ELIE CARTAN
професор на Сорбони

Улога Француске у развоју математике

СА ПРЕДГОВОРОМ

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА
професора универзитета

Публикације Југословенског астрономског друштва — 2

БЕОГРАД, 1941

Предавање одржано у Француском институту у Београду
27 фебруара 1940
Превео Милорад Б. Протић
Посебни отисак из Сатурна 1940, VI, бр. 4—5, 6—7.

Штампа „Привредни Преглед", Београд

ПРЕДГОВОР

Много пута је речено да права, чиста наука нема ни отаџбине, ни границе, да нема науке ни француске, ни енглеске, ни немачке, већ да постоји само наука која је општа и припада целоме свету. То је донекле и тачно у извесном смислу, али не и са свих гледишта. Такво се тврђење не може примити ни за математику, јер и она, поред све апсолутности истина које су њен предмет и које су независне од људских схватања и путева којима се до њих долази, ипак има и један специфички карактер што је везује за личност. Јер, математичке науке имају се сматрати и као једна врста уметности, у којој лична осетљивост и укус остављају трага и где индивидуална конструктивна моћ и једна нарочита естетика играју знатну улогу. Математичке теорије су инвидидуалне конструкције чија је грађа општа и на расположењу целоме свету, али у чијој композицији игра велику улогу архитекта и његове личне особине. Оно што се при таквим конструкцијама сматра као лепо, оно у чему се огледа стваралачка вештина и укус аутора, долази врло често од личних особина конструктора, па чак и од особина расе, од васпитања и од средине у којој је поникла ауторова активност.

У томе погледу има пуно смисла говорити о француској математици, која има толику своју индивидуалност, да је иоле извежбаном оку могућно, на једној научној конструкцији у области математике, распознати одлике и отиске француског стваралачког духа. Али, поред тога, о француској математици се може говорити и са гледишта учешћа расе у стварању науке, са гледишта величине и квалитета доприноса који је једна нација учинила на светској научној грађевини. Са тога гледишта ван сваке је сумње да француска наука заузима једно од највиднијих места у реду твораца данашње позитивне науке. Ни једна нација не може на пољу позитивне науке показати толики број великих имена, колико их може показати Француска.

Писац овога приказа француске математике, професор на париској Сорбони и члан париске Академије наука, Ели Картан, је једна горостасна фигура у модерној Вишој Геометрији. Својим радовима он је толико проширио и уопштио геометриске појмове и истине, прилагодивши их на најразноврсније просторе, да се у томе дошло готово до крајњих могућности. То уопштење, које је данас основица многим научним теоријама, захтевало је и створило читаву једну нову аналитичку апаратуру, чији је један од главних твораца сам професор Картан; рукујући њоме као прави виртуоз, он је помоћу ње извлачио из области непознатога читав један свет дубоко скривених геометриских истина.

Нико није био позванији од професора Картана да у пуној светлости прикаже улогу француских научника у развоју математике, и они који се код нас интересују за ту улогу и развој науке, морају му бити дубоко захвални на идеји да у нашој средини упозна наш математичарски свет са најважнијим тековинама француске науке којима се сви ми дивимо.

Михаило Петровић

Као и свака наука, математика је заједничко, интернационално дело: она је заједничка баштина свих културних народа, чијем одржању и развоју свако доприноси према својим моћима. Било би веома смешно кад математичар, достојан тог имена не би одао пуну дивљења пошту великим страним генијама: Италијану Galilei-у, Енглезу Newton-у, Немцу Leibnitz-у, Швајцарцу Euler-у, Норвежану Abel-у, Немцима Gauss-у и Riemann-у, да међу покојнима споменемо само највеће. Они су отворили нове путеве у различитим гранама науке, која без њих не би била оно што је. Али, међу напорима разних народа, ја ћу вам, надам се, показати да су стварању математике Французи дали један од најзначајнијих прилога, и да у бројности великих математичких умова Француска не заостаје ни за којом другом нацијом. Чини ми част и радост што сам данас позван да то покажем пред пријатељском публиком, у земљи која је са мојом везана толиким заједничким успоменама.

У математици, као у свакој науци, постоје две врсте научника. Прво, велики, који отварају краљевске путеве дајући какву нову идеју, обично просту, на коју нико пре њих није мислио; а затим, они што на пространом земљишту које су раскрчили први, обрађују свој врт, убирају често укусне плодове, и жању каткад прекрасну жетву. Улога је последњих значајна, чак неопходна; али је јасно, да човечанство, и с правом, памти нарочито имена првих. Данас ја ћу вам говорити о њима.

Краљ Henri IV, прича Joseph Bertrand, приликом пријема холандског амбасадора у двору у Fontainebleau-u, набрајаше са задовољством велике француске геније, који су у књижевности, у уметности или својим значајним радом, превазишли своје такмаце. — „И ја им се дивим, одговори Холанђанин, који се бавио геометријом, али до данас Француска није дала ни једног математичара". — „Romanus se trompe!" ускликну Henri IV, и, окренув се једноме од послуге, нареди да нађе господина de la Bigottière-a. Господин de la Bigottière био је у ствари François Viète (1540 — 1603), први велики француски математичар, оснивач модерне алгебре. Он је први дошао на генијалну мисао да оперативни симболизам, који се постепено изграђивао још од античког доба, пренесе на слова, како би олакшао решење нарочитих бројних једначина; он је веома заслужан за систематски развој те идеје, којој је предвиђао неограничену разгранатост. Крајем XVI века, кад су Galilei и једна напредна школа алгебричара прославили Италију, Француска је њиме заузела место у оснивању модерне математике. Додаћу да је Viète био доста дуго у односима са једним од првих ваших математичара, Марином Геталдићем, (1566 — 1626), који се родио у Дубровнику, а који је у Паризу, 1600 год., издао једно од последњих Viete-ових дела.

XVII век је за Француску нарочито славно доба. У историји математике, механике и физике издвајају се нарочито рељефно три имена: Descartes-a, Pascal-a и Fermat-a.

Descartes, философ, математичар, физичар, често је сматран за освештача нове ере у историји човечија ума. Као физичар, његови су покушаји објашњења Света брзо застарели; али је његова замисао, да се све физичке појаве објасне пространством и кретањем, још и данас занимљива, јер је и оснивач опште релативности пошао од чистог принципа, који физику своди на геометрију; развој математике, међутим, омогућио је Einstein-u да томе принципу дâ много бољу реализацију од Descartes-ове. У математици се Descartes-ова улога не

сме потценити. Откриће аналитичке геометрије (1637) могло би му се можда оспорити. Извесно је да су грчки геометричари у своја размишљања уводили бројеве и рачуне, али код Грка ти бројеви нису изгубили сасвим геометријски карактер, што су га имали стално у јелинској науци; трагови тога још постоје у говору, јер под именом „квадрат" и „куб" разумемо и број, и геометријски облик. Descartes је први дошао на мисао да за претстављање геометријских облика и свођење геометријских резоновања на рачун, систематски искористи бројеве in abstracto. Тиме је он створио оруђе нео-

René Descartes

бичне моћи. Њему треба приписати развоје што их геометрија дугује у првом реду аналитичкој геометрији, а затим диференцијалној; овој последњој он је сам уосталом дао један општи метод за одређивање тангената кривих линија, бар алгебарских. Математичар је благодарећи аналитичкој геометрији успео мало по мало да схвати просторе маколиког броја димензија, и навикао да у тим просторима геометријски размишља. Може се исто тако рећи да се математичари захваљујући једино њој лако сналазе у просторима, као што је сферни тродимензионални простор, што су их физичари недавно замислили за објашњење физичких феномена. У томе су без сумње далеке, али извесне последице генијална Descartes-ова проналаска. Њему се исто тако дугује у алгебри за правило о знацима, а у чистој геометрији за теорем што га је касније независно нашао Euler, по коме и носи име: тај теорем даје однос између броја темена, страна и ивица извесног конвексног полиедра; у ствари то је један од теорема науке која још није била створена, analysis situs. У механици, најзад, својим принципом одржања количине кретања, Descartes је показао интуицију, коју је требало само прецизирати да би пружила један од великих принципа што сачињавају основу механике.

Blaise Pascal

Pascal (1623 — 1662), изванредни и чудни геније, дубоки мислилац, показао је још у раној младости необичну даровитост за геометрију, јер је већ у шеснаестој години написао дело „Traité sur les sections coniques", тј. о кривим линијама што су их стари изучавали као равне купине пресеке, а које се јављају у Kepler-овим законима планетских кретања. Pascal се служио радовима свога савременика Desargues-а, једног од највећих француских геометара, који је, са Pascal-ом заједно, био претеча пројективне геометрије; узевши, као и Desargues, перспективу као полазну тачку, Pascal успе да сва својства која се могу приписати тим кривим линијама, сведе на једно једино и заиста чудно, на својство

„мистичног хексаграма", да употребимо Pascal-ов назив: ако се у коничном пресеку уцрта шестоугаоник, пресечне тачке три пара супротних страна леже на једној правој. У томе првом свом раду Pascal је показао проналазачку моћ великог геометра.

После Pascal-а, претече нацртне геометрије, ево Pascal-а ствараоца рачуна вероватноће. Кад му је витез de Méré, његов пријатељ, поставио једном два питања у вези са хазардним играма, Pascal успе да свођењем свих могућих случајева на најпростији, нађе решење веома једноставним начином. Fermat је са своје стране дао решење засновано на сасвим другоме принципу. Генеза принципа рачуна вероватноће може се следити из писама што су их ова два велика ума слали један другоме. Pascal-у није умакао домет нових истраживања: „Везујући тачност математичких приказа за неизвесност случаја, говорио је, новој се науци може с правом дати запањујуће име: Геометрија случаја". Познато је, из чувеног доказа опкладе, колико су Pascal-ова размишљања о тој геометрији случаја имала утицаја на развој његових мисли. Зна се исто тако колико је значајна њена улога у развоју модерне науке, где су читави делови физике у ствари само поглавља рачуна вероватноће, а многи физички закони, закони случаја.

Fermat (1601 — 1665), о коме смо мало пре говорили, један је од највећих математичких генија. Саветник у скупштини у тридесетој години, он то остаје све до своје смрти. Његовим звањем није му била опредељена математичка слава, али је он свакако налазио довољно слободна времена за своја најмилија изучавања. Fermat је нарочито познат по својим истраживањима у области аритметике и теорије бројева. Њему се дугује за мноштво теорема што их је исписао без доказа на маргини једног примерка Диофантовог дела о неодређеним једначинама, дела кога је Bache de Mériziac, писац књиге „Problèmes plaisants et délectables", раније био издао (1612). Извесно да је Fermat имао, или се бар верује да је имао њихове доказе. Најпознатији међу тим теоремима је онај, по коме збир **n**-тих степена два цела броја не може бити једнак **n**-том степену неког трећег целог броја за **n** веће од 2, теорема позната као велики Fermat-ов став. Овај је теорем изазвао небројено много радова, али нико после Fermat-а није успео да са извесношћу утврди ни тачност, ни погрешност његову, и поред позивања на најапстрактније теорије модерне алгебре, о којима Fermat није ни слутио. Одавно је познато да би теорем, ако није тачан, могао бити погрешан само за изузетне вредности степена n, али се не зна да ли тих вредности има коначно или бесконачно много. Истраживањима што их је изазвао само овај теорем, створеним и усавршеним математичким теоријама, Fermat је знатно утицао на развој теорије бројева. Савременици његови признавали су му у тој области несумњиву способност. У једноме од својих писама Pascal изјављује да га Fermat-ови нумерички изналасци превазилазе, и да им се може само дивити.

Али се Fermat није ограничио само на теорију бројева. Прва половина XVII века је период у коме су интегрални и

Pierre de Fermat

диференцијални рачун добили снажан импулс. Код интегралног рачуна (рачун површина, запремина, одређивања тежишта), довољно је споменути имена Cavalieri-а, de Roberval-а. Fermat је у тој области својим истраживањима отишао веома далеко, те се за класичне поступке интеграције дугује њему. Једне ноћи док га је мучила страховита зубобоља, решавајући проблеме рулете, да би заборавио бол, Pascal је дошао до интеграције степенованих тригонометријских функција. У диференцијалном рачуну (проблем тангената)

наилази се на иста имена. Својим методом „de maximis et minimis", Fermat уводи у појам бескрајно малог. Lagrange и Laplace у Fermat-у и виде доиста оснивача инфинитезималног рачуна, а Emile Picard каже да је Pascal-ово дело о рулети прво дело интегралног рачуна. И сами обрасци Leibniz-овог инфинитезималног рачуна поникли су из бележака што их је Leibniz писао на копији једног Pascal-овог рукописа, из кога је он, према сопственим речима, „изненада исцрпео светлост".

Било би неправедно напустити ове умове а не споменути, да је Pascal у своме тако краткоме животу нашао времена, да у двадесетосмој години изгради прву аритметичку машину, способну за сабирање и одузимање. Он је, после Архимеда, својим делом „Traité de l'équilibre des liqueurs" био оснивач хидростатике, па није неемотивно што се у малој капели, која је подигнута у порти цркве Port Royal, недалеко од посмртне Pascal-ове маске види буре које му је служило за проверавање онога, што данас зовемо Pascal-овим принципом. Зна се највад за његове огледе на Puy de Dôme о атмосферском притиску, вероватно по наговору P. Mersenne-а, душе малене групе философа, математичара и физичара, која је, пре оснивања Академије наука у 1666, образовала прву малу, веома живахну академију. Срећна времена, кад се један исти човек могао једновремено одликовати и философијом, и математиком, и физиком, и кад је философ, као говорник Malebranche, имао генијално предосећање да су боје последица већег или мањег броја трептаја што производе светлост!

II

Другом половином XVII и почетком XVIII века доминирају велике фигуре Холанђанина Huygens-а (1629 — 1695), Енглеза Newton-а (1642 — 1726) и Немца Leibniz-а (1646 — 1716). Биће довољно да споменемо, да се последњој двојици дугује за изналажење, или ако хоћете, за систематизацију инфинитезималног рачуна, док је први чувен по својим радовима у диференцијалној геометрији, рационалној и примењеној механици, а нарочито својим делом о светлости, где је први пут развијена таласна теорија, насупрот Newton-овој емисионој теорији. Newton-ов доказ да су кретања звезда на небу и кретања тела на Земљи подложна истим законима механике, претставља несумњиво значајну научну револуцију, која је везана за овај период. Један исти закон, општа гравитација, објашњава кретање планета, кретање Месеца и комета, земљину тежу, плиму и осеку, итд.... Newton-ов геније створио је сасвим нову науку, небеску механику. Али ако су се принципи и први почеци те теорије јавили у Енглеској, она је за свој развој нашла у Француској нарочито погодно земљиште. Да бих вас убедио, биће довољно да наведем само имена оних, који су највише допринели њеноме развитку: Clairaut, d' Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, Poisson, Le Verrier, Tisserand, и најзад и нарочито Henri Poincaré.

Зауставићу се мало на првоме од њих, Clairaut-у. Alexis Clairaut (1713 — 1765), друго у породици од двадесетједног детета, чији је отац био професор математике,

Alexis — Claude Clairaut

показивао је даровитост сличну Pascal-овој; насупрот Pascal-у, међутим, његови први радови нису могли претсказати значај каснијих. У дванаест и по година шаље Академији наука једно саопштење, а у шеснаестој чланак о линијама двоструке кривине. У осамнаестој години краљ га, противно правилима, поставља за члана у Академијином отсеку за механику. Прећи ћу преко његових истраживања на пољу чисте математике, нарочито оних што се односе на интеграцију

диференцијалних једначина, познатих свима који су учили диференцијални рачун, да бих доспео до радова по којима је постао славан. Newton и Huygens су из теоријских разлога предвидели спљоштеност Земље на половима, па су је чак и израчунали. Али се у ту спљоштеност посумњало после мерења дужине лука париског меридијана, што га је Cassini обавио 1701 на Пиренејима. После конфузних, али живих расправа, Академија наука одлучи 1736 да под вођством Maupertuis-а пошаље у Лапонију једну мисију са задатком да тамо измери дужину меридијанског лука. Clairaut је такође учествовао у експедицији, чији радови, отежани веома снегом и поларном ноћи, дадоше за дужину степена меридијана вредност изразито већу од вредности коју је Cassini нашао у Француској: спљоштеност Земље постала је очигледна. Све ловорике због успеха експедиције побрао је природно Maupertuis: сликао се главе замотане у међедовину како руком гњечи земаљски глоб. Али је Clairaut наставио да мисли о узроку те спљоштености и покушавао да теоријски одреди геометријски облик неке флуидне планете под дејством Њутнове привлачности. Резултати тих његових размишљања и рачуна изложени су били у књизи: La Théorie de la figure de la Terre (1743), високо класично ремек-дело, како је рекао d' Alembert, за све што је до тада било урађено у тој области, и које означава значајан датум у историји небеске механике. Clairaut је исто тако био и претеча у тешкој теорији Месеца, коју је покренуо Newton. Своје резултате он је изложио у књизи: Théorie de la Lune (1732), којој је две године касније додао и нумеричке таблице, а које, како каже Fontaine, показују „сваки Месечев корак на небу". Неколико година касније Clairaut је, предвиђањем датума очекиваног повратка Halley-еве комете, постао опште славан:он је наиме нашао да ће комета због Сатурнова дејства закаснити за 100, а због Јупитерова за 518 дана, и да ће кроз перихел проћи око 13 априла 1759, али да тај датум, због многобројних количина што их је морао занемарити, може бити погрешан за око месец дана: пролаз комете кроз перихел догодио се стварно 13 марта. Сличну славу доживео је скоро за столеће касније француски астроном Le Verrier, предвидевши на небу место непознате планете која је реметила кретање Ураново.

III

Другом половином XVIII века доминирала су имена Euler-а и Lagrange-а, којима треба додати и име d' Alembert-а, кога не треба ипак упоредити са првом двојицом. Leonhard Euler (1707 — 1783) „princeps mathematicorum" рођен у Базелу, провео је један део живота у Петрограду и Берлину: његов је геније засјао у свим гранама математике, а његово дело имађаше значајног и трајног утицаја. Сећаћу се увек очараности што сам је, по завршеном школовању у гимназији (classe de Mathématiques Spéciales), доживљавао читајући његов Увод у инфинитезималну анализу, који сам добио као награду: читав један нови свет се отварао преда мном и припремао ме да боље схватим предавања што ћу их затим слушати на Sorbonne-и и у Ecole Normale.

D' Alembert (1717 — 1783) је оставио трага у различитим областима математике. Његово име носи у алгебри један чувени теорем, по коме свака алгебарска једначина има исто толико стварних и имагинарних коренова, колико и јединица у своме степену. Доказ што га је d' Alembert дао за тај теорем није тачан, али ни онај што га је са своје стране, на сасвим другом принципу, дао Euler није без замерака. Требало је да дође чувени математичар Gauss па да нађе тачан, а Cauchy прави и веома прости разлог теорему. У анализи навешћу само прво тачно, d' Alembert-ово, постављење парцијалне диференцијалне једначине треперења струне. У механици, најзад, принцип, који је познат под именом d' Alembert-овог принципа, омогућује свођење динамике на статику и припрема пут Lagrange-овој аналитичној механици.

Lagrange (1736 — 1813), рођен у Торину у некадањој француској породици, провео је као и Euler неколико година у Берлину, али се 1787 коначно настанио у Паризу, те га Француска с правом може убројити међу своје славне. Он је један од највећих математичара свих времена. Његова се делатност распростире на све математичке области. У теорији бројева он открива Fermat-ов теорем за изложитељ 4. У алгебри, он припрема пут Abel-у, Gauss-у и Gaulois-у развијањем јединственог метода који решење неке алгебарске једначине своди на образовање и решавање једначине нижег степена: али показује и да се једначине петог степена не могу, као једначине трећег и четвртог, решити на тај начин.

У анализи он даје метод за интеграцију парцијалних диференцијалних једначина првог реда и стиче појам сингуларног решења. У теорији функција он покушава, али не успева сасвим да да ригурозну основу инфинитезималном рачуну, чији принципи нису још били стекли жељену тачност, иако се није сумњало у истинитост његових последица; па ипак је то дело, у коме је једна функција по први пут била апстрактно претпостављена, независно од њеног геометријског или механичког значења, било од значајног утицаја и припремило пут модерној теорији функција. Lagrange-ов дух уопштавања показује се јасно у његовим радовима на рачуну варијација.

Тај је рачун настао током XVIII века, из радова Швајцараца Bernouilli-а и Euler-а. Његово је порекло у проблемима Геометрије и Механике, од којих је најпростији био: из-

Joseph — Louis Lagrange

налажење најкраће линије између двеју тачака на датој површини; непозната је овде, уместо броја, нешто много сложеније: линија састављена из небројено тачака. Maupertuis-овим принципом најмањег дејства, којим се изналажење трајекторије материјалне тачке у датоме пољу сила своди на проблем максимума или минимума, овај је рачун у Механици постао од необична значаја. Не треба заборавити, усталом, да је Fermat већ свео био законе Оптике на сличан принцип, по коме се светлосни зрак простире временски најкраћим путем. Lagrange је у теорију, где готово сваки проблем захтева нарочити поступак, увео један општи метод, независан од природе проблема, примењујући инфинитезималну варијацију на непознату линију и показао како се она може израчунати.

Прећи ћу преко Lagrange-ових радова у Небеској механици, да бих се зауставио на његовом основном раду: стварању **Аналитичне механике** (1788). Сви велики принципи савремене Механике стечени су постепено благодарећи Galilei-у, Descartes-у, Huygens-у, Leibniz-у, Newton-у и d'Alembert-у. Али је одређивање кретања неког система под дејством датих сила било често веома отежано неопходношћу да се води рачуна о непознатим силама везе. Генијалним

Jean — Victor Poncelet

ударцем, увођењем појма виртуелна рада, Lagrange потпуно отклања сметњу, бар у случају кад нема трења, и даје сасвим општи метод за готово аутоматско постављање једначина које одређују тражено кретање: довољно је само да се одреди израз живе силе система и израз елементарног рада датих сила за бескрајно мало виртуелно његово померање. Осим практичног, ова дивна креација има и знатан философски значај, јер у потпуности осветљава оно што је са гледишта механичких својстава битно у једном материјалном систему.

Lagrange-ов се геније овде изједначује са Descartes-овим који је створио аналитичну геометрију.

„Lagrange-ове једначине" у Аналитичној механици биле су аналитички модел различитим механичким објашњењима извесних физичких теорија. Са тога гледишта треба им приписати велики философски значај; али иако се највећим делом XIX века имала илузија да се све може објаснити Механиком, као што је Descartes био у заблуди да све објасни Геометријом, она је данас, изгледа, потпуно напуштена. Уочимо ипак способност математике да физичарима пружи аналитичке калупе за њихове теорије. Недавно је за то било многобројних примера.

Извесни одлични мислиоци су у тим изванредним синтетичким конструкцијама — као што је Lagrange-ова — која омогућују да се једним јединим погледом обухвати бескрајан низ феномена, видели опасност: оне стварно могу довести до тога да се изгуби веза са конкретном стварношћу. Тако је и велики геометар Poncelet, познат по својим радовима у Механици, избегавао да се користи Lagrange-овим методом, следећи радије до најмањих појединости у свакоме механичком проблему уплив различитих сила, да би, корак по корак, дошао до њихових коначних дејстава. Из истог разлога Poncelet није хтео да се служи ни Аналитичном геометријом, пратећи међусобне односе различитих геометријских фигура радије непосредним испитивањем, применом класичних геометријских принципа. У томе погледу постоје две врсте мислилаца; за прогрес Науке неопходни су и једни и други. Међу великим француским математичарима има их обе врсте.

IV

Француска супериорност у математици, веома изразита већ крајем XVIII столећа (Euler је умро 1783), нарочито се истакла за време Француске револуције и почетком XIX века. Међу великим именима тога доба треба споменути Monge-a, Laplace-a и Legendre-a.

Laplace (1749 — 1827) је опште познат по својим радовима на Небеској механици, коју је изложио у своме изврсном делу „Exposition du Système du Monde". Чудновати резултат да се готово сви небески феномени могу објаснити до појединости, довео га је до дуго времена класичног схватања научног детерминизма, према коме је познавање положаја и брзина, у одређеноме тренутку, различитих тачака што образују Васиону довољно да се из тога изведу њихови положаји и брзине ма у коме тренутку, под условом само да су познати закони сила — схваћених по моделу сила Њутнове гравитације — према којима те тачке делују једне на друге. Математичка се физика дуго времена и развијала према томе схватању. Тек сасвим недавно оно је у потпуности

Pierre Simon Laplace

оборено развојем Електромагнетизма и Атомске физике. Па ипак је то схватање било од необично великог уплива на развој науке. Laplace-у се осим тога дугује и за веома значајно дело „Théorie analytique des probabilités" (1812), у коме је најважнији део: примена појма вероватноће у теорији најмањих квадрата, на шта је већ Legendre био указао. Проучавајући атракцију елипсоида Laplace је увео сферне функције, помоћу којих се може изразити било која функција тачке на сфери. Ту је исто тако и чувена Laplace-ова једначина коју задовољава Њутнов потенцијал, за чије се увођење у науку

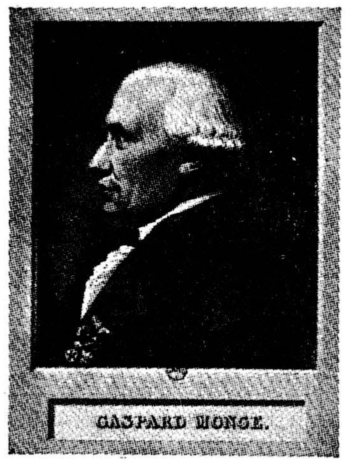
дугује Lagrange-у. Она се јавља у многим проблемима Анализе, Геометрије, Механике и Физике.

Са Legendre-ом (1752 — 1833) присуствујемо обнављању теорије бројева, коју је уосталом Euler веома успешно обрадио. У Аритметици Legendre-у се дугује за закон реципрочности, по коме он и носи име, ма да га је Euler био објавио неколико година раније. Али га је Legendre први јасно изложио и дао делимични приказ. По трећи пут је тај исти

Adrien — Marie Legendre

закон открио касније Gauss, и дао му тачне и потпуне доказе. Значајно Legendre-ово дело, на које је утрошио много година рада, је књига „Sur les intégrales elliptiques" у два дела, објављена 1825 и 1826 године. У њему је он изнео потпуну студију тих интеграла, у којима се јавља квадратни корен полинома четвртог степена, и показао различите форме које им се могу дати. Тим радом Legendre је претеча красне теорије елиптичних функција, препустивши Jacobi-u и Abel-u славу за њено оснивање. Напоменимо најзад његове „Eléments de Géométrie" (1794), који су имали небројено издања и у англо-саксонским земљама убрзо у настави заменили Еуклидове елементе; у историји нееуклидске геометрије они су били од извесна значаја.

Monge (1746 — 1818) је један од највећих француских геометара. И то из два разлога. Својим оснивањем модерне нацртне геометрије он се најпре прикључује дугом историјском развоју перспективе, чије су принципе познавали већ италијански сликари из доба Ренесансе, и коју су Desargues и затим Pascal значајно применили на теорију коничних пресека, на које је француски геометар de la Hire следећи исти пут касније проширио теорију пола и полара код круга. Monge је систематизирао нацртну геометрију и у њу унео конструкције на површинама другачијим од равни. С друге



Gaspard Monge

стране Monge је својим „Applications de l' Analyse à la Géométrie" дао знатан потстрек диференцијалној геометрији, области која се брзо отцепила од Descartes-ове аналитичне геометрије, продубљеном студијом својстава површина, што су је освештали Euler и Meusnier; њему треба благодарити за појам линија кривине, са применом у стереотомији; његова је замисао да се простране фамилије површина окарактеришу као скуп решења једне исте парцијалне диференцијалне једначине. Он је успео да интегрише једначину минималних површина, површина које су касније, па и данас још, биле предмет значајних радова, и које су остварене на опипљив начин у Plateau-овим огледима. Monge-ове теорије су биле предмет његових предавања на Ecole Normale, коју је основао Конвент 1795, као и на Ecole Polytechnique, где су исто тако предавали и Lagrange и Laplace. Око себе он је умео да окупи простран круг ученика, међу којима ћу се задовољити да споменем Dupin-a, позната по своме делу „Développement de Géométrie", где уводи и појмове коњугованих тангената и индикатрисе у једној тачци неке површине; може се исто тако сматрати и за претечу нове гране у геометрији: афине геометрије.

V

Прва се половина XIX века у Француској одликује именима Fourier-a, Cauchy-a, Poncelet-a и Galois-a. Иако међусобно доста различити генији, они су сви показали нове путеве у Науци.

Fourier (1768 — 1830) се може сматрати за оснивача Математичке физике. Прећи ћу преко његових значајних радова у Алгебри, да бих се зауставио на »Théorie mathématique de la chaleur«, коју је објавио 1822, али о којој је размишљао бар од 1807. Тим делом Fourier је отворио нову област математичкој анализи. „Аналитичке једначине, каже он, које су биле непознате старим геометрима, и које је Descartes први применио на изучавање кривих линија и површина, не ограничавају се само на ове опште феномене . . . Посматрано с тога гледишта, Математичка је анализа исто толико пространа, као и сама Природа; она одређује све могуће односе, мери време, просторе, силе, температуре. У изучавању свих појава она следи исти пут и тумачи онако исто, као кад посведочује јединство и једноставност плана Васионе, и чини још очигледнијим тај непроменљиви ред, који управља свим природним стварима." Не треба уосталом заборавити да код Fourier-a најобилнији извор математичких открића и лежи баш у дубоком изучавању Природе. Fourier је имао права, јер је математичка теорија топлоте имала значајног уплива на развој чисте математике. Теорија тригонометријских редова, коју је Fourier створио у циљу интеграције често сусретаних парцијалних диференцијалних једначина, изазвала је небројено много радова, намењених њеном постављању на потпуно ригурозну основу, употпуњавању и развоју. Основни проблем што га је требало решити, био је: да се сазна које се функције могу приказати у виду Fourier-ова реда. Већ у примерима самог Fourier-a било је довољно чудноватих, да би се код математичара јавило изненађење, слично изненађењу музичара коме је откривено, да се подесним компоновањем чистих звукова и њихових различитих мултиплâ („хармоникâ"), коначног или бесконачног броја, може остварити ма какав невезани низ гласова. Сви ти чудни резултати приморали су математичаре да поново прегледају и прецизирају доста

Augustin Cauchy

нејасни појам функције, а затим, мало по мало, и да размишљају и о основима своје науке. Отуда невероватне последице, које још нису дошле до изражаја. Теорија група која је толико пута обманула математичаре, и због које су се често мучили у разјашњењу парадоксâ, без потпуна успеха, бојим се, нашла је овде свакако своје дубоко порекло, као и теорија функција једне стварне промењиве, дело француске математике с краја XIX и почетком XX столећа.

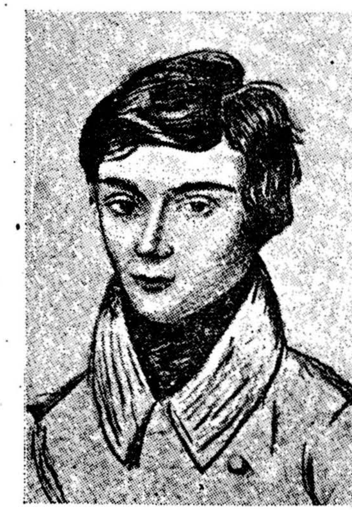
У Augustin Cauchy-у (1789 — 1857) налазимо ванредно плодног мислиоца, који је имао успеха у свим деловима Математике: Теорији бројева, Геометрији, Анализи, Небеској механици. У Математици он је стварно освештао еру тачности, не задовољивши се, као што је то чинио Euler, само испитивањем редова, а да се претходно не увери да они имају смисла, тј. да су конвергентни; њему се дугује за опште правило, што га је много касније независно нашао J. Hadamard, путем кога се може сазнати за које су вредности промен-

љиве конвергентни у XVIII веку дуго изучавани цели редови. Оснивање теорије функција са комплексном или имагинарном промењивом, велико је Cauchy-ево дело. Имагинарне количине су више од три века биле скандал у Математици. На њих су најпре наишли италијански алгебристи XVI столећа, у обрасцу који даје корене једначине трећег степена, и то у парадоксалном случају, кад су сва решења стварна. Требало им се само прилагодити, па да се применом и свикавањем на рачунање њима, дође веома лако до врло значајних резултата у области реалних бројева, резултата који би се без њих тешко могли постићи. Тајну је крајем XVIII века објаснио швајцарски математичар Argand, који је имагинарне количине конкретно протумачио као количине подесне за мерење вектора у равни, водећи рачуна не само о њиховој дужини, већ и о смеру. Cauchy се њима служио за претстављање тачке у равни једном имагинарном (или боље, комплексном) уместо двема реалним координатама, откуда и мисао о функцији са комплексном промењивом, која би дефинисала закон према коме би једној тачци у равни одговарала друга тачка равни, уз накнадни основни услов за обезбеђење постојања извода функција. Тако је Cauchy створио један нови свет, који је уосталом обухватао све уобичајене функције. Бића су тога света савршено организована: исто онако као што је Cuvier могао да обнови предилувијалног створа познавањем једног дела његова скелета, математичар, са још више сигурности само, може то да уради са једном Cauchy-евом функцијом, знајући њене вредности у свакој тачци лука криве линије, ма како он био мален. У томе новом свету влада савршен ред, дивна хармонија, и ако се искључи Теорија бројева, дуги низ теорема који опредељују својства тих функција и многобројне њихове припреме остављају најлепши утисак. Величина се Cauchy-ева дела може оценити по дугоме низу радова посвећених функцијама имагинарне промењиве, јер је Cauchy омогућио да се открије много више ствари, него што је и сам можда наслућивао. Један по својој простоти веома леп теорем био је готово довољан да овековечи Liouville-ово име. Чувени други један опет, који носи име Emile Picard-а, можда највећег међу живим математичарима, отворио је у тренутку кад га је још као млад открио простране, до тада ненаслућене хоризонте и изазвао још увек неисцрпљен низ радова. Велики немачки математичар Weierstrass је развио теорију функција комплексне променљиве пошавши другачијим путем од Cauchy-a. Дуго се сматрало да ова промена гледишта нема важности, али је Emile Borel показао, а то је једно од најлепших његових открића, да није тако и да Cauchy-ево гледиште задире још дубље у основу ствари. Он је доиста успео да из равни узме довољно делова да ни један круг, ма како мали био, не остане интактан, и у ономе што је преостало да одреди функцију која задовољава све Cauchy-еве услове, али неподобну Weierstrass-овој дефиницији, која за постојање функције комплексне променљиве захтева читав један интактни део равни. Emile Borel је уосталом веома допринео развоју теорије функција са комплексном променљивом, оснивањем своје чувене збирке монографија о теорији функција, на којој су сарађивали и сарађују још научници свих земаља.

Са Poncelet-ом (1788—1867) улазимо у област чисте Геометрије. Poncelet се сматра за оснивача пројективне геометрије, чији су предмет изучавања она својства фигура која се задржавају при пројекцијама. Њему се дугује за веома плодан и нови појам трансформација помоћу реципрочних полара, којим се из једне равне фигуре може извести друга, али са чудним својством: да теменима прве одговарају странице друге, и обрнуто. Ова трансформација често омогућује да се приказ извесних својстава некакве фигуре сведе на много лакши приказ својстава друге. Gergonne је одавде нешто касније извео принцип дуалитета, који игра значајну улогу у Нацртној геометрији. Poncelet-у се, најзад, дугује и за принцип коме је он придавао велики значај, принцип континуитета. Ако је код неке фигуре откривено извесно својство, оно остаје и кад се та фигура деформише, водећи рачуна о односима који су претпостављени међу различитим њеним елементима. Принцип, онако како га је Poncelet изложио, оспоравао је Cauchy, који је могао лако дати примере о његовој погрешности; међутим, правилно исказан и на прецизнији начин него што је то учинио Poncelet, он је савршено тачан. Принцип је од велике услуге и често се користи. У Геометрији је Poncelet-ов утицај био веома значајан; радови немачких геометара Steiner-a и Staudt-a дугују за своје порекло њему; у Француској, Chasles, првоименовани за катедру Више

геометрије на Sorbonne-и, био је најсјајнији претставник модерне чисте Геометрије. Chasles-у се дугује за значајни историјски споменик: L'Aperçu historique sur le développement de la Géométrie, који је допринео да се исправи известан број погрешних мишљења.

Напуштајући Poncelet-a додаћу да је он имао значајну улогу и у развоју примењене механике, коју је дуго предавао у Metz-у, а затим на Sorbonne-и.



Evariste Galois

Evariste Galois (1811—1832) је једна од најнеобичнијих фигура у историји науке. Два пута одбивен на пријемном испиту на Ecole Polytechnique, 1831 примљен је у Ecole Normale, коју напушта годину дана касније. Активно учешће у политици донело му је више месеци затвора, а погинуо је у двобоју због неке безначајности у двадесет и по година. Своја математичка открића у теорији једначина он је изложио у два саопштења Академији Наука који су изгубљени, затим у неким мањим чланцима часописа „Bulletin de Férussac" у 1830, а нарочито у једноме писму своме пријатељу Chevalier-у, написану уочи смрти. Друге радове, пронађене међу његовим хартијама, објавио је 1846 Liouville у своме листу.

Значај његова дела може се изложити укратко у неколико реченица. Италијански алгебристи XVI века: Tartaglia, Cardano, Ferrari беху решили једначине трећег и четвртог степена ваЂењем квадратних и кубних коренова; напори, међутим. да се тако исто реше и једначине вишег степена, остали су узалудни. Значне прилоге овоме питању допринели су Lagrange, Abel и Gauss, показавши да се извесне класе једначина могу решити коренима. Abel је први 1826 показао да се општа једначина петог степена не може решити кореновањем. Тако је постало очевидно да проблем, на који су се од XVI столећа бацили многи математичари, није добро постављен. Galois-у припада слава што је питање потпуно расветлио, показавши да је за некакву дату једначину везан извесан број пермутација коренова, које образују тзв. групу: а то су пермутације које, иако примењене на коренове, не кваре њихове међусобне рационалне односе (смисао се израза „рационални односи" може прецизирати). Од природе те групе зависе основна својства једначине, могућност да се она реши коренима или не, а у општем случају, природа помоћних једначина, чије би претходно решење повукло и решење дате једначине. Пошавши од своје основне идеје, Galois лако налази све резултате својих претходника, и обухвата их једним једином гледиштем.

Теорија групâ сменâ (супституција), тј. пермутација извесног броја објеката, коју је основао Cauchy, показала је радом Galois-а сву своју вредност. Galois је усавршио њена значајна места и показао основну улогу обичних група. Он је осим тога у теорију бројева увео нове класе имагинарних количина (Galois-ови имагинарни бројеви), од којих је сваки био везан за степен неког простог броја; поред теорије једначина у правом смислу речи, име је Galois-а једно од најчешће сретаних у теорији модерне Алгебре. Писмо његовом пријатељу Chevalier-у показује нам осим тога, да је Galois и у Анализи имао исто толико значајних открића као и у Алгебри, предњачећи 25 година испред великог немачког математичара Riemann-а у радовима на абеловим интегралима. Тужно је кад се помисли колико је наука изгубила прераном смрти Galois-а, па као што каже Emile Picard, „пред тако кратким и бурним животом, дивљење према изванредном мислиоцу, који је оставио толико дубок траг у науци, постаје много веће."

Galois-ова теорија је омогућила да се објасни каквим су се чудом у образац за решење неке једначине трећег степена, која има све стварне коренове, увукле имагинарне количине; могло се, наиме, показати да једначина, код које су сва решења реална и која се решава стварним кореновањем, може бити решена само помоћу квадратних коренова. Њоме се исто тако може показати, да се многи проблеми што су их оставили стари још, као што је нпр. удвајање коцке и трисекција угла, не могу решити помоћу лењира и шестара. Великом француском математичару Camille Jordan-у (1838—1922) дугује се за значајно дело „Traité des substitutions", које је прави споменик подигнут у славу Galois-а.

Основна Galois-ова мисао је толико једноставна и дубока, да се поред алгебарских једначина могла применити и на друге области. Г. г. Emile Picard и Ernest Vessiot показали су да она исто тако заузима највише место и у интеграцији линеарних диференцијалних једначина. Споменућу такође и истраживања г. г. Drach-а и Vessiot-а о проширењу Galois-ове теорије на интеграљење најопштијих диференцијалних једначина, но ту се појављују тешкоће, због којих би теорију требало оштетити, или бар жртвовати нешто од њене красне једноставности.

Развој науке после Galois-а показао је да значај појма група у најразноврснијим гранама Математике и Физике све више расте. Норвешки математичар Sophus Lie, оснивач теорије група трансформација, увео их је у Анализу и Геометрију. Велики поштовалац Galois-а, своје замашно дело о групама трансформација он посвећује (1889) школи: Ecole Normale Supérieure; уосталом, најзначајнији радови у циљу развоја теорије, њеног усавршавања, проширења и налажења нових примена, изведени су у Француској. У Геометрији Poincaré је тврдио да појам група већ изранија постоји у духу геометара; аксиом да су две фигуре међусобно једнаке ако је свака од њих једнака некој трећој, у ствари је исто што и тврдити да постоји извесна група која доминира Геометријом, наиме: скуп поступака помоћу којих се једна фигура претвара у другу, једнаку. Нарочито је овде то, што нам теорија група може показати сва конкретна, повезана значења која се могу дати изразу „једнаке фигуре"; отуда се, као што је 1872 показао већ велики немачки геометар Felix Klein, и поима постојање безброј могућих геометрија, где влада нека нарочита група, а које се могу изучавати потпуно самостално, без прибегавања елементарној геометрији. У тај оквир улази и пројективна геометрија, код које се две фигуре конвенционално сматрају као једнаке, ако се са једне може прећи на другу низом пројекција.

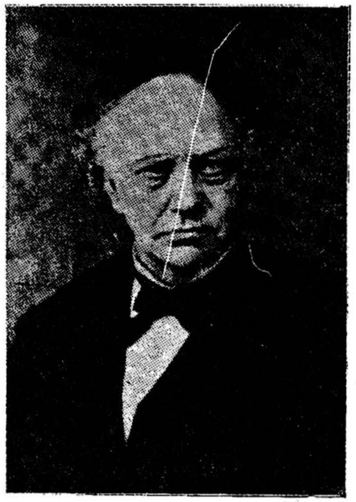
VI

Протекао је један век од Galois-ових истраживања. За то време је Математика постигла значајан развој; написана су небројена дела, међу којима нам, уосталом, многа некорисно запремају књижнице. Створене су нове, једва започете теорије, освајајући често и друге области Математике; једном речи, и у овој, као и у свакој другој грани науке, постоји такво превирање, да је математичару, ма ко то био, тешко да влада целокупним њеним садањим развојем. Умова, способних за значајна открића било у чистој, било у примењеној Математици, има све мање. Веома се ретко може наићи на генија као што је Француз Ampère (1775 — 1836), који је истовремено био и физичар, оснивач Електродинамике, и значајни математичар (са Monge-ом он дели славу за постављање теорије диференцијалних парцијалних једначина другог реда). Француз Lamé (1795 — 1870) био је једновремено аналидиста, геометар и оснивач теорије еластицитета, док је Француз Poisson (1781 — 1840) чувен по својим радовима на Анализи и Математичкој физици; за математичара се, исто тако, може сматрати и славни Fresnel, творац физичке Оптике, чији су радови коначно обезбедили, бар до оснивања Физике кванта, победу таласне теорије светлости.

Али уместо да вам износим дугачку и можда досадну листу имена, задржаћу се радије мало на неколицини највећих савремених француских математичара, мојим професорима, срећан што им на овоме месту могу одати поштовање пуно дивљења и захвалности.

Charles Hermite (1822 — 1901) тек што је ступио на Ecole Polytechnique, шаље чувеноме Jacobi-у, који је поред Abel-a био један од оснивача теорије елиптичних функција, рад о подели абелових трансцендената, функција везаних за интеграцију најопштијих алгебарских диференцијала. Jacobi, кога је својевремено под сличним околностима топло примио Legendre, изјави младоме Hermite-у своје дивљење за резултате што му их је саопштио. Тако се између ова два вели-

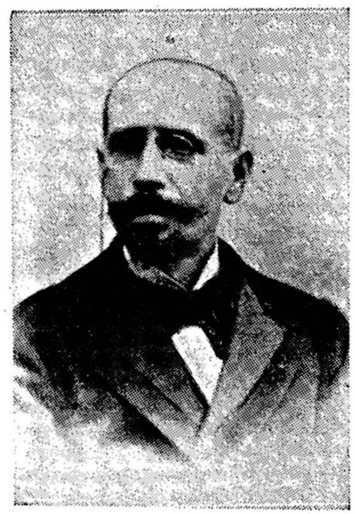
ка ума успостави стална преписка. Jacobi-у је Hermite доставио, у двадесет четвртој години, и своја открића у Вишој алгебри, која га стављају у ред највећих геометара. Настављајући чувене Gauss-ове радове, он без бојазни приступа аритметичкој теорији облика у њиховом најопштијем виду и освештава парадоксални метод, уводећи у теорију бројева, где влада дисконтинуитет, континуалне променљиве. Он је увео појам о квадратним формама са неодређеним коњугованим величинама, званим Hermite-ови облици, због којих је његово име једно од најчешће сусретаних у делима Физике кванта: између многих других, пример изненадне примене апстрактних теорија на опипљиве проблеме. Hermite



Charles Hermite

се 1873 прославио и открићем трансцендентности броја **e**, основе Neper-ових логаритама; постојање трансцендентних бројева, тј. бројева који нису ни цели, ни разломљени, нити пак коренови какве алгебарске једначине са целим коефицијентима, први је показао Liouville. Hermite-ов је теорем имао значајна одјека, па се надало да ће Hermite успети да утврди и трансцендентност броја π, а према томе и немогућност да се квадватура круга реши помоћу лењира и шестара; инспиришући се Hermite-овим методом и уопштавајући га на оштроуман начин, част за то ново откриће имао је, девет година касније, немачки математичар Lindemann.

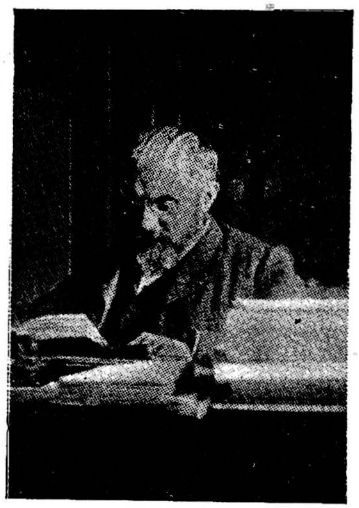
На све оне који су слушали његова предавања, Hermite је остављао дубок утисак. „Они не могу заборавити готово побожни нагласак његове наставе, пише велики математичар Painlevé, дрхтај лепоте или тајне што га је изазивао код својих слушалаца говорећи о каквом дивном открићу, или о нечем непознатом. Његова је реч отварала нагло простране хоризонте у областима Науке; она је саопштавала љубав и поштовање према стварним идеалима". Са своје стране, ја сам, посматрајући га, имао пред собом одраз тихе и чисте радости што је изазива размишљање о математичком реду, радости сличне оној коју је осећао Beethoven, слушајући у души своја највећа дела.



Jean — Gaston Darboux

Gaston Darboux (1847 — 1917) био је истовремено и аналиста и геометар. Остављћу по страни његова значајна истраживања у Анализи, иако је у извесним он био претеча. Славу су му донели углавном његови радови на Геометрији. Он се не може уврстити ни међу геометре који избегавају да потамне лепоту Геометрије улагивањем Анализи, нити пак међу аналисте, расположене да Геометрију сведу на низ рачуна, не интересујући се за њихово геометријско значење. У томе погледу он је био Monge-ов следбеник, везујући за веома вешту примену Анализе врло фину и развијену геометријску интуицију. Његови су методи увек необично елегантни и савршено подешени за различите предмете расматрања. У својој настави са катедре Више геометрије на Sorbonne-и, као наследник Chasles-а, он се често са особитом наклоношћу освртао на теорију троструких ортогоналних система, истичући са задовољством значај Lamé-овог дела, а исто тако и на теорију деформација површина, чије је порекло у Gauss-овом делу Disquisitiones circa superficies curvas, које је пре Darboux-а било предмет значајних радова француских геометара, међу којима ће бити довољно да поменем Ossian Bonnet-а. Darboux је, најзад, показао плодност свог метода покретног триедра, који почива на примени система локалних координата, везаних за сваку тачку изучаване фигуре, уместо система непокретних координата, без икакве везе са њом. Овај је метод необично проширио Elie Cartan, благодарећи теорији група, прилагодивши га најразновршнијим просторима што су их геометри створили поводом Опште теорије релативитета. Darboux-ов уплив на развој Геометрије био је велики; он је изградио многе одушевљене ђаке у свима земљама; задовољићу се овде да поменем великог румунског геометра Tzitzeica, једног од оснивача Математичке ревије интербалканске Уније, чији недавни губитак оплакује сав научни свет. Darboux-ово дело »Théorie des Surfaces« је мајсторски споменик, подигнут у славу Геометрије и Анализе, а које ће још дуго времена бити сматрано као класично дело.

Прича се да је неком младом немачком математичару, зачуђену што Lagrange не признаје Gauss-а за највећег немачког геометра, овај одговорио: „Не! Gauss је највећи геометар Европе." На сличан би се начин могло рећи и за Henri Poincaré-а (1854 — 1912) који је био не само велики математичар, већ сама Математика. Нема одељка Математике, па чак ни Физике, у коме он није оставио обележја, који није обновио, или из кога није извео нову науку. Оснивањем фуксових функција он успева да помоћу униформних функција са истим параметром изрази координате једне тачке на некој алгебарској кривој линији, резултат што су га геометри пре њега постизали само код једне специјалне класе кривих. Општи проблем уједначења (униформизирања) он је решио на тада врло смео начин. У теорији функција више комплексно-променљивих он је претеча. Он је творац нове једне теорије, глобалног изучавања решења диференцијалних једначина у реалном пољу; благодарећи њој он је у могућности да обнови методе Небеске механике, изучи периодична решења, асимптотска решења у периодичним решењима проблема те науке, и изучи тако исто и проблеме стабилности, за чије решавање ствара појам интегралне инваријанте. У analysis situs, области геометрије која се бави само особинама тела сачу-



Henri Poincaré

ваним и поред било какве континуалне деформације, сви готово радови објављени после Poincaré-а воде своје порекло из трију или четири расправа што их је он посветио тој науци. На Sorbonne-и он је предавао редом све гране Математичке физике, упливишући веома на ток мисли што их је покренуо Michelson-ов оглед, и тако увео у теорију Релативности. Његова рана смрт одузела је Науци светлост, за чијим се ишчезнућем често жалило. Његова научно - философска дела: La Science et l'Hypotèse и La Valeur de la Science, која су преведена на више језика, и у којима је фрапантним формулама обухватио значај постављених проблема Науке, познати су свем културном свету. По некад он се може упоредити са Pascal-ом, као на пример кад каже: „Мисао је искра сред

дуге ноћи, али баш та искра претставља све". Науци ће требати доста времена за развој задњих последица његових мисли, што их је раскошно засејао у своме толико пространом и тако разноликом делу.

Именима великих научника о којима сам говорио, могао бих додати и имена Paul Appell-а и Edouard Goursat-а, савршено добрих професора, од којих је први писац дела: Traité de Mécanique rationnelle, а други дела: Traité de Calcul différentiel et intégral, одавно већ класичних, но нарочито име Emile Picard-а, јединог живог из те славне генерације, окруженог дивљењем и општим поштовањем. Пре две године он је са великим немачким математичаром Hilbert-ом био један од првих носилаца златне медаље Института Mittag-Leffler, а једва је неколико недеља, како је на свечаности посвећеној педесетогодишњици његова избора у Академији наука, Emile Borel красним речима величао његово научно дело. Говорио сам већ о чувеном теорему што носи његово име, и о оним његовим радовима, који су наставак Galois-ове теорије. Његови радови о алгебарским функцијама са две променљиве основе су алгебарске геометрије површина; ова је наука необично развијена у Италији, отаџбини већ више од једног века плејаде великих геометара. Изучавајући алгебарску геометрију површина они су истина стали на чистије геометријско гледиште од Emile Picard-а, али, као што је рекао Emile Borel, алгебарска би геометрија без његових радова била веома саката.

VII

Сјај којим је блистала француска Математика у време кад су Hermite, Darboux, Poincaré, Picard чинили велика своја открића, није се угасио: буктиња је остала у чврстим рукама. Принуђен сам да се ограничим и наведем неколико имена.

Gabriel Koenigs био је веома фини геометар; његови се радови на géométrie reglée истичу елеганцијом која се може поредити са Darboux-овом. Стварањем нових трансцендената Paul Painlevé је успео да реши проблем који је и самом Poincaré-у изгледао неприступачан; Poincaré је обележио Painlevé-ово дело у Анализи следећим речима: „Математика је темељно уређени континенат, чије су све земље међусобно здружене; дело Paul Painlevé-a је красно самостално острво у блискоме океану". Али је тај суд непотпун, јер је Painlevé веома унапредио и Механику, коју је дуго предавао на Ecole Polytechnique; он је исто тако, својим теоријским истраживањима, знатно допринео развоју авијације још у њеном зачетку, те је њихово стварање, благодарећи Painlevé-y, готово искључиво француско дело.

Jacques Hadamard, чије је име опште познато, оставио је трага: у Аритметици, својим радовима о Riemann-овој функцији везаној за тешки проблем расподеле простих бројева; у Геометрији, радовима о геодетским линијама површина са супротним кривинама; у Анализи, радовима на диференцијалним парцијалним једначинама Математичке физике и Huygens-овом принципу, у Рачуну варијација и Функционалној анализи, тој новој науци коју је створио велики италијански математичар Volterra, а којој је он дао великог потстрека. Најзад, својим семинаром на Collège de France, где су сви страни научници, на пролазу кроз Париз, желели да изложе своје последње радове, он је јако утицао на развој Математике као дела интернационалне сарадње. Његова нам младост сведочи да његово дело није још завршено.

Теорија функција комплексно - променљиве обрађивана је у Француској одувек врло успешно; задовољићу се само да споменем имена Emile Borel-a, веома рано преминула великог аналисту Fatou-a, Paul Montel-a чувеног по својој теорији фамилија нормалних функција, Gaston Julia-a који је познат по својим радовима о елевацији рационалних функција, Valiron-a, итд....

Теорија функција реалне променљиве је готово искључиво француског порекла. Припремљена делом „Traité d' Analyse" Camille Jordan-a, које је у свим земљама имало великог уплива, слично делу „Traité d' Analyse" Emile Picard-a; створена радовима Emile Borel-a, творца мере скупова Henri Lebesgue-a, оснивача познате истоимене теорије интеграције, René Baire-a, Denjoy-a, који је изградио теорију тотализације, она је у једну непознату област, омаловажавану од многих математичара, увела неочекивану хармонију, која је истовремено показивала и смелост, и оштроумност, и дубину погледа својих покретача.

Требало би још да говорим о теорији апстрактних простора Maurice Frechet-a, о непосредној инфинитезималној геометрији Bouligand-a, и да споменем дело Elie Cartan-a у Анализи и Геометрији, о коме, разуме се, ја нисам позван да дајем суд.

Оснивање Института Henri Poincaré-a дало је у Француској новог полета истраживањима на пољу Математичке физике. Душа рачуна вероватноће, Emile Borel, створио је за ту дисциплину збирку, која је достојна исте славе као што је она збирке за Теорију функција, и у којој су нарочито Fréchet, Paul Levy и Georges Darmois изложили своје красне радове. Катедру Теоријске физике заузима Louis de Broglie, млади творац Таласне механике, који је обновио Атомску физику и довео у склад ондулаторну и емисиону теорију светлости. Не треба да заборавим ни Институт за Механику, коме је на челу Henri Villat, чувен по својим радовима из Хидродинамике; директор збирке „Mémorial des Sciences Mathématiques", оригиналне творевине која је подражавана у разним земљама, он је истовремено одговорни уредник часописа „Journal de Mathématiques pures et appliquées", чији је оснивач пре скоро једног века био Liouville, а који је дуго времена водио велики математичар Camille Jordan.

Преглед би француске математичке делатности био непотпун, ако не бих споменуо значајну улогу што су је још од свога оснивања играле Ecole Polytechnique и Ecole Normale. Већ више од једног столећа велики француски математичари дугују за своје образовање једној или другој од њих; више од пола века ту дичну улогу има готово искључиво l' Ecole Normale, у којој је S. Lie, још пре педесет година, видео расадник француске математике. У више маха су стране земље слале своје најобдареније омладинце, да на њој изуче исто што и њихови француски другови. Тешко нам је стога да геометра Georges Tzitzeica-a, о коме смо мало пре говорили, не сматрамо за француског математичара, а исто тако и мог друга и пријатеља Михајла Петровића, математичког доајена ваше земље, коме са задовољством признајемо велику оригиналност у његовом стварању Спектралног метода у Аритметици, Алгебри и Анализи, као и у стварању Опште феноменологије, у којој се на систематски начин бави проблемом постојања аналитичких калупа, подесних за једновремени приказ закона већег броја привидно сасвим различитих физичких теорија. Мислим да се неће љутити на мене, ако и његове радове приложим билансу онога, што Математика дугује Француској.

Млађе генерације већ наилазе као смена својих старијих, благодарећи опет Ecole Normale. Можда је сувише рано да се наводе имена, међу којима су ипак многа већ добро позната. Биће довољно да споменем једно само, име Jacques Herbrand-a, чији су радови, сурово прекинути смрћу, обећавали великог математичара, једнака можда Evarist-у Galois.

Госпође и господо, време је да се зауставим, јер сам већ сувише злоупотребио вашу благонаклону пажњу. Допустите ми ипак још једну напомену опште природе, која ће ми послужити као завршетак.

Као и свака Наука, али без сумње више него иједна друга, Математика напредује путем узастопних апстракција. С друге стране, тежња за повећањем тачности нагони све више и више математичаре да од створова што их изучавају, одстране опипљива својства која не улазе у њихова размишљања. Употребљен до крајњих граница, овај поступак оправдава унеколико познату духовитост, да су математичари научници који никада не знају о чему говоре, а и не труде се да знају да ли је то о чему говоре стварно, или не. Француским математичарима је ово претерано удаљавање од стварности било увек мрско; њима је заиста познато да, иако неопходна, логика није основна ствар. У математичкој делатности, као и у свакој људској активности, постоји извесна размера вредности: згодно је несумњиво правилно размишљати, али је још подесније поставити себи важне проблеме. У томе погледу може се слободно тврдити, да су француски математичари не само увек знали о чему говоре, већ и имали потребно предосећање, да као предмете својих размишљања изаберу најфундаменталније проблеме — проблеме чије је решавање било од највећег утицаја на развој Науке.