у полуравни α. Ако k лежи у полуравни која допуњује α, тада се $(h, k)^1_\alpha$ састоји од зракова који леже у полуравни α и зракова који леже између k и продужетка зрака h. Напослетку, ако се h и k поклапају, $(h, k)^1_\alpha$ састоји се од свих зракова који полазе из O.

Мноштво зракова $(h, k)^S_\alpha$ састоји се од мноштва $(h, k)^1_\alpha$ и $S-1$ пута узетог мноштва свих зракова који полазе из O.

Сада углом називамо свако мноштво зракова облика $(h, k)^S_\alpha$. Дефинишимо операцију сабирања за углове $(h, k)^S_\alpha$ и $(l, m)^\gamma_\beta$. Тога ради дефинисаћемо полураван γ у равни првог угла. Ако се h не поклапа са k, онда је то полураван која садржи продужетак h. Ако се пак k поклапа са h, онда је то полураван α.

Подвргнимо (l, m) кретању H при коме ће се зрак l поклопити са k, а полураван β са полуравни γ. Није тешко видети да скуп зракова састављен од $(h, k)^S_\alpha$ и $H(l, m)^\gamma_\beta$ јесте угао у смислу дате дефиниције. По дефиницији, он се назива збиром углова $(h, k)^S_\alpha$ и $(l, m)^\gamma_\beta$.

Разлика углова $(h, k)^S_\alpha$ и $(l, m)^\gamma_\beta$ дефинише се аналогно. Уместо полуравни γ узимамо њену допуну и сматрамо да се разлика углова $(h, k)^S_\alpha-(l, m)^\gamma_\beta$, као скуп зракова, састоји од зракова $(h, k)^S_\alpha$ ако се из тог скупа одстране зраци $H(l, m)^\gamma_\beta$ узимајући у обзир и њихову вишеструкост.

Сабирање и одузимање углова има иста својства као и сабирање и одузимање одсечака.

§ 7. Неки односи између страница и углова троугла

Говорићемо да тачка C праве AB *полови* одсечак AB, или да је она *средина* одсечка AB, ако је $AC=CB$.

Теорема 27. *Сваки одсечак AB има једну и само једну средину. Ова лежи између A и B.*

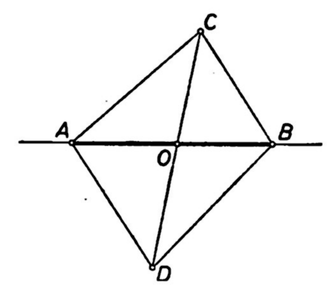
Доказ. Права AB дели раван која кроз њу пролази на две полуравни: α' и α''. У полуравнима α' и α'' поставимо на полуправе AB и BA једнаке углове и узмимо на крацима ових углова тачке C и D тако да је $AC=BD$. Одсечак CD сече се с правом AB у тачки O (сл. 11).

Из једнакости троуглова ACB и BDA (теорема 23) следи $\angle CBA=\angle DAB$. Одатле следи једнакост троуглова

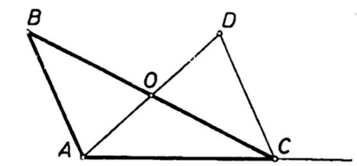
CBD и DAC, из чега закључујемо да су углови ACD и BDC једнаки. Сада су, по теореми 25, троугли ACO и BDO једнаки и, према томе, $AO=OB$, то јест O је средина одсечка AB.

Тачке A и B не могу лежати са исте стране од O, јер је тада $A=B$ (теорема 16). Зато O лежи између A и B.

Доказаћемо јединост средине. Узмимо да одсечак AB има две средине: O_1 и O_2. Постоји кретање које тачку O_1 оставља на месту, а правим O_1A и O_1B размењује места. То кретање преводи тачку A у B, а B у A, пошто је $O_1A=O_1B$ (теорема 16). Тачка O_2 прелази при том



Сл. 11



Сл. 12

у неку тачку O_2'. Како је $AO_2=AO_2'=BO_2$, то је $O_2'\equiv O_2$, што је немогућно, јер O_2 и O_2' леже са разних страна од O_1. Теорема је доказана.

Теорема 28. *Нека је (h, k) угао који образују зраци h и k. Тада постоји један и само један зрак l између h и k који полови угао (h, k), то јест $(h, l)=(l, k)$.*

Доказ. Поставимо на краке угла (h, k) почев од темена O једнаке одсечке OA и OB. Нека је C средина одсечка AB. Троугли AOC и BOC су једнаки (теорема 26). Отуда следи једнакост углова које зрак OC образује са зрацима h и k.

Доказаћемо јединост зрака l. Нека постоје два таква зрака l_1 и l_2. Они секу одсечак AB у тачкама C_1 и C_2. Из једнакости троуглова AOC_1 и BOC_1, AOC_2 и BOC_2 следи да је свака од тих тачака средина одсечка AB. Но, ово је у опреци са претходном теоремом. Теорема је доказана.

Спољашњим углом троугла ABC код темена A назива се угао суседан углу A.

Теорема 29. *Спољашњи угао троугла већи је ма од којег унутрашњег несуседног угла.*

Доказ. Нека је ABC дати троугао, а O средина странице BC. Повуцимо из тачке A кроз O полуправу и положимо на ову почев од тачке O одсечак једнак OA. Нека је D други крај тог одсечка (сл. 12).

Тачка D лежи у полуравни која је одређена правом BC и садржи продужетак полуправе CA. С друге стране, D лежи у полуравни која је одређена правом AC и садржи полуправу CB. Одатле следи, по теореми 13, да се полуправа CD налази између полуправе CB и продужетка полуправе CA. То пак значи да је угао BCD мањи од спољашњег угла троугла ABC код темена C.

Троугли ABO и DOC једнаки су (теорема 23); стога су углови ABO и DCO, као одговарајући, једнаки. Према томе, угао B троугла мањи је од спољашњег угла код темена C. Како су B и C два произвољна темена троугла, тиме је теорема доказана у потпуности.

Као последица ове теореме добија се да су *у сваком троуглу два угла оштра, то јест мања од правог.*

Теорема 30. *Праве које с правом која их сече образују на истој страни једнаке супротне углове, не секу се. Посебно, две праве нормалне на трећу, не секу се.*

Ова теорема непосредно произлази из теореме 29.

Теорема 31. *Кроз сваку тачку X равни која садржи праву a може се повући у тој равни права b која не сече a.*

За то је довољно повући кроз тачку X праву c нормалну на a, па затим кроз ту тачку повући праву b нормалну на c.

Теорема 32. *У сваком троуглу, наспрам веће странице лежи већи угао. И обратно, наспрам већег угла лежи већа страница.*

Доказ. Нека је ABC дати троугао и $AB > AC$. Поставимо на AB почев од тачке A одсечак једнак AC. Нека је C' други крај тог одсечка. По теореми 24, углови $AC'C$ и ACC' су једнаки. Али, угао $AC'C$, као спољашњи за троугао $BC'C$, већи је од угла ABC. — Обратно тврђење доказује се индиректно.

Теорема 33. *У троуглу је свака страница мања од збира а већа од разлике других двеју страница.*

Доказ. Нека је ABC дати троугао. На продужетак одсечка AB преко тачке B поставимо, с једним крајем у B, одсечак једнак BC. Добићемо тачку C'. Како је угао $BC'C$ једнак углу BCC', то је он мањи од угла ACC'. По теореми 33 одатле следи да је одсечак AC мањи од AC', а овај је једнак збиру AB и BC.

Тврђење о разлици страница доказује се аналогним расуђивањем.

§ 8. Аксиома непрекидности

Четврта група аксиома ће се код нас састојати од једне аксиоме — Дедекиндове аксиоме.

Аксиома IV. *Ако су тачке праве подељене на две непразне класе тако да у једноме од два смера на правој свака тачка прве класе претходи свакој тачки друге класе, тада или у првој класи постоји тачка која следи за свим осталим тачкама прве класе или у другој класи постоји тачка која претходи свим осталим тачкама друге класе.*

Теорема 34. *Нека је на правој дат бесконачан низ тачака A, A_1, $A_2, \ldots$ који задовољава услове:*

1. *у једном од два смера*

$$A < A_1 < A_2 < \cdots$$

2. $$AA_1 = A_1 A_2 = \cdots$$

Тада ће се, ма каква била тачка $B > A$, наћи такво n да је $B < A_n$.

Доказ. Претпоставимо да је тврђење нетачно и да, према томе, било за које n $A_n < B$. Поделимо све тачке праве на две класе на следећи начин. Тачку X доделићемо другој класи ако је ма за које n $A_n < X$. Остале тачке доделићемо првој класи.

На тај начин, у првој класи наћи ће се све тачке A_n и свака тачка X која претходи бар једној тачки A_n ($X < A_n$). И, према томе, свака тачка прве класе претходи свакој тачки друге класе. Очигледно, ниједна од тих класа није празна: друга класа садржи тачку B, а прва све тачке A_n.

Нека је C тачка чије је постојање утврђено аксиомом IV. Тачка C не поклапа се ни са једном тачком A_n, јер би у супротном случају тачка A_{n+1} била у другој класи. Према томе, ма за које n $A_n < C$.

Узмимо на правој тачку D такву да $D < C$ и $CD = AA_1$. Тачка D не поклапа се ни са једном тачком A_n, јер би иначе било $C = A_{n+1}$, што је немогућно. Како D припада првој класи ($D < C$) и не поклапа се ни са једном тачком A_n, то постоји тачка A_n таква да $D < A_n$. Утолико пре $D < A_{n+2}$. Како је, поред тога, $A_n < C$ и $A_{n+2} < C$, то одсечак A_nA_{n+2} припада CD, што је немогућно ($CD < A_nA_{n+2}$). Теорема је доказана.

Одсечак AB се, по дефиницији, састоји од тачака које леже између A и B. Када је реч о затвореном одсечку, тада се у његове тачке убрајају и његови крајеви A, B.

Теорема 35. *Нека је дат бесконачан низ затворених одсечака* A_nB_n *на правој, при чему се сваки следећи одсечак садржи у претходном. Нека, даље, не постоји одсечак који би био мањи ма од којег од одсечака* A_nB_n. *Тада постоји једна једина тачка* C *која припада свим одсечцима* $A_n B_n$.

Доказ. Не ограничавајући општост, можемо сматрати да ма за које n $A_n < B_n$. Како за $m < n$ одсечак $A_n B_n$ припада $A_m B_m$ и $A_n < B_n$, а $A_m < B_m$, то $A_n < B_m$ и $A_m < B_n$. На тај начин ма за које m и n $A_n < B_m$.

Поделимо мноштво тачака праве на две класе. Другој класи доделимо све тачке B_n, а такође и ма коју тачку X која следи бар за једном тачком B_n $(B_n < X)$. Првој класи доделимо остале тачке. На тај начин, прва класа састоји се од тачака X које претходе свим тачкама B_n. $(X < B_n)$. Према томе, свака тачка прве класе претходи свакој тачки друге класе. Очигледно, ниједна од тих класа није празна: тачке које претходе A_1 припадају првој класи, а тачке које следе за B_1 другој класи.

Нека је C тачка чије се постојање утврђује аксиомом IV. Показаћемо да она припада свим одсечцима $A_n B_n$. Не постоји тачка B_n која претходи C, јер би, у супротном случају, за тачке X одсечка $B_n C$ било $X < C$, а то су тачке друге класе.

Ако се тачка C поклапа са A_n, све тачке A_{n+q} $(q > 0)$ поклапају се са A_n. У супротном случају, пошто $A_n < A_{n+q}$, тачке одсечка $A_n A_{n+q}$ припадале би другој класи, а уједно свака таква тачка претходи A_{n+q}, што је немогућно. Одатле следи да, ако је $A_n \equiv C$, тада тачка C припада свим одсечцима $A_p B_p$ за $p \geqslant n$ јер је она њихов заједнички крај, а првих $n-1$ одсечака садрже ту тачку због начина укључивања одсечака који је предвиђен у теореми.

Аналогно се разматра случај кад се C поклапа с једном од тачака B_n.

Нека се, напослетку, тачка C не поклапа ни са једном од тачака A_n и B_n. Како свака тачка A_n припада првој класи, а свака тачка B_n другој класи, то је $A_n < C < B_n$ ма за које n. Ово пак значи да C припада свим одсечцима $A_n B_n$.

Доказаћемо јединост тачке C. Претпоставимо да постоје две тачке C_1 и C_2 које припадају свим одсечцима

$A_n B_n$. Тада и одсечак C_1C_2 припада сваком од одсечака $A_n B_n$. Нека је C која било тачка одсечка C_1C_2. Одсечак CC_1 мањи је од C_1C_2, па је, према томе, мањи и ма од којег одсечка $A_n B_n$, што је опречно услову теореме.

Теорема је доказана.

У другим излагањима четврта група аксиома садржи две аксиоме. Тврђење једне од њих подудара се са тврђењем теореме 34. Ову теорему увео је још Архимед, па се зове Архимедова теорема.

Другу аксиому чини тврђење теореме 35 без јединости тачке C. Та се аксиома зове Канторова аксиома.

§ 9. Пресек праве и круга, пресек два круга

Нека је O тачка у равни α, а r дати одсечак. *Кругом са центром* O *и полупречником* r *називамо скуп свих тачака* X *равни за које је* $OX=r$. Оне тачке X равни за које је $OX<r$ зову се унутрашње у односу на круг, а оне тачке за које је $OX>r$ зову се спољашње.

Теорема 36. *Нека је* c *круг с центром* O *и полупречником* r. *Ако права* a *пролази кроз унутрашњу тачку* P, *тада она сече круг у двема и само двема тачкама.*

Доказ. Разматрамо два случаја: 1) права a пролази кроз O; 2) права a не пролази кроз O. У првом случају тврђење теореме је очигледно, јер на свакој од полуправих праве a одређених тачком O постоји једна тачка X таква да је $OX=r$ (теорема 16).

Размотримо други случај. Повуцимо кроз O праву нормалну на a. Она сече a у некој тачки A. Тврдимо да је A унутрашња тачка. Заиста, ако се она не поклапа са P, (ако се поклапа са P, она је тада унутрашња по услову), троугао OAP је правоугли и, сагласно теореми 32, $OA<OP<r$.

Тачка A дели праву a на две полуправе a' и a''. Поделимо све тачке праве a на две класе. Првој класи доделимо све тачке полуправе a' и такође све оне тачке X полуправе a'' за које је $OX<r$, а другој класи све остале тачке праве. Показаћемо да та подела тачака праве на класе задовољава услов аксиоме IV.

Прва класа није празна, јер јој припада полуправа a'. На полуправој a'' постоји тачка X таква да је $AX=r$. Ова тачка припада другој класи, пошто из правоуглог троугла OAX следи $OX>AX=r$. На тај начин, ниједна класа није празна.

Нека је X тачка прве класе, а Y тачка друге класе. Показаћемо да $X < Y$. Тврђење је очигледно ако X припада полуправој a'. Нека X припада полуправој a''.

Претпоставимо да $Y < X$. Угао OYA је оштар, па је, према томе, угао OYX туп. Како је угао OXA оштар, у троуглу OXY је $OY < OX < r$, то јест Y припада првој класи, што је опречно условy.

Нека је D тачка која врши поделу на класе сагласно аксиоми IV. Показаћемо да је $OD = r$.

Претпоставимо да је $OD < r$. Положимо из тачке D у смеру полуправе a'' одсечак једнак $r - OD$. Нека је E други крај тог одсечка. По теореми 33 примењеној на троугао ODE, $OE < r$. Према томе, E припада првој класи, али то је немогућно јер је $D < E$. Аналогно се обара претпоставка $OD > r$. На тај начин, $OD = r$, и тачка D је пресек круга и полуправе a''.

Доказаћемо јединост тачке D.

Узмимо да постоје две тачке пресека полуправе a'' и круга: D_1 и D_2. Нека је D средина одсечка D_1D_2. Из једнакости троуглова OD_1D и OD_2D следи да је OD нормално на a. Али, ово је немогућно јер је, на основу теореме 22, $A \equiv D$, а тачке D_1 и D_2 леже са једне стране тачке A.

Аналогно се доказује постојање и јединост пресечне тачке полуправе a' и круга. Теорема је доказана.

Теорема 37. *Нека су дата два круга c_1 и c_2 са центрима O_1, O_2 и полупречницима r_1, r_2, при чему је*

$$r_1 \leqslant r_2, \quad r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2.$$

Тада ови кругови имају две и само две тачке пресека.

Доказ ове теореме се такође битно ослања на аксиому непрекидности. Ми га нећемо изводити.

§ 10. Мерење одсечака и углова

Теорема 38. *Постоји једна једина функција μ која је дефинисана на свим одсечцима и задовољава следеће услове:*

1. *За сваки одсечак AB је $\mu(AB) > 0$.*
2. *Ако су одсечци AB и CD једнаки, тада је $\mu(AB) = \mu(CD)$.*
3. *Ако се тачка C налази између тачака A и B, тада је*

$$\mu(AC) + \mu(CB) = \mu(AB).$$

4. *За неки одсечак A_0B_0 је $\mu(A_0B_0) = 1$.*

Број μ се зове *мера дужине* одсечка, а одсечак A_0B_0 *јединица за мерење дужине.*

Аналогна теорема важи за углове.

Теорема 39. *Постоји једна једина функција ϑ која је дефинисана за све углове и задовољава услове:*

1. *За сваки угао (h, k) је $\vartheta(h, k) > 0$.*
2. *Ако су углови (h, k) и (l, m) једнаки, тада је $\vartheta(h, k) = \vartheta(l, m)$.*
3. *Ако се зрак l налази између h и k, тада је*

$$\vartheta(h, l) + \vartheta(l, k) = \vartheta(h, k).$$

4. *За неки угао (h_0, k_0) је $\vartheta(h_0, k_0) = 1$.*

Број ϑ зове се *мера угла*, а угао (h_0, k_0) *јединица за мерење угла.*

Ми ћемо се ограничити на доказ теореме 38; теорема 39 се у знатној мери доказује на аналоган начин.

Доказ теореме 38. Конструишимо низ одсечака δ_0, δ_1, δ_2, ... од којих је сваки следећи два пута мањи од претходног, то јест

$$\delta_n + \delta_n = \delta_{n-1},$$

а $\delta_0 = A_0B_0$. Обележимо на правој AB онај смер у коме $A < B$ и конструишимо низ тачака A_1, A_2, A_3, ... такав да $A < A_1 < A_2$, ... и $A_{i-1}A_i = \delta_n$. Нека је A_n прва тачка овог низа која не припада одсечку AB. Таква тачка постоји на основу теореме 34. Очигледно, ако је $m > 1$, тада A_{m-1} припада одсечку AB. Уведимо ознаке

$$a_n = \frac{m-1}{2^n}, \quad b_n = \frac{m}{2^n}.$$

Из начина конструисања тачке A_m следи да, кад $n \to \infty$, низ a_n не опада, а b_n не расте. Како, сем тога, $b_n - a_n \to 0$, ови низови имају заједничку границу $\mu(AB)$.

Лако је видети да функција μ коју смо конструисали има следећа својства:

a) Ако је $a = a'$, тада је $\mu(a) = \mu(a')$,

b) $\mu(m\delta_n) = m/2^n$.

c) Ако је $a < a'$, тада је $\mu(a) < \mu(a')$.

Прво својство је очигледно, јер се за одсечке a и a' низови a_n и b_n који дефинишу μ поклапају. Да бисмо доказали својство b) довољно је да запазимо да сви b_k

одсечка $m\delta_n$ имају, бар за $k \geqslant n$, једну исту вредност $m/2^n$. Најзад, својство c) следи из чињенице да, очигледно, низови b_n на одсечцима a и a' задовољавају услов $b_n \leqslant b_n'$.

Доказаћемо сада својства 1—4 наведена у теореми. Друго и четврто својство су већ доказани. На тај начин преостаје да се провери прво и треће. Почнимо од првога.

По теореми 34, постоји такво n да је $n(AB) > A_0B_0$. Узмимо број p такав да је $n < 2^p$. Тада ће, због $n(AB) > 2^p\delta_p > n\delta_p$ бити $AB > \delta_p$. И, према томе, $\mu(AB) > 1/2^p > 0$.

Докажимо треће својство. Ово својство је прилично очигледно ако је сваки од одсечака AC, CB, а то значи и AB, састављен од извесног броја одсечака δ_n.

Запазимо сада да се, ма какав био одсечак d, за довољно велико n може навести број m такав да одсечак $d_n' = m\delta_n$ неће бити већи од d, а одсечак $d_n'' = (m+1)\delta_n$ неће бити мањи од d. Постојање таквог m утврђује се конструкцијом која је наведена у почетку доказа. Како је

$$\mu(d_n') \leqslant \mu(d) \leqslant \mu(d_n''), \quad \text{а} \quad \mu(d_n'') - \mu(d_n') = \frac{1}{2^n},$$

то ћемо, кад $n \to \infty$, имати да

$$\mu(d_n') \to \mu(d) \quad \text{и} \quad \mu(d_n'') \to \mu(d).$$

Конструисаћемо сада за одсечке AC и CB низове одсечака d_n' и d_n'' и обележаваћемо их са a_n' и a_n'', односно са b_n' и b_n''

Како је $a_n' + b_n' \leqslant AB \leqslant a_n'' + b_n''$, то је

$$\mu(a_n' + b_n') \leqslant \mu(AB) \leqslant \mu(a_n'' + b_n'').$$

Али, по оном што је доказано имамо

$$\mu(a_n' + b_n') = \mu(a_n') + \mu(b_n'), \quad \mu(a_n'' + b_n'') = \mu(a_n'') + \mu(b_n'').$$

Одатле је

$$\mu(a_n') + \mu(b_n') \leqslant \mu(AB) \leqslant \mu(a_n'') + \mu(b_n'').$$

Прелазећи на границу добијамо

$$\mu(AB) = \mu(AC) + \mu(CB).$$

На тај начин, функција μ заиста има својства 1—4.

Доказаћемо јединост функције μ. Нека имамо две функције μ_1 и μ_2 са својствима 1—4. Како је $\mu_i(\delta_0) = 1$, из

својства 3 следи да је $\mu_i(\delta_n) = \dfrac{1}{2^n}$. Затим, из својстава 1 и 3 следи монотоност функција μ_i, то јест

$$\mu_i(a) < \mu_i(b) \quad \text{ако је} \quad a < b.$$

Конструишимо за дати одсечак a одсечке a_n' и a_n'' састављене од δ_n. Тада је

$$\mu_1(a_n') \leqslant \mu_1(a) \leqslant \mu_1(a_n''), \quad \mu_2(a_n') \leqslant \mu_2(a) \leqslant \mu_2(a_n'').$$

Како је $a_n'' = a_n' + \delta_n$, то је

$$\mu_i(a_n'') - \mu_i(a_n') = \frac{1}{2^n}.$$

Одатле следи да је

$$|\mu_1(a) - \mu_2(a)| < \frac{1}{2^n}$$

ма за које n, а то значи да је $\mu_1(a) = \mu_2(a)$. Јединост функције μ је утврђена и теорема је у потпуности доказана.

Теорема 39. *Ма какав био позитиван број α, постоји одсечак a такав да је $\mu(a) = \alpha$.*

Заиста, конструишимо два низа позитивних бројева α_n' α_n'' облика $m/2^k$ који конвергирају ка α тако да је први неопадајући, а други нерастући. Очигледно, постоје одсечци a_n' и a_n'' такви да је $\mu(a_n') = \alpha_n'$, $\mu(a_n'') = \alpha_n''$.

Положимо на праву g из неке њене тачке A одсечке a_n' и a_n'' у једном смеру. Нека су A_n' и A_n'' крајеви тих одсечака. По теореми 35, сви одсечци $A_n'A_n''$ имају заједничку тачку B.

Очигледно, $\mu(AB) = \alpha$.

§ 11. Аксиома паралелности. Сличност фигура

Пета група аксиома састоји се од једне аксиоме—аксиоме паралелности.

Аксиома V. *Кроз дату тачку ван дате праве може се повући у равни највише једна права која не сече дату.*

Ова права зове се *паралелна права.*

Аксиомом V завршава се систем аксиома еуклидске геометрије. У наредној глави биће показано да се тај систем аксиома не може попунити новим аксиомама тако да ове не произлазе из аксиома I—V и не противрече им.

Помоћу аксиоме паралелности могу се добити нове чињенице Еуклидове геометрије. Навешћемо неке од њих.

Теорема 40. *Свака права секући се с двема паралелним правима образује једнаке саїласнe уїлове.*

Доказ. Нека су a и b две паралелне праве, c права која их сече, а A и B тачке пресека. По теореми 30, кроз тачку B пролази права b' која не сече a, тако да су одговарајући углови под којима праве a и b' секу праву c једнаки. Но, по аксиоми V права b' поклапа се са b. Теорема је доказана.

Теорема 41. *У сваком троуїлу збир уїлова једнак је са два права уїла.*

Доказ. Нека је ABC дати троугао. Повуцимо кроз C праву паралелну AB. Две полуправе на које ту праву дели тачка C и полуправе CA и CB образују три угла. Један од њих је угао C троугла, а остала два су на основу теореме 40 једнака угловима A и B троугла. Одатле следи да је збир углова троугла ABC једнак са два права угла.

Четвороугао се зове *паралелоїрам* ако су му супротне странице паралелне.

Теорема 42. *У сваком паралелоїраму супротни уїлови су једнаки, збир уїлова на једној страници једнак је са два права уїла, супротне странице су једнаке.*

Доказ. Прва два тврђења непосредно произлазе из теореме 40 и из својстава суплементних и унакрсних углова. Треће тврђење следи из једнакости троуглова на које дијагонале деле паралелограм.

Теорема 43. *Нека су a, b, c три праве које се секу две по две. Успоставимо кореспонденцију тачака правих a и b пројектовањем помоћу правих паралелних c. Тада су одговарајући одсечци правих a и b пропорционални.*

Доказ. Из аксиоме V следи да свака права паралелна c сече a и b, тако да је поменута кореспонденција тачака стварно могућна. Лако је видети да једнаким одсечцима праве a одговарају једнаки одсечци праве b.

Кореспондирајмо сваком одсечку δ_a праве a број $\nu(\delta_a)$ једнак дужини $=\mu(\delta_b)$ одговарајућег му одсечка праве b. Функција одсечка ν задовољава услове 1—3 теореме 38 и, према томе, разликује се од дужине само по неком множиоцу. На тај начин је

$$\nu(\delta_a)=k\,\mu(\delta_b).$$

Теорема је доказана.

Теорема 44. *Два троуїла са по два респективно једнака уїла слична су.*

Доказ. Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ дати троугли, при чему је $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. По теореми 40 је $\angle C=\angle C_1$. Померимо троугао $A_1B_1C_1$ тако да се његово теме C_1 поклопи са C, а темена A_1 и B_1 пређу респективно у тачке A_2 и B_2 полуправих CA и CB.

Како су троугли $A_1B_1C_1$ и A_2B_2C једнаки, угао A_2 троугла A_2B_2C једнак је углу A троугла ABC. Према томе, праве A_2C_2 и AC су паралелне. Одатле произлази, по теореми 43, пропорционалност одсечака

$$\frac{CA_2}{CA}=\frac{CB_2}{CB}.$$

(Ради краћег писања, дужине одсечака означене су самим одсечцима.)

Како је $CA_2=C_1A_1$, $CB_2=C_1B_1$, то је

$$\frac{C_1A_1}{CA}=\frac{C_1B_1}{CB}.$$

Аналогно се добија

$$\frac{C_1B_1}{CB}=\frac{A_1B_1}{AB}.$$

Теорема је доказана.

Докази двају других критеријума сличности троуглова, познати из средње школе, не причињавају тешкоће. Ми их нећемо наводити.

На крају ћемо напоменути да се помоћу теореме 44 може доказати Питагорина теорема.

Теорема 45. *Збир квадрата дужинâ катета правоуїлоі троуїла једнак је квадрату дужине хипотенузе.*

Доказ. Нека је ABC правоугли троугао и C прав угао. Спустимо нормалу CD из темена правог угла на хипотенузу. Подножје D нормале налази се између A и B. Заиста, ако бисмо узели да се A и B налазе са исте стране од D, дошли бисмо у опреку с теоремом 29.

Из сличности троуглова ABC, ACD и BCD следе пропорције

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},\qquad \frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}.$$

Одатле је

$$AC^2 = AB \cdot AD, \quad BC^2 = BD \cdot AB.$$

Сабирајући ове једнакости добићемо

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Теорема је доказана.

Овим ћемо завршити излагање чињеничког материјала елементарне геометрије. Добијање даљих теорема не причињава тешкоће. Докази тих теорема, читаоцу познати из средњошколског курса, већ су довољно беспрекорни, тако да њихово понављање није целисходно.

Глава III

ИСПИТИВАЊЕ АКСИОМА ЕУКЛИДСКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

§ 1. Декартова реализација система аксиома еуклидске геометрије

У вези с аксиоматском изградњом еуклидске геометрије природно се постављају следећа три питања:

1. Није ли систем аксиома који смо усвојили противречан, то јест није ли могућно путем логичких расуђивања извести из тог система две последице које се узајамно искључују?

2. Да ли је систем аксиома потпун, то јест може ли се он попунити новим аксиомама које не би противречиле већ усвојеним аксиомама и не би из ових произлазиле?

3. Јесу ли усвојене аксиоме независне, то јест не произлазе ли неке аксиоме из осталих?

Решење ових питања, које ћемо дати у овој глави, тесно је повезано с конструисањем конкретних реализација система аксиома. *Реализација* је указивање трију врста предмета произвољне природе који се условно називају „тачкама“, „правима“ и „равнима“ и трију односа међу овима, који се (односи) условно изражавају речима „припадати“, „претходити“ и „кретање“, и за које су, због њиховог конкретног садржаја, аксиоме испуњене.

Ствар је у томе што се, за разлику од излагања у „Елементима“, где су, као што знамо, садржани описи основних објеката — тачака, правих и равни, — у нашем излагању о овима не говори ништа преко онога што је изражено у аксиомама. Зато се сви наши закључци односе на ствари произвољне природе, само ако су за ове и за односе међу њима — а ти односи могу такође бити далеко од очигледних представа — аксиоме испуњене.

У вези с тим Еуклидова геометрија допушта бесконачно много реализација. Заиста, нека је S ма које обострано једнозначно пресликавање мноштва E свих тачака које било реализације на себе само или на друго мноштво, које ћемо обележили са R. Елементе мноштва R називаћемо тачкама. Правима (равнима) називаћемо подмноштва од R састављена од ликова правих (равни). Односе припадности и поретка и кретање дефинисаћемо помоћу одговарајућих односа првобитних ликова у E. Лако је видети да су за елементе R као тачке и за наведена подмноштва правих и равни испуњене све аксиоме.

Сада ћемо показати једну од реализација система аксиома еуклидске геометрије — тзв. *Декартову реализацију*. Једноставности ради, ми ћемо конструисати реализацију равног система аксиома. Али, није тешко уверити се да је таква иста конструкција могућна и за просторни систем.

Тачком ћемо називати ма који пар реалних бројева x и y узетих у одређеном поретку (x, y), а ове бројеве зваћемо координатама тачке. Правом ћемо звати скуп свих тачака чије координате задовољавају линеарну једначину

$$ax+by+c=0.$$

Ову једначину називамо једначином праве, праве $x=0$ и $y=0$ координатним осама, а тачку $(0, 0)$ координатним почетком.

Ми ћемо говорити да тачка припада правој ако је она једна од њених тачака. На тај начин, тачка припада правој ако њене координате задовољавају једначину праве.

Поредак тачака на правој задатој једначином $ax+by+c=0$ дефинишемо на следећи начин. Ако је $b \neq 0$, тада се $A_1(x_1, y_1) < A_2(x_2, y_2)$ у једном смеру одређује условом $x_1 < x_2$, а у супротном смеру условом $x_2 < x_1$. Ако је $b=0$, тада се $A_1 < A_2$ у једном смеру одређује условом $y_1 < y_2$, а у супротном смеру условом $y_2 < y_1$.

Кретање ће се састојати у томе што ће се у свакој тачки (x, y) кореспондирати тачка (x', y') по следећим формулама:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta - \varepsilon y \sin\vartheta + a, \\ y' &= x\sin\vartheta + \varepsilon y\cos\vartheta + b, \end{aligned} \tag{*}$$

где су ϑ, a, b ма који бројеви, $\varepsilon = \pm 1$. За праву се кретање дефинише кретањем њених тачака. Због линеарности и једнозначне решљивости формула (*) оно заиста на показани начин свакој правој кореспондира праву.

При таквом конкретном схватању тачака и правих и односâ међу њима свака од аксиома еуклидске геометрије представља неко тврђење које се односи на реалне бројеве. Сада ћемо показати да свако од тих тврђења заиста важи на основу одговарајућих теорема аритметике.

§ 2. У Декартовој реализацији испуњене су аксиоме еуклидске геометрије

Аксиома I$_1$. Ма какве биле тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2), постоји права која кроз њих пролази.

Заиста, права

$$(x-x_2)\cdot(y_2-y_1)-(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)=0$$

пролази кроз обе тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Аксиома I$_2$. Ма какве биле две тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2), постоји највише једна права која кроз те тачке пролази.

Допустимо супротно. Нека кроз тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пролазе две праве

$$ax+by+c=0, \quad a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Како систем од две линеарне једначине са две непознате има више од једног решења, једначине су зависне, то јест разликују се само по множиоцу, а то значи да се праве подударају.

Аксиома I$_3$. На свакој правој $ax+by+c=0$ леже најмање две тачке. Постоје три тачке које не леже на једној правој.

Заиста, тачка $\left(\dfrac{-ac}{a^2+b^2}-\lambda b,\ \dfrac{-bc}{a^2+b^2}+\lambda a\right)$ ма за које λ припада правој. А три тачке $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не леже на једној правој.

Аксиомама I$_1$, I$_2$ и I$_3$ исцрпљују се све равне аксиоме везе. Пређимо на аксиоме поретка.

Аксиоме поретка II$_1$, II$_2$ и II$_3$ задовољене су због одговарајућих својстава неједнакости за реалне бројеве.

Аксиома II$_4$. У једном од два смера на правој $ax+by+c=0$ за сваку тачку $A(x, y)$ наћи ће се тачке A_1 и A_2 такве да $A_1 < A < A_2$.

Заиста, ако тачка $A(x, y)$ лежи на правој $ax+by+c=0$, тада на овој леже и тачке $(x+b, y-a)$ и $(x-b, y+a)$. Лако је видети да ма у којем од два смера једна од тих тачака претходи тачки A, а друга следи за овом.

Аксиома II$_5$. Права g: $ax+by+c=0$ дели раван на две полуравни тако да, ако су $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ две тачке једне полуравни, тада одсечак A_1A_2 не сече праву g, а ако A_1 и A_2 припадају разним полуравнима, тада одсечак A_1A_2 сече праву g.

Поделимо раван на две области:

$$ax+by+c<0 \quad \text{и} \quad ax+by+c>0.$$

Показаћемо да ова подела има својства поменута у аксиомама.

Заиста, нека је $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ права која спаја тачке A_1 и A_2 и нека је, одређености ради, $\beta\neq 0$. Тада је за све тачке одсечка A_1A_2 $x_1<x<x_2$ или $x_2<x<x_1$.

Заменимо координате x и $y=-\frac{1}{\beta}(\alpha x+\gamma)$ тачке одсечка A_1A_2 у $ax+by+c$. Добићемо линеарну функцију од x $f(x)$. Ако тачке A_1 и A_2 припадају једној области, тада су $f(x_1)$ и $f(x_2)$ истог знака, па, према томе, $f(x)$ задржава свој знак у целом интервалу (x_1, x_2). Ово значи да одсечак A_1A_2 не сече праву $ax+by+c=0$. Ако пак тачке A_1 и A_2 припадају разним областима, тада су $f(x_1)$ и $f(x_2)$ различитог знака и, према томе, $f(x)$ постаје у интервалу (x_1, x_2) једнако нули. Та значи да одсечак A_1A_2 сече праву $ax+ +by+c=0$. Аналогно се разматра случај $\beta=0$ (у том случају је $\alpha\neq 0$).

Аксиома III$_1$. Кретање не мења однос припадности.

То је очигледно.

Аксиома III$_2$. Кретање не мења поредак.

Нека кретање преводи праву $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ у праву $ax+by+c=0$, и нека је, одређености ради, $\beta\neq 0$ и $b\neq 0$. Изразићемо координату x' тачке на правој $ax+by+c=0$ помоћу координате x одговарајуће тачке на правој $\alpha x+ +\beta y+\gamma=0$. У том циљу сменимо у прву формулу (*) $y= -\frac{1}{\beta}(\alpha x+\gamma)$. Функција $x'(x)$ је линеарна па дакле и монотона (она се не своди на константу, јер би иначе из једначине $ax+by+c=0$ следило да је и y константа). Отуда следи да је аксиома III$_2$ испуњена.

Остали случајеви: $\beta=0$, $b\neq 0$; $\beta=0$, $b=0$; $\beta\neq 0$, $b=0$ разматрају се аналогно.

Аксиома III$_3$. Кретања образују групу.

Заиста, идентична трансформација $x'=x$, $y'=y$ садржана је у трансформацијама

$$x'=x\cos\vartheta-\varepsilon y\sin\vartheta+a, \qquad y'=x\sin\vartheta+\varepsilon y\cos\vartheta+b \qquad (*)$$

за $\vartheta=0$, $a=0$, $b=0$, $\varepsilon=1$. Трансформација инверзна трансформацији (*) дата је формулама

$$x=x'\cos\vartheta+y'\sin\vartheta+a'=x'\cos(-\varepsilon\vartheta)-\varepsilon y'\sin(-\varepsilon\vartheta)+a',$$

$$y=-\varepsilon x'\sin\vartheta+\varepsilon y'\cos\vartheta+b'=x'\sin(-\varepsilon\vartheta)+\varepsilon y'\cos(-\varepsilon\vartheta)+b'$$

и, дакле, представља кретање. Узастопно извођење двеју трансформација облика (*) даје такође трансформацију облика (*).

Аксиома III$_7$. Нека су a_1 и a_2 две праве а A_1 и A_2 тачке на тим правима. Тада постоји једно једино кретање које преводи тачку A_1 у A_2, задату полуправу праве a_1 у задату полуправу праве a_2, задату полураван одређену правом a_1 у задату полураван одређену правом a_2.

Аксиома III$_3$ омогућује да се у доказу егзистенције ограничимо на случај кад је A_2 координатни почетак, a_2 оса x, полуправа на њој $x>0$ и полураван $y>0$. Не сужавајући општост може се сматрати да је права a_1 задата једначином $x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+p=0$. На такав облик једначина се лако своди.

Посматрајмо кретање

$$\pm x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta+q, \qquad \pm y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+p.$$

Очигледно, то кретање преводи праву a_1 у осу x $(y=0)$. Избором q може се постићи то да тачка A_1 дође у координатни почетак, а избором знака пред x' и y' могу се задовољити остали услови.

Због аксиоме III$_3$ јединост је довољно показати у случају кад се обе тачке A_i поклапају с координатним почетком, полуправе a_i с позитивном полуосом x, а полуравни са полуравни $y>0$.

Пређимо сада на формуле (*). Како $(0, 0)$ прелази у $(0, 0)$, то је $a=b=0$. Како за $y=0$ имамо $y'=0$, то је $\vartheta=0$. Како за $y>0$ имамо $y'>0$, то је $\varepsilon=1$. Према томе, кретање је $x'=x$, $y'=y$. Јединост је доказана.

Аксиома III$_4$. Ако при кретању полуправа h као целина и њена почетна тачка A остају непокретне, тада све тачке полуправе h остају непокретне.

После аксиома III$_3$ и III$_7$ довољно је размотрити случај кад се тачка A поклапа с координатним почетком, а полуправа h с позитивном полуосом x. Погледајмо формуле (*). Како за $y=0$ мора бити $y'=0$, следи да је $\vartheta=0$. Поред тога, пошто за $x=y=0$ имамо $x'=y'=0$, то је

$a=b=0$. На тај начин, формуле (*) имају облик $x'=x$, $y'=\varepsilon y$. Аксиома је испуњена.

Аксиома III$_5$. За сваки пар тачака $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ постоји кретање које им размењује места.

Ако тачке леже на оси x, тражено кретање је

$$x'=-x+x_1+x_2, \quad y'=y.$$

Општи случај своди се на тај посебни помоћу аксиома III$_3$ и III$_7$.

Аксиома III$_6$. За сваки пар зракова који полазе из једне тачке постоји кретање које им размењује места.

У посебном случају кад су зраци задати једначинама $x\cos\vartheta+y\sin\vartheta=0$, $x\cos\vartheta-y\sin\vartheta=0$, тражено кретање је или $x'=x$, $y'=-y$ или $x'=-x$, $y'=y$. Општи случај своди се на посебан путем преласка најпре на зраке $y=0$, $x\cos 2\vartheta+y\sin 2\vartheta=0$ неким кретањем (аксиома III$_7$), а затим кретањем $x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$, $y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$ на зраке $x\cos\vartheta+y\sin\vartheta=0$, $x\cos\vartheta-y\sin\vartheta=0$.

Аксиома непрекидности испуњена је услед Дедекиндове аксиоме за реалне бројеве.

Аксиома V. Кроз дату тачку (x_0, y_0) ван дате праве $ax+by+c=0$ може се повући највише једна њој паралелна права.

Допустимо да постоје две такве праве $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$. Оба система

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ ax+by+c&=0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_2x+b_2y+c_2&=0\\ ax+by+c&=0\end{aligned}\right\}$$

јесу несагласна. Зато је

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a & b\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a & b\end{vmatrix}=0. \quad \text{Одатле је} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0.$$

Како пак систем

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

има решење $(x=x_0, \ y=y_0)$, то су његове једначине зависне и, према томе, праве се поклапају.

Овим је доказано да су све аксиоме испуњене.

§ 3. Непротивречност и потпуност система аксиома еуклидске геометрије

Систем аксиома ма које теорије T, а посебно еуклидске геометрије, непротивречан је ако он допушта бар једну реализацију R.

Заиста, ако би се у T могле из система аксиома извести две последице које се узајамно искључују, тада би то било и у R. Како пак тачност сваког тврђења у R које одговара аксиоми T не изазива сумњу услед саме природе ствари R и односа између ових, то је немогућно добити такве две последице у R. Одатле произлази и немогућност да се дође до противречности у T.

У прва два параграфа ми смо конструисали једну реализацију система аксиома еуклидске геометрије, и то Декартову реализацију. Конструкција се састојала у томе што смо показали систем објеката назвавши их условно тачкама и правима и систем односа међу њима, за које су (системе) испуњена сва тврђења садржана у аксиомама еуклидске геометрије. Закључак да су та тврђења заиста тачна извели смо на основу одговарајућих теорема које се односе на теорију реалних бројева. Како се пак ове теореме у крајњој линији изводе из аксиома аритметике, за тачност конструкције Декартове реализације можемо јемчити само под условом да је систем аксиома аритметике непротивречан. На тај начин добијамо решење питања непротивречности система аксиома еуклидске геометрије у следећем облику:

Теорема 46. *Систем аксиома еуклидске геометрије непротивречан је ако је непротивречан систем аксиома аритметике.*

Пређимо на питање потпуности система аксиома. Нека имамо две реализације R' и R'' система аксиома неке теорије T. Ове се реализације називају *изоморфним* ако се између елемената тих реализација може успоставити обострано једнозначна кореспонденција која не мења односе дефинисане аксиомама.

Кажемо да је систем аксиома T *потпун* ако се не може попунити новим аксиомама које не произлазе из T и не противрече овима. Разуме се, при том се претпоставља да нове аксиоме не уводе нове односе. Питање потпуности система аксиома тесно је повезано с питањем изоморфности свих њених реализација. Наиме, ако су све реализације система аксиома T изоморфне, тај систем аксиома је потпун.

Заиста, нека је систем аксиома T непотпун. То значи да постоји неко тврђење a које се не може извести из аксиома T и није у опреци са овима. При том можемо образовати два непротивречна система аксиома T' и T'' на тај начин што аксиомама T прикључујемо аксиому a или њену негацију $\bar{a}$.

Нека су R' и R'' реализације ових система аксиома T' и T''. Свака од њих уједно је и реализација система аксиома T. Како у T' важи a, а у T'' важи $\bar{a}$ (негација тврђења a), ове реализације T нису изоморфне. Тврђење је доказано.

Теорема 47. *Систем аксиома еуклидске геометрије је потпун. Другим речима, њему се не могу додати никакве нове аксиоме које би се односиле на тачке, праве и равни и њихове међусобне односе дефинисане аксиомама прве три групе, а које не би произлазиле из аксиома I—V и не би биле противречне овима.*

Да би се доказала ова теорема довољно је утврдити да постоји изоморфност свих реализација система аксиома еуклидске геометрије. Како су две реализације изоморфне трећој очигледно изоморфне и међу собом, то је довољно доказати изоморфност свих реализација Декартове реализације.

Уведимо у равни произвољне реализације правоугле Декартове координате x, y онако како се то ради у аналитичкој геометрији. Познато је да се свака права задаје линеарном једначином облика $ax+by+c=0$ и да свака таква једначина одговара некој правој. Тако се између тачака и правих произвољне реализације равног система аксиома еуклидске геометрије и тачака и правих Декартове реализације успоставља узајамно једнозначна кореспонденција. Ова кореспонденција је изоморфизам.

Заиста, наведена кореспонденција не нарушава однос припадности. Даље, како се показује у аналитичкој геометрији, поредак тачака на правој изражава се помоћу координата тачака сасвим онако као што смо ми усвојили приликом конструисања Декартове реализације. Најзад, кретања се аналитички изражавају формулама:

$$x' = x\cos\vartheta - \varepsilon y \sin\vartheta + a,$$
$$y' = y\sin\vartheta + \varepsilon y\cos\vartheta + b,$$

то јест онако како је то било дефинисано у Декартовој реализацији.

На тај начин, свака реализација система аксиома еуклидске геометрије изоморфна је Декартовој реализацији. Према томе, тај систем аксиома је потпун. Теорема је доказана.

§ 4. Независност аксиоме непрекидности

За аксиому a ма које теорије T са аксиоматском структуром кажемо да је *независна* ако се она не може добити као последица осталих аксиома T. Уобичајени начин доказивања независности ове или оне аксиоме састоји се у томе што се конструише таква реализација R система аксиома T без аксиоме a, у којој (реализацији) аксиома a није испуњена. Ако се успе да се таква реализација конструише, тада је аксиома a независна.

Заиста, ако би се аксиома a добила као последица осталих аксиома, тада би у R такође важило тврђење a, али то је противречно конструкцији R.

Тим истим путем ми ћемо доказати независност аксиоме непрекидности у еуклидској геометрији.

Теорема 48. *Аксиома непрекидности је независна. Другим речима, она се не може добити као последица осталих аксиома еуклидске геометрије.*

Доказ. Обележимо са G скуп реалних бројева који садржи све рационалне бројеве, а такође и све бројеве који се добијају из рационалних примењујући коначно много пута операције сабирања, одузимања. множења, дељења и извлачења квадратног корена. Очигледно, збир, разлика, производ, количник два броја из G, а такође и квадратни корен ма којег броја који припада G, опет је број мноштва G. Познато је да бројеви из G не исцрпљују све реалне бројеве. И, штавише, мноштво бројева G највише је пребројљиво.

Покушајмо да конструишемо Декартову реализацију система аксиома еуклидске геометрије на исти начин као и у § 1, али користићемо се не свим реалним бројевима, већ само бројевима из G.

Према томе, тачком ћемо називати пар бројева (x,y) из G, а правом скуп тачака које задовољавају ма коју линеарну једначину $ax+by+c=0$ с коефицијентима из G. Поредак тачака на правој дефинисаћемо као и раније, а кретања ћемо задати формулама

$$x' = mx - ny + a, \quad y' = nx + my + b,$$

чији коефицијенти припадају G и, осим тога, задовољавају услов $m^2+n^2=1$. Ове формуле ни по чему се не разликују од оних којима смо се користили раније, јер се увек може ставити

$$m = \cos\vartheta, \quad n = \pm\sin\vartheta.$$

Пошто смо дефинисали тачке, праве и основне односе међу њима, можемо приступити проверавању да ли су аксиоме испуњене. При том се овде могу поновити сва наша расуђивања из § 2, с малим изменама и објашњењима. Једино нећемо успети да докажемо аксиому непрекидности, јер се она никако не испуњава.

Заиста, нека је α број који се не садржи у G. Као што је горе речено, такви бројеви постоје. Поделимо мноштво тачака праве $y=0$ на две класе стављајући у прву класу оне тачке $(x, 0)$ за које је $x<\alpha$, а у другу све тачке за које је $x>\alpha$. Очигледно, свака тачка припада једној од тих класа (тачке $(\alpha, 0)$ нема на правој) и ниједна класа није празна.

У смислу усвојене дефиниције поретка тачака на правој, свака тачка прве класе претходи свакој тачки друге класе. По аксиоми непрекидности, ако та аксиома важи, мора постојати тачка $(\beta, 0)$ која врши поделу на класе. Број β има следећа својства: $x<\beta$ ако је $(x, 0)$ из прве класе, а $\beta \leqslant x$ ако је $(x, 0)$ из друге класе. Али, по дефиницији класа, такво својство има само број $\beta=\alpha$, а $(\alpha, 0)$ није тачка праве. Дакле, аксиома непрекидности није испуњена.

Што се тиче осталих аксиома, понављајући скоро дословце доказ из § 2 можемо се уверити да су оне испуњене.

На тај начин, ми смо конструисали реализацију система свих аксиома еуклидске геометрије осим аксиоме непрекидности, која у тој реализацији не важи. То и доказује независност аксиоме непрекидности од осталих аксиома еуклидске геометрије.

Доказана теорема омогућује да се наведе један садржајан пример непотпуног система аксиома. Наиме, систем аксиома еуклидске геометрије без аксиоме непрекидности непотпун је. Тај се систем може допунити новом аксиомом (аксиомом непрекидности) која не произлази из осталих аксиома и није им противречна.

§ 5. Независност аксиоме паралелности

Теорема 49. *Аксиома паралелности еуклидске геометрије независна је. Она се не може извести из осталих аксиома.*

Према општем поступку доказивања независности аксиома, о коме је било речи у § 4, довољно је да конструишемо такву реализацију система аксиома еуклидске геометрије без аксиоме паралелности у којој се (реализацији) аксиома паралелности не испуњава. Сада ћемо конструисати такву реализацију, при чему ћемо се, једноставности ради, ограничити на раван систем аксиома.

Под тачком ћемо разумети ма коју тачку еуклидске равни унутар јединичног круга

$$x^2+y^2<1,$$

а под правом ма коју тетиву тог круга. Однос припадности и однос поретка разумећемо у смислу еуклидске геометрије. На крају, кретањем ћемо називати ма коју колинеацију која круг $x^2+y^2=1$ преводи у њега самог.

У тој реализацији — краткоће ради, обележимо је са K — аксиоме прве две групе очигледно су испуњене. Остаје нам, према томе, да проверимо аксиоме кретања и аксиому паралелности.

Почнимо од аксиома кретања.

Запазимо да еуклидска обртања око центра круга $x^2+y^2=1$, а такође и симетрична пресликавања у односу на његове пречнике јесу кретања у реализацији K.

Даље, трансформација задата формулама

$$x'=\frac{x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta y}, \qquad y'=\frac{y+\beta}{1+\beta y}, \qquad |\beta|<1$$

јесте кретање у K. Ради проверавања овог последњег образујмо $x'^2+y'^2$. Лако је уверити се да ће за $x^2+y^2=1$ бити $x'^2+y'^2=1$. Ова трансформација — обележаваћемо је са H_β — преводи тачку $(0, 0)$ у тачку $(0, \beta)$.

Аксиома III$_1$. Кретања не мењају однос припадности.

Ова аксиома је испуњена очигледно.

Аксиома III$_2$. Кретања не мењају однос поретка.

Заиста, нека кретање преводи тетиву a у тетиву b. Нека, одређености ради, ниједна тетива није паралелна оси y. Изразимо апсцису x' тачке b помоћу апсцисе x одговарајуће тачке a. Како се колинеације задају разломљено-линеарним формулама, x' ће бити разломљено-линеарна функција од x

$$x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Ова функција, као што је лако видети, монотона је и не своди се на константу, јер би тада y' било константно, а то је немогућно. Како је x' монотона функција од x, то се, очигледно, аксиома III_2 заиста испуњава. Аналогно се разматрају случајеви кад су једна или обе тетиве паралелне оси y.

Аксиома III_3. Кретања образују групу.

Очигледно, јер све колинеације образују групу.

Аксиома III_7. Нека су a и b две праве, A и B тачке на тим правима. Тада постоји једно једино кретање које дату полураван одређену правом a преводи у задату полураван одређену правом b, дату полуправу праве a у задату полуправу праве b и тачку A у тачку B.

Помоћу еуклидских обртања и кретања H_β тачке A и B доводе се до поклапања с центром круга. Затим се тражено кретање састаља од обртања око центра круга и, можда, симетричног пресликавања у односу на пречнике. После тога се тачка B обратним кретањем враћа на своје старо место. На тај начин, кретање о коме се говори у аксиоми заиста постоји.

А сада је довољно јединост тог кретања доказати за врло специјалан случај, наиме кад се тачке A и B поклапају с координатним почетком, полуправе са одсечком $0 < x < 1$ позитивне полуосе x, а полуравни с полукругом $y > 0$.

Општа колинеација задаје се формулама

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}, \qquad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c}.$$

Како за $y = 0$ мора бити $y' = 0$, то је $a_2 = c_2 = 0$. Како колинеација не мења три тачке праве $y = 0$, и то $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, то она не мења ниједну од тачака ове праве, тј. за $y = 0$ мора бити $x' = x$. Отуда је $c_1 = 0$, $a = 0$. На тај начин формуле добијају облик

$$x' = \frac{x + \gamma y}{1 + \beta y}, \qquad y' = \frac{\delta y}{1 + \beta y}.$$

Како је за $x^2 + y^2 = 1$ такође $x'^2 + y'^2 = 1$, то

$$\left(\frac{x + \gamma y}{1 + \beta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{1 + \beta y}\right) = 1$$

мора бити еквивалентно са $x^2 + y^2 = 1$. Одатле је лако закључити да је $\beta = 0$, $\gamma = 0$, а $\delta = \pm 1$. Како за $y > 0$ мора бити $y' > 0$, то је $\delta = +1$. Јединост је доказана.

Аксиома III_4. Ако при кретању полуправа h као целина и њена почетна тачка остају непокретне, тада све тачке полуправе h остају непокретне.

Колинеација која задаје кретање поменуто у аксиоми оставља крајеве тетиве непокретним. Како су пак при колинеацији три тачке праве непокретне, то су такође све тачке непокретне.

Аксиома III_5. Постоји кретање које двема тачкама A и B размењује места.

Ако су обе тачке на оси y и симетричне су у односу на координатни почетак, кретање о коме је реч јесте симетрично пресликавање у односу на осу x. Да би се општи случај свео на тај посебни, довољно је умети кретањем превести тачке A и B у наведени положај. То није тешко учинити. Најпре се тачке A и B преводе на осу y којим било кретањем, али тако да ниједна од њих не доспе у координатни почетак. Затим се примени кретање H_β, при чему је β изабрано на подесан начин.

Аксиома III_6. Постоји кретање које размењује места зрацима h и k који полазе из једне тачке.

Ако зраци h и k полазе из центра круга, то кретање је симетрично пресликавање у односу на симетралу угла између тих зракова. Општи случај своди се на овај посебни помоћу аксиоме III_7.

Дакле, у реализацији K заиста се испуњавају све аксиоме кретања.

Преостало је да се размотри аксиома паралелности. Ова се аксиома у реализацији K не испуњава. Заиста, кроз тачку ван тетиве може се повући бесконачно много тетива које ту тетиву не секу.

Конструисање реализације K управо доказује независност аксиоме паралелности.

Глава IV

ГЕОМЕТРИЈА ЛОБАЧЕВСКОГ

§ 1. Неки ставови апсолутне геометрије

У претходној глави било је доказано да је аксиома паралелности независна од осталих аксиома еуклидске геометрије. Отуда следи да ћемо, замењујући ту аксиому њеном негацијом, добити такође логички непротивречан систем. Геометрија основана на томе систему аксиома зове се *геометрија Лобачевског*. У овој глави доказаћемо потпуност система аксиома геометрије Лобачевског и изоморфност свих њених реализација. То ће нам омогућити да теореме геометрије Лобачевског добијамо било из које њене реализације.

Сада ћемо размотрити неке помоћне ставове који спадају у такозвану апсолутну геометрију. То су ставови који се изводе на основу прве четири групе аксиома еуклидске геометрије и који, према томе, важе како у еуклидској геометрији тако и у геометрији Лобачевског*.

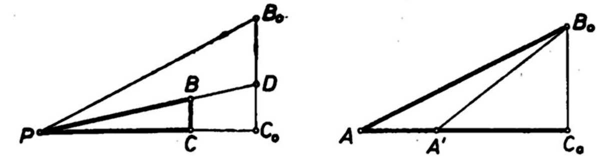
Сакеријевим четвороуглом назива се четвороугао коме су два узастопна угла права, а супротне странице налегле уз те углове једнаке. Страницу која спаја темена правих углова називаћемо доњом основицом, а њој суседне странице бочним страницама.

Лема 1. *Углови на горњој основици Сакеријевог четвороугла једнаки су и ниједан од њих није већи од правог угла.*

Једнакост углова на горњој основици следи из симетрије четвороугла у односу на нормалу повучену кроз средину доње основице. Ако се претпостави да су углови на горњој основици тупи, тада бар један од троуглова на које дијагонала дели четвороугао има збир углова већи од два права угла, што је немогућно (гл. I, § 2). Тврђење је доказано.

* Напомињемо да теореме 1—39, гл. III, спадају у апсолутну геометрију. У њиховим доказима нисмо се користили аксиомом паралелности.

Лема 2. *Ако се правоугли троугао ABC мења тако да његове странице остају мање од c, оштар угао B остаје мањи од $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, тада оштар угао A остаје већи од неког угла $\varepsilon'>0$ који зависи од ε и c.*

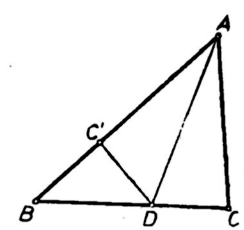


Сл. 13

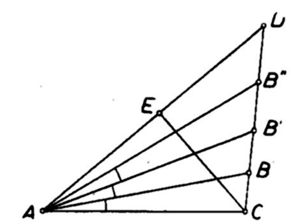
Конструишимо правоугли троугао AB_0C_0 коме је катета AC_0 једнака c, а угао B_0 већи од $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ (сл. 13). Такав троугао лако је конструисати. Наиме, најпре се конструише правоугли троугао $A'B_0C_0$ с хипотенузом $A'B_0$ једнаком a и углом B_0 једнаким $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, а затим се узима тачка A на продужетку катете C_0A' тако да је $AC_0=c$.

Тврдимо да угао A троугла ABC није мањи од угла B_0AC_0. Допустимо да је то тврђење нетачно. Тада ће продужетак AB сећи одсечак B_0C_0 у некој тачки D.

Како збир углова четвороугла $CBDC_0$ није већи од четири права угла, угао ABC није мањи од BDC_0. По теореми о спољашњем углу троугла, угао BDC_0 већи је од угла AB_0C_0. На тај начин, угао B троугла ABC већи је од $\angle AB_0C_0$, а то је немогућно. Тврђење је доказано.



Сл. 14



Сл. 15

Лема 3. *Симетрала угла A троугла ABC дели супротну страницу BC на одсечке BD и DC. Ако је угао B мањи од угла C, тада је $DC<BD$* (сл. 14).

Конструишимо на AB тачку C' тако да је $AC=AC'$. Угао $BC'D$ већи је од угла ABC. Отуда је $BD > DC' = DC$.

Лема 4. *Ако странице троугла ABC остају ограничене, угао α код темена A неограничено опада, а угао код темена C налази се у границама ε, $\pi-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, тада $BC/AC \to 0$.*

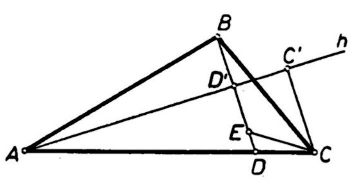
Поставимо на праву CB одсечак CD једнак AC тако да угао ACD не буде мањи од правог угла. По леми 2 примењеној на правоугли троугао ACE, угао DAC већи је од неког угла $\varepsilon' > 0$. Повуцимо из тачке A зраке AB', AB'', ... , који образују међу собом углове једнаке α. По леми 3 је $BC < B'B < B''B' < \dots$ Одатле је $CD/BC = AC/BC > \dfrac{\varepsilon'}{\alpha} - 1$. Како пак $\alpha \to 0$, следи да $BC/AC \to 0$.

Лема 5. *Ако се троугао ABC мења тако да његове странице AB и AC остају веће од $c > 0$, а страница BC неограничено опада, тада угао A троугла такође неограничено опада.*

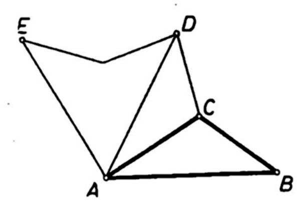
Допустимо да је за неки низ троуглова ABC угао A већи од $\alpha_0 > 0$. Конструишимо зрак h који са страницом AC (сл. 16) образује угао α_0, и тачку D на AC чије је одстојање од A једнако c. Спустимо из тачака C и D нормале на зрак h.

CC' није мање од DD', јер би у супротном случају угао E Сакеријевог четвороугла $D'ECC'$ био туп, као спољашњи угао троугла EDC с тупим углом D. Пошто је BC веће од CC', то је $BC > DD'$. Долазимо до противречности $(BC \to 0)$. Тврђење је доказано.

Лема 6. *Ако се троугао ABC мења тако да сваки његов угао остаје већи од ε, однос страница остаје у позитивним границама које зависе од ε.*



Сл. 16

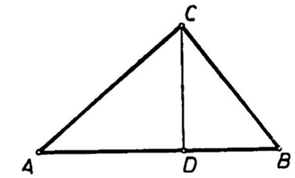


Сл. 17

Нека је AB већа а BC мања страница троугла. Пресликајмо троугао симетрично у односу на страницу AC (сл. 17). Добијену фигуру пресликајмо симетрично у односу на AD, и тако даље све док угао између крајњих од-

сечака код темена A не постане туп. Добијена фигура састоји се од неког броја $\left(\text{не већег од } \dfrac{\pi}{\varepsilon}\right)$ троуглова једнаких ABC.

Како је EB веће од AB (угао EAB је туп), а изломљена линија која спаја E и B има дужину не већу од $\dfrac{\pi}{\varepsilon} BC$, то је $AB/BC < \dfrac{\pi}{\varepsilon}$. Тврђење је доказано.



Сл. 18

Лема 7. *Ако се правоугли троугао ABC с правим углом C мења тако да његове странице остају ограничене, а оштар угао A неограничено опада, тада*

$$\frac{AB-AC}{BC} \to 0.$$

Повуцимо висину CD из правог угла C (сл. 18). Из леме 2 следи да угао B тежи $\dfrac{\pi}{2}$. Како пак збир углова троугла није већи од π, угао C троугла BCD тежи нули. По леми 4, $BD/BC \to 0$, а $BD > AB - AC$. Тврђење је доказано.

§ 2. Неке помоћне функције

Нека је (l, k) оштар угао с теменом O. Узмимо на зраку l произвољну тачку A и спустимо из ње нормалу AB (сл. 19). Посматраћемо три функције:

$$s(B) = OB, \quad h(A) = AB \text{ и } \alpha(A) = \angle OAB.$$

Лема 8. *Све три функције $s(B)$, $h(A)$ и $\alpha(A)$ су непрекидне. Функције $s(B)$ и $h(A)$ монотоне су и конвексне*.*

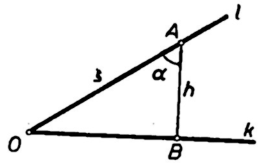
Нека је сада a произвољна права на којој је изабран позитиван смер (сл. 20). Нека је A произвољна тачка на правој, а тачка B ван праве. Посматраћемо још две функције: $\vartheta(A, B)$ — угао који одсечак AB образује с позитивним смером праве a — и $\rho(A)$ — растојање од B до A.

Лема 9. *Функција $\vartheta(A, B)$ непрекидна је по оба аргумента, строго монотона за утврђено B и мења се у гра-*

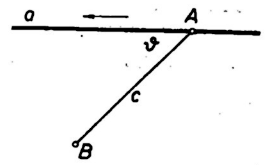
---

* Као аргумент узимамо тачку, подразумевајући њено растојање од тачке O.

ницама од 0 *до* π. *Функција* $\rho(A)$ *непрекидна је, конвексна, има непрекидан први извод и овај извод зависи само од* ϑ. *Ако је* A *подножје нормале спуштене на праву* a, *тада је* $\rho'(A)=0$. *Кад* $A\to\infty$, *тада* $\rho'(A)\to\pm 1$.



Сл. 19

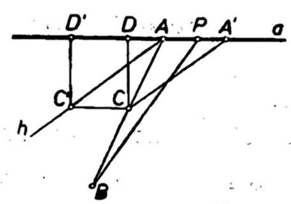


Сл. 20

Почнимо доказом леме 9. Непрекидност функције ρ следи из неједнакости за странице троугла (теорема 33):

$$|\rho(A)-\rho(A')|<AA'.$$

Доказаћемо непрекидност функције ϑ. Поставимо на праву a угао $\vartheta(A, B)-\varepsilon$ с теменом A, при чему је ε мали позитиван број (сл. 21). На краку h овог угла и одсечку AB узмимо тачке C' и C које су блиске тачки A, а једнако су удаљене од праве a, и конструишимо једнаке правоугле троугле $C'D'A$ и CDA'. Како је угао DAC већи од угла $DA'C$, то се A налази између D и A'. Сада се ма за коју тачку P одсечка AA' по теореми о спољашњем углу троугла добија



Сл. 21

$$\vartheta(A, B)-\varepsilon<\vartheta(P, B)<\vartheta(A, B).$$

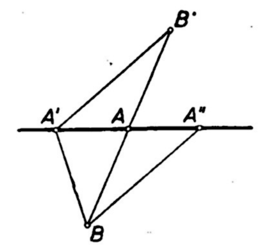
Одатле следи непрекидност ϑ за утврђени положај B десно од A. Непрекидност лево од A утврђује се на аналогни начин. Даље се помоћу леме 5 изводи закључак о непрекидности по оба аргумента A и B.

Монотоност $\vartheta(A, B)$ за утврђено B на очигледан начин следи из теореме о спољашњем углу троугла.

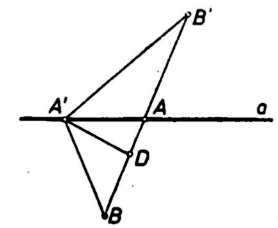
Доказаћемо сада конвексност функције $\rho(A)$. Узмимо на правој a тачке A' и A'' једнако удаљене од A (сл. 22).

На продужетак одсечка AB преко тачке A поставимо одсечак AB' једнак AB. Како је $B'A'=\rho(A'')$, $BA'=\rho(A')$, а $BB'=2\rho(A)$, то је по неједнакости за странице троугла

$$2\rho(A)<\rho(A')+\rho(A'').$$



Сл. 22



Сл. 23

Но ово, пошто је непрекидност функције ρ већ утврђена, јемчи за њену конвексност.

Доказаћемо диференцијабилност ρ. Како је функција ρ конвексна, то она има леви и десни извод. Поновимо конструкцију слике 22 (сл. 23). Граница односа

$$(A'B+A'B'-2AB)/A'A$$

кад $A'\to A$ једнака је разлици десног и левог извода функције ρ у тачки A. Показаћемо да је та граница једнака нули. Спустимо из A' нормалу на BB'. Тада се посматрани однос може представити овако:

$$\frac{BA'-BD}{AA'}+\frac{B'A'-B'D}{AA'}.$$

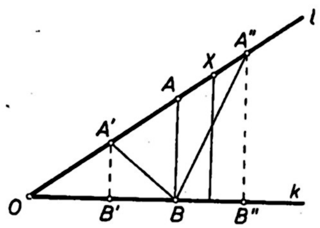
Овде, по леми 7, кад $A'\to A$, сваки сабирак тежи нули. На тај начин, десни и леви извод функције ρ једнаки су. Одатле следи непрекидна диференцијабилност функције ρ.

Да извод ρ' зависи само од ϑ — угла који одсечак AB гради с правом a, — а не зависи од растојања између A и B, то се утврђује исто онако као и једнакост десног и левог извода, једино с том разликом што се тачка B' на продужетку одсечка BA узима произвољно.

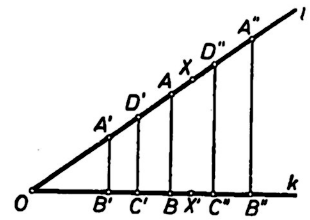
Ако је A подножје нормале спуштене из B на праву a, тада је $\rho'(A)=0$. Кад $A\to\infty$, тада $\rho'(A)\to\pm 1$. Оба ова тврђења лако се добијају из леме 7.

Доказ леме 8. Узмимо тачке A' и A'' толико близу A, да се углови $\vartheta(B, A')$ и $\vartheta(B, A'')$ разликују од

$\alpha(A)$ највише за ε (сл. 24). Ово је зајемчено непрекидношћу функције ϑ. По теореми о спољашњем углу троугла, ма за коју тачку X одсечка $A'A''$ биће $\vartheta(B, A') > \alpha(X) > \vartheta(B, A'')$, што и доказује непрекидност функције α. Пређимо сада на



Сл. 24



Сл. 25

функције s и h. Узмимо на зраку l две тачке A' и A'' на растојању ε од A и са разних страна од A. Спустимо из њих нормале $A'B'$ и $A''B''$. Тада ћемо ма за коју тачку X одсечка $B'B''$ имати $|s(B)-s(X)|<\varepsilon$. Дакле, функција s је непрекидна.

Доказаћемо непрекидност функције h. Узмимо на зраку l тачке A' и A'' на растојању $\frac{\varepsilon}{2}$ од тачке A и са разних страна од A (сл. 25). Спустимо из њих нормале $A'B'$ и $A''B''$. Узмимо сада на одсечцима BB' и BB'' тачке C' и C'' тако да се оне налазе на растојању од B мањем од $\frac{\varepsilon}{2}$ и у тим тачкама подигнимо нормале $C'D'$ и $C''D''$. Сада ће за сваку тачку X одсечка $D'D''$ бити

$$|h(A)-h(X)|<\varepsilon.$$

У самој ствари, из својства изломљене линије и одсечка који је затвара следи

$$XX' < X'B+BA+AX < BA+\varepsilon.$$

Аналогно је

$$BA < X'X+\varepsilon.$$

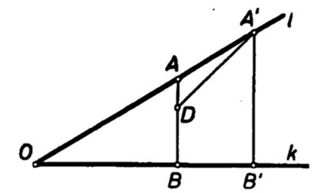
Одатле следи $|h(A) - h(X)| < \varepsilon$, то јест непрекидност функције h.

Очигледно је да је функција $s(B)$ монотоно растућа.

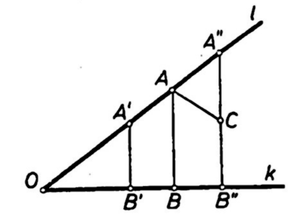
Доказаћемо монотоност функције h. Узмимо тачку A' иза тачке A на зраку h (сл. 26). Тврдимо да је $A'B' > AB$. У супротном случају постојала би на BA тачка D таква

да је $BD = B'A'$, а у Сакеријевом четвороуглу $BDA'B'$ угао D био би туп, што је немогућно.

Доказаћемо конвексност функције s. Узмимо на k тачке B' и B'' једнако удаљене од B и подигнимо нормале



Сл. 26



Сл. 27

$B'A'$ и $B''A''$ (сл. 27). Конструишимо тачку C тако да је $B'A' = B''C$. Како је угао ACA'' једнак углу $OA'B'$, а овај угао није мањи од $AA''C$, то је, на основу својства странице троугла која лежи наспрам већег угла, $AA'' \geqslant AC = AA'$. Одатле следи да је $s(A') + s(A'') \geqslant 2s(A)$, што и указује на конвексност функције s.

Доказаћемо конвексност функције h. Узмимо тачке A' и A'' једнако удаљене од A и спустимо из њих нормале $A'B'$ и $A''B''$ (сл. 28). Допунимо сада слику сликом симетричном у односу на тачку A. Тада ће CB бити заједничка нормала двеју правих. Расуђивањем сличним ономе при доказивању монотоности h лако се закључује да та нормала није дужа ма од које друге нормале спуштене из тачке једне праве на другу праву. Утолико пре изломљена линија $B'A'C''$ није мања од BC. Отуда је

$$h(A') + h(A'') \geqslant 2h(A),$$

што, због непрекидности h, даје конвексност. Лема је доказана.

§ 3. Питагорина теорема „у малом“

Сагласно леми 9, извод функције ρ јесте нека функција $\varphi(\vartheta)$ угла ϑ. Како је ρ конвексна функција, њен ће извод бити монотона функција, и пошто је $\vartheta(A, B)$ строго монотона функција за утврђено B, $\varphi(\vartheta)$ биће непрекидна монотона функција. Објаснићемо како та функција изгледа.

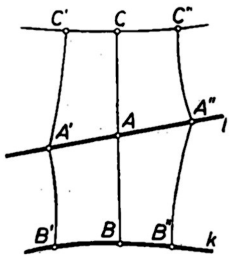
Лема 10. *Функција* $\varphi(\vartheta) = \pm\cos\vartheta$.

Доказ. Узмимо произвољан угао (l, k) с теменом O и произвољну тачку B која се не поклапа са O (сл. 29).

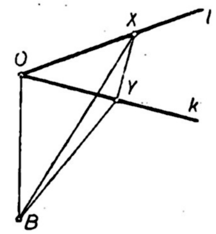
Имамо идентитет

$$(\rho(X)-\rho(O))+(\rho(Y)-\rho(X))+(\rho(O)-\rho(Y))\equiv 0.$$

Примењујући на сваку заграду теорему о средњој вредности, добијамо



Сл. 28



Сл. 29

$$OX\varphi(\vartheta_1^*)+XY\varphi(\vartheta_2^*)+YO\varphi(\vartheta_3^*)=0,$$

где су ϑ_1^*, ϑ_2^*, ϑ_3^* оне вредности ϑ које редом одговарају неким тачкама одсечака OX, XY и OY. Одатле је

$$\frac{OX}{OY}\varphi(\vartheta_1^*)+\frac{XY}{OX}\cdot\frac{OX}{OY}\varphi(\vartheta_2^*)+\varphi(\vartheta_3^*)=0.$$

Како су функције s и h конвексне (лема 8), оба односа OX/OY и XY/OX теже одређеној граници кад $X\to 0$. На основу леме 6 ове границе су различите од нуле.

Из непрекидности φ и непрекидности функције ϑ следи, кад $X\to 0$, да

$$\varphi(\vartheta_1^*)\to\varphi(\vartheta_1),\quad \varphi(\vartheta_2^*)\to\varphi(\vartheta_2)\quad \text{и}\quad \varphi(\vartheta_3^*)\to\varphi(\vartheta_3),$$

где су ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 углови које одсечак OB образује редом са l, k и нормалом на k. На тај начин, при граничном прелазу кад $X\to 0$ добија се следећа релација:

$$\lambda\varphi(\vartheta_1)+\mu\varphi(\vartheta_2)+\varphi(\vartheta_3)=0,$$

где је

$$\lambda=\lim\frac{OX}{OY},\quad \mu=\lim\frac{XY}{OX}\cdot\frac{OX}{OY}.$$

Ако одсечак OB окренемо за угао τ, добићемо релацију

$$\lambda\varphi(\vartheta_1+\tau)+\mu\varphi(\vartheta_2+\tau)+\varphi(\vartheta_3+\tau)=0.$$

Пошто је функција $\varphi(\vartheta)$ непрекидна и монотона, она се може развити у Фурјеов ред

$$\varphi(\vartheta)=\sum c_n e^{in\vartheta}.$$

Уводећи овај ред у горе добијену релацију, добићемо

$$c_n e^{in\tau}(\lambda e^{in\vartheta_1}+\mu e^{in\vartheta_2}+e^{in\vartheta_3})=0.$$

Због произвољно изабраног τ одатле ће бити:

$$\lambda e^{in\vartheta_1}+\mu e^{in\vartheta_2}+e^{in\vartheta_3}=0.$$

Уведимо ознаке $\alpha_1=\vartheta_1-\vartheta_3$, $\alpha_2=\vartheta_2-\vartheta_3$. Угао α_1 с тачношћу до знака представља угао суседан са углом (l, k), а $\alpha_2=\pm\frac{\pi}{2}$. Уводећи α_1 и α_2 уместо ϑ_1, односно ϑ_2, добићемо

$$\lambda e^{in\alpha_1}+\mu e^{in\alpha_2}+1=0.$$

Одвајајући у овој релацији имагинарни део и замењујући α_2 са $\pi/2$ имаћемо

$$\lambda\sin n\alpha_1+\mu\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

Сада тврдимо да су у реду за функцију $\varphi(\vartheta)$ сви коефицијенти c_k једнаки нули за $|k|>1$. Показаћемо то најпре за парне k. Како је $\sin\frac{k\pi}{2}=0$, то је $\lambda\sin k\alpha_1=0$. Али, $\lambda\neq 0$, а α_1 је произвољно, те долазимо до противречности.

Нека је сада $c_{k'}\neq 0$ и $c_{k''}\neq 0$, при чему је $|k'|\neq|k''|$ и оба су непарни. Тада је $\lambda\sin k'\alpha\pm\mu=0$ и $\lambda\sin k''\alpha\pm\mu=0$. Одатле је $\sin k'\alpha_1=\pm\sin k''\alpha_1$, што је за произвољно α_1 немогућно.

Дакле, у реду за функцију $\varphi(\vartheta)$ могу бити различити од нуле само c_0, c_{-k} и c_k, при чему је k непарно. Одатле следи да је

$$\varphi(\vartheta)=c+a\sin k\vartheta+a\sin k\vartheta.$$

Пошто је функција $\varphi(\vartheta)$ монотона у интервалу $(0,\pi)$, k не може бити веће од 1, па је, према томе, $k=1$.

Како је

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

а $|\varphi(\vartheta)|\to 1$ кад $\vartheta\to 0$, то је

$$\varphi(\vartheta)=\pm\cos\vartheta.$$

Лема је доказана.

Пређимо сада на релацију

$$OX\,\varphi(\vartheta_1^*)+XY\,\varphi(\vartheta_2^*)+YO\,\varphi(\vartheta_3^*)=0.$$

Узмимо тачку B довољно далеко од O, а троугао OXY нека је мали. Тада се на свакој страници троугла вредности ϑ мало мењају. Управо, може се сматрати да је на свакој страници троугла $|\varphi(\vartheta')-\varphi(\vartheta'')|<\varepsilon$ ако су странице троугла мање од неког δ. То следи из непрекидности функције ϑ по оба аргумента.

Нека сада тачка B лежи на продужетку катете XY. Тада је

$$\varphi(\vartheta_3^*)=-1,\quad |\varphi(\vartheta_2^*)|<\varepsilon,\quad |\varphi(\vartheta_1^*)-\cos\alpha|<\varepsilon,$$

где је α угао троугла наспрам катете OY. На тај начин долазимо до следеће релације:

$$OX\cos\alpha-OY+\varepsilon'\,OX=0,$$

где је ε' произвољно мало ако су странице троугла мале.

Аналогно, узимајући тачку B на продужетку друге катете добићемо релацију

$$OX\sin\alpha-XY+\varepsilon''\,OX=0.$$

Из тих двеју релација добија се следећа теорема:

Теорема 50. *У сваком правоуглом троуглу с правим углом* C

$$AC^2+BC^2=AB^2+\varepsilon\,AB^2,$$

при чему ε *тежи нули заједно с хипотенузом троугла.*

§ 4. Линијски елемент равни

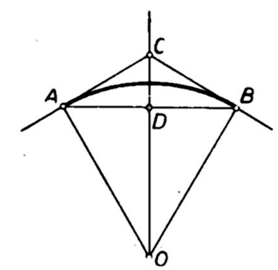
Уведимо у равни поларне координате u, v на следећи начин. Из произвољне тачке O — координатног почетка — повуцимо зрак h и свакој тачки A равни кореспондирајмо по два броја: u — растојање тачке A од тачке O, и v — угао који полуправа OA образује са h у задатом смислу. Наћи ћемо израз за растојање између двеју блиских тачака (u, v) и $(u+\Delta u,\ v+\Delta v)$. У вези с тим размотрићемо нека својства круга.

Дужином кружне линије (обимом круга) назива се граница дужинâ у њу уписаних изломљених линија, под условом да странице изломљених линија неограничено опадају. Ми нећемо понављати добро позната расуђивања која утврђују постојање дужине кружне линије у том смислу.

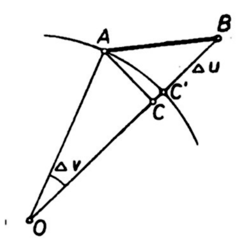
Лема 11. *Дужина кружног лука еквивалентна је тетиви која га затеже. Обим круга је конвексна функција пречника.*

Доказ. Узмимо две блиске тачке A и B на кругу (сл. 30). Кад тачка $B\to A$, тада $\angle COB\to 0$, и, према томе, $\angle ABO\to\frac{\pi}{2}$ и $\angle CBD\to 0$. По леми 7, $BD/CB\to 1$, а $AB<\overset{\frown}{AB}<AC+CB$. Одатле произлази еквивалентност кружног лука са тетивом која га затеже.

Доказаћемо конвексност кружног обима као функције полупречника. Узмимо три концентрична круга k_1, k_2 и k_λ, с полупречницима ρ_1, ρ_2 и $\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$ $(0<\lambda<1)$. Повуцимо из центра O кругова n зракова под једнаким угловима и опишимо у сваки круг правилни n тоугао с теменима на тим зрацима. Обележимо са a_1, a_2 и a_λ дужине страницâ тих полигонâ.



Сл. 30



Сл. 31

На основу конвексности функције h (лема 8) странице a_1, a_2 и a_λ полигонâ везане су неједнакошћу

$$a_\lambda\leqslant\lambda a_1+(1-\lambda)\,a_2.$$

Кад ову неједнакост помножимо са n и пређемо на границу кад $n\to\infty$, добићемо одговарајућу неједнакост између кружних обима:

$$l(\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2)\leqslant\lambda l(\rho_1)+(1-\lambda)\,l(\rho_2),$$

а ово указује на конвексност кружног обима $l(\rho)$ као функције полупречника.

Обележимо са $\sqrt{G,(u)}$ дужину кружног лука који одговара централном углу од 1 радијана. Тада ће углу Δv одговарати лук $\Delta v\sqrt{G(u)}$, а обим целог круга биће

$$2\pi\sqrt{G(u)}.$$

Да бисмо нашли растојање између тачака $A(u, v)$ и $B(u+\Delta u, v+\Delta v)$, спојмо ове тачке с координатним почетком O и спустимо из тачке A нормалу AC на OB (сл. 31). По теореми 50 је $AB^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2\varepsilon$, или, што је исто, $AB^2 = BC^2 + AC^2 + \varepsilon_1 BC^2 + \varepsilon_2 AC^2$. Узимајући у обзир да је лук AC' еквивалентан одсечку AC, а одсечак CC' да је мали у поређењу са AC, можемо написати

$$AB^2 = \widehat{AC'}^2 + C'B^2 + \varepsilon'\,\widehat{AC'}^2 + \varepsilon''\,C'B^2.$$

Одатле се за растојање Δs између двеју блиских тачака (u, v) и $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ добија следећа формула:

$$\Delta s^2 = \Delta u^2 + G\Delta v^2 + \varepsilon(\Delta u^2 + \Delta v^2),$$

при чему $\varepsilon \to 0$ кад Δu и Δv теже нули.

Запазимо да, како то следи из извођења, за мало Δu и Δv у коначном делу равни ε је сразмерно мало.

Квадратну форму

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

зваћемо линијским елементом равни.

Ако дужину криве дефинишемо као границу дужинâ изломљених линија уписаних у ту криву, тада ћемо за дужину криве $u = u(t)$, $v = v(t)$ добити формулу

$$s = \int \sqrt{u'^2 + Gv'^2}\, dt,$$

познату из диференцијалне геометрије.

Напишимо диференцијалну једначину праве. Знамо да је извод од u по луку праве једнак косинусу угла који зрак што полази из координатног почетка образује у пресечној тачки са правом:

$$\cos\vartheta = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G dv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Gv'^2}}.$$

Одатле следи да је у координатама u, v права линија глатка (v' је непрекидна функција).

Пошто су праве најкраће линије, оне су екстремале функционале

$$l = \int \sqrt{1 + Gv'^2}\, du.$$

Интегранд не зависи од v, те су зато екстремале дате једначином

$$\frac{Gv'}{\sqrt{1 + Gv'^2}} = \text{const}.$$

То и јесте диференцијална једначина коју задовољавају праве. Помоћу формуле за $\cos\vartheta$ можемо је довести на облик

$$\sin\vartheta\sqrt{G} = \text{const}.$$

Досад смо о функцији $\sqrt{G}$ знали само то да је она позитивна, конвексна, па дакле и непрекидна. Сада ћемо је и даље испитивати.

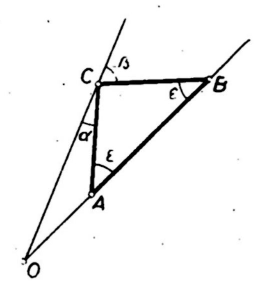
Узмимо на зраку $v = \text{const}.$ две тачке

$$A(u, v) \text{ и } B(u+\Delta u, v+\Delta v)$$

и конструишимо једнакокраки троугао ABC са угловима ε на основици (сл. 32). Нека је ω одговарајући спољашњи угао троугла код темена C. Размотрићемо границу ω/ε кад $\varepsilon \to 0$. Једначине правих CB и CA су респективно

$$\sin\vartheta\sqrt{G} = \sqrt{G(A)}\sin(-\varepsilon),$$

$$\sin\vartheta\sqrt{G} = \sqrt{G(B)}\sin\varepsilon.$$



Сл. 32

Из ових једначина одмах се добија да је

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G(A)}}{\sqrt{G(\overline{C})}}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G(B)}}{\sqrt{G(\overline{C})}},$$

где је $\overline{C}$ средина између A и B. Одатле је

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G(A)} + \sqrt{G(B)}}{\sqrt{G(\overline{C})}} = \lambda.$$

Обратимо пажњу на то да λ зависи само од растојања између A и B, то јест само од $2h$.

Ставимо, краткоће ради, $\sqrt{G(u)} = g(u)$. Тада $g(u)$ задовољава једначину с коначним разликама

$$g(u+2h) - \lambda g(u+h) + g(u) = 0. \qquad (*)$$

Како је функција g конвексна, то је

$$g(u+2h)+g(u) \geqslant 2g(u+h)$$

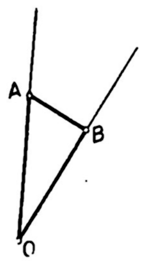
и, према томе, $\lambda \geqslant 2$.

Из теорије коначних разлика познато је да непрекидна функција g која задовољава једначину (*) има облик

$$g = c_1 u + c_2 \qquad \text{ако је } \lambda = 2,$$

$$g = c_1 e^{\sigma u} + c_2 e^{-\sigma u} \qquad \text{ако је } \lambda > 2.$$

Пошто $g(u) \to 0$ кад $u \to 0$, то је у првом случају $g = c_1 u$, а у другом $g = c(e^{\sigma u} - e^{-\sigma u})$. Објаснићемо зашто су у тим формулама једнаке константе c.



Сл. 33

Узмимо мали правоугли троугао AOB с малим оштрим углом Δv код темена O (сл. 33). Имамо:

$$AB \sim g\Delta v, \quad OA = u.$$

Али, $AB \sim OA \cdot \sin\Delta v$ (b. претходни параграф). Одатле је

$$g\Delta v = u \sin \Delta v.$$

Према томе, за мале u је $g \simeq u$. Стога је у првом случају $c = 1$, а у другом $c = \dfrac{1}{2\sigma}$.

На тај начин долазимо до следеће теореме:

Теорема 51. *Линијски елемент равни има један од следећих облика: или*

$$ds^2 = du^2 + u^2\,dv^2 \quad \text{\textit{или}} \quad ds^2 = du^2 + \left(\frac{\operatorname{sh}\sigma u}{\sigma}\right)^2 dv^2.$$

Запазимо да се први облик линијског елемента добија из другог у граничном преласку кад $\sigma \to 0$.

§ 5. Потпуност система аксиома геометрије Лобачевског. Изоморфност свих њених реализација

Сада кад је нађен коефицијент G линијског елемента равни, може се добити једначина правих у коначном облику. Диференцијална једначина правих, као што је показано у претходном параграфу, има облик

$$\frac{Gv'}{\sqrt{1+Gv'^2}} = \text{const}.$$

Дуж правих које не пролазе кроз координатни почетак можемо u посматрати као функцију од v. За такве праве диференцијалну једначину можемо написати у облику

$$\frac{u'^2}{G^2} + \frac{1}{G} = \text{const}.$$

Сада ћемо увести нову непознату функцију λ стављајући да је за

$$G = u^2 \quad \lambda = \frac{1}{u}, \quad \text{а за} \quad G = \frac{\operatorname{sh}^2 \sigma u}{\sigma^2} \quad \lambda = \operatorname{cth} \sigma u.$$

Тада ћемо добити следећу једначину за λ:

$$\lambda'^2 + \lambda^2 = \text{const}.$$

Диференцирајући ову једначину добићемо $\lambda'(\lambda'' + \lambda) = 0$. Пошто u', па према томе и λ', постаје нула само у једној тачки, то је $\lambda'' + \lambda = 0$. Опште решење ове једначине је, као што је познато, $\lambda = c_1 \cos v + c_2 \sin v$. На тај начин добијамо, у случају $G = u^2$, једначину свих правих које не пролазе кроз координатни почетак:

$$1 = c_1 u \cos v + c_2 u \sin v.$$

Праве које пролазе кроз координатни почетак имају једначину $v = \text{const}$. Одатле следи да све праве у равни у случају $G = u^2$ имају једначину $c_1 u \cos v + c_2 u \sin v + c_3 = 0$.

Дословце исто тако једначина се интегрише и у случају $G = \dfrac{1}{\sigma^2} \operatorname{sh}^2 \sigma u$, те се општа једначина правих добија у облику

$$c_1 \operatorname{th} \sigma u \cos v + c_2 \operatorname{th} \sigma u \sin v + c_2 = 0.$$

Сада ћемо уместо u, v увести координате x и y стављајући у првом случају

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v,$$

а у другом

$$x = \operatorname{th} \sigma u \cos v, \qquad y = \operatorname{th} \sigma u \sin v.$$

У првом случају x и y могу узимати ма које вредности, а у другом случају је, због $|\operatorname{th} \sigma u| < 1$,

$$x^2 + y^2 = \operatorname{th}^2 \sigma u < 1.$$

У оба случаја једначина правих гласи

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0.$$

Очигледно, у првом случају испуњена је Еуклидова аксиома паралелности, а у другом аксиома паралелности Лобачевског.

Како се изражава у координатама услов да тачке на правој следе једна за другом у овом или оном смеру?

У случају поларних координата u, v, за праву која не пролази кроз почетак O поредак тачака у овом или оном смеру изражава се, очигледно, у монотоности v, а за праву која пролази кроз координантни почетак — у монотоности u. Ако се узме у обзир веза између u, v и x, y, може се показати да се у координатама x, y поредак тачака у овом или оном смеру изражава монотоношћу x и y, као и у Декартовој реализацији.

Које трансформације координата x, y дају кретања у равни Лобачевског?

Ако се тачки равни Лобачевског с координатама x, y кореспондира тачка еуклидске равни с тим истим Декартовим координатама, тада се ради о таквим трансформацијама круга $x^2+y^2<1$ у њега самог при којима праве прелазе у праве. Познато је да су све такве трансформације пројективне. Али, да ли свака таква трансформација представља кретање?

Нека је S ма каква пројективна трансформација која круг $x^2+y^2<1$ преводи у њега самог. Она тачку $(0, 0)$ преводи у неку тачку A, полуправу $x>0$, $y=0$ у полуправу a и полураван $y>0$ у неку полураван α. По аксиоми III_7, постоји кретање, то јест пројективна трансформација, која има наведена својства S. Но, како је показано приликом конструисања реализације K у § 5, гл. III, S је једна једина таква трансформација. Одатле следи да је S кретање.

Пошто приликом увођења координата x, y нисмо конкретизовали реализацију геометрије Лобачевског, горње излагање дозвољава нам да закључимо да је свака реализација геометрије Лобачевског изоморфна њеној K реализацији. Ову реализацију показао је Ф. Клајн. Како су две реализације изоморфне трећој изоморфне и једна другој, то смо на тај начин доказали следећу теорему:

Теорема 52. *Све реализације система аксиома равне геометрије Лобачевског изоморфне су. Према томе, систем аксиома геометрије Лобачевског је потпун.*

§ 6. Најважније интерпретације геометрије Лобачевског

Често се реализација система аксиома геометрије Лобачевског назива и интерпретацијом геометрије Лобачевског. Једну од интерпретација упознали смо у гл. III, § 5. То је Клајнова интерпретација. Сада ћемо размотрити још две интерпретације; једну од њих дао је Белтрами, а другу Поенкаре.

Као што је познато, на површи F стално негативне Гаусове кривине K може се увести таква координатна мрежа u, v да њен линијски елемент има облик

$$ds^2=du^2+\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-K}\,u}{\sqrt{-K}}\right)^2 dv^2.$$

Исти такав линијски елемент има и раван Лобачевског за $\sigma^2=-K$. Кореспондирајмо тачки равни Лобачевског с координатама u, v тачку површи F с тим истим координатама. Пошто су праве најкраће линије, то ће им на површи F, услед изометрије установљене кореспонденције, одговарати геодезијске линије. Пошто кретања не мењају дужину одсечака, на површи F им одговарају изометрична пресликавања, при чему свако изометрично пресликавање одговара неком кретању.

Тако добијамо интерпретацију равне геометрије Лобачевског. Ову интерпретацију указао је Белтрами. Њен недостатак је то што у еуклидском простору не постоји потпуна површ негативне кривине која не би имала сингуларитета на коначном растојању. На тај начин, у тој се интерпретацији може представити геометрија не целе равни Лобачевског, већ само једног њеног дела.

Преимућство те интерпретације у односу на остале јесте то што је мерење одсечака и углова у њој ближе нашим просторним представама неголи у другим интерпретацијама. Овде растојање између тачака јесте дужина одсечка геодезијске линије која спаја те тачке, а угао између правих јесте угао између тих геодезијских линија у смислу диференцијалне геометрије. Прво је очигледно, а друго следи из јединости угла која је утврђена теоремом 39.

Поенкареова интерпретација добија се из Клајнове интерпретације на следећи начин. Круг $x^2+y^2<1$ пројектује се на полусферу $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$, а полусфера се из пола $(1, 0, 0)$ пројектује на раван yz (стереографска пројекција). Првим пројектовањем ће тетиве круга прећи у полукругове на сфери, нормалне на екватор $z=0$. Приликом другог пројектовања ови ће полукругови прећи у полукругове или полуправе у полуравни yz, $z>0$, нормалне на осу y (при стереографском пројектовању углови остају неизмењени, а кругови прелазе у кругове или праве).

На тај начин, у Поенкареовој интерпретацији праве Лобачевског представљају се полукруговима и полуправима полуравни yz, $z>0$, нормалним на осу y. Кретањима у равни Лобачевског одговарају трансформације полуравни $z>0$ у саму себе, које полукругове и полуправе нормалне на осу y преводе у полукругове и полуправе. Објаснимо шта представљају те трансформације.

Очигледно, инверзије у односу на центре на оси y, слична пресликавања у односу на тачке на тој оси, пресликавања симетрична у односу на праве нормалне на осу y и клизања дуж осе y јесу трансформације које полуправе и полукругове нормалне на осу y преводе опет у полуправе или полукругове нормалне на осу y. Свака таква трансформација и свака њихова комбинација одговарају неком кретању у равни Лобачевског, јер томе кретању одговара колинеација у Клајновој интерпретацији. Али, да ли се свако кретање добија на један од поменутих начина? Да би се на то питање одговорило потврдно, треба показати да су те трансформације довољне да се задовољи захтев постојања кретања који је садржан у аксиоми III_7.

Нека су A, B две тачке, a и b полуправе, а α и β полуравни о којима се говори у аксиоми III_7. Треба показати кретање које преводи A у B, a у b и α у β. Показаћемо да су поменуте трансформације довољне да се то оствари у Поенкареовој интерпретацији. Ако је a део полукруга а не полуправа, извршимо инверзију у односу на један од крајева полукруга и на тај начин преведимо a у полуправу нормалну на осу y*. То исто учинимо и са b. Сада клизањем и осном симетријом доведимо до поклапања полуравни α и β. И најзад, сличношћу у односу на почетак полуправе на којој леже a и b доведимо до поклапања A и B. Дакле, горе наведене трансформације и њихове комбинације исцрпљују сва кретања равни Лобачевског у Поенкареовој интерпретацији.

Запазимо да све побројане трансформације: инверзије, клизања, осне симетрије и сличности јесу конформне трансформације. Одатле на основу тврђења о јединости мере за угао (теорема 39) следи да се у Поенкареовој интерпретацији мера угла у смислу геометрије Лобачевског поклапа с мером угла у еуклидској геометрији.

Показаћемо да се у Поенкареовој интерпретацији кругови Лобачевског представљају Еуклидовим круговима.

---

* При инверзији у односу на једну своју тачку тај круг прелази у праву.

Заиста, круг се одликује тиме што он сече под правим углом све праве које пролазе кроз његов центар. Пошто прамену правих Лобачевског одговара у Поенкареовој интерпретацији прамен кругова, а ортогоналне трајекторије прамена кругова су, као што се зна, кругови, закључујемо да круговима Лобачевског одговарају на Поенкареовој полуравни Еуклидови кругови.

Из Поенкареове интерпретације на полуравни може се добити нова интерпретација ако се изврши инверзија ове полуравни у односу на неку тачку допунске полуравни. При том ће полураван прећи у неки круг $\varkappa$. Правим Лобачевског у тој интерпретацији одговарају кругови и праве нормалне на круг $\varkappa$. Кретања се остварују инверзијама у односу на кругове нормалне на круг $\varkappa$, осно-симетричним пресликавањима у односу на пречнике тог круга и обртањима око круга. У тој интерпретацији мера угла у смислу геометрије Лобачевског такође се поклапа са еуклидском мером угла.

Описана интерпретација могла би се добити и непосредно из Клајнове интерпретације тако што би се узимала стереографска пројекција не из пола (1, 0, 0), већ из пола (0, 0, −1) на раван xy. Одатле следи да се, у Клајновој интерпретацији, у центру круга мера угла у еуклидској геометрији и у геометрији Лобачевског поклапају.

Сада још неколико речи о мерењу одсечака и углова у Клајновој интерпретацији. Нека су A и B две тачке равни Лобачевског у Клајновој интерпретацији, а C и D крајеви тетиве на којој лежи одсечак AB. Лако је видети да функција одсечка, дефинисана изразом

$$\mu(AB)=k\,|\ln(ABCD)|,$$

где је са $(ABCD)$ обележена дворазмера тачака, има она својства мере одсечака која су побројана у теореми 38. У ствари, функција μ је позитивна. Она је инваријантна у односу на кретање јер је дворазмера инваријантна у односу на пројективне трансформације. И, напослетку, она је адитивна, јер, ако је тачка X између A и B, тада је $(ABCD)=(AXCD)\,(XBCD)$. На основу тврђења о јединости из поменуте теореме добија се да је $\mu(AB)$ мера дужине.

Аналогно функција дефинисана за углове изразом

$$\vartheta(h,k)=k\,|\ln(hk\alpha\beta)|,$$

где су h, k краци угла, а α и β тангенте круга $x^2+y^2=1$

повучене из темена угла, јесте мера за углове. Да би правом углу одговарала вредност $\frac{\pi}{2}$, треба узети $k=\frac{1}{2}$.

На крају напоменимо да постоје Клајнова и Поенкареова интерпретација за просторну геометрију Лобачевског. У Клајновој интерпретацији тачке Лобачевског представљају се тачкама лопте $x^2+y^2+z^2<1$, праве одсечцима еуклидских правих унутар лопте, а равни комадима еуклидских равни унутар лопте. Поредак тачака у смислу геометрије Лобачевског поклапа се с њиховим поретком у еуклидском смислу. Кретања су пројективне трансформације које границу лопте — сферу $x^2+y^2+z^2=1$ — задржавају као целину неизмењену.

§ 7. Неке чињенице геометрије Лобачевског

Сада, кад је доказана изоморфност свих реализација геометрије Лобачевског, истинитост ма којег тврђења те геометрије довољно је утврдити у некој од њених интерпретација. Ми ћемо овде размотрити неколико примера.

Скуп правих у равни које пролазе кроз тачку A и не секу праву a испуњава два унакрсна угла. Краци ових углова такође припадају овим правим.

Тврђење је очигледно — довољно је сетити се Клајнове интерпретације. Краци ових унакрсних углова зову се *паралеле Лобачевског*. Једна од њих условно се назива десном, а друга левом.

Паралелност правих, по Лобачевском, има следећа својства која се лако утврђују помоћу Клајнове интерпретације.

Ако је права a паралелна правој b, тада је права b паралелна a; ако је права b паралелна a и права c паралелна a у истом смеру, тада је b паралелна c.

Да би се добиле даље последице, даћемо пројективну карактеристику услова нормалности правих у Клајновој интерпретацији. Нека се у центру Клајновог круга секу праве a и b под правим углом у Еуклидовом смислу. Тада се оне секу под правим углом и у смислу Лобачевског. Заиста, осно симетрично пресликавање круга у односу на један од кракова угла размењује суседне углове. Праве које се секу у центру круга под правим углом поларно су коњуговане у односу на периферију круга. Како су кретања у смислу Лобачевског пројективне трансформације које не мењају периферију Клајновог круга, то се тим својством

поларне коњугованости одликују ма које узајамно нормалне праве.

Одатле следи: да би се из дате тачке A повукла нормала на дату праву a у Клајновој интерпретацији, треба A спојити с полом праве a.

Ако се две праве a и b секу, тада оне немају заједничку нормалу.

Заиста, нормала мора пролазити кроз пол праве a и пол праве b, а тада је она полара пресечне тачке правих a и b. Како је ова тачка у кругу, то је њена полара не сече.

Ако су две праве a и b непаралелне и не секу се (такве праве зову се мимоилазне), оне имају једну једину заједничку нормалу.

У Клајновој интерпретацији ова нормала је полара тачке пресека правих a и b.

Паралелне праве a и b немају ниједну заједничку нормалу.

У Клајновој интерпретацији права која спаја полове правих a и b додирује Клајнов круг.

Нека су a и b ма које две праве у равни Лобачевског. Тада не мора свака права нормална на a сећи b.

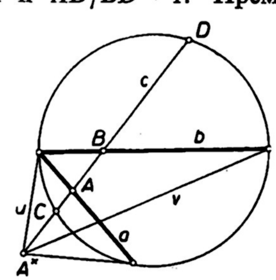
Заиста у Клајновој интерпретацији свака права која пролази кроз пол праве a и сече круг не мора сећи праву b.

Ако су a и b две праве Лобачевског, оне се неограничено приближују једна другој у једном смеру и неограничено разилазе у другом смеру.

Нормале праве a пролазе кроз пол A^* те праве (сл. 34). Очигледно, кад се права c приближава правој u, тада дворазмера $(ABCD)\to 1$ јер $AC/BC\to 1$ и $AD/BD\to 1$. Према томе, $\mu(AB)\to 0$. Када се пак права c приближава правој v, тада $BD/BC\to 0$, а AD/AC тежи граници различитој од нуле. Одатле

$$\mu(AB)\to\infty .$$

Аналогно се доказује да се *мимоилазне праве и праве које се секу неограничено удаљују једна од друге у оба смера.*



Сл. 34

У Поенкареовој интерпретацији прамен паралела Лобачевског представља се праменом полукругова који се додирују у крајњим тачкама или праменом паралелних полуправих.

Крива у равни Лобачевског зове се *орицикл* ако сече под правим углом прамен паралелних правих. Очигледно, *у Поенкареовој полуравни* yz, $z > 0$ *орицикл представља или круг који додирује крај полуравни — праву* $z = 0$ *— или праву* $z = \text{const}$.

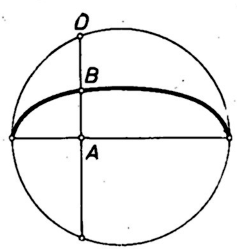
Права и орицикл или немају заједничких тачака, или се додирују, или се секу у двема тачкама под једнаким угловима, или се секу у једној тачки под правим углом.

У Поенкареовој интерпретацији ова су тврђења довољно очигледна.

Сви орицикли су конгруентни.

Заиста, помоћу сличности, клизања и инверзије у Поенкареовој интерпретацији ма која два орицикла лако се доводе до узајамног поклапања. Штавише, при том се чак може поклопити дата тачка једног орицикла с датом тачком другога, а дати правац на једном орициклу с датим правцем на другом.

Еквидистантом праве a називамо геометријско место тачака равни које су на једнаком одстојању од a. *Ако је* a *пречник круга у Клајновој интерпретацији, еквидистанта је у ствари половина елипсе која се добија стезањем полукруга у односу на његов пречник.* У самој ствари, нормале праве a биће нормале у Еуклидовом смислу (сл. 35). Како је $AC/AD = 1$, то сталност функције $\mu(AB)$ указује на сталност односа BD/BC. Одатле следи и сталност AB/AD. Тиме је тврђење доказано. Ма за коју другу праву a еквидистанта се добија одговарајућом колинеацијом. *У сваком случају то је лук елипсе који додирује круг у својим крајевима.*



Сл. 35

Размотрићемо неколико ставова геометрије Лобачевског у простору. При том ћемо претпоставити да је изоморфност свих реализација просторног система аксиома доказана.

Орисфером се назива површ која под правим углом сече сваку од правих паралелних у смислу Лобачевског.

У просторној Поенкареовој интерпретацији сноп паралела Лобачевског састоји се или од снопа полукругова који се додирују у крајњим тачкама или од свих правих нормалних на граничну полураван. Одатле следи да је *орисфера у ствари или сфера која додирује граничну раван или раван паралелна граничној равни.*

Очигледно, *свака раван која пролази кроз неку праву снопа који одређује орисферу — сече орисферу дуж орицикла.*

Орисфера се може кретати по самој себи исто онако произвољно како се и раван креће по самој себи. При том ће орицикли прелазити у орицикле.

Заиста, узмимо сферу у Поенкареовој интерпретацији у облику равни паралелне граничној равни. У том случају сноп паралела Лобачевског састоји се од правих нормалних на граничну раван. Свако еуклидско кретање при којем гранична раван прелази у саму себе у исто време је кретање у смислу геометрије Лобачевског. Оно преводи нашу орисферу у њу саму и орицикле у орицикле.

На орисфери се реализује равна Еуклидова геометрија ако се под правим разумеју орицикли, поредак тачака дефинише поретком правих у прамену паралела који одређује орицикл, а кретањем називају таква кретања у простору Лобачевског која орисферу преводе у њу саму.

У Поенкареовој интерпретацији ово се тврђење лако проверава помоћу горе утврђених својстава орицикла и орисфере. Наиме, пројектовање орисфере $z = \text{const}$ на раван xy правим паралелним оси z и горе указана кореспонденција кретања јесте изоморфизам.

Ова интерпретација Еуклидове геометрије у простору Лобачевског аналогна је Белтрамијевој интерпретацији, у којој се геометрија Лобачевског реализује на површи еуклидског простора.

Глава V

ОСНОВЕ ПРОЈЕКТИВНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

§ 1. Аксиоме везе. Дезаргова теорема

Појава пројективне геометрије пада у прву половину XIX столећа и везана је за име француског геометричара Понслеа (1788—1867), који је одредио објект проучавања у пројективној геометрији — она својства фигура и с њима повезаних величина која су инваријантна у односу ма на које пројектовање.

Шал (1793—1880) и Штајнер (1769—1863) обогатили су пројективну геометрију многобројним чињеницама. Захваљујући радовима Штаута (1798—1867) пројективна геометрија се ослободила од страног јој појма метрике и претворила се у дисциплину која проучава само својства међусобног положаја геометријских фигура.

Пројективна геометрија изграђена је на систему аксиома који се састоји од три групе; то су: аксиоме везе, аксиоме поретка и аксиома непрекидности.

У групи аксиома везе говори се о оним својствима међусобног положаја тачака која се изражавају речју „припадати". При том остају на снази саглашавања о еквивалентности израза̂ које смо навели приликом увођења аксиома везе еуклидске геометрије.

Аксиома I_1. *Ма какве биле тачке A и B, постоји права која пролази кроз тачке A и B.*

Аксиома I_2. *Ма какве биле две тачке A и B, постоји највише једна права која пролази кроз тачке A и B.*

Аксиома I_3. *На свакој правој постоје најмање три тачке. Постоје најмање три тачке које не леже на једној правој.*

Аксиома I_4. *Кроз сваке три тачке A, B, C које не леже на једној правој пролази нека раван α. У свакој равни постоји најмање једна тачка.*

Аксиома I_5. *Кроз сваке три тачке које леже на једној правој пролази највише по једна раван.*

Аксиома I_6. *Ако две тачке A и B праве a леже у равни α, тада свака тачка те праве лежи у равни α.*

Аксиома I_7. *Ако две равни имају заједничку тачку, тада оне имају најмање још једну заједничку тачку.*

Аксиома I_8. *Постоје најмање четири тачке које не леже у истој равни.*

Аксиома I_9. *Сваке две праве које леже у једној равни имају заједничку тачку.*

Видимо да систем аксиома везе пројективне геометрије садржи у себи систем аксиома везе еуклидске геометрије и разликује се од овога само аксиомом I_3, у којој се захтева да на правој постоје најмање три тачке, и аксиомом I_9, у којој се тврди да се ма које две праве које леже у једној равни секу.

Одатле закључујемо да су све последице аксиома везе еуклидске геометрије тачне и у пројективној геометрији. Аксиоме I_3 и I_9 омогућују да се прошири скуп тих последица; посебно се лако доказује да:

1) *права и раван увек имају заједничку тачку,*
2) *две равни имају заједничку праву,*
3) *три равни имају заједничку тачку.*

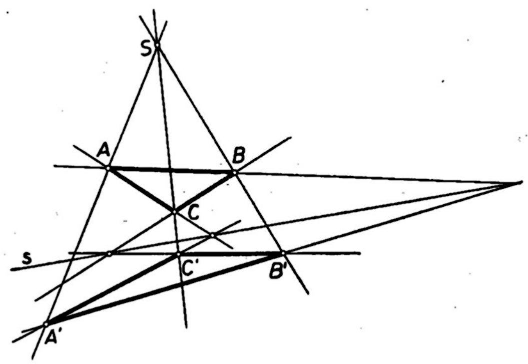
Најважнија последица аксиома везе пројективне геометрије јесте Дезаргова теорема о перспективном положају тротеменика̂.

Тротемеником се назива фигура састављена од три тачке које не леже на једној правој (то су темена тротеменика) и три праве које спајају по две од тих тачака (то су странице тротеменика). Каже се да тротеменици ABC и $A'B'C'$ имају центар перспективе S ако темена A и A', B и B', C и C' леже на правим што пролазе кроз S. Тротеменици ABC и $A'B'C'$ имају осу перспективе s ако се странице AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ секу у тачкама што леже на s.

Теорема 53. *Ако тротеменици ABC и $A'B'C'$ имају осу перспективе, они имају и центар перспективе. Обратно, ако тротеменици имају центар перспективе, они имају и осу перспективе* (сл. 36).

Доказ: Прво, приметимо да, ако се код два тротеменика поклапају два одговарајућа темена или две одговарајуће странице, тврђење теореме је прилично очигледно. Зато се у доказу можемо ограничити на случај кад су одговарајућа темена и одговарајуће странице тротеменика различити.

Претпоставимо у почетку да су равни σ и σ' у којима леже тротеменици различите. Тада се ове равни секу дуж праве s, при чему тачке праве s исцрпљују све заједничке тачке равни σ и σ'.



Сл. 36

Нека тротеменици имају осу перспективе. Како се странице AB и $A'B'$ секу, али су различите, то постоји једна једина раван γ која кроз те странице пролази. Аналогно се одређују равни α и β, које пролазе кроз странице BC и $B'C'$, односно AC и $A'C'$. Пошто су равни σ и σ' различите, то су све равни α, β и γ различите при чему се α и β секу дуж CC', β и γ дуж AA', а γ и α дуж BB'. Одатле следи да је тачка S, заједничка свим трима равнима α, β и γ, центар перспективе тротеменика.

Нека тротеменици имају центар перспективе. Пошто се праве AA' и BB', секу, тачке A, A', B, B' леже у једној равни. Одатле следи да се праве AB и $A'B'$ секу, а како су равни σ и σ' тротеменика различите, пресечна тачка правих AB и $A'B'$ припада правој s дуж које се секу равни σ и σ'. Аналогно се показује да се странице AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ такође секу на s. И, према томе, тротеменици имају осу перспективе.

Нека сада оба тротеменика леже у једној равни σ и нека је s оса перспективе тих тротеменика. Поставимо кроз s раван σ' различиту од σ. Таква раван постоји. У самој ствари, по аксиоми I_8 постоји тачка P која не лежи у равни σ, а по аксиоми I_2 постоје две тачке Q, R на s. Раван σ' пролази кроз P, Q и R. Она је, на основу аксиоме I_5, различита од σ.

Узмимо сада тачку O ван равни σ и σ'. Таква тачка постоји. Заиста, постоје четири тачке K, L, M, N које не леже у једној равни. Најмање једна од ових тачака не лежи у равни σ. Нека је то тачка N. Пројектујмо K, L и M из центра N на раван σ. Тачке $\overline{K}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$, које се при том добијају, не леже на једној правој. Према томе, у равни σ постоји тачка која не лежи на правој s. Исто се тако доказује постојање такве тачке у равни σ'. Права која спаја те тачке има најмање још једну тачку O (аксиома I_3). Ова тачка лежи ван равни σ и σ'.

Пројектујмо тротеменик $A'B'C'$ на раван σ' из тачке O. При том ћемо добити тротеменик $A''B''C''$. Права s је за тротеменике ABC и $A''B''C''$ оса перспективе. Дакле, на основу доказаног оне имају центар перспективе S. Нека је $\overline{S}$ пројекција тачке S из центра O на раван σ. Ми тврдимо да је $\overline{S}$ центар перспективе тротеменика ABC и $A'B'C'$

Заиста, праве AA'', BB'', CC'' секу се у S. То значи да се њихове пројекције AA', BB', CC' на раван σ секу у тачки $\overline{S}$.

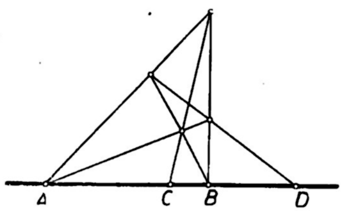
Нека сада тротеменици леже у једној равни σ и имају центар перспективе S. Узмимо ван σ тачку O. На правој OA наћи ће се тачка $\overline{A}$ различита од A и O. Спојмо је са S правом g. Пројектујмо на g из O тачку A' и обележимо њену пројекцију са $\overline{A}'$. За тротеменике $\overline{A}BC$ и $\overline{A}'BC$ тачка S је центар перспективе. На основу доказаног, ови тротеменици имају осу перспективе s. Пројекција ове осе s на раван σ јесте оса перспективе тротеменика ABC и $A'B'C'$. Теорема је доказана.

§ 2. Хармонијске четворке тачака

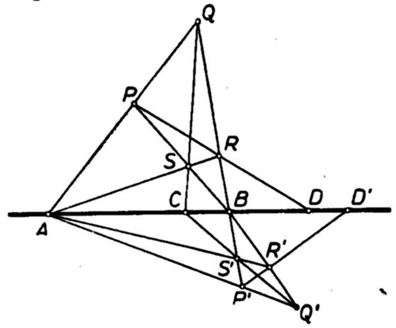
Четворотемеником називамо фигуру састављену: од четири тачке у равни такве да никоје три од њих не леже на једној правој, и од шест правих које спајају по две од тих тачака. Оне странице четворотеменика које немају заједничких темена зову се *супротне странице*. Тачке пресека супротних страница зову се *дијагоналне тачке*.

Ми ћемо говорити да је пар тачака C, D на правој хармонијски конјугован с паром тачака A, B ако постоји четворотеменик за који су тачке A и B дијагоналне, а тачке C и D добијају се у пресеку праве која спаја A и B са страницама које се сустичу у трећој дијагоналној тачки (сл. 37).

Из чињенице да никоја три темена четворотеменика не леже на једној правој следи да су *у хармонијској групи тачака A, B, C, D све тачке различите.*



Сл. 37



Сл. 38

Теорема 54. *Нека су на правој g дате три тачке A, B, C. Тада постоји највише једна тачка D таква да је пар C, D хармонијски конјугован са A, B.*

Доказ. Узмимо да постоје две такве тачке D и D'. Тада постоје два четворотеменика $PQRS$ и $P'Q'R'S'$ помоћу којих се на горе показани начин те тачке добијају (сл. 38).

Права g је оса перспективе за тротеменике PSQ и $P'S'Q'$, QSR и $Q'S'R'$. Одатле по Дезарговој теореми следи да сваки од наведених парова тротеменика има центар перспективе. Пошто тротеменици PSQ и QSR имају заједнички пар темена Q и S, а тротеменици $P'S'Q'$ и $Q'S'R'$ имају пар заједничких темена Q' и S', то оба пара тротеменика имају заједнички центар перспективе O. Одатле произлази да тротеменици PSR и $P'S'R'$ такође имају центар перспективе — тачку O. По Дезарговој теореми ови тротеменици имају осу перспективе. Очигледно, та оса се поклапа са g и према томе је $D \equiv D'$. Теорема је доказана.

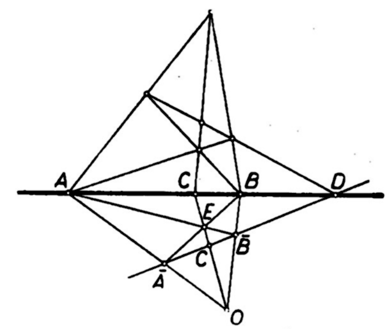
Теорема 55. *Својство хармонијске конјугованости парова тачака задржава се при пројектовању.* — То јест, ако се тачке A, B, C, D праве g пројектују у тачке $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ праве $\bar{g}$ из неке тачке O која лежи ван тих правих, и ако је пар C, D хармонијски конјугован с паром A, B, тада је пар $\bar{C}$, $\bar{D}$ конјугован с паром $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Доказ. Нека је најпре $C \equiv \bar{C}$ или $D \equiv \bar{D}$ (сл. 39). Повуцимо праве $B\bar{A}$ и $\bar{B}A$. Оне ће се сећи у некој тачки E. Због јединости тачке C права OC пролази кроз E. Пар тачака $\bar{C}$, D хармонијски је конјугован са паром $\bar{A}$, $\bar{B}$

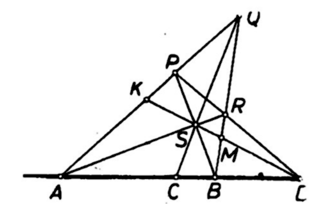
(одговарајући четворотеменик је $OAEB$). Општи случај своди се на тај посебни путем пројектовања на посредну праву која спаја тачке D и $\bar{C}$. Теорема је доказана.

Теорема 56. *Својство хармонијске конјугованости парова тачака је узајамно. Другим речима, ако је пар C, D хармонијски конјугован с паром A, B, тада је пар A, B хармонијски конјугован с паром C, D.*

Доказ. Нека се конјугованост пара C, D у односу на A, B утврђује помоћу четворотеменика $PQRS$ (сл. 40).



Сл. 39



Сл. 40

Очигледно, пар K, M конјугован је с паром S, D (четворотеменик $APRB$). Како пак приликом пројектовања из тачке O тачке K, M, S, D прелазе редом у A, B, C, D, то је пар A, B хармонијски конјугован са C, D. Теорема је доказана.

Нека кроз тачку O у равни пролазе четири праве a, b, c, d. Ми ћемо говорити да је пар правих c, d хармонијски конјугован с паром a, b ако је, кад се ови парови правих пресеку било којом правом, пар пресечених тачака C, D хармонијски конјугован с паром пресечених тачака A, B. На основу теореме 55 својство хармонијске конјугованости за праве не зависи од избора пресечне праве.

Све теореме које смо у овом параграфу доказали односе се на пројективну геометрију у равни. Њихове доказе такође смо извели не излазећи из равни. Истина, при том смо се ослањали на Дезаргову теорему, чији доказ у нашем излагању захтева просторне конструкције. Поставља се питање није ли могуће Дезаргову теорему доказати ослањајући се само на равне аксиоме везе. Ово се питање јавља у вези са изграђивањем пројективне геометрије на равни.

Хилберт је доказао да се Дезаргова теорема не може доказати само помоћу равних аксиома везе. Стога за изграђивање пројективне геометрије на равни систем равних аксиома везе треба допунити Дезарговом теоремом као аксиомом.

§ 3. Аксиоме поретка. Афина раван

Аксиоме поретка утврђују својства међусобног положаја тачака на правој.

Ми сматрамо да на правој постоје два један другоме супротна смера и у односу на сваки од њих свака тројка тачака налази се у извесном односу који се изражава речју „следити", при чему су испуњене следеће аксиоме:

Аксиома II_1. *Следовање тројке ABC у једном смеру искључује следовање те тројке у супротном смеру.*

Аксиома II_2. *Ако тројка ABC следи у једном смеру, тада тројке BAC и ACB следе у супротном смеру.*

Аксиома II_3. *Ако тројке ABC и CDA следе у једном смеру, тада тројка BCD следи у том истом смеру.*

Аксиома II_4. *За сваки пар тачака A и B наћи ће се тачке C и D такве да тројке ACB и ADB следе у два супротна смера.*

Аксиома II_5. *Поредак тачака на правој не мења се приликом пројектовања.*

То значи да, ако је права g пројектована на праву g и t је један смер на g, тада се на g' може показати такав смер t' да сваки пут кад тројка ABC на g следи у смеру t, одговарајућа јој тројка $A'B'C'$ на g' следи у смеру t'.

Из аксиоме II_2 види се да тројке тачака CAB и BCA следе у истом смеру у коме и ABC, а тројка CBA у супротном смеру.

Ако тројке ACB и ADB следе у супротним смеровима, ми ћемо говорити да пар C, D *раздваја* пар A, B. Својство раздвајања парова је узајамно, то јест ако CD раздваја AB, тада и AB раздваја CD. Заиста, тројке ACB и BDA следе у једном истом смеру, а тројке BCA и ADB у другом. По аксиоми II_3, тројке CBD и CAD следе у супротним смеровима, то јест пар AB раздваја пар CD.

Нека на правој имамо две тачке A и B. Скуп свих тачака X за које тројке AXB следе у једном смеру зваћемо *одсечком*. Очигледно, пар тачака A и B одређује на правој два одсечка. За такве одсечке говорићемо да се *допуњују*.

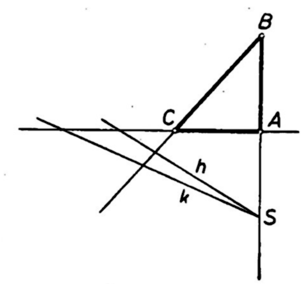
Нека у равни имамо три тачке A, B, C које не леже на једној правој. Фигуру састављену од три одсечка AB, BC и AC зваћемо *троуглом* ако постоји права која сече сваки од допунских одсечака. За троугле у пројективној равни важи Пашова теорема.

Теорема 57. *Ако права g сече страницу AB троугла ABC и не пролази ни кроз једно од његових темена, тада она сече или страницу AC или BC.*

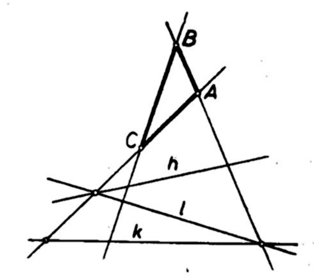
Доказ. Обележимо са $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ одсечке који допуњују странице троугла. Нека је S тачка одсечка $\overline{AB}$, а h права која пролази кроз ту тачку и сече оба преостала одсечка $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Нека је сада k ма која права која пролази кроз S и сече $\overline{BC}$. Тврди се да она сече и $\overline{CA}$.

По аксиоми II_5, пројектовање из S (сл. 41) преводи одсечке праве AC у одсечке праве BC. Како права h сече $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, то при томе пројектовању BC одговара $\overline{CA}$ (а не CA). Одатле следи да права k секући $\overline{BC}$ треба да сече и $\overline{CA}$.

Сада је лако видети да, ако права h сече три одсечка $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, а права k два одсечка $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, тада ова права мора сећи и трећи одсечак ($\overline{CA}$). Да бисмо то доказали, довољно је користити се помоћном правом l (сл. 42). Користећи се претходним извођењем закључујемо најпре да права l сече сва три одсечка, а затим до тог истог закључка долазимо и за праву k.



Сл. 41



Сл. 42

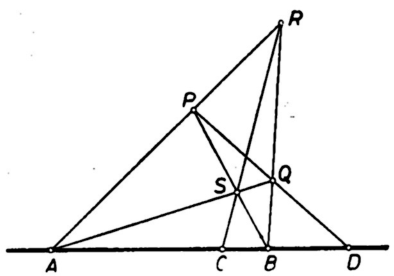
Претпоставимо сада да права g сече страницу AB троугла а не сече ниједну од осталих његових двеју страница AC и BC. Тада она сече допунске одсечке $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ и, према раније доказаном, треба да сече и $\overline{AB}$, а то је немогућно. Теорема је доказана.

Нека је g права, а t и $\bar{t}$ два један другом супротна смера на тој правој. Фиксирајмо неку тачку A на правој и за сваки пар тачака различитих од A утврдимо поредак на следећи начин. Говорићемо да B претходи C у смеру t $(\bar{t})$ ако тројка ABC следи у смеру t $(\bar{t})$.

Тривијално се проверава да *на тај начин дефинисан поредак тачака (у тачки A) расечене праве задовољава све линеарне аксиоме поретка еуклидске геометрије.*

Теорема 58. *Ако су парови тачака AB и CD на правој хармонијски конјуговани, тада ABC и ABD следе у супротним смеровима.*

Два пројектовања извршена једно за другим — пројектовање праве AB на праву PQ из тачке R, а затим праве PQ на праву AB из тачке S, — остављају тачке C и D непокретне, а тачкама A и B размењују места (сл. 43). То значи да, ако се са H обележи резултат двоструког пројектовања, мора бити $HA = B$, $HB = A$, $HC = C$, $HD = D$.



Сл. 43

Утврдимо тачку C на правој и за пар тачака праве расечене у C уведимо поредак следовања онако како је горе било наведено. Тада се тврђење теореме састоји у томе да се D налази између A и B. Претпоставимо да то није тачно. Тада у једноме од два смера $A < D$ и $B < D$. Одатле $HA < HD$ и, по аксиоми I_5, тачке A, B и тачке HA, HB треба да се налазе у једнаким међусобним односима, то јест или $A < B$, $HA < HB$, или $B < A$, $HB < HA$. Али није могућно ни једно ни друго, јер је $HA = B$, а $HB = A$. Дошли смо до противречности. Теорема је доказана.

Утврдимо сада у равни α неку праву g_∞. Ову праву зваћемо *бескрајно далеком правом*, а њене тачке бескрајно далеким тачкама. Раван α расечену дуж праве g_∞ зваћемо *афином равни.*

Лако је уверити се да су *на афиној равни испуњене равне аксиоме везе еуклидске геометрије.*

Као што је горе било поменуто, за тачке правих афине равни испуњене су линеарне аксиоме поретка еуклидске геометрије. Показаћемо да је испуњена и равна аксиома поретка.

Теорема 59. *Права g дели афину раван на две полуравни тако да, ако су X и Y тачке једне полуравни, тада одсечак XY не сече g, а ако X и Y припадају разним полуравнима, тада одсечак XY сече g.*

Нека је A она тачка равни која не лежи на правој g. Нека првој полуравни припадају тачка A и све тачке X такве да AX не сече g, а другој полуравни нека припадају тачке X такве да одсечак AX сече g.

Нека су X и Y две тачке прве полуравни; показаћемо да одсечак XY не сече g. Тврђење је очигледно ако се једна од тачака поклапа са A. Даље разматрамо два случаја: 1) тачке A, X, Y не леже на једној правој; 2) тачке A, X, Y леже на једној правој. У првом случају, пошто AX и AY не секу g, то по теореми 57 XY не сече g.

Размотримо други случај. Претпоставимо да одсечак XY сече праву у некој тачки C. Ако при том A лежи између X и Y, тада C припада или AX или AY (теорема 7). Ако X лежи између A и Y, тада C припада AY. Најзад, ако је Y између A и X, тада C припада AX (теорема 6). И у свим случајевима долази се до противречности, јер одсечци AX и AY не секу g.

Аналогно се доказује да одсечак XY сече праву g ако тачке X и Y припадају разним полуравнима.

На тај начин, *на афиној равни испуњене су све аксиоме поретка еуклидске геометрије.*

Пошто су на афиној равни испуњене аксиоме везе и аксиоме поретка еуклидске геометрије, то на њој важе и све последице које из тих аксиома проистичу.

Две праве афине равни називаћемо *паралелним правим* ако се оне не секу. То значи де се одговарајуће им праве пројективне равни секу у бескрајно далекој тачки.

Паралелне праве имају следеће очигледно својство. *Ако су праве a, b паралелне и праве b, c паралелне, тада су и праве a, c паралелне.*

Лако је видети да је *за праве у афиној равни испуњена аксиома непрекидности еуклидске геометрије.*

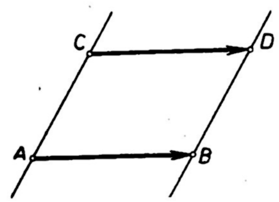
§ 4. Вектори у афиној равни

Вектором у афиној равни зваћемо оријентисани одсечак AB. Тачку A зваћемо почетком вектора, а тачку B крајем. За векторе који леже на једној правој или на паралелним правим појам *једнакости* дефинишемо на следећи начин:

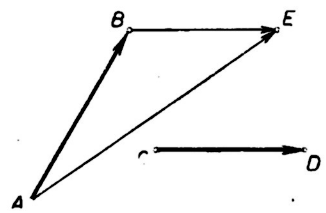
Ако вектори AB и CD леже на паралелним правим, ми их сматрамо једнаким онда кад су праве AC и BD паралелне. Ако пак вектори AB и CD леже на једној правој, ми их сматрамо једнаким ако постоји вектор паралелан и једном и другом и једнак сваком од њих (сл. 44).

Нека је AB вектор, а C тачка ван праве; тада постоји вектор CD једнак AB. Заиста, права која пролази кроз C и паралелна је са AB и права која је паралелна са AC и пролази кроз B секу се, на основу аксиоме паралелности, у некој тачки D. Очигледно, вектори AB и CD су једнаки.

Једнакост вектора има својство транзитивности, наиме ако је $AB=CD$ и $AB=EF$, тада је $CD=EF$. У случају кад вектори леже на разним паралелним правим и тачке A, C, E не леже на једној правој, то својство следи из Дезаргове теореме примењене на тротеменике ACE и BDF, који су у перспективном положају у односу на бескрајно далеку тачку. Ако пак A, C, E леже на једној правој, поменуто својство следи из аксиоме паралелности. Општи случај своди се на размотрени посебан случај увођењем једнаких помоћних вектора горе описане конструкције.



Сл. 44



Сл. 45

Ако су вектори AB и AE једнаки, они се поклапају, то јест $B\equiv E$. Заиста, на правој паралелној AB постоји вектор CD једнак AB, па, према томе, једнак и AE. Поклапање тачака A и E следи из јединости праве паралелне AC која пролази кроз тачку B.

Вектор је потпуно окарактерисан својим почетком и крајем. Зато бисмо га могли дефинисати и као пар тачака узетих одређеним редом и названих почетком и крајем вектора. У вези с дефинисањем операција сабирања и одузимања за векторе целисходно је пар тачака које се поклапају сматрати такође вектором. Овај вектор називамо нула-вектором. Сви нула-вектори једнаки су по дефиницији.

Збиром вектора AB и CD ($AB+CD$) називаћемо вектор AE чији је крај одређен условом $BE=CD$ (сл. 45).

Сабирање вектора има следећа својства:

1) *Ако је* $a=a'$ *и* $b=b'$, *тада је* $a+b=a'+b'$.

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*асоцијативност*).

3) $a+b=b+a$ (*комутативност*).

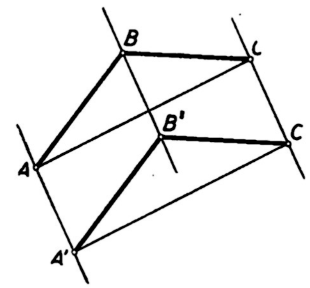
Доказаћемо та својства.

Нека је $CD=C'D'$. Показаћемо да је

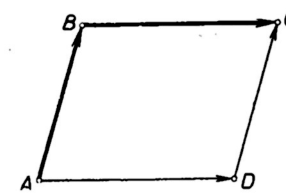
$$AB+CD=AB+C'D'.$$

По дефиницији $AB+CD$ је вектор AX, при чему је тачка X одређена условом $BX=CD$. Аналогно, $AB+C'D'$ је вектор AY, при чему је $BY=C'D'$.

Да бисмо доказали прво својство, довољно је показати да, ако је $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, тада је $AC=A'C'$. Ако су праве AB, $A'B'$ различите и праве BC, $B'C'$ такође различите, тада су праве AA' и BB', а такође и BB' и CC' паралелне. Одатле следи паралелност AA' и CC' па, дакле, и једнакост $AC=A'C'$ (сл. 46). У општем случају ми узимамо тачку Y која не лежи ни на једној од правих AB, $A'B'$, BC, $B'C'$ и конструишемо тачке X и Z тако да је $XY=AB$, $YZ=BC$. Тада је, према доказаноме, $AC=XZ$, $A'C'=XZ$. Дакле, $AC=A'C'$.



Сл. 46



Сл. 47

Због својства 1 довољно је асоцијативност сабирања показати за векторе AB, BC и CD. А за такве векторе асоцијативност је очигледна.

Због својства 1 довољно је комутативност утврдити за векторе AB и BC. Ако вектори не леже на једној правој, конструисаћемо тачку D (сл. 47). Тада је

$$AB+BC=AC=AD+DC=BC+AB.$$

Нека сада тачке A, B, C леже на једној правој (сл. 48). Узмимо ван те праве тачку E. Тада је према доказаноме

$$EC=EB+BC=BC+EB, \qquad AE=AB+BE=BE+AB,$$

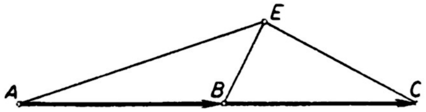
$$AC=AE+EC=EC+AE.$$

Одатле је

$$AB+BC=BC+AB.$$

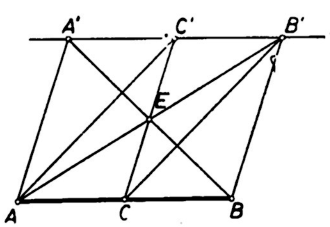
Нека је AB вектор различит од нуле. Тада ће се на одсечку AB наћи таква тачка C да је $AC=CB$.

Заиста, конструишимо тачку C хармонијски конјуговану с бескрајно далеком тачком праве AB у односу на тачке A, B (сл. 49). Очигледно је $CB=C'B'$. Даље, тротеменици $AA'C'$ и $B'BC$ налазе се у перспективном положају у односу на тачку E. Одатле следи да су праве AC' и CB' паралелне, па је, према томе, $AC=C'B'$. Како је, поред тога, $CB=C'B'$, то је $AC=CB$. Тврђење је доказано.

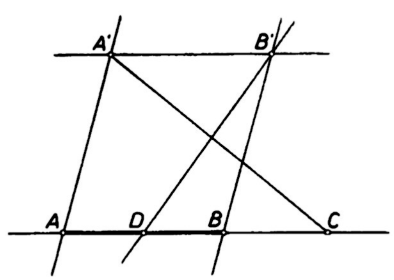


Сл. 48

Сада ћемо дефинисати одузимање вектора. *Разликом* вектора AB и CD ($AB-CD$) називамо збир вектора AB и DC. Очигледно је $(AB-CD)+CD=AB$, $AB-AB=0$. У даљем излагању, ако је $a=AB$ дати вектор, тада ће $-a$ значити вектор BA. Овај вектор зваћемо *супротним* вектору AB.



Сл. 49



Сл. 50

Уведимо сада појам вектора исте оријентације. За два вектора AB и CD који су различити од нуле и леже на једној правој говорићемо да су *исте оријентације* ако $A<B$ и $C<D$ или $A>B$ и $C>D$.

Очигледно, *својство вектора да имају исту оријентацију транзитивно је,* то јест, ако су и a и b исте оријентације и b и c исте оријентације, тада су и a и c исте оријентације.

Једнаки вектори AB и CD су исте оријентације.

Заиста, пошто су вектори AB и CD једнаки, постоји паралелни вектор $A'B'$ једнак и једном и другом (сл. 50).

Нека, одређености ради, $A<B$. Ако је тврђење нетачно, тада $C>D$. Тачка A дели праву AB на две полуправе h_1 и h_2. Нека је h_1 она полуправа којој припада тачка B.

Тачка C не може се поклапати са A, јер се тада D поклапа са B па, према томе, $C<D$. Нека C и D припадају h_1. Тада $A<D<C$. Права $B'D$ не може сећи одсечак $A'A$ јер се тада одсечак $B'D$ сече с правом AA', а то је немогућно, пошто се тачке B' и D налазе са исте стране те праве. Праве $A'C$ и $B'D$ не секу се јер су паралелне. Дакле, права $B'D$ сече само једну страницу (AC) троугла $AA'C$, што је противречно Пашовој теореми.

Нека се D поклапа са A. Тада полуправа $A'C$ пролази унутар угла $AA'B'$ и, према томе, сече одсечак DB', а то је немогућно.

Случај када D припада h_2, а такође и када обе тачке C и D припадају h_2 разматра се на аналогни начин.

За два паралелна вектора говорићемо да су *исте оријентације* ако њима једнаки вектори који леже на једној правој имају исту оријентацију. Својство вектора да имају исту оријентацију не зависи од праве на којој се узимају једнаки вектори. Очигледно, довољно је показати да, ако су вектори AB и BC исте оријентације, а $A'B'$ и $B'C'$ су респективно једнаки им вектори на паралелној правој, тада су $A'B'$ и $B'C'$ исте оријентације.

Праве AA', BB', CC' паралелне су услед једнакости одговарајућих вектора. Пошто пројектовање не мења поредак тачака, то из чињенице да се B налази између A и C следи да се B' налази између A' и C'. Тврђење је доказано.

За векторе исте оријентације дефинишемо однос „*веће*“ и „*мање*“. Наиме, говорићемо да је $CD<AB$ ако на одсечку AB постоји таква тачка X да је $AX=CD$.

Ако су вектори a, b, a', b' исте оријентације и $a<b$, $a=a'$, $b=b'$, тада је $a'<b'$. Ово следи непосредно из чињенице да једнаки вектори имају исту оријентацију.

Очигледно, ако су a и b вектори исте оријентације, тада је $a<a+b$. Одатле се лако изводи закључак да, ако је $a<b$ и $c<d$, тада је $a+c<b+d$.

§ 5. Аксиома непрекидности. Множење вектора бројем

Као што смо показали у § 2, ако се из пројективне праве уклони било која тачка, тада се за остале тачке на јединствен начин утврђује однос следовања за сваки пар тачака који задовољава аксиоме поретка еуклидске геометрије.

Аксиома III. *Захтева се да за афину праву, која се добија од пројективне праве тако што се из ове уклони ма која њена тачка, важи Дедекиндова аксиома непрекидности.*

Као што смо показали у претходном параграфу, вектори исте оријентације имају сва својства Еуклидових одсечака која смо искористили приликом утврђивања мере дужине. Одатле закључујемо да важи следећа теорема:

Постоји једна једина функција μ дефинисана на свим векторима датог смера која задовољава услове:

1) *Ма за који вектор a различит од нуле је $\mu(a)>0$.*

2) *Ако је $a=b$, тада је $\mu(a)=\mu(b)$.*

3) *Ако је $c=a+b$, тада је $\mu(c)=\mu(a)+\mu(b)$.*

4) *За неки вектор a_0 је $\mu(a_0)=1$.*

На основу те теореме лако се доказује следећа теорема:

Теорема 60. *Постоји једна једина функција λ која је дефинисана на свим векторима дате праве и паралелним овој и која задовољава услове:*

1) *За векторе исте оријентације је $\lambda>0$, а за векторе супротне оријентације је $\lambda<0$.*

2) *За нула-вектор је $\lambda=0$.*

3) *Ако је $a=b$, тада је $\lambda(a)=\lambda(b)$.*

4) *Ако је $c=a+b$, тада је $\lambda(c)=\lambda(a)+\lambda(b)$.*

5) *За неки вектор a_0 различит од нуле имамо:* $\lambda(a_0)=1$, $\lambda(-a_0)=-1$.

Доказ. Јединост функције непосредно следи из претходне теореме, пошто је та функција наведеним условима једнозначно дефинисана на векторима дате оријентације и на векторима супротне оријентације. Доказаћемо постојање функције λ.

Ставимо на векторима са оријентацијом a_0 $\lambda(a)=\mu(a)$, а на векторима супротне оријентације $\lambda(a)=-\mu(-a)$. Услови 1, 2, 3 и 5 су очигледно испуњени. Проверићемо услов 4.

Ако су a и b исте оријентације, тада је очигледно $\lambda(a+b)=\lambda(a)+\lambda(b)$ на основу одговарајућег својства функције μ. Нека су вектори a и b супротне оријентације. Тада један од њих има оријентацију вектора a_0; нека је то на пример a. Ако је $-b<a$, тада је $\mu(a)=\mu(-b)+\mu(a+b)$. Одатле је $\lambda(a)=-\lambda(b)+\lambda(a+b)$ и, према томе, $\lambda(a+b)=\lambda(a)+\lambda(b)$. Ако је $-b>a$, тада је $\mu(-b)=\mu(a)+\mu(-b-a)$, одакле је $-\lambda(b)=\lambda(a)-\lambda(a+b)$, па је дакле $\lambda(a+b)=\lambda(a)+\lambda(b)$. Теорема је доказана.

Функција λ зависи од избора јединичног вектора a_0. Нека је уместо a_0 узет неки вектор a_0' и нека је λ' одговарајућа му функција. Размотримо функцију $\lambda(a_0)\lambda'(x)/\lambda'(a_0')$. Лако је видети да она задовољава све услове теореме 60. Према томе, она је једнака $\lambda(x)$. На тај начин, *функције λ које одговарају разним јединичним векторима разликују се међу собом само по своме множиоцу.*

Из својстава функције λ лако се закључује да, *ако је за два вектора x и y $\lambda(x)=\lambda(y)$, тада је $x=y$.*

Производом вектора a и броја α називаћемо вектор αa на тој истој или паралелној правој такав да је

$$\lambda(\alpha a)=\alpha\lambda(a).$$

Очигледно, ова дефиниција не зависи од јединичног вектора који одређује функцију λ.

Нека су a и b паралелни вектори. Тада постоји број α такав да је $\alpha a=b$. У самој ствари, ако узмемо

$$\alpha=\lambda(b)/\lambda(a),$$

имаћемо $\lambda(\alpha a)=\lambda(b)$, одакле је $\alpha a=b$.

Показаћемо да је $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$. Заиста, вредности функције λ за векторе $(\alpha+\beta)a$ и $\alpha a+\beta a$ једнаке су. Према томе, вектори су једнаки.

Аналогно се показује да је $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$.

Докажимо сада да је

$$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b.$$

Тврђење је очигледно ако је један од вектора једнак нули или су оба једнака нули. Ако су вектори паралелни, тада се b изражава помоћу a: $b=\beta a$ и оба дела једнакости су, услед горе наведених својстава, једнака $\alpha(1+\beta)a$.

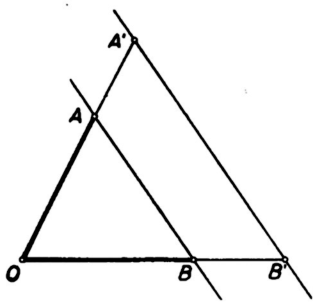
Нека су сада a и b непаралелни вектори различити од нуле. Можемо сматрати да они имају заједнички почетак O, а крај им је у тачки A, односно B (сл. 51). Нека су A' и B' крајеви вектора αa и αb. Показаћемо да су праве AB и $A'B'$ паралелне

Погледајмо како се права OA пројектује на праву OB праменом правих паралелних AB. Тим пројектовањем се сваком вектору x праве OA кореспондира неки вектор Hx праве OB. Ми тврдимо да,

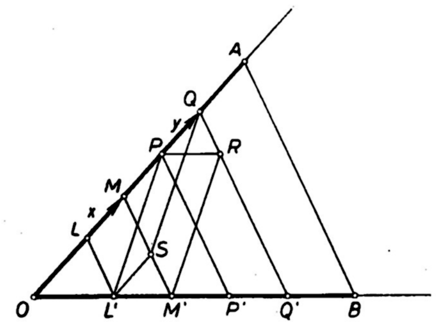
ако је $x=y$, тада је $Hx=Hy$ и за произвољне векторе x и y је $H(x+y)=Hx+Hy$.

Показаћемо најпре да, ако је $x=y$, тада је $Hx=Hy$ (сл. 52). Како пројектовање не мења поредак тачака, то су

Hx и Hy истог смера. Претпоставимо да су почетне тачке L и P вектора x и y различите од O. Повуцимо кроз тачку P праву PR паралелну OB, а кроз тачку L' праву $L'S$ паралелну OA. Да би се утврдила једнакост $Hx=Hy$, довољно је показати да су праве PL' и RM' паралелне.



Сл. 51



Сл. 52

Троугли PQR и $L'SM'$ леже перспективно у односу на бескрајно далеку праву. Како је $x=y$ и, према томе, $PL' \parallel SQ$, то је $PL' \parallel RM'$. То значи да је $Hx=Hy$. Ако се L или P поклапа са O, тада уместо OB треба у том расуђивању узети праву која је паралелна OB и не пролази кроз L и P.

Сада је довољно да својство $H(x+y)=Hx+Hy$ докажемо за векторе $x=PQ$ и $y=QR$, а за такве векторе то својство је очигледно.

Нека је λ_1 функција на векторима праве OA, λ_2 функција на векторима праве OB и λ_3 функција на векторима праве AB, при чему је $\lambda_1(a)=1$, $\lambda_2(b)=1$, $\lambda_3(a-b)=1$. Дефинишимо функцију ν на векторима праве OA условом $\nu(x)=\lambda_2(Hx)$. Ова функција задовољава услове 1, 2, 3 и 4 теореме 60. Према томе је $\nu(x)=k\lambda_1(x)$, одакле је

$$\frac{\lambda_2(Hx)}{\lambda_1(x)}=\frac{\lambda_2(Hy)}{\lambda_1(y)}.$$

Наш је циљ био да докажемо паралелност правих AB и $A'B'$, где су A' и B'крајеви векторâ αa и αb са заједничким почетком O. Да бисмо то доказали, довољно је да утврдимо једнакост $H(\alpha a)=\alpha b$, а то сада није тешко. У самој ствари, ако у горе добијену пропорцију ставимо $x=a$, $y=\alpha a$ и имамо у виду да је $\lambda_1(a)=1$, $\lambda_2(b)=1$, добићемо $\lambda_2(H\alpha a)=\alpha$. Али је $\lambda_2(\alpha b)=\alpha$, те одатле произлази да је $H(\alpha a)=\alpha b$. Тиме је паралелност правих AB и $A'B'$ доказана.

Аналогно се може расуђивати и у вези с пројектовањем S праве OA на праву $A'B'$ (сл. 53). Тада ћемо добити аналогну пропорцију

$$\frac{\lambda_3(Sx)}{\lambda_1(x)}=\frac{\lambda_3(Sy)}{\lambda_1(y)}.$$

Стављајући $x=a$, $y=\alpha a$ и имајући у виду да је $AB=A'B'$ због паралелности AB и $A'B'$, добићемо

$$\alpha\lambda_3(a-b)=\lambda_3(\alpha a-\alpha b),$$

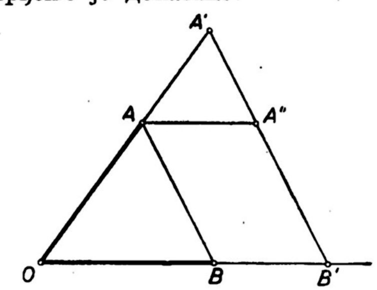
а одатле

$$\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b.$$

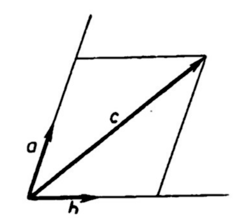
Ако сада уместо вектора b узмемо вектор $-b$, добићемо

$$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b.$$

Тврђење је доказано.



Сл. 53



Сл. 53 a

Нека су a и b нейаралелни векшори различиши од нуле. Тада се ма који векшор а може на један једини начин йредсшавиши у облику

$$c=\alpha a+\beta b.$$

Узмимо да вектор c допушта да се представи у другом облику: $c=\alpha' a+\beta' b$. Ако тада одузмемо једну једнакост од друге, добићемо $(\alpha-\alpha')a+(\beta-\beta')b$. Ако је $\alpha=\alpha'$, тада је $(\alpha-\alpha')a$ нула-вектор, па је, према томе, и $(\beta-\beta')b$ нула-вектор. Одатле је $\beta=\beta'$, тако да су оба облика истоветна. Остаје да се претпостави да је $\alpha\neq\alpha'$. Али, тада вектори $(\alpha-\alpha')a$ и $(\beta-\beta')b$, пошто су различити од нуле и нису паралелни, не могу давати збир једнак нули. Јединост је доказана.

Доказаћемо постојање разлагања $c=\alpha a+\beta b$. Можемо сматрати да вектори a, b, c имају заједнички почетак O. Пројектоваћемо вектор c помоћу правих паралелних b на праву која носи вектор a, а помоћу правих паралелних a на праву која носи вектор b (сл. 53а). Обележимо те пројекције са c_a, односно c_b. Очигледно је $c = c_a + c_b$. Пошто c_a лежи на правој која носи вектор a, то је $c_a = \alpha a$, и аналогно је $c_b = \beta b$. Према томе је

$$c = \alpha a + \beta b.$$

Постојање разлагања је доказано.

На крају ћемо приметити да би се слична теорија вектора могла изградити и у простору. Ми смо се ограничили на раван да бисмо упростили излагање.

§ 6. Декартове и пројективне координате

Повуцимо кроз произвољну тачку O (*координатни почетак*) афине равни две праве (*координатне осе*) и узмимо на свакој од њих по један вектор e_1 и e_2 (*основни вектори*). Тада се ма који вектор OA може на један једини начин разложити у облику

$$OA = xe_1 + ye_2.$$

На тај начин свакој тачки A афине равни узајамно једнозначно одговара пар бројева (x, y). Бројеви x, y зову се *Декартове координате* тачке.

Нека је g права, A_0 тачка, а e вектор на тој правој различит од нуле. Узмимо произвољну тачку A на правој. Пошто вектори $A_0A = OA - OA_0$ и e леже на једној правој, то је

$$OA - OA_0 = \lambda e.$$

Ако e представимо у облику $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, добићемо

$$(x - x_0) e_1 + (y - y_0) e_2 = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2.$$

Одатле, а на основу јединости разлагања ма којег вектора дуж основних вектора e_1 и e_2, закључујемо:

$$x - x_0 = \alpha_1 \lambda, \quad y - y_0 = \alpha_2 \lambda.$$

Помножимо прву једначину са α_2, а другу са α_1 и одузмимо другу од прве. Тада ћемо добити

$$(x - x_0) \alpha_2 - (y - y_0) \alpha_1 = 0.$$

На та тај начин, *координате сваке тачке праве g задовољавају линеарну једначину*. Ова се једначина зове *једначина праве*.

Обратно, *свака линеарна једначина*

$$ax + by + c = 0 \tag{*}$$

јесте једначина неке праве. Заиста нека је x_0, y_0 неко решење те једначине. Тада права која пролази кроз тачку (x_0, y_0) и носи вектор $e = -be_1 + ae_2$ има једначину (*).

Објаснимо како се поредак тачака на правој изражава координатама тих тачака. Нека је у једначини праве (*) $b \neq 0$. То значи да је у разлагању вектора e који лежи на правој $e_1 \neq 0$.

Као што знамо, у једном смеру се следовање тачке A_2 за тачком A_1 изражава тиме што је вектор A_1A_2 оријентисан исто као и неки фиксирани вектор на правој, на пример e, а следовање у супротном смеру изражава се тиме што су ови вектори разне оријентације.

Како је

$$(OA_1 - OA_0) = \lambda_1 e, \quad OA_2 - OA_0 = \lambda_2 e, \quad \text{то је} \quad A_1A_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) e.$$

Одатле следи да $A_1 < A_2$ у једном смеру ако је $\lambda_1 < \lambda_2$, а у другом смеру ако је $\lambda_1 > \lambda_2$. Како је $x_1 - x_0 = \alpha_1 \lambda_1$, $x_2 - x_0 = \alpha_1 \lambda_2$, то је $x_2 - x_1 = \alpha_1 (\lambda_2 - \lambda_1)$. Према томе $A_1 < A_2$ у једном смеру ако $x_1 < x_2$, а у другом смеру ако $x_1 > x_2$.

Аналогно се показује да, ако је у једначини праве (*) $b = 0$, тада се следовање једне тачке за другом на правој у једном смеру изражава неједнакошћу $y_1 < y_2$, а у другом $y_1 > y_2$.

Уведимо на афиној равни хомогене координате. *Хомогеним координатама* тачке називаћемо ма која три броја x_1, x_2, x_3 који нису сви једнаки нули и с Декартовим координатама x, y те тачке повезани су једнакостима

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Хомогене координате нису једнозначно кореспондиране тачки. Зато кад говоримо о хомогеним координатама тачке ми имамо у виду не одређену тројку бројева, већ систем тројака које се једна од друге разликују неким множиоцем. Очигледно је координата $x_3 \neq 0$.

Замењујући у једначини праве (*) x и y изразима с хомогеним координатама, закључујемо да хомогене координате праве задовољавају линеарну хомогену једначину

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Лако је видети да, и обратно, свака таква једначина, ако a и b нису једнаки нули, у исто време јесте и једначина неке праве у афиној равни.

Уведимо сада *пројективне координате* на пројективној равни. Ако је тачка A пројективне равни такође и тачка афине равни, тада ћемо за пројективне координате узети хомогене координате. Ако је тачка A бескрајно далека тачка праве која садржи афину праву $ax+by+c=0$, ми ћемо за пројективне координате узети тројку бројева $(-b,\ a,\ 0)$ или ма коју овој пропорционалну тројку.

Запазимо да кроз сваку бескрајно далеку тачку пројективне равни пролази бесконачно много пројективних правих које садрже афине праве. Зато, ради коректног увођења координата бескрајно далеких тачака, потребно је да тројке које одговарају једној бескрајно далекој тачки и које су одређене разним правим $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$ буду пропорционалне. То тако и јесте јер систем једначина

$$a\ x+b\ y+c\ =0,$$

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

није сагласан (праве су паралелне, то јест не секу се). Одатле је

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{па је дакле} \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}.$$

Очигледно, *пројективна права се у пројективним координатама задаје линеарном једначином*, и то оном истом једначином којом и одговарајућа афина права у хомогеним координатама. Бескрајно далека права задаје се једначином $x_3=0$. Обрнуто, *ма која линеарна хомогена једначина у пројективним координатама јесте једначина неке праве.*

На крају ћемо приметити да се у пројективном простору такође могу увести пројективне координате $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. При томе ће се ма која раван задавати линеарном хомогеном једначином

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0,$$

а ма која права системом од двеју таквих независних једначина. Једноставнијег излагања ради, ми смо се ограничили на случај пројективне равни.

§ 7. Непротивречност и потпуност система аксиома пројективне геометрије на равни

Теорема 61. *Систем аксиома пројективне геометрије непротивречан је. То јест, из њега се не могу путем логичких расуђивања извести два закључка који се узајамно искључују.*

Ову теорему доказаћемо за пројективну геометрију на равни. Доказ ће бити у томе што ћемо конструисати такву конкретну реализацију система аксиома пројективне геометрије у којој ће аксиоме бити испуњене услед одговарајућих теорема аритметике. Ту реализацију зваћемо аналитичком реализацијом.

Тачком ћемо звати ма коју тројку реалних бројева $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ који нису истовремено једнаки нули; сматраћемо да се тачке поклапају ако су тројке пропорционалне. Бројеве $x_1,\ x_2,\ x_3$ зваћемо координатама тачке.

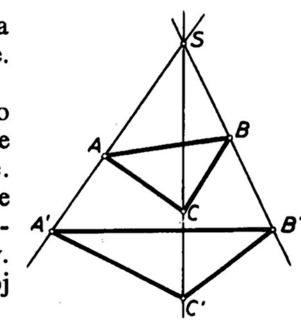
Правом ћемо звати скуп тачака које задовољавају линеарну хомогену једначину

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0.$$

Говорићемо да тачка *припада* правој ако је она једна од тачака праве, то јест ако координате тачке задовољавају једначину праве.

Проверавање равних аксиома везе не причињава никакве тешкоће. Ми то остављамо читаоцу.

Као што је било поменуто раније, Дезаргова теорема не може се извести из равних аксиома везе. Зато је за изграђивање пројективне геометрије на равни потребно Дезаргову теорему узети као аксиому. Ми ћемо је проверити у нашој реализацији.



Сл. 54

Као што знамо, у случају кад се код тротеменика̂ поклапају два одговарајућа темена или две одговарајуће странице, Дезаргова теорема очигледно је испуњена. Зато ћемо сматрати да су одговарајуће странице и темена тротеменика̂ различити.

Нека тротеменици имају центар перспективе S (сл. 54). Обележимо са $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0$ и $\delta=0$ редом једначине правих AS, BS, AB и $A'B'$. Тада се једначина SC може представити у облику $\lambda\alpha+\mu\beta=0$. Или, пошто множиоце λ и μ укључимо у једначине $\alpha=0$ и $\beta=0$, добићемо једначину праве SC у облику

$$\alpha+\beta=0.$$

Једначине правих AC и BC могу се представити у облику $\alpha+\lambda\gamma=0$, односно $\beta+\mu\gamma=0$. Како се пак ове праве секу с правом SC у тачки C, то ће се наћи такви ξ и η да је

$$\xi(\alpha+\lambda\gamma)+\eta(\beta+\mu\gamma)\equiv\alpha+\beta.$$

Одатле се услед независности једначинâ $\alpha=0$, $\beta=0$ и $\gamma=0$ добија $\xi=\eta=1$, $\lambda=-\mu$. На тај начин ће једначине AC и BC бити

$$\alpha+\lambda\gamma=0,\quad \beta-\lambda\gamma=0.$$

Аналогно се добијају једначине правих $A'C'$ и $B'C'$

$$\alpha+\mu\delta=0,\quad \beta-\mu\delta=0.$$

Очигледно, сваки од три пара правих $\gamma=0$ и $\delta=0$, $\alpha+\lambda\gamma=0$ и $\alpha+\mu\delta=0$, $\beta-\lambda\gamma=0$ и $\beta-\mu\delta=0$ сече се на правој $\lambda\gamma-\mu\delta=0$, која ће бити оса перспективе.

Доказ тврђења обратног Дезарговој теореми извешћемо полазећи од супротне претпоставке. Нека тротеменици имају осу перспективе s, а A^* нека је она тачка на оси у којој се секу странице BC и $B'C'$. Обележићемо са S пресек правих AA' и BB'. Нека је C'' тачка у којој права SC сече $A'C'$.

Према малочас доказаном, тротеменици ABC и $A'B'C'$ имају осу перспективе. Очигледно, она се поклапа са s. На тај начин праве BC и $B'C'$ и праве BC и $B'C''$ секу се на s и то у једној истој тачки A^*. Одатле следи да се праве $B'C'$ и $B'C''$ поклапају и да се, према томе, тачке C' и C'' поклапају. Тврђење је доказано.

Сада ћемо дефинисати следовање тројака тачака на правој и проверићемо да ли су испуњене аксиоме поретка.

Праву $x_3=0$ зваћемо бескрајно далеком правом, а њене тачке бескрајно далеким тачкама. У мноштву коначних тачака праве може се увести следовање парова тачака тако да буду испуњене све аксиоме поретка еуклидске геометрије. За то је потребно увести следовање тачака једне за другом онако како је то учињено у Декартовој реализацији еуклидске геометрије. Сада терминима којима се изражава поредак парова тачака дефинишемо следовање тројака.

Ако су све тачке A, B, C коначне, тада је следовање у једном смеру одређено једним од три услова:

$$A<B<C,\ \text{или}\ B<C<A,\ \text{или}\ C<A<B.$$

Следовање тројке у супротном смеру одређује се условима:

$$A>B>C,\ \text{или}\ B>C>A,\ \text{или}\ C>A>B.$$

Дефинишимо сада следовање тројке ако се у њој налази једна бескрајно далека тачка; ову тачку обележимо са Ω. Ми ћемо говорити да тројка $AB\Omega$ следи у првом горе наведеном смеру ако $A<B$, а у другом, ако $B<A$. Тројка $A\Omega C$ следи у првом смеру ако $B<C$, а у другом ако $B>C$.

На тај смо начин дефинисали следовање тројака тачака на свакој правој која није бескрајно далека. Следовање тројака на бескрајно далекој правој дефинишемо помоћу пројектовања на неку коначну праву.

Сада треба проверити да ли су испуњене аксиоме поретка. Ово проверавање, као што је лако уверити се, није тешко, али је везано са разматрањем много различитих случајева. Зато га ми овде нећемо извести. Што се тиче аксиоме непрекидности, она је очигледно испуњена јер се своди на аксиому непрекидности за еуклидску праву у вези са следовањем парова тачака.

Пошто смо конструисали аналитичку реализацију система аксиома пројективне геометрије, ми изводимо закључак да је тај систем непротивречан.

Пређимо сада на питање потпуности система аксиома пројективне геометрије на равни.

Према општој схеми доказивања потпуности система аксиома, ми треба да утврдимо да су све реализације система аксиома пројективне геометрије изоморфне међу собом. За то је довољно утврдити изоморфност једне које било реализације, на пример малочас конструисане аналитичке реализације.

У § 6 ми смо, без икаквих претпоставака о конкретности реализације, свакој тачки кореспондирали систем тројака бројева—пројективних координата, а свакој правој мноштво тројака које задовољавају линеарну хомогену једначину. Тако је била утврђена обострана једнозначна кореспонденција између елемената произвољне реализације. Да би то пресликавање било изоморфно, потребно је да одговарајуће групе елемената имају исти поредак.

Да ли је то тако? Да бисмо се уверили да је то одиста тако, приметимо пре свега да је, пошто се одстране бескрајно далеке тачке, поредак следовања парова тачака на правој у једној реализацији кореспондентан томе поретку следовања у другој реализацији. Стога преостаје само да се покаже да се утврђивање поретка следовања тројака у аналитичкој реализацији формално поклапа са успостављањем поретка следовања тројака на пројективној правој помоћу поретка следовања парова тачака на афиној правој.

Нека су t' и t'' два супротна смера на пројективној правој било у којој реализацији. Кад смо уочили неку праву коју смо назвали бескрајно далеком, ми смо раван расекли дуж те праве и на тај начин добили афину раван и на њој афине праве. На афиним правим смо поредак следовања парова дефинисали условом: $A<B$ у једном смеру (t') ако тројка ΩAB следи у смеру t', а $A>B$ ако ΩAB следи у смеру t''.

Нека сада имамо на афиној правој три тачке A, B, C, при чему $A<B<C$. То значи да тројке ΩAB и ΩBC следе у смеру t'. По аксиоми II_2 и II_3 одатле произлази да тројка ABC следи у смеру t'. То ће исто бити за $B<C<A$ и $C<A<B$. Према томе, утврђивање поретка следовања тројака у аналитичкој реализацији у ствари је, просто, успостављање следовања тројака пројективне праве помоћу односа следовања за парове тачака на афиној правој. И како на афиним правим одговарајући парови тачака произвољне реализације и аналитичке реализације имају исти поредак, одговарајуће тројке пројективних правих тих реализација такође имају исти поредак. На тај начин долазимо до следеће теореме:

Теорема 62. *Систем аксиома пројективне геометрије на равни потпун је. Све његове реализације су изоморфне.*

§ 8. Пројективне трансформације

Пројективном трансформацијом равни назива се такво њено обострано једнозначно пресликавање на саму себе при којем праве прелазе у праве. Лако је навести пример пројективне трансформације. Наиме, свакој тачки A с пројективним координатама x_1, x_2, x_3 кореспондирајмо тачку A' с пројективним координатама x_1', x_2', x_3' по формулама

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (*)$$

Ова трансформација је пројективна.

Заиста, ако се формуле (*) реше по x_1, x_2, x_3 — а то је могућно јер је детерминанта система $\Delta \neq 0$, — добићемо формуле облика

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}' x_1' + a_{12}' x_2' + a_{13}' x_3', \\ x_2 &= a_{21}' x_1' + a_{22}' x_2' + a_{23}' x_3', \\ x_3 &= a_{31}' x_1' + a_{32}' x_2' + a_{33}' x_3'. \end{aligned} \qquad (**)$$

Одатле следи да, ако тачке A задовољавају линеарну једначину $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, одговарајуће им тачке A' такође задовољавају линеарну једначину која се добија из $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, кад се ту x_1, x_2, x_3 замене изразима из формула (**). Према томе, наведена трансформација равни заиста је пројективна.

Теорема 63. *Ма какве биле четири тачке A^1, A^2, A^3, A^4, од којих по три не леже на једној правој, и тачке B^1, B^2, B^3, B^4, од којих такође по три не леже на једној правој, постоји пројективна трансформација која преводи тачке A^1, A^2, A^3, A^4 редом у B^1, B^2, B^3, B^4.*

Такву трансформацију можемо показати међу пројективним трансформацијама (*).

Посматрајмо две матрице

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \\ y_1^4 & y_2^4 & y_3^4 \end{pmatrix}$$

састављене од координата x_α^i тачка A^i и координата y_β^j тачака B^j. Свака од ових матрица има ранг 3. У самој ствари, нека је било која детерминанта III реда једнака нули, на пример

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тада систем једначина

$$\begin{aligned} \alpha x_1^1 + \beta x_2^1 + \gamma x_3^1 &= 0, \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 &= 0, \\ \alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + \gamma x_3^3 &= 0 \end{aligned}$$

по α, β, γ, има нетривијално решење α_0, β_0, γ_0. А то значи да на правој $\alpha_0 x_1+\beta_0 x_2+\gamma_0 x_3=0$ леже тачке A^1, A^2, A^3. Дошли смо до противречности.

Пошто је ранг матрице X једнак 3, то се њена четврта врста може добити из прве три ако се ове помноже одговарајућим бројевима λ_1, λ_2, λ_3 и саберу. Не ограничавајући општост можемо сматрати да је $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Заиста, за то је довољно да се координате тачке A^1 помноже са λ_1, тачке A^2 са λ_2 и тачке A^3 са λ_3.

Сасвим исто тако може се сматрати да се четврта врста матрице Y добија сабирањем прве три врсте.

Постарајмо се сада да коефицијенте формула (*) изаберемо тако да би трансформација задата тим формулама преводила три тачке A^1, A^2, A^3 у три тачке B^1, B^2, B^3. То није тешко учинити. Ставимо координате тих тачака у формуле (*). Тада ћемо добити систем од девет једначина с непознатима a_{ij}. Тај се систем распада на три независна система

$$\begin{aligned} y_i^1&=a_{i1}x_1^1+a_{i2}x_2^1+a_{i3}x_3^1,\\ y_i^2&=a_{i1}x_1^2+a_{i2}x_2^2+a_{i3}x_3^2, \qquad (i=1,\ 2,\ 3).\\ y_i^3&=a_{i1}x_1^3+a_{i2}x_2^3+a_{i3}x_3^3. \end{aligned}$$

Очигледно, сваки од оваквих система је решив јер му је детерминанта различита од нуле.

Сада ћемо показати да је детермината Δ добијене трансформације различита од 0. Заиста, лако је видети да је

$$\begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & y_3^1\\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2\\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}.$$

Пошто је пак детерминанта састављена од елемената l_i^j различитих од 0 (тачке B^1, B^2, B^3 не леже на једној правој), детерминанта Δ конструисане пројективне трансформације такође је различита од 0.

Конструисана пројективна трансформација такође преводи тачку A_4 у B_4. У самој ствари, ако се било у којој од формула (*) смене координате тачака A^1, A^2, A^3 и B^1, B^2, B^3 и добијене једнакости саберу, тада ће се, према горе наведеном нормирању координата, добити резултат смене тачака A^4 и B^4 у тим истим формулама.

Теорема 64. *Пројективним трансформацијама (*) исцрпљују се све пројективне трансформације равни.*

Д о к а з. Нека је S ма која пројективна трансформација. Узмимо ма које четири тачке A^1, A^2, A^3, A^4 такве да по три од њих не леже на једној правој. Трансформација S преводи их у тачке B^1, B^2, B^3, B^4, које такође по три не леже на једној правој. Нека је S' пројективна трансформација (*) која преводи тачке B^i у A^i. Тада трансформација $H=S'S$, која ће, очигледно, такође бити пројективна, оставља тачке A^1, A^2, A^3, A^4 непокретне. Ми тврдимо да трансформација H оставља све тачке непокретне.

Да бисмо то тврђење доказали, биће нам потребно неколико помоћних чињеница. Прво, *пројективна трансформација преводи хармонијске парове тачака у хармонијске парове.* То произлази непосредно из дефиниције хармонијских парова помоћу четворотеменика и из својства пројективне трансформације да праве преводи у праве.

Нека је на равни уведен било који систем пројективних координата x_i. Узмимо на правој $x_1=0$ четири тачке C^i $(0, \lambda_i, \mu_i)$ и образујмо такозвану дворазмеру

$$(C^1C^2C^3C^4)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_4 & \mu_4\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \mu_2\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \mu_2\\ \lambda_4 & \mu_4\end{vmatrix}}.$$

Лако је уверити се да $(C^1C^2C^3C^4)$ не зависи од нормирања координата.

Ми тврдимо да тачке C^1, C^2, C^3, C^4 образују хармонијску групу, то јест пар C^1C^2 хармонијски раздваја пар C^3C^4 тада и само тада кад је $(C^1C^2C^3C^4)=-1$.

Пре него што пређемо на доказивање тог тврђења навешћемо следеће две примедбе. Нека на правој

$$ax_1+bx_2+cx_3=0$$

имамо три разне тачке

$$P'(x_i'),\quad P''(x_i'')\quad \text{и}\quad P'''(x_i''').$$

Тада се координате тачке P''' могу изразити координатама P' и P'' у облику $x_i'''=\xi x_i'+\eta x_i''$. Ово следи из тога што се ма које решење (x_i) једначине $ax_1+bx_2+cx_3=0$ линеарно изражава са два независна решења. У нашем случају то су

(x_i') и (x_i''). Изражавање координата P''' координатама P' и P'' обележаваћемо симболично

$$P''' = \xi P' + \eta P''.$$

Напоменимо још и то да се координате тачака P' и P'' могу нормирати тако да ξ и η буду једнаки 1. За то је потребно да се координате тачке P' помноже са ξ, а координате тачке P'' помноже са η.

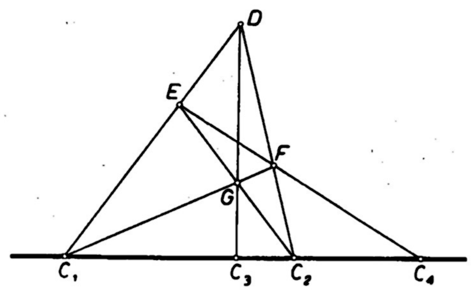
Нека тачке P', P'' и P''' не леже на једној правој. Тада не постоје бројеви ξ, η, ζ такви да је бар један од њих различит од 0 и да задовољавају једнакост

$$\xi P' + \eta P'' + \zeta P''' = 0.$$

У ствари, ова једнакост представља систем од три једнакости

$$\xi x_1' + \eta x_1'' + \zeta x_1''' = 0,$$
$$\xi x_2' + \eta x_2'' + \zeta x_2''' = 0,$$
$$\xi x_3' + \eta x_3'' + \zeta x_3''' = 0.$$

Посматрајући их као систем једначина по ξ, η, ζ видимо да он нема других решења осим $\xi = \eta = \zeta = 0$, јер његова детерминанта, састављена од x_i^k, није једнака 0 (тачке P', P'', P''' не леже на једној правој).



Сл. 55

Сада ћемо доказати да за хармонијску четворку тачака C_i мора бити $(C_1C_2C_3C_4) = -1$. Погледајмо на сл. 55. Уз одговарајуће нормирање координата тачака имаћемо

$$E = C_1 + D, \quad C_4 = C_1 + C_2.$$

Тачка F лежи на EC_4 и C_2D. Одатле је

$$F = \xi' E + \eta' C_4 = \xi'' D + \eta'' C_2,$$

то јест

$$\xi'(C_1 + D) + \eta'(C_1 + C_2) = \xi'' D + \eta'' C_2.$$

Према томе је

$$\xi' = -\eta', \quad \xi' = \xi'', \quad \eta' = \eta'',$$

те се може сматрати да је $F = D - C_2$. Користећи се даље тиме што G лежи на EC_2 и FC_1, аналогно налазимо $G = D + C_1 - C_2$. Искористивши, на крају, то што G лежи на C_1C_2 и DG добићемо $C_3 = C_1 - C_2$.

Дакле, координате C_3 и C_4 изражавају се координатама C_1 и C_2 по формулама

$$\lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \mu_3 = \mu_1 - \mu_2, \quad \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu_4 = \mu_1 + \mu_2.$$

Уводећи ове вредности λ и μ у формулу за дворазмеру, лако добијамо да је $(C_1C_2C_3C_4) = -1$.

Да је једино за хармонијску четворку $(C_1C_2C_3C_4) = -1$, то следи из чињенице да за дате C_1, C_2, C_3 услов $(C_1C_2C_3C_4) = -1$ одређује положај тачке C_4 једнозначно, јер се једнозначно одређује λ_4/μ_4.

Објаснимо када на два задата пара тачака A, B и C, D постоји пар P, Q који хармонијски раздваја A, B и C, D. Конструишимо систем пројективних координата у којем тачке A, B, C, D леже на оси $x_2 = 0$ и имају координате $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(\xi, 0, 1)$. Очигледно, такав координатни систем није тешко поставити. Нека тачке P и Q имају координате $(\xi_1, 0, 1)$ и $(\xi_2, 0, 1)$. Имамо

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \xi_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \xi_2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \xi_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \xi_2 & 1 \end{vmatrix}} = -1, \qquad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \xi_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \xi_2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \xi & 1 \\ \xi_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & 1 \\ \xi_2 & 1 \end{vmatrix}} = -1.$$

Одатле се после једноставног рачуна добија систем једначина за ξ_1 и ξ_2 оваквог облика:

$$\xi_1 + \xi_2 = 2\xi, \quad \xi_1 \xi_2 = \xi.$$

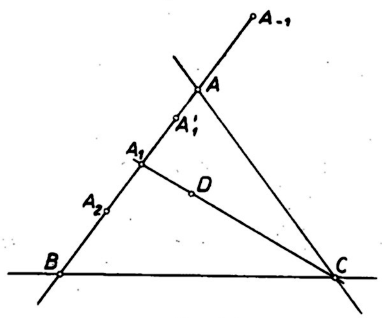
На тај начин су ξ_1 и ξ_2 корени квадратне једначине

$$z^2 - 2\xi z + \xi = 0$$

те ће, дакле, решење бити реално ако је $\xi^2 - \xi > 0$, то јест за $\xi < 0$ и $\xi > 1$, а имагинарно за $0 < \xi < 1$. Геометријски то значи да *пар P, Q, који хармонијски раздваја A, B и C, D, постоји ако се парови A, B и C, D не раздвајају, а такав пар P, Q не постоји ако се парови A, B и C, D раздвајају.*

Одатле следи важан закључак: *раздвајање парова инваријантно је у односу на пројективне трансформације.*

Сада можемо лако завршити прекинуто доказивање теореме. Дакле, пројективна трансформација $H=S'S$ оставља тачке A, B, C, D непокретне. Тврдимо да је та трансформација идентична. Погледајмо на сл. 56. Пошто праве AB и CD остају непокретне, њихов пресек A_1 такође је непокретан. Конструишимо тачку A_2 тако да A_1, A_2 хармонијски раздваја пар A_1, B_1. Очигледно, тачка A_2 остаје непокретна. Затим конструишимо на сличан начин тачке A_3, A_4, ... Све су оне непокретне. Тачке A_i могу се конструисати и у другом смеру. Наиме, тачку A_{-1} конструишемо тако да A_{-1}, A_1 хармонијски раздваја пар A, B. Затим конструишемо A_{-2} итд.



Сл. 56

Потом конструишемо за сваки пар тачака $A_i A_{i-1}$ тачку A_i' тако да A_i', B хармонијски раздваја A_i, A_{i-1}. Све ове тачке такође ће бити непокретне. После тога могли бисмо конструисати непокретне тачке A_i'' итд.

Уведимо на афиној равни с бескрајно далеком правом BC Декартове координате узимајући праве AC и AB за координатне осе, а тачку D за јединичну тачку (тачку с координатама 1, 1).

Једноставним рачуном помоћу дворазмере можемо се уверити да тачке A_n које смо конструисали имају координате x једнаке 1, 2, 3, ..., -1, -2, ... Тачке A_n' имају координате $1/2$, $1^1/_2$, $2^1/_2$, ..., $-1/2$, $-1^1/_2$, ... Једном речју, ако довољно далеко наставимо конструисање тачака A_n'', добићемо све тачке с координатама облика $x=\pm\dfrac{m}{2^n}$.

Узмимо сада произвољну тачку P $(x, 0)$ на правој AB. Ако је $x=\dfrac{m}{2^n}$, тада је она непокретна. Нека ни за какве целе m и n није $x=\dfrac{m}{2^n}$. Очигледно, ма за које n наћи ће се такво m да је

$$(m-1)/2^n < x < m/2^n.$$

Обележимо са A' и A'' тачке чије су координате x једнаке

$(m-1)/2^n$ и $m/2^n$. Оне су непокретне. Пар A, P их раздваја, па, према томе, пар A, HP такође раздваја A', A''. Одатле следи да координата $\bar{x}$ тачке HP задовољава неједнакости

$$(m-1)/2^n < \bar{x} < m/2^n.$$

Како се пак n може узети колико се хоће велико, то је $\bar{x}=x$ и, према томе, $HP=P$.

Дакле, све тачке праве AB су непокретне. Аналогно утврђујемо да су све тачке праве BC непокретне. Нека је сада Q ма која тачка равни. Повуцимо кроз њу две праве које не пролазе кроз A. Пошто оне секу праве AB и AC, оне су непокретне јер садрже по две непокретне тачке. Одатле следи да је тачка Q непокретна. Дакле, $S'S$ је идентична трансформација. Како пак трансформација S' има своју инверзну трансформацију која ће такође имати облик (*), то ће и трансформација $S=S'^{-1}$ имати облик (*).

Теорема је доказана.

§ 9. Други ставови пројективне геометрије

Нека су на пројективној равни уведена два пројективна координатна система S и S'. Наћи ћемо везу између координата x_i и x_i' тачака у тим координатним системима.

Свакој тачки A с координатама x_i у систему S кореспондирајмо тачку A' с координатама x_i' такође у систему S. Та кореспонденција је пројективна. Заиста, нека је g права, а $ax_1+bx_2+cx_3=0$ нека је њена једначина. Пошто су x_i' координате тачке A у систему S', координате x_i' задовољавају једначину праве у систему S': $a_1'x_1'+a_2'x_2'+a_3'x_3'=0$. На тај начин, наведено пресликавање преводи праве у праве. Поред тога оно је, очигледно, обострано једнозначно. Одатле и из теореме 64 закључујемо да су *координате тачака у различитим пројективним координатним системима везане линеарним формулама*

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (*)$$

У простору важе аналогне формуле.

Дворазмера четири тачке $C^i(x^i)$ зове се број који се помоћу пројективних координата тих тачака израчунава по формули

$$(C^1C^2C^3C^4) = \frac{\begin{vmatrix} x_i^1 & x_j^1 \\ x_i^3 & x_j^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i^1 & x_j^1 \\ x_i^4 & x_j^4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_i^2 & x_j^2 \\ x_i^3 & x_j^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i^2 & x_j^2 \\ x_i^4 & x_j^4 \end{vmatrix}} \qquad (i\neq j).$$

Да би ова дефиниција била коректна, потребно је да та формула даје један исти резултат за произвољне i, j и, осим тога, да тај резултат не зависи од избора координатног система. Дата дефиниција има та својства.

Заиста, уведимо специјалан координатни систем такав да тачке $C^{i'}$ имају редом координате $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(\xi, 1, 0)$. У таквим координатама је $(C^1C^2C^3C^4) = \dfrac{1}{\xi}$. Помоћу формула (*) налазимо координате тачака C^i било у којем другом координатном систему: (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{11}, a_{21}, a_{31}), $(a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22}, a_{31}+a_{32})$, $(\xi a_{11}+a_{12}, \xi a_{21}+a_{22}, \xi a_{31}+a_{32})$. Једноставан рачун показује да је и у тим координатама $(C^1C^2C^3C^4) = \dfrac{1}{\xi}$. На тај начин, *дворазмера не зависи ни од координатног система ни од избора индекса координата помоћу којих се она израчунава.*

Пошто се пројективна трансформација задаје оним истим формулама којима и трансформација координата, одатле следи да се *дворазмера тачака не мења приликом пројективне трансформације.*

Дворазмера четири праве једног прамена дефинише се као дворазмера четири тачке пресека ових правих с неком правом c која не пролази кроз центар прамена. Ова дефиниција не зависи од праве c.

Заиста, нека имамо две сечице c и $\bar{c}$. Уведимо пројективне координате узимајући за координатне осе две праве прамена (осе x_1 и x_2) и праву c. Нека је $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ једначина праве $\bar{c}$ у тим координатама.

Посматрајмо пројективну трансформацију $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$. Она преводи праве прамена у њих саме, а праву $\bar{c}$ у c. Одатле, следи да се тачке пресека правих c и $\bar{c}$ с правима прамена преводе пројективном трансформацијом једна у другу и да су, према томе, дворазмере одговарајућих четворака једнаке. Тврђење је доказано.

Очигледно, *дворазмера четири праве прамена не мења се приликом пројективног трансформисања.*

Дворазмера четири равни једног прамена дефинише се дворазмером четири тачке пресека ових равни с правом која не сече осу прамена. Та дефиниција такође не зависи од избора пресечне праве.

Кривом другог реда на пројективној равни назива се фигура чије све тачке задовољавају једначину облика

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{33}x_3^2 = 0. \qquad (**)$$

Очигледно, ова дефиниција инваријантна је у односу на избор пројективног координатног система.

Из теореме о свођењу квадратне форме линеарним трансформисањем променљивих на канонски облик следи постојање таквог пројективног координатног система у којем једначина криве II реда има облик

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0,$$

где је $\varepsilon_i = \pm 1$ или 0.

Криву другог реда зовемо *недегенерисаном* ако су сви $\varepsilon_i \neq 0$. Ако су при том сви ε_i истог знака, криву називамо *имагинарном*, јер нема тачака чије би координате задовољавале једначину криве. Ако међу ε_i има таквих који су једнаки 0, криву називамо *дегенерисаном*. Крива дегенерише у пар правих или у једну праву у коју се тај пар правих слива. Ако су у дегенерисаном облику једначине два коефицијента ε_i различита од 0 и истог знака, тада кажемо да је то дегенерисани пар имагинарних правих.

Наши даљи закључци односе се, строго говорећи, на реалне криве. За преношење тих закључака на имагинарне криве потребно је специјално заснивање.

У вези с кривим II реда у пројективној геометрији уводи се важан појам *поларе тачке* у односу на криву. Из аналитичке геометрије читаоцу је познато да се полара тачке A у односу на криву II реда (**) дефинише као геометријско место тачака B које заједно са A хармонијски раздвајају пар пресечних тачака праве AB и дате криве. Познато је такође да се полара тачке $A(x_i')$ задаје једначином

$$a_{11}x_1'x_1 + a_{12}(x_1'x_2 + x_2'x_1) + \cdots + a_{33}x_3'x_3 = 0.$$

Ова дефиниција није сасвим коректна јер права AB не мора сећи криву (у реалним тачкама). У вези с тим ми ћемо полару дефинисати формално као праву задату наведеном једначином. При том, разуме се, морамо показати да је усвојена дефиниција инваријантна у односу на трансформацију координата, али то, очигледно, није нимало тешко учинити.

Полара има интересантна својства која су такође позната из аналитичке геометрије. Наиме, *ако се тачка A креће правом b, њена полара увек пролази кроз једну исту тачку B чија је полара права b. Поларна кореспонденција тачака и правих инваријантна је у односу на пројективне трансформације равни.*

У пројективном простору уводи се појам површи II реда слично као и појам криве на равни. Уводи се и поларна кореспонденција тачака и равни. Све то сматрамо познатим из аналитичке геометрије.

Сада ћемо се зауставити на једној од основних чињеница пројективне геометрије — на *принципу дуалности*.

Ако у равним аксиомама везе израз „тачка лежи на правој" заменимо изразом „тачка је инцидентна с правом", а израз „права пролази кроз тачку" заменимо изразом „права је инцидентна с тачком", тада, кад заменимо у свакој аксиоми реч „тачка" речју „права" и реч „права" речју „тачка", добијамо тврђења која важе на основу одговарајућих аксиома.

Заиста, у новој редакцији прва аксиома гласи:

За две тачке A и B постоји права која је с тим тачкама инцидентна.

Одговарајуће тврђење: За две праве постоји с њима инцидентна тачка. — То следи из аксиоме I_9.

Аксиома I_2: За две различите тачке A и B постоји највише једна права која је с њима инцидентна.

Одговарајуће тврђење: За две различите праве a и b постоји највише једна с њима инцидентна тачка. То следи из аксиоме I_2.

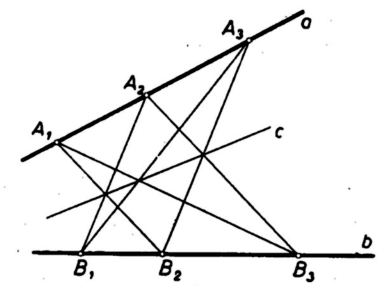
Аксиома I_3: За дату праву постоје три с њом инцидентне тачке. Постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом.

Одговарајуће тврђење: За дату тачку A постоје три са њом инцидентне праве; постоје три праве које нису инцидентне ни са једном тачком. — Заиста, на основу аксиоме I_3 постоје две тачке B и C које не леже на једној правој са тачком A. На правој BC постоје три тачке — по тој истој аксиоми. Праве о којима је реч спајају те три тачке са A.

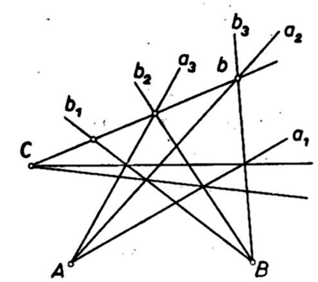
Друго тврђење такође следи из аксиоме I_3. Заиста, спојмо трима правим пар по пар од трију тачака које не леже на једној правој. Оне не пролазе кроз једну тачку.

На крају, тврђење које одговара Дезарговом ставу и које треба прикључити систему равних аксиома, дуално је само по себи.

Следовање тројака правих једнога прамена дефинисаћемо следовањем пресечних тачака правих тог прамена и неке праве која не пролази кроз центар прамена. По аксиоми II_5, та дефиниција не зависи од избора пресечне праве. Пошто смо на тај начин дефинисали следовање правих у прамену, видимо да су за праве прамена испуњене све аксиоме поретка. Одатле се добија следећа теорема, која се зове принцип дуалности на равни.



Сл. 57



Сл. 58

Ако је тачно неко тврђење A за тачке и праве изражено терминима инцидентност и поредак, тада је такође тачно и тврђење A' у којем је реч „тачка" замењена речју „права", а реч „права" речју „тачка".

Пример. Нека су A_1, A_2, A_3 тачке инцидентне с правом a, B_1, B_2, B_3 тачке инцидентне с правом b, а C_{ij} $(i \neq j)$ тачке инцидентне с правим $A_i B_j$ и $A_j B_i$. Тада су тачке C_{ij} инцидентне с једном правом c (сл. 57). То је Папосова теорема.

Дуално тврђење. Нека су праве a_1, a_2, a_3 инцидентне с тачком A, праве b_1, b_2, b_3 инцидентне с тачком B, а праве c_{ij} $(i \neq j)$ инцидентне с тачкама $a_i b_j$ и $a_j b_i$ ... Тада су праве c_{ij} инцидентне с једном тачком (сл. 58).

У пројективном простору такође важи принцип дуалности. Тај принцип тврди да из важења сваког тврђења A за тачке правих и равни следи тврђење A' у којем је реч „тачка" замењена речју „раван", а реч „раван" речју „тачка".

Дуалност у пројективној геометрији има, природно, и свој аналитички израз, који ћемо ми сад илустровати.

Коефицијенте једначине праве називаћемо *тангенцијалним координатама* праве. Очигледно, они су одређени само с тачношћу до произвољног множиоца различитог од 0, исто као и координате тачке.

Једначина

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

за утврђене u_1, u_2, u_3 јесте, као што је познато, једначина праве (с координатама u_1, u_2, u_3), а за утврђене x_1, x_2, x_3 то је једначина прамена правих (с центром (x_1, x_2, x_3)).

Као што је познато, ма какве биле две тачке (y_i) и (z_i) на правој, координате ма које тачке праве могу се представити у облику $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$. Исто тако, ма какве биле две праве (v_i) и (w_i) прамена, координате ма које праве прамена представљају се у облику $U_i = \lambda v_i + \mu w_i$.

На крају, може се показати да се дворазмера четири праве прамена одређује по тој истој формули, једино се координате тачака замењују координатама правих.

У простору се аналогно уводе тангенцијалне координате равни и утврђују аналогне чињенице.

Кривом II класе назива се фигура састављена од свих правих чије координате задовољавају једначину облика

$$b_{11} u_1^2 + 2\, b_{12} u_1 u_2 + \cdots + b_{33} u_3^2 = 0.$$

Из аналитичке геометрије познато је да је крива II класе или образована од тангената криве II реда или се састоји од два прамена правих који се могу и поклапати.

§ 10. Разне геометрије у пројективној схеми

Ф. Клајн је у свом раду познатом под називом „О такозваној нееуклидској геометрији" утврдио интересантну везу између еуклидске геометрије, геометрије Лобачевског и Риманове геометрије у ужем смислу. Сада ћемо размотрити ту везу.

У глави IV ми смо подробно размотрили реализацију геометрије Лобачевског у кругу $x^2 + y^2 < 1$ на еуклидској равни. Очигледно, може се сматрати да је та реализација испуњена на пројективној равни у области ограниченој кривом II реда

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0.$$

Поставља се питање да ли се таква реализација на пројективној равни може добити и за еуклидску геометрију.

Лако је видети да није тешко навести пример такве реализације. Декартова реализација, коју смо разматрали у глави II, јесте таква. Заиста, назовимо тачкама еуклидске равни оне тачке пројективне равни код којих је $x_3 \neq 0$, а кретањима назовимо пројективне трансформације облика

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\vartheta - \varepsilon\, x_2 \sin\vartheta + a_1 x_3, \\ x_2' &= x_1 \sin\vartheta + \varepsilon\, x_2 \cos\vartheta + a_2 x_3, \qquad (*) \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Ако праву $x_3 = 0$ назовемо бескрајно далеком и пређемо на Декартове координате, горње трансформације имаће облик

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\vartheta - \varepsilon\, y \sin\vartheta + a_1, \\ y' &= x \sin\vartheta + \varepsilon\, y \cos\vartheta + a_2. \end{aligned}$$

Истим таквим формулама била су дефинисана кретања у Декартовој реализацији еуклидске геометрије.

Пројективне трансформације (*) могу се окарактерисати и геометријски. Оне не мењају дегенерисану криву II класе $u_1^2 + u_2^2 = 0$. У ствари, та се крива састоји од два прамена правих $u_1 + i u_2 = 0$ и $u_1 - i u_2 = 0$ с центрима у тачкама $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$.

Лако је видети да трансформација (*) или оставља те тачке непокретне ($\varepsilon = 1$) или им размењује места ($\varepsilon = -1$), те стога не мења криву II класе $u_1^2 + u_2^2 = 0$. Но, треба напоменути да пројективне трансформације дефинисане на наведени геометријски начин обухватају не само трансформације (*). Оне имају општији облик

$$\begin{aligned} x_1' &= \rho\,(x_1 \cos\vartheta - \varepsilon x_2 \sin\vartheta) + a_1, \\ x_2' &= \rho\,(x_1 \sin\vartheta + \varepsilon x_2 \cos\vartheta) + a_2, \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}$$

и садрже не само кретања него и сличне трансформације.

Систем аксиома Риманове геометрије у ужем смислу састоји се од аксиома везе, аксиома поретка и аксиоме непрекидности пројективне геометрије и аксиома конгруентности еуклидске геометрије.

Тај систем допушта реализацију сличну оној коју смо малочас разматрали. Наиме, све равне аксиоме биће испуњене ако под тачком будемо разумели тачку пројективне равни, под правом пројективну праву, однос припадности и поретка употребљавамо у смислу пројективне геометрије и, напослетку, под кретањима разумемо оне пројективне трансформације које не мењају имагинарну недегенерисану криву II реда $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.

Аналогна реализација важи за просторни систем аксиома.

Криве II класе $u_1^2+u_2^2 \pm u_3^2=0$ образоване су од тангената кривих II реда $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$. Зато свака пројективна трансформација која не мења криву II реда $x_1^2+x_2^2 \pm x_3^3=0$ не мења ни криву II класе $u_1^2+u_2^2 \pm u_3^2=0$. Одатле следи да ће пројективне трансформације које не мењају криву II класе $u_1^2+u_2^2+\varepsilon u_3^2=0$ одговарати кретањима у Римановој геометрији ако је $\varepsilon=+1$, кретањима у геометрији Лобачевског ако је $\varepsilon=-1$ и, напослетку, еуклидским кретањима и сличним трансформацијама ако је $\varepsilon=0$.

Крива II реда или II класе која је инваријантна у односу на пројективне трансформације које одговарају овој или оној геометрији зове се *айсолуйа*.

Кад смо разматрали Клајнову интерпретацију геометрије Лобачевског напоменули смо да је у тој интерпретацији растојање двеју тачака A и B равни Лобачевског једнако логаритму дворазмере четири тачке — две дате и две пресечне тачке праве AB и апсолуте. Аналогни резултат важи и у Римановој геометрији. И, у све три геометрије угао између правих a и b мери се логаритмом дворазмере четири праве од којих су две a и b, а преостале две припадају прамену ab и апсолути као кривој II класе.

Систем аксиома *афине іеомеШрије* састоји се од свих аксиома еуклидске геометрије осим аксиома конгруентности. Систем аксиома афине геометрије на равни обухвата још Дезаргову аксиому у одговарајућој формулацији која води рачуна о могућности да су праве паралелне.

Лако је навести реализацију система аксиома афине геометрије. За то је потребно, једноставно, узети Декартову реализацију еуклидске геометрије не уводећи кретања. Одатле следи да се та реализација може интерпретирати на пројективној равни из које је уклоњена једна права (обично је зову бескрајно далеком).

Увођење Декартових координата на афиној равни (§6) омогућује да се без нарочитог труда изведе закључак да је систем аксиома афине геометрије на равни потпун, исто онако како смо то чинили и за друге геометрије.

На први поглед може се учинити чудно то што је систем аксиома афине геометрије потпун, јер је он само

део система аксиома еуклидске геометрије. Али, у томе нема ничег чудноватог, јер аксиоме кретања, по којима се ови системи разликују, претпостављају нов однос — „кретање".

У афиној геометрији уводи се важан појам *афине шрансформације*. Ова трансформација у случају равни преводи праве у праве. Доказује се да се свака афина трансформација у Декартовим координатама задаје формулама

$$x'=a_1x+b_1y+c_1 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$y'=a_2x+b_2y+c_2,$$

На тај начин, у наведеној пројективној интерпретацији она се задаје формулама

$$x_1'=a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3,$$
$$x_2'=a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3,$$
$$x_3'=x_3$$

и састоји се од оних пројективних трансформација које задржавају као целину бескрајно далеку праву $x_3=0$.

Заједничко свим геометријама које смо овде посматрали јесте то да у свакој од њих постоји група трансформација која преводи тачке у тачке а праве у праве, и не мења однос припадности и поретка. То су кретања у случају еуклидске геометрије, геометрије Лобачевског и Риманове геометрије, афине трансформације у афиној геометрији и пројективне трансформације у пројективној геометрији.

Нека у некој од поменутих геометрија имамо две фигуре F и F' које се одговарајућом трансформацијом могу превести једна у другу. Очигледно, ми не можемо на тим фигурама запазити никакву разлику јер њихови одговарајући елементи — тачке и праве — имају исти однос припадности и поретка. Одатле следи да објект проучавања у овој или оној геометрији јесу она својства фигура која су инваријантна у односу на трансформације одговарајуће групе.

Природно, поставља се питање какве су оне најпростије фигуре састављене од тачака и правих које у погледу односа припадности и поретка својих елемената имају исто устројство, али нису еквивалентне у односу на трансформације дате геометрије. Размотрићемо неколико примера.

Почнимо од пројективне геометрије. Лако је видети да се ма које две тачке могу превести пројективном трансформацијом ма у које друге две, ма које три тачке које леже на једној правој могу се превести ма у које три тачке које леже на правој. И само се четири тачке праве не могу увек превести у четири друге тачке, јер дворазмере ових четворака треба да буду једнаке. На тај начин, у пројективној геометрији најпростију нетривијалну фигуру чије све тачке леже на правој представља четворка тачака.

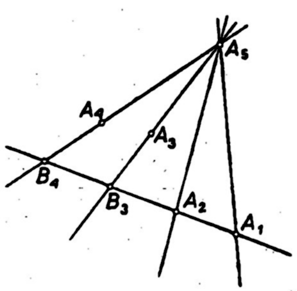
Треба рећи да ту четворку њена дворазмера потпуно карактерише. У пројективној геометрији дворазмера је најпростија и то основна бројна инваријанта. Може се показати да се ма која бројна инваријанта фигуре у односу на пројективне трансформације може изразити дворазмерама њених тачака или тачака фигуре која се помоћу дате фигуре једнозначно конструише.

Пример. Фигуру састављену од пет тачака A произвољног положаја можемо окарактерисати (сл. 59) дворазмером четири тачке A_1, A_2, B_3, B_4.

У случају афине геометрије најпростија фигура на правој састоји се од три тачке. Њена бројна инваријанта је проста размера Δ трију тачака. У Декартовим координатама x, y та размера се одређује по једној од формула

$$\Delta = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \quad \text{или} \quad \Delta = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$$

и представља дворазмеру четири тачке — три дате тачке и бескрајно далеке тачке. Како приликом афиног трансформисања бескрајно далека тачка на правој (пројективној) остаје непокретна, јасно је да је та дворазмера инваријантна. Да фигура од двеју тачака нема инваријанту — то је јасно отуда што се ма које две тачке афином трансформацијом преводе ма у које друге две.



Сл. 59

Свака инваријанта фигуре у односу на афине трансформације може се изразити простим размерама.

У еуклидској геометрији, геометрији Лобачевског и Римановој геометрији најпростија фигура која има инваријанту јесте пар тачака. Та инваријанта је растојање тих тачака. Све друге инваријанте ма које фигуре могу се изразити растојањима између тачака.

САДРЖАЈ

Глава IV

Геометрија Лобачевског

Глава V

Основе пројективне геометрије