КОСТА СТОЈАНОВИЋ

ПРЕДАВАЊА НА УНИВЕРЗИТЕТУ
ИЗ
ПРИМЕЊЕНЕ МАТЕМАТИКЕ

МЕХАНИКА

БЕОГРАД
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1912.

САДРЖАЈ

ГЛАВА II.

КИНЕМАТИКА.

ГЛАВА III.

Принципи механике: сила и маса.

ГЛАВА IV.

Рад; функција сила.

ДРУГИ ДЕО.

СТАТИТИКА.

ГЛАВА V.

Равнотежа тачке и чврстих тела.

ГЛАВА XIX.

Обртање тела око сталне тачке.

ГЛАВА XX.

Кретање слободног чврстог тела.

ГЛАВА XXI.

Релативно кретање.

ГЛАВА XXII.

D' Alembert-ов принцип.

ГЛАВА XXIII.

Лагранжове једначине.

ГЛАВА XXIV.

Аналитичка механика система. Канонске једначине — Јакобијева и Поасонова теорема.

ГЛАВА XXV.

Судар и перкусија.

ГЛАВА XXVI.

Основи теорије машина.

ПРЕДГОВОР

Примењена Математика обухвата за данас у главноме све физичке науке, где се применом математичких метода и истина третирају питања опште физике и тумаче све појаве. За тумачење појава механичким узроцима, Механика долази прва по реду, као увод у примену математичких метода за тумачење физичких појава. Ја сам прва своја предавања почео Механиком, а кад сам имао слушаоце, који су Механику свршили, онда сам држао предавања из Механике и Математичке Физике. У примењену математику долази за данас Механика небеска и Рачун вероватноће, прва као одељак обичне механике, који говори о проблемима нарочите области, и друга наука, као метод за примену математике и продужење тумачења појава механистички, не само из области строго физичких но и других појава: хемијских, физиолошких, моралних и социјалних. Како сам у скоро морао отићи са Универзитета, мојим сам ученицима стигао поред Механике држати предавања само из Математичке Физике, а осталима, који су дошли на моје место, остаје, да овом катедром обухвате и остале дисциплине из велике области, назване Примењеном Математиком.

За Математичку Физику може се с правом рећи да нема ниједног сређеног уџбеника данас. Разрађени су поједини одељци, много је што шта додирнуто у разним монографијама, а како се разноврсни и многобројни проблеми свакога дана уносе у Математичку Физику, још ће много времена проћи, док се дође до сређених дела, каквих имамо већ у класичким уџбеницима из Механике.

У овоме делу изнео сам своје лекције из Механике, што сам у години 1904., 1905. и 1906. држао на Универзитету. Примере сам најнужније додао, ради разумевања теоријског дела, а намеран сам доцније уз ово дело да додам још збирку израђених задатака, што иду уз сваку главу. Из ове су књиге изостали многи задаци, које сам са својим ђацима, или у семинарским вежбањима, или на предавањима радио.

Ова је Механика рађена по капиталном делу г. P. Appell-a, Traité de Mécanique Rationnelle, tome I и II, чији сам и распоред предмета задржао.

Мислим, да ће ово бити довољно, да ученици, пратећи предавања из Механике, попуне празнине, које се јаве, услед немања времена да се на часу прибележе све појединости.

У Београду 1911. год.

Коста Стојановић.

УВОД

Тумачење свих физичких појава своди се на тражење њихових механичких узрока. Проблеми су механике кретања; наћи узроке тих кретања и зависност између узрока (силе) и кретања код ма какве појаве физичке задатак је математичке физике. Да би се овај задатак постигао, морамо се упознати са основима механике, и нађене истине применити на тумачење појава механичким узроцима.

Механика, коју ћу ја предавати, зове се рационалном или аналитичком због свога метода. Она не додирује најопштије примене механичких принципа, већ само ону примену, која се односи на одређене облике сила и система. Ова се механика разликује од физичке, која вреди и за све могуће системе (чврсте, течне, гасовите, мерљиве и немерљиве средине) и за силе, биле оне зависне од координата, или уз то још и од брзина и положаја тачака. Ова се механика зове и аналитичком, што проблеме механичке решава анализом, за разлику од ранијих примењивања геометријског-синтетичког метода.

Механика као наука скорашњег је порекла. По неке њене теореме биле су познате у примени од најдавнијих времена. Од Архимеда почиње статика, проналаском полуге и хидростатика, налажењем односа између праве и изгубљене тежине тела у течностима. После ових теорема нађене су доцније и друге, као што су ставови о слагању и разлагању брзина и сила, али све то није ни из далека сачињавало никакав систем научни.

Од Галилеја, открићем закона слободног падања тела и налажења кретања по стрмој равнини; Хајенсовим налажењем брзине и убрзања код кружних кретања и Кеплеровим налажењем закона планетарног кретања, припремљено је материјала да Њутн нађе гравитацију, као узрок општи свима кретањима видљивих система у космосу и утврди основну једначину динамике о односу силе, убрзања и масе. До ове је једначине Њут дошао истакнув три принципа механичка из проматрања: принцип акције и реакције, независност ефеката силе од мировања или кретања (принцип релативитета) и принцип лењивости, који је Галијо још уочио.

Бернуљи је у принципу виртуелних брзина засновао основе статике, а D'Alembert у своме принципу основе динамике. У ова два принципа, нарочито у последњем, којим је динамика сведена на статику, налазе се основи аналитичке механике, јер су ти принципи обухваћени аналитичким изразима, из којих је Лагранж и створио аналитичку механику.

У половини прошлога столећа је Мајер у принципу односа рада механичког и топлоте сагледао примену једног новог и значајног општег принципа, који је разгранат и проширен у принцип конзервације енергије и прокламовао га као општи

за све појаве. Овим новим открићем, уз раније познате интеграле прве: о кретању тежишта и моментима величине кретања, дошао је и трећи први интеграл, као последица нове теореме, што је олакшало решавање динамичких једначина.

У уводу се не могу неспоменути значајни радови Хамилтона и Јакобија, који су довели у везу Лагранжове једначине са парцијалним диференцијалним једначинама и решавање проблема механичких свели на решавање парцијалних једначина, чије диференцијаљење даје једначине кретања. И ако је ово чисто формална страна механике, од великог је значаја поменуто по метод њен и крунисано је све великим открићима на пољу највећег огранка механике — у небеској механици.

За појаве сматране укупно, као саставни део целине у васиони, нађене теореме имају значаја. Ако се појаве посматрају у одређеном времену и простору њихов се значај губи и примена је општих механичких теорема ограничена а решавање је механичких проблема доведено у везу са могућношћу решења симултаних диференцијалних једначина, без коришћења икаквим првим интегралима задатака.

Новим појавама радиоактивним, као да је констатована дисоцијација масе, оног најважнијег чиниоца у основној динамичкој једначини. Теоријама о електрицитету иде се на то: да се маса изрази као кондезована електро-магнетска енергија, што такође утиче на промењивост тог чиниоца и мења основе старе механике.

Изменама основних количина у Њутновој једначини односа масе, силе и убрзања, претрпеће измене и принципи механике, али то је за сада и сувише рано и ми се само ограничавамо на горњој напомени. Мишљења смо да се измена те основне једначине, замена масе енергијом, која се трансформише, уношењем брзине поред убрзања у израз за силу и другим изменама, чине нужне трансформације за разумевање појава изолованих и да ће за појаве, сматране као делове велике целине, принципи механике опште остати стални.

* * *

КРАТКА ИСТОРИЈА МЕХАНИКЕ

I.

О правој механици, као науци, може бити речи тек од Архимеда (287—212 пре Христа). У открићу закона о полузи, нађен је основни однос између сила и њихових ефеката за статичке појаве, нађен закон општи, који се на безброј промена и појава механичких дâ применити и бити довољан за многа тумачења чисто механистичка. Раније метафизичке спекулације, од Јонских философа, преко Аристотела до Архимеда, припреме су да се апстракцијом специјалних случајева, проникне у односе узрока и последица механичких појава, да се принципом каузалитета нађу количине мерљиве, које одређују механичке појаве, из ових одреде прави закони механике, што је неоспорним успехом крунисано тек у Архимеду.

Од Архимеда до Леонарда да Винчија (1452—1519) имамо магловито, сколистичко, мистичко доба науке, у ком се ниједна тековина не може обележити у нашој науци. Манускрипти Леонардијеви садрже не само наговештаје, већ и права открића: пралегограма сила, односа брзине према убрзању, основа динамичких једначина, принцип виртуелних брзина, живе силе и рада и друго, чиме је од

Леонарда до данашњег времена, обогаћена механика. Најновија открића доказала су, да су рукописи Леонардијеви били познати савременицима, да су они у њима налазили потстицаје за своје радове, често и не помињући изворе из којих су то црпели (Leonard de Vinci, Duhem).

Велика открића на пољу механике почињу у 16-ом веку. Од овога времена до данас наша је наука прошла кроз разне фазе, и ми ћемо у појединим одељцима, говорећи о литератури, напоменути, која су дела важна и кад су света угледала.

У овом ћу уводу изнети само најкапиталнија дела, њихове наслове, време издања и кратке напомене онога што садрже.

II.

Коперник (1473—1543) својим делом *De revolutionibus orbium coelestium, libri* VI, које је изашло 1543 године, уноси нове погледе на појаве кретања тела у нашем систему сунчаном и ствара нов период на пољу егзактних, физичких наука. Одмах за њим **Галилео-Галилеји** (1564—1642) у делу: *Dialogi supra i due massimi sistemi dell mondo, Ptolomaico et Copernico* (1632), због кога је осуђен од инквизиције, додирује основне принципе модерне динамике. У кретању тела по стрмој равнини, слободном падању тела и шеталици јасно су истакнути основи данашњих појмова: о тежишту, сили, брзини, убрзању, зависности појава механичких од сила, као узрока променама и времена у коме се појаве догађају. Поменуто дело за динамику је по значају једнако са Архимедовим открићем закона полуге за статику. **Кеплер** (1571—1630) у делу: *Harmonica mundi libri* V и *de figurarum regularium* (1649) са

открићем своја три позната закона, изведена на основу опажања Тиха де Брахеа, наслањајући се на Коперников систем, нашао је важан закон динамички, познат под именом принципа о површинама.

Синтеза свих радова од Коперника до Кеплера извршена је **Њутном** (1642—1727) у делу: *Principia mathematica philosophiae naturalis* (1687). У овом је делу изнета гравитација, као узрок кретањима небеских тела, и односом између силе и убрзања постављене су прве динамичке једначине за кретање тела. Ранија открића, специјално из статике и динамике, систематисана су, и применом синтетичког медода математичког, унет је нов метод за третирање питања механичких. Принцип инерције, акције и реакције, раније наговештени у Галилеа и философа, послужили су као подлога за добијање основних једначина механичких. Од савременика Њутнових значајни су: **Хајенс** (1620—1695) и Јован **Бернули** (1667—1748). Последњи се истакао као најзнатнији представник нове Њутнове школе. У делу: *Traité d'hydraulique* и *de Brachistochrone* истакнута је важност принципа виртуелних брзина, на основу ког ће се мало доцније читава механика да изведе. Први је, Хајенс, у делу: *De motu pendulorum ad horologia adapto* или *Horologium oscillatorium* (1673) изнео основне принципе динамике и поред Галилеа и Њутна творац је ове науке.

Цео осамнаести век је разрађивао питања механичка на основу нађених принципа механичких у 16-ом и 17-ом веку, и унео примену новог аналитичког метода на место ранијег геометријског, синтетичког. Овај је век значајан применом диференцијалног рачуна у механици. Овде помињем на првом месту **Д'Аламбер**-а (1717—1783), који је у делу: *Traité de dynamique* (1743), својим принципом динамику свео на статику, и у коме је прве примене инфентизиналног рачуна извео за питања кретања. Савременици његови: **Ајлер** (1707—1783) и **Лагранж** (1736—1813) продужили су започети посао Д'Аламберов, први више у чисто формалном смислу примене математичких метода у делу *Traité complet de mécanique* (1741), а други је отишао много даље и у својој механици: *Mécanique analytique* (1787) не само што је унео елеганцију у методе математичке, већ извео јединство између појединих одељака механике, свођењем свих механичких проблема на основни принцип виртуелних брзина. Овде се мора поменути и **Лаплас** (1749—1827), који је у делима: *Traité de mécanique céleste* (1799) и *Exposition du systéme du monde* (1796) наставио започети посао Лагранжов и систему Њутновом дао облик, у коме га ми данас познајемо.

Не можемо пропуштати да овде не поменемо неколико имена, која су истовремено као филозофи и математичари много допринели развићу наше науке. **Бакон** Веруламски (1561—1626) у делу: *Nevum organum* (1620) и *De dignitate etaugmentis Scientiarum* (1605); **Декарт** (1596—1650) у делу: *Discours de la méthode*; **Лајбниц** (1646—1716) у делу: *Théorie du mouvement abstrait* и делу *Théorie du mouvement concret* (1670), *Théodicée* (1710) и *Monadologie* (1714); **Кант** (1724—1804) у делима о живој сили и механистичком тумачењу постанка васионског система (1746 и 1755), као и делу: *Kritik der reinen Vernuft* (1781) — значајни су за основне принципе механичке, за односе узрока физичких према променама, за принцип континуитета, инерције, акције и реакције, за појмове о живој сили, раду виртуелним кретањима и другим елементима, којима је модерна механика обогаћена на рачун старе терминологије сколастичке.

III.

Прошли је 19-ти век био значајан више по открићима значајних метода за решавање питања механичких, но што би вредан био спомена за какве нове принципе. Аналитички и синтетички методи су јако усавршени. Јакоби (1804—1851), Гаус (1777—1895), Поасон, Поенсо, Хамилтон и други многи нарочито се истичу применом нових функција елиптичких за решења питања из механике, која је 18-ти век оставио несвршена. Значајна је тековина прошлога века у вези геометрије и механике, што је све покупљено у класичком делу Дарбуа (Théorie des surfaces), на које ћемо се чешће позивати. Нова символистика, теорија вектора, систематски је изнета у делу *Hamilton*-а (1805—1865), *Lecture of Quaternion* (1852) и делу: *Elements of Quaternion* (1865), и послужила је за примену механике код тумачења појава физичких. Математичка физика од Кошиа, Хелмхолца, Томсона, Поенкареа, Максвела, Римана, Херца и других, која се може сматрати као нарочити одељак механике, највише је обрађивана у прошломе веку. Одељак је механике и небеска механика, која је прогресом математичких метода у 19-ом веку, знатно напредовала. Како се у овом делу задржавамо само на основима механике: статици и динамици, то сам за нужно нашао у уводу поменути само она лица из прошлих векова, која су на тим партијама сарађивали и ову науку задужили великим открићима.

Код сваке посебне партије у механици поменућемо поглавито новије раденике из прошлог и данашњег века, и с тога се на овоме овде нећу више ни задржавати. Не можемо овај увод завршити без напомене да су сви значајнији радови из механике изашли у великим часописима светским и издањима најважнијих академија научних. Часописи су, од којих многи и данас излазе, најзначајнији ови: *Mathematische Annalen* Clebsch und Neumann (Leipzig), доцније Neumann а сад Klein, Duck и Mayer; *Journal Crelles* (Берлин). ***Bulletin des Sciences mathématique**; Nouvelles annales de mathématique; **Journale de l'école polytéchnique; Journat de Lionville**,* сви излазе у Паризу. *Acta mathématica*, Стокхолм и *Париз*. Rendiconti del Circolo Matematico (Palermo). Philosophical Magazine, Natural Philosophy и други, које ћемо у самом делу поменути.

Многобројне монографије, не само из чисте математике, већ и осталих делова математике, свих њених грана: теоријских и примењених, нашли су срећивање у великим интернационалним издањима, која излазе за данас под насловом: ***Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften***. Ово дело излази једновремено и на француском језику под насловом: ***Encyklopédie des sciences mathématiques pures et appliquées***. Публиковањем рукују академије наука: у Гетингену, Лајпцигу, Минхену и Бечу, а сарадници су појединих одељака најчувенија имена данашњега времена. У огромном подузећу, под насловом Die Kultur der Gegenwart, у одељку за природне науке дато је важно место механици (одељак III). Научна библиотека, која излази на француском и немачком под насловом: *Bibliithèque de Philosophie Sctentifique* или *Wissenschaft und **Hypothese*** значајна је за философију механике, њену историју и модерна гледишта на принципе и односе механике према другим наукама. Од уџбеника, поред дела Апеловог, које сам поменуо и других, које ћу навести, помињем знатну збирку уџбеника математичких, где је наговештено издавање уџбеника из механике, која излази под насловом Sammlung ***Schubert, mathematische Lehrbücher.***

◆

ЛИТЕРАТУРА

Историја и уџбеници

I.

Montucla — Histoire des sciences mathématiques.
Cantor — Über Geschichte der Mathematik.
Hankel — Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.
Duhem — Les origines de la Statique I u. II.
Düring — Geschichte der Mechanik

II.

Appell — Traité de mécanique rationnelle t. I, II, III.
Appell — Cours de Mécanique à l'usage des éléves de la classe de Mathématique speciale.
Appell et Chappius — Leçons de Mécanique.
Rausenberger — Lehrbuch der analytischen Mechanik I и II 1888.
F. Kraft — Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik I, II 1884.
A. Fuhrmann — Aufgaben aus der analytischen Mechanik I, II 1879.
V. Jannet — Traité de mécanique — 1893.
Laurent — Traité de mécanique rationnelle — I, II 1889.
Sturm — Cours de mécanique de l'école polytéchnique — 1905.
Voigt — Elementare Méchanik — 1910.
H. Brown — Cinq cent et sept mouvement mécanique 1890.
Despeyrous — Mécanique.
Somoff — Theoretische Mechanik 1878. 1879.

G. Helm — Elemente der Mechanik.

Routh — The treatise of the Dynamic of a System of rigids bodies.

Webster — The Dynamic of particles and of rigid élastic bodies.

K. Heun — Dynamik — Sammlung Schubert XXI

Chwolson — Traité de Physique — t. I Mecanique.

Resal — Traité de Mécanique générale 7 tomes 1899.

Resal — Eléments de Mécanique.

St. Germain — Recueil d'exercice sur la mécanique rationnelle — 1889.

Kirchhoff G. — Vorlesungen über Mechanik.

Marcolongo — Lehrbuch der theoretischen Mechanik (1910).

Neumann G. — Vorlesungen über Analytische Mechanik (издање 1911).

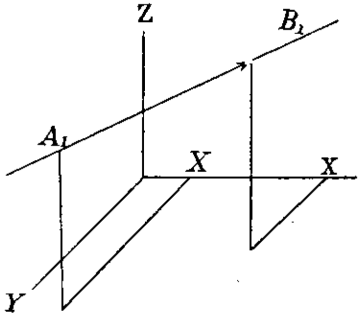
ПРВИ ДЕО

ГЛАВА I.

I. Теорија вектора

§ 1. Део праве $A_1\ B_1$, што има свој почетак A_1 и свршетак B_1, зове се вектор, или геометријска количина.

Вектор је одређен: 1) почетком A_1, што се зове и нападна тачка; 2) правцем, који је дат правом $A_1\ B_1$; 3) смислом, који стрелица уз вектор обележава и одређује се обично путем кретања какве материјалне тачке и 4) величином која је дата дужином $A_1\ B_1$.



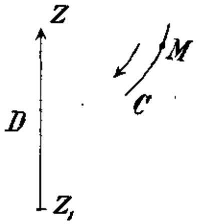
Сл. 1.

Аналитички је вектор одређен координатима тачка A_1 и B_1; или координатама почетка A_1 и пројекцијама $X_1\ Y_1\ Z_1$ дужине $A_1\ B_1$.

Ако су $x_1\ y_1\ z_1$ координате почетка A_1, а $x'_1\ y'_1\ z'_1$ координате тачке B_1, пројекције су $A_1\ B_1\ X_1\ Y_1\ Z_1$:

$$X_1 = x'_1 - x_1, \quad Y_1 = y'_1 - y_1, \quad \overset{Z}{\cancel{X}}_1 = z'_1 - z_1.$$

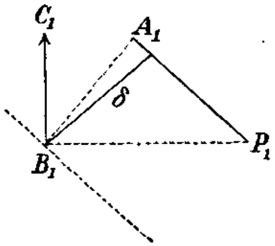
§ 2). *Ротација око извесне осовине*: Ако се за посматрача, који лежи у правцу осовине $Z'\,Z$ са ногама у Z', тачка M обрће око осовине $Z' Z$ тако да иде с лева у десно, тај се смисао обртања зове позитиван и представља се стрелицом на осовини, други је смисао с десна у лево негативан.



Сл. 2.

§ 3. *Моменат односно неке тачке.* Моменат је једнога вектора P_1 $(A_1 P_1)$ односно тачке B вектор $B C_1$, почетка B. Моменат има величину $P_1 \delta$, δ је одстојање вектора P_1 од тачке B; правац му је управан на раван $B A_1 P_1$; смисао такав, да се тачка која иде из A_1 у P_1 обрће око $B C_1$ у позитивном смислу.

Величина је момента двострука површших троугла BMP_1. Моменат се не мења кад се вектор помери у правцу $A_1 P_1$ или тачка B у правцу $B G_1$.



Сл. 3.

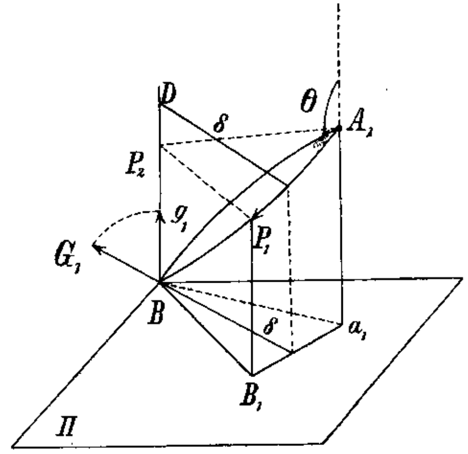
§ 4. *Моменат односно једне осовине.* Ако на извесној осовини D обележимо позитиван правац, моменат је вектора P_1 односно те осовине, алгебарска вредност пројекције момента P_1 односно једне тачке на тој осовини.

Ово се доказује ако се докаже да је вредност момента P_1 независна од тачке на осовини.

Повуцимо кроз B_1 управну раван Π на осовину D и нека је $a_1 p_1$ пројекција вектора $A_1 B_1$ на раван Π. Моменат је P_1 односно B, $B G_1$ његова је пројекција на D, $B g_1$. Угао је између равнина $A_1 BP_1$ и $a_1 B p_1$ угао њихових нормала и из аналитичке геометрије знамо за однос:

$$2 \text{ повр. } a_1 B p_1 = 2 \text{ повр. } A_1 B P_1 \; cos \; \widehat{G_1 B g_1}$$

Моменат је $B G_1 = 2$ повр. $A_1 B P_1$; пројекција од $B G_1$ на D, $Bg_1 = 2$ повр. $a_1 Bp_1$ (ово је независно од положаја B на осовини D).



Сл. 4.

Ако је δ најкраће одстојање вектора $P_1 A_1$ од осовине D, δ се пројектује у правој вредности на Π.

$$p_1 = P_1 \, sin \, \theta \text{ и моменат } \mathfrak{M} \text{ је:}$$

$$\mathfrak{M} = \pm p_1 \delta = \pm P_1 \delta \, sin \, \theta \quad \cdot \; \cdot \; 1)$$

$+$ је кад неко тело иде по вектору $A_1 P_1$ и обрће се око D у позитивном смислу, иначе је $-$.

Ако на D узмемо сегменат BP_2 и са vol $(P_1 P_2)$ означимо запремину тетраедра, чије су ивице супротне $A_1 P_1$ и BP_2 и пред њим ставимо знак позитиван или негативан, према томе да ли се при кретању једне тачке по P_1 или P_2 од почетка ка крају тих вектора обрће око другог вектора у позитивном или негативном смислу, моменат је од P_1:

$$\mathfrak{M} = \pm 6 \text{ vol } \frac{(P_1 P_2)}{P_2}$$

§ 5. Моменти два вектора P_1 и P_2 зове се количина 6 vol $(P_1 P_2)$.

Ако су $x_1\ y_1\ z_1$ координате тачке A_1, $X_1\ Y_1\ Z_1$ пројекције P_1 и ако обележимо са:

$$L_1 = y_1 Z_1 - z_1 Y_1,\ M_1 = z_1 X_1 - x_1 Z_1,\ N_1 = x_1 Y_1 - y_1 X_1$$

а са $X_2\ Y_2\ Z_2$ обележимо координате тачке B и са $X_2\ Y_2\ Z_2$ пројекције вектора P_2, а са $L_2\ M_2\ N_2$ сличне изразе изразима $L_1\ M_1\ N_1$ имаћемо:

$$6 \text{ vol } (P_1\, P_2) = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

или

$$6 \text{vol } (P_1 P_2) = L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1$$

Због односа:

$$L_1 X_1 + MY_1 + NZ_1 = o \quad \text{и} \quad L_2 X_2 + M_2 Y_2 + N_2 Z_2 -- o$$

имаћемо:

$$6 \text{vol } (P_1\, P_2) = (L_1 + L_2)\ (X_1 + X_2) + (M_1 + M_2)$$
$$(Y_1 + Y_2) + (N_1 + N_2)\ (Z_1 + Z_2) \cdot \ \cdot 1)$$

§ 6. *Аналитички изрази за моменте.* Нека је дата осовина $D = 0'\, 0''$ са позитивним правцем од $0'$ ка $0''$; нека су координате тачака $0'\ x'\ y'\ z'$, $0''\ x''\ y''\ z''$; пројекције $0'\, 0''$ су $X_2\ Y_2\ Z_2$ (овде $0'\, 0'' = P_2$).

Пројекције вектора $0'\, 0''$ и количине $L_2\ M_2\ N_2$ су:

$$x''-x',\ y''-y',\ z''-z';\ y'\,z''-z'\,y'',\ z'\,x''-x'\,z'',\ x'\,y''-y'\,x''$$

Моменат је вектора P_1 односно осовине D $6 \text{ vol } \dfrac{(P_1 P_2)}{P_2}$

или:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\begin{matrix}(x'' - x')\, L_1 + (y'' - y')\, M_1 + (z'' - z')\, N' + \\ + (y'z'' - z'y'')\, X_1 + (z'x'' - z''x')\, Y_1 + (x'y'' - y'x'')\, Z_1\end{matrix}}{\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}}$$

Одавде се могу добити пројекције вектора $\mathfrak{M}_1$ на осовини $0Z$, $0X$, $0Y$. За осу $0Z$ се добије кад се стави: $x' = y' = z' = x'' = y'' = o\ z'' = 1$, моменат је онда N_1, за $0Y$ и $0X$ су M_1 и L_1.

Моменат је вектора P_1 односно 0, $0G_1$ вектор чије су пројекције $N_1\ M_1\ L_1$.

Ако се за почетак координатног система на место 0 узме тачка $0'$ чије су координате $x'\, y'\, z'$, координате су тачке A_1 сад $(x_1 - x')$, $(y_1 - y')$, $(z_1 - z')$; пројекције су вектора P_1 исте $X_1\ Y_1\ Z_1$, моменти односно нових оса су:

$$L_1' = (y_1 - y')\, Z_1 - (z_1 - z')\, Y_1 \text{ и т. д.} \cdot \ \cdot 2)$$

Моменат је $0'\, G_1'$ вектора P_1 односно $0'$ вектор пројекције L_1', M_1', N_1'.

Из 2) имамо:

$$L_1' = L_1 - (y'\, Z_1 - z'\, Y_1) \text{ и т. д.}$$

Примедба. Ако су $X_1\ Y_1\ Z_1\ L_1\ M_1\ N_1$ произвољне количине и уз њих постоји однос:

$$L_1\, X_1 + M_1\, Y_1 + N_1\, Z_1 = o \cdot \ \cdot 3)$$

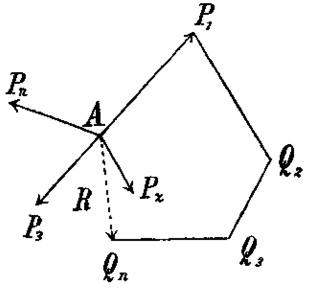
Једначине:

$$L_1 = yZ_1 - zY_1,\ M_1 = zX_1 - xZ_1,\ N_1 = xY_1 - yX_1$$

(xyz су координате произвољне) представљају праву D, јер се због 3) своде на две једначине. Ако на D узмемо произвољну тачку A_1, вектор почетка A_1, P_1 има за пројекције $X_1\ Y_1\ Z_1$ и његов је моменат односно координатних осовина L_1, M_1, N_1.

II. Системи вектора

§ 7. Ако имамо више вектора, што се стичу у једну тачку A; па кроз P_1 повучемо праву $P_1 Q_2$ једнаку и паралелну са P_2, кроз Q_2 праву $Q_2 Q_3$ једнаку и паралелну са P_3 и т. д., полигон $A P_1 Q_1 .. Q_n$ и зове се полигон геометријских величина. Вектор AQ_n је сума геометријска или резултанта датих вектора $P_1 P_2 .. P_n$ и ово се обележава са:



Сл. 5.

$$(R) = (P_1) + (P_2) + \cdots (P_n) \cdot \cdot 1).$$

Резултанта R не зависи од реда којим смо радили.

Ако су $X_1 Y_1 Z_1 .. X_n Y_n Z_n$ пројекције вектора $P_1 P_2 .. P_n$ онда су пројекције резултанте $R X Y Z$ ове:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \Sigma X_k, \; Y = \Sigma Y_k, \; Z = \Sigma Z_k \cdot 2)$$

Овако се исто слажу и моменти.

Ако са xyz обележимо координате тачке A, моменат је вектора P_k $(X_k \; Y_k \; Z_k)$ односно осовине кроз 0

$$L_k = yZ_k - zY_k, \quad M_k = zX_k - xZ_k \quad N_k = xY_k - yX_k$$

Моменат је резултанте R:

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX$$

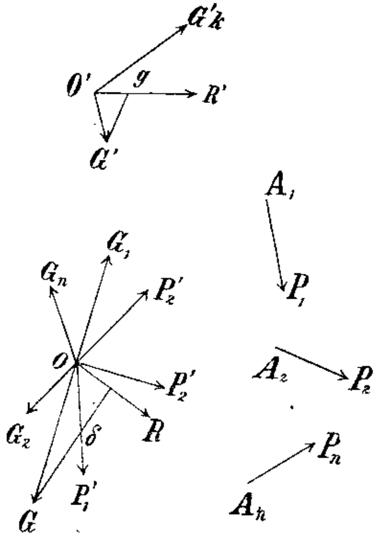
или:

$$L = L_1 + L_2 + .. L_n \quad M = \Sigma M_k \quad N = \Sigma N_k$$

Пројекција резултанте на извесну осу је једнака суми пројекције компонената, моменат резултанте је једнак суми момената компонената (Varignon).

По овој се теореми може вршити разлагање вектора на компоненте и то по паралелограму на два вектора у равни и по паралелопипеду на три вектора у простору.

§ 8. *Систем ма каквих вектора.* Ако су дати вектори $P_1 P_2 .. P_n$ чији су почеци у $A_1 A_2 .. A_n$ и ради слагања изаберемо произвољну тачку 0 у простору имаћемо:



Сл. 6.

1). За општу њихову резултанту вектор $0R$ који је резултанта вектора $0P_1{}' \; 0P_2{}' .. 0P_n{}'$ који су једнаки и паралелни за задатим векторима.

2). За моменат односно тачке 0 резултанту $0G$ момената $0G_1 \; 0G_2 .. 0G_n$ датих момената вектора $P_1 \; P_2 .. P_n$.

Ако се у место тачке 0 узме тачка $0'$, резултанта $0R$ остаје иста по јачини и правцу, моменат се $0G$ мења (он се не мења само ако је $0'$ на $0R$).

Кад је почетак у 0 и $x_k \, y_k \, z_k$ су координате A_k, $X_k \, Y_k \, Z_k$ пројекције P_k, $L_k \, M_k \, N_k$ пројекције момента P_k; пројекције су $X \, Y Z$, $L \, M N$ резултанте $0R$ и вектора $0G$:

$$X = \Sigma X_k \qquad Y = \Sigma Y_k \qquad Z = \Sigma Z_k$$
$$L = \Sigma L_k \qquad M = \Sigma M_k \qquad N = \Sigma N_k$$

Ако узмемо тачку $0'$ чије су координате $x' \, y' \, z'$ нашли смо да су:

$$L'_k = L_k - (y'Z_k - z'Y_k) \text{ и т. д.}$$

Ако са $X' Y' Z'$ и $L' M' N'$ обележимо пројекције од $0'R'$ и $0G'$ имаћемо:

$$X' = \Sigma X_k = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z$$

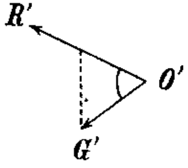
$$L' = \Sigma L'_k = L - (y'Z - z'Y), \text{ слично за } M' \text{ и } N'$$

Последње једначине казују да је моменат $0'G_1$ односно $0'$ вектора $P_1 P_2 .. P_n$ геометријска сума резултујућег момента односно 0 и момента односно $0'$ резултанте $0R$.

§ 9. Мењање резултанте и момената; инваријанте; централна осовина.

Ако се тачка $0'$, према којој се налази моменат, налази на резултанти $0R$ онда је $G = G'$, иначе постоји однос за $0'$ овај:

$$R'G' \cos R'G' = L'X' + M'Y' + N'Z' \cdot \cdot 1).$$



Сл. 7.

Пројекција је резултујућег момента на правац резултанте стална.

Лева је страна стална што се види кад се $Y' Z' X'$ и т. д. замене својим вредностима. После замене имамо:

$$C' \cos R'G =$$

$$G \cos R\,G = \frac{LX + MY + NZ}{R}$$

Из овога излази: независно од почетка координатног система ови су изрази:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \quad \text{и} \quad LX + MY + NZ$$

инваријантни.

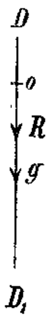
Израз $LX + MY + NZ$ зове се геометријски производ резултанте и момената резултујућег, а овако се зову производи два вектора и косинуса њиховог угла.

Ако се тако удеси тачка $0'$ да $0'G_1$ падне у правац резултанте, за то су услови:

$$\frac{L - (y'Z - z'Y)}{X} = \frac{M - (z'X - x'Z)}{Y} = \frac{N - (x'Y - y'X)}{Z} \, . \, . \, 2$$

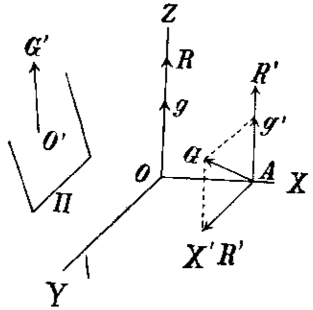
Једначина 2) представља праву задовољену промењивим каординатима $x' y' z'$; та се права зове *централна осовина*. За ма коју тачку $0'$ те осовине DD' разултанта и моменат падају у DD', и резултујући је моменат g минимум.

Ако је $R \gtreqless 0$ а $LX + MY + NZ = 0$, моменат резултујући је управан на резултанти R и моменат минимум $0'g = o$.



Сл. 8.

Кад је $R = o$, из израза за $L' M' N'$ види се да су они једнаки са L, M, N, значи да је моменат резултујући исти за ма коју тачку $0'$ у простору.



Сл. 9.

§ 10. *Упрошћене* једначине, комплекси Шалови (Chasles).

Ако се за $0Z^{\text{ску}}$ осовину узме централна оса, и она се поклони са позитивним правцем резултанте $0R$, и нека је g алгебарска вредност момената минимума, онда је:

$$X = Y = L = M = o \quad Z = R \quad N = g$$

Моменат је односно тачке $0'$, $0'G'$ и његове су компоненте:

$$N' = g \quad L' = -y'R \quad M' = x'R$$

Моменат је исти за све тачке паралелних са oz, и довољно је видити какав је резултујући моменат AG за тачке A праве ox, који се добија за $y' = o$ у горњим једначинама.

Геометријско место комплекаса за случај $\mathfrak{M} = o$ дато је по § 5. једначином:

$$(z'' - z')\,g + (x'y'' - y'x'')\,R = o \cdot \cdot 1)$$

Ова једначина представља комплекс правих. Све те праве $O_1 O_{11}$ што иду кроз тачку O_1 дају раван π управну на моменат $O_1 G'$. O_1 се зове жижа равни π и O_1 је у коначној даљини за случај кад централна осовина D није паралелна са равнином π.

Кад се π обрће око D, O_1 описује коњуговану праву $\triangle$ и обратно кад се раван обрће око $\triangle$ жижа O_1 описује праву D. (Шал).

III. Системи еквивалентни; елементарне операције; редукција система вектора.

§ 11. Два система вектора су једнаки (еквиваленти) кад су њихове резултанте и моменти резултујући односно исте тачке исти. Ти системи имају исту централну осовину и минимални моменат.

Неки су (S) и (S_0) два система вектора; $X, Y, Z,$ $L\,M\,N$ су пројекције резултанте и момента за (S) а $X_0\,Y_0\,Z_0\,L_0\,M_0\,N_0$ за (S_0).

Услови су за једнакост:

$$X = X_0 \qquad L = L_0$$
$$Y = Y_0 \qquad M = M_0$$
$$Z = Z_0 \qquad N = N_0$$

За један систем (S) се каже да је еквивалентан са нулом, ако је резултанта и моменат нула, ако су услови:

$$X = o, \quad Y = o \quad Z = o \quad L = o \quad M = o \quad N = o.$$

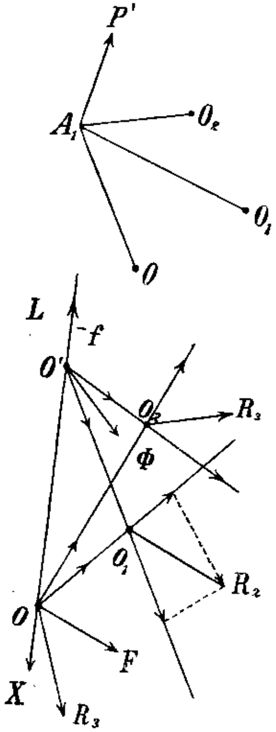
§ 12. Еквивалентан се систем датом систему добија:

1). Додавањем или одузимањем два једнака а супротно означена вектора; пренашањем једнога вектора у ма коју тачку његовога правца;

2). Слагањем више вектора што се секу у једној тачци; и разлагањем једнога на више компонената.

Један се систем вектора може на више начина свести на два вектора, од којих један иде кроз произвољну тачку.

Систем се из n вектора P_1 $P_2 \ldots P_n$ може увек лако разложити на три вектора, са нападним тачкама у $O\,O_1\,O_2$ (O $O_1\,O_2$ не леже у истој равнини). Ако се A_1 споји са $O_1\,O_2\,O$ и P_1 разложи на три компонента што падају у A_1O, A_1O_1 A_1O_2 и то учини са осталим векторима, онда су сви вектори разложени у по три компоненте, од којих свака пада у један од три правца што иду кроз $O_1\,O_2\,O_3$. Ако се сад све компоненте кроз $O_1\,O_2\,O_3$ сложе у по један вектор имаћемо три вектора, што $P_1\,P_2 \ldots P_n$ замењују.



Сл. 10.

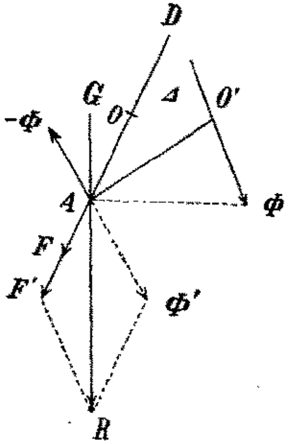
Нека су ти вектори $R_1\,R_2\,R_3$, ови се могу свести на два вектора. Нека је OL права пресека равнина OR_2 и OR_3. На овој прави OL узмимо једну произвољну тачку O'. Вектор се $O_1 R_2$ може разложити на два вектора у правцу OO_1 и $O'O_1$; вектор R_3 се разлаже на два: у правцу OO_2 и $O'O_2$. Ако се ове компоненте пренесу у O и O', имаћемо три вектора у O и два у O'. Прва три дају резултанту F, друга два Φ.

Ако су R_2 R_3 у истој равни са 0 ваља у тој равни узети произвољну праву $0L$.

Ово разлагање може бити на више начина. Систем се F, Φ, може додавањем сила $+f$ и $-f$ претворити у систем вектора S и Σ, где је S резултанта из F и f а Σ из Φ и $-f$.

Нападна тачка 0 резултанте F је произвољна, и ако се она узме за сталну $0'$ се може померити по $0'\Sigma$, па и у равни $00'\Phi$, због тога што је $-f$ произвољно. F и Φ нису у опште у истој равни.

Ова се два вектора $0'\Phi$ и $0F$ могу даље овако сложити. На $0F$ ваља узети произвољну тачку A, кроз A ваља повући $AF' = 0F$ и $+A\Phi'$ паралено и једнако са $0'\Phi$ и $-A\Phi$, AF' и $A\Phi'$ дају резултанту AR, а $+\Phi$ и $-\Phi$ један моменат величине AG нормалан на равни $A0'\Phi$, где је A жижа равни $A0'\Phi$.



Сл. 11.

Жижа се равни кроз F налази на Φ и обратно.

Ако нека права сече F и Φ та је права момента нуле.

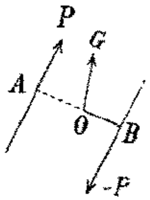
У опште се може доказати да се вектори могу свести на два, од којих један F пада по правој D' произвољној, непаралелној са општом резултантом.

§ 13. *Спрег* (couple). Два вектора $+P$ и $-P$ зову се спрег (Poinsot) кад су паралелни. Нормално одстојање AB између P и $-P$ зове се осовина спрега. Ако је моменат нула, а моменат је дат изразом $\overline{AB}\cdot P$ и спрег је нула и то је: или за случај $P = o$ или за случај $AB = o$.

Спрег је систем вектора чија је резултанта нула, што значи да је моменат тог система, односно спрег, константан по величини, правцу и смислу за све тачке у простору. Осовина је спрега нормална права у произвољној тачци равнине $+P$, $-P$ на тој равни.

Моменат из $+P$ и $-P$ је:

$$P\cdot 0A + P\,0B = P\overline{AB}$$

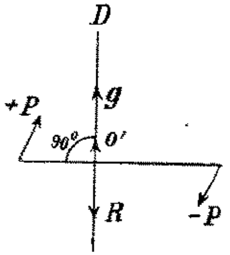


Сл. 12.

Ако имамо више спрегова, за налажење еквивалентног, резултујућег спрега, ваља наћи резултанту њихових осовина односно тачке 0 произвољне.

Ако има више вектора, они се могу свести на општу резултанту и један спрег.

§ 14. *Торзер* (Ball). Торзија или торзер јесте систем сложен из резултанте $0'R$ и спрега, чија је раван управна на $0'R$.



Сл. 13.

Нападна тачка, правац, смисао и величина торзера исти су са тим особинама резултанте $0'R$. Стрелица f торзера је однос величине осе спрега $0'g$ према $0'R$ и овај је однос $+$ или $-$, да ли су $0'R$ и $0'g$ истог или супротног правца

$$f = \frac{g}{R} = \frac{G\cos(R\,G)}{R} = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Торзери се слажу као и вектори. Сваки је торзер еквивалентан са системом три вектора и резултанта је торзера један торзер.

Систем се вектора може свести на спрег један, кад је резултанта равна нули; или на један вектор кад је резултујући спрег нула, а то је у случају кад је моменат односно произвољне тачке у простору управан на правац опште резултанте. За последњи је случај и торзер $f = o$.

§ 15. Ако је:

$LX + MY + NZ \gtrless 0$, систем је еквивалентан са два вектора, што не леже у једној равни; еквивалентан са једним вектором по централној оси и са једним спрегом чија је раван управна на овој оси, (торзер).

$LX + MY + NZ = o$. Систем је еквивалентан са два вектора у једној равни.

$LX + MY + NZ = o$ и 1) $X^2 + Y^2 + Z^2 > o$ Систем је еквивалентан са једним вектором по централној оси.

2) $X = Y = Z = o$ еквивалентно са $L^2 + M^2 + N^2 > o$ једним спрегом.

3) $X = Y = Z = o$ и $L = M = N = o$ Систем је еквивалентан са нулом.

§ 16. Количина се:

$$LX_0 + MY_0 + NZ_0 + L_0X + M_0Y + N_0Z \quad \cdot \quad \cdot \; 1)$$

зове моменат два система вектора (S) и (S$_0$) чије су координате $L\,M\,N\,X\,Y\,Z$ и $L_0\,M_0\,N_0\,X_0\,Y_0\,Z_0$.

Израз 1) је независан од координатног система, јер се може написати

$$(L + L_0)(X + X_0) + (M + M_0)(Y + Y_0) + (N + N_0)$$
$$(Z + Z_0) - (LX + MY + NZ) - (L_0X_0 + M_0Y_0 + N_0Z_0)$$

где је инваријантност очевидна.

Ако је δ најкраће одстојање централних осовина за системе (S) и (S$_0$), α њихов угао, R и R_0 резултанте по централним осовинама; g и g_0 моменти минимални оба система по резултантама, моменат је односно оба система:

$$\pm\, RR_0\, \delta \sin \alpha + (g\, R_0 + g_0\, R) \cos \alpha$$

где је $RR^0\, \delta \sin \alpha$ моменат из R и R_0. Види § 10.

IV. Паралелни вектори.

§ 17. Кад су сви вектори паралелни систем је еквивалентан: или са једном резултантом, или са једним спрегом или је нула.

Ако су $\alpha\,\beta\,\gamma$ косинуси углова нагиба једне паралелне праве са векторима; $x_k\,y_k\,z_k$ координате нападне тачке вектора P_k, чије су пројекције $X_k\,Y_k\,Z_k$ и моменат је $L_k\,M_k\,N_k$, онда постоје односи:

$$X_k = \alpha\, P_k, \quad Y_k = \beta\, P_k \quad Z_k = \gamma\, P_k$$

$$L_k = P_k\,(\gamma y_k - \beta z_k) \quad M_k = P_k\,(\alpha z_k - \gamma x_k)$$
$$N_k = P_k\,(\beta x_k - \alpha y_k)$$

Како је $P = \Sigma P_k$

пројекције су резултанте:

$$X = \alpha P, \quad Y = \beta P, \quad Z = \gamma P$$
$$L = \gamma \Sigma\, P_k\, y_k - \beta \Sigma\, P_k\, z_k;\; M =, \quad N =$$

Одмах се може доказати да је:

$$LX + MY + NZ = o$$

Ако је:

$P \gtrless o$, систем је еквивалентан са једним вектором.

$P = o$, $L^2 + M^2 + N^2 > o$, систем је еквивалент са спрегом

$P = o$, $L = M = N = o$, систем је једнак са нулом.

$\Sigma P_k = o, \dfrac{\Sigma\, P_k\, x_k}{\alpha} = \dfrac{\Sigma\, P_k\, y_k}{\beta} = \dfrac{\Sigma\, P_k\, z_k}{\gamma}$ су услови, да је систем еквивалентан са нулом за ма какво $\alpha\,\beta\,\gamma$. Овакав се систем зове *астатични*.

§ 18. *Центар паралелних вектора.* Нека је $P \gtreqless o$, систем је еквивалентан са једним вектором P (αP, βP, γP) и не иде по централној осовини.

Једначине су централне осе:

$$yZ - zY - L = o \quad zX - xZ - M = o \quad xY - yX - N = o$$

или:

$$\gamma\,(Py - \Sigma P_k\, y_k) - \beta\,(Pz - \Sigma P_k\, z_k) = o$$

или:

$$\frac{Px - \Sigma P_k\, x_k}{\alpha} = \frac{Py - \Sigma P_k\, y_k}{\beta} = \frac{Pz - \Sigma P_k\, z_k}{\gamma} \quad . \quad . \; 1).$$

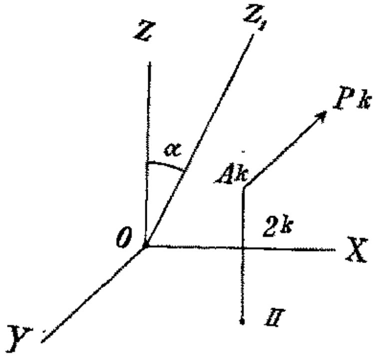
Ако се стави:

$$\xi = \frac{\Sigma P_k\, x_k}{\Sigma P_k}, \text{ и слично за } \eta, \; \xi$$

имаћемо из 1):

$$\frac{x - \xi}{\alpha} = \frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \xi}{\gamma}$$

Тачка, чије су координате $\xi\,\eta\,\xi$, не зависи од $\alpha\,\beta\,\gamma$. Кроз $\xi\,\eta\,\xi$ пролази осовина централна ма какво било $\alpha\,\beta\,\gamma$ и $\xi\,\eta\,\xi$ се зове центар паралелних вектора.



Сл. 14.

§ 19. Моменат паралелних вектора односно извесне равни.

Ако је дата раван π (xoy) и оса $0Z$ произвољног правца, моменат је вектора $A_k\ P_k$ односно равни π:

$$P_k\, z_k.$$

Моменат је паралелних вектора односно једне равни једнак са моментом њихове резултанте. Како њихова резултанта иде кроз $\eta\,\xi\,\xi$ то је:

$$P\xi = \Sigma P_k\, z_k.$$

ЛИТЕРАТУРА

За теорију вектора су значајни: Poinsot, Chasles, Möbius, Cauchy, Sarrau, Koenigs, Hamilton.

Дела су:

Cauchy — Leçons de Mécanique analytique — (од Abbé Moigno).

Pasquier E. — Cours de Mécanique analytique — 1901.

Jahnke — Vorlesungen über Vectorrechnung.

Bucherer A. — Elemente der Vector — Analysis.

Nédélic - Le calcul vectoriel et son application en Géometrie et Mécanique.

Hamilton W. Rowan — (1805—1865). Lecture of Quaternion (1852), Elements of Quaternion (1865).

Grassmann H. — Gesammelte mathematische und physikalische Werke (Ausdehnugslehre).

ГЛАВА II.

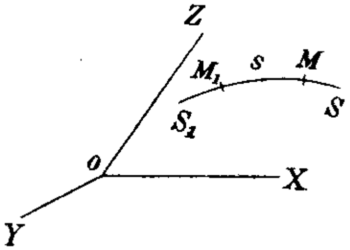
Кинематика

I. Кинематика тачке

§ 18. — Кинематика је наука о кретању, независном од узрока, који то кретање производи. То је геометрија у којој се поред координата тачака налази и прапроменљива количина време.

§ 19. — До појма о мировању и кретању тела долази се упоређивањем, релативним опажањем. Ми посматрамо само релативна а никако апсолутна кретања, али се можемо у мислима пренети ка извесном апсолутном систему и кретања тела према томе систему дала би нам апсолутно кретање, односно мировање.

За одредбу кретања нужно је знати: кад оно почиње и кад се свршава. Ово се одређује количином што се зове време и обележава се са t, а изражава секундама.



Сл. 16.

§ 20. — *Кретање тачке.* Ако је дат систем осовина $0x, 0y, 0z$ апсолутно сталан и тачка M, чије су координате $x\,y\,z$ континуирне функције времена t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad z = \omega(t) \cdot \cdot 1).$$

курба коју описује тачка M зове се трајекторија (путања) покретне тачке M и њене се једначине добијају избацивањем t из 1).

Кретање се може и другојачије дефинисати, ако је дата пројекторија $s's$, па њој се узме извесна тачка M_0 почетна и пут се од M_0 до M_s да као функција времена t. Правац се M_0 M по s узима за позитиван.

§ 21. — Кад је путања права линија, кретање се зове праволинејно. Ако се та права узме за $0x^{\text{ску}}$ осовину, кретања је дато једначином где је апсциса изражена као функција времена.

Најпростије је кретање дато једначином линеарном по t и облика је:

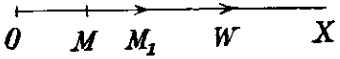
$$x = at + b \cdot \quad 1)$$

а и b су константе.

Из једначине 1) имамо:

$$\frac{Dx}{Dt} = a.$$

Ако је M положај тачке у времену t, M_1 у времену $t_1 = t + Dt$, величина $MM_1 = Dx$ и она је пређена за време Dt, однос између $\frac{Dx}{Dt}$ је пут пређен за јединицу времена, и ако се он обележи вектором MW, њиме је графички представљена брзина кретања. За 1) је та брзина а и стална је.



Сл. 17.

§ 22. — *Променљива брзина.* Ако је апсциса x, код праволинејног кретања ма каква функција времена $t, x = \varphi(t)$, онда се као и мало час однос $\frac{Dx}{Dt} = \frac{\varphi(t+Dt) - \varphi(t)}{Dt}$ зове брзина и то средња покретне тачке M, која за $Dt = o$ прелази у $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$.

Тако ако је:

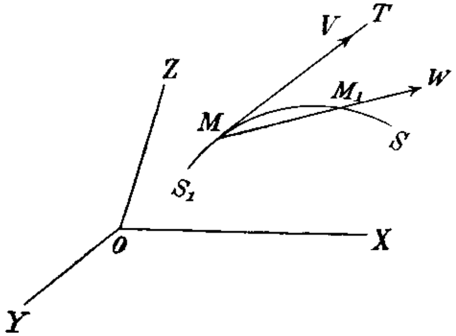
$$x = at^2 + bt + c$$

брзина је v:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2at + b \cdot \quad \cdot 1)$$

У 1) је брзина сразмерна са временом и такво се кретање зове једнако променљиво.

§ 23. Ако се посматра кретање по ма каквој кривој линији $S_1 S$ и M, M_1 су положаји покретне тачке у времену t и $t + Dt$, те по MM_1 пренесемо вектор $MW = \frac{MM_1}{Dt}$, MW се зове средња брзина покретне тачке. Кад Dt тежи нули, MW тежи ка Mv што се зове брзина покретне тачке у времену t.



Сл. 18.

Ако су $x, y\ z$ координате тачке M; пројекције су MM_1 Dx, Dy, Dz; вектора MW су пројекције:

$$\frac{Dx}{Dt}, \qquad \frac{Dy}{Dt}, \qquad \frac{Dz}{Dt}$$

а вектора Mv су пројекције:

$$\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}, \quad - \quad \frac{dz}{dt}$$

Ако је кретање дато једначином $MM_0 = s = \varphi_1(t)$

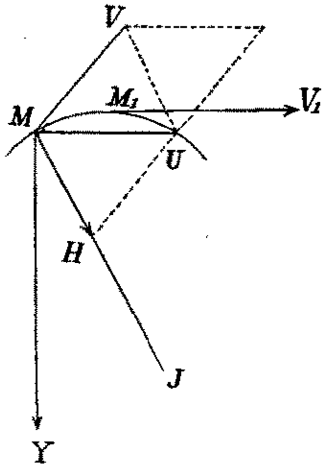
$$\text{однос } \pm \frac{ds}{dt} = lim\ arc \cdot \frac{MM_1}{Dt}$$

зове се брзина тачке покретне.

Како $\frac{ds}{dt}$ значи угао тангенте у M на трајекторији, према знаку $\frac{ds}{dt}$ брзина лежи у правцу тангенте од M_0 ка T или у супротном смислу.

За криволинејно кретање брзина је $v = \frac{ds}{dt}$ или у пројекцијама $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Ако је v стално кретање је криволинејно једнако, иначе је променљиво.

§ 24. — *Убрзање* (Галилео). Ако су $Mv, M_1 v_1$ брзине покретне тачке у времену t и $t + Dt$ и кроз M повучемо сегмеменат Mu паралелан са $M_1 v_1$, а са MH обележимо разлику између Mu и Mv, на MH пренесемо дужину $MI = \frac{MH}{Dt}$, тај се вектор MI зове средње убрзање покретне тачке за време Dt. Кад Dt тежи нули MI тежи ка MJ и MJ се зове убрзање за време t.



Сл. 19.

Пројекција је од Mv на $x^{\text{свој}}$ осовини $\frac{dx}{dt}$, од $M_1 v_1 = Mu$ је пројекција $\frac{dx}{dt} + D\frac{dx}{dt}$; MH је вектор једнак разлици векора Mu и Mv и његова је пројекција $D\frac{dx}{dt}$, према овоме је средње убрзање:

$$MI = \frac{MH}{Dt}$$

Пројекције су од

$$MI: \frac{D\frac{dx}{dt}}{Dt}, \quad \frac{D\frac{dy}{dt}}{Dt}, \quad \frac{D\frac{dz}{dt}}{Dt}$$

Кад Dt тежи нули, убрзање је $MJ = lim\ MI$ и његове су пројекције:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Пример: Нека је кретање дато једначинама: $x = at^2 + bt + c, y = a_1 t^2 + b_1{}^2 t + c_1, z = a_2 t^2 + b_2{}^2 t + c_2,$ пројекције су брзине:

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b, \quad \frac{dy}{dt} = 2a_1 t + b_2, \quad \frac{dz}{dt} = 2a_2 t + b_2,$$

пројекције су убрзања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2a, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2a_1 \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 2a_2$$

§ 24. — *Тангенцијално и нормално убрзање* (Хајенс). Ако је кретање по извесној путањи одређено елементом лука s и он је дат као функција времена, убрзање (акцелерација) се овако одређује:

На путањи $S_1 S$ узме се у тачци M, где је покретна тачка у времену t, тангента MT; главна нормала MN (позитивна ка C) и са $\varrho = MC$ обележи полупречник главне кривине. Ако су $\alpha\ \beta\ \gamma$ косинуси углова нагиба тангенте, а $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ нормале, из познатих формула Френеових имамо:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{\varrho}$$

или:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \quad \frac{ds}{dt} = \alpha\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \beta\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = v\frac{ds}{dt}$$

Диференцијаљењем имамо:

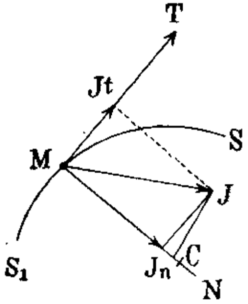
$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{ds}\quad\frac{ds}{dt}=\frac{\alpha'}{\varrho}\,\frac{ds}{dt}\ \text{и т. д.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\alpha'}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\beta\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\beta'}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\gamma\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\gamma'}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Да би ове формуле протумачили ваља по тангенти MT пренети вектор MI_t а по нормали MI_n, први је једнак са $\frac{d^2s}{dt}$ а други са $\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ Последње формуле, по правилу о пројекцијама, изражавају: да је акцелерација MI резултанта из две акцелерације MI_t и MI_n, од којих се прва зове тангенцијалном а друга нормалном.



Сл. 20.

Ако се стави $v=\frac{ds}{dt}$

$$I_t=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\quad\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\,\frac{dv^2}{ds}$$

$$I_n=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{v^2}{\varrho}$$

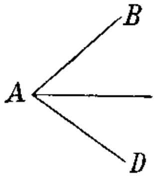
Из последњих је једначина јасно: да је MI у оскулаторној равнини, обрнуто ка центру кривине.

II. Транслација и ротација чврстога система

§ 25. — Чврстим се телом или системом зове **систем** материјалних тачака, чије је међусобно одстојање стално.

Ако ова одстојања при кретању остају сама **себи** паралелна, за систем се вели да се креће транслаторно. Ако се три тачке система $A\,B\,C$, што не леже у једној равни, споје, потребно је да се триједар $A\,B\,C$ помери паралелно самоме себи за транслаторно кретање.

Ако су координате тачке A у времену t_1 $x_1\,y_1\,z_1$, у времену t_2 $x_2\,y_2\,z_2$, A је прешло пут чије су пројекције x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; и како су путеви свих тачака међу собом паралелни то су и горње пројекције сталне, и њихове су брзине нуле, отуда је:



Сл. 21.

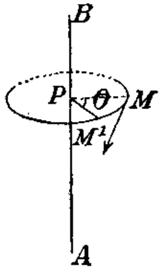
$$d\,\frac{(x_2-x_1)}{dt}=o\ \text{или}\ \frac{dx_2}{dt}=\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dy_2}{dt}=\frac{dy_1}{dt},\ \frac{dz_2}{dt}=\frac{dz_1}{dt}$$

Последње једначине казују: да су брзине свих тачака тела исте, и та се брзина зове средњом траслаторном брзином. Из 1) диференцијаљењем имамо:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}\ \text{и т. д.}$$

што значи: да су и убрзања иста за све тачке система.

§ 26. — *Обртање око једне сталне осовине.* Кад се једно тело обрће око извесне осовине AB, свака његова тачка M описује круг, који лежи у нормалној равни на AB, са полупречником PM. Брзина v тачке M је управна на раван $M\ AB$.



Сл. 22.

Брзина тачке M, која се налази у одстојању један од осовине, зове се угаоном брзином, и ако се она означи са ω, брзина је v тачке M:

$$v = \omega MP$$

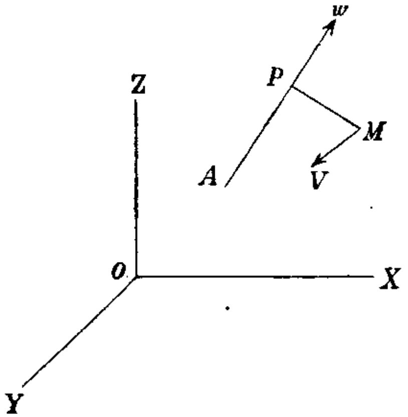
Ако се обележи са θ угао MPM_1 онда је:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \frac{d\theta}{dt} \cdot \overline{MP}$$

За одредбу брзине v требају ове количине: оса ротације, угаона брзина и смисао обртања. Све се ове три количине представљају једним вектором.

Ваља на осовини узети једну тачку A и по њој пренети вектор $A\omega$, дужине ω, у таквом правцу, да посматралац, чије су ноге у A а глава у ω, види обртање с лева у десно, кад је обртање позитивно. $A\omega$ представља онда ротацију.



Сл. 23.

Ако $A\omega$ представља на слици ротацију угаоне брзине ω и са $p\,q\,r$ обележимо компоненте од ω по ox, oy, oz, са $x_0\ y_0\ z_0$ означимо координате тачке A, брзина ће v тачке M имати за пројекције v_x, v_y, v_z. Нека су координате тачке M x, y, z.

v је за тачку M моменат ротације $A\omega$ односно тачке M, јер је $v = \omega \overline{MP}$. Нашли смо да су пројекције момента једнога вектора односно тачке $x\,y\,z$:

$$v_x = q(z - z_0) - r(y - y_0$$
$$v_y = r(x - x_0) - p(z - z_0)$$
$$v_z = p(y - y_0) - q(x - x_0)$$

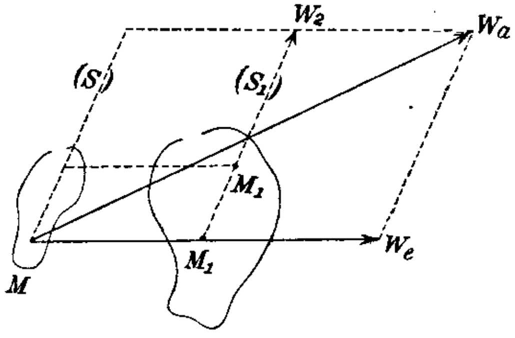
Ако је A у почетку, пројекције су брзине v:

$$v_x = qr - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx \cdot 2)$$

III. Брзина релативног кретања; слагање транслације и ротације; брзина једне тачке чврстога система, слободног.

§ 27. — *Релативно кретање и брзина.* Нека је (S) покретан систем на пр. наша земља и M покретна тачка према томе систему, на пр. каква тешка тачка, изложена утицају теже при слободном падању. За посматрача, који се креће са системом (S), тачка M описује релативне путање, док иста тачка у простору има са свим другу путању, која се зове апсолутном. Ово исто вреди за брзине и убрзања тачке M.

Нека су (S) и M положаји система и тачке M у времену t; (S_1) и M_1 положаји у времену $t + Dt$, апсолутно је померање покретне тачке MM_1. Да се тачка M не креће у систему она би после времена $t + Dt$ дошла у M', $M'M_1$ је релативно померање тачке M. Померај MM' се зове антренирајући померај. MM_1 је вектор и једнак је суми геометријској вектора $M'M_1$ и MM'. Ако се по овим



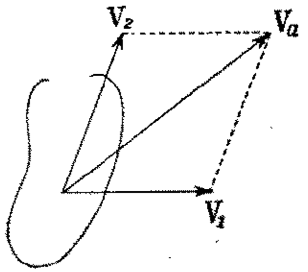
Сл. 24.

векторима пренесу дужине MW_a, MW_r, MW_e, једнаки са средњим брзинама апсолутним, релативним и антренирајућим имаћемо однос:

$$(W_a) = (W_r) + (W_e) \cdot \quad \cdot 1)$$

Кад Dt тежи ка dt из 1) имамо, пошто W_a тежи ка v_a и т. д.

$$(v_a) = (v_r) + (v_e) \cdot \quad \cdot \mathrm{I})$$

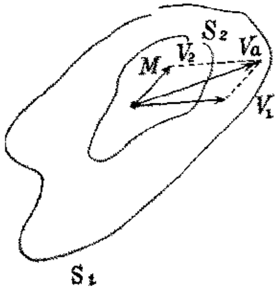


Сл. 25.

Апсолутна је брзина: резултанта из релативне и антренирајуће.

§ 28. — Нека је брзина v_1 транслације система S_1 а система S_2 према S_1 брзина транслације v_2, апсолутна је брзина v_a једне тачке M система S_2 геометријска сума из релативне брзине v_2 и антренирајуће v_1.

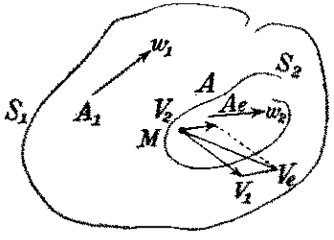
Апсолутне су брзине разних тачака S_2 као да се S_2 креће брзином v_a, једнаком резултанти брзина v_1 и v_2. На овај се начин слажу више транслација уједно, чија је брзина резултанта из датих транслационих брзина.



Сл. 26.

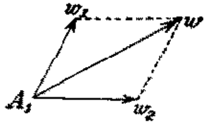
§. 29. — *Систем из две ротације.* Нека се систем S_1 обрће брзином ω_1 и његова је обртна осовина $A\omega_1$, у њему се налази оса $A\omega_2$ која представља обртање система S_2 према S_1, тражи се апсолутна брзина тачке M система S_2.

Релативна је брзина тачке M односно S_1 брзина v_2 од ротације $A\omega_2$, а то је моменат из $A\omega_2$ према тачки M; антренирајућа је брзина v_1, коју би M имало да мирује у S_1, то је брзина услед обртања са брзином од ω_1 око $A\omega_1$, а то је моменат $A\omega_1$ односно M.



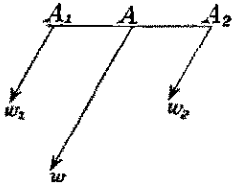
Сл. 27.

Апсолутна је брзина v_a тачке M резултанта из момената ω_1 и ω_2 односно M и та је брзина независна од реда по коме се врши обртање.



Сл. 28.

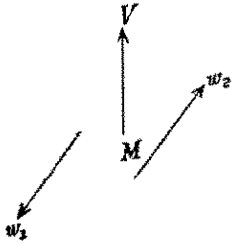
Примери. Нека се ротације секу у тачци A_1. Резултујући моменат из момената ω_1 и ω_2 односно M је једнак моменту резултанте ω. Апсолутна је брзина тачке M система S_2 као да се S_2 обрће ротацијом $A_1\omega$.



Сл. 29.

2). Нека су ротације ω_1 и ω_2 паралелне, њихов је систем једнак вектору $A\omega$.

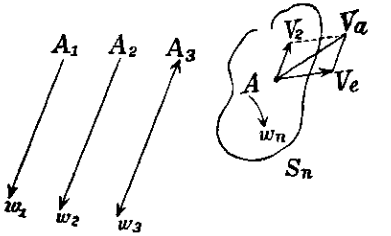
3). Ако две ротације образују спрег, резултујући моменат је једнак оси спрега за ма какву тачку M система S_2 Брзине су тачака као да се S_2 креће транслаторно брзином једнаком оси спрега.



Сл. 30.

§ 30. — *Слагање n ротација.* Нека се један систем S_1 обрће ротацијом $A_1\omega_1$, у овоме се систему налази оса $A_2\omega_2$ и тело S_2, чије је релативно кретање према S_1 ротација ω_2; у S_2 се налази осовина $A_3\omega_3$ и тело S_3 чије је релативно кретање односно S_2 ротација ω_3 и т. д. S_n има за релативно кретање односно $S_n —_1$ ротацију ω_n, за S_n се каже да има ротације $\omega_1\,\omega_2\cdot\cdot\omega_n$.

Апсолутна је брзина тачке M система S_n једнака резултујућем моменту из система вектора $\omega_1\,\omega_2\cdot\cdot\omega_n$ односно M. Ако ово вреди за три вектора вредиће и за n. Апсолутна је брзина тачке M у систему S_3 геометријска сума из релативне брзине v_r односно S_2 и антренирајуће v_e. Релативна је брзина M односно S_3 брзина од ротације ω_3, а то је моменат од ω_3 односно M, антренирајућа је брзина тачке M брзина коју би тачка M имала да мирује у S_3, а то је резултанта из вектора $\omega_1\,\omega_2$. Отуда је апсолутна брзина резултанта из v_r и v_e или резултанта из вектора $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$. Ово вреди за случај кад имамо четири и n система.



Сл. 31.

Кад се имају комбиновати транслације и ротације ради се као у последњем случају, сводећи сваку транслацију на спрег ротације.

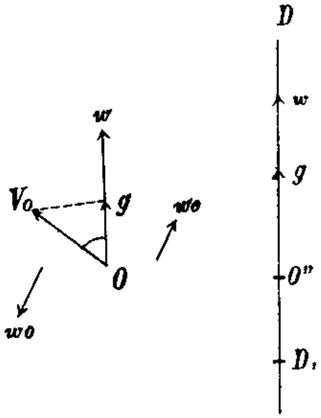
Ако имамо два система који су резултујући из вектора $\omega'_1\,\omega'_2\cdot\cdot\omega_n{}^1$ и $\omega_1\,\omega_2\cdot\cdot\omega_n$, па оба дају тачци M исту брзину, један другога могу заменити.

Последице су овога:

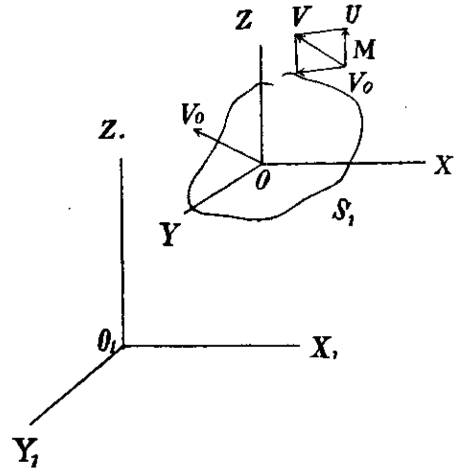
1). Систем n вектора се своди на два вектора, од којих један иде кроз произвољну тачку, отуда је брзина тачака система S_n таква, као да се S_n обрће око две осовине од којих једна пролази кроз произвољну тачку (Chasles).

2). Може се систем из n вектора свести на један вектор ω кроз 0 (произвољна тачка) и спрег осе $0v_0$. Брзине су сад тачака S_n, као да се S_n обрће ротацијом 0ω и спрегом ротације осе $0v_0$, т. ј. транслацијом брзине $0v_0$. Кад се 0 мења, мења се и $0v_0$, 0ω остаје стално, док је производ $g = \overline{0v_0}\cos(\omega v_0)$ сталан.

Ако је DD' централна осовина система вектора $\omega_1\,\omega_2\cdot\cdot\omega_n$, овај је систем еквивалентан једноме вектору ω (ротација) по DD' и спрегу максималном g (транслацији брзине g) по DD'. Брзине су тачака система S_n такве као да се S_n обрће ротацијом ω и креће транслацијом g у правцу ове ротације. Овакво се кретање зове *хеликоидално*. Оса DD' је тренутна оса ротације и клизења. У најопштијем случају кретања система, брзине су тачака као у хеликоидалном кретању. При слагању вектора, за налажење брзина тачке M, ваља векторе сматрати као ротације, а спрегове као транслације.



Сл. 32.



Сл. 33.

§ 31. — *Брзина покретног система.* Нека су $0_1\,x_1\,y_1\,z_1$ сталне осовине у простору, $0xyz$ су сталне осе у вези са системом покретним. Брзину ћемо тачке M наћи, ако знамо брзину кретања осовина

$0xyz$ и углове што их осовине $o_1 x_1 y_1 z_1$ и $oxyz$ међу собом склапају. Ако косинусе њихових углова означимо са $\alpha_1 \alpha_2 \cdots$ онда ће ова шема дати редом свих девет косинуса углова:

	X	y	z
X_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Сл. 34.

Нека су координате тачке M у систому $0xyz$, xyz а у систему $0x_1 y_1 z_1$, $x_1 y_1 z_1$, координате су тачке 0 у систему $0_1 x_1 y_1 z$, $x_0 y_0 z_0$; из аналитичке геометрије су односи између тих координата:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha x + \alpha_1 \ y + \alpha_2 z \\ y_1 &= y_0 + \beta x + \beta_1 \ y + \beta_2 z \quad \cdot \ \cdot \ 1). \\ z_1 &= z_0 + \gamma x + \gamma_1 \ y + \gamma_2 z \end{aligned}$$

Ако се тачка M не креће у систему $0xyz$, онда су $x \, y \, z$ константе и брзине су тачке M због кретања система $0xyz$ према $0_1 x_1 y_{2\,1}$:

$$\begin{aligned} v_{x1} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + x \frac{d\alpha}{dt} + y \frac{d\alpha_1}{dt} + z \frac{d\alpha_2}{dt} \\ v_{y1} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + x \frac{d\beta}{dt} + y \frac{d\beta_1}{dt} + z \frac{d\beta_2}{dt} \quad \cdot \ \cdot \ 2) \\ v_{z1} &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + x \frac{d\gamma}{dt} + y \frac{d\gamma_1}{dt} + z \frac{d\gamma_2}{dt} \end{aligned}$$

Ако тражимо пројекције од v на покретним осама имаћемо:

$$\begin{aligned} v_x &= \alpha \, v_{x1} + \beta \, v_{y1} + \gamma \, v_{z1} \\ v_y &= \alpha_1 \, v_{x1} + \beta_1 \, v_{y1} + \gamma_1 \, v_{z1} \quad \cdot \ \cdot \ 3) \\ v_z &= \alpha_2 \, v_{x1} + \beta_2 \, v_{y1} + \gamma_2 \, v_{z1} \end{aligned}$$

Кад се у 3) замени из 2) $v_{x1} \, v_{y1} \, v_{z1}$ и сетимо се односа $\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} = o$ из $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

и

$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = o$ и т. д.

а изразе извесне обележимо са p, q r:

$$\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt} = -\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt} \right) = p$$

$$\alpha \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma \frac{d\gamma_2}{dt} = -\left(\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt} \right) = q$$

$$\alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt} = -\left(\alpha \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma \frac{d\gamma_1}{dt} \right) = r$$

имаћемо односе, за брзину релативну:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x^{\,0} + qz - ry \\ v_y &= v_y^{\,0} + rx - pz \quad \cdot \ \cdot \ \mathrm{I}) \\ v_z &= v_z^{\,0} + py - qx \end{aligned}$$

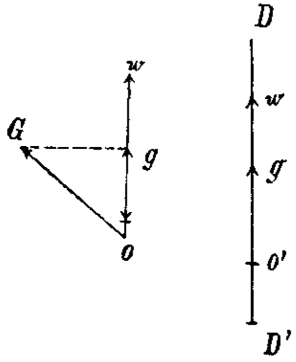
$$v^0{}_x = \alpha \frac{dx_0}{dt} + \beta \frac{dy_0}{dt} + \gamma \frac{dz_1}{dt} \text{ и т. д.}$$

Изрази казују, да је брзина тачке M сума геометријска из два вектора: једног v_0, истог за ма коју тачку M, он је једнак са брзинама тачке 0 и другог вектора U, који зависи од положаја тачке M (xyz) чије су пројекције из $0xyz$ $qz - ry$, $rx - pr$, $py - qx$. v_0 је брзина транслације система (S) а U је ротација (S) односно његове тачке 0, ротација 0ω чије су пројекције $p, q \, r$ за $0xyz$. Ова се ротација зове тренутном (инстантном). Брзина је тачке M једнака суми геометријској из транслационе брзине тачке 0 ма које у телу (S) и брзине ротације око једне осе кроз 0.

Компоненте су брзине односно $0_1\, x_1\, y_1\, z_1$ ове:

$$v_{x1} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + q_1 (z - z_0) - r_1 (y - y_1)$$

где су $p_1\, q_1\, r_1$ пројекције од 0ω на $0_1\, x_1\, y_1\, z_1$.



Сл. 35.

§ 32. — *Тренутна оса ротације и клизења.* Брзине су разних тачака чврстога тела, као да је тело принуђено да се креће транслацијом $0v_0$ и ротацијом 0ω, а ово се своди на једновремено обртање из три ротације, ротације 0ω и ротација $\omega^0, -\omega^\omega$ што је једнако спрегу осовине $0v_0$. За овај последњи случај смо видели да се све своди на хеликоидално кретање око централне осовине система вектора ω, $\omega^0, -\omega^0$; и једначине се ове осовине централне налазе тражећи место тачака чије су брзине паралелне правцу тренутне осовине ω.

Једначине су тренутне осовине DD'

$$\frac{v^0{}_x + qz - ry}{p} = \frac{v^0{}_y + rx - pz}{q} = \frac{v^0{}_z + py - qx}{r}$$

односно покретних осовина, а односно сталних је јенaчина DD':

$$\frac{\frac{dx^0}{dt} + q_1 (z_1 - z_0) - r_1 (y_1 - y_0)}{p_1} = \frac{\frac{dy_0}{dt} + r_1 (x_1 - x_0) - p_1 (z - z_0) =}{q_1}$$

g је клизење по DD' у правцу ω, однос је ω и g

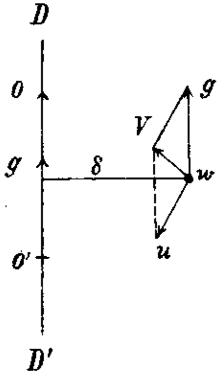
$$f = \frac{g}{\omega} = \frac{pv_x{}^0 + qv_y{}^0 + rv_z{}^0}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{p_1 \frac{dx_0}{dt} + q_1 \frac{dy_0}{dt} + r_1 \frac{dz_0}{dt}}{p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2}$$

$f = o$ за $g = o$, клизење је нула.

$f = \infty$ за $\omega = o$, ротација је нула.

§ 23. — *Величина брзине тачке M једнога тела.* Ако се тачка M налази за δ од осе DD', брзина је од ротације тачке M око DD' вектор MM_1, управан на равни MDD_1 и он је $u = \omega\delta$; брзина од транслације је вектор Mg, једнак и паралелан са g, резултујућа је брзина v у равни управној на δ и она је:

$$v^2 = \omega^2\delta^2 + g^2,\ tng\ vMg = \frac{\omega\delta}{g}$$



Сл. 36.

Кад M описује праву δ, управну на DD', v описује параболоид хиперболни. Из овога се лако изводи распоред резултујућих момената око централне осовине у ма каквом систему вектора, где је ω општа резултанта, а g спрег минимални.

§ 34. — *Кретање континуирно.* Геометријско место тренутних оса у телу описује извесну површину Σ, чија се једначина добија избацивањем t из једначина за DD' односно покретних оса. Односно сталних оса, у апсолутном простору, имамо другу површину Σ', као геометријско место осе DD'. Ма у коме моменту ове се две површине секу по заједничкој изводници, што је у *исто време тренутна* осовина за тај моменат. Обе су површине тангентне по тој изводници. Ако је A заједничка изводница у времену t а A_1 у времену $t_1 = t + dt$, за Σ ова се поклапа са A_1^1 површине Σ_1 у времену $t + dt$. Тангентна се раван у M за Σ врло мало разликује од тангентне равни AP. Ако са P_1 обележимо тачку A_1^1 која се поклапа са P у тренутку $t + dt$, тангентна раван у M за Σ_1 се разликује мало од равни AP_1. Тачка се P доводи у P_1 транслацијом PP^1 паралелном са A (клизење) и ротацијом око A; AP се поклапа са AP_1 бесконачно малом ротацијом око A_1.

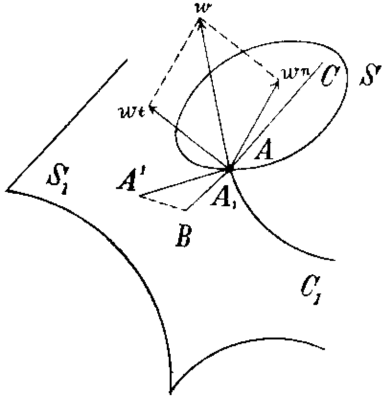
Опште се кретање може овако представити:

Извесна површина (réglée) у вези са телом што се креће, креће се по сличној површини сталној и на њој је тангентна по генератриси и по истој се површини котрља, клизећи по тој генератриси (Poncelet).

Примери: Чврсто тело утврђено у једној тачци. Овде се оба почетка 0 и $0'$ поклапају, тело је сведено за обртање око једне тренутне осовине (Ајлер) кроз 0. Клизење је нула, а оса хеликоидалног кретања се поклапа са тренутном осом. Овде је кретање сведено на котрљање конуса из тренутних оса у телу по конусу чије су изводнице тренутне осовине у простору.

Кретање тела паралелно са равнином Π). Овај се случај изводи из горњег кад је 0 у бесконачности. Геометријско место тренутних осовина у телу је цилиндар C, у простору је цилиндар C_1, чије су изводнице управне на раван Π. Кретање је сведено на котрљање цилиндра C по C_1 без клизења.

Котрљање и пивотирање покретне површине по сталној површини. Нека је покретно чврсто тело ограничено површином S која је у контакту са сталном површином S_1. У сваком тренутку t тачка A површине S додирује се са A_1 сталне површине S_1. Ако у томе моменту брзина v_0 тачке A није нула, она лежи у заједничкој тангентној равни ове површине. Вектори BA_1 и BA' су у тангентној равни кроз B, а и резултујућа из та два $A_1 A'$ је у истој равнини. Брзине су ма које тачке покретног система S такве, као да се тело креће транслаторно брзином v_0 са ротацијом $A\omega$ око извесне осе кроз A. За S се каже да се котрља и пивотира по S_1, кад је у сваком тренутку t, брзина тачке A нула. Овде је $v_0 = o$, брзине су покретног система у сваком тренутку као да се тело обрће ротацијом $A\omega$ око осовине кроз A, отуда излази: да тренутна осовина ротације и клизења пролази кроз A и да је клизење нула. Место геометријско из $A\omega$ у телу S је површина Σ а у простору површина Σ'; кретање се добија котрљањем Σ по Σ^1. Геометријско место A на S је курба C пресек Σ и S, место A_1 по S_1 је курба C_1, пресек Σ' и S_1. Ове се две курбе котрљају једна по другој.



Сл. 37.

Тренутна се ротација може разложити на две: $A\omega_n$ и $A\omega_t$. Прва је ротација управна на обема површинама и зове се угаона брзина од пивотирања. $A\omega_t$ је у тангенцијалној равни и зове се брзина котрљања. Ако је $\omega_n = o$, кретање S по S_1 је котрљање.

IV. Убрзања и теорема Кормолисова

§ 35. — Апсолутна је брзина v_a једне тачке A тела чије су координате $x_1\ y_1\ z_1$:

$$\frac{dx_1}{dt} = a + q_1 z_1 - r_1 y_1$$

$$\frac{dy_1}{dt} = b + r_1 x_1 - p_1 z_1 \cdot \ \cdot 1)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = c + p_1 y_1 - q_1 x_1$$

где a, b c значе $v_{x1}{}^0 - q_1 z_0 + r_1 y_0$ и т. д. Убрзања се добијају кад 1) диференцијалимо и отуда је:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{da}{dt} + q_1 \frac{dz_1}{dt} - r_1 \frac{dy_1}{dt} + z_1 \frac{dq_1}{dt} - y_1 \frac{dr_1}{dt}$$

и т. д.

Кад се $\frac{dr_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}$ замене из 1) и сведе, имаћемо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{da}{dt} + q_1 c - r_1 b + p_1 (p_1 x_1 + q_1 y_1 + r_1 z_1) - \omega^2 x_1 +$$

$$+ z_1 \frac{dq_1}{dt} - y_1 \frac{dr_1}{dt} \cdot \ \cdot \ \cdot \mathrm{I})$$

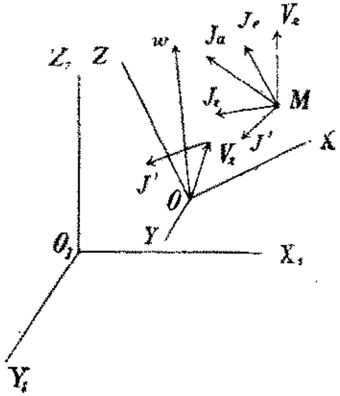
и т. д.

$\omega^2 = p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2$.

§ 36. — *Релативно убрзање.* Овде се узимају два система S_1 и S_2 и координате тачака према два система: $O_1\, x_1\, y_1\, z_1$, $O\, x\, y\, z$, сталном и покретном, као и при одређивању релативне брзине.

Трансформационе су једначине исте:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z \\ y_1 &= y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z \cdot 1) \\ z_1 &= z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z \end{aligned}$$



Сл. 38.

Апсолутна брзина е тачке M:

$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt} \qquad (v_a)$$

Убрзање је апсолутно:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2z_1}{dt^2} \quad (J_a)$$

Релативна је брзина и убрзање тачке M: (v_r)

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \quad (J_r)$$

односно покретних осовина.

Пројекције су од v_r и J_r на сталним осама:

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_2 \frac{dz}{dt}$$

$$\beta \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{dz}{dt} \quad \cdot (v_r)$$

$$\gamma \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt}$$

$$\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\beta \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 \frac{d_2y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2z}{dt_2} \cdot (J_r)$$

$$\gamma \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2z}{dt^2}$$

Пројекције антренирајуће брзине и убрзања тачке M на сталним осовинама су:

$$\frac{dx_0}{dt}+x\frac{d\alpha}{dt}+y\frac{d\alpha_1}{dt}+z\frac{d\alpha_2}{dt}$$

$$\frac{dy_0}{dt}+x\frac{d\beta}{dt}+y\frac{d\beta_1}{dt}+z\frac{d\beta_2}{dt}\quad\cdot\;(v_e)$$

$$\frac{dz_0}{dt}+x\frac{d\gamma}{dt}+y\frac{d\gamma_1}{dt}+z\frac{d\gamma_2}{dt}$$

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+x\frac{d^2\alpha}{dt^2}+y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}+x\frac{d^2\beta}{dt^2}+y\frac{d^2\beta_1}{dt^2}+z\frac{d^2\beta_2}{dt^2}\;\cdot\;(\mathrm{J}_e)$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2}+x\frac{d^2\gamma}{dt^2}+y\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}+z\frac{d^2\gamma^2}{dt^2}$$

Диференцијаљељем једначина 1) добијамо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\left(\alpha\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha_1\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha_2\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2x_0}{dt^2}+x\frac{d^2\alpha}{dt^2}+y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\right)$$
$$+2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right)\quad\cdot\;2).$$

и две сличне једначине.

Ако уочимо вектор J^1 чије су пројекције на сталним осама:

$$J'_{x1}=2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right)$$

$$(J')\;\;J'_{y1}=2\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{dx}{dt}+\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\right)$$

$$Z'_{z1}=2\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{dx}{dt}+\quad\cdot\;\cdot\quad+\frac{d\gamma_2}{dt}\frac{dz}{dt}\right)$$

који се зове вектор комплементарне акцелерације, једначине 2 казују: да је (J_a) једнако суми пројекција вектора: (J_r) (J_e) и (J').

Апсолутно је убрзање резултанта из убрзања релативног, *антренирајућег и комплементарног* (Coriolis).

Да би нашли боље шта значи J' потражимо његову вредност преко пројекција на покретне осовине. Ако његове пројекције означимо са J'_x, J'_y J'_z на покретним осама, имаћемо:

$$J'_x=\alpha J'_{x1}+\beta J'_{y1}+\gamma J'_{z1}\;\cdot\;\cdot\;3)$$

Кретање је система (S), као да се он обрће ротационом брзином тренутном ω, чије су пројекције p, q r и извесном транслацијом. За p, q, r нашли смо односе:

$$q=\alpha\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma\frac{d\gamma_2}{dt}-\left(\alpha_2\frac{d\alpha}{dt}+\beta_2\frac{d\beta}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma}{dt}\right)$$

и т. д.

Кад се ово замени у 3) имаћемо:

$$J_x'=2\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right),\quad J_y'=2\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$J_z'=2\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)$$

Ако кроз 0 повучемо вектор v_r' паралелно са v_r, релативном брзином тачке M, чије су пројекције $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}$ на осама покретним, тачка ће крајња вектора v'_r имати за координате $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}$. Пројекције су од J' на $0xyz$ једнаке двоструким пројекцијама брзине тачке v'_r, ако је угао $\omega 0 v'_r$ непроменљив и обртање се врши око 0ω угаоном брзином ω. Вектор је J' по величини, правцу и смислу једнак двострукој тој брзини, т. ј. двоструком моменту ω односно v'_r. Вектор J' је управан на раван $\omega 0 v'_r$ и једнак је двоструком производу из ω и одстојања тачке v'_r од осе $0\omega = 2\omega\, v_r \sin(\omega v_r)$, и правац му је према равни $\omega 0 v'_r$ са стране тренутне ротације ω којом се тежи да се v'_r покрене паралелно према $0v'_r$, према релативној брзини.

Теорема је за релативно убрзање:

$$(J_a) = (J_r) + (J_e) + (J')$$

$$(J') = 2\omega\, v_r \sin(\omega v_r).$$

ЛИТЕРАТУРА

(КИНЕМАТИКА)

Résal — Cinématique pure 1862.
Puiseux — Leçons de Cinématique — 18[illegible].
Picard — Traité de Cinématique théorique 1902.
Tannery — Deux leçons de Cinématique.
Poincaré — Cinématique et mécanisme — 1899.
Koenigs — Leçons de Cinématique I, II 1895.
K. Heun — Kinematik XXXVII, Sammlung Schubert.

ГЛАВА III.

Принципи механике: сила и маса

§ 37. — Галилео је увео неке принципе наслањајући се на појмове: о лењивости, убрзању и слагању кретања; Хајенс је ово проширио на кретање система, а Њутн је прецизирао принципе механике и гравитације и ти се принципи зову: принцип инерције, релативног кретања, и акције и реакције.

I. Принципи

§ 38. — Тачка геометријска испуњена материјом зове се материјална тачка; тело је састављено из безброј овакаих материјалних тачака.

Принцип се инерције састоји из два дела; први је обухваћен изразом: да кад је материјална тачка у простору у миру и на њу не дејствује никаква сила споља, она остаје у миру, и друго: кад се материјална тачка креће у простору а на њу не дејствује никаква спољна сила, кретање је тачке униформно и праволинејно.

Из овога принципа излази: да мора бити каквих узрока који тела из мира стављају у кретање и обратно, ти се узроци зову *силама*. Материјалне тачке, на које ови узроци дејствују, зову се нападним тачкама сила.

§ 39. — *Принцип* релативних кретања и независност ефеката сила. Кад се, под упливом извесних сила, систем материјалних тачака, независних једно од других, креће транслаторно у простору, па се нова сила придружи, ефекат је од ове силе као и релативно кретање тачке на коју ова нова сила дејствује, независан од транслаторног кретања система, све се дешава као да је систем у почетку мировао.

Ово вреди ако се транслацији придружи и обртање система.

§ 40. — *Резултантом* се више сила зове она сила, чији је ефекат једнак са сумом алгебарских ефеката свих сила, које на систем материјалних тачака дејствују.

Из овога излази: да резултанта више сила даје једној материјалној тачци у времену $t\text{-}t_0$ убрзање једнако геометријској суми убрзања, што би га остале силе систему дале у времену $t\text{-}t_0$.

§ 41. — *Принцип акције и реакције.* Ако каква тачка материјална m дејствује на другу тачку m', то је дејство у правцу mm'; друга тачка m' дејствује на m по истој линији mm' дејством, које је првом једнако само супротног смисла.

II. Мерење сила

§ 42. — Како су ефекти сила кретања, то се из особина кретања могу и особине сила проучити.

Ако је сила константна, што дејствује на извесну тачку материјалну, кретање је те тачке праволинејно и једнако убрзано.

Обратно, ако је убрзање каквог кретања стално по величини и правцу и сила је константна.

Резултанта је из више константних сила константна. Правац акцелерације и смисао одређује правац и смисао силе. Ако извесна сила, коју обележавамо јединицом, каквој тачци даје убрзање λ, све ће силе које тој тачци дају исто убрзање бити равне 1; силе које дају 2λ, 3λ или $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{3}\lambda$ и т. д. биће два и три пута веће или мање од силе која је узета за јединицу.

Ако каква сила даје убрзање J, њена је јачина F дата изразом:

$$F = \frac{J}{\lambda}$$

§ 43. — *Маса.* Однос између јачине какве силе константне и убрзања, што га та сила даје тачци, зове се маса и тај је однос сталан и обележавамо га обично са m.

§ 44. — Сила се представља вектором, који се поклапа са правцем убрзања. Ако је MJ вектор убрзања за тачку M, сила је F представљена вектором MF, и из односа:

Сл. 39.

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MJ}} = m \text{ имамо:}$$

$$F = mJ \cdot \quad \cdot 1)$$

За слагање и разлагање сила вреде теореме о слагању и разлагању вектора.

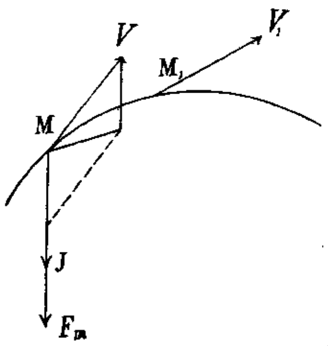
§ 45. — *Променљиве силе.* Ако при кретању убрзања нису стална, онда и узроци што то кретање производе, силе, нису сталне, већ променљиве.

Ако је у времену t тачка материјална у M, а у $t+dt$ у M_1, и брзине су v и v_1, средња је вредност променљиве силе за време dt, стална сила, која тачци M за dt даје брзину v_1 различну од v. Знајући да је убрзање константне силе једнако са средњим убрзањем у интервалу времена dt и да је то убрзање MJ, однос је између тог убрзања и силе Fm:

$$Fm = mJ$$

Кад Dt тежи нули, однос је између силе и убрзања:

$$(F) = m\,(J).$$



Сл. 40.

Како се и променљиве силе представљају векторима у правцу убрзања, што га те силе производе, то правило, за слагање убрзања вреди и за силе променљиве.

§ 46. — *Једначине кретања.* Ако на какву тачку M чија је маса m дејствују силе: $F_1 \cdot\cdot F_n$; и нека су $x\,y\,z$ координате тачке M, а $X_1\,Y_1\,Z_1 \cdot\cdot X_n\,Y_n\,Z_n$ пројекције сила $F_1\,F_2 \cdot\cdot F_n$, а $X\,Y\,Z$ пројекције резултанте F

$$X = \Sigma X_i \qquad Y = \Sigma Y_i \qquad Z = \Sigma Z_i$$

пројекције су убрзања J:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Из односа $(F) = mJ$ имаћемо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

и то су једначине кретања.

Ако је дејство резултанте F такво да тело мирује, онда се вели да је тело у равнотежи. Истраживање услова за мировање система задатак је одељку механике, који се зове *статика.* Одељак механике који проучава односе између сила и кретања, произведених тим силама, зове се *динамика.* Први одељак полази од Архимеда, други од Галилеја.

III. Јединица силе, хомогеност

§ 47. — Кад какво тело слободно пада у безваздушном простору убрзање му је $g = 9.808^m$ (Париз), и долази услед привлачења земљиног (акцелерација од теже).

Тежина тела p, пошто је ово сила, једнака је по општој једначини механике:

$$p = mg \cdot \ \cdot \ \cdot 1).$$

За јединицу се силе обично узима килограм, то је сума тежине апсолутних материјалних тачака у 1 лит. дестилисане воде на 4° (Париз).

Маса је једне тачка m дата изразима:

$$m = \frac{p}{g} \cdot \ \cdot 2).$$

Ако је $p = g$ $m = 1$

Јединица је масе маса тачке, чија је тежина g килограма, то је маса од 9.808 лит. воде на 4° (Париз).

Ако се узму за јединицу дужине, масе: сантиметар и грам, (маса 1 cc. дестилисане воде на 4°); за време једна секунда, — у томе је систему $C\,G\,S$ (сантиметар, грам секунда) маса тела изражена истим бројем, као и тежина, у грамовима. Јединица се силе зове дином (dyne), то је сила, која дејствујући на 1 gr. даје тој маси убрзање 1 cm. Апсолутна је тежина 1 gr. 980.8 dyne-a.

§ 48. — *Хомогеност.* Наше формуле не зависе од изабраних јединица којима се мери време, дужина и тежина.

Ако су у извесним јединицама биле основне количине механичке:

$$l, \quad t, \quad m, \qquad v \quad j \quad f \cdot \cdot \cdot 1)$$

па се узме друга јединица за време, дужину и масу, која је од прве λ пута већа за дужину, τ пута већа за време и μ пута већа за масу, онда су наше основне количине изражене изразима:

$$l\lambda, \quad t\tau, \ m\mu \qquad v\frac{\lambda}{\tau} \quad j\frac{\lambda}{\tau^2} \quad f\frac{\lambda\mu}{\tau^2} \cdot \cdot 2).$$

Све формуле које будемо нашли морају остати исте, независно од изабраних дужина. Тако би израз, који везује време, дужину клатна и убрзање од теже, који ћемо доцније наћи:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

био независан од изабраних јединица.

Кад се у I) смене количине t, l и g са изразима под 2) имамо:

$$t\tau = \pi\sqrt{\frac{l\lambda}{\frac{g\lambda}{\tau^2}}}, \text{ или } t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ово је доказ хомогености формуле I. Ово што вреди за I вреди за све формуле у механици.

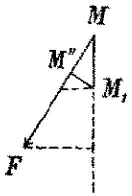
* * *

ГЛАВА IV

Рад; функција сила.

§ 49. — Елементаран рад A сила једнак је производу из силе F и пута $MM'' = MM_1 \cos FMM_1$ или:

$$A = MM_1 F \cos FMM_1 \cdot \cdot 1).$$



Сл. 41.

Рад A може бити већи, мањи или раван нули. Кад је рад $A > o$ зове се мотором, кад је $A < o$ рад се зове отпором.

Ако се померај MM_1 врши у времену dt, брзина је тачке M $v = \frac{\overline{MM_1}}{dt}$ и из 1) је рад A:

$$A = Fv \cos (Fv)\, dt \cdot \cdot 2)$$

Једначина се рада 1) може овако написати:

$$A = MM_1 [F \cdot \cos FMM_1] \cdot \cdot 3).$$

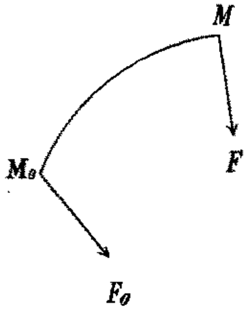
Рад је нула: или за $MM_1 = o$, или за $F = o$ или за $FMM_1 = 90°$.

§ 50. — Ако се координате тачке M означе са $x\, y\, z$, а M_1 са $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, знамо да је:

$$F \cdot MM_1 \cos FMM_1 = X dx + Y dy + Z dz \cdot \cdot 1)$$

где су $X\, Y\, Z$ пројекције од F.

Рад је T силе F при кретању тачке по путу од M_0 до M једнак:



Сл. 42.

$$T = \int_{(M_0)}^{(M)} X dx + Y dy + Z dz \cdot 2).$$

У најопштијем случају силе могу зависити од x, y, z $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ и t, и да би се нашао рад мора се знати облик путање MM_0. Ово се даје једначинама:

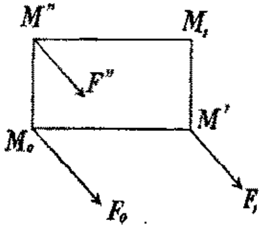
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad z = \omega(t)$$

Кад се ово смени у 1) имаћемо за рад израз:

$$\mathrm{T} = \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\, dt \cdot \cdot \cdot 1).$$

Ако сила зависи само од положаја, од $x, y\, z$, па се $x\, y\, z$ изразе као функције једног параметра q рад је:

$$T = \int_{q_0}^{q} \varphi(q)\, dq \cdot \cdot \cdot 2)$$



Сл. 43.

§ 51. — Најважнији је случај код T зависи од почетног и завршног положаја, а не и од облика пута по коме се тачка креће.

Нека су координате тачке M_0 (xyz), тачке M_1 $(x + dx, y + dy, z)$; из тачке M дођимо прво у M' а за тим у M_1. Рад је на путу $M_0\, M'$ $X(xyz)\, dx$ $(M_0M' = dx)$, у M' је облик

силе F $Y(x + dx, yz)$, рад је на путу $M'M_1$ $Y(x + dx, yz)$ dy, рад је на путу $M_0\, M'\, M_1$.

$$T = X(x\, y\, z)\, dx + Y(x + dx,\, yz)\, dy$$

Ако идемо по путу $M_0\, M_{''}$ и $M_{''}\, M'$, рад ће бити:

$$T' = Y(xyz)\, dy + X(x\, y + dy\, z)\, dx$$

Да су $T = T'$, кад се то уједначи и изрази по Тајлору смене, имаћемо:

$$Y(x + dx,\, y,\, z) = Y(xyz) + \frac{dY}{dx}\, dx$$

$$X(x,\, y + dy,\, z) = X(xyz) + \frac{dX}{dy}\, dy$$

Услов је да је $T' = T$, да је рад независан од пута по коме се из M_0 долази у M',

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dX}{dy}$$

Ако се ради по странама паралелограма паралелним са другим двема координатним равнима, налазе се још и ови услови:

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{dY}{dz}, \qquad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}$$

Услови нађени траже да је израз:

$$X dx + Y dy + Z dz$$

тотални диференцијал извесне функције U, да је:

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(xyz) \cdot \cdot 1).$$

Из 1) је:

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz} \cdot \cdot \cdot 2).$$

Овде су силе изводи функције U.

Ако се стави да је $U = - V$, из 2) имамо:

$$X = -\frac{dV}{dx},\quad Y = -\frac{dV}{dy}\quad Z = -\frac{dV}{dz}$$

V се зове потенцијал, и изводи његови дају силе, односно компонеите њене.

Рад је силе F на путу $M_0 M_1$ онда:

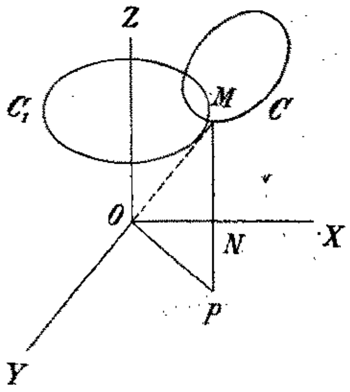
$$T = \int_{M_0}^{M_1} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{M_0}^{M_1} dU = U_1 - U_0 = V_0 - V_1$$

Ово све вреди за случај кад U има једну детерминацију на путу $M_0 M_1$, ако то није, рад не зависи од пута $M_0 M_1$, и није нула кад се M_1 поклопи са M_0. Пример је за ово кад је:

$$U = ar\ tg\ y/x$$

$$X = -\frac{y}{x^2 + y^2},\quad Y = \frac{x}{y^2 + x^2}\ Z = o.$$

U је угао XOP. Ако M описује курбу MCM, рад је нула кад тачка из M дође у M, јер U у M добија исту вредност; ако се тачка обрће по путу $MC'M$ рад је 2π, ако се тачка обрне један пут или $2n\pi$ ако се обрне n пута.



Сл. 44.

§ 52. — Ако постоји функција сила U или потенцијал $V = -U$, па координате једне тачке M обележимо са xyz а друге M' на Mx' ∥ са ox означимо са $x + dx$, yz онда је $\frac{dU}{dx} = \frac{U' - U}{MM'}$ U је вредност у M а U' у M'. Једначина последња даје пројекцију силе у правцу $ox^{\text{ске}}$ осе. На исти се начин добија пројекција у ма коме правцу MD и она је:

$$\frac{U'' - U}{MM''}$$

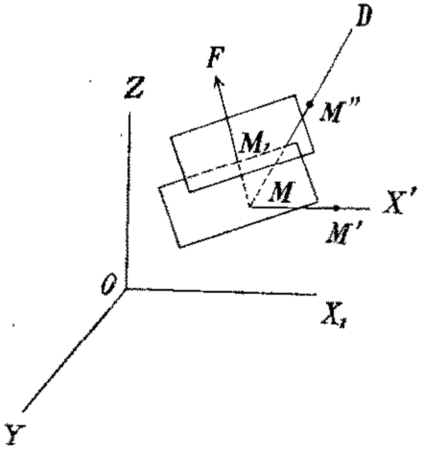
Овај се однос, кад MM'' тежи нули зове извод U по правцу MD.

Површине $U(xyz) = C$, где је C константа, зову се нивоске површине. С тога што су изводи U по x, y z силе $X\,Y\,Z$, значи да сила $F(xyz)$ стоји нормално на нивоској површини $U = C$ и то са стране где U расте. Пројекција сила F у правцу нормале n на U је:

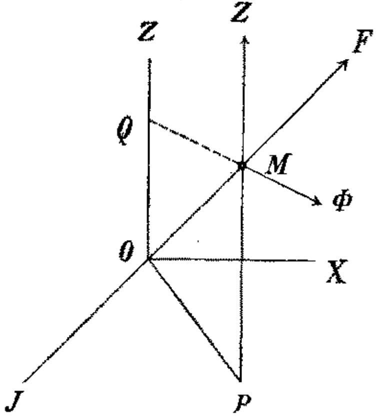
$$F = \frac{dU}{dn}$$

јер је:

$$F = lim\,\frac{U_1 - U}{MM_1} = \frac{dU}{dn}$$



Сл. 45.



Сл. 46.

§ 53. — *Пример за функције сила.* Ако је дата тачка M на коју дејствује сила Z, управно на раван xoy и функција је одстојања тачке M од те равни, онда су $X = o$, $Y = o$ $Z = \varphi(z)$. Елементаран је рад $Z\,dz$ или $\varphi(z)\,dz$. Функција сила је:

$$U = \int \varphi(z)\,dz.$$

Нивоске су површине паралелне са oxy. Ако је $Z = -mg$

$$U = -mgz + const.$$

2). Нека је дата силе Φ управна на oz. Кад се MQ обележи са ϱ, пројекције су силе:

$$X = \Phi \frac{x}{\varrho}, \quad Y = \Phi \frac{y}{\varrho} \quad Z = o$$

рад је због $\varrho^2 = x^2 + y^2$:

$$\frac{\Phi}{\varrho}(x\,dx + y\,dy) = \Phi\,d\varrho$$

и функција сила је:

$$U = \int \Phi\,d\varrho = \psi(\varrho)$$

Нивоске су површине обртни цилиндри око $0Z$.

3). Ако је сила F, која иде стално кроз o функција одстојања $0M = r$, пројекције су силе:

$$F\frac{x}{r}, \quad F\frac{y}{r} \quad F\frac{z}{r}$$

$$U = \int F\,dr$$

Нивоске су површине свере. Ако је $F = -\frac{M}{r^2}$, нивоске су површине:

$$U = -\int M\frac{dr}{r^2} = \frac{M}{r} + C = o.$$

§ 54. — Ово што смо извели за дејство једне силе на извесну тачку, вреди и за n сила на систем тачака.

Ако су координате тачака $M_1\ M_2 \cdot\cdot M_n\ x_1\ y_1\ z_1 \cdot\cdot x_n\, y_n\, z_n$, а пројекције сила $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n\ X_1\ Y_1\ Z_1 \cdot\cdot X_n\, Y_n\, Z_n$, суме су елементарних радова сила $F_1\, F_1 \cdot\cdot F_n$ за помераје бесконачно мале:

$$X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1 + \cdot\cdot \qquad + X_n\,dx_n + Y_n\,dy_n + Z_n\,dz_n$$

Ако су силе зависне од положаја и изводи су извесне функције U компоненте сила:

$$X_k = \frac{dU}{dx_k}, \ Y_k = \frac{dU}{dy_k}, \ Z_k = \frac{dU}{dz_k}, k = 1 \cdot n.$$

Сума је свих радова сила $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n$

$$T = \int_{P_0}^{P_1} (X_1\,dx_1 + \qquad + Z_n\,dz_n) = \int_{P_0}^{P_1} dU = U_1 - U_0$$

Ако је U униформна функција рад T је независан од облика пута $P_0\, P_1$.

ЛИТЕРАТУРА

ПРИНЦИПИ МЕХАНИКЕ

Koenigsberger — Die Principien der Mechanik.

A. Harnack — Naturfoschung und Naturphilosophie.

L. Boltzmann — Principien der Mechanik.

Duhem — L'évolution de la mécanique.

H. Bonasse — Introduction à l'étude des théories de la Mécanique — 1893.

H. Hertz — Die Principien der Mechanick — Gesammelte Werke t. III — 1894.

Freycinet — Sur les principes de la Mécanique rationnelle.

Hirn — La cinétique moderne et dynamique moderne.

H. Poincaré — La science et Hypothèse — Bibl. de philosophie scientifique.

H. Poincaré — La valeur de la science — Bibl. de philosophie scientifique.

H. Poincaré — Science et Méthode — Bibl. de philosophie scientifique.

E. Picard — La science moderne et son état actuel — Bibl. de philosophie scientifique.

E. Mach — Erkenntniss und Irthum (La connaissance et l' erreur — Bibl. de philosophie scientifique).

E. Mach — Die Mechanik in ihren Entwikelung — 1889.

Helmholtz — Erhaltung der Kraft (1847).

К. Стојановић — О основним принципима механике и њиховој примени на физичке проблеме.

ДРУГИ ДЕО

СТАТИКА

ГЛАВА V.

Равнотежа тачке и чврстих тела.

I. Слободна тачка

§ 55. — Да је извесна тачка M, на коју дејствује n сила, у равнотежи нужно је да је резултанта тих сила R нула. Та је резултанта нула, ако су њене компоненте X, Y, Z свака за се равна нули, ако су:

$$X = o, \quad Y = o \quad Z = o \cdot \cdot 1).$$

Ако R зависи само од $x, y z$, онда су X, Y и Z такође зависни од $x y z$, и из једначина 1) налазимо координате тачке M за положај у коме је тачка у равнотежи.

Ако су X, Y, Z изводи какве функције сила U $(x y z)$, услови су равнотеже:

$$\frac{dU}{dx} = o, \quad \frac{dU}{dy} = o \quad \frac{dU}{dz} = o \cdot \cdot \cdot 2).$$

Услови 2) су нужни и довољни да је U max. или minim. За први случај је тачка у стабилној, за други у лабилној равнотежи. За први случај значи за нађене координате $x y z$ из 2) U је maximum јер се тачка M враћа у положај првобитни ако се врло мало из њега изведе, иначе не.

§ 56. — Ако имамо n центара $P_1 P_2 \cdot\cdot P_n$ из којих дејствује n сила $F_1 F_2 \cdot\cdot F_n$ на извесну тачку M, па су те силе сразмерне са одстојањима $r_1 r_2 \cdot\cdot r_n$, онда су компоненте резултанте из свих сила:

$$X = f \Sigma m_k (a_k - x), \quad Y = f \Sigma m_k (b_k - y) \quad Z = f \Sigma m_k (c_k - z)$$

Овде је f извесна константа, m_k $(k = 1 \cdot\cdot n)$ су масе n центара $P_1 P_2 \cdot\cdot P_n$; $a_k\, b_k\, c_k$ су координате тачака $P_1 P_2 \cdot\cdot P_k$, $x\, y\, z$ су координате тачке M.

Ако посматрамо тачку G која задовољава ове услове:

$$\mu = \Sigma m_k, \quad \mu\xi = \Sigma m_k a_k, \quad \mu\eta = \Sigma m_k b_k \quad \mu\zeta = \Sigma m_k c_k$$

где су $\eta, \xi\, \zeta$ координате те тачке G, силе су:

$$X = f\mu (\xi - x), \quad Y = f\mu (\eta - y) \quad Z = f\mu (\zeta - z)$$

Ове су једначине нула за:

$$x = \xi, \quad y = \eta \quad z = \zeta.$$

Значи тачка је M у равнотежном положају кад се налази у G (G се зове тежиште за тачке $P_1 P_2 \cdot\cdot P_n$).

Функција је сила овде:

$$U = -\frac{f\mu}{2}\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right] = -\frac{f\mu}{2} MG^2$$

За $\mu > o$ $U = o$ у G, а $U < o$ у свима другим тачкама; значи да је $U = \text{maxi.}$ у G и ту је равнотежа стабилна. Обратно је за $\mu < o$. За $\mu = o$ $X = f \Sigma m_k a_k$, $Y = f \Sigma m_k b_k$, $Z = f \Sigma m_k c_k$ и функција је сила:

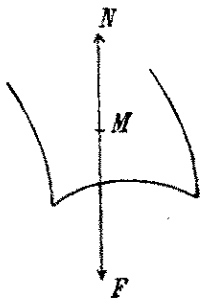
$$U = f(x \Sigma m_k a_k + y \Sigma m_k b_k + z \Sigma m_k c_k).$$

§ 57. — *Тачка на површини* је у равнотежи или кад је резултата сила F нула, или кад је сила

F управна на површини. Узима се да је дејство површине на тачку нормална сила MN и зове се нормална реакција; кад је тачка у равнотежи, MN мора падати у супротни правац од правца MF, ако се не води рачун о трењу. Тачка M притискује на површину силом једнаком и супротном сили MN.

Ако је једначина површине

$$f(xyz) = o \cdot \cdot 1).$$



Сл. 47.

Реакција нормална MN има за пројекције количине сразмерне са косинусима углова нормале површинске и оне су:

$$\lambda \frac{df}{dx} \quad \lambda \frac{df}{dy} \quad \lambda \frac{df}{dz}$$

Пројекције су резултанте F, X, Y, Z.

Услови су равнотеже:

$$X + \lambda \frac{df}{dx} = o, \quad Y + \lambda \frac{df}{dy} = o, \quad Z + \lambda \frac{df}{dz} = o \cdot 2).$$

Из једначина 1 и 2 налазимо $x\, y\, z$ и λ, положај тачке M на површини и отпор површине, нормалну реакцију λ преко λ.

Овде се могу координате $x, y\, z$ површине изразити са два параметра $q_1\, q_2$ и једначина је површине:

$$x = \varphi(q_1\, q_2), \quad y = \psi(q_1\, q_2), \quad z = \omega(q_1\, q_2) \cdot \cdot 3)$$

Услови су за равнотежу да је F нормално на површини, да је F нормално на двема линијама површине 3) за $q_1 = const.$ и $q_2 = const.$

Услови су за ово:

$$Q_1 = X\frac{d\varphi}{dq_1} + Y\frac{d\psi}{dq_1} + Z\frac{d\omega}{dq_1} = o$$

$$\text{I)}$$

$$Q_2 = X\frac{d\varphi}{dq_2} + Y\frac{d\psi}{dq_2} + Z\frac{d\omega}{dq_2} = o$$

Из I налазимо q_1 и q_2, а кад се то замени у 3), имамо $x\,y\,z$, координате тачке M за равнотежни положај.

Ако је:

$$Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2$$

тотални диференцијал по q_1 и q_2 извесне функције $U(q_1 q_2)$, услови I су услови maxim и minim. функције U.

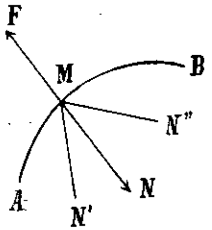
§ 58. — *Равнотежа тачке* на каквој кривој линији, не водећи рачуна о трењу.

Овде је реакција курбе на тачку M у правцу нормале (MN). Кад је тачка M у равнотежи, MN пада у супротни правац резултанте спољних сила F што дејствују на тачку M.

Једначина је курбе AB:

$$f(xyz) = o, \quad f_1(xyz) = o \quad 1)$$

Компоненте су F: $X\,Y\,Z$.



Сл. 48.

Услов се за равнотежу добија, ако се изрази да је F једнако и супротно са MN, са нормалном реакцијом.

MN се може увек разложити на две компоненте MN' и MN'', што падају у нормале површине под 1), које пресеком дају курбу AB. Компоненте су MN' и MN'':

$$\lambda\frac{df}{dx},\quad \lambda\frac{df}{dy},\quad \lambda\frac{df}{dz},\quad \lambda_1\frac{df_1}{dx}\quad \lambda_1\frac{df_1}{dy}\quad \lambda_1\frac{df_1}{dz}$$

Услови су за равнотежу:

$$2)\quad X + \lambda\frac{df}{dx} + \lambda_1\frac{df_1}{dx} = o, \qquad Y + \lambda\frac{df}{dy} + \lambda_1\frac{df_1}{dy} = o$$

$$Z + \lambda\frac{df}{dz} + \lambda_1\frac{df_1}{dz} = o.$$

Из 1) и 2) можемо наћи $x\,y\,z$, $\lambda\,\lambda_1$ положај тачке M на курби и отпор курбе помоћу λ и λ_1.

Ако се координате курбе изразе једним параметром q, једначина је линије AB:

$$3)\quad x = \varphi(q) \quad y = \psi(q) \quad z = \omega(q)$$

Косинуси углова нагиба тангенте сразмерни су са $\varphi'(q)$ $\psi'(q)$ $\omega'(q)$, услови равнотеже су:

$$Q = X\varphi'(q) + Y\psi'(q) + Z\omega'(q) = o.$$

$$\varphi'(q) = \frac{d\varphi}{dq} \text{ и т. д.}$$

Кад се из ове једначине нађе q и замени у 3) задатак је решен. Ако је $\int Q\,dq = U(q)$, $Q = o$ је услов за maxim или min од U, за стабилан или лабилан положај равнотежне тачке M на линији AB.

II. Систем тачака.

§ 59. — У систему тачака могу бити два случаја: или су све тачке по све независне једна од друге, или за извесне постоје нарочити услови. За први случај се примењују нађени услови за равнотежу једне тачке, за други случај мора се водити рачун о новим условима.

Чврсто тело је систем тачака, где је услов нов: да су одстојања између тачака у систему стална. Кад једна сила дејствује на једну тачку каже се да у исто време дејствује и на систем сам. Утицај спољних сила узима се да не утиче на деформацију чврстога тела.

§ 60. — Додавањем или одузимањем две једнаке и супротне силе не мења се дати систем сила, што дејствују на чврсто тело. Померање сила у своме правцу не мења ефекат силе.

За равнотежу потребно је, да је резултанта свих сила, што дејствују на какво тело, нула, кад се силе секу у једној тачци.

У теорији вектора, пошто се и силе представљају векторима, видели смо, да се све силе, што дејствују, па су им нападне тачке у разним тачкама, могу свести: на две силе F и Φ, од којих једна дејствује на произвољну тачку.

Видели смо: да се систем сила (вектора) може свести на једну резултанту и један спрег; резултанта је R са нападном тачком 0 произвољном, а моменат спрега је моменат $0G$ односно тачке 0.

Услови су за равнотежу: да је $F = \Phi = o$ или да је $R = o$ и моменат спрега $0G = o$.

Ако су X, Y, Z компоненте од R, а L, M, N компоненте од $0G$ услови су равнотеже:

$$X = o,\ Y = o,\ Z = o,\quad L = o,\ M = o,\ N = o.$$

За специјалне случајеве, кад је $0G$ управно на правац резултанте, R је онда у правцу централне осе и потоје ове једначине:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > o \quad LX + MY + NZ = o$$

Овде је услов за равнотежу:

$$X = o,\quad Y = o,\quad Z = o.$$

III. Примена. Силе у равни; паралелне силе; тежиште.

§ 61. — *Силе у равни.* Ако се раван, у којој су силе, узме за xy, услови су за равнотежу да је резултанта нула и спрег нула. Овде постоји једначина:

$$Z = o \quad L = o \quad M = o$$

$$LX + MY + NZ = o.$$

Ако је $X^2 + Y^2 > o$ систем има резултанту по централној оси.

Ако је $X = o,\ Y = o,\ N \gtrless o$, систем има спрег.

Ако је $X = o,\ Y = o,\ N = o$, систем је у равнотежи.

§ 62. — *Паралелне силе.* Ако су све силе паралелне са извесним правом $0D$, чији су косинуси углова нагиба $\alpha, \beta\, \gamma$ и те силе обележимо са $P_1 P_2 \cdot\cdot P_n$, а њихове нападне тачке са $x_1 y_1 z_1 \cdot\cdot x_n y_n z_n$, могу ови случајеви наступити:

1). $\Sigma P_k \gtrless o$. Ако нападну тачку резултанте означимо са $\xi\, \eta\, \zeta$ постоје односи:

$$\xi = \frac{\Sigma P_k x_k}{\Sigma P_k},\quad \eta = \frac{\Sigma P_k y_k}{\Sigma P_k},\quad \zeta = \frac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k}$$

2). $\Sigma P_k = o$ и $L^2 + M^2 + N^2 > o$

3). $\Sigma P_k = o,\ \dfrac{\Sigma P_k x_k}{\alpha} = \dfrac{\Sigma P_k y_k}{\beta} = \dfrac{\Sigma P_k z_k}{\gamma}$

Овде под 3) постоји равнотежа.

Ако постоји равнотежа за ма какво $\alpha, \beta\, \gamma$ услов је за то:

$$\Sigma P_k = o,\ \Sigma P_k x_k = o,\ \Sigma P_k y_k = o,\ \Sigma P_k z_k = o$$

Оваква се равнотежа зове астатичком.

§ 63. — *Тежиште.* Тежина је тела сила вертикална, јачине $p = mg$, где је m маса тела а g убрзање од теже. Нападна тачка тежине је тежиште тела, то је нападна тачка резултанте паралелних сила, јер се тежине свих честица, из којих је тело склопљено, могу сматрати за паралелне и ако пролазе кроз тежиште земљино.

Ако означимо са $m_1 m_2 \cdot\cdot m_n$ масе n тачака тела, њихове тежине са $p_1 p_2 \cdot\cdot p_n$, а координате тих тачака са $x_1 y_1 z_1 \cdot\cdot x_n y_n z_n$; са $\xi \eta \xi$ координата тежишта 0, и са M масу целога тела, са P његову тежину, имаћемо ове односе:

$$p_k = m_k g, \quad P = p_1 + p_2 + \quad p_n = Mg$$

$$\xi = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdot p x_k}{p_1 + p_2 + \cdot\cdot p_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdot m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdot\cdot + m_n}$$

$$\xi = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m x}{M}$$

$$\eta = \frac{\Sigma m y}{M}, \quad \xi = \frac{\Sigma m z}{M}$$

Из једначине за $\xi, \eta \xi$ види се: да положај тежишта зависи само од масе M тела и маса тачака.

IV. Примена за произвољне силе у простору.

§ 64. — Ако на странама тетраједра $ABCD$ у тежиштима страна $A' B' C' D'$ дејствују силе управне на површинама, тело је у равнотежи, ако су силе сразмерне са површинама, и све иду у унутрашњост тетраедра. Ово вреди и за полиједре.

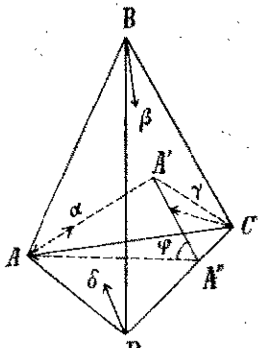
Нека су $\alpha \beta \gamma \delta$ четири силе што дејствују у $A B C D$, теменима тетраједра и сразмерне су са површинама:

$$\alpha = k\,\overline{BCD}, \quad \beta = k\,\overline{CDA}, \quad \gamma = k\,\overline{DAB}, \quad \delta = k\,\overline{ABC}$$

Моменти су односно ивице CD сила γ и δ нула, α и β имају супротне моменте. Сила α иде по висини AA', угао α са CD је прав и најкраће је одстојање α од CD $A' A''$; моменат је α односно CD

$$\alpha A' A'' = \alpha AA' \, cotg\, \varphi = k\, BCD \cdot AA' \, cotg\, \varphi = 3k\, v\, cotg\, \varphi$$

v је запремина тетраедра а φ угао диједар по CD.



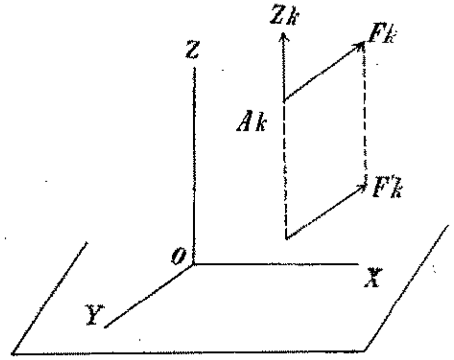
Сл. 49.

Моменат је β исти и отуда је сума свих момената односно ма које ивице нула (овде је за ивицу CD).

Ово вреди као доказ за горњи случај, јер се све односи на тетраедар $A' B' C' D'$ склопљен из тежишта страна.

2). Спрегови чије су осовине управне на странама и сразмерне са странама тетраедра, кад су сви правци ка унутрашњости, у равнотежи су. Овде је сума пројекција осовина спрегова на ма који правац нула.

§ 65. — *Централна раван* у чврстоме телу на које дејствују силе чија резултанта није нула.



Сл. 50.

Нека је $F_k (X_k Y_k Z_k)$ једна од сила, A_k $(x_k y_k z_k)$ њена нападна тачка, па узмемо праву op кроз почетак система и косинусе њених углова означимо са $\alpha \beta \gamma$, а сваку силу F_k разложимо на две компоненте: од којих једна пада у правац паралелан са op, а друга у нормалан на исти и прву означимо са p_k

$$p_k = \alpha X_k + \beta Y_k + \gamma Z_k.$$

Координате су тежишта свих паралелних сила p_k дате једначинама:

$$\xi(\alpha\,\Sigma X + \beta\,\Sigma Y + \gamma\,\Sigma Z) = \alpha\,\Sigma xX + \beta\,\Sigma xY + \gamma\,\Sigma xZ$$

$$\zeta(\alpha\,\Sigma X + \beta\,\Sigma Y + \gamma\,\Sigma Z) = \alpha\,\Sigma zX + \beta\,\Sigma zY + \gamma\,\Sigma zZ$$

Ако се *op* помера, помераће се и тежиште $\xi\zeta\eta$ и место ће тежишта бити раван π, чија се једначина добија ако се из последње три једначине избаце углови $\alpha\beta\gamma$. Ова се раван зове централном (Möbius). Она не зависи од положаја тела. У извесним случајевима раван централна прелази у праву линију (линија централна), или тачку (центар сила). Последњи је случај кад $\xi\zeta\eta$ не зависе од $\alpha\beta\gamma$.

Како је раван π у вези са телом и не мења се са његовим обртањем, може се постићи да је π управно на правац резултанте, која је стална по положају у простору. Кад ову раван узмемо за *xy* и за почетак система тачку 0, која се поклапа са центром компонената сила F_k, које су паралелне са правцем резултанте и са *oz* правом нормалном на π, а *ox* и *oy* оставимо произвољно, имаћемо:

$$\Sigma X = o \quad \Sigma Y = o \quad \Sigma Z = R,$$

и

$$\Sigma xZ = o,\ \Sigma yZ = o,\ \Sigma zZ = o,\ \Sigma zX = o,\ \Sigma zY = o$$

јер је центар паралелних сила из $Z_1 Z_2 \cdot\cdot Z_n$ у 0, и $\xi\eta\zeta$ је у равни $\zeta = o$ за ма какво $\alpha\beta\gamma$. Резултанта је R у правцу $0Z$.

Пројекције $F_1' F_2' \cdot\cdot F_n'$ сила F_k на π дају систем сила у равни и оне се дају свести на један спрег. Обртањем тела око $0Z$ може се постићи равнотежа од Z'_k и кад се сад за $0x$ и $0y$ узму главни правци система сила F'_k имаћемо:

$$\Sigma xY = o \quad \Sigma yX = o.$$

Једине једначине што нису нуле ове су:

$$\Sigma Z = R, \quad \Sigma xX = A \quad \Sigma yY = B.$$

Равни *zox*, *zoy* зову се главне равни тела.

§ 66. — Има безброј положаја у којима силе F_k имају једну резултанту (Minding). Скуп свих ових резултанта даје конгруенцију у телу, чији зраци секу два конуса стална у главним равнинама.

У место померања тела можемо померати силе.

Разложимо сваку силу F_k на $X_k Y_k Z_k$ и обрћимо триједар $X_k Y_k Z_k$ око нападне тачке A_k тако да сви триједри остају са једним $ox'y'z'$ сталним паралелни. Ако су косинуси углова триједра $ox'y'z'$ са $oxyz$ $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, $\gamma\gamma'\gamma''$, силе F_k заузимају положај F_k' чије су пројекције на $oxyz$ дате једначинама:

$$\begin{aligned} X'_k &= \alpha X_k + \beta Y_k + \gamma Z_k \\ Y'_k &= \alpha' X_k + \beta' Y_k + \gamma' Z_k \\ Z'_k &= \alpha'' X_k + \beta'' Y_k + \gamma'' Z_k \end{aligned}$$

Нова је резултанта R':

$$X' = \gamma R, \quad Y' = \gamma' R \quad Z' = \gamma'' R.$$

Нови су моменти:

$$\begin{aligned} L' &= \Sigma(y_k Z'_k - z_k Y'_k) &&= B\beta'' \\ M' &= &&= -A\alpha'' \\ N' &= \Sigma(x_k Y'_k - y_k X'_k) &&= A\alpha' - B\beta. \end{aligned}$$

Да у новом положају силе F'_k имају једну резултанту, услов је:

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = o$$

или:

$$A(\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'') - B(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') = o$$

пошто је:

$$\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' = \beta \quad \gamma\beta'' - \beta\gamma'' = \alpha'$$

услов је:

$$A\beta - B\alpha' = o$$

Кад су ови услови задовољени, силе имају једну резултанту чије су једначине:

$$L' = yZ' - zY', \ M' = zX' - xZ', \ N' = xY' - yX'$$

X' Y' Z', L' M' N' зову се координате резултанте (Plücker).

Из једначине $A\beta - B\alpha' = o$ и једначине за $N' = A\alpha' - B\beta$ налазимо:

$$\beta = \frac{BN'}{A^2 - B^2} \quad \alpha' = \frac{AN'}{A^2 - B^2} \quad \alpha'^2 - \beta^2 = \frac{N'^2}{A^2 - B^2}$$

Кад се ово стави у познатим односима:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

добија се:

$$\frac{N'^2}{A^2 - B^2} + \frac{M'^2}{A^2} - \frac{X'^2}{R^2} = o \cdot \cdot 1)$$

$$\frac{N'^2}{A^2 - B^2} - \frac{L'^2}{B^2} + \frac{Y'^2}{R^2} = o \cdot \cdot 2).$$

Ови односи изражавају да правац резултанте припада двама комплексима другога степена.

$$x = o \quad y = -\frac{N'}{X'} \quad z = \frac{M'}{X'}$$

су координате тачке где резултанта сече раван $Z0Y$.

Кад се ово замени у 1) имамо:

$$x = o, \frac{y^2}{A^2 - B^2} + \frac{z^2}{A^2} - \frac{1}{R^2} = o$$

значи да је тачка на конусу у yz;

$y = o, x = \frac{N'}{Y'}, \ Z = \frac{M'}{Y'}$ су координате резултанте у zox и ово смењено у 2) даје:

$$y = o, \frac{x^2}{A^2 - B^2} - \frac{z^2}{B^2} + \frac{1}{R^2} = o$$

даје такође пресек резултанте са zox на конусу у zox.

§ 67. — *Равнотежне осовине.* Ало су услови из § 66 задовољени код тела, померањем транслаторним се не мења резузтанта, да видимо шта је са ротацијом.

Ако је тело у равнотежи онда постоје односи:

$$\Sigma yZ = \Sigma zY = F, \ \Sigma zX = \Sigma xZ = G, \ \Sigma xY = \Sigma yX = H,$$
$$\Sigma xX = l, \ \Sigma yY = m, \ \Sigma zZ = n,$$

Оса равнотежна је она осовина око које обрнуто тело за ма колики угао остаје у равнотежи (Möbius). Поред познатих шест једначина за равнотежу потребно је за ово још:

$$F = o, \quad G = o \quad l + m = o \cdot \cdot 1).$$

Јер, ако се тело за угао α обрне око $0Z$, а $0X$ и $0Y$ остану сталне, пројекције се сила не мењају и координате тачке xyz постану:

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \quad y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha, \quad z' = z.$$

Да равнотежа буде у новоме положају, нужно је да су:

$$\Sigma(x'Y - y'X) = o, \ \Sigma(y'Z - z'Y) = o, \ \Sigma(z'X - x'Z) = o$$

Кад се овде изврши смена x' y' и сведе, налазе се услови под 1). Може се доказати да је овде случај задовољен и за ма коју осу паралелну са $0z$.

Ако је свака од оса $0X$, $0Y$, $0Z$ оса равнотежна, имамо астатичку равнотежу. Услови су за то:

$$F = o,\quad G = o,\quad H = o;\quad l = m = n = o$$

V. Чврста тела неслободна.

§ 68. — Нека је тело утврђено у једној тачци 0. Ако на тело дејствује n сила $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n$ и њима се додаје отпор Q, који је једнак а супротан са притиском тела на тачку 0, тело се може сматрати као слободно.

Ако се узму осе координатне кроз 0, xyz и са $X, Y, Z\; L\, M\, N$ означимо компоненте резултанте и спрега из сила $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n$ и Q, услови су равнотеже:

$$\begin{array}{ccc} X + X' = o, & Y + Y' = o, & Z + Z' = o \\ L = o & M = o & N = o \end{array}$$

$X'\, Y'\, Z'$ су компоненте од Q, чији је спрег нула, јер пролази сила Q кроз 0.

§ 69. — *Ако је* тело утврђено у двема тачкама, онда се може обртати око извесне осовине. Силама $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n$ додају се силе $Q'\, Q'' \cdot\cdot Q'''$ од свих тачака осе. За равнотежу потребно је да су моменти свих сила F и Q односно осовине (на пр. $0Z$) нула. Моменти су силе $Q'\, Q'' \cdot\cdot$ нула и услов је за равнотежу

$$N = o.$$

Овај је услов нужан и довољан. Кад је испуњен, силе се своде на резултанту која се потире отпором осовине.

Реакција се осовине лако налази. Нека су X, Y, Z, L, M, N што и у параграфу 68. Узмимо на осовини тачке 0 и $0'$, чије су реакције $Q'\; Q''$ на

осовину. Ако је 0 почетак система и $00'\; 0z^{\text{ска}}$ осовина, а $00' = h$, услови су за равнотежу:

$$\begin{array}{ccc} X + X' + X'' = o, & Y + Y' + Y'' = o, & Z + Z' + Z'' = o \\ L - hY'' = o, & M + hX'' = o, & N = o \end{array}$$

$X'\, Y'\, Z'$, $X''\, Y''\, Z''$ су компоненте силе Q_1 и Q_2 Из предпоследња два израза налазимо Y'' и X'' а из трећег се налази $Z' + Z''$. Тако је немогуће наћи све три компоненте реакције. Водећи рачуна о деформацији тела можемо наћи и Z''.

§ 70. — *Тело се обрће* око извесне осе и клизи по њој.

Овде су услови за равнотежу:

$$N = o,\quad Z = o$$

да нема обртања око $0Z$ и кретања по Z.

Ако се тело наслања на какву раван може бити више случајева.

1) У једној само тачци. Раван врши нормалну реакцију у тој тачци на тело и тело може клизити (без трења). Тело се може сматрати за слободно, ако се силама $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n$ дода сила Q. За равнотежу је нужно: да је резултанта из $F_1\, F_2 \cdot\cdot F_n$ једнака и супротна са Q.

2) Ако се тело додирује у више тачака са равнином, у тачкама $A_1\, A_2 \cdot\cdot A_p$ по правој $0X$, раван врши притиске на тело у свима тачкама и они су $Q_1\, Q_2 \cdot\cdot Q_p$. Њихова је резултанта Q са нападном тачком у A између A_1 и A_p (по слагању паралелних сила).

За равнотежу су овде услови:

$$\begin{array}{c} X = o,\quad Y = o,\quad Z + Q_1 + Q_2 + \cdot\cdot Q_p = o \\ L = o,\quad M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 \cdot\cdot - a_p Q_p = o,\quad N = o \end{array}$$

$X, Y\, Z$ су компоненте резултанте R а $a_1\, a_2 \cdot\cdot a_p$ су одстојања сила $Q_1\, Q_2 \cdot\cdot Q_p$ од тачке 0.

Ако је x одстојање нападне тачке резултанте сила $F_1 \cdot\cdot F_n$

$$M = - xZ.$$

Кад се ово смени у предпоследњој једначини налази се за

$$x = \frac{a_1 Q_1 + \cdots a_p Q_p}{Q_1 + Q_2 + \cdot Q_p}$$

Реакције задовољавају две једначине:

$$Z + Q_1 + \cdot + Q_p = o$$
$$M - a_1 Q_1 - \cdot - a_p Q_p = o$$

Ако се тело наслања у двема тачкама на раван имамо две реакције и оне се могу одредити из последње две једначине, иначе не. Други се случајеви одређују из теорије еластичности.

3) *Општи случај.* Ако се тело ослања у p тачака на раван какву и тачке су произвољне $A_1 A_2 \cdot\cdot A_p$, услови су равнотеже:

$$X = o, \quad Y = o, \quad N = o \cdot \cdot 1)$$

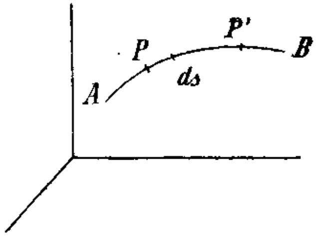
$$Z + Q_1 + Q_2 + \cdot\cdot Q_p = o$$
$$L + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + \cdot\cdot + b_p Q_p = o \cdot \cdot 2)$$
$$M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \cdot\cdot - a_p Q_p = o$$

ако је раван узета за xy ску. $X\,Y$ су компоненте резултанте сила $F_1 F_2 \cdot\cdot F_n$, $L, M\,N$ су компоненте спрега резултујућег из сила $F_1 F_2 \cdot\cdot F_n$, а $Q_1 Q_2 \cdot\cdot Q_p$ су отпори равни; $a_1 b_1 \cdot\cdot a_p b_p$ су координате тачака $A_1 A_2 \cdot\cdot A_p$ у равни xy.

Једначине 1) траже потребан услов равнотеже и независне су од реакција; једначине траже да $F_1 F_2 \cdot\cdot F_n$ имају за резултанту силу нормалну на xy. За три тачке додирне се из 2) могу наћи отпори, за већи број не.

VI. Израчунавање тежишта.

§ 71. — *Линије.* Ако тражимо тежиште линије AB, ваља на њој узети елементе $P = ds$. Однос $\frac{m}{arc \cdot PP'}$, где је m маса од PP', је средња густина PP', ако је он сталан линија је хомогена. Ако линија није хомогена, онда се густином зове однос $\frac{dm}{ds} = \varrho$. Ако је M маса целе линије AB а $\xi\,\eta\,\xi$ координате њеног тежишта, онда су:



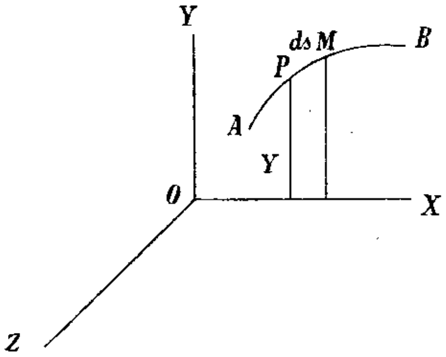
Сл. 51.

$$M = \int \varrho ds, \; M\xi = \int x\varrho ds, \;\; M\eta = \int y\varrho ds, \; M\xi = \int z\varrho ds$$

Кад је $\varrho = const$ (линија хомогена).

$$l\xi = \int xds, \quad l\eta = \int yds \quad l\xi = \int zds.$$

§ 72. — *Гулденова теорема.* Површина описана обртањем какве курбе равне около осовине у њеној равни, која ту курбу не сече, једнака је обиму курга који описује тежиште, помноженом са дужином (l) курбе. (Ово вреди за хомогене линије).



Сл. 52.

Ако курба AB лежи у yx равни, елеменат ds описује површину dA

$$dA = 2\pi yds$$

$$A = 2\pi \int yds = 2\pi\eta l$$

Ако линија $0x$ сече курбу, A представља разлику површина описаних луковима над и испод $0x$.

§ 73. — *Тежиште површина.* Ако је m маса једнога елемента површине σ, однос $\frac{m}{\sigma}$ је средња густина ϱ, кад је површина хомогена, иначе је густина $\varrho = \frac{dm}{d\sigma}$.

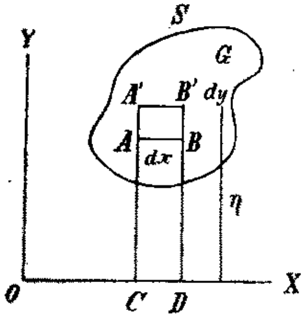
Овде је:

$$M = \iint \varrho d\sigma,\ M\xi = \iint x\varrho d\sigma,\ M\eta = \iint y\varrho d\sigma,\ M\xi = \int z\varrho d\sigma;.$$

за хомогену површину $\varrho = const.$

$$S\xi = \iint x d\sigma,\quad S\eta = \iint y d\sigma \quad S\xi = \iint z d\sigma$$

§ 74. — *Гулденова теорема.* Запремина, из равне површине какве при њеном обртању око извесне осе у њој, која је не сече, једнака је датој површини помноженој са обимом круга, описаног тежиштем. (Ово вреди за хомогене површине).



Сл. 53.

Елеменат $dx\,dy$ површине S описује запремину $2\pi y\,dx\,dy$

$$v = 2\pi \iint y dx\, dy = 2\pi\eta\, S$$

§ 75. — *Запремине.* Ако је маса какве запремине v m, однос $\frac{m}{v}$ зове се средња густина ако је тело хомогено, иначе је густина $\varrho = \frac{dm}{dv}$. Кад су координате dm xyz и M маса целога тела у запремини v онда су:

$$M = \iiint \varrho dv, M\xi = \iiint x\varrho dv,\ M\eta = \iiint y\varrho dv,\ M\xi = \iiint z\varrho dv$$

За хомогена тела је:

$$V\xi = \iiint x dv,\ V\eta = \iiint y dv,\ V\xi = \iiint z dv$$

За координате Картезијеве је $dv = k\,dx\,dy\,dz$, k је запремина паралелопипеда чије су ивице један.

У сверном координатном систему је:

$$dv = r^2\, dr\, sin\,\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2\, dr\, d\mu\, d\varphi$$

$$d\mu = -\,d\cos\theta.$$

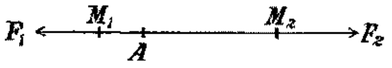
ГЛАВА VI.

Системи променљиви (déformables)

§ 76. — Кад одстојања између тачака система нису стална, тела се зову променљива (уже, ланац и т. д.). Спољне силе које на оваква тела дејствују задовољају опште услове равнотеже (6 једначине), јер тело под утицајем тих сила остаје у равнотежи ако се постигне стање чврстога тела у систему, т. ј. ако се удеси: да одстојања између његових појединих честица остану стална (принцип учвршћења — solidification). У опште узев ове шест једначине су нужне али не и довољне за равнотежу.

I. Полигони финикуларни.

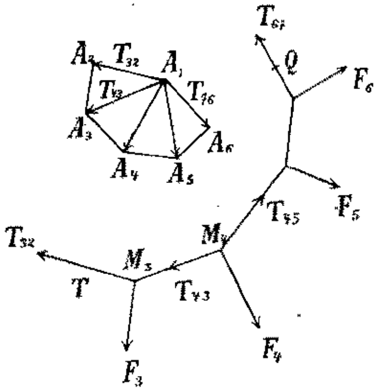
§ 77. — Ако имамо систем материјалних тачака $M_1 M_2 \cdot\cdot M_n$ повезаних ужетом витким, али не и истегљивим, такав се систем зове финикуларним, ако на њ, на његове тачке $M_1 M_2 \cdot\cdot M_n$ дејствују силе $F_1 F_2 \cdot\cdot F_n$, јер му је облик равнотежни онда полигонални.



Сл. 54.

Ако имамо две тачке $M_1 M_2$, за равнотежу су потребне две силе $F_1 F_2$, једнаке и супротно означене, али у правцу истезања ужета, иначе нема равнотеже.

Ако на систему $M_1 M_2$ у равнотежи узмемо једну тачку A и посматрамо део M_1 A он је у равнотежи под утицајем силе F_1 и дејства дела AM_2, који се може заменити силом једнаком са F_1 а њој супротном, која се зове *танзија* (истезање) тачке A.



Сл. 55.

Финикуларни полигон $M_3 M_4 M_5 M_6$ у равнотежи је: услед спољних сила $F_1 F_2 \cdot\cdot F_n$ и истезања у правцима стране TM_3 и $M_6 Q$, ако је полигон пресечен у T и Q између $M_2 M_3$ и $M_6 T_{67}$.

За финикуларни полигон $M_3 M_4 M_5 M_6$ равнотежа мора бити између сила $F_3 F_4 F_5 F_6$ и танзија T_{32}, T_{67}, и она се графички налази лако имајући у виду однос $T_{32}=T_{23}$ и т. д.

Кроз произвољну тачку A ваља повући AA_2 // са T_{32} и једнако са T_{32}, кроз тачку A_2 ваља повући паралелно и једнако са F_3. Како су силе T_{32}, F_3 и T_{34} у равнотежи, вектор AA_3 је једнак са T_{34} и вектор је AA_3 једнак и паралелан са T_{43}. Силе T_{43}, F_4 и T_{45} су у равнотежи. Ако се кроз A_3 повуче вектор који је паралелан са T_{43} $A_3 A_4$ једнак са F_4, вектор, $A_4 A$ је једнак са T_{45} а вектор AA_5 је једнак са T_{54} и т. д. доћиће се до вектора AA_6 који је једнак са истезањем T_{76}.

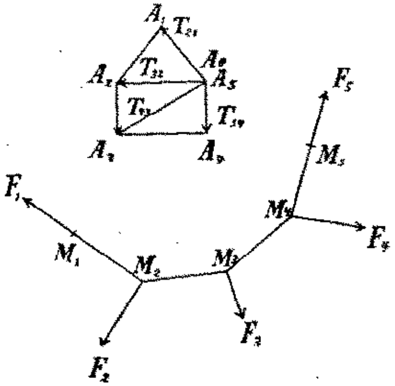
Ако је полигон у равнотежи, потребно је да се пренашањем вектора $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ и т. д. једнако и паралелно силама $F_3 F_4 F_5 F_6$ може доћи у тачку A, да су вектори AA_2, AA_3, AA_4 AA_5 паралекни и једнаки са TM_3, $M_3 M_4$, $M_4 M_5$, $M_5 M_6$, $M_6 Q$, само супротног правца (Varignon).

Ови су услови не само нужни за равнотежу већ и довољни. Ако су они испуњени свака је тачка M_i у равнотежи под утицајем сила F_i и истезања $T_{i, i-1}$, $T_{i\ i+1}$, једнаким са векторима AA_{i-1} и A_iA.

Моменти су сила F_3 F_4 F_5 F_6 и T_{32} T_{67} нула, као и моменти система сила F_i, $T_{i\ i-1}$, $T_{i\ i+1}$ што дејствују на тачку M_i.

§ 78. — *Гранични услови.* 1) Могу крајеви полигона бити слободни на којима дејствују силе F_1 и F_n. Овде су онда истезања у крајњим тачкама позната она су једнака и супротна са F_1 и F_n.

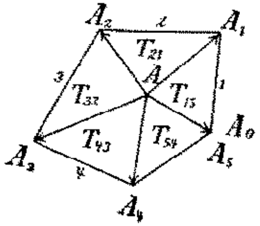
2). Могу крајеви полигона бити везани у двема тачкама. Овде су реакције тих тачака непознате силе F_1 и F_n или су непозната два истезања T_{21} и T_{n-1n}.



Сл. 56.

3). Полигон може бити затворен. Овде се примењују општи услови равнотеже. За конструкцију Варињонова полигона ваља сматрати једну страну на пр. $M_1 M_5$ пресечену у P и Q и узети танзију у PM T_{15} а по $M_5 Q$ T_{51}. Кроз тачку A ваља повући вектор AA_0 једнак и паралелан са T_{15} и за тим $A_0 A_1$, $A_1 A_2 \cdot\cdot A_4 A_5$ паралелно и једнако са F_1 $F_1 \cdot\cdot F_5$. Танзије су онда једнаке са AA_1 $AA_2 \cdot\cdot AA_5$. T_{15} је AA_0: T_{21} $AA_1 \cdot\cdot T_{k+1k}$ $AA_k \cdot\cdot T_{15}$ је AA_5. A_5 се поклапа са A_0 јер је AA_0 једнако са T_{15}. За равнотежу се полигон мора затворити за силе F_1 $F_2 \cdot\cdot F_5$ и мора се наћи тачка A таква да свака страна M_r M_{r+1} буде паралелна и једнака дијагонали AA_3 и супротног смисла.

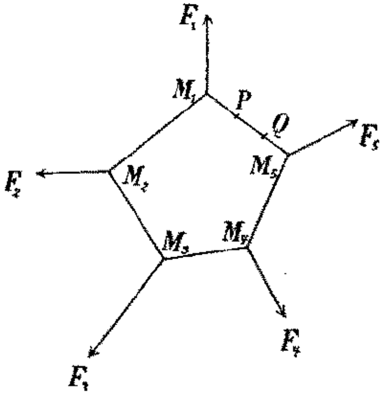
Ако је полигон од бесконачно великог броја малих страна, полигон прелази у криву линију, тако исто и Варињонов полигон. Равнотежна фигура је полигон у простору и то не у једној равни а раван је полигон кад су спољне силе паралелне или се секу у једној тачци.



Сл. 57.

§ 79. — За отворен или затворен полигон вреди, ако су све силе, сем крајњих, такве да пролазе кроз једну тачку O, да је облик равнотежни у равни и моменти су истезања односно O сви једнаки сл. (58).

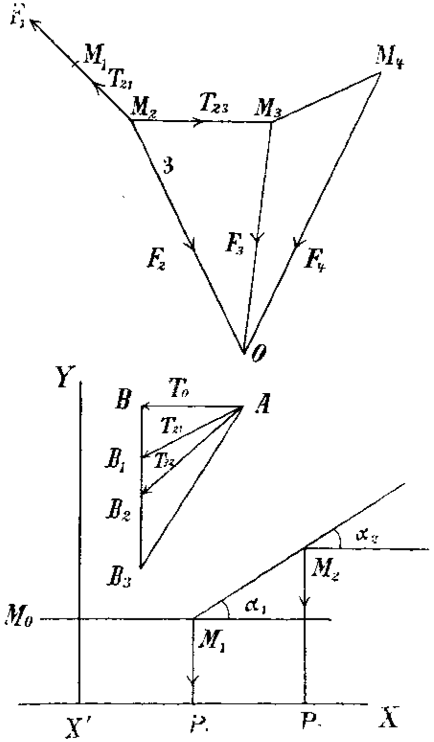
Ово исто вреди ако су све силе, сем крајње две, паралелне. Овде су пројекције истезања на управној подигнутој на паралелној са правцем сила, нуле (сл. 59_a.) Први се део ове теореме доказује лако а до другог се долази на овај начин.



Сл. 58.

Нека силе F_2 T_{21} и T_{23} стоје у равнотежи, алгебарска је сума пројекција на управној x x' нула јер је пројекција F_2 нула а пројекције су од T_{12} и T_{23} једнаке и супротног смисла.

Нека је полигон утврђен у двема тачкама и нека су силе F_1 $F_2 \cdot\cdot$ једнаке тежинама p_1 p_2, полигон је сад у вертикалној равнини. Нека је танзија стране $M_0 M_1$, T_0 а осталих T_{12}, T_{23} а нагиби неки су α_1, α_2. На $M_1 M_2$ дејствују силе p_1, p_2. Варињонов се полигон конструјише сад овако. Узме се тачка A и повуче вектор $AB \overset{\parallel}{=}$ са T_0, за тим вектори $BA_1 \overset{\parallel}{=} p_1$ и т. д. Дијагонале су AB_1, AB_2 једнаке са $M_1 M_2, M_2 M_3 \cdot\cdot$ са танзијама T_{23}, T_{32} и т. д. Из слике је:



Сл. 59.

$$tq\,\alpha_1 = \frac{p_1}{T_0},$$

$$tq\,\alpha_2 = \frac{p_1 + p_2}{T_0}$$

$$tq\,\alpha_k = \frac{p_1 + p_2 + \cdot p_n}{T_0}$$

$$T_0 = T_{21} \cos\alpha_1 = $$
$$= T_{32} \cos\alpha_2 = \cdot\cdot$$
$$= T_{k-1k} \cos\alpha_k$$

Ако је број страна полигона бесконачан, полигон постаје курба у равни, α је угао тангенте у M са ox, T танзија у M а P тежина курбе M_0M (M_0 најнижа тачка где је танзија T_0) и:

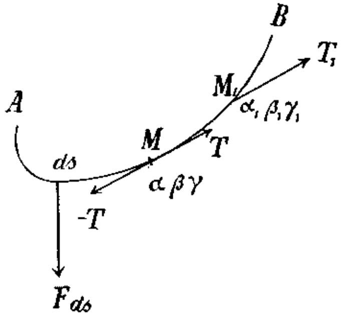
$$tq\,\alpha = \frac{P}{T_0}, \qquad T_0 = T \cos\alpha$$

За хомогену курбу је $tq\,\alpha = \frac{s}{a}$, иначе је $P = g \int_0^s \delta\, ds$,

$tq\,\alpha = \frac{1}{a} \int_0^s \delta\, ds$ (a je constanta).

II. Равнотежа ужета.

§ 80. — Нека је S дужина ужета од A до B и нека су све спољне силе замењене силом $F ds$, која дејствује у тачци једној ужета. Неки су $X ds$, $Y ds$ $Z ds$ компонетите те силе, X, Y, Z се зову компонете од F, силе сведене на јединицу дужине.



Сл. 60.

Ако се изостави део MB ужета, услови су за равнотежу да се у тачци M остави сила T, која замењује изостављени део. Сила се T зове истезање ужета. Ако су косинуси углова нагиба силе $T\,\alpha\beta\gamma$, пројекције су T

$$T\alpha,\ T\beta,\ T\gamma.$$

Ако се у тачци M изостави део MA, у M ваља тај део заменити истезањем — T, чије су пројекције:

$$-T\alpha, \quad -T\beta, \quad -T\gamma.$$

Ако се уже пресече у тачкама блиским MM_1 и задржи само тај део, на њега дејствују силе $F ds$, $-T$ и T_1. Ако су косинуси углова истезања T_1 што замењује део $M_1\,B$ $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, пројекције су од T_1

$$T_1\alpha_1 \quad T_1\beta_1 \quad T_1\gamma_1.$$

Ако напишемо да је сума пројекција све три силе нула имаћемо:

$$d(T\alpha) + X ds = o \quad T_1\alpha_1 - T\alpha = d(T\alpha)$$
$$d(T\beta) + Y ds = o \quad T_1\beta_1 - T\beta = d(T\beta)$$
$$d(T\gamma) + Z ds = o \quad T_1\gamma_1 - T\gamma = d(T\gamma)$$

Моменти су сила $-T$, T_1 F односно x

$$-(yT\gamma - zT\beta),\quad (y_1 T\gamma_1 - z_1 T_1 \beta_1),\quad (yZ - zY)\,ds$$

где су xyz, $y_1\,x_1\,z_1$ координате крајњих тачака M и M_1 лука ds.

Сума момената је из $-T$ и T_1 $d\,(yT\gamma - zT\beta)$ и отуда је:

$$\begin{aligned} &d\,(y\,T\gamma - z\,T\beta) + (yZ - zY)\,ds = o \\ &d\,(z\,T\alpha - x\,T\gamma) + (zX - xZ)\,ds = o \quad \cdot\ \cdot\ 2) \\ &d\,(x\,T\beta - y\,T\alpha) + (xY - yX)\,ds = o \end{aligned}$$

Из прве једначине имамо:

$$T\gamma\,dy + y\,d\,(T\gamma) - T\beta\,dz - z\,d\,(T\beta) + (yZ - zY)\,ds = o.$$

С погледом на једначине 1) имамо:

$$\gamma\,dy - \beta\,dz = o \text{ или } \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Из друге једначине под 2), у вези са нађеним последњим односом, теорема о моментима доводи до израза:

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma} \quad \cdot\ \cdot\ \text{I}).$$

Ово казује: да је истезање у правцу тангенте на курби, коју заузима уже у равнотежном положају.

Кад се унесе у 1) $\dfrac{dx}{ds} = \alpha$ и т. д. имаћемо

$$\begin{aligned} &d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = o \\ &d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = o \quad \cdot\ \cdot\ 3) \\ &d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = o. \end{aligned}$$

§ 81. — *Опште теореме.* Ако је F управно на извесној оси, на пр. $0x$, пројекција је истезања на овој оси константна. За $X = o$ $T\alpha = const.$ Ако је сила F у равни, где је и извесна оса на пр. $0x$, моменат је танзије односно те осе сталан, јер је за $yZ - zY = o$ $yT\gamma - zT\beta = const.$

Ове су две теореме последица једне општије.

Ако F по целој курби припада комплексу линеарном, моменат је истезања односно комплекса сталан.

Ако сила F припада комплексу постоји једначина:

$$pX + qY + rZ + a\,(yZ - zY) + b\,(zX - xZ) + c\,(xY - yX) = o$$

p, q r a b c су константе.

Ако се овде замени X са $\dfrac{dT\alpha}{ds}$ и т. д. имаћемо:

$$pT\alpha + qT\beta + rT\gamma + aT\,(y\gamma - z\beta) + bT\,(z\alpha - x\gamma) + \\ + cT\,(x\beta - y\alpha) = const.$$

§ 82. — *Општи интеграли.* Нека F зависи од положаја тачака по ужету, и од ds, $X\,Y\,Z$ су функције $x\;y\;z\;s$, $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$, онда се једначинама за равнотежу додаје и ова:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad \cdot\ \cdot\ 1).$$

Из ове и 3) (§ 80) налазимо $x\;y\;z$ и T као функције s. Ове су једначине првога реда по T а другога по $x\;y\;z$; имају 6 констананата које се налазе из почетних вредности $x_0\,y_0\,z_0\;T_0$ $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0$ $\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0$ за $s = s_0$. Решења су:

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi\,(s\,C_1\,C_2 \cdots C_6)\\
y &= \psi\,(s\,C_1 \qquad C_6)\\
z &= \omega\,(s\,C_1 \qquad C_6)\\
T &= f\,(s\,C_1 \qquad C_6).
\end{aligned}
$$

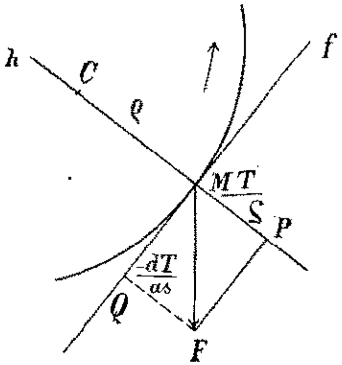
Константе се могу одредити и из услова граничних, ако је дата дужина l ужета и координате крајњих тачака $M_0\ M_1$ у којима је уже утврђено. Може бити један крај ужета M_0 утврђен а други да иде по линији $\Phi\,(xyz) = o,\ \psi\,(xyz) = o$.

§ 83. — Могу $X\,Y\,Z$ бити изводи какве функције и да не зависе од s. У интегралима онда има 5 константата а то су вредности од $yz\,T\ \dfrac{dy}{dt}\ \dfrac{dz}{dt}$ за $x = x_0$. Овде се у место ds узима dt за прапромењљиву, јер се ds смењује са $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Решења су:

$$
\begin{aligned}
x &= x\\
y &= \varphi\,(x\,C_1\,C_2 \cdots C_5)\\
z &= \psi\,(x\,C_1 \cdots\cdots C_5)\\
T &= f\,(x\,C_1 \cdots\cdots C_5)
\end{aligned}
$$

§ 84. — *Опште једначине.* Нека су косинуси углова нагиба тангенте $\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ косинуси углова главне нормале Mh; ϱ полупречник кривине. Формуле су Френеа:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\varrho},\ \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{\varrho},\ \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu'}{\varrho}$$



Сл. 61.

Прва је једначина равнотежна:

$$\frac{d}{ds}\,(T\alpha) + X = \mathrm{o}$$

или

$$\alpha\,\frac{dT}{ds} + \frac{T}{\varrho}\,\alpha' + X = o$$

или:

$$
\begin{aligned}
X &= -\,\alpha\,\frac{dT}{ds} - \alpha'\,\frac{T}{\varrho}\\
Y &= -\,\beta\,\frac{dT}{ds} - \beta'\,\frac{T}{\varrho} \qquad \cdot\ 4).\\
Z &= -\,\gamma\,\frac{dT}{ds} - \gamma'\,\frac{T}{\varrho}
\end{aligned}
$$

Из слике је јасно да су компоненте F:

$$F_h = -\,\frac{T}{\varrho},\ F_t = -\,\frac{dT}{ds},\ F_b = o.$$

§ 85. — Ако једначине 4) из 84 помножимо са α, β, γ и саберемо, а $\alpha\,\beta\,\gamma$ заменимо са $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$ $\dfrac{dz}{ds}$ имаћемо:

$dT = -\,(Xdx + Ydy + Zdz)$, а ово је идентично са $F_t = -\,\dfrac{dT}{ds}$.

Из ове једначине имамо:

$$T = -\,(U + h)$$

одакле се одмах налази танзија T.

§ 86. — *Нека су* силе паралелне, облик равнотежни је линија, равна курба.

Нека је $0y$ паралелно правцу сила $X = Z = o$. Из једначина равнотежних имаћемо:

$$T\left(\frac{dx}{ds}\right) = A,\quad T\left(\frac{dz}{ds}\right) = B$$

A и B су константе.

Или:

$A\,dz - B\,dx = \mathrm{o}$, $Az - Bx = C$, је једначина равни паралелне са $0y$.

Ако се ова раван узме за xy имаћемо ове једначине за равнотежу:

$$T\frac{dx}{ds}=A,\quad d\left[T\frac{dy}{ds}\right]+Y ds=\text{o};\ \text{или:}$$

$$1)\quad -A\,dy'+Y\,ds=o,\quad y'=\frac{dy}{dx}$$

Једначина 1) је једначина за равнотежу.

Ако је $Y=f(x)$ из 1) имамо: пошто је $ds=\sqrt{1+y'^2\,dt}$:

$$A\,L\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)+\int f(x)\,dx=C.$$

Ако је $Y=f(y)$ $ds=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y'}}\,dy$, непознате се лако одвајају.

Ако је $Y=f(s)$, интегрисање је могуће из 1) одмах.

Ако је α угао тангенте на равнотежној линији са осом x, ϱ полупречник кривине

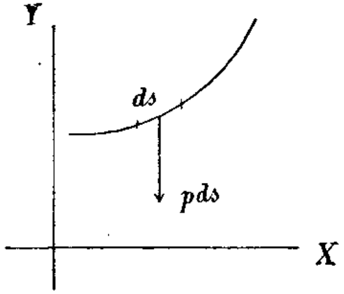
$$Y\cos\alpha=\frac{T}{\varrho}\cdot\ \cdot 2).$$

$Y\varrho\cos^2\alpha=A$ је једначина за равнотежу, истоветна са оном под 1).

Ако је $Y=\dfrac{k}{\cos^2\alpha}$ из 2) имамо $\varrho=const.$ а то је круг.

§ 87. — *Ланчаница*. Нека је p тежина јединице дужине ланчанице. На елеменат ds дејствује сила pds, и фигура је равнотежна у једној равни, коју ћемо ми узети за $yx^{\text{ску}}$.

$Yds=-pds$ или $Y=-p$



Сл. 62.

Једначине су равнотежне:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+Xds=o,\ \text{или}\ T\frac{dx}{ds}=A,\quad y'=\frac{dy}{dx}$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Yds=\text{o}\quad\text{или}\quad Ady'-pds=o\cdot\ \cdot 1).$$

Нека је $A>\text{o}$ и нека x и s расту, $\dfrac{dx}{ds}>\text{o}$. Означимо са $A=pa$, $a>o$ и заменимо $ds=dx\sqrt{1+y'^2}$ из 1) имамо:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{dx}{a}$$

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=e^{-\frac{x-x_0}{a}}\cdot\ \cdot 2).$$

и

$$y'-\sqrt{1+y'^2}=-e^{-\frac{x-x_0}{a}}\cdot\cdot\cdot 3).$$

Сабирањем и поновним интегрисањем налазимо:

$$y-y_0=a/2\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{(x-x_0)}{a}}\right)\cdot\ \cdot \text{I}).$$

x_0, y_0 су произвољне константе. Ако се у $x_0\,y_0$ пренесе почетак o имаћемо за равнотежан положај линију:

$$y_1=a/2\left(e^{\frac{x_1}{a}}+e^{-\frac{x_1}{a}}\right)\cdot\ \cdot \text{I}')$$

Одузимањем једначине под 2 и 3 имамо:

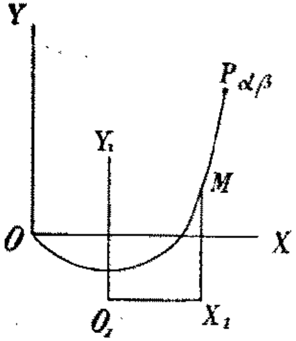
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{y_1}{a}={}^1/_2\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{(x-x_0)}{a}}\right)\cdot\ \cdot \text{II}).$$

Из једначине $T=4\dfrac{ds}{dx}=A\sqrt{1+y'^2}=\dfrac{Ay_1}{a}=py_1$ налази се истезање (танзија).

Да би произвољне константе одредили, морамо извесне почетне услове имати у виду.

1). Нека су крајеви ланца утврђени. У нашој линији има две произвољне константе $x_0\,y_0$ и трећа a.

Нека је почетак у једној утврђеној тачци а друга нека је утврђена у квадранту yox у тачци P чије су координате $\alpha\,\beta \cdot 0P = l$.



Сл. 63.

Ако курба пролази кроз 0 и P морају постојати једначине:

$$-y_0 = a/2\left(e^{-x_0/a} + e^{x_0/a}\right) \cdot\;\cdot\; 4).$$

$$\beta - y_0 = a/2\left(e^{+\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{(\alpha - x_0)}{a}}\right) 5)$$

Ако интегришемо једначину:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = {}^1/_2\left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{(x - x_0)}{a}}\right) dx$$

и ставимо $s = l$ имаћемо:

$$l = a/2\left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{(\alpha - x_0)}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}}\right) \cdot\;\cdot\; 6).$$

Одузимањем 4) и 5) имамо:

$$\beta = a/2\left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{(\alpha - x_0)}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}\right) \cdot\;\cdot\; 7).$$

Из 6) и 7) се налази a и x_0. Из њих се налази:

$$l + \beta = a\left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}}\right) = a\, e^{-\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1\right)$$

$$l - \beta = a\left(e^{\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{(\alpha - x_0)}{a}}\right) = a\, e^{\frac{x_0}{a}}\left(1 - e^{-\alpha/a}\right)$$

Множењем имамо:

$$l^2 - \beta^2 = a^2\left(e^{\alpha/a} + e^{-\alpha/a} - 2\right)$$

или

$$\sqrt{l^2 - \beta^2} = +\, a\left(e^{\alpha/2a} - e^{-\alpha/2a}\right),$$ јер знак — не вреди.

Нека је $^{\alpha}/_{2a} = u$, непозната је u дата једначином:

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2u}$$

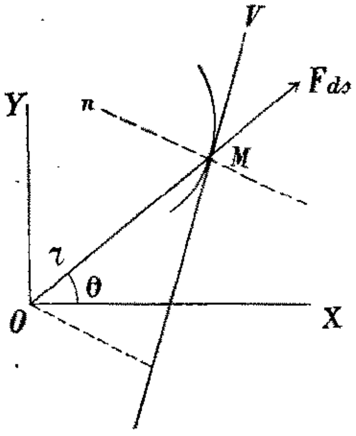
$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} = 1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^{u}}{5!} + \cdot + \frac{u^{2u}}{(2n+1)!} +$$

Услов да имамо један позитиван корен за u јесте да је

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} > 1, \quad l > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

За u се налазе две вредности u' и $-u'$. Прва одговара положају ланца, друга своду ланчаничном (Poinsot).

§ 88. — *Централне силе.* Овде је равнотежни положај равна курба, чија равнина иде кроз тачку у којој се секу силе и моменат је истезања константан односно ове тачке.



Сл. 64.

Нашли смо, да кад је моменат силе F, односно какве осе, стално нула, истезања је моменат константан односно исте осе. Кад се ово примени на централне силе, односно тачке из које силе иду, и то на осе кроз ту тачку, имаћемо:

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = A.$$

$$T\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) = B \;\cdot\; 1)$$

$$T\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=C$$

Множењем са $x, y\, z$ и сабирањем имамо:

$$Ax+By+Cz=o \cdot \quad \cdot 2).$$

Курба лежи у равни 2 што иде кроз почетак.

Ако је централна сила F и узмемо раван 2) за $xy^{\text{ску}}$ имаћемо:

$$X=F^{x}/_{r} \qquad Y=F^{y}/_{r}.$$

Једначина је момента односно oz:

$$T\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=C$$

и из три једначине за равнотежу налазимо:

$$dT+X\,dx+Y\,dy=o.$$

Увођењем поларних координата r и θ имаћемо:

$$Tr^{2}\frac{d\theta}{ds}=C, \quad dT+Fdr=o.$$

Ако је $F=\varphi(r)$ први се интеграл лако налази и он је:

$$T=-\int_{r_0}^{r}\varphi(r)\,dr-h=\psi(r) \cdot \quad \cdot 1).$$

Једначина диференцијална тражене курбе равнотежне је:

$$\psi(r)\,r^{2}\,d\theta=C\,ds=C(dr^{2}+r^{2}\,d\theta^{2})$$

или

$$\theta-\theta_{0}=\int_{r_0}^{r}\pm\frac{C\,dr}{r\sqrt{r^{2}\,[\psi(r)]^{2}-C^{2}}}$$

Ако је $F=k$ константно:

$$T=\psi(r)=-kr+h$$

једначина је курбе дата елиптичким интегралом. Ако је $T=-kr$, $k<o$ курба је равнострана хипербола.

Једначине могу бити и облика:

$$Tr\,sin\,v=C, \qquad F\,sin\,v=\frac{T}{\varrho}$$

или елиминацијом T:

$$F\varrho r\,sin^{2}\,v=C$$

v је угао између тангенте и потега, а ϱ полупречник кривине.

§ 89. — Ако је уже на површини, онда поред силе F и танзије T долази још и отпор површине $f(xyz)$, по којој може уже без трења да клизи. Тај је отпор у правцу нормале и његове су компоненте:

$$\lambda\frac{df}{dx}, \quad \lambda\frac{df}{dy} \quad \lambda\frac{df}{dz}$$

Једначине су за равнотежу:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+X\,ds+\lambda\frac{df}{dx}\,ds=o$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y\,ds+\lambda\frac{df}{dy}\,ds=o$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Z\,ds+\lambda\frac{df}{dz}\,ds=o$$

Овим се једначинама додаје:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^{2}+\left(\frac{dy}{ds}\right)^{2}+\left(\frac{dz}{ds}\right)^{2}=1 \text{ и } f(x\,y\,z)=o$$

Из ових се једначина налазе непознате $x\,y\,z$ T и λ као функције по s. Ако $X, Y\,Z$ не садрже s

непознате се своде на четири, јер се ds може сменити са $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ и z у T и λ се налазе помоћу x у место s.

Овде је:

$$dT = -\left[(X + \lambda \frac{df}{dx} dx) + (Y + \lambda \frac{df}{dy} dy) + (Z + \lambda \frac{df}{dz} dz)\right]$$

Како је уже на површини постоји однос:

$$\lambda \left[\frac{df}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{ds}\right] = o$$

и

$$dT = -dU = -(X dx + Y dy + Z dz),$$

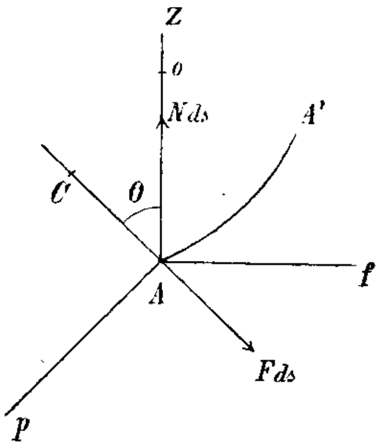
или

$T = -U + h$, што је први интеграл за танзију.

Ако је сила $F = -p$, $X = Y = o$, $Z = -p$

$$T = p(z - h).$$

§ 90. — *Карактеристичне једначине.* Нека је AA' равнотежна линија, Af тангента у A, A_n нормала на површини, O центар кривине, $R = AO$. Нека је C центар кривине линије AA' и $AC = \varrho$ полупречник кривине линије AA', по Менију је $\varrho = R \cos\theta$. Нека је Ap пројекција AC на тангентној равни површине у A.



Сл. 65.

На ds линије AA', дејствују силе Fds и Nds и силе од истезања $-\frac{dT}{ds}$ у правцу Af и $-\frac{T}{\varrho}$ у правцу AC.

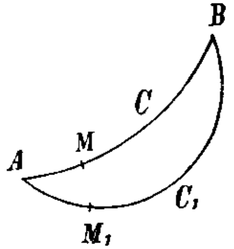
Кад се ово пројектује на Af, Ap и An, добијамо за једначине равнотежне:

$$-\frac{dT}{ds} = F_f, \; -\frac{T}{\varrho} \sin\theta = F_p, \; -\frac{T}{\varrho} \cos\theta = F_n + N,$$

III. О једном одређеном интегралу

(проблем maximum-а и minimum-а)

§ 91. — Кад се тражи облик равнотежни ужета, у случају кад постоји одређена функција сила, овај се проблем изједначује са проблемом геометријским о тражењу max. или minim. једног одређеног интеграла.



Сл. 66.

Ако између две тачке AB повучемо више линија C, C_1, наћи ону која интеграл

$$J = \int_A^B \varphi(xyz)\, ds \quad \cdot \quad \cdot \; 1)$$

чини maxim. или minim. суштина је питања о maxim. и minim. $\varphi(xyz)$ је континуирна функција xyz. Ако је то линија C и координате њене једне тачке M изразимо параметром q, који се мења од a до b, кад M иде од A до B и са x', y', z' означимо изводе $x\, y\, z$ по q, а са R означимо $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $ds = R dq$ онда је интеграл 1):

$$J = \int_a^b \varphi(xyz)\, R\, dq \quad \cdot \quad \cdot \; 2).$$

Да би изразили да је J minim. ваља изразити да је вредност J_1 интеграла 2) по курби C_1, блиској са C, већа од J.

Ако су $\xi\,\eta\,\zeta$ нуле у a и b и функције q, онда се може ставити:

$$x_1 = x + q\xi, \quad y_1 = y + q\eta \quad z_1 = z + q\zeta$$

x_1, y_1, z_1 су координате тачке M_1.

По C_1 је:

$$J_1 = \int_a^b \varphi(x_1\, y_1\, z_1) \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}\, dq \quad \cdot\, 3)$$

$$0 < q < 1$$

По Тајлору је:

$$\varphi\,(x_1\; y_1\, z_1) = \varphi\,(x + e\xi \cdot\cdot)$$

$$= \varphi\,(xyz) + e\left[\xi\frac{d\varphi}{dx} + \eta\,\frac{d\varphi}{dy} + \zeta\,\frac{d\varphi}{dz}\right] + e^2\, P$$

$$\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2} = \sqrt{(x' + e\eta')^2 +}$$

$$= R + e\left[\xi'\,\frac{dR}{dx'} + \eta'\,\frac{dR}{dy'} + \zeta'\,\frac{dR}{dz'}\right] + e^2\, Q$$

ξ', η' ζ' су изводи ξ, η и ζ по q.

Множењем имамо:

$$\varphi(x_1\, y_1\, z_1) \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2} - \varphi R = e\,\left[R\left(\xi\frac{d\varphi}{dx} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \eta\,\frac{d\varphi}{dy} + \zeta\,\frac{d\varphi}{dz}\right) + \varphi\left[\xi'\,\frac{dR}{dx'} + \eta'\,\frac{dR}{dy'} + \zeta'\,\frac{dR}{dz'}\right]\right] + e^2\, S$$

Множећи ово са dq и интегришући имаћемо, с обзиром на:

$$R\, dq = ds,\; \frac{dR}{dx'} = \frac{x'}{R} = \frac{dx}{ds} \text{ и т. д.}$$

$$\delta J = J_1 - J = e\int_a^b \left[\left(\xi\frac{d\varphi}{dx} + \eta\,\frac{d\varphi}{dy} + \zeta\,\frac{d\varphi}{dz}\right) + \varphi\left(\xi'\,\frac{dx}{ds} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \eta'\,\frac{dy}{ds} + \zeta'\,\frac{dz}{ds}\right) dq\right] + e^2\, K$$

$$\int_a^b \varphi\,\frac{dx}{ds}\,\xi'\; dq = \Big|\,\varphi\,\frac{dx}{ds}\,\xi\,\Big|_a^b - \int_a^b \xi\; d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right)$$

$$\delta J = J_1 - J = e\,\Big|\,\left(\xi\,\frac{dx}{ds} + \eta\,\frac{dy}{ds} + \zeta\,\frac{dz}{ds}\right)\varphi\,\Big|_a^b + eL + e^2 K$$

$$L = \int_a^b \xi\left[\frac{d\varphi}{dx}\, ds - d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right)\right] + \eta\left[\varphi\;\frac{d\varphi}{dy}\, ds - d\left(\varphi\,\frac{dy}{ds}\right)\right]$$

$$+\;\zeta\left[\frac{d\varphi}{dz}\, ds - d\,\left(\varphi\frac{dz}{ds}\right)\right]$$

Разлика $J_1 - J$ мора по знаку бити стална да је J по C maxim. или minim. за e више $(+)$ или мање $(-)$. За ово је услов да је $L = 0$, пошто је израз први у $J_1 - J$ с леве стране нула јер су $\xi, \eta\, \zeta$ нула у a и b.

Услови да је $L = 0$, односно J maxim. су:

$$d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dx}\, ds = 0$$

$$d\left(\varphi\frac{dy}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dy}\, ds = 0 \;\cdot\;\cdot\; 1).$$

$$d\left(\varphi\frac{dz}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dz}\, ds = 0$$

Ови се услови своде на два, с погледом на једначине:

$\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1$ и $\sum\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} = o$, јер се онда добија из 1):

$$d\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz\right) = o$$

Из 1), кад се ds смени са $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, имамо две једначине диференцијалне, чији су интеграли:

$$\begin{aligned} y &= \psi\,(x\,C_1\,C_2 \cdot \cdot C_4) \\ z &= \lambda\,(x\,C_1\,C_2 \cdot \cdot C_4) \end{aligned} \quad \cdot \cdot 2).$$

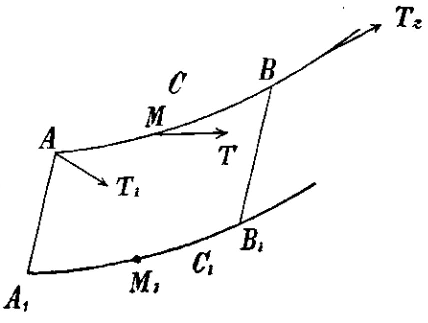
Ове се константе одређују из услова да линија иде кроз A и B.

Ако је $\varphi = const.$ из 1) је тражена линија C права линија:

$$y = C_1\,x + C_2, \qquad z = C_3\,x + C_4$$

Из 1) је јасно да је равнотежни положај ужета дат линијом C у случају кад спољне силе имају функцију сила $-\varphi\,(xyz)$, јер је онда истезање $\varphi\,(xyz)$.

Ако се линије C и C_1 не секу у A и B, а услови су задовољени, онда је:



Сл. 67.

$$\delta J = J_1 - J = e\,\left|\left(\xi\frac{dx}{ds} + \eta\,\frac{dy}{ds} + \zeta\,\frac{dz}{ds}\right)\varphi\right|_a^b \quad \cdot \cdot 3).$$

Нека су $\alpha\,\beta\,\gamma$ углови тангенте T у M, ако је $\varphi\,(A)$ и $\varphi\,(B)$ вредности φ у A и B, онда је из 3):

$$\begin{aligned} \delta J = &\left[(e\xi)_2\;\;\alpha_2 + (e\eta)_2\;\;\beta_2 + (e\zeta)_2\;\;\gamma_2\right]\varphi\,(B) \\ &- \left[(e\xi)_1\;\;\alpha_1 + (e\eta)_1\;\;\beta_1 + (e\zeta)_1\;\;\gamma_1\right]\varphi\,(A) \end{aligned}$$

$\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ су углови за AT_1 а $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ за BT_2.

Пројекција BB_1 на BT_2 је:

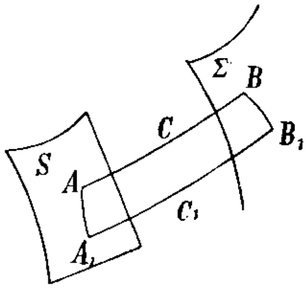
$$(\alpha\xi)_2\,\alpha_2 + (e\eta)_2\,\beta_2 + (e\zeta)_2\,\gamma_2 = BB_1\,cos\;T_2\,BA_1,$$

и слично за други трином.

$$\delta J = BB_1\,\varphi\,(B)\,cos\;T_2\,BB_1 - \overline{AA_1}\,\varphi\,(A)\,cos\;T_1\,AA_1$$

или

$$\delta J = -\,AA_1\,\varphi\,(A)\,cos\;BAA_1 - \overline{BB_1}\,\varphi\,(B)\,cos\;ABB_1 \quad \cdot\;\mathrm{I}).$$



Сл. 68.

Ово је формула Тета и Томсона (Tait и Thomson) и из ње се долази до следеће њихове теореме.

Ако се посматрају курбе $C\,(AB)$ одређене једначинама 1) које су нормалне на S и на њима се од A узму лукови AB такви, да је:

$$J = \int_A^B \varphi\,ds$$

константно и исто за све курбе C, геометријско је место тачака B површина Σ нормална на линијама C. Ово се лако доказује.

Ако се са C пређе на C_1 δJ је нула. Како је $\cos B\dot{A}A_1$ нула и $\cos ABB_1$ је нула, пошто је C нормално на S, отуда је и курба C нормална на Σ. Ова теорема обухвата случај $\varphi = 1$, теорију нормалних површина, и случај кад је S свера полупречника малог, кад C пролази кроз једну тачку.

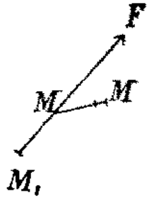
Ови се проблеми са линије могу пренети на површине. Онда ваља тражити међу курбама на површини S ону која интеграл $J = \int_A^B \varphi(xyz)\, ds$ чини maxim. или minimum. Услови су истоветни са оним које смо нашли за равнотежу ужета на површини.

* * *

ГЛАВА VII.

Принцип виртуелних брзина.

§. 92. — Нека на тачку M дејствују силе чија је резултанта F и нека је тачки дат померај MM', који се зове виртуелан, за разлику од стварног помераја MM_1, који би тачка под условом датих сила учинила.



Сл. 69.

Рад би виртуелан силе F био

$$F.\overline{MM'} \cos \overline{F\,MM'} \quad \cdot \quad \cdot \; 1).$$

За виртуелне радове вреди све што и за стварне.

$v = \dfrac{MM'}{\delta t}$ се зове брзина виртуелна, ако је δt време за које се изврши пут $\overline{MM'}$, кад се ово замени у 1) имаћемо за рад израз:

$$F\, v \cos (F\, v)\, \delta t \cdot \;\cdot\; 2).$$

Ако су компоненте помераја MM' δx, δy δz, а компоненте силе F, $X\,Y\,Z$, рад је виртуелан дат изразом:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \cdot \;\cdot\; 3).$$

Ако се рад узме у облику 2) где фигурира брзина, онда је јасно зашто је овоме принципу дат назив виртуелних брзина. Данас се узима за овај принцип израз 3 или 1) и зове се принцип виртуелних радова.

Ако се поред сила X, Y, Z узму и силе које дејствују по извесним условима (les forces de liaisons), а не води се рачун о трењу, онда се овај принцип изражава овако:

Нужни и довољни услови су за равнотежу система: да је сума свих радова виртуелних датих и условних сила нула за ма какво виртуелно померање.

§. 93. — Ако је тачка M слободна онда је сваки њен померај могућ, виртуелан и рад је виртуелан сила:

$$T = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

Услов је да је овај рад нула:

$$X = Y = Z = o.$$

Ако је тачка на површини $f(xyz) = o$, онда су виртуелно могућа померања кретања по површини; услови су за равнотежу да је рад виртуелан T датих сила F нула.

$$T_1 = F.\, MM' \cos (F\, MM') \cdot \quad \cdot 1).$$

MM' је лук линије на површини $f(xyz) = o$. Из 1) излази да је услов за равнотежу или да је $F = o$, или да је угао $F\,MM' = 90^\circ$, да је сила упрàвна на површини.

Нека се рад силе F изрази са

$$T = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \cdot \quad \cdot 2).$$

и овоме дода услов да виртуелан померај MM' припада површини $f(xyz) = o$, а он је:

$$\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z = o \cdot \quad \cdot 3).$$

Из 2) и 3) имамо:

$$\left(X + \lambda\frac{\delta f}{dx}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\delta f}{dy}\right)\delta y +$$
$$+ \left(Z + \lambda\frac{df}{dz}\right)\delta z = o \cdot \quad \cdot 4).$$

Ово вреди за произвољно δx, δy, δz и отуда услови су за 4)

$$\begin{aligned} X + \lambda\frac{df}{dx} &= o \\ Y + \lambda\frac{df}{dy} &= o \cdot \quad \cdot \mathrm{I}). \\ Z + \lambda\frac{df}{dz} &= o. \end{aligned}$$

Ово су услови за равнотежу тачке на површини.

Услови се за равнотежу тачке на курби, датој пресеком површина $f(xyz) = o$ и $f_1(x_1\, y_1\, z) = o$ налазе слично и они су:

$$\begin{aligned} X + \lambda\frac{df}{dx} + \lambda_1\frac{df_1}{dx} &= o \\ Y + \lambda\frac{df}{dy} + \lambda_1\frac{df_1}{dy} &= o \cdot \quad \cdot \mathrm{II}). \\ Z + \lambda\frac{df}{dz} + \lambda_1\frac{df_1}{dz} &= o \end{aligned}$$

§. 94. — Ако је дато чврсто тело слободно, принцип се виртуелних брзина овако примењује.

Узмимо једну његову тачку M_v, чији су координати x_v, y_v, z_v, за померај δx_v, δy_v, δz_v рад је спољних сила:

$$T_v = X_v\,\delta x_v + Y_v\,\delta y_v + Z_v\,\delta z_v \cdot \cdot 1).$$

Ако су компоненте транслације a b c, а p q r ротације, брзина је v ма које тачке:

$$V_x = b + qz - ry,\ V_y = b + rx - pz,\ V_z = c + \\ + py - qx \cdot \cdot 2).$$

Виртуелни су помераји:

$$\delta x = v_x\,\delta t, \quad \delta y = v_y\,\delta t, \quad \delta z = v_v\,\delta t \cdot \cdot 3).$$

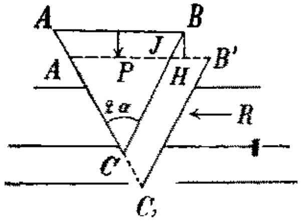
Из 1) и 3), образујући суме и стављајући да је $T = \Sigma\, T_v$, имаћемо:

$$T = \Sigma\, T_v = \delta t\,[a\,\Sigma\, X + b\,\Sigma\, Y + c\,\Sigma\, Z + p\,\Sigma\,(yZ - \\ - zY) + q\,\Sigma\,(zX - xZ) + r\,\Sigma\,(xY - yX)]$$

Ако је тело у равнотежи, $T = o$ и услови су за то:

$$\Sigma\, X = \Sigma\, Y = \Sigma\, Z = o \text{ и } \Sigma\,(yZ - zY) = \Sigma\,(zX - \\ - xZ) = \Sigma\,(xY - yX) = o$$

Радови су унутарњих сила нула, јер се своде на $F\,\delta r$, а како су међусобна одстојања у чврстога тела константна $r = const.$ то је $\delta r = o$ и $F\,\delta r = o$.



Сл. 70.

§. 95. — Пример. 1) Клин. Сила којом клин дејствује је P, отпор древета у који улази клин је сила R. Виртуелни су помераји ових сила $BH = \delta P$ и $JB' = \delta R$. Из слике је:

$$\delta R = - 2BH\,tq\,\alpha = - 2\,\delta P\,tq\,\alpha$$

Услови су равнотеже:

$$P\,\delta\, P - 2R\,tq\,\alpha\,\delta P = o$$

или

$$\underline{P = 2R\,tq\,\alpha.}$$

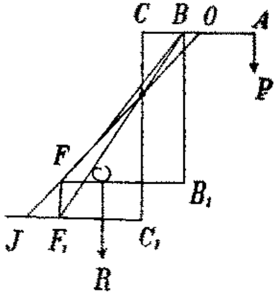
2). Вага. Силе су овде P и R, њихови померaји δP и δR.

$$\delta P = 0A\,\delta\theta$$

θ је угао полуге $C\,B\,A$.

$0B = 0C\,\dfrac{JF'}{JC_1}$ је услов да се праве $0J$ и BF' секу на CC_1 и према овоме је:

$$\delta R = 0B\,\delta\theta.$$



Сл. 71.

Равнотежа је постигнута за случај:

$$P\,0A\,\delta\theta - R\,0B\,\delta\theta = o \quad \text{или}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{0B}{0A.}$$

§. 96. — *Општи услови* равнотеже изведени из принципа виртуелних брзина.

(Lagrange). Нека је дато n тачака:

$$M_1(x_1\,y_1\,z_1) \cdot \cdot \qquad M_n\,(x_n\,y_n\,z_n)$$

и h услова:

$$\begin{array}{l} f_1\,(x_1\,y_1\,z_1, \cdot \cdot x_n\,y_n\,z_n) = o \\ f_2\,(x_1\,y_1\,z_1 \cdot \cdot x_n\,y_n\,z_n) = o \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_h\,(x_1\,y_1\,z_1 \cdot \cdot x_n\,y_n\,z_n) = o \end{array} \qquad 1)$$

$h < 3n$, и ставимо $h = 3n - k$

Ако је $k = 1$ систем зависи само од једног параметра, од једве координате н. пр. за $k = k$ систем зависи од k параметра.

Ако означимо резултанту са $F_v (X_v\, Y_v\, Z_v)$ из сила које дејствује на $M\,k$, виртуелан је рад за систем, стављен раван нули, услов за равнотежу система и он је:

$$\sum_{v=1}^{v=n} (X_v\, \delta x_v + Y_v\, \delta y_v + Z_v\, \delta z_v) = o \cdot \cdot 2).$$

Овом је једначином обухваћена цела статика.

Међу померајима тачке M постоји h релација 1). Кад редом једначине 1) помножимо по диференцијаљењу са $\lambda_1\, \lambda_2 \cdot\cdot \lambda_h$ и саберемо са 2), и за тим коефицијенте свих помераја $\delta x_v \cdot\cdot$ којих је свега $3n$, јер је $v = 1.\, 2.\ n$, ставимо равно нули, добићемо као услове за равнотежу изразе:

$$X_v + \lambda_1 \frac{df_1}{dx_v} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx_v} + \cdot\cdot \lambda_h \frac{df_u}{dx_v} = o$$

$$Y_v + \lambda_1 \frac{df_1}{dy_v} + \qquad n\, \lambda_h \frac{df_v}{dy_v} = o;\ v = 1.\, 2. \cdot\cdot n.$$

$$Z_v + \lambda_1 \frac{df_1}{dz_v} + \qquad \lambda_h \frac{df_v}{dz_v} = o$$

Кад се овим последњим једначинама, којих је на броју $3n$ додају оне из 1) којих је на броју h, имаћемо свега $3n + h$, из којих можемо наћи $3n$ координата: $x_1\, y_1\, z_1 \cdot\cdot x_n\, y_n\, z_n$ и h параметра $\lambda_1\, \lambda_2 \cdot\cdot \lambda_h$.

Ове се једначине могу упростити методом Лагранжовим.

Видели смо да конфигурација система зависи од k параметра и означимо их са:

$$q_1 = f_{h+1} (x_1 \cdot\cdot z_n)$$

$$q_2 = f_{h+2} (x \cdot\cdot z_n)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$q_k = f_{h+k} (x_1\, x_2 \cdot\cdot z_n)$$

Из ових и оних $3\,n - k = h$ под 1) можемо наћи $3n$ координата xyz као функције параметара $q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k$.

Нека су:

$$x_v = \varphi_x (q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k)$$

$$y_v = \psi_v (q_1\, b_2 \cdot\cdot q_k)$$

$$z_v = \omega_v (q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k)$$

Виртуелни су помераји:

$$\delta x_v = \frac{d\varphi_v}{dq_1}\, \delta q_1 + \cdot\cdot \frac{d\varphi_v}{dq_k}\, \delta q_k$$

$$\delta z_v = \frac{d\omega}{dq_1}\, \delta q_1 + \cdot\cdot \frac{d\omega}{dq_k}\, \delta q_k$$

Кад се ово унесе у:

$$\Sigma\, (X_v\, \delta x_v + Y_v\, \delta z_v + Z_v\, \delta z_v) = o$$

и ту X_v, Y_v, Z_v смени са $q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k$ имаћемо:

$$Q_1\, \delta q_1 + Q_2\, \delta q_2 + \cdot\cdot Q_k\, q_k = o$$

$$Q_i = \sum_{v=1}^{v=n} \left(X_v \frac{d\varphi_v}{dq_j} + Y_v \frac{d\psi_v}{dq_j} + Z_v \frac{d\omega}{dq_j} \right)$$

Предпоследња је једначина задовољена за случај:

$$Q_1 = Q_2 = \qquad = Q_k = o$$

Ако је $Q_1 \delta q_1 + \cdot\cdot Q_k \delta q_k = dU$, онда су $Q_1, Q_2 \cdot\cdot Q_k$ изводи U по $q, q_2 \cdot\cdot q_k$ и услови су равнотеже:

$$Q_1 = \frac{dU}{dq_1} = o, \; Q_2 = \frac{dU}{dq_2} = o \cdot\cdot Q_k = \frac{dU}{dq_k} = o.$$

што се поклапа са условима за *maxim.* и *minimum* функције $U(q_1 q_2 \cdot\cdot q_k)$.

§. 97. — *Примене за равротежу ужета.* Нека је ds елеменат ужета; $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ компонентне резултанте спољних сила које дејствују; за померај виртуелни рад је сила:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

За равнотежу је услов да је рад:

$$T = \int_o^l (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = o \cdot \cdot 1).$$

X, Y, Z се изражавају дужином s.

Једначини 1) ваља додати услов:

$$\Sigma\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 \quad \cdot 2).$$

који значи да је уже неистегљиво. Границе о и l значе да је уже утврђено за два краја.

Из 2) имамо:

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\delta y}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\delta z}{ds} = o \cdot \cdot 3).$$

Кад се 3) помножи са λ) и сабере са 1) имамо:

$$T = \int_o^l \left[\left(X\,\delta x + \lambda\,\frac{dx}{ds}\,d\delta x\right) + \left(Y\,\delta y + \lambda\,\frac{dy}{ds}\,d\delta y\right) + \right.$$
$$\left. + \left(Z\,\delta z + \lambda\,\frac{dz}{ds}\,d\delta z\right)\right] = o$$

Интегрисањем имамо:

$$\int_o^l \lambda\,\frac{dx}{ds}\,d\delta x = \left(\delta x \lambda\,\frac{dx}{ds}\right)_o^l - \int_o^l \delta x\, d\left(\lambda\,\frac{dx}{ds}\right)$$

пошто је $\delta x = \delta y = \delta z = o$ у o и l, то је:

$$T = \int_o^l \left[X\,ds - d\left(\lambda\,\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta z +$$
$$+ \left[Y\,ds - d\left(\lambda\,\frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y + \left[Z\,ds - d\left(\lambda\,\frac{dz}{ds}\right)\right]dz = o$$

Услови су дакле за равнотежу:

$$X\,ds - d\left(\lambda\,\frac{dx}{ds}\right) = o, \quad Y\,ds - d\left(\lambda\,\frac{dy}{ds}\right) = o$$

$$Z\,ds - d\left(\lambda\,\frac{dz}{ds}\right) = o$$

Кад се овде стави $T = -\lambda$ имамо већ нађене услове.

§. 98. — Из једначине:

$$\Sigma\,(X_v\,\delta x_v + Y\,\delta y_v + Z_v\,\delta z_v) = o \cdot \cdot 1).$$

можемо извести целу статику.

Ако услови дозвољавају померање транслаторно по $0X$, онда је оно изражено једначинама:

$$\delta y_v = o \qquad \delta z_v = o \qquad \delta x_1 = \delta x_2 \cdot\cdot = \delta x_n$$

Кад се ово стави у 1) имамо да је услов за равнотежу:

$$\Sigma X = o$$

Ако је могуће само обртање на пр. око $0Z$, па са r_v и θ_v означимо поларне координате пројекције тачке $x_v\,y_v\,z_v$ на $X0Y$ онда је:

$$x_v = r_v \cos\theta_v \quad y_v = z_v \sin\theta_v$$

$$\delta x_v = -r_v \sin\theta_v \,\delta\theta_v, \quad \delta y_v = x_v \,\delta\theta, \quad \delta z_v = o$$

$$\delta x_v = -y_v \,\delta\theta_v$$

Кад се ово стави у 1) имамо као услов за равнотежу израз:

$$\Sigma (x_v Y_v - y_v X_v) = o$$

За хеликоидално померање, обртање око осе $0Z$ и клизење по њој, услови су:

$$\delta z = f\,\delta\theta \text{ и } \delta x_v = -y_v \,\delta\theta, \quad \delta y_v = x_v \,\delta\theta_u$$

Заменом овога у 1) налазимо за услове равнотеже:

$$[d\theta\, \Sigma (x_v Y_v - y_v Z_u) + dz\, \Sigma Z_v] = o$$

$$N + f Z = o$$

N је моменат око $0z$, Z је сума пројекција сила на $0z$.

ЛИТЕРАТУРА

ЗА ПРИНЦИП ВИРТУЕЛНИХ БРЗИНА

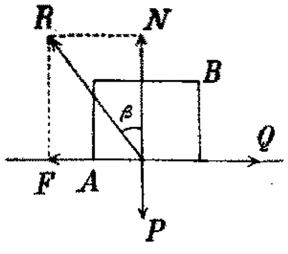
Galileo, Wallis, Descartes су први наишли на примену овог принципа. Лагранж помиње Jean Bernouille-а као правог творца принципа виртуелних брзина а поред њега и Varignon-a, Maupertuis-а (Loi de repos), и Euler-а.

Lagrange — Méoanique analytique
Despeyrous — Mécanique
C. Neumann — Berichte Sächsischen Geselschaft der Wissenschaften
Collignon — Traité de Mécanique

ГЛАВА VIII.

Трење.

§ 99. — *Закон трења од клизења у мировању.* Кад неко тело AB притискује на подлогу силом P, подлога реагира на њ отпором R. Кад на ово тело дејствује каква сила Q да га покрене с места, она мора савладати ефекат силе P и R. Ако се R разложи на две компоненте N и F, F се потире отпором P. Сила F која је супротна сили Q зове се сила трења



Сл. 72.

$$tq\,\beta = \frac{F}{N} = \frac{Q}{P}$$

Кад Q расте и постане Φ, тело се може кренути. Вредност $\Phi = F$ зове се трење при полазу и одговарајући се угао φ угла β зове угао трења и он је:

$$tq\,\varphi = \frac{\Phi}{P}$$

Кулом (Coulomb) је мерењем нашао:

1). Да је трење при полазу независно од величине тела AB.

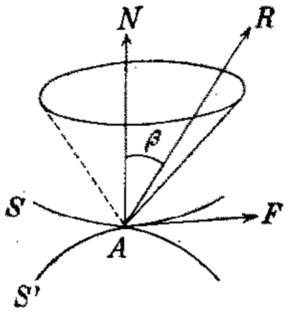
2). Зависно од његове природе.

3). И да је сразмерно нормалној компоненти N.

Однос f између $\frac{\Phi}{N} = \frac{\Phi}{P} = f$ зове се коефицијент трења, а угао, φ, $tq\varphi = f$ зове се угао трења.

За равнотежу је $\beta < \varphi$. За тела и подлоге металне је $f = 0{\cdot}19$ $\varphi = 10^\circ\ 40'$.

§ 100. — Ако два тела имају само једну додирну тачку, реакција тела S' на S се састоји из N и F; максимална је вредност од F, fN; угао $\beta < \varphi$ за равнотежу.



Сл. 73.

За равнотежу је услов: да постоји равнотежа између датих сила и силе R, да резултанта сила спољних пролази кроз A и са нормалом AN чини угао β мањи од угла трења. Ако се таква резултанта разложи на две силе од којих једна пада у F а друга у N, прву означимо са P а другу са Q, Q производи трење и клизење, кога нема јер је:

$$\frac{Q}{P} < f \quad Q < Pf.$$

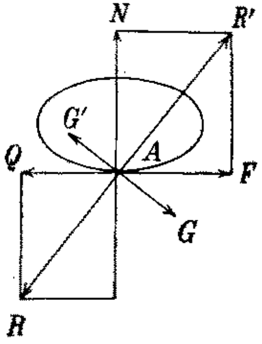
Резултанта сила мора да је у конусу чије је теме у A.

§ 101. — *Трење од клизења при кретању.* Нека је тело S у кретању и оно се додирује са S' у тачци A. Ако има трења реакција S_1 на S се састоји из две силе, нормалне N и тангенцијалне $F = fN$; ова је последња изложена условима:

1). да је у супротном правцу релативне брзине тачке A према S'.

2). да је независна од величине релативне брзине.

3). да је сразмерна са N, $F = fN$, f је нешто мање од коефицијента трења при мировању. (Hirn).



Сл. 74.

§ 102. — *Трење од котрљања у полазу и за време кретања.* Кад се какав цилиндар котрља по извесноме телу и уз то клизи,ваља водити рачуна о деформацији тела. Силе се могу свести на резултанту AR и спрег G управан на раван артије. Ако се AR разложи на две компоненте AP и AQ, Q тежи да тело клизи, G хоће да га обрне око његове изводнице. Ако је $G = o$, може бити само клизење и да тога није нужно је да је

$$Q < Pf.$$

Ако је овај услов задовољен, пређимо на котрљање. Да котрљања нема услов је:

$$G < P\delta$$

δ је коефицијенат трења од котрљања. δ је независно од R (Coulomb, Morin).

Раван, по којој се котрља и клизи цилиндар, реагира и даје силу R' и спрег G'. Услови су равнотеже онда ови: силама R и G излазе на супрот R' и G'. Сила N супротно дејствује сили P, сила Q сили F, а спрегу G спрег G' и то под условом:

$$F < Nf, \qquad G' < N\delta.$$

§ 103. — *Трење од пивотирања.* Обртање тела око осовине нормалне на тангенцијалној равни, заједничкој између два тела, зове се пивотирање. Ако је тело S у додиру са S_1 у тачци A резултанта спољних сила пролази кроз A и она је ако се означи са P нормална на заједничкој равни S и S'. За равнотежу, да нема пивотирања, ваља придодати један спрег чија осовина пада у заједничку нормалу тела S и S' на тангенцијалној површини. Ако овај спрег означимо са g, неће бити кретања, ако је $g > P\lambda$, λ се зове коефицијенат линеарни трења од **пивотирања при** полазу.

$$\lambda = \frac{4f}{15\pi}\Sigma \text{ (Léauté 1876).}$$

f је коефицијенат трења од клизења S по S'. Σ је периметар елипсе у којој се тела S и S' додирују, јер услед деформације тела S и S' тачка A прелази у елипсу као додирну површину између S и S'.

ЛИТЕРАТУРА

ИЗ СТАТИКЕ

Möbius — Statique.
Darboux — Notes de la mécanique de Despeyrous.
Bertrand — Traité de calcul différentiel.
Goldschmidt — Determinatio superficiae minimae (1831).
Théoreme de Minding — Journal d. Crelle (t. 14 p. 15).
Théoreme de Pennachietti — Rendinoonti del Circolo Mathématico di Palermo (t. VI).

Poinsot — Eléments de Statique.
Bourlet — Cours de Statique — 1902.
Maurice-Lévy — La statique graphique.
Ocagne — Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie.
Bonssinesq — Leçons synthétiques de mécanique générale.
Schell. W. — Théorie der Bewegung und der Kräfte.
Study E. — Geometrie der Dynamen.

Coulomb — 1781.
Poisson — Traité de Mécanique.
Hirn — Comptes rendus t. XCIX.
Jillett H. — Die Theorie der Reibung.

ТРЕЋИ ДЕО

ДИНАМИКА ТАЧКЕ

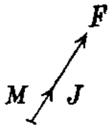
ГЛАВА IX.

Општи део, праволинејно кретање и кретање пројектила.

I. Општи део.

§ 104. — *Ако* је тачка M у кретању под утицајем силе F, убрзање је J у правцу силе и између силе и њега постоји однос:

$$F = mJ \quad \cdot \quad \cdot \; 1)$$



Сл. 75.

m је маса тачке M.

Ако се компоненте F означе са X, Y, Z у правцу координатних осовина, са $x\,y\,z$ координате тачке M, онда су компоненте убрзања J: $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, и једначина 1), примењена на све три осовине, даје за једначине кретања тачке M ове изразе:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \cdot \; \cdot \, 2).$$

У најопштијем случају су X, Y и Z функције, x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ и t. Једначине 2) су другога реда и интеграли општи зависе од шест произвољних констаната $C_1\, C_2 \cdot \cdot C_6$ а решења су облика:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1\, C_2\, C_3\, C_4\, C_5\, C_6) \\ y &= \psi(t, C_1\, C_2\, C_3\, C_4\, C_5\, C_6) \cdot \cdot 3) \\ z &= \chi(t, C_1\, C_2\, C_3\, C_4\, C_5\, C_6) \end{aligned}$$

Из једначина под 3) имамо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t, C_1\, C_2\, C_3\, C_4 \cdot\cdot C_6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi'(t, C_1\, C_2 \cdot\cdot C_6 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot 4).$$

$$\frac{dz}{dt} = \chi'(t, C_1\, C_2 \cdot\cdot C_6)$$

У сваком проблему константе се $C_1\, C_2 \cdot\cdot C_6$ одређују почетним условима, вредностима $x_0\ y_0\ z_0$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ за $t = t_0$ из 3) и 4). За ово је потребно да су под 3 и 4 једначине одређене и сагласне (compatible), из којих се онда налазе константе и оне су облика:

$$C_k = f_k\left(x_0\, y_0\, z_0 \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 t_0\right) \quad k = 1\, 2 \cdot\cdot 6$$

Почетним условима одговара само једно решење, што је последица Кошијеве теореме о решењу диференцијалних једначина.

§ 105. — *Први интеграли.* Овако се зову интеграли једначина кретања, који су дати једначинама између t, x, y, z и $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ и једне произвољне константе:

$$\Phi\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, C\right) = 0$$

или:

$$C = f\left(t\ x\ y\ z\, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \cdot \cdot 1).$$

Да је овакав израз заиста интеграл наших једначина уверићемо се диференцијаљењем једначине 1) по t:

$$\frac{df}{dt} + \sum \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \sum \frac{df}{dx'}\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad x' = \frac{dx}{dt}$$

или:

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{m} \sum \frac{df}{dx'} X = 0.$$

Примедба, $\sum \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}$

Последња једначина садржи само t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt}$, и како мора постојати, па ма какви били почетни услови, то је она и задовољена.

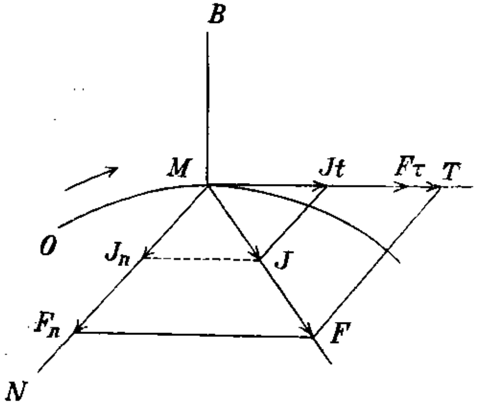
Кад је дато више првих интеграла:

$$C' = f_1\left(t\ x\ y\ z\, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$C^v = f_v\left(t_r\, x\ y\ z\, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\, \frac{dz}{dt}\right).$$

они су разни, ако није могуће из њих елиминисати све количине $x\ y\ z$, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; ако је то могуће, дошло би се до односа између констаната $C_1\, C_2 \cdot\cdot C_v$ без независно промењиво t. Из овога излази да је број првих интеграла највише 6, јер да је већи од 6, онда би количине $x\ y\ z\ \frac{dx}{dt}\ \frac{dy}{dt}\ \frac{dz}{dt}$ могли елиминисати.

§ 106. — *Ајлерове једначине* (équations intrinsèques). Ако се у место произвољног система координатиог узме систем који иде у правцу таигенте, главие нормале и бинормале, једначине кретања су тачке M на линији $0M$ дате Ајлеровим једначинама. Позитиван је правац у правцу MT, ако је кретање од 0 ка M, позитиван је правац нормале главне од M ка N и бинормале од M ка B.



Сл. 76.

Ако се лук $0M$ обележи са s, онда је брзина у правцу тангенте v

$$v = \frac{ds}{dt} \cdot \cdot \cdot 1).$$

Убрзање MJ пада у правцу силе F, и његове су пројекције у правцу нормале и тангенте:

$$J_n = \frac{v^2}{\varrho} \qquad J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \cdot 2).$$

У правцу је бинормале убрзање нула, јер је $BM \perp$ на MTN, у којој је равни и сила F. ϱ је полупречник кривине.

Ако са F_t F_n и F_b означимо компоненте силе F у правцима: тангенте, нормале и бинормале, једначине су кретања:

$$F_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$F_n = m\frac{v^2}{\varrho}$$

$$F_b = 0$$

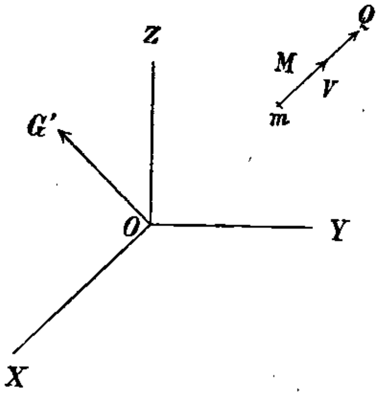
m је маса тачке M.

Ако је сила иормална на трајекторији $0M$, оида је $F_t = 0$, значи да је брзина стална и сила је обрнуто сразмерна полупречнику кривине. Ако је сила у правцу тангенте онда је $F_n = 0 = \frac{v^2}{\varrho}$, ово је могуће за $\varrho = \infty$, значи пут је праволинејни.

§ 107. — *Величина (количина) кретања.* Овако се зове производ из брзине и масе m тачке M. Према овоме је величина кретања тачке M један вектор $MQ = mv$.

Пројекције су величине кретања:

$$m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt},\ m\frac{dz}{dt} \cdot (MQ).$$



Сл. 77.

Моменти су величине кретања у односу осовина

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),\ m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),\ m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \cdot 0G'$$

Ово је један вектор $0G'$ чије су пројекције нађени моменти.

§ 108. — Теорема о пројекцијама величине кретања.

Из једначина кретања

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \text{ и т. д. налази се}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y \cdot \cdot 1).$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z$$

Овим је обухваћена теорема: да је извод по времену пројекције величине кретање на ма коју осу једнак суми пројекција на исту осу сила које дејствују на тачку.

Ако је пројекција сила X равна нули, онда је:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = o, \quad mx = Ax + A'$$

A и A' су константе, значи да је пројекција кретања на $X^{\text{ску}}$ осовину једнако кретање.

Ако је сила паралелна са извесном правом на пр. $0Z$, онда је $X = Y = o$ и однос је између x y:

$$Ax - By = C.$$

значи кретање се збива у једној равни паралелној правцу $0Z$.

§ 109. — *Теорема о моменту величине кретања. Принцип површина.*

Ако пођемо од једначина:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

и из њих множењем и одузимањем образујемо изводе момената величине кретања, доћи ћемо до израза:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = xY - yX$$

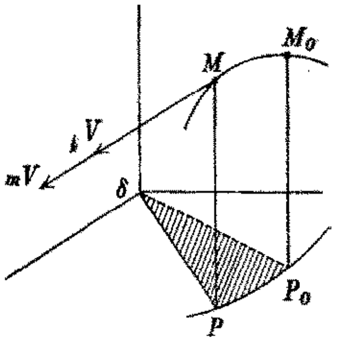
$$\frac{d}{dt}\left[m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right] = zX - xZ \quad \cdot \quad \cdot \; 1)$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right] = yZ - zY$$

у правцу $z^{\text{ске}}$, y и $x^{\text{ске}}$ осовине. Ове једначине исказују теорему, да је:

Извод по времену из момента величине кретања у правцу ма које осе једнак са моментом сила односно те осовине.

Ако је који од момената сила непрестано једнак нули на пр. $xY - yX = o$, онда се долази до теореме о површинама, јер се из треће једначине налази интеграл први облика:



Сл. 78.

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C \quad \cdot \quad \cdot \; 2).$$

Тумачење је интеграла 2) лако. Из слике је: $0PP_0 = ds = {}^1/_2(xdy - ydx)$.

Координате су од P x y, од P_0 $x + dx$, $y + dy$.

Из 2), заменом имамо:

$$2\frac{ds}{dt} = C \text{ или } s = {}^1/_2\, C(t - t_0).$$

Последња једначина обухвата теорему површина: да је површина s сразмерна с временом потребним да се та површина опише радијусом $0P$.

Константа се C одређује почетним условима, то је вредност од $x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}$ у почетку кретања, иоменат брзине почетне.

Ако се теорема површина може применити на пројекцију кретања у извесној равни, сила је онда у правцу осовине нормалне на тој равнини.

Централна кретања. Ако сила пролази кроз једну тачку 0, моменат је силе онда нула у односу ма које осе, што иде кроз 0; теорема се о површинама примењује на све три равни. Трајекторија је у равни што иде кроз 0. Ово излази из:

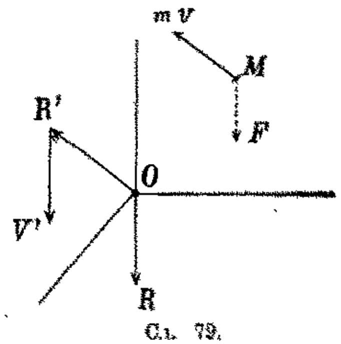
$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C$$

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=A$$

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=B$$

чега је последица:

$$Ax+By+Cz=o.$$



Сл. 79.

§ 110. — *Геометријско тумачење прошле две теореме.* Ако кроз почетак повучемо два вектора $0R$ и $0R'$, од којих је први паралелан са резултантом сила што дејствују на M а други са величином кретања mv, координате су тачке R'.

$$\alpha=m\frac{dx}{dt},\ \ \beta=m\frac{dy}{dt},\ \ \gamma=m\frac{dz}{dt}$$

Једначине су кретања:

$$\frac{d\alpha}{dt}=X,\ \ \frac{d\beta}{dt}=Y,\ \ \frac{d\gamma}{dt}=Z$$

што значи: да је брзина v' тачке R' паралелна са R.

Ако је $0G$ резултујући моменат силе F односно тачке 0 и $0G'$ моменат величине кретања односно исте тачке, координате су тачке G' λ, μ, ν:

$$\lambda=m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\mu=m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\nu=m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

Пројекције су $0G$.

$$L=yZ-zY,\ \ M=zX-xZ,\ \ N=xY-yX.$$

Друга се теорема може изразити једначинама:

$$\frac{d\lambda}{dt}=L,\qquad \frac{d\mu}{dt}=M,\qquad \frac{d\nu}{dt}=N$$

што значи: да је бразина ν'' тачке G' паралелна са вектором $0G$.

§ 111. — *Случај кад сила припада комплексу линеарном.* Ако X, Y, Z, L, M, N задовољавају једначину:

$$pX+qY+rZ+a(yZ-zY)+b(zX-xZ)+c(xY-yX)=o\cdot\cdot 1)$$

где су $p\,q\,r\,a\,b\,c$ константе, онда се каже да сила F припада комплексу линеарном. Кад се у 1) замене: $x\,y\,z$ и т. д. изразима из поменутих двеју теорема налази се први интеграл:

$$m\left[p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}+r\frac{dz}{dt}+a\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\right.$$

$$\left.+b\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+c\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\text{const.}\right.$$

Овај интеграл изражава: да је моменат вектора MQ (количине кретања) и система векторâ, чије су координате $a\,b\,c$, $p\,q\,r$, константан.

§ 112. — *Теорема живе силе.*

Ако се једначине:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

редом помноже са dx, dy, dz и саберу добија се израз:

$$\frac{1}{2}\,d\,m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}$$

$$d\,mv^2 = Xdx + Ydy + Zdz \cdot \ \cdot \ \cdot 1).$$

Производ се из $^1/_2 mv^2$ зове жива сила и 1) означава теорему живе силе: која гласи:

диференцијал живе силе, за време кретања dt, једнак је елементарноме раду резултанте сила, што дејствује на тачку M, у времену dt.

Једначина се 1) може добити и из:

$$m\frac{dv}{dt}=Ft$$

ако се помножи са ds

$$m\frac{dv}{dt}ds = mv \quad dv = F_t ds = \frac{d\,mv^2}{2}$$

Ако се интеграл и једначина 1) имаћемо:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0{}^2}{2}=\int_{t_0}^{t}(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Варијација живе силе у интервалу времена ма коме равна је раду сила у истоме међу времену.

§ 113. — При тражењу рада ваља разликовати ове случајеве:

1). Кад XYZ зависе од $x\,y\,z\;\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\;t$, ваља знати x, y, z као функције времена.

2). Ако XYZ зависе само од x, y, z довољно је знати само трајекторију између тачке M_0 у времену t_0 и M у времену t.

3). Ако XYZ зависе само од положија тачке и изводи су извесне функције $U(xyz)$

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU(xyz)$$

рад се може наћи знајући само две тачке M_0 и M, јер се теореме живе силе онда своди на:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0{}^2}{2}=U(xyz)-U(x_0y_0z_0)$$

или

$$mv^2 = 2\,[U(xyz)+h]$$

$$h=\frac{mv_0{}^2}{2}-U(x_0y_0z_0)$$

h се зове константа живе силе.

Из овога излази да брзина бива иста увек кад $U(xyz)$ добије исту вредност. Ако је $U(xyz)$ униформна функцији брзина је иста на површинама нивоским $U(xyz)=const.$ Ако је U мултиформна функција, као на пр. $U(xyz)=ar\,tq\;{}^y/_x$ брзине нису исте на једној и истој нивоској површини.

Пример. Ако посматрамо кретање тешке тачке у празном простору, онда дејствује тежа:

$$X=Y=o \qquad Z=-mg.$$

$$\frac{dmv^2}{2}=-mgdz$$

$$v^2=2(-gz+h) \qquad h=\frac{mv_0{}^2}{2}+z_0.$$

§ 114. — Из једначине:

$$mv^2 = 2\,[U(x\,y\,z) + h]$$

излази: да тачка не може изаћи из региона простора у коме је $U + h$ позитивно.

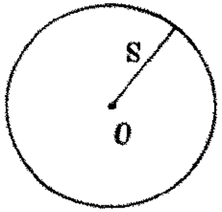
Ако су компоненти $X, Y, Z,$ облика

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}$$

положај се равнотежни тачке $M(x\,y\,z)$ добија из једначина:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dz} = 0$$

или из услова да је U maxim. или minimum. Ако се тај положај узме за почетак координатног система и узмемо да се U у 0 поништава, онда за изналажење maxim. ваља из 0 описати сверу полупречника ϱ и ϱ тако одредити да је U на свери негативно а не нула.



Сл. 80.

Показаћемо да постоје два броја ε и u позитивна да је $\varepsilon < \varrho$ а $v < u$, где је v брзина почетна да се тачка налази у свери ϱ. Заиста ако је U на свери негативно и различно од нуле, може се наћи један број p такав да је:

$$U + p < 0 \qquad - U > p.$$

Ако сад тачки M, која је у свери, дамо брзину v_0 и она се налази у M_0, теорема живе силе даје:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \left(\frac{mv_0^2}{2} - U_0\right)$$

Ако положај и почетну брзину одредимо из услова:

$$\frac{mv_0^2}{2} - U_0 < p$$

зашто је довољно да је

$$\frac{mv_0^2}{2} < {}^p/_2, - U_0 < {}^p/_2$$

из прве неједначине онда налазимо за v_0 веће вредности од u

$$u = v_0 = \sqrt{\frac{p}{m}}$$

Како је U континуирно и нула у 0, постоји један број ε позитиван и мали да је $0M_0$ мање од ε, — U_0 је мање од ${}^p/_2$. Дајући тачки M положај удаљен од 0 најмање за ε и брзину почетну мању од $\sqrt{{}^p/_m}$, задовољена је неједнакост $\frac{mv_0}{2} - U_0 < p$ и према теореми о живој сили израз:

$$\frac{mv^2}{2} < U + p.$$

Ово показује да тачка покретна M не може изаћи из свере ϱ.

ЛИТЕРАТУРА

Goursat — Leçons sur les équations aux derivées partielles.
Euler — Equations intrinsèques.
Ossian — Bonnet у t. IX Journal de Mathématiques.
Paul Serret — Théorie nouvelles de lignes à double courbure 1860.
Lejen Dirichlet.
Brioschi — Annali da Tortolino — 1853.
Haton de la Goupillier — Journal de Liouville.
De Sparre — **Comptes** rendus, 23, 30 mai 1892 и у; Mémorial de l'Artillerie et de la Marine 1892.
Greenhill — Les fonctions elliptiques et leurs applications 1895.
Appell и *E. Lacour* — Principes de la théorie des fonctions elliptiques et leurs applications.
De Sparre — Sur le mouvement des ptojectiles dans l'air — 1891, 1894.
Helm — Elemente der Mechanik und mathematischen Physik.
Herweg — Physikalische Begriffe und absolute Masse.
Planck — Princip der Erhaltung der Energie.
Weyrauch — Princip der Erhaltung der Energie.
Ostwald W. — Energie (Nouvelle oollection Scientifique).

II. Праволинејно кретање.

§. 115. — Ако је сила што дејствује на извесну тачку непрестано паралелна са неком равни, трајекторија је тачке у једној равнини. Ова је теорема очевидна из разлога симетрије.

Ако је сила паралелна извесној прави, тачка описује трајекторију паралелну са том правом.

§. 116. — *Најпростији* случај је праволинејног кретања дат једном једначином:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X = \Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \cdot \cdot 1).$$

где је сила дата као функција координате x, брзине $v = \frac{dx}{dt}$ и времена t.

Општи је интеграл облика:

$$X = f(t\, C_1\, C_2) \cdot \cdot 2).$$

и константе се C_1 и C_2 одређују из почетних услова:

$$x_0 = f(t\, C_1\, C_2) \text{ и } v_0 = \frac{df}{dt}(t\, C_1 C_2) \cdot \cdot 3).$$

где су x_0 и v_0 почетна координата и брзина почетна.

Једначина се 1). може интегрисати квадратурама ако Φ зависи само од једне количине, или од x, или v или t.

a). Ако сила X зависи само од положаја, облик је једначине 1):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x) \cdot \cdot 4).$$

Ова се једначина своди на:

$$2\,m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = 2\,\varphi(x)\frac{dx}{dt}$$

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx + h$$

Последња је једначина истоветна са једначином живе силе.

h је равно mv^2_0, а добија се ако се по интегрисању стави $x = x_0$.

Извршено интегранисање даје једначину:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \psi(x) \text{ или } \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\psi(x)} \cdot \cdot 5).$$

Знак пред кореном ваља одредити према знаку брзине v_0, пошто је за $x = x_0$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0$. Ако је $v_0 = o$ кретање је у правцу силе.

Из 5) имамо:

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{\psi(x)}}$$

b). Нека сила зависи само од брзине. Једначина се кретања своди на облик:

$$m\frac{dv}{dt} = \varphi(v), \quad dt = \frac{m\,dv}{\varphi(v)}$$

$$t = \int_{v_0}^{v} m\frac{dv}{\varphi(v)} + t_0$$

Како је $dx = vdt = \dfrac{mv\,dv}{\varphi(v)}$

$$x = \int_{v_0}^{v}\frac{mv\,dv}{\varphi(v)} + x_0$$

Овде су x и t изражени параметром v.

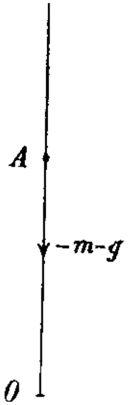
c). Кад сила зависи само од времена, из једначина се:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t) \text{ добија:}$$

$$m\frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^{t}\varphi(t)\,dt + mvo$$

$$mx = \int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\varphi(t)\,dt + mvo(t - t_0) + mxo$$

§. 117. *Примери.* a) Кретање вертикално једне тачке тешке у празном простору. Сила која овде дејствује једнака је $- m\,g$.



Сл. 81.

Једначина је кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = - mg \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} = - g$$

Прво интегрисање даје:

$$\frac{dx}{dt} = v = -gt + vo \cdot \cdot 1).$$

Друго интегрисање даје:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \cdot \cdot 2).$$

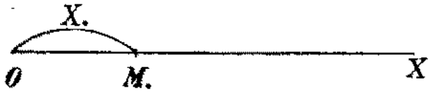
где је константа положаја нула, јер смо узели да је тачка у почетку кретања у координатном почетку *o*.

Из 1) и 2) имамо:

$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

до које смо једначине могли доћи и теоремом о живој сили.

b). Кретање тачке коју привлачи или одбија сила из једнога центра *0* сразмерно одстојању.



Сл. 82.

Нека је **0** у почетку коор. система, кретање је у правцу осе $0X$ и почиње из тачке M_0, v_0 је почетна брзина; позитиван је правац $0M_0$.

Узмимо прво случај атрактивне силе из *0* на *M*, облик је силе онда $-\mu x$ и једначина је кретања, кад је $\frac{\mu}{m} = k$ облика.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x \cdot \cdot 1).$$

Из ове се једначине лако добија:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = -k^2x^2 + h \cdot \cdot 2))$$

$$\text{за } x = x_0, \quad h = v_0^2 + k^2 x_0^2$$

$h > k^2 x_0^2$ и може се ставити $h = k^2 \mathrm{a}^2$ $\mathrm{a} > x_0$

Из 2) имамо онда:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2 (\mathrm{a}^2 - x^2)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}$$

Из ове се једначине налазе време *t*

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}} \cdot \cdot 3).$$

Ако је тачка почела кретање брзином v_0 позитивном, ваља узети знак + пред кореном. Како *v* опада кад *x* расте, што се види из једначине $v = k\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}$, то је $v = o$ за $x = \mathrm{a}$. За време *t*

$$t = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{\mathrm{a}} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}}$$

тачка долази у положај *A* најдаље од M_0. На крају тог времена брзина је нула, сила је атрактввна и кретање мења правац и пред кореном ваља узети знак —. Једначина је сад кретања:

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}$$

Тачка се сад приближује положају *0* где је брзина *k*a и у *0* долази за време:

$$\frac{1}{k}\int_{o}^{\mathrm{a}} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{a}^2 - x_z}} = \frac{\pi}{2k}$$

За овим тачка пролази кроз *0* и креће се по трајекторији инверзној првој од *0 ka A*.

Кретање је ово осцилаторно и трајање је једне просте осцилације $\frac{\pi}{k}$.

Ако је првобитна брзина $v_0 = o$, онда је $a = x_0$ и тачка из ма ког положаја долази у *0* после времена $\frac{\pi}{2k}$, време је овде независно од x_0, кретање је таутохроно.

Да би нашли однос између x и t ваља свршити интегрисање једначине:

$$kt = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

што доводи до једначине:

$$x = B \sin (kt + A)$$

где се A и B налазе из почетних услова.

Пример који смо третирали можемо и овако решити.

Једначина је кретања била облика:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = o.$$

Ово је линеарна једначина где су коефицијенти стални. Њен је интеграл облика:

$$x = A \cos kt + B \sin kt \cdot \cdot 1).$$

Из ове се једначине добија:

$$\frac{dx}{dt} = v = - Ak \sin kt + Bk \cos kt \cdot \cdot 2).$$

За $t = o$ $\quad A = x_0 \quad v_0 = Bk$.

Кад се у 1) смени A и B нађеним вредностима, имаћемо:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt \cdot \cdot I).$$

Ако је $v_0 = o$

$$x = x_0 \cos kt.$$

Да је $x = o$ треба да је $kt = \frac{\pi}{2}$, одакле је време t, нужно да тачка дође у почетак $\frac{\pi}{2k}$.

c). *Нека* је сила репулсивна. Једначина је кретања сад облика:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x$$

$$h = v_0^2 - k^2 x_0^2$$

Сл. 83.

и

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{k^2 x^2 + h} = \pm k \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \cdot 3).$$

Нека је $v_0 > o$, тачка се онда удаљује и брзина расте са одстојањем x, знак је $+$. Ако је $v_0 < o$ ваља узети знак $-$

Из 3) је онда t.

$$t = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \frac{-dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

За случај да је $h = v_0^2 - k^2 x_0^2 = o$

$$t = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} - \frac{dx}{x} = \frac{1}{k} \log \frac{x_0}{x}.$$

t је ∞ за $x = o$

Ако пођемо од једначине кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = o$$

и нађемо општи њен интеграл, који је облика:

$$x = A e^{kt} + B e^{-kt}$$

и A и B одредимо из почетних услова, онда је за $t = o$

$$x_0 = A + B, \quad \frac{v_0}{k} = A - B, \quad A = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{k}\right), B = $$
$$= \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{k}\right)$$

Ако узмемо да су почетни услови такви да је $A = o$ т. ј. $v_0 = - k x_0$ и $h = o$, кретање је дато једначином:

$$x = x_0 e^{-kt}$$

за $x = o$ $t = \infty$.

d). Кретање тачке привлачене силом из једнога центра обрнуто сразмерне одстојању.

Ако је x позитивно једначина је силе:

$$X = -\frac{\mu}{x^2}, \text{ ако је } x \text{ негативно } X = \frac{\mu}{x^2}$$

За први случај је кретање дато једначином:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{x^2}$$

Одавде је интегрисањем:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{x} + h, \quad h = v_0^2 - \frac{2k^2}{x_0}$$

Нека тачка почне кретање из M_0 брзином $v_0 < o$, треба онда узети знак —, и једначина је:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k^2}{x} + h}$$

Ако је брзина позитивна $v_0 > o$, онда је једначина:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{2k^2}{x} + h}$$

Ако је $h > o$, кад x расте, v опада али је веће од $\sqrt{h}$ и тачка се удаљује, и како брзина тежи ка $\sqrt{h}$, кретање ће постати једнако.

Ако је $h = o$ онда ће тачка доћи у сваки положај праве по којој се креће, тачка се непрестано удаљује брзином која тежи нули.

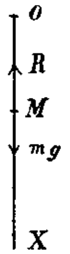
Ако је $h < o$ и ставимо $h = -\frac{2k^2}{a}$, једначина је кретања:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{2k^2}{x} - \frac{2k^2}{a}}$$

$a > x_0$. Тачка се приближује положају A и у A долази за коначно време. На крају тог времена кретање мења смисао јер је сила атрактивна и тачка долази у o.

§. 118. — *Кретање кад сила зависи* од брзине.

1). Вертикално кретање пројектила у отпорној средини. Кад се какво тело креће у ваздуху, на њега поред теже дејствује отпор ваздуха, који се јавља у једној резултанти супротној правцу брзине и зависној од првог, другог и вишег степена брзине, према томе да ли је брзина, којом се тело креће мала, до 200^m или већа од 200. У опште се отпор може ставити да је $R = mkv^n$ где је m маса тела што се креће, k и n су константе, v брзина. Уз ове силе R, долази и спрег од отпора, који је у неким случајевима нула, кад се тела нарочитог облика крећу по вертикалним путањама. За сада ћемо отпорни спрег занемарити.



Сл. 84.

1). Нека се прво креће тело на ниже. Ако је тачка у M на њу дејствује сила R и mg и једначина је кретања, кад за позитивну осу x-ску узмемо правац на ниже:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - R = mg - mkv^n$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^n$$

Ставимо $\frac{g}{k} = \alpha^n \qquad \alpha = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}$

$$\frac{dv}{dt} = k(\alpha^n - v^n)$$

$$kt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\alpha^n - v^n}$$

и због $\frac{dx}{dt} = dv$

$$kx = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{\alpha^n - v^n}$$

Ако у ваздуху падају две лопте неједнаких маса а разних брзина, отпор ће ваздуха бити исти и имаћемо:

$$mk = m'k'$$

коефицијенти су обрнуто сразмерни масама.

Ако је n цело или $n = \frac{p}{q}$ интегрисање се лако може извршити.

Ако је $n = 1$

$$kt = log\frac{\alpha - v_0}{\alpha - v.}$$

или

$$\alpha - v = (\alpha - v_0)\,e^{-kt} \quad \cdot \quad \cdot \; 1).$$

Кад t тежи ∞ v тежи ка α.

Ако у 1) сменимо v са $\frac{dx}{dt}$

$$\alpha t - x = -\frac{1}{k}(x - v)\,e^{-kt} + C$$

Како је за $t = o$, $C = o$. $\qquad C = \frac{\alpha - v_0}{k}$

$$x = \frac{g}{k}\left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k}\right) + v_0\frac{1 - e^{-kt}}{k.}$$

за $k = o$

$$x = v_0\,t + \frac{1}{2}gt^2$$

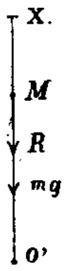
позната једначина за слободно падање тела у безваздушном простору.

2). Кретање тела бачених на више у правцу вертикалном, позитивна оса x на више.

Једначина је кретања сад:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - mk\,v^n$$

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv^n)$$



Сл. 85.

Одавде је t и x

$$t = -\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{g+kv^n}, x = -\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{g+kv^n}$$

За $n = 1$

$$kt = -\log\frac{g+kv}{g+kv_0}$$

или

$$g + kv = (g + k\,v_0)\,e^{-kt} \cdot \cdot 1)$$

Тело долази до највеће висине за време $t = T$

$$T = \frac{1}{k}\log\left(1+\frac{k}{g}v_0\right)$$

Ако у 1) заменимо v са $\frac{dx}{dt}$ и интегришемо имаћемо:

$$gt + kx = (g + kv_0)\,\frac{1-e^{-kt}}{k.}$$

за $k = o$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

позната једначина кретања бачених тела на више у безваздушном простору.

За $n = 2$

$$kt = -\sqrt{\frac{k}{g}}\,ar\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}} + C$$

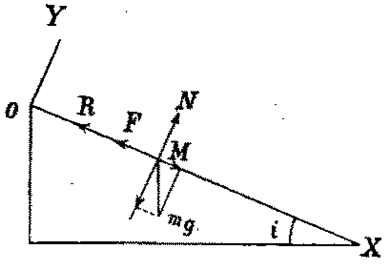
Ставимо овде $\beta = C\sqrt{\frac{g}{k}}$

$$v\sqrt{\frac{k}{g}} = tq\left(\beta - t\sqrt{kg}\right).$$

β се одређује из почетног услова $v_0\sqrt{\frac{k}{g}} = tq\,\beta.$ Време T, да тачка дође у највећу висину где је $v = o$ јесте $T = \frac{\beta}{\sqrt{kg}}$. За x је вредност:

$$x = \frac{1}{k}\log\frac{\cos(\beta - t\sqrt{kg})}{\cos\beta}$$

3). Кретање материјалне тачке по стрмој равнини, водећи рачуна о трењу и отпору ваздуха. Ако је координатни систем Oxy, тачка у M, на њу дејствују силе R, $F = fN$ где је f коефицијенат трења и тежа mg. Нека је нагиб стрме равнине i.



Сл. 86.

Посматрајмо прво кретање тачке низ стрму раван, положан је правац ox.

Једначине су кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin i - R - F$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = N - mg\cos i$$

Како је y стално нула, из друге је једначине:

$$N = mg\cos i \text{ и } F = fN = fmg\cos i$$

Кад се вредности F и R (отпор ваздуха) смене у првој једначини, имаћемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (g\sin i - fg\cos i) - kv^n$$

Овде су могућа три случаја:

a). $tq\,i > f$, први је члан $g \sin i - fg \cos i = g'$ увек позитиван и једначина је кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g' - kv^2$$

истоветна једначина са једначином за падање тела у правцу вертикале, где је у место g дошло g', брзина тежи граници $\left(\frac{g'}{k}\right)^{1/n}$

b). $tq\,i < f$, други је члан увек негативан и једнак $-g'$, једначина је кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g' - kv^n$$

слична са једначином тела бачених у вис у правцу вертикале.

c). $tq\,i = f$, једначина је кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kv^n,\ \frac{dv}{dt} = -kv^n,\ kt = \frac{1}{n-1}\left(v^{1-n} - v_0^{\ 1-n}\right)$$

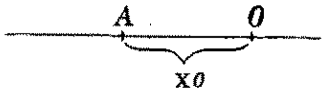
$$\text{за } n \gtrless 1, \qquad \text{за } n = 1 \qquad kt = log\,\frac{vo}{v}$$

Ако је $n = 1$ или већи од 1 v расте са временом, за $n < 1$ t тежи ка T, како је брзина $v = o$

$$kT = \frac{v_0^{\ 1-n}}{1-n}$$

x је коначно или бесконачно, ако је n мање или веће од 2.

§. 119. — *Таутохрона кретања праволинејна.* Овако се називају она кретања, кад се покретна тачка, остављена сама себи без почетне брзине, под утицајем силе само за исто време креће до исте тачке ма из кога почетка.



С. 87.

a). Нека сила зависи само од положаја. Нека је тачка доласка, звана тачком таутохронизма, почетак координатног система o, X сила што дејствује на покретну тачку, x_0 коор. полазне тачке A, теорема живе силе даје:

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X\,dx \cdot \quad \cdot 1).$$

X је негативно за x позитивно, јер се покретна тачка мора кретати ка почетку 0, ма какав положај био полазни и сила је увек управљена ка 0.

$$\int_0^x X\,dx = -\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ је позитивно и расте са x-ском координатом.

Кад се ово смени у 1) имаћемо:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,[\varphi(x_0) - \varphi(x)].$$

Време T да тачка дође у 0 је:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x_0) - \varphi(x)}}$$

Ставимо овде $\varphi(x) = z, \qquad \varphi(x_0) = z_0 \qquad x = \psi(z)$

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{z_0}\frac{\psi'(z)\,dz}{\sqrt{z_0 - z}}$$

Да је кретање таутохроно T мора бити независно од x_0, т. ј. од z_0. Ово се добија кад се извод T по z_0 стави раван нули. Да би избегли овде изразе бескрајне, сменимо границе са o и 1 заменом $z = z_0 u$

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_o^1 \frac{\psi' (z_0 u) \sqrt{zo}\, du}{\sqrt{1 - u}}$$

$$\frac{dT}{dz_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_o^1 \frac{\psi'' (z_0 u) z_0 u + {}^1/_2\, \psi' (z_0 u)}{\sqrt{z_0 - z_0 u}}$$

или сменом $z = z_0 u$

$$\frac{dT}{dz_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_o^{zo} \frac{z\, \psi'' (z) + {}^1/_2\, \psi' (z)}{z_0 \sqrt{z_0 - z}}\, dz$$

Услов да је ово нула јесте:

$$z\, \psi'' (z) + {}^1/_2\, \psi' (z) = o$$

$$\psi (z) = 2\, C \sqrt{z} + C'$$

$\psi (z)$ је нула за $z = o$, то је $C' = o$

$\psi (z) = 2\, C \sqrt{z}$ или

$$x = 2\, C \sqrt{z}, \qquad z = \frac{x^2}{4C^2}$$

Значи, услов је таутохронизма, кад сила зависи од положаја: да је сила облика $X = - \varphi' (x) = - \frac{x}{2C^2}$. То је атракција сразмерна са одстојањем (Puiseux).

2). Ако сила зависи од x и $\frac{dx}{dt}$, услов је таутохронизма сложенији, види Appell-a *tom* I 324.

§. 120. — *Кад је* познат закон кретања праволинејног наћи силу. Овај је задатак могућ кад је познат општи закон кретања изражен изразом у коме има две независне константе, а није одређен, ако је дато кретање партикуларним интегралом.

ако је $x = \varphi (t\, x_0\, v_0) \cdot \cdot 1)$.

x_0 и v_0 су почетне количине за $t = o$, координате и брзине, из 1) имамо:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi' (t\, x_0\, v_0) \cdot \cdot 2).$$

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\, \varphi'' (t\, x_0\, v_0) \cdot \cdot 3)$$

Ако из 1) и 2) нађемо x_0 и v_0 и заменимо у 3) имаћемо потпуно одређену вредност за X.

Пример. Ако је кретање дато изразом:

$$x^2 = \frac{\mu}{x_0^2} t^2 + (x_0 + v_0\, t)^2.$$

Сила је: $X = \frac{m\mu}{x^2}$

Ако је кретање дато партикуларним интегралом

$$X = sin\, t \text{ за } t = o, \quad x_0 = o, \quad v_0 = 1$$

онда је

$$v = const. \qquad X = - m\, sin\, t.$$

Закона је сила:

$- m\, sin\, t, \quad - m \sqrt{1 - v^2}, \quad - mx, \quad {}^m/_2\, (x + sin\, t)$ и т. д.

има бесконачно решења, за горње услове. Задатак је неодређен.

III. Криволинејно кретање тешке тачке у празном простору и отпорној средини.

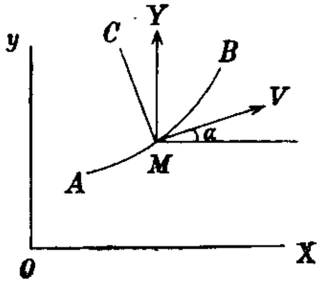
§ 121. — Ако је сила што дејствује на извесну тачку непрестано паралелна неком датом правцу, на пр. $0Y$, трајекторија је тачке у равни у којој се поред споменутог правца налази и правац почетне брзине. Нека је та раван $0xy$, једначине су кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = o \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

Из прве једначине имамо:

$$\frac{dx}{dt} = \text{a}, \quad x = at + b.$$

Пројекција покретне тачке на $x^{\text{ској}}$ осовини је кретање униформно. Кад се нађено x замени у $Y = f\left(x \ \ y \ \ \frac{dx}{dt} \ \frac{dy}{dt} \ t\right)$, друга се једначина може лако интегрисати и тако се налази координата y.



Сл. 88.

§ 122. — *Једначине кретања* изражене координатама трајекторије, дужином лука и полупречником кривине. (intrinsèques).

Нека тачка M описује трајекторију AB, правац брзине Mv склапа угао α са ox, сила је MY, MC нормала. Пројекција силе на нормалу даје једначину

$$Y\cos\alpha = \frac{mv^2}{\rho} \cdot \cdot 1).$$

Друга се једначина добија пројектовањем силе на тангенту, како је у нашем примеру $\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha = a$ (a constantno), друга је једначина

$$v\cos\alpha = \text{a} \cdot \cdot 2).$$

Избацивање брзине из 1) и 2) даје једначину трајекторије. Ако је $Y = const. = k$, једначина је путање:

$$\rho\cos^3\alpha = k \cdot \cdot 3).$$

Ово је парабола.

§ 123. — Кретање тешке тачке у празном простору. Једначине су кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = o, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \cdot \cdot 1).$$

Ако је величина почетне брзине v_0 и она склапа са $x^{\text{ском}}$ осовином угао α, интегрисањем прве једначине добијамо:

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha \cdot \cdot 2)$$

интегрисањем, и имајући у виду да је тачка у почетку кретања била у o (почетку координатног система), из 2) имамо

$$x = v_0 t\cos\alpha \cdot \cdot 3).$$

Из друге једначине под 1) имамо:

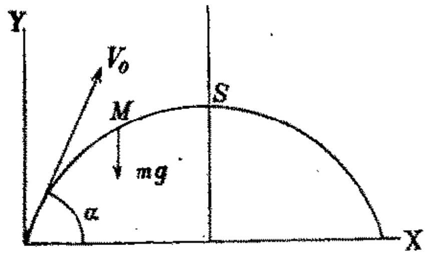
$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0\cos\alpha$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t\sin\alpha \cdot \cdot 4).$$

Из једначина $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ добијамо једначину за брзину $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0{}^2 - 2gy$

Из 3) и 4) налазимо једначину трајекторије:

$$y = -\frac{gt^2}{2v_0{}^2 \cos^2\alpha} + x\, tq\, \alpha.$$



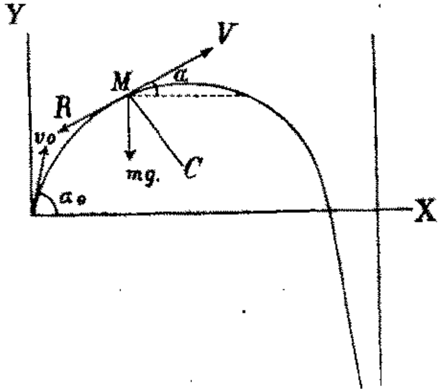
Сл. 89.

Ово је парабола вертикалне осовине.

§ 123 a. — *Кретање тешке тачке у отпорној средини.* Ако са Rx, Ry, Rz обележимо компоненте отпора, једначине су кретања тешке тачке:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Rx, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Ry, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Rz - mg$$

Нека на тачку M дејствује тежа mg и отпор R у супротном праву брзине по тангенти, нека брзина склапа угао α са ox, MC нека је нормала на трајекторији. Ако се силе пројектују на тангенту, једначина ј кретања:



Сл. 90.

$$m\frac{dv}{dt} = F_t = -mg\, sin\, \alpha - R \cdot \cdot 1).$$

Овде је $R = mg\,\varphi(v)$ и кад се ово смени у 1) имаћемо:

$$\frac{dv}{dt} = -g\,[sin\,\alpha + \varphi(v)] \cdot \cdot 2).$$

Пројектујмо силе на нормалу, па ћемо имати:

$$\frac{mv^2}{\varrho} = mg\cos\alpha \cdot \cdot 3).$$

Но како је:

$\varrho = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{v\,dt}{d\alpha}$, сменом овога у 3) имаћемо:

$$-v\frac{d\alpha}{dt} = g\cos\alpha \cdot \cdot 4).$$

$\left(\varrho = -\frac{ds}{d\alpha}\right.$, знак је — узет што кад s расте α опада$\left.\right)$.

Из 2) и 4) можемо наћи t и v као функције од α. Елиминисањем dt из 3) и 4) имаћемо:

$$\frac{dv}{vd\alpha} = tq\,\alpha + \frac{\varphi(v)}{\cos\alpha} \cdot \cdot 5).$$

Из 5) налазимо:

$$v = \psi(\alpha).$$

Кад се v смени у 4) имаћемо:

$$t = -{}^1/_g \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\varphi(\alpha)}{\cos\alpha}\, d\alpha \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Из једначина:

$dx = v \cos \alpha \, dt$, $dy = v \sin \alpha \, dt$ налазимо:

$$x = -{}^1/_g \int_{\alpha_0}^{\alpha} [\psi(\alpha)]^2 \, d\alpha \cdot \cdot \text{ II)}$$

$$y = -{}^1/_g \int_{\alpha_0}^{\alpha} [\psi(\alpha)]^2 \, tq \, \alpha \, d\alpha \cdot \cdot \text{ III)}.$$

Једначина је трајекторије из:

$$\varrho = \frac{v^2}{g \cos \alpha} = \frac{[\psi(\alpha)]^2}{g \cos \alpha} \cdot \cdot \text{ IV)}.$$

Нека је отпор облика:

$$\varphi(v) = a + bv^n \text{ (Legendre)}$$

a, b, n су константе све позитивне; $a < 1$. Кад се ово смени у једначини 5) имаћемо:

$$\frac{dv}{v d\alpha} = tq \, \alpha + \frac{a + bv^n}{\cos \alpha} \text{ или}$$

$$1/v^n = pq$$

$$p \frac{dq}{d\alpha} + q \frac{dp}{d\alpha} + npq\left(tq \, \alpha + \frac{a}{\cos \alpha}\right) + \frac{nb}{\cos \alpha} = o.$$

Узмимо нека је q такво да је:

$$\frac{dq}{q} = -n \, tq \, \alpha \, d\alpha - na \frac{d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Одакле је партикуларни интеграл:

$$q = \cos^n \alpha \, tq \, ({}^\alpha/_2 + {}^\pi/_4)^{-na}.$$

За p имамо једначину:

$$\frac{dp}{d\alpha} = -\frac{nb}{q \cos \alpha}$$

ако је q_0 вредност q за $\alpha = \alpha_0$ имаћемо:

$$p = \frac{1}{qv^n} = C - nb \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{q \cos \alpha}$$

Кад се нађе сад p, онда се зна v изражено помоћу α и лако је онда наћи координате x, y и време t помоћу параметра α из једначина:

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v \, d\alpha}{\cos \alpha}, \quad x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \, d\alpha, \quad y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha^0}^{\alpha} v^2 \, tq \alpha d\alpha.$$

Ово су полазне једначине у балистици.

ГЛАВА X.

Централне силе, елиптичко кретање планета.

I. Централне силе.

§ 124. — Сила се једна зове централном, кад стално пролази кроз једну тачку; ова се тачка зове центар силе. Ако се центар узме за почетак координатног система, сила обележи са $+$ или $-F$, онда нам $+F$ значи репулсивну, а $-F$ атрактивну силу. Казали смо да је трајекторија тачке у овом случају у равни, одређеној правцем силе F и почетне брзине.

Ако се раван трајекторије узме за xy раван, пројекције су силе F на осама $\frac{Fx}{r}$, $\frac{Fy}{r}$. За решење проблема можемо поћи од једначина:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\pm F\frac{x}{r},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\pm F\frac{y}{r}$$

или од једначина датих принципом површина и теоремом живе силе, до којих се лако из горњих долази.

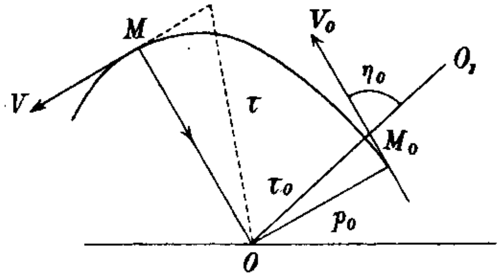
Интеграл површина је:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C \cdot \cdot 1).$$

или у поларном координатном систему:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Константа C је моменат почетне брзине односно $Oz^{\text{ске}}$ осовине. Ако је v_0 почетна брзина, p_0 одстојање њено од почетка, $C=p_0 v_0$. Пред C ваља узети знак $+$ или $-$ према томе да ли је кретање у правцу позитивном или негативном. Ако су координате тачке M_0 r_0 и θ_0, и η_0 угао O_1 M_0 v_0, из слике је



Сл. 91.

$$p_0=r_0\,\sin\eta_0$$

$$C=r_0 v_0\,\sin\eta_0 \cdot \cdot 2).$$

Теорема живе силе гласи:

$$\frac{dmv^2}{2}=F\,dr \cdot \cdot \mathrm{II}).$$

Једначине I и II одређују потпуно кретање. Овим једначинама ваља додати израз за брзину:

$$v^2=\frac{dr^2+r^2\,d\theta^2}{dt^2} \cdot \cdot 3).$$

Ако из I, II и 3 избацимо $d\theta$ или dt имаћемо:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{r^2} \cdot \cdot 4).$$

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d^1/r}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right] = F\,d\boldsymbol{r} \cdot 4').$$

Из последње се једначине налази r као функција θ, што даје трајекторију и то помоћу квадратуре, кад је F дато као функција одстојања r.

Из једначина 4 и II) имамо:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{C^2}{\boldsymbol{r}^2}\right)\right\}\right] = F\frac{dr}{dt}$$

или одавде је:

$$m\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - \frac{C^2}{\boldsymbol{r}^2}\right) = F \cdot \cdot 5).$$

Једначина 5) даје релативно кретање тачке по рејону вектору (потегу).

Из 4') и II) имамо једначину:

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{mC^2}{2}\left[d\left(\frac{^1/r}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\right\} = F\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}$$

Диференцијаљењем и заменом $\frac{d^1/r}{d\theta} = -{}^1/\boldsymbol{r}^2\,\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}$ имамо значајан израз:

$$F = -\frac{mC^2}{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{r} + d^2\,\frac{^1/r}{d\theta^2}\right) \cdot \cdot \text{III}).$$

познат под именом Binet-ове формуле.

§ 125. — Нека сила F зависи само од одстојања:

$$F = \varphi(r).$$

Из једначине II) имамо:

$$\frac{mv^2}{2} = \int \varphi(r)\,d\boldsymbol{r} + h = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\boldsymbol{r}^2}\right)$$

Одавде се налази израз облика:

$$dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\psi(\boldsymbol{r})}}$$

Једначина се трајекторије добија из израза:

$$d\theta = \frac{C}{r^2}\,dt = \pm\frac{Cdr}{r^2\sqrt{\psi(r)}}$$

Знак се пред кореном одређује почетним условима. $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ је брзина по потегу. Знак њен у почетку одређује знак пред кореном и он остаје док је $\psi(\boldsymbol{r}) \gtreqless o$, кад је $\psi(\boldsymbol{r}) = o$ онда ваља узети други знак. Ако је $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = o$, сила је $F_0 + \frac{\boldsymbol{m}C^2}{\boldsymbol{r}_0{}^3}$ и кретање је по потегу. Ако је ова привидна сила $+$ у почетку $\boldsymbol{r}$ расте и узима се знак $+$, ако је негативна $\boldsymbol{r}$ опада и ваља узети знак —. Ако је $F_0 + \frac{\boldsymbol{m}C^2}{\boldsymbol{r}_0{}^3} = o$ за посматрача, који се креће са потегом, тачка мирује. Трајекторија је круг полупречника $\boldsymbol{r}_0$ и кретање је једнако.

Да је кретање кружно услов је да је почетна брзина управна на потегу, $\eta_0 = \pm\,^{\pi}/_2$ или $C = \pm\,\boldsymbol{r}_0 v_0$ или $F_0 + \frac{mC^2}{\boldsymbol{r}_0{}^3} = o$ или $v_0 = \sqrt{\frac{-F_0\,\boldsymbol{r}_0}{m}}$. Да је v_0 стварно F_0 мора бити —, значи сила мора бити атрактивна.

Примери. Нека је сила сразмерна са одстојањем и нека је атрактивна:

$$F = -mk^2\,\boldsymbol{r}$$

Теорема живе силе даје онда:

$$v^2 = -k^2\,\boldsymbol{r}^2 + h.$$

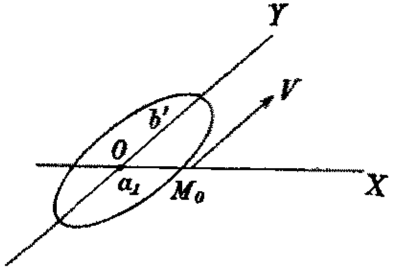
Овде се може трајекторија наћи и општим показаним методом а и на следећи начин.

Једначине су кретања у систему $X\,Y$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$$

Општи су интеграли ових линеарних једначина:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x'_0}{k} \sin kt, \quad y = y_0 \cos kt + \frac{y'_0}{k} \sin kt \cdot 1).$$



Сл. 92.

x_0, y_0, x'_0, z'_0 су координате полазне тачке и брзина у времену $t = 0$.

Ако се за осе координатне и то ox узме почетни реон вектор, за oy права паралелна са почетном брзином, имаћемо:

$x_0 = r_0,\ \ y'_0 = v_0,\ \ y_0 = x'_0 = o$ и једначине су 1).

$$x = r_0 \cos kt, \qquad y = \frac{v_0}{k} \sin kt \ \cdot \ \cdot 1').$$

Елиминисањем t налазимо трајекторију:

$$\frac{x^2}{r_0^{\ 2}} + \frac{y^2k^2}{v^2} = 1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot 2).$$

Једначина 2) је елипса.

Време обилажења по елипси се добија из 1') за $kt = 2\pi$, или $t = T = \frac{2\pi}{k}$.

Ако је сила репулсивна $F = mk^2r$, једначина се трајекторије добија заменом k са ik у 1') и координате су:

$$x = r_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}, \ \ y = \frac{v_0}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

Елиминацијом t имаћемо:

$$\frac{x^2}{r_0^{\ 2}} - \frac{k^2y^2}{v_0^{\ 2}} = 1$$

Ово је хипербола.

§ 126. — Ако је сила облика $r^{-2}\varphi(\theta)$, из обрасца Binet-овог имаћемо израз:

$$\frac{d^{2}\,{}^1/r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\varphi(\theta)}{mC^2} \ \cdot \ \cdot \text{(Jacobi)}.$$

Општи је интеграл облика:

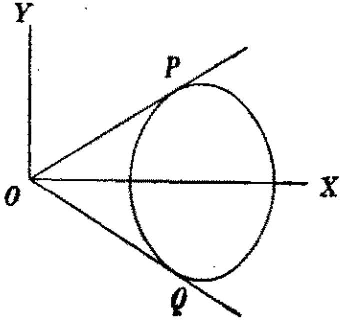
$$\frac{1}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta + \psi(\theta).$$

Пример: Нека је $F = -m\mu r^{-2} (\cos 2\theta)^{-3}/_2$, μ је константа релиа + или —, интеграл је:

$$\frac{1}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta - \frac{\mu}{C^2} \sqrt{\cos 2\theta} \ \cdot \quad 2).$$

или у Картезијевим координатама:

$$(1 - Ax - By)^2 = \frac{\mu^2}{C^2}(x^2 - y^2)$$



Сл. 93.

а ово је једначина коника тангентног на двема правима OP и OQ чије су једначине $x^2 - y^2 = o$.

Време се одређује из једначине:

$$dt = r^2 \frac{d\theta}{C}$$

Кад се r смени из 2).

На квадратуре се своди и случај кад је F облика:

$$F = r^{-2}\varphi(\theta) + kr^{-3}$$

§ 127. — *Инверзни проблем.* Кад је позната трајекторија наћи силу.

Ако је проблем: наћи силу кад тачка описује путању по закону о површинама, онда се зна да је сила централна. Теорема о површинама даје интеграл:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

или

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = o$$

што доказује, да акцеларација, па и сила пролази кроз једну тачку.

Сила је дата изразом

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^{21}/r}{d\theta^2}\right)$$

Из једначине трајекторије налазимо:

$$\frac{1}{r} = \varphi(\theta) \text{ и онда је:}$$

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\Big[\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)\Big] \cdot \ \cdot 1).$$

Ако није дат никакав облик силе, из 1) је F неодређено. Обично се тражи F само као функција r и то се лако налази из 1) и једначине путање.

Пример. Нека је путања облика:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \cdot \ \cdot 2).$$

p је параметар, e екцентричност.

Из 2) се добија:

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2(^1/r)}{d\theta^2} = {}^1/_p \text{ и } F = -\frac{mC^2}{pr^2}$$

Значи да је сила F атракција, обрнуто сразмерна са квадратом одстојања.

Ако је путања хипербола:

$$\frac{1}{r} = \frac{e\cos\theta - 1}{p}$$

$$F = \frac{mC^2}{pr^2}$$

сила је репулсивна по истоме закону као и за елипсу.

Ако је трајекторија облика:

$$r^k = a\cos k\theta + b.$$

сила се налази да је:

$$F = -mC^2\left[\frac{(k+1)\ (a^2 - b^2)}{r^{2\,k+3}} + \cdot\frac{(k+r)\,b}{r^{k+3}}\right]$$

Appell 203. t. I.

За $k = -1$ имамо коник, $k = -2$ коник, првога је пол у жижи, другога у центру; за $k = 1$ лимасон Паскалоз, $k = r$, $b = o$ лемнискату и т. д.

II. Кретање планета.

§ 128. — Планете сматрамо овде сведене на своја тежишта и кретање је њихово онда кретање материјалних тачака.

Закони су планетарних кретања нађени Кеплером из посматрања Тихо де Брахеа. Овде имамо три закона:

I). Планете описују око сунца равне криве линије по закону о површинама.

II). Ове су путање елипсе у чијој се жижи налази сунце.

III). Квадрати времена обилажења сразмерни су са кубом великих оса орбита.

Из ова три Кеплерова закона Њутн је открио гравитацију као узрок планетарном кретању.

Први закон доводи до тога да су силе централне, други да је сила облика:

$$F = -\frac{mC^2}{pr^2} \cdot \quad \cdot 1).$$

где је C константа површина, r одстојање планете од сунца и p параметар коничног влака. Ако се стави

$$\mu = \frac{C^2}{p} \quad \text{из 1) имамо:}$$

$$F = -\frac{m\mu}{r^2} \cdot \quad \cdot 2).$$

Трећи закон казује да је μ независно од посматране планете. C је равно двострукој површини, коју рејон вектор описује, подељеној са временом T обилажења. Ако су a и b осовине трајекторије

$$C = \frac{2\pi ab}{T}$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Како је $\frac{a^3}{T^2}$ константно по трећем закону Кеплеровом, то је μ независно од посматране планете.

Према овоме из 2) Њутнов закон гравитације гласи: сунце привлачи сваку планету силом који је обрнуто сразмерна са квадратом одстојања.

§ 129. — *Наћи* кретање једне материјалне тачке привлачене из сталнога центра силом обрнуто сразмерном са квадратом одстојања.

Сила је $F = -\frac{m\mu}{r^2}$

Једначина живе силе даје:

$$\frac{dv^2}{2} = -\frac{\mu}{r^2}\,dr, \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h$$

По теореми о централним силама имамо:

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d^1/r}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

или

$$\left(d\,\frac{^1/r}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{C^2}\left(\frac{2\mu}{r} + h\right)$$

Ово је једначина трајекторије и она се може написати овако:

$$\left(\frac{d^1/r}{d\theta}\right)^2 = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}$$

Ставимо:

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \varrho\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$$

па ћемо имати:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 = 1 - \varrho^2 \text{ или } d\theta = \pm\frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}}$$

или

$$\theta - \alpha = \mp \ arc\cos\varrho \text{ или } \varrho = \cos(\theta - \alpha).$$

Одавде је трајекторија:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cos(\theta - \alpha) \cdot \ \cdot 1).$$

Пред кореном се увек може узети знак $+$, ако то нијеваља у углу $\theta - \alpha$, α повећати са π.

Последња једначина представља коник чији је пол у жижи. Зна се да је једначина таквог коничног влака облика:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta - \alpha) \cdot \ \cdot 2).$$

где је p параметар а e екцентричност. Упоређивањем две једначине под 1 и 2 налазимо односе:

$$p = \frac{C^2}{\mu} \text{ и}$$

$$e = p\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}$$

Како екцентричност одређује облик влака, то из последње једначине видимо да вредност и знак e зависе поглавито од константе живе силе h.

Ако је $h < o$, $e < 1$ и трајекторија је елипса; ако је $h = o$, $e = 1$, трајекторија је парабола; за $h > o$, трајекторија је хипербола.

$$h = v_0{}^2 - \frac{r\mu}{r_0} \cdot \ \cdot 3).$$

h зависи од бројне вредности почетне брзине а не од њенога правца.

Ако је сила репулсивна, ваља само узети да је μ негативно. Из 3) је онда h увек позитивно и према нађеноме је трајекторија хипербола.

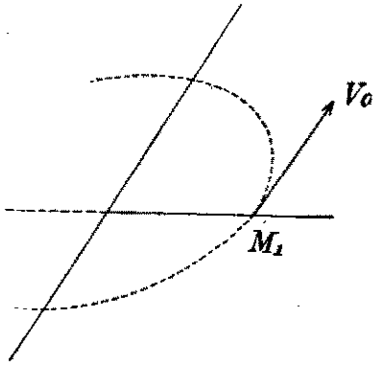
Ако имамо елипсу $h < o$ и елементи се путање лако дају изразити почетном брзином и потегом.

$$p = \frac{C^2}{\mu} \qquad e = \sqrt{1 + h\frac{C^2}{\mu^2}}$$

$$h = \frac{\mu^2}{C^2}(e^2 - 1) = \frac{\mu}{p}(e - 1);$$

или помоћу осовина елипсе.

$$h = \frac{a\mu}{b^2}\left(\frac{C^2}{a^2} - 1\right) = -\frac{\mu}{a}$$



Сл. 94.

Последња једиачина казује: да велика осовина елипсе зависи само од h. Мала је оса дата изразом:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}$$

Кад се зна велика и мала осовина, положај почетни M_0 и почетна брзина v_0, лако се конструјише трајекторија. Ваља узети симетричку тачку жижи односно тангенте Mv_0, споји се PM_0 и на тој прави пренесе дужина $PM_0O' = 2a$; тачна O' је друга жижа елипсе.

§ 130. — *Комете* описују елипсе издужене у чијој је жижи сунце, а могу се кретати по луцима парабола или хипербола. Ако је маса једне комете m и она описује лук параболе, привлачна сила је сунчева $\boldsymbol{F}$

$$F = -\frac{mC^2}{p}\,\frac{1}{r^2}$$

где је p параметар параболе.

Друге комете, чија је маса m', привлачна је сила

$$F_1 = -m_1\,\frac{C'^2}{p_1}\,\frac{1}{r_1^{\,2}}$$

Посматрања казују да су односи $\frac{C^2}{p}$ и $\frac{C'^2}{p'}$ једнаки, као и код планета и њихова је вредност $\frac{4\pi^2\,a^3}{T^2}$, и онда је вредност привлачне силе

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m\mu}{r^2}, \qquad \mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2\,a^3}{T^2}$$

§ 131. — *Сателити* се окрећу око планета по Кеплеровим законима. Ако је a_1 половина велике осовине орбите сателита, T_1 време оптицаја (месеца), атракција је F месеца од земље

$$F = -\frac{4\pi^2\,a_1^{\,3}}{T_1^{\,2}}\,\frac{m_1}{r^2}$$

Како је путања месечева готово круг то је $r = a_1$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{4\pi^2\,a_1}{T_1^{\,2}}\,m_1 \;\cdot\;\cdot\; 1).$$

Маса m_1 на површини земљиној привличи се силом $\boldsymbol{F'}$, која је равна тежини те масе. Ако је убрзање од теже на земљи g, и ϱ полупречник земљин, онда је (види § 132.):

$$\boldsymbol{F'} = -m_1 g.$$

Ове две силе $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F'}$ се морају имати обрнуто сразмерно са квадратима одстојања:

$$\frac{\boldsymbol{F'}}{F} = \frac{a_1^{\,2}}{\varrho^2} = 60^2 \;\cdot\;\cdot\; 2)\;\; a_1 = 60\,\varrho$$

Из 1) и 2) се налази да је:

$$g = \frac{4\pi^2\varrho}{T_1^{\,2}}\,60^2 = 9^{\text{m}},7$$

$$T_1 = 27^{\text{j}}, 7^{\text{h}}, 43^{\text{m}} = 39343,60''$$

$$2\pi\varrho = 40.000.000^{\text{m}}.$$

§ 132. — *Атракција универзална.* Привлачење је узајамно између свију небеских тела. Земља привлачи тачке на својој површини као и месец и јачина је ове атракције у одстојању r на масу m', $\frac{m'\mu'}{r^2}$. Ако је m' маса сунца, земља привлачи сунце силом $\frac{m'\mu'}{r^2}$. Тако исто сунце привлачи земљу чија је маса m силом $\frac{m\mu}{r^2}$. Ове су две атракције исте по принципу акције и реакције, и отуда је:

$$m\mu = m'\mu' \text{ или } \frac{\mu}{m'} = \frac{\mu'}{m} = f.$$

Кад се ово стави у израз за узајамну атракцију сунца и земље онда је то привлачење изражено изразом:

$$f\,\frac{m.m'}{r^2}$$

У овој последњој формули је изражен Њутнов закон гравитације: да се две тачке привлаче узајамно силом, која је сразмерна масама m и m' тих тела и обрнуто сразмерна са квадратом одстојања. Коефицијенат f је атракција јединица масе у одстојању један.

Ако су јединице литар, грам и секунда (Кавендиш, Корну), онда је:

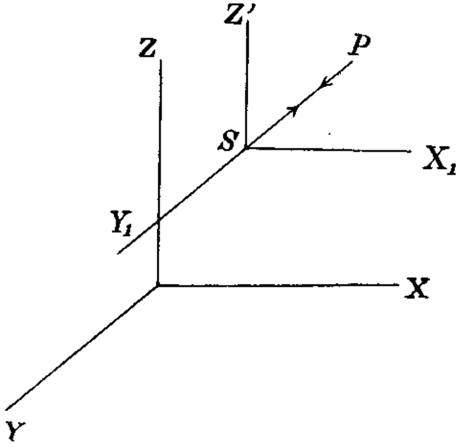
$$f = 0.0^{14}676\,g^2.$$

III. Основи механике небеске.

§ 133. — *Проблем n тела.* Задатак је механике небеске: да полазећи од Њутнове гравитације објасни кретање небеских тела ма колики њихов број био. Тај се задатак своди: на налажење кретања тежишта небеских тела; и обртање тела око својих тежишта.

Ако имамо n тела, па свако од тих тела сведемо на своје тежиште, онда ваља наћи кретање n тежишта. За свако тело имаћемо три једначине, свега 3 n. Ове једначине, чије интегрисање чини проблем n тела, имају седам првих интеграла. Помоћу ових само интеграла немогуће је дефинитивно решити овај проблем. Приближно је решење могуће с тога, што су масе тела у односу сунчеве масе мале количине, да се виши степени тих односа могу занемарити.

а) *Проблем два тела.* Ако имамо само два тела: сунце и једну планету, па се тражи кретање планете услед гравитације, овај је проблем са свим могућ. Кад се нађу интеграли у овом проблему онда се лако из њих долази до решења, водећи рачуна о утицају других небеских тела.



Сл. 95.

Нека је M маса сунца S, m маса планете P, $\alpha\beta\gamma$ и $x\,y\,z$ нека су њихове координате у односу сталног система $Oxyz$. Узајамна је атракција сунца и планете, ако је $SP = r$

$$f\,\frac{Mm}{r^2}$$

Пројекције су силе PS, која дејствује на сунце:

$$f\,\frac{Mm}{r^2}\;\frac{x-\alpha}{r},\quad f\,\frac{Mm}{r^2}\;\frac{y-\beta}{r},\quad f\,\frac{Mm}{r^2}\;\frac{z-\gamma}{r}$$

Пројекције су привлачења сунца на планету силе SP исте, само супротног знака од последњих.

Једначине су кретања за сунце:

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= f\,Mm\,\frac{x-\alpha}{r^3} \\ M\frac{d^2\beta}{dt^2} &= f\,Mm\,\frac{y-\beta}{r^3}\;.\;\;\text{I)} \\ M\frac{d^2\gamma}{dt^2} &= f\,Mm\,\frac{z-\gamma}{r^3} \end{aligned}$$

за планету:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\,Mm\,\frac{\alpha - x}{r^3}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f\,Mm\,\frac{\beta - y}{r^3}\quad .\ .\ \text{II)}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} - f\,Mm\,\frac{\gamma - z}{r^3}$$

Из ових се једначина лако налазе вредности за α, β, γ, $x\,y\,z$ као функције времена у вези са једначином $r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$.

Сабирањем једначина под I) и II) добијамо:

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m\frac{d^2x}{dt^2} = o$$

Ако овде означимо са $\xi\,\eta\,\zeta$ вредности $\frac{M\alpha + mx}{M+m}$, што су ноординате тежишта сунца и планете, добијамо:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = o,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = o,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = o.$$

Ове једначине казују: да се тежиште креће једнако по правој линији.

Релативно се кретање планете око сунца лако налази на овај начин. Ако кроз S повучемо координатни систем паралелан са старим и са $x_1\,y_1\,z_1$ обележимо координате P у новом систему, онда су

$$x_1 = x - \alpha,\quad y_1 = y - \beta,\quad z_1 = z - \gamma.$$

Одузимањем једначине I) и II) и заменом $x - \alpha$ имаћемо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -f\frac{(M+m)}{r^2}\,\frac{x_1}{r}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -f\frac{(M+m)}{r^2}\,\frac{y_1}{r}\quad .\ .\ \text{III)}$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -f\frac{(M+m)}{r^2}\,\frac{z_1}{r}$$

Ово су једначине за релативно кретање. Оне казују: да се тачка P креће око S, као да је S стално и да му је маса $M + m$ у место M и да привлачи тачку P чија је маса m силом $f\frac{(M+m)}{r^2}\,m$.

Из овога је јасно, да се примењује први закон Кеплеров на ово кретање, трајекторија је коничан влак. Ако се са a означи половина велике осовине орбите знамо да је:

$$\mu = f\,(M+m) = \frac{4\pi a^3}{T^2}\quad .\ .\ 1).$$

Из овога се види да $\frac{a^3}{T^2}$ није независно од m као што тражи трећи Кеплеров закон.

Из 1), пошто је f познато можемо наћи $M + m$.

За другу планету је:

$$f\,(M + m_1) = \frac{4\pi a_1^{\,3}}{T_1^{\,2}}\quad .\ .\ 2).$$

Из 1) и 2) је:

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a_1^{\,3}}{T_1^{\,2}} = \frac{1 + \frac{m}{M}}{1 + \frac{m_1}{M}}\quad .\ .\ 3).$$

Како су $\frac{m}{M}$ и $\frac{m_1}{M}$ врло мале количине, то се једначина 3) поклапа са трећим Кеплеровим законом.

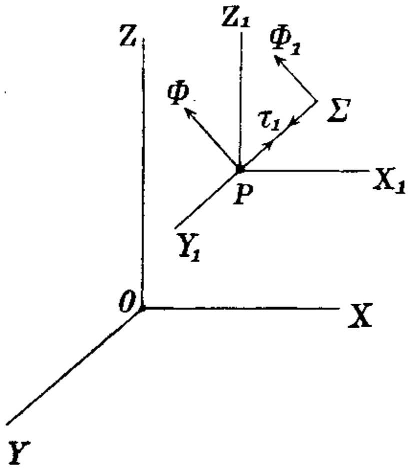
§ 134. — *Одредба* масе планете, која има бар једнога сателита.

Из једначине:

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

лако се може наћи маса планете, кад она има бар једнога сателита (Њутн).

Ако су m и m' масе планете P и сателита Σ; Φ и Φ_1 су паралелни правци и представљају атракцију сунца на планету и сателит, и ако са X, Y, Z означимо компоненте те атракције, онда су једначине кретања P и Σ ове:



Сл. 96.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m X + f\frac{mm'}{r_1^{\;2}}\,\frac{x'-x}{r_1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m Y + f\frac{mm_1}{r_1^{\;2}}\,\frac{y'-y}{r_1}$$

$$m'\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = m' X + f\frac{mm'}{r_1^{\;2}}\,\frac{x'-x}{r_1}$$

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = m' Y + f\frac{mm'}{r_1^{\;2}}\,\frac{y'-y}{r_1}$$

$x\,y\,z$ су координате P, а $x_1\,y_1\,z_1$ координате Σ у систему $0\,X\,Y\,Z$.

Ако однесемо сад кретање на систем $P\,x_1\,y_1\,z_1$ и координате Σ обележимо са $x'_1\,y'_1\,z'_1$, $x'_1 = x' - x\cdot\cdot$, одузимањем горњих једначина добијамо:

$$\frac{d^2x_1{}'}{dt^2} = -f(m+m')\frac{x'_1}{r_1^{\;3}}$$

$$\frac{d^2y_1{}'}{dt^2} = -f(m+m')\frac{y'_1}{r_1^{\;3}}\cdot\;\cdot 1).$$

$$\frac{d^2z_1{}'}{dt^2} = -f(m+m')\frac{z'_1}{r_1^{\;3}}$$

где су силе Φ и Φ' ишчезле.

Из 1) се види: да сателит описује елипсу, око планете, као што смо раније видели за планету око сунца. Ако обележимо са a' и T' полу велику осовину сателитове путање и време трајања обртања, то је:

$$f(m+m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}\cdot\;\cdot 2).$$

За планету је:

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\cdot\;\cdot 3).$$

Из 2) и 3) је:

$$\frac{m}{M}\,\frac{1+\frac{m'}{m}}{1+\frac{m}{M}} = \frac{a'^3}{T'^2} : \frac{a^3}{T^2}$$

Ако је сателит мали према планети, то је:

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3}{T'^2} : \frac{a^3}{T^2}$$

Из последње се једначине налази однос масе планете према маси сунца.

Ако m' није мало према m, онда се ради другојачије:

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \text{ вреди увек.} \quad \cdot \cdot \cdot 4).$$

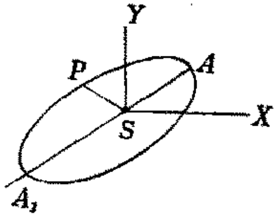
Ако се на површини земљиној узме маса $= 1$, може се лако наћи атракција A земље на ову тачку. Ова је атракција једнака са атракцијом масе m стављене у центру земљином.

$$A = \frac{f \cdot m}{\varrho^2} \cdot \cdot 5). \quad \varrho \text{ полупречник земљин.}$$

Избацивањем f из 4) и 5) имамо:

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 A \varrho^2} - 1 \cdot \cdot 6).$$

Из 5) пошто је f познато налазимо m масу земље.



Сл. 97.

§ 135. — *Налажење времена у елиптичкоме кретању.* Нека се узме да сунце мирује и да се око њега креће по елипси планета услед силе:

$$F = -f\frac{(M+m)}{r^2} m = -\frac{\mu m}{r^2}, \quad \mu = f(M+m)$$

Ако са p обележимо параметар те елипсе, у чијој је жижи сунце S; а полу велика осовина, e ексцентричност, онда имамо за C и h константу површина и живе силе:

$$C^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}$$

Тачка A најближа сунцу зове се perихелија, A' афелија. Неки је угао $ASx = \omega$, $ASP = w$, $r = SP$. W се зове права аномалија. Угао $XSP = \theta$ и W су везани односом:

$$\theta = W + \omega.$$

Нашли смо:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2},$$

Ако се ова једначина реши по $\frac{dr}{dt}$ и C^2 замени горњим вредностима, имаћемо:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}} \cdot \cdot 1).$$

Ако са τ обележимо време пролаза кроз A, r почиње расти од A, $\frac{dr}{dt}$ је позитивно и ваља узети знак $+$. Овај знак ваља задржати све док r не достигне вредност, растући од $r = a - c = a(1 - e)$ minim. максималну $r = a(1 + e)$.

Ако се у 1) стави $a - r = ae \cos u$ имаћемо:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, dt = a(1 - e \cos u)\, du$$

Ово се лако интегрише и имамо:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}(t - \tau) = u - e \sin u \cdot \cdot 2).$$

t је овде изражено са u, а $r = a(1 - e \cos u) \cdot \cdot 3)$.

Ако се тражи положај планете у времену t, једначина 2) даје u, а трећа даје r.

Угао се u зове аномалија ексцентрична.

Ако у 3) ставимо $n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ онда се $n(t-\tau)$ зове средња аномалија.

Како знамо вредност $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, то је $n = \frac{2\pi}{T}$ и једначина 2) је:

$$n(t-\tau) = u - e \sin u \cdot \cdot 4)$$

$$n = \frac{2\pi}{T} \text{ зове се средње кретање.}$$

Једначина се 4) зове Кеплеровом једначином.

Да би изразили w помоћу u пођимо од односа:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w} = a(1 - e\cos u).$$

Из ове једначине налазимо однос:

$$1 - \cos w = 2\sin^2 {}^w/_2 = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1 - e\, eos\, u} = \frac{2a(1+e)\sin^2 {}^u/_2}{r}$$

$$1 + \cos w = 2\cos^2 {}^w/_2 = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1 - e\cos u} = \frac{2a(1-e)\cos^2 {}^u/_2}{r}$$

или

$$\sqrt{r}\sin {}^w/_2 = \sqrt{a(1+e)}\sin {}^u/_2 \text{ и } \sqrt{r}\cos {}^w/_2 = \sqrt{a(1-e)}\cos {}^u/_2$$

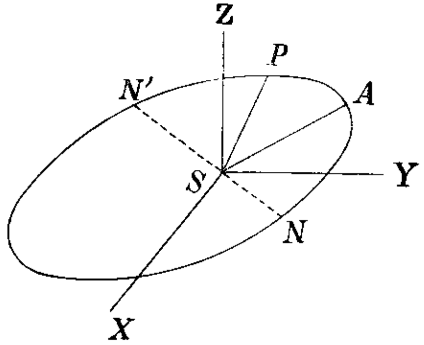
Ове формуле дају r и w помоћу u.

Из последњих једначина имамо:

$$tq\frac{w}{r} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tq\frac{u}{2}$$

однос између аномалије праве и ексцентричне.

§ 136. — *Елементи елиптичког кретања.* У простору је кретање елиптично одређено са шест параметара. Нека се кроз сунце S узме коор. систем $Sxyz$. За раван xy обично се узима раван еклиптике од године 1850. Sx је позитивно у правцу што иде ка равнодневици пролетњој, а Sy позитиван правац ка солстицији. Позитивно Sz иде ка северноме полу. Орбита планете P сече еклиптику по линији NN', што се зове линијом чворова. Чвор N се зове чвор пењања а N' спуштања.



Сл. 98.

За одредбу орбите дају се углови: $\theta = xSN$, позитиван од Sx ка Sy и овај се угао зове *лонгитуда чвора пењања*; φ нагиб орбите према еклиптици. Кад је орбита позната ваља одредити велику и малу осу, фиксирати у равни орбите елипсу. Нека је A перихелум $\omega = xSN + NSA$, (последњи се угао мери од SN у правцу кретања), ω зе зове лонгитуда перихелиума. Угао $NSA = \omega - \theta$ одређује елипсу, која је потпуно учвршћена са a и e. Уз ово ваља знати T или $n = \frac{2\pi}{T}$ у времену τ пролаза кроз перихелум, a и T нису независне количине оне су везане односом:

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

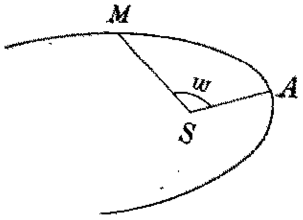
За кретање једне планете нужне су координате: θ, φ, ω, a, e, τ. У местто τ узима се $\omega - n\tau = \varepsilon$

и ε зове се лонгитуда средња у епохи нула. Координате су онда функције ових шест параметара.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\,(t, \theta, \varphi, \omega, a, e, \varepsilon) \\ y &= f_2\,(t, \theta, \varphi, \omega, a, e, \varepsilon) \\ z &= f_3\,(t, \theta, \varphi, \omega, a, e, \varepsilon) \end{aligned}\right\} \cdots 1).$$

§ 137. — *Метод варијације констаната.* Да је систем сунчев састављен само из сунца и једне планете, ових шест елемената остали би исти кроз сва времена. Но како има и других тела у систему, чији се утицај не може елиминисати, нађене координате елиптичког кретања се мењају, и ове се пертурбације, промене координата, налазе методом варијације констаната. У нађеним односима § 136, 1) за координате једне тачке путање елиптичке, параметре не треба узимати да су стални већ променљиви и функције времена. Промене $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\omega$, δa, δe и $\delta\varepsilon$ се називају пертурбацијама елемената и њихово налажење чини нарочити одељак механике небеске.

§ 138. — *Параболно кретање комета.* Нека извесна комета M описује параболу у чијој се жижи налази сунце S. Означимо са ω угао ASM, па ћемо имати за једначину параболе израз:



Сл. 99.

$$r = \frac{p}{1 + \cos\omega} = \frac{p}{2\cos^2 {}^{\omega}/_{2}}$$

Интеграл површински даје:

$$r^2\, d\omega = Cdt = \sqrt{f\,(M + m)\,p}\, dt$$

m је маса комете, M маса сунца.

Из проблема два тела излази: да је и овде случај централне силе, чије је седиште у сунцу и то атрактивне:

$$- f\,\frac{(M + m)}{r^2}\, m = - \frac{\mu m}{r^2}$$

Константа је $C = \sqrt{\mu p} = \sqrt{f\,(M + m)\,p}$, или

$$\frac{r\sqrt{f\,(M + m)}}{p^{3/2}} = \frac{d\omega}{2\cos^4 {}^{\omega}/_{2}} = (1 + tq^2\, {}^{\omega}/_{2})\, d\, tq\, {}^{\omega}/_{2}$$

Интегрисањем налазимо:

$$\frac{r\sqrt{f\,(M + m)}}{p^{3/2}}\,(t - \tau) = tq\, {}^{\omega}/_{2} + {}^{1}/_{3}\, tq^3\, {}^{\omega}/_{2} \qquad 1)$$

τ је време пролази кроз перихелиум.

Једначину 1) ваља решити да би нашли положај комете у времену t. Ова једначина има само један корен стваран. Ставимо у 1) $p = 2q$, у место $\sqrt{M + m}$ ставимо $\sqrt{M}$ па ћемо имати:

$$\frac{t - \tau}{q^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{fM}}\,(tq\, {}^{\omega}/_{2} + {}^{1}/_{3}\, tq^3\, {}^{\omega}/_{2})$$

Ако се M узме за јединицу, може се таблица корена ове једначине наћи за вредности првога члана.

За одредбу орбите параболне једне комете потребно је пет параметара независних: $\theta, \varphi, \omega, \tau$ и $q = {}^{p}/_{2}$ (одстојање перихелиума). (Tisserand).

ЛИТЕРАТУРА

Cournot — Journale de Crelle.
Coriolis — 1835.
Puiseux — Journal de Liouville t. XIII, XVII 1848. 1852.
Slesser — Quarterly Journal of Mathematics 1861.
Neumann — Mathematische Annalen t. XXVII 1886.
Lindelöf — Acta Societatis Fennicioe t. XXI 1894
Schouten — Verslagen der Koninklijke Akademie von Witenschappen te Amsterdam t. V 1889.
Painlevé — Leçons sur l'intégrations des équations de la Mécanique (Hermann — Paris).
Hadamard — Bulletin de M. Darboux 1895.
Henrici — Elementarmechanik des Punktes und Starren Systems.

Didion — Lois de la résistance de l'air sur les projectiles.
Morel — La balistique graphique et son application dans le calcul de Tables.
К. Стојановић — О условима интеграбилитета извесне балистичке једначине. (Глас Академије Наука).

Чувени су на динамици раденици: Képler, Newton, Jacobi, Cornu, Baille, Cavendish, Bertrand.

Newton — Principia mathematica philosophiae naturalis.
Galileo Galilei — Dialoghi quattro, sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernico — (Превод је немачки од E. Strauss-a. Dialog über Beiden hauptsächlichen Weltsysteme das Ptolomeische und Kopernikanische.
Gauss — Allgemeine Lehrsätre in Bezieurng auf die in verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkende Anziung und Abstossung (1840).
Korn — Eine Theorie der Gravitation.
Kobald — Der Ban der Fixsternsystems.
Neumann C. — Principien der Galilei — Newtonschen Theorie.
Halphen — Comptes rendus LXXXIV.
Koenigs — Courbes algébriques — Bulletin de la société mathématique (t. XVII).
Tisserand — Traité de Mécanique céléste.
Siacci — Forces centrales avec résistance de milieu — Comptes rendus (LXXXVIII).
К. Стојановић — О једној генерализацији Бертрановог проблема (Глас Академије Наука).

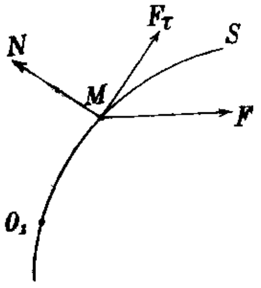
* * *

ГЛАВА XI.

Кретање тачке по кривој линији, сталној или покретној.

I. Кретање тачке по сталној кривој линији.

§ 139. — *Једначине кретања.* Ако је 0_1S крива линија по којој се креће тачка M, M притискује на криву и крива дејствује на тачку реакцијом. Тачка се може сматрати да је слободна, ако се сили F која дејствује дода нормална реакција MN.



Сл. 100.

Положај покретне тачке на кривој зависи само од једног параметра, довољно је знати одстојање тачке M од почетка o_1, $o_1M = s$, с тога је за одредбу кретања потребна само једна једначина, која се обично даје теоремом живе силе.

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz \cdot \cdot 1).$$

Рад силе N не улази, јер је ова сила нормална на путу тачке M.

Ако су координате тачке M изражене параметром q и дате једначинама:

$$x = \varphi(q),\ y = \psi(q),\ z = \omega(q) \cdot \cdot 2)$$

из 2) и 1) имамо преко

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\varphi'^2 + \psi'^2 + \omega'^2\right)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

$$X dx + Y dy + Z dz = (X\varphi' + Y\psi' + Z\omega')\, dq = Q\, dq$$

$$d\left[\frac{m}{2}(\varphi'^2 + \psi'^2 + \omega'^2)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right] = Q dq \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Ово је једначина другога реда по параметру q и одавде се налази q као функција времена.

Ако Q зависи само од q из I имамо:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\ 2}}{2} = \int_{q_0}^{q} Q\, dq \cdot \cdot 3).$$

Из 3) имамо, по замени v^2:

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{f(q)} \ \text{или}\ t - t_0 = \pm\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{f(q)}} \cdot \mathrm{II})$$

Ако постоји функција сила, и X, Y, Z су изводи те функције, први је интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} = U(xyz) + h$$

$$h = \frac{mv_0^{\ 2}}{2} - U(x_0\, y_0\, z_0).$$

§ 140. — *Стабилност равнотеже.* Узмимо да сила зависи само од координата тачке, односно од параметра, налажење положаја равнотежног је тражење вредности q за које је $Q = o$, а ово је идентично са налажењем максимума и минимума израза:

$$U(q) = \int Q\,dq$$

Ако је за $q = a$, U maxim., равнотежа је стабилна (Lejeune Dirichlet).

Нека је $a = o$, онда је:

$$U(q) = \int_o^q Q\,dq \text{ равно нули и maxim. за } q = o.$$

Ако је ε позитиван број и мањи од извесне границе сталне, $U(q)$ је негативно за свако q које није нула:

$$-\varepsilon \leqq q \leqq \varepsilon$$

Ако тело померимо из положаја $q = o$ у положај за q између $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ и дамо му брзину v_0, може се доказати да смо у стању наћи бројеве позитивне α и β такве да под условима:

$$v_0 < \alpha, \quad -\beta < q_0 < \beta$$

тачка покретна, у кретању произведеном, не излази из граничних положаја који одговарају вредностима $\pm\varepsilon$ параметра q и да ове границе тачка и не достиже. $U(\varepsilon)$ и $U(-\varepsilon)$ су негативне количине и може се наћи број p мањи и од $-U(\varepsilon)$ и $-U(-\varepsilon)$, тако да је сума $p + U(q)$ позитивна за $q = o$ и негативна за $q = \pm\varepsilon$. По теореми живе силе имамо:

$$\frac{mv^2}{2} = U(q) + \frac{m{v_0}^2}{2} - U(q_0).$$

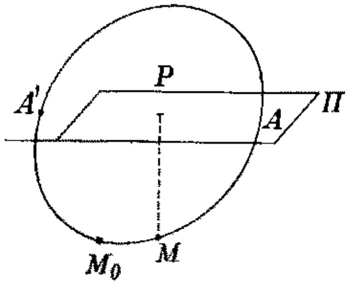
Одредимо v_0 и q_0 из услова:

$$\frac{m{v_0}^2}{2} < {}^{p}/_{2} \text{ и } -U(q_0) < {}^{p}/_{2}$$

Из прве имамо за v_0 границу горњу $\alpha = \sqrt{{}^{p}/_{m}}$, из друге, због континуирности $U(q)$, мора да је q_0 по апсолутној вредности мање од β, јер је $U(q) = o$ за $q = o$. Кад су ови услови задовољени онда је:

$$\frac{mv^2}{2} < U(q) + p.$$

Неједначина последња казује да q не може достићи вредност $\pm\varepsilon$, јер ако то наступи онда би $\frac{mv^2}{2}$ морало бити мање од $U(\pm\varepsilon) + p$, а ово је негативно, што је немогуће. Равнотежа је стабилна.



Сл. 101.

§ 141. — Кретање тешке тачке по сталној кривој. Овде су силе:

$$X = Y = o, \ Z = -mg.$$

Рад је теже $-mg\,dz$ и једначина живе силе је:

$$\frac{v^2}{2} = -gz + h, \ v^2 = 2g\,(a - z) \cdot 1), \ a = \frac{h}{g} = \frac{{v_0}^2}{2g} + z_0$$

$$h = \frac{{v_0}^2}{2} + gz_0$$

Ако посматрамо раван $z = a$, раван π, онда је жива сила дата изразом:

$$v^2 = 2gPM.$$

Нека је крива линија по којој се тачка M креће затворена. Могу бити ови случајеви: раван π

сече криву линију не сече или додирује. Положај равни π зависи од a, односно од почетне брзине v_0. Нека је v_0 тако велико да је π изнад криве *AM*, брзина неће никад бити нула и кретање је периодичко.

Ако π сече криву у тачкама A и A' и нека тачка пођe из M_0 ка A, у A је брзина нула.

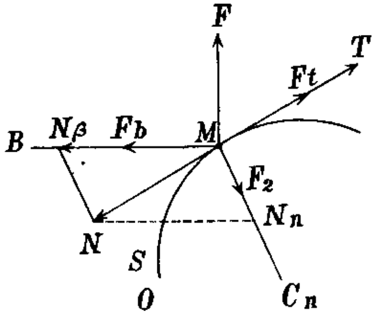
Због $\frac{ds}{dt} = v$ из 1) је:

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{ds}{\pm\sqrt{a - z}};$$

s је лук и расте са t, ваља узети знак $+$. Ако тангента у A није хоризонтална, тачка ће доћи у A за време:

$$\sqrt{2g}\ T = \int_{z=z_0}^{z=a} \frac{dz}{\sqrt{a - z}},$$

за тим ће се вратити у M_0 где је брзина v_0 и отићиће из M_0 у A' за време T_1. Кретање је осцилирање од A до A' за време $T + T_1$.



Сл. 102.

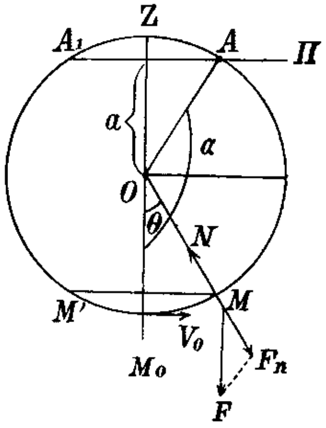
§ 142. — *Карактеристичне једначине.* Ако кроз тачку M повучемо тангенту *MT*, главну нормалу *MC* и бинормалу *MB*, и силу F као и отпор *MN* разложимо на по три компоненте у правцу горњих линија, онда су једначине кретања:

$$F_t = m\frac{dv}{dt}, \quad F_n + N_n = \frac{mv^2}{\rho}, \quad F_b + N_b = o.$$

ρ је полупречник кривине линије *0M*.

Прва од ових једначина даје кретање, друге две нормалну реакцију N.

§ 143. — *Просто клатно* се састоји у кретању тешке тачке по кругу у равни вертикалној.



Сл. 103.

Нека је тачка M пошла из M_0 брзином v_0, теорема живе силе даје:

$$v^2 = 2g(a - z) \cdot 1) \quad a = -l + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$l = M_0 0 = -z.$$

1). Нека права $z = a$ сече круг у A и A', т. ј. $a < l$ и $v_0 < 2\sqrt{lg}$. Ставимо:

$z = -l\cos\theta$ и $a = -l\cos\alpha$.

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{l\,d\theta}{dt}$. Кад се ово стави у 1) имаћемо:

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2 {}^{\alpha}/_{2} - \sin^2 {}^{\theta}/_{2}\right)$$

или:

$$\sqrt{{}^{g}/_{l}}\ t = \int_0^{\theta} \frac{d\,{}^{\theta}/_{2}}{\sqrt{\sin^2 {}^{\alpha}/_{2} - \sin^2 {}^{\theta}/_{2}}} \cdot \cdot 2).$$

знак је плус јер се тачка пење, брзина расте са θ.

Кад се у 2) стави:

$\sin {}^{\theta}/_{2} = u \sin {}^{\alpha}/_{2}$ и $k^2 = \sin^2 {}^{\alpha}/_{2}$ имаћемо:

$$\sqrt{{}^{g}/_{l}}\ t = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

$$u = Sn\left(t\sqrt{{}^{g}/_{l}}\right) \cdot \cdot I).$$

или

$$sin\, {}^{\theta}/_{2} = sin\, {}^{a}{}_{1}{}_{2}\, Sn\, \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

и

$$cos\, {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{1 - k^2\, Sn^2\, t \sqrt{\frac{g}{l}}} = dn\, (t \sqrt{{}^{g}/_{l}})$$

Време T за пут од M_0 до A се налази из израза:

$$T = K \sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad K = \int_{o}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 3).$$

Време трајања је осцилације од A до A':

$$T = 2K \sqrt{{}^{l}/_{g}}$$

Ако се 3) развије, имаћемо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2} u^2} = 1 + {}^{1}/_{2}\, k^2 u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 u^4 + \cdot\ \cdot$$

и

$$\int_{o}^{1} \frac{u^{2n}\, du}{\sqrt{1-u^2}} = {}^{\pi}/_{2}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2n}$$

$$K = {}^{\pi}/_{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdot \cdot\right]$$

За врло мале осцилијације $\alpha = o$

$$T = {}^{\pi}/_{2} \sqrt{{}^{l}/_{g}}$$

За мање осцилијације се $k = sin\, {}^{a}/_{2}$ може сменити са ${}^{a}/_{2}$

и

$$T = {}^{\pi}/_{2} \sqrt{{}^{l}/_{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

2). Нека π не сече круг, $a > l$.

Једначина се живе силе може написати:

$$v^2 = 2g\, (a - z)$$

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\, (a + l \cos\theta) = 2g\, (a + l)\, (1 - k^2 \sin^2 {}^{\theta}/_{2})$$

$$k^2 = \frac{2l}{a + l}, \; k^2 < 1,$$

$$\lambda t = \int_{o}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2g\,(a+l)}}{l}, \; u = sin\, {}^{\theta}/_{2}.$$

$$u = Sn\, (\lambda t)$$

$$sin\, {}^{\theta}/_{2} = Sn\, (\lambda t)$$

$$cos\, {}^{\theta}/_{2} = Cn\, (\lambda t)$$

$$\lambda T = K = {}^{\pi}/_{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdot \cdot\right]$$

3). Нека π додирује круг $a = l$

$$\sqrt{{}^{g}/_{l}}\, dt = \frac{d\, {}^{\theta}/_{2}}{cos\, {}^{\theta}/_{2}}$$

$$\sqrt{{}^{g}/_{l}}\, t = log\, tq\, ({}^{\theta}/_{4} + {}^{\pi}/_{4})$$

За $l = \infty$, θ тежи граници π, тачка не може никако стићи у додирну тачку круга и праве π.

4). Реакција се налази из једначине:

$$F_n + N = \frac{mv^2}{\varrho}, \text{ или из}$$

$$F_n = - m \cdot g \cos\theta = \frac{m\, g\, z}{l}$$

Како је $\varrho = l$ и

$$v^2 = 2g\,(a - z)$$

то је:

$$N = \frac{mg}{l}(2a - 3z) \cdot \quad \cdot \text{II}).$$

§ 174. — Кретање клатна водећи рачуна о сили од отпора ваздуха. Овде поред теже, отпора N круга, ваља узети и отпор ваздуха R, и једначина је кретања сад:

$$ml\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\,g\sin\theta - R \cdot \quad \cdot 1).$$

1). Нека је прво: $\dfrac{R}{ml} = 2k\,\dfrac{d\theta}{dt}$.

Из 1) је онда:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\,\theta = o$$

$$\theta = e^{-kt}\,(A\cos\mu t + B\sin\mu t)$$

$$\mu^2 = {}^g/_l - k^2.$$

Ако је почетна брзина нула, а почетни угао θ_0, то је $A = \theta_0$ и $B = \dfrac{k\theta_0}{\mu}$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\,\theta_0\,\frac{(k^2 + \mu^2)}{\mu}\,e^{\quad kt}\sin\mu t \cdot \cdot$$

$$\theta = e^{-kt}\left[\theta_0\cos\mu t + \frac{k\theta_0}{\mu}\sin\mu t\right]$$

2). Нека је отпор сразмеран са квадратом брзине. Једначина је кретања:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,{}^g/_l\sin\theta - k^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot \quad \cdot 2).$$

Нека је нова променљива $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Из 2) је:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\,(\theta'^2)}{d\theta} + k^2\,\theta'^2 = -\,{}^g/_l\sin\theta \cdot \quad \cdot 3).$$

Интеграл је:

$$\theta'^2 = A\,e^{-2k^2\theta} + \frac{2g}{l(4k^2 + 1)}\cos\theta - \frac{4k^2\,g}{l(4k^2 + 1)}\sin\theta.$$

§ 145. — *Таутохроне криве.* Овако се зову оне криве линије на којима се може наћи тачка O_1, да покретна тачка остављена сама себи без почетне брзине, долази увек у O_1 за исто време па ма где био почетак кретања. Тачка се O_1 зове тачком таутохронизма.

1). Нека силе зависе само од положаја.

Једначина је кретања:

$$F_t = m\,\frac{d^2s}{dt^2} = X\,\frac{dx}{ds} + Y\,\frac{dy}{ds} + Z\,\frac{dz}{ds}$$

x, y, z, X, Y, Z су функције од s.

По Puiseux-у је услов таутохронизма да је $F_t = -\,k^2 s$.

Поред овога услова да е се још један. На пр. да је крива линија на површини:

$$f\,(x\,y\,z) = o$$

где је израз:

$$1).\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \text{ очевидан.}$$

Из ове две и треће 2):

$$2).\quad X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\,\frac{dz}{ds} = -\,k^2 s$$

налазимо x, y, z као функције s.

Ако су силе изводи какве функције, последња једначина даје:

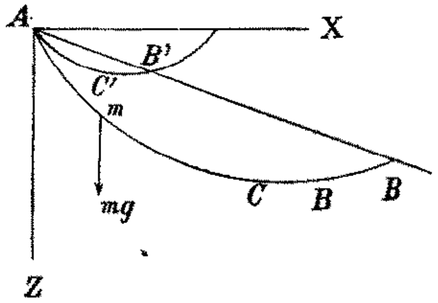
$$U(x\,y\,z) = -\frac{k^2 s^2}{2} + C.$$

Може се последњи услов, да је крива на површини, заменити условом да је крива таутохрона за други закон сила: $X_1\ Y_1\ Z_1$. Нов је услов:

$$X_1 \frac{dx}{ds} + Y_1 \frac{dy}{ds} + Z_1 \frac{dz}{da} = -k_1{}^2 s \cdot 3).$$

На овај начин линија је таутохрона за силу $\lambda X + \mu X_1$ etc. и из 1), 2) и 3) налазимо x, y и z као функције s.

§ 146. — *Брахистохрона* за тежу. Ако су дате две тачке A и B, наћи криву линију кроз A и B, да тачка тешка склизи из A у B за најкраће време, јесте питање тражења курбе зване брахистохроном. У A је брзина нула.



Сл. 104,

Нека је почетак координатног система у A. Једначина је живе-силе:

$$v^2 = 2gz$$

$$\sqrt{2g}t = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{z}}$$

Ваља наћи минимум за курбу C интеграла $\int_A^B \frac{ds}{\sqrt{z}} = \int_A^B \varphi(xyz)\,ds.$

Нашли смо да је курба, што један интеграл чини минимумом, фигура равнотежна конца под утицајем силе, која је извод функције $-\varphi(xyz)$. Танзија је $\varphi(xyz)$.

У нашем задатку је $\varphi = \frac{1}{\sqrt{z}}$, сила је што дејствује на конац вертикална, јер је $\frac{d\varphi}{dx} = o$, $\frac{d\varphi}{dy} = o$, положај је равнотежни у вертикалној равнини, коју ћемо узети за xz. Из прве једначине:

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dx}\,ds = o,$$ која се своди на

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds} = C$$

имамо:

$$dx^2 = C^2 z\, ds^2 = C^2 z\,(dx^2 + dz^2)$$

или

$$dx = dz \sqrt{\frac{z}{2R - z}}, \qquad \frac{1}{C^2} = 2R$$

Ово је једначина циклоиде, чија је база $0x$.

Стављајући $z = R\,(1 - \cos\theta)$ имаћемо:

$$x = x_0 + R\,(\theta - \sin\theta).$$

Циклоида иде кроз A, где је $x_0 = o$)

II. Кретање тачке по покретној кривој линији.

§ 147. — Покретна је крива линија дата једначинама;

$$f(x\,y\,z\,t) = o, \qquad f_1(x\,y\,z\,t) = o \cdot \cdot 1).$$

Нормална је реакција N одређена изразима:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x},\ \lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y},\ \lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Тачка се може сматрати као слободна, ако се сили F, која на њу дејствује дода и сила N. Једначине су кретања онда облика:

$$\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}\quad\cdot\ \cdot\ 2).\\ m\frac{d^2z}{di^2}&=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\end{aligned}$$

Из 1) и 2) можемо наћи, x, y, z као функције времена и одредити кретање и $\lambda_1\ \lambda$, т. ј. величину реакције N.

Кад се овде помноже једначине 2) редом са dx, dy, dz, изрази пред λ и λ_1 не отпадају јер постоје сачиниоци, због:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=o$$

и они су:

$$-\frac{\partial f}{\partial t}dt \text{ и } -\frac{\partial f_1}{\partial t}dt$$

Ово је резултат и тога, што се стварно померање, кад је крива линија покретна, не врши строго по тангенти криве линије и онда рад реакције није нула. Елиминација се отпора врши методом Лагранжовим.

§ 148. — *Лагранжова једначина.* Ако је q параметар, који одређује положај тачке на кривој

линији покретној, координате се $x\,y\,z$ дају изразити једначинама:

$$x=\varphi(qt),\quad y=\psi(qt),\quad z=\omega(qt)\quad\cdot\ \cdot\ 1).$$

Кретање је познато кад се q нађе као функција времена t.

Ако једначине кретања 2) из 147. помножимо са $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial\psi}{\partial q}$, $\frac{\partial\omega}{\partial q}$, коефицијенти од λ и λ_1 ће отпасти, јер значе косинусе углова између тангенте на кривој линији и нормала на двема површинама f и f_1 и остаје једначина:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial\omega}{\partial q}\right)=Q\quad\cdot\ \cdot\ 2).$$

$$Q=X\frac{\partial\varphi}{\partial q}+Y\frac{\partial\psi}{\partial q}+Z\frac{\partial\omega}{\partial q}\quad\cdot\ \cdot\ 3).$$

Из 2) и 3) се налази облик једначине, познат под именом Лагранжова једначина, за одредбу параметра q, на овај начин.

Ако са q' обележимо $\frac{dq}{dt}$ и са x', y', z', $\frac{dx}{dt}$ и т. д. то је онда:

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial q}q'+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\quad\cdot\ \cdot\ 4).$$

Пошто је према 4) x' функција од q, q' и t из 4) излази:

$$\frac{\partial x'}{\partial q'}=\frac{\partial\varphi}{\partial q},\quad \frac{\partial x'}{\partial q}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}q'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\,\partial t}\quad\cdot\ \cdot\ 5).$$

Из последње једначине имамо израз:

$$\frac{\partial x'}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}q'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\,\partial t}$$

Слично се налази за:

$$\frac{\partial y'}{\partial q'} = \frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \cdot \quad \cdot 6).$$

$$\frac{\partial z'}{\partial q'} = \frac{\partial \omega}{\partial q}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right) \cdot \quad \cdot 7).$$

Кад се ово замени у 2) имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial \varphi}{\partial q} + y'\frac{\partial \psi}{\partial q} + z'\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)\right] - m\cdot$$

$$\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)\right] = Q$$

Заменом се из последње једначине добија:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'}\right)\right] - m.$$

$$\cdot\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q} + y'\frac{\partial y'}{\partial q} + z'\frac{\partial z'}{\partial q}\right) = Q \cdot \quad \cdot 8).$$

Ако се са T обележи израз

$T = {}^1/_2\, m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, из 8) добијамо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \cdot \quad \cdot \mathrm{I}).$$

d значи тотални диференцијал, а ∂ делимични.

Ово је Лагранжова једначина кретања из које се налази q као функција времена t. Треба само наћи Q и T, заменити у I) и из I) одредити q.

Q значи израз под 3) али се оно може и другојачије наћи. Ако се тачци покретној саопшти виртуелно кретање, замишљајући криву линију да је стална, за случај да је $t = const.$, то се q мора променити за δq и x, y, z постају:

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q}\,\delta q, \quad \delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q}\,\delta q, \quad \delta z = \frac{\partial \omega}{\partial q}\,\delta q.$$

За ово виртуелно померање је рад силе $F(X, Y, Z)$:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \left(X\frac{\partial \varphi}{\partial q} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q} + Z\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)\delta q = Q\delta q \cdot 3).$$

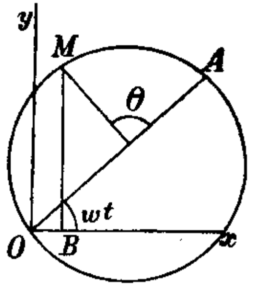
Q је коефицијенат пред δq у изразу рада виртуелног.

Ако постоји каква функција $U(xyz)$ да су $X Y Z$ изводи те функције, из 3) имамо онда да је:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q}, \text{ јер је:}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial q} = X\frac{\partial \varphi}{\partial q} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q} + Z\frac{\partial \omega}{\partial q} = Q$$

§ 149. — *Пример.* Материјална тачка клизи по кругу у хоризонталној равни xoy, која се обрће угаоном брзином ω око тачке 0 сталне. Наћи кретање тачке, кад на њу не дејствује никаква сила.



Сл. 105.

Ако је покретна тачка M, параметар q је овде угао $ACM = \theta$.Ваља наћи θ као функцију времена t.

Из слике је:

$$0B = x = R\cos\omega t + R\cos(\theta + \omega t)$$
$$BM = y = R\sin\omega t + R\sin(\theta + \omega t) \cdot \quad \cdot 1).$$

R је полупречник круга.

Ако са $x'\, y'\, \theta'$ означимо изводе $x\, y\, \theta$ по t имаћемо:

$$T = \frac{mR^2}{2}\left[\omega^2 + (\theta' + \omega)^2 + 2\omega(\theta' + \omega)\cos\theta\right] \text{ и}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = mR^2(\theta' + \omega + \omega\cos\theta), \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -mR^2\omega(\theta' + \omega)\sin\theta.$$

Како нема сила:

$Q = o$, и једначинаје кретања, после свих редукција из I (148):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \omega^2 \sin\theta \cdot \quad \cdot 2).$$

Кад се ово сравни са

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{l}{g} \sin\theta$, види се: да је релативно кретање тачке M, за посматраоца који иде са кругом, кретање клатна простор, где A игра улогу најниже тачке. Трајање једне двојне осцилације је $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ или $\frac{2\pi}{\omega}$, а то је равно трајању обртања круга.

Реакција N одређује се из једначина:

$$\frac{md^2x}{dt^2} = - N\cos(\theta + \omega t), \frac{md^2y}{dt^2} = - N\sin(\theta + \omega t)$$

Одавде је:

$$N = - m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\cos(\theta + \omega t) + \frac{d^2y}{dt^2}\sin(\theta + \omega t)\right]$$

или по замени из 1):

$$N = mR\,[\omega^2 \cos\theta + (\theta' + \omega^2)]$$

§ 150. — *Лагранжове једначине кад је крива линија по којој се тачка креће стална.*

За овај су случај координате тачке дате изразима:

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q).$$

Одавде је:

$$T = {}^m/_2\,[\varphi'^2 + \psi'^2 + \omega'^2]\,q'^2$$

T је овде хомогено, другог степена по q' и једначина Лагранжова:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \cdot \quad \cdot 1).$$

је идентична са једначином живе силе. Ово се доказује овако.

Кад 1) помножимо са q' имаћемо:

$$\text{ч}'\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\,q' = Qq'$$

или:

$$\frac{d}{dt}\left(q'\,\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{dq'}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q'} - q'\,\frac{\partial T}{\partial q} = Qq' \cdot \quad \cdot 2).$$

Због тога што је T хомогена функција $2^{\text{ог}}$ степена, имамо:

$$q'\,\frac{\partial T}{\partial q'} = 2T \cdot \quad \cdot 3).$$

Из 2) и 3) је: $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q}\,q' + \frac{\partial T}{\partial q'}\,\frac{dq'}{dt}$

$$\frac{d2T}{dt} - \frac{dT}{dt} = Qq'$$

или:

$$dT = Qdq \cdot \quad \cdot \mathrm{I}).$$

$$T = \int Qdq + h \cdot \quad \cdot \mathrm{II})$$

I је једначина живе силе, чији је први интеграл дат изразом под II).

ГЛАВА XII.

Кретање тачке по површини покретној или сталној.

I. Општи део.

§ 151. — Ако је површина по којој се креће тачка покретна, њена је једначина облика:

$$f(xy\,z\,t) = o \cdot \cdot 1)$$

ако је стална:

$$f(xy\,z) = o \cdot \cdot 2)$$

Ако на тачку M дејствује сила F, онда се тачка може сматрати за слободну и ако се креће по површини, кад се сили F прида реакција нормална N, што долази услед кретања тачке по површини.

Компоненте су силе N:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

Једначине су кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2} =$$
$$= Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cdot 3).$$

Из 3) и 1) или 2) налазимо $x\,y\,z$ као функције времена t и одређујемо кретање и уз то још и λ чиме налазимо реакцију.

§ 152. — *Лагранжове једначине.* И овде се, као код криве линије, може једначини кретања дати згоднији облик. Ако се тачка креће по површини, њене су координате изражене са два параметра q_1 и q_2 и облика су:

$$x = \varphi(q_1\,q_2\,t),\quad y = \psi(q_1\,q_2\,t),\quad z = \omega(q_1\,q_2\,t) \cdot \cdot 1).$$

Кад се q_1 и q_2 знају као функције времена t кретање је одређено.

Ако се једначине кретања у § 151. помноже са $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\omega}{\partial q}$ и саберу имаћемо:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right) = Q_1 \cdot \cdot 1).$$

$$Q_1 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial\omega}{\partial q_1} \text{ јер је израз:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial q} = o \cdot \cdot 2).$$

Израз 2) значи косинус угла између нормале на кривој коју описује тачка и која се поклапа са нормалом површине, и тангенте по тој кривој, кад су $q_2 = t = const.$

Једначини се 1) добија слична једначина:

$$m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial\omega}{\partial q_2}\right) = Q_2 \cdot \cdot 3).$$

$$Q_2 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial\omega}{\partial q_2}$$

Једначинама се 1) и 3) даје обично облик Лагранжових једначина, као што је већ речено.

Из 1) имамо:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+y'\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+z'\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)-m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)\right]\right]=Q_1$$

јер је:

$$\frac{d}{dt}\left(m\,x'\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)-mx'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$$

$$\frac{dx}{dt}=x'=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q_2'+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\cdot4).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1{}^2}q_1'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial t}\cdot\cdot5).$$

Из 4) имамо:

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1'}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\quad\frac{\partial x'}{\partial q_1}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1{}^2}q_1'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial t}$$

или

$$\frac{\partial x'}{dq_1'}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\quad\text{и}\quad\frac{\partial x'}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)\cdot\cdot6).$$

Слично се налази за:

$$\frac{\partial y'}{\partial q_1'}=\frac{\partial\psi}{\partial q_1},\quad\frac{\partial y'}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)$$

$$\frac{\partial z'}{\partial q_1'}=\frac{\partial\omega}{\partial q_1},\quad\frac{\partial z'}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)$$

Ако се ово смени у једначини за кретање и стави $T={}^m/_2\,(x'^2+y'^2+z'^2)$, имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1\cdot\cdot\text{I}).$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2\cdot\cdot\text{II}).$$

Из I и II се налазе q_1 и q_2 као функције времена t. Ако се тачки M да кретање виртујелно по површини, за $t = const$, мењајући само q_1 и q_2 за $\delta q_1\ \delta q_2$, имаћемо промене на координатама M:

$$\delta x=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\delta q_2$$

$$\delta y=\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\delta q_2$$

$$\delta z=\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\omega}{\partial q_2}\delta q_2$$

Рад је силе F:

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=Q_1\,\delta q_1+Q_2\,\delta q_2$$

Q_1 и Q_2 су коефицијенти δq_1 и δq_2 у изразу за рад силе F. Q_1 се добија кад се поред $t = const$ узме и $q_2 = o$, тако исто и Q_2. Ако су XYZ изводи неке функције $U\,(xyzt)$

$$Q_1=\frac{\partial U}{\partial q_1}\ \text{и}\ Q_2=\frac{\partial U}{\partial q_2}\ \text{због односа:}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial q_1}=X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+$$

$$+\,Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+Z\frac{\partial\omega}{\partial q_1}=Q_1$$

Тако се налази и Q_2.

§ 153. — *Пример.* Кретање тачке у сталној равни, кад на њу дејствује из почетка координатног сила, што лежи у равни.

Ако је раван кретања xy, координате су:

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=o.$$

Параметри су q_1, q_2 овде r и θ.

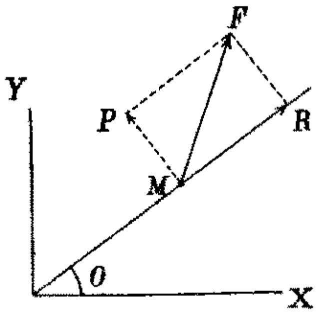
Сила F је дата компонентама $X, Y, Z = o$

$$T = \frac{mv^2}{2} = {}^m/_2 (r'^2 + r^2 \theta'^2)$$

Лагранжове су једначине:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_1,\ Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} =$$
$$= X\cos\theta + Y\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_2,\ Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} =$$
$$= -Xr\cos\theta + Yr\sin\theta.$$



Сл. 106.

Ако силу F разложимо на две компоненте R и P, рад је силе F раван раду сила R и P, а то је $R\delta r$ и $Pr\,d\theta$, према чему је $Q_1 = R$, $Q_2 = Pr$.

Једначине су кретања:

$$\frac{d}{dt}(mr') - mr\theta'^2 = R \text{ и}$$

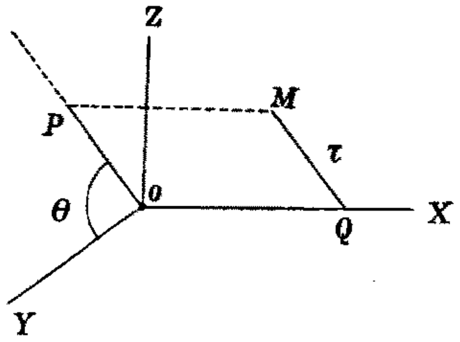
$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta') = Pr$$

Ако је сила централна $P = o$, из друге једначине имамо:

$$r^2\theta' = C \text{ (закон површина).}$$

Кад се одавде нађе θ' и замени у првој налази се r као функција времена, а из $r^2\theta' = C$ заменом нађеног r имамо θ као функцију времена.

§ 154. — Наћи кретање тачке у равни покретној, која се креће једнако око осовине хоризонталне у својој равнини брзином ω.



Сл. 107.

Нека је $x^{\text{ска}}$ осовина, оса око које се раван окреће, ако је θ угао равни покретне са $x\,y$ равни, онда је:

$$\theta = \omega t$$

Једначина је равнине покретне:

$$y\sin\omega t - z\cos\omega t = o \cdot \cdot 1).$$

На тачку M дејствују силе: тежа и отпор равнине. Ради отпора морамо поћи од општих једначина кретања, које су овде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = o,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\sin\omega t,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} =$$
$$= -mg - \lambda\cos\omega t \cdot \cdot 2).$$

Реакција N овде је равна параметру λ.

Координате $r = MQ$ и $x = 0Q$ су параметри q_1, q_2 тачке M у равни покретној, и координате су:

$$x = x,\quad y = r\cos\omega t,\quad z = r\sin\omega t.$$

$$T = {}^1/_2\, m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

Функција сила је:

$$U = -mgz = -mgr\sin\omega t$$

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = mx',\quad \frac{\partial T}{\partial x} = o$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m\omega^2 r$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = - mg \sin \omega t$$

Једначине су кретања:

$$\frac{dx'}{dt} = o \quad \text{и} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = o$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r = - g \sin \omega t.$$

Интеграл је прве једначине:

$$x = A_1 t + B_1$$

Интеграл је друге:

$$r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

Ако су почетни услови такви, да је A и B нула, а то се добија кад је тачка бачена са осе x да је њена пројекција брзине на $0R$ једнаке $\frac{g}{2\omega}$, онда је;

$$r = \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t = \frac{g}{2\omega^2} \sin \theta$$

и представља круг тангентан y 0 на $0y$. Трајекторија је завртна линија (hélice).

Пошто је отпор раван λ ваља у:

$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda \sin \omega t.$ заменити y са $r \cos \omega t$:

$$m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \cos \omega t - r\omega \frac{dr}{dt} \sin \omega t - \omega^2 r \cos \omega t \right) = \lambda \sin \omega t.$$

Ако се овде замени r'' из:

$r'' = \omega^2 r - g \sin \omega t$, имаћемо:

$$\lambda = - mg \cos \omega t - 2\, m\, \omega \frac{dr}{dt} \cdot \cdot \text{ I}).$$

II. Једначине кретања кад је раван стална.

§ 155. — Кад је раван стална, једна се од две Лагранжове једначине замењује теоремом живе силе.

Једначина је површине онда:

$$f(xyz) = o.$$

Рад је функције N нула и теорема живе силе је:

$$\frac{dmv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU$$

Први је интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h \cdot \cdot \text{ I}).$$

Ако и нису X, Y, Z изводи функције U, може се удесити да је $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ тотални диференцијал, с тога што су:

$$x = \varphi(q_1\, q_2), \quad y = \psi(q_1\, q_2), \quad z = \omega(q_1\, q_2);$$

и

$$\frac{dmv^2}{2} = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2$$

и може се десити да је $Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 = dU(q_1\, q_2)$, што даје први интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} = U(q_1\, q_2) + h \cdot \quad \cdot \text{ II}).$$

§ 156. — Из Лагранжове се једначине може, на већ показани начин, лако доћи до теореме о живој сили кад је раван стална.

Ако су параметри q_1 и q_2 онда имамо:

$$q_1{}' \frac{\partial T}{\partial q_1{}'} + q_2{}' \frac{\partial T}{\partial q_2{}'} = 2T$$

Ако прву и другу Лагранжову једначину помножимо са $q_1{}'$ и $q_2{}'$ имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left(q_1{}' \frac{\partial T}{\partial q_1{}'} + q_2{}' \frac{\partial T}{\partial q_2{}'}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1{}'}\frac{dq_1{}'}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_2{}'}\frac{dq_2{}'}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial T}{\partial q_1} q_1{}' + \frac{\partial T}{\partial q_1} q_2{}'\right)$$

$$= Q_1\, q_1{}' + Q_2\, q_2{}'$$

или

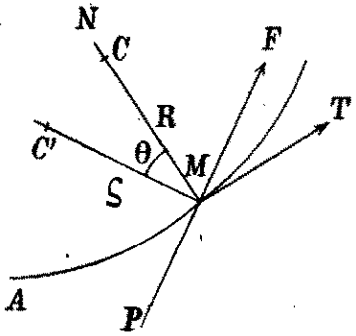
$$\frac{d}{dt}\left[2T\right] - \frac{dT}{dt} = Q_1\, q_1{}' + Q_2\, q_2{}', \text{ или}$$

$$dT = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2$$

или

$$T = U(q_1\, q_2) + h \cdot \quad \cdot \text{ I}).$$

Кад се у место једне Лагранжове једначине узме теорема живе силе и у вези са другом одреди кретање, онда остаје да се нађе отпор, кофицијенат λ, из општих једначина кретања.



Сл. 108.

§ 157. — *Опште једначине кретања.* На трајекторији тачке обележимо један почетак A и кроз тачку M повуцимо тангенту MT. Нека је C центар кривине у равни нормалној, тангентној на MT, R полупречник кривине $R = MC$. Нека је MC' главна нормала трајекторије и $\rho = MC'$ њен полупречник кривине. Ако је θ угао оскулаторне равни TMC' са нормалом површине, по теореми Менија (Meusnier) је:

$$\rho = R \cos\theta.$$

Кад се пројектује MC' у равни тангентној имаћемо за пројекцију MP. Ако су пројекције силе F: $F_t, F_n\, F_p$ у правцима: MT, MC, MP и N реакција нормална, онда се резултанта из F и N разлаже на две силе $m\frac{dv}{dt}$ у правцу MT и $\frac{mv^2}{\rho}$ у правцу MC'. Једначине су кретања сад:

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \quad \frac{mv^2}{\rho} \sin\theta = F_p, \quad \frac{mv^2}{\rho} \cos\theta = F_n + N$$

Ако са ρ_g означимо полупречник кривине геодешке $\rho/_{\sin}\theta$, онда је с погледом на $\rho = R\cos\theta$:

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \ \frac{mv^2}{\rho_g} = F_p, \ \frac{mv^2}{R} = F_n + N$$

§ 158. — *Геодешке линије.* Ако се тачка креће по сталној површини и на тачку не дејствује никаква сила, трајекторија је геодешки влак.

Из једначина кретања имамо:

$$\frac{dm\, v^2}{2} = o$$

$$v = const.$$

Трајекторија је геодешки влак, јер дејствује на тачку само сила N у оскулиторној равни, одакле је $\frac{1}{\varrho_g} = o$, што карактерише геодешке линије. $\theta = o$ $R = \varrho$ и $N = \frac{mv^2}{\varrho}$

Пример. Траже се геодешке линије за елепсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \cdot \cdot 1).$$

Једначине су кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu \frac{x}{a^2}, \frac{d^2y}{dt^2} = \mu \frac{y}{b^2}, \frac{d^2z}{dt^2} = \mu \frac{z}{c^2} \cdot \cdot 2).$$

Први је интеграл:

$$v = v_0$$

Други ћемо интеграл наћи методом Дарбуа — (Darboux).

Из 1) имамо:

$$\frac{x}{a^2} x'' + \frac{y}{b^2} y'' + \frac{z}{c^2} z'' + \frac{1}{a^2} x'^2 + \frac{1}{b^2} y'^2 \cdot$$

$$+ \frac{1}{c^2} z'^2 = o \cdot \cdot 3).$$

или због једначине 2):

$$\mu \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) = - \left\{ \frac{1}{a^2} x'^2 + \frac{1}{b^2} y'^2 + \frac{1}{c^2} z'^2 \right) 3'.)$$

Ако се једначине 2) помноже редом са $\frac{1}{a^2} x', \frac{1}{b^2} y', \frac{1}{c^2} z'$ и саберу, имаћемо стављајући $\frac{dx}{dt} = x'$ *etc.*

$$\mu \left(\frac{x}{a^4} x' + \frac{yy'}{b^4} + \frac{zz'}{c^4} \right) = \frac{1}{a^2} x' x'' + \frac{1}{b^2} y' y'' +$$

$$+ \frac{1}{c^2} z' z'' \cdot \cdot 4).$$

Деобом 3') и 4) добија се:

$$\frac{\frac{x}{a^4} x' + \frac{yy'}{b^4} + \frac{zz'}{c^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{\frac{1}{a^2} x' x'' + \frac{1}{b^2} y' y'' + \frac{1}{c^2} z' z''}{- \left\{ \frac{1}{a^2} x'^2 + \frac{1}{b^2} y'^2 + \frac{1}{c^2} z'^2 \right\}}$$

Интегрисањем имаћемо:

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) \left\{ \frac{1}{a^2} \left(x' \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(y' \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(z' \right)^2 \right\} = const.$$

Ако време избацимо изразом $\frac{ds}{dt} = v_0$, добићемо:

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right\} = const. \cdot \cdot 5).$$

Ово је диференцијална једначина геодешких линија елипсоида.

III. Кретање на обртним површинама.

§. 159. — *Геодешке линије на обртним површинама.* Код оваквих површина у место друге Лагранжове једначине имамо теорему о површинама, јер је реакција N у једној равнини са обртном осовином и њен је моменат у односу обртне осовине нула. У место прве Лагранжове остаје примена теореме о живој сили.

Применимо ово на тражење геодешких линија,

Нека је обртна осовина oz; једначина је меридијана у равни xz, $z = \varphi(x)$, једначина је површине:

$$z = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ако са r и θ обележимо координате пројекције тачке покретне M у равни xoy, имаћемо:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \varphi(r)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + \varphi'^2)\, dr^2 + r^2\, d\theta^2.$$

s је лук.

Ако никаква сила не дејствује имамо из теореме живе силе:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v_0^2 \cdot \cdot 1).$$

Теорема површина даје:

$$r^2\, d\theta = c\, dt \cdot \cdot 2).$$

Из два прва интеграла 1) и 2) можемо проблем свести на квадратуре. Из 1) је:

$$dr^2(1 + \varphi'^2) + r^2\, d\theta^2 = v_0^2\, dt^2 \cdot \cdot 3).$$

из 2) и 3)

$$dr^2(1 + \varphi'^2) + r^2\, d\theta^2 = \frac{v_0^2}{c^2}\, r^4\, d\theta^2$$

Ставимо $\frac{v_0^2}{c^2} = \frac{1}{k^2}$, и решимо по $d\theta$, па ћемо имати:

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{\frac{r^2}{k^2} - 1}}$$

или:

$$\theta = \int \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{\frac{r^2}{k^2} - 1}} + \beta \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

k и β се одређују условом да геодошки влак мора да прође кроз две тачке на површини.

Ако означимо са $d\sigma$ лук меридијана:

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 = (1 + \varphi'^2)\, dr^2, \text{ из I) имамо:}$$

$$d\theta = \pm \frac{k\, d\sigma}{r\sqrt{r^2 - k^2}}$$

Ако са i обележимо угао под којим геодешки влак сече меридијан, онда је:

$$r \sin i = k \text{ (Clairaut).}$$

Пример. Нека се тражи геодешки влак ротационе површине која постоје обртањем хиперболе равностране око једне своје асимтоте. Једначина је површине:

$$z = \frac{a^2}{r}.$$

Кад се $\varphi(r)$ смени у I са $\frac{a^2}{r}$, имаћемо:

$$\theta = \int \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \frac{a^4}{r^4}}{\frac{r^2}{k^2} - 1}} + \beta.$$

Да је θ стварно мора бити $r > k$

$$\theta = \int_k^r \frac{k\,dr}{r^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{a^4}{r^4}}{1 - \frac{k^2}{r^2}}}$$

$\psi = lim\, \theta$

$$\psi = \int_{h}^{\infty} \frac{kdr}{r^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{a^4}{r^4}}{1 - \frac{h^2}{r^2}}}$$

§ 160. — *Конично клатно* (сверично). Ако се тешка тачка нека креће по кугли сталној имамо сверично клатно. Нека је центар кугле почетак система, $z^{ска}$ осовина позитивна на ниже. Једначина кугле у семиполарним координатама је:

$$r^2 + z^2 = l^2 \cdot \quad \cdot 1).$$

(l је полупречник свере).

Две силе дејствују на тачку M, тежа и реакција нормална свере. Теорема живе силе даје интеграл:

$$v^2 = 2\, gz + h \cdot \quad \cdot 2).$$

Обе су силе у једној равни са oz, теорема о површини да се применити и имаћемо:

$$r^2\, d\theta = C\, dt \cdot \quad \cdot 3).$$

Из 1) 2) и 3) проблем је решен.

Једначина се 2) може написати:

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = 2\, gz + h \cdot \quad \cdot 4).$$

Из $r = \sqrt{l^2 - z^2}$ имамо:

$$dr = -\frac{z\, dz}{\sqrt{l^2 - z^2}}.$$

Из 3) је:

$$d\theta = \frac{C\, dt}{r^2} = \frac{C\, dt}{l^2 - z^2} \cdot \quad \cdot 5).$$

из 4) и 5) је:

$$l\left(\frac{dz}{dt}\right) = \pm \sqrt{\varphi(z)}, \qquad t = \int_{z_0}^{z} \frac{l\, dz}{\pm \sqrt{\varphi(z)}} \cdot \quad \cdot 6).$$

$$\varphi(z) = (2\, gz + h)(l^2 - z^2) - C^2$$

и

$$d\theta = \pm \frac{C\, l\, dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Кад се зна t и θ налази се r из једначине свере.

Реакција се нормална налази из једначине:

$$N + F_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{l}$$

Кад се овде замени $v^2 = 2\, gz + h$ и F_n са $-m\,\frac{gz}{l}$ имаћемо:

$$N = \frac{m}{l}(2\, gz + h) + m\,\frac{gz}{l} = \frac{m}{l}(3\, gz + h).$$

Интегрисање помоћу елиптичких функција. Ако нађемо корене израза $\varphi(z)$ и обележимо их са α, β, γ имаћемо из 6):

$$t = -\int_{\alpha}^{z} \frac{l\, dz}{\sqrt{2\, g\, (\alpha - z)(z - \beta)(z - \gamma)}}$$

Време t рачунамо од пролаза тачке кроз најнижи положај на кугли, где је $z = \alpha$, зато је и узет знак —.

Једначина се последња може и овако написати:

$$\frac{\sqrt{2g}}{l}\,t = -\int_{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)}}$$

Ставимо овде:

$$\alpha - z = (\alpha-\beta)\,u^2.$$

z варира између α и β и између o и 1, и кад се ово замени у t имаћемо:

$$\frac{\sqrt{2\,g}}{l}\,t = \int_0^u \frac{2\,du}{\sqrt{(\alpha-\gamma)\,(1-u^2)\,(1-k^2\,u^2)}}$$

$$1 > h^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} > o; \quad \alpha > \beta > \gamma$$

или:

$$\lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2\,u^2)}};$$

$$u = Sn\,\lambda t, \quad \lambda = \frac{\sqrt{2g\,(\alpha-\gamma)}}{2\,l}$$

или

$$z = \alpha - (\alpha-\beta)\,Sn^2\,\lambda t \quad \cdot\ \cdot\ \mathrm{I}).$$

z је одређено као функција времена Реална је периода:

$$\frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2\,u^2)}},$$

$$\sqrt{\alpha - z} = \sqrt{\alpha-\beta}\;Sn\,\lambda t$$

$$\sqrt{z-\beta} = \sqrt{\alpha-\beta}\;Cn\,\lambda t$$

$$\sqrt{z-\gamma} = \sqrt{\alpha-\gamma}\;dn\,\lambda t$$

За одредбу x и y пођимо од једначине:

$$d\theta = \frac{C\,dt}{l^2-z^2}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ по замени постаје рационална функција од $Sn\,\lambda t$. Кад се разложи и интегрише налази се θ, али оно није униформна функција времена, док се x и y могу наћи као униформне функције од t помоћу једначине:

$$x + i\,y = re^{\theta i} = \sqrt{l^2-z^2}\,e^{i\int\frac{c\,dt}{l^2-z^2}}$$

Експоненат има критичке тачке за $\pm\, l = z$, а производ $\sqrt{l^2-z^2}\,e^{i\int\frac{c\,dt}{l^2-z^2}}$ нема критичких тачака, $x + i\,y$ је униформно по t. (Tissot).

По Ермиту (Hermite) можемо директно наћи x и y овако. Једначине кретања су:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{Nx}{l}, \quad N = \frac{m}{l}(3gz + h)$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,x\,\frac{3gz+h}{l^2} = -\,x\,\frac{3g\,[\alpha-(\alpha-\beta)\,Sn^2\,\lambda t]+h}{l^2} \quad \cdot\ \cdot\ 1).$$

Партикуларни интеграли ове линеарне једначине су x и y, пошто се за y добија иста једначина.

Ако у 1) ставимо $\lambda t = t'$, добијамо из 1):

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = x\,(6k^2\,Sn^2\,t' + h')$$

Ово је једначина Ламеова типа:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = x\,[n\,(n+1)\,k^2\,Sn^2\,t' + h']$$

за $n = 2$.

Осцилације бесконачно мале. Опште су једначине кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{N}{l}x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{l}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \frac{Nz}{l}.$$

Ако се узме да је $z = l = cons.$ онда је из последње $N = mg$.

Заменом ове вредности за N у прве две имамо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y.$$

Интеграли су:

$$x = A\cos t\sqrt{g/l} + B\sin t\sqrt{g/l}$$

$$y = A'\cos t\sqrt{g/l} + B'\sin t\sqrt{g/l}$$

Нека је:

$$x = x_0, \quad y = o, \quad \frac{dx}{dt} = o, \quad \frac{dy}{dt} = v_0:$$

$$A = x_0, \quad A' = o, \quad B = o; \quad B' = v_0\sqrt{l/g}$$

и

$$x = x_0\cos t\sqrt{g/l}, \quad y = v_0\sqrt{l/g}\sin t\sqrt{g/l}.$$

Елиминација t даје елипсу по којој се креће тачка. Трајање револуције је $2\pi\sqrt{l/g}$

ЛИТЕРАТУРА

Necker — Mémoire des savants (таутохронизам) 1763.
Puiseux — Journal de Liouville t. IX. Haton de la Goupillier Journal de Liouville t XIII Haton de la Goupillier Mémoire de l'Academie t. XXVII и XXVIII,
Halphen — Traité des fonctions elliptiques-le pendule.
Fourret — Comptes rendus t. CIII, Journal de l'école polytechnique 56. cahier
Legoux — Annales de la Faculté de Toulouse t. VI — Cicloide.
De Saint Germain — Bulletin des sciences mathématiques 1899.
Koenigs — Comptes rendus 1893 1 mai — таутохронизам.
Darboux — Théorie générale des surfaces t. 4.
Kobb — Acta mathematica t. X XI.
Tissot — Journal de Liouville 1852.
Hermite — Journal de Crelle t. 85.
Greenhill — Les Fonctions Elliptiques et leurs applications.
Elliot — Annales de l'école Normale août 1893.
Clebsch — Journal de Crelle t. 57.
Marcolongo — Rendiconti della R. Accademia Scienza di Napoli (1888).
Desboevs — Journal de Liouville t. XIII. XII.
Schellbach — Journal de Crele t. 57.
Liouville — Journal de Liouville t. XI. XII.
Jacobi — Vorlesungen über Dynamik.
Amthor — Bewegung eines Körpers auf krummen Fläche.

ГЛАВА XIII.

Лагранжове једначине за слободну тачку.

§ 161. — Ако су $x\,y\,z$ координате покретне тачке у простору, онда се те координате могу изразити са три независна параметра и временом, $q_1\,q_2\,q_3\,t$ и облика су изрази:

$$x = \varphi(q_1\,q_2\,q_3\,t), \quad y = \psi(q_1\,q_2\,q_3\,t), \quad z = \omega(q_1\,q_2\,q_3\,t)$$

Међу овим параметрима може време и не фигурирати. Решити проблем и овде је: наћи $q_1\,q_2\,q_3$ као функције времена.

Обичне су једначине кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Ако се редом ове једначине помноже са $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\,\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\,\frac{\partial\omega}{\partial q_1}$ и саберу добићемо:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right) = Q_1 \cdot \cdot 1).$$

$$Q_1 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+Z\frac{\partial\omega}{\partial q_1}$$

Једначина се један може и овако написати:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)\right] - m$$

$$\left[\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)\right] = Q_1$$

Из једначине $x = \varphi(q_1\,q_2\,q_3\,t)$ имамо:

$$x' = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q_2' + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}q_3' + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Одавде је:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q_1'}$$

Сматрајући x' као функцију од q_1, q_2, q_3, t q_1', q_2', q_3' имаћемо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = \frac{\partial y'}{\partial q_1'} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial q_1} = \frac{\partial z'}{\partial q_1'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial x'}{\partial q_1} \cdot \cdot 2).$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}q_1' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial q_3}q_3' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial t}$$

Из једначине за x' диференцијаљењем имамо:

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}q_1' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial q_3}q_3' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\,\partial t}$$

Из последње се две једначине долази до израза 2) и сличних:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial y'}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial z'}{\partial q_1}$$

Кад се ово замени у 1) и обележи са $T = {}^m/_2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, где T значи живу силу покретне тачке, имаћемо прву Лагранжову једначину:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

и сличне две:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \cdot \cdot \text{ I}).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_3'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = Q_3$$

T је функција $q_1\, q_2\, q_3$ и извода њихових; једначине под I) су другога реда, општи интеграл има шест (6) констаната, које се из почетних услова одређују.

Ако постоји каква функција сила U, чији су изводи X, Y, Z, из израза:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial q_1}$$

излази да је:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \text{ и слично } Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2},\quad Q_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

У општем случају кад су:

$$x = \varphi\,(q_1\, q_2\, q_3\, t)$$
$$y = \psi\,(q_1\, q_2\, q_3\, t)$$
$$z = \omega\,(q_1\, q_2\, q_3\, t)$$

можемо t-у дати одређену вредност и претпоставити да се $q_1\, q_2\, q_3$ промене за $\delta q_1\;\delta q_2\;\delta q_3$; $x\;y\;z$ промене се за:

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\delta q_3$$

$$\delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\delta q_1 +$$

$$\delta z = \frac{\partial \omega}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdot \cdot \cdot + \frac{\partial \omega}{\partial q_3}\delta q_3$$

Елементаран рад сила је:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + Q_3\delta q_3$$

Ако се померање виртуелно врши по курби $q_2 = const.$ $q_3 = const.$ елементаран је рад $Q_1\delta q_1$, одакле се Q_1 налази. Слично се одређује Q_2 и Q_3.

§ 162. — Ако постоји функција сила $U\,(x\,y\,z)$, теорема живе силе даје интеграл:

$$T = U + h \cdot \cdot 1).$$

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Једначина 1) је резултат Лагранжових једначина и у место једне од њих се може једначина 1) живе силе узети.

За доказ да је 1) последица Лагранжових једначина узмимо да x, y, z не зависе директно од t, и пођимо од једначине:

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}q_2' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}q_3' \cdot \cdot 1)$$

T је хомогена једначина по $q_1'\, q_2'\, q_3'$ и отуда је:

$$2T = q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2'\frac{\partial T}{\partial q_2'} + q_3'\frac{\partial T}{\partial q_3'} \cdot \cdot 2).$$

Кад се три једначине под I) (§ 161) помноже са q_1', q_2', q_3' и саберу, водећи рачуна о једначинама под 1) и 2), добија се на крају израз:

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

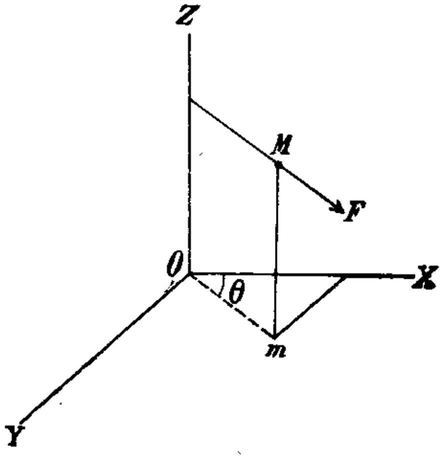
или:

$$dT = dU, \qquad T = U + h$$

§ 163. — *Пример.* Наћи кретање једне тачке M, коју привлачи или одбија стална осовина (Oz) по закону зависном од одстојања r.

У овом случају постоји извесна функција силе $\int \Phi\, dr = m f(r)$, где је $\Phi(r)$ сила привлачна или одбојна.

Нека су координате покретне тачке M: r, θ, z $(q_1\ q_2\ q_3)$, Oz је осовина која тачку привлачи или одбија.



Сл. 109.

$$T = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2).$$

Једначине су Лагранжове:

$$\frac{d}{dt}\, r' - r\theta'^2 = f'(r)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = o$$

$$\frac{d}{dt}\, z' = o$$

Из последње две имамо:

$$r^2\theta' = C \cdot \cdot 1).$$

$$z' = a \cdot \cdot \cdot 2).$$

У место прве једначине узмимо интеграл живе силе:

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2) = f(r) + h \cdot \cdot 3).$$

Из 1) 2) и 3) имамо:

$$\frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{C^2}{r^2} + a^2\right) = f(r) + h.$$

Одавде је:

$$r'^2 = \varphi(r)$$

§ 164. — *Пример. Поларне координате у простору.* Нека су координате тачке M: ρ, θ, ω $(q_1\ q_2\ q_3)$

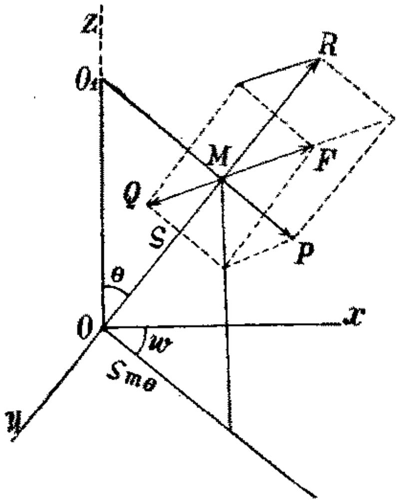
$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}(\rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, \omega'^2)$$

Једначине су Лагранжове:

$$\frac{d}{dt}(m\rho') - m\rho(\theta'^2 + \omega'^2 \sin^2\theta) = Q_1 \cdot \cdot 1).$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\theta') - m\rho^2\omega'^2 \sin\theta\cos\theta = Q_2 \cdot \cdot 2).$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2 \sin^2\theta\, \omega') = Q_3 \cdot \cdot 3).$$



Сл. 110.

Одредба $Q_1\ Q_2\ Q_3$. Нека су R, Q P компоненте силе F у правцима полупречника вектора ϱ, управне на $Z0M$ и управне на раван ове две праве, у смислу како углови ω и θ расту и смислу рашћења ϱ.

За померање у правцу ϱ: $q_2 = q_3 = const.$, рад је сила $R\,\delta r$ и $Q_1 = R$, за померање $\varrho\,\delta\theta$ рад је $P\varrho\,\delta\theta$, $Q_2 = P\varrho$ и $Q_3 = Q\varrho\,sin\theta$.

Ако сила F сече $0z$, $Q_3 = o$ и 3) даје због $M0_1 = \varrho\,sin\,\theta$:

$$m\varrho^2\,sin^2\,\theta\,\omega' = const.$$

§ 165. — *Лагранжове једначине за релативно кретање.* Кретање је релативно, кад се траже координате какве тачке покретне M према систему $0xyz$, који се у простору помера. Ако су $x\,y\,z$ координате релативне, оне сад замењују параметре q_1, q_2, q_3, апсолутне су координате тачке M: x_1, y_1, z_1 везане са релативним преко једначина:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z \\ y_1 &= y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z \quad \cdot \text{I)} \\ z_1 &= z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z \end{aligned}$$

$x_0\ y_0\ z_0$ и девет косинуса $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots$ су функције времена.

За одредбу T ваља наћи апсолутну брзину v_a, чије су пројекције на релативним осовинама $v_x\ v_y\ v_z$.

Апсолутна је брзина резултанта из брзина: v_r (релативне) и v_e (антренирајуће).

Пројекције су од релативне брзине v_r на покретним осовинама $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Антренирајућа брзина тачке M би била брзина коју би тачка M имала кад би систем $0xyz$ сматрали као тело покретно, у коме тачка M мирује. v_e је резултанта онда из брзине транслаторне v_0 почетка система $0xyz$ и брзине која долази од моментаног обртања система $0xyz$ око осовине, што иде кроз 0 и то брзином ω. Ако су $v^0_x\ v^0_y\ v^0_z$ компоненте брзине v^0 на покретним осовинама, и p, q, r компоненте ротације моментане на истим осовинама, из кинематике знамо да су компоненте брзине v_e сад:

$$\begin{aligned} &v^0_x + qz - ry \\ &v^0_y + rx - py \\ &v^0_z + py - qx. \end{aligned}$$

Жива сила је T сад:

$$T = \frac{m}{2}\left[(x' + v^0_x + qz - ry)^2 + (y' + v^0_y + rx - pz)^2 + (z' + v^0_z + py - qx)^2\right]$$

$$x' = \frac{dx}{dt},\ y',\ z' = \frac{dz}{dt}.$$

Ако су сад пројекције силе F на покретним осовинама X, Y, Z, онда су Лагранжове једначине:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X.$$

и сличне две.

Развијањем Лагранжових једначина можемо доћи до тореме Кориолисове (Coriolis).

Из прве и друге две Лагранжове једначине, кад се T смени својом вредношћу, имаћемо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2m\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right)+X''=X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+2m\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)+Y''=Y \cdot 2).$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+2m\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)+Z''=Z$$

Да би нашли вредност X'' Y'' Z'' замислимо нека сила F постане сила F_e, чије су пројекције X_e, Y_e, Z_e, да тачка постане непокретна према осама $Oxyz$; њена је онда брзина и убрзање релативно нула; апсолутна акцелерација постаје акцелерација од антренирања J_e и сила што производи кретање је $m\,J_e$ и из 2) имамо онда:

$$X''=X_e,\quad Y''=Y_e,\quad Z''=Z_e.$$

Једначине се 2) онда могу символични овако написати:

$$(J_r)+(J')+(J_e)=(J_a) \cdot \cdot \text{I}).$$

J' је вектор чије су пројекције $2\left(q\frac{dr}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right)$ (центрифугалног сложеног убрзања). J_r је убрзање релативно; J_a апсолутно. Једначина I) садржи познату теорему Кориолисову о односу убрзања у релативном кретању.

* * *

ГЛАВА XIV.

Принципи механички: Даламберов, Хамилтонов и најмање акције.

§ 166. — Нека на једну тачку M масе m дејствују силе F_1 $F_2 \cdot\cdot F_n$, чије су компоненте X_1 Y_1 Z_1 и т. д., једначине су кретања:

$$1).\quad -m\frac{d^2x}{dt^2}+\Sigma X_v=o,\quad -m\frac{d^2y}{dt^2}+\Sigma Y_v=o,$$

$$-m\frac{d^2z}{dt^2}+\Sigma Z_v=o.$$

Ако поред силе F, као резултанте свих сила F_1 $F_2 \cdot\cdot F_n$, узмемо у рачун и вектор MJ чије су компонете: $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, који се зове сила инерције, једначине 1) онда казују: да у свакоме моменту при кретању има равнотеже између фактичке силе F и силе инерције MJ.

Ако се у времену t тачки M саопшти виртуелан померај δs, чије су компоненте δx, δy, δz, из 1) се добија једначина:

$$2).\quad \left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+\Sigma X_v\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+\Sigma Y_v\right)\delta y+$$

$$+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+\Sigma Z_v\right)\delta z=o.$$

Ова једначина обухвата Даламберов принцип (D'Alembert) и значи: да је сума радова од сила $F_1\, F_2 \cdots$ и силе инерције у свакоме моменту t равна нули.

Принципом се Даламберовим свако питање из динамике своди на питање статике, јер се једначина 2) поклапа са једначином виртуелних радова, кад се силама $F_1\, F_2$ дода сила инерције.

§ 167. — Ако компоненте резултанте сила означимо са X, Y, Z из 2) се добија једначина:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z.$$

Ова једначина мора вредити за ма какав померај δs, (δx, δy, δz) откуда следују онда једначине познате:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=X$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2}=Y$$

$$m\,\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

за кретање тачке.

§ 168. — *Принцип Хамилтонов.* Даламберова једначина вреди за кретање тачке слободне или приморане да се креће по површини или линији, и она гласи:

$$\left(-m\,\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\,\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+$$
$$+\left(-m\,\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z=o.$$

Овај се резултат може и овако изразити. Ако посматрамо тачку покретну M у два момента t_0 и t_1, и њене положаје обележимо са M_0 и M_1, у природном кретању тачке M из M_0 у M_1, под дејством сила и услова кретања (по линији или површини), координате су $x\;y\;z$ функције времена, које задовољавају и једначине кретања и нарочите услове и које у M_0 и M_1 имају нарочите напред одређене вредности. Ако су $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ координате блиске координатама $x\;y\;z$, да су δx, δy, δz у M_0, M_1 равне нули, то је онда овај интеграл:

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}\left[X\delta x+Y\delta y+Z\delta z+\delta T\right]dt\;\cdots\;1).$$

једнак нули. T је овде жива сила у природном кретању а δT варијација живе силе кад се $x\;y\;z$ промени за δx, δy, δz.

Последњом се једначином изражава Хамилтонов принцип и он се овако доказује:

Ако варирамо једначину:

$$T={}^1/_2\,m\,(x'^2+y'^2+z'^2),\ \text{имаћемо:}$$

$$\delta T=m\,(x'\,\delta x'+y'\,\delta y'+z'\,\delta z').$$

Кад се ово замени у 1) и трансформише израз:

$$\int_0^{t_1} mx'\,\delta x'\,dt=\int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{dx}{dt}\,\delta\,\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{dx}{dt},d\delta x$$

$$=\Big|\,m\,\frac{dx}{dt}\,\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x\,dt=-\int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x\,dt$$

јер је $\delta x = o$ за t_0 и t_1, онда 1) прелази у:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\Big)\delta x + \Big(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\Big)\delta y + $$

$$+ \Big(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\Big)\delta z\Big] dt.$$

Израз је у загради $\Big[\ \Big]$ раван нули због Даламберове једначине и $\delta J = o$, чиме је доказан принцип Хамилтонов.

Из принципа се Хамилтоновог изводе врло лако Лагранжове једначине.

§ 169. — *Принцип најмање акције.* Овај се принцип примењује на случајеве кретања под утицајем сила, које су изводи функције сила. Једначина кретања обухвата израз, да је варијација извесног интеграла нула. Овај је принцип нашао Маупертуис (Maupertuis).

Нека је дата једна слободна тачка на коју дејствују силе, што су изводи функције сила $U(xyz)$.

Интеграл живе силе даје онда:

$$mv^2 = 2[U+h], \quad mv_0^2 = 2[U(x_0 y_0 z_0)+h]$$

По овоме се принципу сравњују два кретања за која су h исте вредности.

Почетни се положај $x_0 y_0 z_0$ може одредити произвољно, а почетна брзина из друге од последњих једначина тако, да положаји и покретне тачке и кривих линија, као путова, леже у региону, где је $U(xyz)+h$ позитивно.

Ако су A и B два положаја стална тачке M на каквој линији C, израз се:

$$\Omega = \int_A^B \sqrt{2(U+h)}\,ds \cdot\ \cdot 2).$$

зове акција по путу AB криве линије C (Tait и Thomson) где је ds елеменат линије C и принцип се овако изражава:

Криве линије, што спајају A и B, а особине су да је варијација акција нула, кад се са једне криве на другу блиску пређе, трајекторије су које описује покретна тачка у природном кретању, кад се тачка пушта из једне сталне тачке A у другу по одређеном правцу да дође у тачку B.

Међу свима трајекторијама ваља изабрати ону по којој је акција minimum, а ово се налази стављајући варијацију акције равно нули.

Интеграл 2) је облика: $\int_A^B \varphi(xyz)\,ds$ или

$$\varphi(xyz) = \sqrt{2(U+h)} \cdot\ \cdot 3).$$

Да би нашли диференцијалне једначине трајекторије за које је Ω minimum, на ово треба применити једначине облика:

$$d\Big[\sqrt{2(U+h)}\,\frac{dx}{ds}\Big] - \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{ds}{\sqrt{2(U+h)}} = o \cdot\ \cdot 4).$$

и такве исте још две за dy, dz.

Ако у место s узмемо израз за t из једначине:

$$dt = \frac{\sqrt{m}\,ds}{\sqrt{2(U+h)}} \cdot\ \cdot 5).$$

диференцијалне су једначине криве линије за коју је $\boldsymbol{\Omega}$ minimum.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}$$

Ово су једначине кретања слободне тачке. Једначина 5). је једначина живе силе, где ћ има одређену вредност.

Овај се принцип примењује и на кретање тачке по извесној површини.

Криве линије на површини између A и B, особина да је варијација акције нула, кад се с једне на другу оближњу пређе, трајекторије су покретне тачке што спајају A и B.

Међу овима се опет она одређује за коју је акција minimum и она је пут тачкин.

* * *

ЧЕТВРТИ ДЕО

ДИНАМИКА СИСТЕМА — ОСНОВИ АНАЛИТИЧКЕ МЕХАНИКЕ.

I. ОДЕЉАК

АНАЛИТИЧКА ДИНАМИКА ТАЧКЕ.

ГЛАВА XV.

Канонске једначине и Јакобијева теорема.

§ 170. — *Теореме* које ћемо извести примењују се на проблеме не само кретања тачке већ и система тачака, са том разликом само што је број параметара већи од 3 код система, док су једначине кретања дате само једном, или са две или са три једначине Лагранжове, према томе да ли се тачка креће по линији, површини или је слободна. Све се ово примењује још само на случајеве кад су силе X, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$, које на систем или тачку дејствују, изводи извесне функције сила $U(x\,y\,z\,t)$. Према овоме, у опште се једначине кретања ма каквог проблема могу ставити у облик Лагранжове једначине.

$$1).\quad \cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_{\mathrm{v}}{}'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_{\mathrm{v}}}=\frac{\partial U}{\partial q_{\mathrm{v}}}\qquad q'_{\mathrm{v}}=\frac{\partial q_{\mathrm{v}}}{\partial t}$$

где је $\boldsymbol{\nu}=1$, или $\boldsymbol{\nu}=1.2$, $\nu=1.\,2\,3$, или у опште $\boldsymbol{\nu}=1.\,2\,3\cdot\cdot n$ за тачку на курби, на површини, слободну тачку или систем. Ми ћемо посматрати само кретање тачке, јер су теореме независне од броја једначина под 1).

I. Канонске једначине — теорема Јакобијева.

§ 171. — Трансформација Поасонова (Poisson) и Хамилтонова. Ако се у 1) (§ 170) стави:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'},\ p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2},\ p_3 = \frac{\partial T}{\partial q'_3} \cdot \cdot 2).$$

онда ће p_1, p_2, p_3 бити линеарне функције од $q'_1\ q'_2 q'_3$, пошто је T 2-ог степена по истим количинама.

Кад се из последњих једначина одреде количине $q'_1\ q'_2\ q'_3$, биће дате изразима:

$$\begin{aligned} q'_1 &= f_1\,(q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3\, t) \\ q'_2 &= f_2\,(q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3\, t) \cdot \cdot 3). \\ q'_3 &= f_3\,(q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3\, t) \end{aligned}$$

Кад се ове једначине смене у Лагранжовим једначинама под 1)§ 170 за случај $\nu = 1, 2, 3$ имаћемо:

$$\text{да је} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right) = \frac{dp_\nu}{dt}.$$

Да би нашли израз $-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}$, диференцијалимо T, сматрајући $t = const.$ па ћемо имати:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 + $$
$$+ \frac{\partial T}{\partial q'_1}\delta q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2}\delta q'_2 + \frac{\partial T}{\partial q'_3}\delta q'_3$$

δT и δq су варијације T и параметара;

или с погледом на 2).

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial T}{\delta q_3}\delta q_3 + $$
$$+ p_1\,\delta q'_1 + p_2\,\delta q'_2 + p_3\,\delta q'_3.$$

Ово се може и овако написати:

$$\delta T = \delta\,(p_1\,q'_1 + p_2\,q'_2 + p_3\,q'_3) + $$
$$+ \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 - q'_1\delta p_1 - q'_2\delta p_2 - q'_3\delta p_3.$$

Стављајући краткоће ради:

$$K = p_1\,q'_1 + p_2\,q'_2 + p_3\,q'_3 - T \cdot \cdot 4).$$

имамо из последње једначине:

$$\delta K = -\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 - \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 + $$
$$+ q'_1\delta p_1 + q'_2\delta p_2 + q'_3\delta p_3.$$

Ако израз 4). сматрамо као функцију $q_1\, q_2\, q_2$ $p_1\, p_2\, p_3\, t$, имаћемо:

$$5). \quad \delta K = \frac{\partial K}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial K}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial K}{\partial q_3}\delta q_3 + $$
$$+ \frac{\partial K}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial K}{\partial p_2}\delta q_2 + \frac{\partial K}{\partial p_3}\delta p_3.$$

Из 4) и 5) излазе односи:

$$-\frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \frac{\partial K}{\partial q_\nu}, \quad q'_\nu = \frac{\partial K}{\partial p_\nu},\ \nu = 1, 2, 3 \cdot \cdot 6).$$

Кад се сад ово смени у Лагранжовим једначинама, оне постају облика:

$$\frac{dp_\nu}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_\nu} = \frac{\partial U}{\partial q_\nu}, \qquad \frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_\nu} \quad (\nu = 1, 2\ 3) \cdot \cdot 7).$$

Ове се једначине могу и згодније представити. Кад се са H обележи израз:

$H = K - U$, U је зависно од $xyzt$, односно $q_1\, \mathrm{p}_2\, q_3$ и t; K од $q_1 q_2 q_3$ $p_1 p_2 p_3$ и t, онда је из $H = K - U$

$$\frac{\partial K}{\partial p_\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{\partial K}{\partial q_\nu} - \frac{\partial U}{\partial q_\nu} = \frac{\partial H}{\partial q_\nu}$$

Сменом ових вредности у 7), Лагранжове једначине добијају облик:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dfrac{dq_3}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_3} \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \dfrac{dp_3}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_3} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{I}).$$

Ово су Хамилтонове једначине кретања. Њихов је број шест за слободну тачку, иначе $2n$, ако је n број параметара, којима је систем одређен. То су једначине првога реда и дају $q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3$ као функције времена и 6 произвољних константата. За кретање система нужно је наћи само $q_1\, q_2\, q_3$ као функције времена. Те се једначине зову и *Канонским*.

§ 172. — *Ако xyz не зависе директно од t* већ само од $q_1\, q_2\, q_3$, канонске се једначине упрошћују.

За овај је случај:

$$K = T.$$

Ово излази из:

$$2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + q'_3 \frac{\partial T}{\partial q'_3}$$

$$K = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 - T = 2T - \mathrm{T} = T.$$

Хамилтонова је функција $H = T - U$.

§ 173. — *Кад год постоји функција сила $U(xyz)$* увек је дат први интеграл, звани интеграл живе силе и он је облика:

$$T - U = h.$$

Овај се интеграл да извести и из канонских једначина за случај кад xyz зависе само од $q_1\, q_2\, q_3$.

Ако у овоме случају H диференцијалимо по t имаћемо:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + $$
$$+ \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{dp_3}{dt};$$

или према канонским једначинама:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\frac{dq_\nu}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{dp_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu} - \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial q_\nu} = o$$

$$\frac{dH}{dt} = o, \quad H = h \quad \text{или} \quad T - U = h.$$

§ 174. — *Пример.* Ако је дата тачка у равни на коју дејствује сила, што лежи у тој истој равни а функција је одстојања, значи да је кретање тачке одређено са два параметра $q_1\, q_2$. Жива је сила:

$$T = {}^1/_2\,(r'^2 + r^2\theta'^2); \quad q_1 = r, \quad q_2 = \theta$$

функција сила је $U = \psi(r)$.

T је хомогено по r' и θ'. Хамилтонова је функција:

$$H = T - U = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\,\theta'^2) - \psi(r)$$

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r', \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\,\theta'.$$

Кад се ово смени у H имаћемо:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^{\,2} + \frac{p_2^{\,2}}{r^2}\right) - \psi(r) \cdot \cdot 1).$$

Канонске су једначине:

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = p_1, &&\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_2}{r^2} \\ &\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2^{\,2}}{r^3} + \psi'(r), &&\frac{dp_2}{dt} = o. \end{aligned} \quad \cdot 2).$$

Одавде ваља наћи r, θ, p_1 p_2 као функције времена. Из последње имамо:

$p_2 = C$, из друге $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = C$ (једначина површина). Избацивањем p_1 из прве и треће имамо:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{C^4}{r^3} + \psi'(r)$$

Ова једначина даје кретање по реону вектору.

II. Јакобијева теорема.

§ 175. — Функција H је зависна од параметара: $q_1\, q_2\, q_3$ и $p_1\, p_2\, p_3$ и t и њу можемо овако написати:

$$H\,(q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3\, t).$$

Јакобијева теорема гласи: да су канонске једначине једначине карактеристика једначине парцијалне првога реда облика:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}\, \frac{\partial v}{\partial q_2}\, \frac{\partial v}{\partial q_3},\ q_1\, q_2\, q_3\, t\right) = o \cdot \cdot 1).$$

Други се члан ове једначине добија кад се у H смени $p_1\, p_2\, p_3$ са $\dfrac{\partial v}{\partial q_1}\, \dfrac{\partial v}{\partial q_2}\, \dfrac{\partial v}{\partial q_3}$.

Хамилтон је доказао, да кад се знају општи интеграли једначине кретања из канонских форми, из тих се интеграла може наћи комплетни интеграл једначине 1). Јакобије је обрнуто доказао кад се један комплетни интеграл нађе једначине парцијалне 1) из њега се налазе општи интеграли кретања простим диференцијаљењем.

Ако се реше канонске једначине, чији је број за слободну тачку 6, онда имамо решење зависно од 6 констаната и облик је општих интеграла:

$$\begin{aligned} q_\nu &= F_\nu\,(t\, a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3) \\ p_\nu &= G_\nu\,(t\, a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3) \end{aligned} \quad \nu = 1, 2, 3$$

где су a и b константе.

Једначина 1) даје v као функцију од $q_1\, q_2\, q_3\, t$, њен је комплетни интеграл зависан од толико констаната колико има независно променљивих, дакле од четири константе. Ово вреди кад у 1) фигурише и сама непозната функција v, али како то овде није случај, број се констаната своди на три и решење је облика:

$$v\,(q_1\, q_2\, q_3\, t\, a_1\, a_2\, a_3)$$

$$2). \cdot \cdot v + h \text{ је сад комплетни интеграл.}$$

Кад се нађе комплетни интеграл 2), једначине су кретања облика:

$$3). \cdot \cdot \frac{\partial v}{\partial a_1} = b_1 \quad \frac{\partial v}{\partial a_2} = b_2, \quad \frac{\partial v}{\partial a_3} = b_3;$$

$$4). \cdot \cdot p_1 = \frac{\partial v}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial v}{\partial q_2}, \quad p_3 = \frac{\partial v}{\partial q_3}.$$

Из прве три једначине налазимо: $q_1\, q_2\, q_3$ као функције времена t и шест констаката $a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3$ из друге три: $p_1\, p_2\, p_3$.

Ваља сад доказати да су решења последња општи интеграли канонских једначина:

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \qquad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \qquad \nu = 1, 2\ 3 \cdot \cdot 5).$$

Једначине 3) су три једначине симултане између $q_1\ q_2\ q_3\ t$ и ако из њих тражимо изводе $q_1\ q_2\ q_3$ по t имаћемо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a_1\, dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = o$$

$$\cdot \cdot 6).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a_2\ \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_2\ \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_2\ \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_2\ \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = o$$

$$\frac{d^2 v}{\partial a_3\ \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_3\ \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_3\ \partial q_3}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_3\ \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = o.$$

Ако се одавде нађе $\frac{dq_1}{dt}\ \frac{dq_2}{dt}\ \frac{dq_3}{dt}$ видеће се да они задовољавају једначине 5), или ако се у њима замени $\frac{\partial q_1}{dt}$ из 5), имаћемо идендичност:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} = o \quad \cdot \cdot 7).$$

кад се овде смени $q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3$ из 3) и 4).

Ако се у 1) смени v са функцијом $v\,(t\ a_1\ a_2\ a_3\ q_1\, q_2\, q_3)$ резултат је нула за ма какво $q_1\ q_2\ q_3\ t\ a_1\, a_2\, a_3$; што вреди и за парцијалне изводе по $q_1\ q_2\ q_3\ t\ a_1\ a_2\ a_3$.

Из 1) имамо диференцијаљењем по a_1

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial t} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 v}{\partial a_1\ \partial q_2} +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)}\frac{\partial' v}{\partial a_1\ \partial q_3} = o \cdot \cdot 8).$$

8) казује да је 7) доиста равно нули, кад се $p_1\ p_2\ p_3$ смене из 4). То исто вреди за остале две једначине под 6).

На овај је начин показано, да $q_1\ q_3\ q_3$ из 3) задовољавају једначину $\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^\nu}$, тако се исто има доказати да $p_1\ p_2\ p_3$ из 4) задовољавају једначине:

$$\frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu},$$

Ово ћемо показати за p_1

Из 4) имамо:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_1{}^2}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial q_3}\frac{dq_3}{dt}$$

Показали смо да су $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}\ \frac{dq_3}{dt}$ једнаки са $\frac{\partial H}{dp_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}$, кад се ово смени у последњој једначини и стави равно $-\frac{\partial H}{\partial q_\nu}$ имаћемо:

$$8') \cdots \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_1{}^2}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial q_1\ \partial q_3}\frac{\partial H}{\partial v_3} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

Ово мора бити идентичност због 3) и 4).

Из једначине 1) имамо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial q_1\, \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 v}{\partial {q_1}^2} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 v}{\partial q_1\, \partial q_2} +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)}\frac{\partial^2 v}{\partial q_1\, \partial q_3} = o \cdot \cdot 8^2.)$$

Ова је једначина истоветна са 8' у којој смењено $p_1\, p_2\, p_3$ са $\frac{\partial v}{\partial q_1}, \frac{\partial v}{\partial q_2}, \frac{\partial v}{\partial q_3}$ даје израз $o = o$.

Овим је добијена теорема Јакобијева и интеграција је једначина кретања сведена на тражење комплетног интеграла Јакобијеве диференцијалне једначине, из које се диференцијаљењем добијају решења проблема.

§ 176. — *Ако у једначини* Јакобијевој нема t, што се јавља кад xyz зависе само од параметара $q_1\ q_2\ q_3$, или кад је U независно од t, онда је:

$$H(p_1\, p_2\, p_3\, q_1\, q_2\, q_3) = T - U$$

У овоме се случају једначина Јакобијева:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial q_3}\, q_1\, q_2\, q_3\right) = o \cdot \cdot 1).$$

задовољава интегралом комплетним облика:

$$v = -ht + w\,(q_1\, q_1\, q_3) \cdot \cdot 2)$$

Кад се 2) смени у 1) имаћемо:

$$-h + H\left(\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{\partial w}{\partial q_2}\frac{\partial w}{\partial q_3}\, q_1\, q_2\, q_3\right) = o \cdot \cdot 2)'.$$

Комплетни интеграл 2') је дат изразом:

$$w\,(q_1\, q_2\, q_3\, \alpha\, \beta\, h)$$

зависним само од две произвољне константе α и β поред h и облика је:

$$v = -ht + w\,(q_1\, q_2\, q_3\, \alpha\, \beta\, h)$$

Једначине су кретања сад:

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \alpha', \ \frac{\partial w}{\partial \beta} = \beta', \ -t + \frac{\partial w}{\partial h} = -t_0 \cdot \cdot 3).$$

$$p_1 = \frac{\partial w}{\partial q_1}, \ p_2 = \frac{\partial w}{\partial q_2}, \ p_3 = \frac{\partial w}{\partial q_3} \cdot \cdot 4).$$

Прве две једначине немају t и дају облик путање тачке, трећа даје време. Константа h је овде константа живе силе, што јасно показује 2'), и што се може и овако написати $-h + H = -h + T - U = o$; одакле је $T = U + h$.

§ 177. — *Примери.* Кретање бачене материјалне тачке у празноме простору. Нека је хоризонтална осовина ox, oy позитивна на више, трајекторија је у равни. Координате су тачке $x\ y$ $(q_1\, q_1)$, маса је $m = 1$, $U = -gy$ функција је сила.

$H = T - U$, $T = U + h$ први је интеграл живе силе.

Једначина Јакобијева је:

$$-h + {}^1/_2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + gy = o \cdot \cdot 1).$$

Интеграл је облика:

$w = \alpha x + \varphi\,(y) \cdot \cdot 2)$. α је константа.

Заменом у 1) имамо:

$$-h + {}^1/_2\,[\alpha^2 + \varphi'^2\,(y)] + gy = o \cdot \cdot 3).$$

Из 3) се налази φ и заменом у 2) имамо:

$$w = \alpha x + \int \sqrt{2h - \alpha^2 - 2gy}\, dy \cdot \cdot \text{I}).$$

Једначина је трајекторије:

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \alpha', \quad x - \alpha \int \frac{dy}{\sqrt{2h - \alpha^2 - 2gy}} = \alpha' \cdot \cdot 4).$$

Време је:

$$-t + \frac{\partial w}{\partial h} = -t_0, \; -t + \int \frac{dy}{\sqrt{2h - \alpha^2 - 2gy}} = -t_0 \, 5).$$

Из 4) је трајекторија парабола:

$$x + {}^{\alpha}/_{g} \sqrt{2h - \alpha^2 - 2gy} = \alpha' \cdot \cdot 6).$$

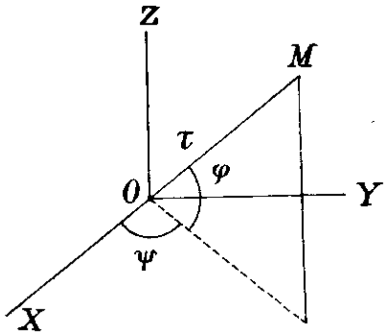
Из 4) и 5) је:

$$t - t_0 = \frac{x - \alpha'}{\alpha}.$$

$$p_1 = \frac{\partial v}{\partial q_1} \text{ и } p_2 = \frac{\partial v}{\partial q_2} \text{ су овде:}$$

$$x' = \alpha \text{ и } y' = \sqrt{2h - \alpha^2 - 2gy}$$

§ 178. — *Кретање у простору једне планете.* Нека су планете M координате r, φ и ψ. Раван xy је раван еклиптике, оса ox спаја сунце са тачком верналном (пролетње равнодневице), φ је латитуда, ψ лонгитуда планете.



Сл. 111.

Функција је силе $U = \frac{\mu}{r}$, маса планете је $m = 1$.

$$T = {}^1/_2 \, [r'^2 + r^2 \varphi'^2 + r^2 \cos^2 \varphi \, \psi'^2],$$

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r', \; p_2 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2 \varphi', \; p_3 = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = r^2 \cos^2 \varphi \psi',$$

$$H = T - U = {}^1/_2 \left[p_1^{\,2} + \frac{p_2^{\,2}}{r^2} + \frac{p_3^{\,2}}{r^2 \cos^2 \varphi} \right] - \frac{\mu}{r}.$$

Јакобијева је једначина:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{r} + h \cdot \cdot 1).$$

Комплетни је интеграл облика:

$$w = R + \Phi + \Psi \cdot \cdot 2).$$

R, Φ, Ψ су функције само од r, φ и ψ.

Из 1) и 2) имаћемо:

$$\frac{1}{2} \left(R'^2 + \frac{1}{r^2} \Phi'^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \Psi'^2 \right) = \frac{\mu}{r} + h$$

или:

$$\Phi'^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Psi'^2 = r^2 \left(2h + \frac{2\mu}{r} - R'^2 \right).$$

Ово може постојати ако су обе стране једнаке истој константи G^2, и кад се то стави, налази се за R:

$$R = \int \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\, dr,$$

и

$$\Phi'^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Psi'^2 = G^2,$$

или:

$$\Psi'^2 = (G^2 - \Phi'^2) \cos^2 \varphi,$$

Последња једначина може постојати ако су обе стране једнаке једној истој константи н. пр. L^2, одакле је:

$$\Psi' = L \text{ и } \Psi = L\psi \text{ и}$$

$$\Phi = \int \sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Кад се нађене вредности за R, Φ и Ψ ставе у w, имамо да је комплетни интеграл:

$$w = \int \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\, dr + L\psi + \int \sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Једначине су кретања:

$$\frac{\partial w}{\partial G} = c, \quad \frac{\partial w}{\partial L} = \psi_0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial h} = t - t_0,$$

или:

$$-G\int^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} + G\int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}} = C \cdot\cdot 3).$$

$$\psi - L\int^{\varphi} \frac{d\varphi}{Cos^2\varphi \sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}} = \psi_0 \cdot \cdot 4).$$

$$\int^{r} \frac{dr}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} = t - t_0 \cdot \cdot \cdot 5).$$

Прве две једначине 3) и 4) дају трајекторију, трећа 5) даје време t:

Значај констаната у 3) 4) и 5). Знамо за планете да је орбита елиптична, максимални и минимални радијуми, што одговарају афелији и перихилији, су $a(1 + e) = r_1$ и $a(1 - e) = r_2$.

Из 5) имамо:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}$$

Да је r стварно, поткорена количина мора да је $> o$, а она је облика $(r - r_1)(r - r_2)$, кад се то сврши имамо да су:

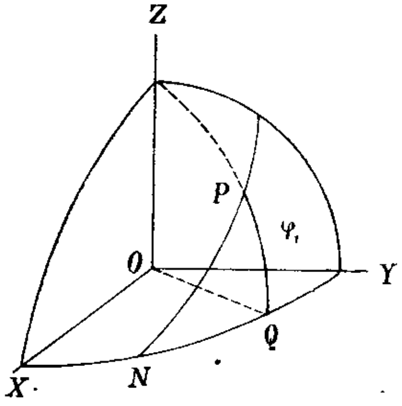
$$h = -\frac{\mu}{2a},\ G^2 = \mu a(1 - e^2) = \mu p,\ G = \sqrt{\mu p}$$

Из 4), да је ψ стварно, мора $G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi} >= o$.

Максимално φ је i угао орбите са еклиптиком:

$$\frac{L}{G} = \cos\varphi = \cos i,\ L = \sqrt{\mu p}\cdot\cos i.$$

Доње су границе: за угао $\varphi = o$, кад је планета у N и за r одговарајуће $r = a(1 - e)$, кад је тачка (планета) у перихелиуму P. Из 5) је t_0 онда епоха перихилиума, из 4) је ψ_0 лонгитуда чвора N.



Сл. 116.

Из 3) је:

$$G\int_{\partial}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{L^2}{\cos^2\varphi}}} = C \cdot \cdot 6).$$

φ_1 је латитуда перихелиума, како је $L = G\cos i$ из 6) је:

$$\int_{\delta}^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}} = C$$

или:

$$arc\sin\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin i}\right) = C \text{ или } \sin\varphi_1 = \sin i \sin C \cdot \cdot 7).$$

Ако је $PQ = \varphi_1$ латидуда перихелиума, из сверног је троугла NPQ:

$$\sin\varphi_1 = \sin NP \sin i \cdot \cdot 8).$$

Из 7) и 8) јасно је, да је $C = NP$ а то је угао реона вектора перихелијума са реоном вектором чвора N.

ЛИТЕРАТУРА

Lagrange — Mécanique analytique (1787) (примена Лагранжове једначине).
Francesco Siacci — Reale Accademia dei Lince 1881—83.
Routh — Dynamic of rigid bodie.
Goursat — Sur l'integration des equations aux deriveés partielles.
Mayer — Mathematische Annalen — t XIII.
Levy — Comptes rendus t. CV.
Kobb — Bulletin des Sciences mathématiques t. XXIII.
Darboux — « « t. XVII 1881.
Koenigs — Comptes rendns 1896.
Goursat — Transformations isogonales en Mécanique, Comptes rendus t. CVIII.
Gilbert — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvements rélatifs.

ДРУГИ ОДЕЉАК
ДИНАМИКА СИСТЕМА

ГЛАВА XVI.

Моменат инерције (лењивости)

I. Општи део.

§ 179. — При посматрању кретања система тачака, тела, срећемо се са интегралима облика:

$$\Sigma\, m\, f(xyz),$$

који се своде у теорији тежишта на изразе:

$$\Sigma\, mx,\ \Sigma\, my,\ \Sigma\, mz \text{ и изразе:}$$

$\Sigma\, mx^2$, $\Sigma\, my^2$, $\Sigma\, mz^2$, $\Sigma\, mxy$, $\Sigma\, mxz$, $\Sigma\, myz$ (Huy
у теорији момената инерције.

У практици имамо само моменте инерције у односу осовина, али у теорији можемо говорити и о моментима у односу равни и тачке.

1). Моменат инерције у односу на раван је сума производа из масе сваке тачке и квадрата одстојања δ тачака од равни, $\Sigma\, m\, \delta^2$.

2). Моменат лењивости односно осовине је сума производа масе са квадратом одстојања тачака r^2 од осовине, $\Sigma\, mr^2$. Овај се моменат бележи обично MK^2, где је M маса целог система K полупречник замајивања система у односу осовине.

3). Моменат лењивости у односу на тачку је сума производа маса тачака система и квадрата одстојања тих тачака од дате тачке.

Ако кроз једну тачку 0 пролазе три осовине x, y, z које се секу под правим углом, моменти су лењивости односно три равнине:

$$\Sigma\, mx^2,\ \Sigma\, my^2,\ \Sigma mz^2.$$

Односно осовина су моменти лењивости:

$$\Sigma\, m\,(y^2 + z^2),\ \Sigma\, m\,(z^2 + x^2),\ \Sigma\, m\,(x^2 + y^2),$$

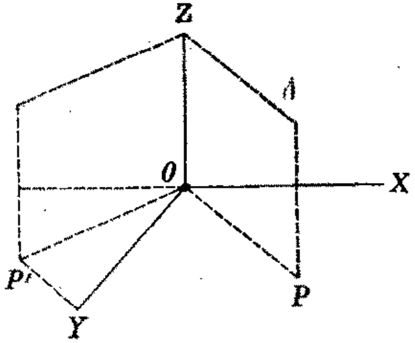
односно тачке:

$$\Sigma\, m\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Из овога излази да је:

1). Моменат лењивости односно осе: једнак моментима односно две равни, што пролазе кроз ту осу.

2) Моменат односно тачке је: раван суми момената односно три равни, што се секу у тачци.



Сл. 113.

4). *Производи инерције.* Овако се зову изрази $\Sigma\, myz$, $\Sigma\, mzx$ и $\Sigma\, mxy$, јер се своде на моменте лењивости. Ако се кроз zox и zoy повуче раван која полови угао диједар између њих, ZoP и ZoP, имају за једначине:

$$x + y = o \text{ и } x - y = o$$

Ако са δ и δ' обележимо одстојање једне тачке од ових равнина имаћемо:

$$\delta^2 = {}^1/_2\,(x + y)^2 \text{ и } \delta'^2 = {}^1/_2\,(x - y)^2$$

и

$$\Sigma\, mxy = {}^1/_2\,(\Sigma\, m\delta^2 - \Sigma\, m\delta'^2)$$

§ 180. — *Континуирни системи.* За одредбу момента лењивости ма какве хомогене масе у место израза $\Sigma\, mx^2$ и $\Sigma\, myz$ узимамо $\iiint \varrho x^2\, dv$ и $\iiint \varrho yz\, dv$, где се масе смењују са $\varrho dv \cdot \varrho$ је густина а v запремина.

Пример. За моменте инерције свере хомогене, чија је густина ϱ, тражићемо прво моменат инерције μ свере у односу центра. Овај је моменат, ако је R полупречник свере, функција R.

$$d\mu = 4\pi\, R^2\, \varrho\, dR \cdot R^2.$$

Интегришући од 0 до R имаћемо:

$$\mu = {}^4/_5\, \pi\, \varrho\, R^5.$$

Моменат лењивости је односно равни дијаметралне:

$${}^1/_3\, \mu = {}^4/_{15}\, \pi\, \varrho\, R^5$$

Моменат лењивости односно једног дијаметра је:

$$J = {}^2/_3\, \mu = {}^8/_{15}\, \pi\, \varrho\, R^5 = M\, {}^2/_5\, R^2$$

$M = {}^4/_3 \pi \varrho\, R^3$ је маса кугле. Из једначине $J = MK^2$, полупречник је замајивања $K = R\, \sqrt{{}^2/_5}$.

Пример. Моменат лењивости елипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \cdot \quad \cdot \; 1),$$

Моменат лењивости односно xy равни је:

$$\Sigma\, mz^2 = \int_3 \varrho\, z^2\, dx\, dy\, dz \quad \cdot \quad \cdot \; 2)$$

Ако се у 1) изврши замена $x = ax'$, $y = by'$ $z = cz'$, из 2) имамо:

$$\Sigma\, mz^2 = abc^3 \iiint \varrho\, z'^2\, dx'\, dy'\, dz' \cdot \cdot 4).$$

Интеграл је сад односно свере $x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = o$ и за моменат инерције односно равни дијаметралне имамо: $^4/_{15}\, \pi\varrho\, (R=1)$, и кад се ово смени у 4) имаћемо:

$$\Sigma\, mz^2 = {}^4/_{15}\, \pi\varrho\, abc^3 = M\, \frac{c^2}{5}, M = {}^4/_3\, \pi\varrho\, abc \text{ је}$$

маса елипсоида.

Моменти су лењивости односно равни xz и yz $M\frac{b^2}{5} M\frac{a^2}{5}$.

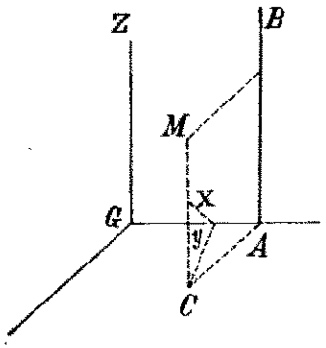
Моменти лењивости односно осовина ox, oy и oz су:

$$M\frac{b^2 + c^2}{5}, \quad M\frac{c^2 + a^2}{5}, \quad M\frac{a^2 + b^2}{5};$$

односно центра: $\dfrac{M(a^2 + b^2 + c^2)}{5}$

II. Опште теореме.

§ 181. — Варијација момента лењивости система према осовини која се паралелно помера.



Сл. 118.

Моменат инерције система односно једне осовине је једнак моменту инерције односно осе, што иде кроз тежиште а паралелна је са првом више производу из целе масе и квадрата одстојања тих осовина.

Нека је произвољна осовина AB, $GZ \parallel AB$ осовина што иде кроз тежиште G, $GA = x = a$. Моменат лењивости тела односно осовине AB је:

$$\Sigma m\, [(x - a)^2 + y^2] = \Sigma m\, (x^2 + y^2) + a^2\, \Sigma m - 2a\, \Sigma mx.$$

Σmx је нула, јер је тежиште у почетку система и отуда је:

$$\Sigma m\, CA^2 = \Sigma m\, (x^2 + y^2) + a^2\, M$$

$$\Sigma m\, CA^2 = J_G + a^2\, M = J_A.$$

јер је $\Sigma m\, (x^2 + y^2) = J_G$ моменат лењивости односно осе CZ и последњом је једначином теорема доказана.

Ако у место осе AB узмемо другу осовину $A_1 B_1$ и њено одстојање од GZ обележимо са a_1, имаћемо однос:

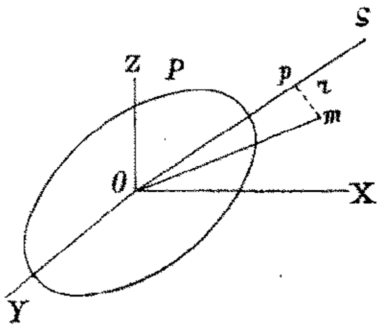
$$J_{A_1} = J_G + a_1{}^2\, M,$$

Одузимањем ових једначина добијамо:

$$J_A - J_{A_1} = M\, (a^2 - a_1{}^2)$$

која нам даје J_{A_1} кад знамо J_A и положај тежишта.

Ова теорема вреди односно тачке и равни према тежишту.



Сл. 119.

§ 182. — *Елипсоид инерције* (Poinsot). Ако узмемо једну произвољну тачку O и кроз њу повучемо произвољну праву ϱ, а тачку O сматрамо у почетку координатног система, моменат је лењивости тела односно произвољне праве $o\varrho$:

$$\Sigma m\, r^2$$

Нека су $\alpha \beta \gamma$ косинуси прав $o\varrho$. Из слике је:

$$r^2 = mp^2 = \overline{0m}^2 - \overline{0p}^2, \text{ или}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

или

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

или

$$r^2 = \alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 (z^2 + x^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - \\ - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy.$$

Кад се ово замени у моменат лењивости, добија се израз облика:

$$\Sigma mr^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - \\ - 2F\alpha\beta \cdot \cdot 1).$$

A, B C су моменти лењивости односно оса координатних.

Геометријско тумачење. Ако се по правој 0ϱ с једне и друге стране пренесу дужине $0P$ такве, да је $\frac{1}{0P} = \Sigma mr^2$ и тражи место тачака $P(X, Y, Z)$, имаћемо због:

$$\alpha = \frac{X}{0P}, \ \beta = \frac{Y}{0P}, \ \gamma = \frac{Z}{0P} \ \text{ и } \ \frac{1}{0P^2} = \Sigma mr^2$$

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY \cdot\cdot 2).$$

2). је једначина елипсоида, јер је Σmr^2 увек позитивно. За случај да су све тачке система на правој што иде кроз 0, $\Sigma mr^2 = o$ и елипсоид лењивости прелази у цилиндар обртни око ове праве.

Елипсоид се 2 зове елипсоид инерције, његове се равни и осе симетрије зову главне равни и главне осе инерције. Елипсоид инерције односно тежишта зове се централни елипсоид инерције.

Кад се одреди односно тачке 0 елипсоид инерције, онда се моменат лењивости тела лако налази у односу ма које праве, што иде кроз 0. Ваља само повући праву и наћи њен пресек са елипсоидом P, из дужине се $0P$ помоћу односа $\frac{1}{0P^2} = \Sigma mr^2$ зна одмах и моменат лењивости. Најмањи је моменат лењивости у односу велике осовине елипсоидове.

Ма какав се елипсоид не може сматрати као елипсоид лењивости. Ако се елипсоид лењивости однесе на његове осе, облик му је једначине:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \ B = \Sigma m (z^2 + x^2), \ C = \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Јасно је: да је ма која од количина A, B, C мања од збира друге две, а A, B, C су моменти инерције односно три осе.

Ако је тело, чији се елипсоид лењивости тражи, облика плоче у равни xy, једна је оса главна $0z$ а $0x$ и $0y$ су друге две, z је нула и $C = A + B$.

За извесну тачку у простору може елипсоид инерције прећи у сверу, треба да је за ово елипсоид инерције односно тежишта елипсоид револуциони спљоштен и онда на његовој осовини има две симетричке тачке према тежишту за које се своди елипсоид на сверу.

Пример. Моменат је лењивости паралелопипеда чије су ивице $a\,b\,c$ односно правих, што иду кроз тежиште:

$$M\frac{b^2 + c^2}{12}, \quad M\frac{c^2 + a^2}{12}, \quad M\frac{a^2 + b^2}{12}$$

ГЛАВА XVII.

Опште теореме о кретању система.

§ 183. — Материјални систем, био у чврстом течном или гасовитом стању, сматра се да се састоји из великог броја честица материјалних које нарочите услове задовољавају. Услов, који честице чврстих тела задовољавају, састоји се у томе: да су међусобна одстојања тих честица стална и непромењива. До општих се теорема кретања система долази, ако се напишу једначине кретања за сваку честицу и све сумирају.

I. Теорема о пројекцији количине кретања или кретање тежишта.

§ 184. — Код система разликујемо две врсте сила: унутарње, које узајамно дејствују између честица и спољне у које долазе све остале силе. Унутарње су између честица једнаке и супротно означене, услед принципа акције и реакције.

Ако масе појединих честица, чије су координате $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2 \cdots$, означимо са $m_1, m_2, m_3 \cdots$, силе унутарње обележимо са $X_i\, Y_i\, Z_i$ и спољне са $X_e\, Y_e\, Z_e$, једначине су кретања за тачку чија је маса m и координате x, y, z:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i + \Sigma X_e \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_i + \Sigma Y_e \cdot \quad \cdot 1). \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_i + \Sigma Z_e. \end{aligned}$$

Σ значи да треба узети све спољне и унутарње силе, које долазе од дејства свих честица на честицу m.

Ако напишемо једначине као 1) за све честице m и сумирамо их, имаћемо овакве једначине:

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma\Sigma X_i + \Sigma\Sigma X_e,$$

и још две сличне. Израз $\Sigma\Sigma X_i$ отпада, јер представља суму свих узајамних унутрашњих сила, које се потиру, као што је речено и једначине су кретања система:

$$\begin{aligned} \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma\Sigma X_e \\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma\Sigma Y_e \cdot \quad \cdot 2) \\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma\Sigma Z_e. \end{aligned}$$

Ове се једначине могу и овако написати:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right) &= \Sigma\Sigma X_e \\ \frac{d}{dt}\Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right) &= \Sigma\Sigma Y_e \cdot \quad \cdot \mathrm{I}). \\ \frac{d}{dt}\Sigma\left(m\frac{dz}{dt}\right) &= \Sigma\Sigma Z_e, \end{aligned}$$

Једначинама I) је изражена теорема о количини кретања, која гласи:

Теорема. — Изводи по времену суме пројекција величине кретања $\left(m\frac{dx}{dt}\right)$ *тачака система на ма коју осу једнаки су суми пројекција спољних сила на исту осу.*

Једначинама се I) може дати и другојачији облик. Ако се са M обележи маса система, са $\xi\ \eta\ \xi$ координате тежишта, знамо из статике за односе:

$$M\xi = \Sigma mx,\ M\eta = \Sigma my,\ M\xi = \Sigma mz.$$

Одавде је:

$$\frac{M\,d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{dx^2}{dt^2},\ \ \frac{M\,d^2\eta}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{M\,d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Кад се ово смени у I, једначине кретања прелазе у ове:

$$\frac{Md^2\xi}{dt^2} = \Sigma\Sigma X_e,\ \frac{Md^2\eta}{dt^2} = \Sigma\Sigma Y_e,\ \frac{Md^2\xi}{dt^2} = \Sigma\Sigma Z_e \cdot\ \cdot \text{II}).$$

и оне изражавају теорему о тежишту, која гласи:

Теорема. Тежиште се система креће као материјална тачка, чија би маса била једнака са масом целог система и на коју би дејствовале силе једнаке и паралелне спољним силама. (Newton).

§ 185. — *Нема* спољних сила. Из II је јасно кад нема спољних сила да се тежиште креће по правој линији једнако. Ово вреди за сунчани систем.

Ако се посматра кретање тешког тела у празном простору, једина сила што дејствује је $\Sigma mg = Mg$, тежиште се креће по пароболи.

Пример. Трзања топова. Нека је M маса топа, m маса пројектила, μ маса честице барута. Пре сагоревања барута брзина је тежишта била нула, после сагоревања такође мора бити нула, јер су се само унутарње силе јавиле. Ако са V, v и w означимо брзине почетне: топа, пројектила и честице μ, по теореми II имамо:

$$MV - \Sigma\mu w - mv = o \cdot\ \cdot 1).$$

w се узима да је равно $\frac{v - V}{2}$ и заменом у 1 имамо:

$$V = \frac{v\,(2m + m')}{2M + m'};\ m' = \Sigma\mu.$$

Пример. Ако се посматра систем, који привлачи извесна сила из центра O, онда ваља привлачну снагу пренети на тежиште и сматрати систем као тачку масе целог система. Случај се своди одмах на кретање материјалне тачке, због теореме II.

II. Теорема момената величине кретања.

§ 186. — Из једначина (§ 184.), кад се прва једначина помножи са $-y$, друга са x и саберу имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right)\right] = \Sigma\,(x\,Y_i - y\,X_i) + \Sigma(x\,Y_e - y\,X_e),$$

и сличне још две.

Ако се овакве једначине напишу за све материјалне тачке и све саберу, а израз се $\Sigma\Sigma\,(x\,Y_i - y\,X_i)$ изостави, јер је раван нули, добићемо једначине:

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma\,m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\Sigma\,(x\,Y_e - y\,X_e) \cdot\ \cdot \text{I}).$$

и две сличне.

Овим једначинама је обухваћена теорема:

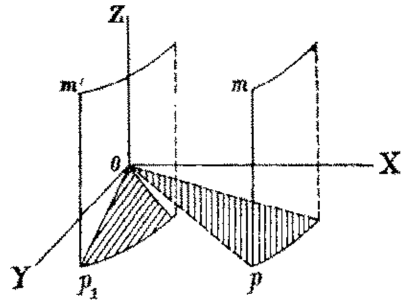
Теорема. Изводи по времену суме момената величине кретања, односно ма које сталне осе, једнаки су са сумом момената спољних сила у односу исте осовине.

§ 187. — *Теорема о површинама* (théorème des aires). Нека је сума момената спољних сила у односу какве осовине, на пр. $z^{ске}$, стално нула, једначине I § 186. дају:

$$\Sigma m\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right)=C\,(constante),\ \cdot\ \cdot\ 2).$$

шта казује, да је сума момената величине кретања у односу исте осовине стална. Ово је теорема површина.

Из овога излази: да се теорема површина за случај, кад су моменти спољних сила у односу какве осовине нула, примењује и на пројекције кретања у равни нормалној на тој осовини.



Сл. 116.

Пројекције су материјалних тачака m, m_1 и т. д. на $xy^{ској}$ равнини p, p_1 и т. д. Ако са A, $A_1 \cdots$ обележимо површине описане радијусима op, $op_1 \cdots\cdots$ имаћемо:

$$2d\,A = x\,dy - ydx,$$

$$\Sigma\,m\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right)=2\,\Sigma\,m\,\frac{dA}{dt}$$

Из 2) је:

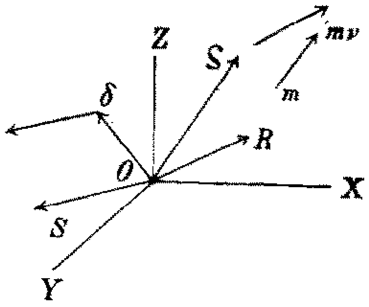
$$2\,\Sigma\,m\,\frac{dA}{dt}=C$$

или

$$\Sigma m\,A=\frac{C}{2}\,t+C'\ \cdot\ \cdot\ 3)$$

У овој је једначини исказала теорема о површинама: суме производа из маса тачака и површина, што их пројекције одстојања om, $om_1 \cdots$ у равни oxy описују, сразмерне су са временом. C се зове константа површине и једнака је двојној варијацији израза ΣmA за јединицу времена. (Newton, D. Arcy, D. Bernouilli (1746)).

§ 188. — *Обе се нађене теореме дају геометријски протумачити лако.*



Сл. 117.

Ако се кроз сваку тачку m система повуче вектор једнак величини кретања mv, сви ови вектори имају једну резултанту 0ϱ, чије су пројекције:

$$\alpha=\Sigma m\,\frac{dx}{dt},\ \beta=\Sigma m\,\frac{dy}{dt};\ \gamma=\Sigma m\,\frac{dz}{dt}\ \cdot\ \cdot\ 1).$$

Момента 0δ величине кретања су пројекције:

$$\lambda=\Sigma m\left(y\,\frac{dz}{dt}-z\,\frac{dy}{dt}\right),\ \mu=\Sigma m\left(z\,\frac{dx}{dt}-x\,\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\nu=\Sigma m\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right).$$

Резултанта је спољних сила $0R$ и њене су пројекције:

$$X=\Sigma\Sigma\,X_e,\qquad Y=\Sigma\Sigma\,Y_e\qquad Z=\Sigma\Sigma\,Z_e$$

Моменат резултујући ових сила у односу тачке 0 је: $0S$, његове су пројекције:

$$L = \Sigma\Sigma\,(y\,Z_e - z\,Y_e),\ M = \Sigma\Sigma\,(z\,X_e - x\,Z_e),$$
$$N = \Sigma\Sigma\,(x\,Y_e - y\,X_e).$$

Теорема пројекције величине кретања се онда да изразити једначинама:

$$\frac{d\alpha}{dt} = X, \frac{d\beta}{dt} = Y, \frac{dz}{dt} = Z \cdot \quad \cdot \text{I)}.$$

и теорема момената величине кретања је:

$$\frac{d\lambda}{dt} = L, \frac{d\mu}{dt} = M, \frac{d\nu}{dt} = N \cdot \quad \cdot \text{II)}.$$

Једначине под I и II изражавају: да су брзине тачака геометријских ϱ и δ једнаке и паралелне са сегментима $0R$ и $0S$, који представљају резултанту спољних сила и њен моменат (осовину момента).

§ 189. — *Ако је* моменат спољних сила у односу тачке 0 нула, онда су $L = M = N = o$, $0S = o$, тачка δ је стална и λ, μ, ν су сталне количине за ма какве осовине, што иду кроз 0. Теорема се о површинама примењује на ма коју раван кроз 0. Ако узмемо ма коју раван P кроз 0 и њу сматрамо за xy, имаћемо:

$$\Sigma m \left(x\,\frac{\partial y}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} \right) = \nu\ (constante)$$

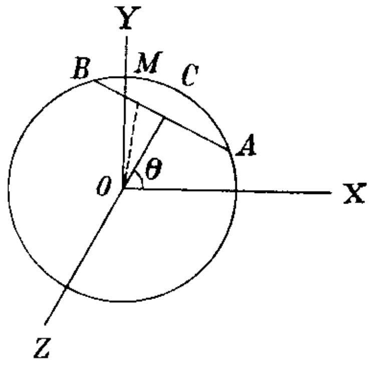
Константа ν је пројекција сегмента $o\delta$ на осу $0z$ т. ј. на нормалу површине P. Међу свима равнима што иду кроз 0 највећа је константа ν, за раван нормалну на $o\delta$. Та се раван зове максималне површине раван. За раван што иде кроз 0δ, константа је $\nu = o$.

§ 190. — *Сума момената* величине кретања тачака тела чврстог, које се обрће око једне осе, односно ове осовине. Нека се тело окреће око $oz^{ске}$ осовине брзином угаоном ω; нека су r и θ координате поларне пројекције једне тачке масе m (xyz) на равни xy. По теореми о величини кретања имамо:

$$m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} \right) = mr^2\,\frac{d\theta}{dt} = mr^2\omega.$$

Ако се са Mk^2 обележи моменат инерције тела односно ротационе осовине, сума је момената величине кретања свих тачака тела односно осовине:

$$\Sigma mr^2\omega = Mk^2\omega.$$



Сл. 118.

§ 191. — *Пример.* Крајеви полуге AB могу клизити по периферији круга без трења. Маса је полуге хомогене m, њена дужина $2a$, R је полупречник круга. На полузи се налази инсекат M, масе m и то у средини полуге пре клизења. Кад инсекат почне кретање ка B из C брзином v једнако, полуга почиње да клизи, наћи кретања система.

Нека је $r = CM$, $Cox = \theta$, $\qquad r = vt.$

Спољне су силе 1). тежа и 2). нормална реакција круга на крајевима полуге у A и B. Моменти су свих сила нула у односу oz, сума је момената величине кретања константна и нула, пошто је у почетку брзина полуге и инсекта била нула.

Угаона је брзина полуге $\frac{d\theta}{dt}$, моменат величине кретања полуге је $mk^2 \frac{d\theta}{dt}$, mk^2 је моменат лењивости полуге односно oz.

Координате су инсекта M: $\varrho = oM$ и $\alpha = xoM$. Моменат је величине кретања $m\varrho^2 \frac{\partial\alpha}{dt}$. Сума ових момената је нула:

$$k^2 \frac{d\theta}{dt} + \varrho^2 \frac{d\alpha}{dt} = o \cdot \quad 1).$$

Из троугла $C0M$ је:

$$\varrho = \sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2}, \quad \alpha = \theta + arctg \frac{vt}{\sqrt{R^2 - a^2}} \cdot \cdot 2)$$

Из 1) и 2) је:

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{v\sqrt{R^2 - a^2}}{k^2 + R^2 - a^2 + v^2 t^2}$$

$$\theta = \theta_0 - \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{k^2 + R^2 - a^2}}\, arctg. \frac{vt}{\sqrt{k^2 + R^2 - a^2}}.$$

θ_0 је θ за $t = o$. Из једначине за ϱ и α налазимо и ове две количине.

Кад инсекат дође у B, $vt = a$ из чега се налази $\theta - \theta_0$. Моменат инерције полуге AB односно тежишта C је

$$\int_{-a}^{+a} \mu r^2 dr = \frac{2\mu a^3}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

μ је маса јединице дужине AB

Моменат је инерције mk^2 односно oz:

$$m\frac{a^2}{3} + m0C^2 = mk^2,$$

$$k^2 = R^2 - \frac{2a^2}{3}.$$

Ако се инсекат заустави једнога момента на кругу, цео систем стане, ако то не буде, значило би да сума момената величине кретања није била равна нули у почетку.

§ 192. — *Релативна кретања* односно оса, које се крећу транслаторно и једнако. Ако су $0'\, x'\, y'\, z'$ осовине паралелне сталним осовинама $0x\, yz$, и $a\, bc$ су координате тачке $0'$ у односу сталног система, ако са $x'\, y'\, z'$ обележимо координате једне тачке нашега тела, xyz су апсолутне координате, имаћемо:

$$x = a + x', \quad y = b + y' \quad z = z + z'$$

Ако се $0'$ креће по правој линији једнако, онда је:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} = o$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Пројекције су сила исте у новом систему, као и старом, значи да је кретање такво, као да $0'\, x'\, y'\, z'$ мирује.

§ 193. — *Теорема* момената величине кретања у релативноме кретању око тежишта. Теорема се о моменту величине кретања примењује на релативно кретање система односно оса сталних, што иду кроз тежиште.

Ако са xyz обележимо корднинате ма које тачке система односно сталних осовина; са $\xi\, \eta\, \xi$ координате тежишта у староме систему, са $x'\, y'\, z'$ координате тачке у новом систему, паралелном са старим, са почетком у тежишту, имаћемо:

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y' \quad z = \xi + z' \cdot \cdot 1).$$

Теорема, која се има доказати, исказана је једначином:

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(x'\,\frac{dy'}{dt}-y'\,\frac{dx'}{dt}\right)=\Sigma\Sigma\,(x'\,Y_e-y'\,X_e)\;\cdot\;\cdot\;\mathrm{I}).$$

Да би доказали теорему, поћићемо од:

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma\Sigma\,m\,(x\,Y_e-y\,X_e)\;\cdot\;\cdot\;2).$$

Из 1). и 2). имамо:

$$m\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right)=m\left(\xi\,\frac{d\eta}{dt}-\eta\,\frac{d\xi}{dt}\right)+$$
$$+\,m\left(x'\,\frac{dy'}{dt}-y'\,\frac{dx'}{dt}\right)+mx'\,\frac{d\eta}{dt}-my'\,\frac{d\xi}{dt}+$$
$$+\,m\xi\,\frac{dy'}{dt}-m\eta\,\frac{dx'}{dt}\;\cdot\;\cdot\;3).$$

Кад се све једначине напишу и саберу, с погледом на изразе:

$$\Sigma mx'\,\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\eta}{dt}\,\Sigma mx'=o \quad \text{и}$$

$$\Sigma m\xi\,\frac{dy'}{dt}=\xi\,\Sigma m\,\frac{dy'}{dt}=o, \quad \text{имаћемо:}$$

$$\Sigma m\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right)=M\left(\xi\,\frac{d\eta}{dt}-\eta\,\frac{d\xi}{dt}\right)$$
$$+\,\Sigma m\left(x'\,\frac{dy'}{dt}-y'\,\frac{dx'}{dt}\right)\;\cdot\;\cdot\;4).$$

Једначином 4, исказана је:

Теорема: Сума момената величине кретања, односно једне сталне осовине, једнака је моменту величине кретања целе масе система сасређене у тежишту, више суми момената величине кретања

односно осовине паралелне са првом, што иде кроз тежиште.

Пређимо сад на одредбу другог члана у једначини 2). Кад се у томе изразу смене xyz из 1). имаћемо:

$$\Sigma\Sigma\,(x\,Y_c-y\,X_e)=\Sigma\Sigma\,(\xi\,Y_c-\eta\,X_e)+\Sigma\Sigma\,(x'\,Y_e-y'\,X_e)\cdot\cdot\,5).$$

Заменом ових израза из 4) и 5 у 2), и с погледом на односе:

$$\frac{d}{dt}\,M\left(\xi\,\frac{dy}{dt}-\eta\,\frac{d\xi}{dt}\right)=M\left(\xi\,\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\,\frac{d^2\xi}{dt^2}\right),$$

и

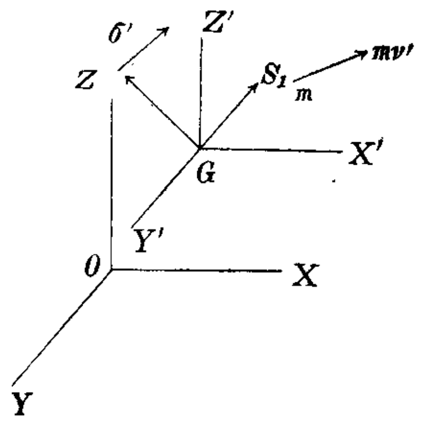
$$M\left(\xi\,\frac{d^2\eta}{dt^2}-y\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\xi\,\Sigma\Sigma\,Y_c-\eta\,\Sigma\Sigma\,X_e,$$

имамо теорему о релативном кретању, изражену изразом:

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma\,m\left(x'\,\frac{dy'}{dt}-y'\,\frac{dx'}{dt}\right)=\Sigma\Sigma\,(x'\,Y_c-y'\,X_e)\cdot\cdot\,\mathrm{I}).$$

Геометријско је тумачење и овде слично ранијем у апсолотном кретању. Ако је $G\sigma'$ резултујући моменат односно тежишта G сегмената, што представљају количине кретања релативног mv' и GS' релултујући моменат сила спољних, теорема се онда исказује овако:

Релативна брзина односно оса $G\,x'\,y'\,z'$ тачке σ' првога момента јесте једнака и паралелна са GS'.



Сл. 119.

§ 194. — *Теорема о површинама.* 1). Ако је моменат спољних сила, у односу какве осовине кроз тежиште на пр. oz, једнак нули, имаћемо:

$$\Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=C\,(constante)\;\cdot\;\cdot\;1).$$

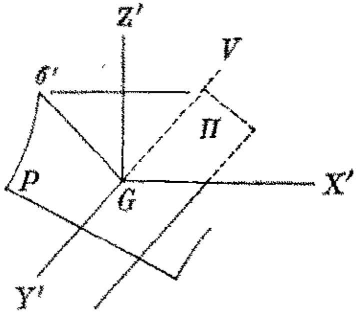
Теорема се о површинама онда примењује на раван $x'\,G\,y'$

2). Ако је моменат спољних сила односно тежишта G односно оса Gx_1, Gy_1, Gz_1, нула, онда се теорема момената примењује на ма коју раван кроз тежиште и поред 1]. имамо и ове две једначине:

$$\Sigma m\left(y'\frac{dz'}{dt}-z'\frac{dy'}{dt}\right)=A$$

$$\Sigma m\left(z'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dz'}{dt}\right)=B.$$

У овоме случају сегменат GS' је нула, тачка σ' има релативну брзину нула и сегменат $G\sigma'$ је сталан по величини и правцу, његове су пројекције на Gx', Gy', Gz': A, B, C. Константа површине је, у односу равни P, пројекција $G\sigma'$ на нормали GV те равнине. За раван π, управној на $G\sigma'$, константа је површине највећа и та се равни зове раван максимума површина.



Сл. 120.

3). *Непомична равна* Лапласова. Ако се занемаре масе звезда, систем сунчани чини тело на које спољне силе не дејствују. Моменат резултујући $G\sigma'$ је сталан по правцу и величини, а односи се на систем — кроз тежиште G близу сунца. Кад се у извесној епохи одреде количине A, B, C, које одређују тај сегменат, раван управна на ABC, зове се раван максимума површина и она је по Лапласу непомична у сунчевоме систему. Лаплас и Поенсо су одредили ову раван, први узимајући да су планете сведене на тачке, а други је водио рачуна и о обртању планета око својих осовина.

II. Теорема о живим силама.

§ 195. — Ако пођемо од једначина, које вреде за једну материјалну тачку у систему:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X_i+\Sigma X_e$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y_i+\Sigma Y_e$$

$$m\frac{d^2z}{dt}=\Sigma Z_i+\Sigma Z_e$$

и помножимо их редом са dx, dy, dz и саберемо, имаћемо:

$$d\frac{mv^2}{2}=\Sigma(X_i\,dx+Y_i\,dy+Z_i\,dz)+$$
$$+\Sigma(X_e\,dx+Y_e\,dy+Z_e\,dz)\;\cdot\;\cdot\;1).$$

Ако образујемо суму свих сличних једначина и за остале тачке, имаћемо:

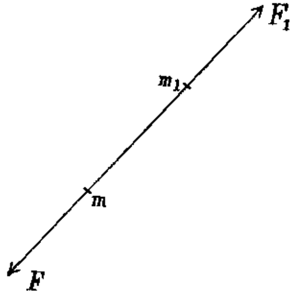
$$d\Sigma\frac{mv^2}{2}=\Sigma\Sigma(X_i\,dx+Y_i\,dy+Z_i\,dz)+$$
$$+\Sigma\Sigma(X_e\,dx+Y_e\,dy+Z_e\,dz)\;\cdot\;\cdot\;I).$$

Σmv^2 се зове тотална жива сила (Leibnitz).

Једначина I. садржи теорему:

Диференцијал половине живе силе целога система раван је суми елементарних радова свих сила, унутарњих и спољних.

Овде не отпадају радови унутарњих сила.



Сл. 121.

Ако посматрамо две честице m и m_1, унутарње су силе F и F_1 једнаке и супротно означене. Узајамно је дејство ових тачака заједничка вредност ове две сила F са знаком + или —, да ли је репулсија или атракција. Ако се одстојање њихово означи са r и помери за dr, сума је радова Fdr и ово се зове елементарни рад узајамног дејства обе силе на две тачке.

Ако се са F_jk обележи узајамно дејство између m_j и m_k у одстојању r_{jk}, рад је унутарњих сила:

$$\Sigma\Sigma\,(X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz) = \sum_{jk} F_{jk}\,dr_{jk}.$$

Теорема о живим силама изгледа, по замени последњег израза:

$$d\sum\frac{mv^2}{2} = \Sigma\Sigma\,(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz) + \sum_{jk} F_{jk}\,drjk \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Ако се посматра кретање система у интервали времена $t - t_0$, из I) имамо онда:

$$\sum\frac{mv^2}{2} - \sum\frac{m{v_0}^2}{2} = \int_{t_0}^{t} \Sigma\Sigma\,(X_e\,dx + Y_c\,dy + Z_e\,dz) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \Sigma\,F_{jk}\,dr_{jk} \cdot \quad \cdot \mathrm{II}).$$

и теорема је:

Варијација полу живе силе, у коначној интервили времена $t - t_0$, једнака је суми елементарних радова свих сила, унутарњих и спољних.

§ 196. — Ако је систем материјални чврсто тело, одстојања су међу честицама непроменљива, $dr_{jk} = o$ и једначина је II) облика:

$$\sum\frac{mv^2}{2} - \sum\frac{m{v_0}^2}{2} = \int_{t_0}^{t} \Sigma\Sigma\,(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz).$$

Ако су F_{jk} функције од r_{jk}, $F_{jk} = \varphi\,(r_{ik})$

$$F_{jk}\,dr_{jk} = d\int \varphi\,(r_{jk})\,dr_{ik}$$

онда је и $\Sigma F_{jk}\,dr_{jk}$ тотални диференцијал.

§ 197. — *Први интеграл живе силе.* Ако је сума елементарних радова унутарњих и спољних сила тотални диференцијал какве функције $U(x_1\,y_1\,z \cdots x_n\,y_n\,z_n)$, где су $x_1\,y_1\,z_1 \cdots$ координате тачака система, из II) § 195 имамо:

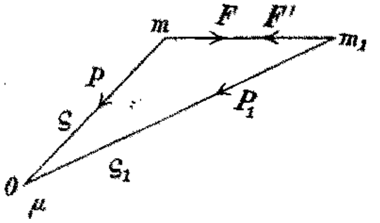
$$\sum\frac{mv^2}{2} = U + h.$$

h је произвољна константа, звана константа живих сила. Последњи израз је интеграл живих сила, U је функција сила.

Да се добије први интеграл нужно је да је U зависно само од положаја а не и од брзина, али то није и довољно.

§ 198. — Нека су дате две материјалне тачке чије су масе m и m_1, које се узајамно привлаче по Њутновом закону и на које дејствује привлачење исто из једнога центра 0 чија је маса μ.

Ако са r обележимо одстојање mm_1, узајамно је привлачење:



Сл. 122.

$$F = -\frac{fmm_1}{r^2}.$$

Рад је овога привлачења:

$$F\,dr = -\frac{fmm_1}{r^2}\,dr.$$

Ово је рад унутарњих сила.

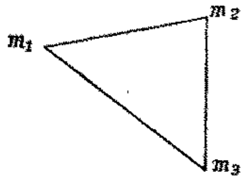
Спољне су силе P и P_1; $P = -\frac{f\mu m}{\varrho^2}$, $P_1 = -\frac{f\mu m_1}{\varrho'^2}$, чији су радови: $-\frac{f\mu m}{\varrho^2}d\varrho$ и $-\frac{f\mu m_1}{\varrho'^2}\,d\varrho'$

Ако са v и v' обележимо брзине тачака m и m_1, теорема је о живим силама:

$$d\,\frac{m\,v^2 + m_1 v'^2}{2} = -\frac{fmm_1}{r^2}\,dr - \frac{f\mu m}{\varrho^2}\,d\varrho - \frac{f\mu m_1}{\varrho'^2}\,d\varrho'.$$

Овде је десна страна тотални диференцијал и интегрисањем налазимо први интеграл, зван интеграл живих сила, који је облика:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m_1 v'^2}{2} = \frac{fmm_1}{r} + \frac{f\mu m}{\varrho} + \frac{f\mu m_1}{\varrho'} + h$$



Сл. 123.

§ 199. — Ако имамо три тачке потпуно слободне, чије су масе: m_1 m_2, m_3, које се узајамно привлаче по Њутновом закону, и њихова одстојања обележимо са r_{12}, r_{13} и r_{23}, онда имамо само унутарње силе.

Тотална је жива сила, ако су брзине тачака v_1, v_2, v_3, $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2$.

Сума је елементарних радова унутарњих:

$$-\frac{fm_1 m_2}{r_{12}^2}\,dr_{12} - \frac{fm_2 m_3}{r_{23}^2}\,dr_{23} - \frac{fm_3 m_1}{r_{31}^2}\,dr_{31}.$$

Ово је тотални диференцијал и теорема о живим силама даје овај интеграл:

$$\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2}{2} = f\Big(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \\ + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\Big) + h \cdot \cdot 1).$$

§ 200. — *Теорема о живим силама у релативном кретању око тежишта.* Ова се теорема примењује на кретање релативно система у односу сталних осовина, што иду кроз тежиште.

Ако са ξ, η, ζ обележимо координате тежишта, са xyz старе координате једне тачке, а са x' y' z' нове односно система Gx', Gy', Gz' кроз тежиште G, имаћемо:

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \; z = z' + \zeta;$$

апсолутна је брзина:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx' + d\xi}{dt}\right)^2 + \cdot = \\ = \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \\ + 2\,\frac{dx'}{dt}\,\frac{d\xi}{dt} + 2\,\frac{dy'}{dt}\,\frac{d\eta}{dt} + 2\,\frac{dz'}{dt}\,\frac{d\zeta}{dt}.$$

Ако са V обележимо брзину тежишта, са v' релативну брзину једне тачке M, из те последње једначине имамо:

$$v^2 = V^2 + v'^2 + 2\,\frac{dx'}{dt}\,\frac{d\xi}{dt} + 2\,\frac{dy'}{dt}\,\frac{d\zeta}{dt} + 2\,\frac{dz}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}.$$

Ако помножимо ову једначину са m и образујмо збирове, како је $2\sum m \frac{dy'}{dt}\frac{d\eta}{dt} = 2\frac{d\eta}{dt}\sum m\frac{dy'}{dt} = o$, то ћемо имати:

$$\Sigma mv^2 = MV^2 + \Sigma mv'^2 \cdot \quad \text{I}).$$

M је маса целог система.

Једначина I) обухвата теорему:

да је жива сила система једнака живој сили целога система сасређеног у тежишту, више живој сили система у релативноме кретању према осовинама сталним, што иду кроз тежиште (Koenig).

Ако исту замену извршимо у једначини за радове, имаћемо:

$$\Sigma T = \Sigma\Sigma(X_i\,dx' + Y_i\,dy' + Z_i\,dz') + \Sigma\Sigma(X_e\,dx' + \\ + Y_e\,dy' + Z_e\,dz) \\ + d\xi\{\Sigma\Sigma X_e + \Sigma\Sigma X_i) + d\eta(\Sigma\Sigma Y_i + \Sigma\Sigma Y_e) + \\ + d\xi(\Sigma\Sigma Z_i + \Sigma\Sigma Z_e), \cdot \quad \cdot \text{II}).$$

$$\Sigma\Sigma X_i = \Sigma\Sigma Y_i = \Sigma\Sigma Z_i = o$$

и

$$d\frac{MV^2}{2} = d\xi\,\Sigma\Sigma X_e + d\eta\,\Sigma\Sigma Y_e + d\xi\,\Sigma\Sigma Z_e$$

Из II) и I), с обзиром на последње две једначине, имамо:

$$d\sum\frac{mv_1^{\ 2}}{2} = \Sigma\Sigma(X_i\,dx' + Y_i\,dy' + Z_i\,dz') + \Sigma\Sigma(X_e\,dx' + \\ + Y_e\,dy' + Z_e\,dz).$$

Ово је једначина живих сила, која се односи на релативне брзине и помераје релативне.

Радови унутарњих сила зависе од варијација узајамних одстојања тачака и остају исти као и у апсолутном кретању, они су $\Sigma F_{jk}\,dr_{jk}$; али се сума радова спољних сила мења у релативном кретању.

Пример. Ако се посматра кретање тела у празном простору, па се кроз тежиште тела G повуче систем $Gx', y'z'$, и примени теорема о живим силама према овим осовинама, имаћемо:

$$d\sum\frac{mv'^2}{2} = -\Sigma mg\,dz' + \Sigma F_{jk}\,dr_{jk}.$$

Овде су спољне силе $o, o - mg$. Како је у тежишту почетак, то је $\Sigma m\,dz' = o$, ако је уз то тело чврсто $\Sigma F_{jk}\,dr_{jk} = o$, једначина о живим силама у релативном кретању даје интеграл:

$$\Sigma\frac{mv'^2}{2} = h \text{ (Constante)}.$$

IV. Енергија.

§ 201. — *Конзервативни системи.* Ако су унутарње силе X_i, Y_i, Z_i изводи какве функције $U_i(x_1\,y_1\,z_1 \cdot\cdot x_n\,y_n\,z_n)$ униформне, онда је:

$$\Sigma\Sigma(X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz) = dU_i.$$

Кад ово постоји, систем се зове конзервативан. Кад се у оваквоме систему пређе из положаја C_1 у C_2, тотални је рад унутарњих сила независан од пута који води из C_1 у C_2, рад T_i је:

$$T_i = \int_{C_1}^{C_2}\Sigma\Sigma(X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz) = \int_{C_1}^{C_2} dU_i = (U_i)_2 - (U_i)_1$$

$(U_i)_2$ и $(U_i)_1$ су вредности функције U_i у положајима C_2 и C_1.

§ 202. — *Потенцијална енергија.* Ако са $\Pi(x_1 y_1 z_1 \cdots x_n y_n z_n)$ обележимо функцију:

$$\Pi(x_1 y_1 z_1 \cdots x_n y_n z_n) = -U_i + C$$

где је C произвољна константа, Π се зове потенцијалном енергијом. C се обично тако одређује да је Π нула у положају C_0. Кад се ово удеси, онда је Π, потенцијална енергија система у ма каквом положају C, једнака суми радова унутарњих сила, кад систем пређе из положаја C у C_0, где је $\Pi = o$. Ово се доказује овако.

За мали померај система, рад је унутарњих сила:

$$dT_i = dU_i = -d\Pi.$$

Ако се са T_i обележи рад унутарњих сила при прелазу из положаја C у C_0, онда је:

$$T_i = -\int_C^{C_0} d\Pi = \Pi - \Pi_0 = \Pi$$

јер је $\Pi_0 = o$.

Одредба је положаја C_0 произвољна. Ако међу положајима постоји неки где је U_i maxim. за тај је положај, због једначине:

$$\Pi = -U_i + Const.$$

Π minim., и тај се положај узимље за C_0, где је $\Pi = o$. Кад се на овај начин одреди полазни положај, за ма који други је Π позитивно. Ако U_i има више maximum-а узимље се онај, за који је U_i понајвеће.

§ 203. — *Консервација енергије.* Ако се у једначини живих сила рад унутарњих сила смени са Π, имаћемо:

$$d\left(\Sigma \frac{mv^2}{2} + \Pi\right) = \Sigma\Sigma(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) \quad \cdot \; \cdot \text{ I}).$$

Израз $\frac{\Sigma mv^2}{2} + \Pi$ зове се тотална енергија система; члан $\frac{\Sigma mv^2}{2}$ зависи само од брзина разних тачака и зове се нинетичка енергија; Π зависи од положаја система а не од брзина и зове се потенцијална енергија.

Једначина I) обухвата теорему:
да је варијација тоталне енергије једнака суми елементарних радова спољних сила.

Ако се интегрише I) у интервали $t_1 - t$ имаћемо:

$$\left(\frac{\Sigma mv^2}{2}+\Pi\right)_t - \left(\frac{\Sigma mv^2}{2}+\Pi\right)_{t_1} = \int_{t_1}^{t} \Sigma\Sigma(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz),$$

или

$$E_t - E_{t_1} = T_e \quad \cdot \; \cdot \text{ II}).$$

Једначина II) исказује теорему:
да је варијација енергије, у коначном размаку времена, једнака суми радова спољних сила за то време.

Ако на систем не дејствују спољне силе, из II) имамо:

$$\left(\frac{\Sigma mv^2}{2}+\Pi\right)_{t_1} = \left(\frac{\Sigma mv^2}{2}+\Pi\right)_{t_1} \text{ или}$$

$$E_t = E_{t_1} \quad \cdot \; \cdot \text{ III}).$$

Једначина III) казује: да је у поменутоме случају, кад спољних сила нема, енергија тотална стална. При померању система мењају се енергије потенцијална и кинетичка, али је сума њихова стална. Једна у другу прелази или на рачун друге постаје. Овим је обухваћен општи принцип *о конзервацији енергије.*

Ако се за јединицу рада узме килограмометар, потенцијална је енергија рад и изражена је у јединицама kgm. а због односа III) је и кинетичка изражена у истим јединицама. Тотална је енергија изражена килограмометрима.

* * *

ГЛАВА XVIII.

Динамика чврстога тела. Кретање паралелно са једном равни.

I. Кретање чврстога тела око сталне осовине.

§ 204. — Кад се тело обрће око извесне осовине, положај система зависи од једнога параметра (à liaison compléte) и то од угла за који се тело обрнуло. Овде је довољна примена једне теореме и то обично о живој сили, да се тај параметар нађе.

Ако су X, Y, Z компоненте ма које од сила F_1, $F_2 \cdot \cdot F_n$, ротациона је осовина z, ω угаона брзина, жива је сила система:

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mr^2\omega^2 = \omega^2\Sigma mr^2 = Mk^2\omega^2 \quad \cdot \quad \cdot \; 1).$$

Жива је сила једнака квадрату угаоне брзине ω помноженом са моментом лењивости односно осе обртне. (Овде обичну брзину v замењује брзина ω угаона, а масу моменат лењивости у теореми о живој сили).

Теорема је о живој сили:

$$\frac{d}{2} Mk^2\omega^2 = \mathbf{\Sigma}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad \cdot \; 2).$$

Ако су r, θ и z координате једне тачке система, имамо:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad z = const.$$

При обртању се само θ мења и његаваља наћи као функцију времена. $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

$$dx = - r \sin\theta \, d\theta = - y\omega \, dt$$
$$dy = x\omega \, dt$$
$$dz = o.$$

Кад се ово смени у 2) имамо:

$$d \frac{Mk^2\omega^2}{2} = dt\,\omega\ \Sigma(xY - yX),$$

или:

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma\,(xY - yX) \quad \cdot \quad \cdot \ \mathrm{I}).$$

Ова се једначина могла добити из теореме о моментима величине кретања односно $0z^{\text{ске}}$ осовине. Та теорема гласи:

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\,(xY - yX),$$

или:

$$\frac{d}{dt}\,(Mk^2\omega) = Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma\,(xY - yX) \quad \cdot \quad \cdot \ \mathrm{II}).$$

§ 205. — *Реакције осовина.* Ако се по две тачке осовине 0 и $0''$ утврде, осовине се могу сматрати као слободне. Нека на тачке 0 и $0''$ осовине $z^{\text{ске}}$ дејствују силе реакције $Q'\,(X', Y', Z')$ и $Q''\,(X'', Y'', Z'')$, тело се може сматрати за слободно, кад се ове силе додају датим силама спољним и једначине су кретања:

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = X' + X'' + \Sigma X$$

$$\sum m \frac{d^2y}{dt^2} = Y' + Y'' + \Sigma Y \quad \cdot \quad \cdot \ 1).$$

$$\sum m \frac{d^2z}{dt^2} = Z' + Z'' + \Sigma Z.$$

Ако је h $z^{\text{-ска}}$ координата тачке $0''$, примена теореме о моментима величине кретања односно $0x$ и $0y^{\text{ске}}$ осовине даје:

$$\sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma\,(yZ - zY) - hY''$$

$$\sum m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma\,(zX - xZ) + hX'' \quad \cdot \quad \cdot \ 2).$$

Из ове последње две једначине налазимо Y'' и X''. Из прве две под 1, налазе се X', Y', из треће се може одредити само $Z' + Z''$.

Ако се у једначинама 1) и 2) изврши ранија замена:

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega, \quad \frac{dy}{dt} = x\omega, \frac{dz}{dt} = o, \text{ имаћемо:}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \omega^2 x - \frac{d\omega}{dt}\,y, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \omega^2 y + \frac{d\omega}{dt}\,x, \ \frac{d^2z}{dt^2} = o.$$

$$- \omega^2\ \Sigma mx - \frac{d\omega}{dt}\ \Sigma my = X' + X'' + \Sigma X$$

$$- \omega^2\ \Sigma my - \frac{d\omega}{dt}\ \Sigma mx = Y' + Y'' + \Sigma Y \ \cdot \ \mathrm{I}).$$

$$0 = Z' + Z'' + \Sigma Z$$

$$\omega^2\ \Sigma myz - \frac{d\omega}{dt}\ \Sigma mxz = \Sigma\,(yZ - zY) - hY''$$

$$-\omega^2\ \Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt}\ \Sigma myz = \Sigma\,(zX - xZ) + hX''.$$

Суме у овим изразима мењају се са временом. Σmx једнака је $M\xi$, ако је ξ координата тежишта. Ради одредбе других сума узећемо координатни систем $0\,z'\,x'\,y'$, где се $0z'$ поклапа са $0z$, а Ox' и Oy' су тако положени да склапа и то Ox' са Ox угао φ. Трансформационе су једначине:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$
$$z = z'$$

$$\Sigma myz = \sin\varphi\, \Sigma mx'z' + \cos\varphi\, \Sigma my'z'$$
$$\Sigma mxz = \cos\varphi\, \Sigma mx'z' - \sin\varphi\, \Sigma my'z'.$$

Како се осовине $Ox'y'z'$ крећу са системом, изрази сума по $x'z'y'$ су сталне количине, само је φ функција времена.

Специјални случајеви. Ако је обртна осовина главна осовина инерције односно тежишта, онда имамо:

$$\Sigma mx = o, \quad \Sigma my = o, \quad \Sigma mxz = o, \quad \Sigma myz = o$$

и једначине су за реакцију:

$$X' + X'' + \Sigma X = o, \quad Y' + Y'' + \Sigma Y = o, \quad Z' + Z'' + \Sigma Z = o$$
$$\Sigma(yZ - zY) - hY'' = o, \ \Sigma(zX - xZ) + hX'' = o.$$

Ови су изрази слични једначинама из статике за равнотежу система, где је изостала шеста једначина $\Sigma(xY - yX)$, која је овде једнака са $Mk^2 \frac{d\omega}{dt}$.

§ 206. — *Перманенте и спонтане осовине ротација.* Нека је обртна осовина произвољна и нека силе имају резултанту једну што иде кроз тачку O, онда је:

$$\Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma(xY - yX) = o.$$

Једначине су за реакције:

$$-\omega^2 \Sigma mx = \Sigma X + X' + X''$$
$$-\omega^2 \Sigma my = \Sigma Y + Y' + Y''$$
$$0 = \Sigma Z + Z' + Z''$$

$$\omega^2 \Sigma myz = -hY''$$
$$-\omega^2 \Sigma mxz = hX''.$$

У овоме је случају $\omega = const.$ јер је $\frac{d\omega}{dt} = o.$

Услов да је реакција у O'' нула, дат је са:

$X'' = Y'' = Z'' = o$, што повлачи:

$$\Sigma myz = \Sigma mxz = o.$$

Последња једначина тражи да је обртна осовина главна оса инерције односно O.

Ако је ово остварено, O'' не трпи никакав притисак, отуда теорема:

I). *Ако* се какво тело, на које дејствују спољне силе, обрће око неке тачке (O), а резултанта тих сила пролази кроз O, па се тело обрне око главне осовине инерције односно тачке O, оно ће се вечно обртати око исте осовине.

Због овога се и зову главне осе лењивости, сталним (перманентним) осовинама.

Ако на тело не дејствују спољне силе, ако је:

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = o$$

онда се може удесити, да је реакција и тачке O нула као и за O''. За ово су услови:

$$\Sigma mx = \Sigma my = o.$$

Ротациона је осовина сад главна осовина елипсоида централног, отуда теорема:

II). Ако се тело слободно, на које не дејствују силе спољне, почне обртати око главне осовине елипсоида централног инерције, оно продужују једнако обртање вечно око исте осовине.

Ове се главне осовине елипсоида централног зову *спонтаним осовинама обртним.*

Ако се силе своде на једну силу што иде кроз тачку 0 и на спрег чија осовина пада у $0z$, ω није више константно, онда се за одредбу реакције служимо једначинама под I 205-ог §., под условом:

$$\Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = o \cdot \cdot 1).$$

Нужни и довољни су услови да је реакција у $0''$ нула:

$$\Sigma mxz = \Sigma myz = o \cdot \cdot 2)$$

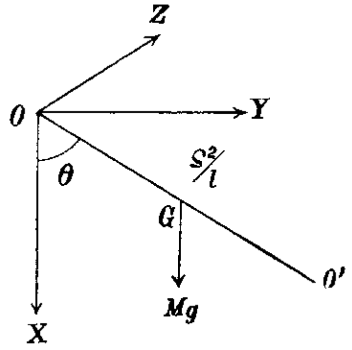
Ово се налази из једначина § 205. I):

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\Sigma myz - \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma mxz &= o \\ -\omega^2\,\Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma myz &= o \end{aligned}\right\} \cdot \cdot 3).$$

чија детермината $\omega^4 + \left(\frac{\partial\omega}{dt}\right)^2$ није нула, значи да једначине 3) морају бити задовољене, отуда излази услов 2).

Ако се дате силе своде на један спрег осовине паралелне са $0z$, услови су да су реакције у 0 и $0''$ нуле, да је $0z$ једна главна осовина инерције односно тежишта.

§ 207. — *Сложено клатно.* Овако се зове систем тежак, који се може обртати око једне хоризонталне осовине.



Сл. 124.

Нека је осовина вешања, обртања $0z$, $xy^{\text{ска}}$ раван вертикална, $0x$ иде на ниже.

Ако је θ угао између клатна $00'$ и $0x$ у времену t, угаона је брзина $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, једначина је кретања:

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = \Sigma(xY - yX) \cdot \cdot 1).$$

Сила је овде $X = Mg$, $Y = o$, $Z = o$. Координате су ма које тачке полуге $00'$, $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$.

Из 1) је:

$$\Sigma(xY - yX) = -Mg\,\Sigma r\sin\theta = -Mg\,l\sin\theta.$$

$l = 0G$, G је тежиште.

Кад се ово замени у 1) једначина је кретања:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gl}{k^2}\sin\theta \cdot \cdot 2).$$

Ако се 2) упореди са једначином кретања клатна обичног, дужине l':

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l'}\sin\theta$$

видимо, да је кретање клатна сложеног исто са кретањем простога клатна чија је дужина l'

$$l' = \frac{k^2}{l}$$

Ако се на $0G$ пренесе дужина $00' = l'$, а са ϱ означимо полупречник замахивања односно осе паралелне са $0z$ кроз G (тежиште), имаћемо:

$$Mk^2 = M\varrho^2 + Ml^2$$

или:

$$l' = l + \frac{\varrho^2}{l}.$$

Из последње је једначине јасно: да је $l' > 0G$ и да је производ између $0G$ и $0'G$ сталан:

$$0G \cdot 0'G = \varrho^2 \cdot \cdot 3). \text{ (Huygens).}$$

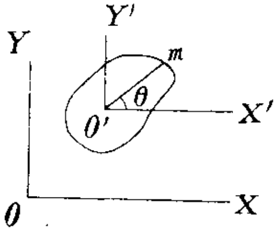
Ако у равни клатна, у којој лежи тежиште, имамо две осовине паралелне с једне и с друге стране тежишта, које могу бити и обртне за клатно, за које је дужина синхроног простог клатна иста, ова је дужина једнака одстојању тих двеју осовина (Хајенс).

II. Кретање система паралелно са једном равни.

§ 208. — Овде ваља посматрати прво кретање тежишта тела $0'$ у равни $0YX$, за тим обртање тела око тежишта у равни $0'x'y'$, паралелној са $0YX$, чије су осовине $0x \parallel 0'x'$ и $0y \parallel 0\,y'$.

Ако су пројекције сила спољних $X_1\, Y_1, X_2\, Y_2$ etz. у $0xy$, једначине су кретања тежишта (ξ η су координате тежишта):

$$\frac{Md^2\xi}{dt^2} = \Sigma X, \quad \frac{Md^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y \cdot \cdot 1).$$



Сл. 125.

Теорема се о моменту примењује и на осовине кроз 0, и даје једначину:

$$\frac{Mk^2\, d^2\theta}{dt^2} = \Sigma(x'Y - y'X) \cdot \cdot 2).$$

x', y' су координате тачке m у систему $0'x'y'$.

Из ове три једначине налазимо ξ, η и θ као функције времена.

Једна се од ових трију једначина може заменити нарочитим једначинама.

Ако применимо теорему о моментима на осу $0z$, имамо:

$$\frac{d}{dt}\left[M\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + Mk^2\frac{d\theta}{dt}\right] = \Sigma(xY - yX).$$

Применом теореме о живој сили на апсолутно кретање добијамо:

$$d\,\frac{M}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \Sigma(Xdx + Ydy).$$

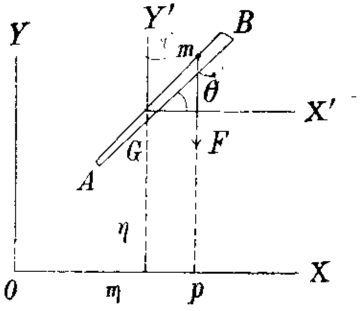
Овим се двема једначинама може једна од три опште сменити.

§ 209. — *Пример.* Полуга AB дужине $2l$ и масе M може да клизи у равни хоризонталној; полугу привлачи оса стална $0x$ сразмерно одстојању и масама, наћи кретање система.

Нека су ξ, η координате тежишта G, $mp = y$, сила на масу m је:

$$X = o, \quad Y = -f^2my,$$

$$\Sigma Y = -f^2\,\Sigma my = -Mf^2\eta.$$



Сл. 126.

Једначине су кретања:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = o, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -f^2\eta,$$

$$\xi = at + b, \quad \eta = A\, sin\, (tf + \alpha), \quad f = const.$$

Избацивањем t имамо трајекторију тежишта:

$$\eta = A\, sin\, (\lambda\xi + \mu).$$

Ако кроз тежишта G повучемо осовине $GX' \parallel 0X$ и $GY' \parallel 0Y$, обележимо са $\theta \sphericalangle BGx'$ и $r = Gm$, имаћемо:

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y' \quad Y = -f^2 m\, (\eta + y').$$

Теорема о моментима величине кретања, примењена на релативно кретање, даје:

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \boldsymbol{\Sigma}\, (x'Y - y'X) = - f^2\, \boldsymbol{\Sigma} mx'\, (\eta + y')1).$$

Mk^2 је моменат лењивости полуге односно G. Израз $\boldsymbol{\Sigma} mx'\eta = \eta\ \boldsymbol{\Sigma} mx' = o.$

Ако се смене x' и y' са

$$x' = r\, cos\, \theta, \quad y' = r\, sin\, \theta.$$

имаћемо:

$$\boldsymbol{\Sigma} mx'y' = \boldsymbol{\Sigma} mr^2\, sin\, \theta\, cos\, \theta = Mk^2\, sin\, \theta\, cos\, \theta.$$

Кад се ово смени у једначини кретања 1). добија се:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - f^2\, sin\, \theta\, cos\, \theta.$$

Множећи ово са $2\,\frac{d\theta}{dt}$ и интегришући, имаћемо:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2 - f^2 sin^2\, \theta, \quad \omega \text{ је константа.}$$

За $\omega^2 = f^2$ имамо:

$$\frac{d\theta}{dt} = f\, cos\, \theta, \quad tf = log\, tg\, (\theta/_2 + \pi/_4).$$

При кретању полуга тежи да заузме положај $\theta = \pi/_2$ за $t = \infty$.

Овакве се осцилијације полуга зову квадранталним (Tait et Thomson).

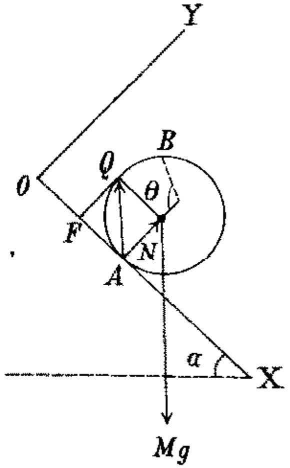
§ 210. — Кретање круга тешког, који се обрће без клизења по правој $0x$ у равни $0yx$. Нека је координата $0y$ позитивна на више, α угао $0x$ са хоризонтом. Положај круга (система) зависи само од једног параметра θ или од дужине $0A = x$.

Између θ и x постоји однос, кад је

R полупречник круга:

$$x = R\theta \cdot \cdot 1).$$

Сила је што дејствује на круг тежа Mg, уз њу долази AQ реакција коса праве $0x$. Теорема о живој сили, примењена на апсолутно кретање је:



Сл. 127.

$$d\, ^1/_2 \left[M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + Mk^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = Mg\, dx\, sin\, \alpha \cdot \cdot 2).$$

Из 1) и 2) је:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\, \frac{sin\, \alpha}{1 + \frac{k^2}{R^2}}$$

$$k^2 = \frac{R^2}{2} \text{ у хомогеном кругу.}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt} = {}^2/_3\, g\, sin\, \alpha.$$

Пројекције се F и N реакције Q налазе из једначина:

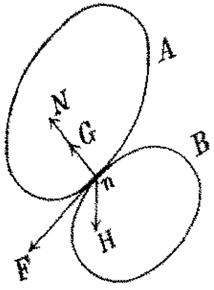
$$M\frac{d^2x}{dt} = Mg\,sin\,\alpha - F \text{ и } M\frac{d^2y}{dt^2} = -Mg\,cos\alpha + N$$

Кад се овде смене $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2} = o$ имаћемо:

$$F = {}^1/_3\,Mg\,sin\,\alpha, \quad N = Mg\,cos\,\alpha.$$

III. Трење од клизања и отпор средине.

§ 211. — *Ако имамо* два покретна тела A и B, која се додирују у тачци n тела A, релативне су брзине разних тачака тела A односно B, сматрано да мирује, такве исте као да тело A има: 1) брзину транслације једнаку брзини релативној v_r тачке n, која лежи у заједничкој тангетној равни и која се зове клизање; 2) тренутну ротацију ω око осовине кроз n; ω_n је компонената ротације око нормале у n на тангентној равни и зове се пивотирање, а ω_t компонента у тангенцијалној равни зове се котрљање.



Сл. 128.

Кад је тренутна ротација ω нула, вели се да је релативно кретање A односно B клизање; кад је релативна брзина тачке n нула, онда је кретање A према B котрљање и пивотирање (pivotement). У опште може бити: клизање, котрљање и обртање (пивотирање).

Кад се два тела A и B притиском додирују, додир није само једна тачка, већ површина и силе се своде, т. ј. дејство једнога тела на друго, на једну резултанту и један спрег. Ова се додирна површина узима обично да је тачка на пр. n и дејства су тела B па A сведена на:

1). Силу N, која је у n нормална на заједничкој равни између A и B. Ова се сила зове реакција нормална тела A и B.

2). Силу F, која је у равни тангентној у n између тела A и B. Ова се сила зове *трење од клизања* и ово се противи клизању.

3). Спрег G чија је оса нормална у n на заједничкој тангентној равни између A и B. Овај се спрег зове спрег трења од пивотирања и противи се пивотирању.

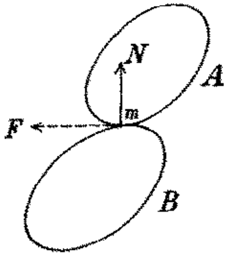
4). Спрег H, чија је осовина у тангентној равни у n, у правцу тангенцијалне компоненте ω_t тренутне ротације. Овај се спрег зове спрег трења од котрљања и противи се котрљању.

Дејства су тела A на B силе и спрегови супротни горњим силама и спреговима.

G и H су врло мали према F и N.

§ 212. — *Трење од клизања.* Нека се A креће клизећи по B, m је тачка тела A што додирује B; N нормална реакција B на A. F је трење, то је сила у m, супротна релативној брзини ове тачке односно B и њена је вредност fN, f је коефицијенат трења.

$$F = fN.$$



Сл. 129.

Ово вреди за случај кад релативна брзина тачке m према B није нула. За случај да је релативна брзина нула, можемо имати два случаја:

1). Или је A непокретно тело односно B; онда је реакција тангенцијална B на A сила по закону о трењу у мировању.

2). Или је релативно кретање A према B котрљање са пивотирањем. Овде немамо клизање, реакција се B на A своди на силу N, нормалну компоненту и тангенцијалну F непознате величине и правца, са условом $F < fN$. Овде се занемарује трење од котрљања и пивотирања.

§ 213. — *Дисконтинуирности могуће у једначинама кретања.*

1). Нека је v_r релативна брзина тела A према B, и то тачке m. Док је v_r различито од нуле, имаћемо клизање; за $v_r = o$ имамо котрљање и пивотирање A према B и B према A. Ако је у почетку $t = to$, $v_r = o$, ваља наћи дали за време $t > t_0$ два тела A и B клизе, котрљају се или пивотирају. За ово се примењују две хипотезе.

Претпоставка је да има котрљања и пивотирања, т. ј. да је $v_r = o$; онда је реакција B на A сложена: из нормалне реакције N и тангенцијалне силе F, $F < fN$. Према овоме се склопе динамичке једначине и одреди се N и F. Ако је нађена вредност за F мања од fN, хипотеза је тачна, кретање је A према B котрљање и пивотирање и ово траје док F не постане веће од fN. Од овога момента почиње клизање уз котрљање и пивотирање и динамичке се једначине морају изменити. Ако је од почетка $F > fN$; онда је котрљање и пивотирање без клизања немогуће, значи да од почетка постоји и клизање. Ово стање остаје док v_r не постане нула. Кад ово наступи ваља видети да ли од тог тренутка $t = t_1$ и даље остаје $v_r = o$ или не.

2). *Може се* и друга врста дисконтинуирности јавити у проблемима кретања. Нека постоји клизање или котрљање, може се десити да се N промени и за време t постане нула а после тога мења знак. Ако се тела A и B могу одвојити у времену t, она се и одвоје, ако је то немогуће, нормална реакција само мења знак. Како је трење, као сила, позитивно, пошто је N негативно, трење постане $-fN$ у случају клизања и мање од $-fN$ у котрљању. После се времена t морају променити једначине кретања и f сменити са $-f$. Без ове би се измене повећала брзина релативна v_r, што је апсурдно.

§ 214. — У примеру § 210. нека постоји трење и пита се: да ли ће котур клизити или ће се котрљати.

Ако претпоставемо да има котрљања, онда је као што смо нашли $N = Mg \cos \alpha$ и тангенцијална је реакција $F_1 = {}^1/_3 \, Mg \sin \alpha$. За котрљање мора да је $F_1 < fN$ (f је коефицијенат трења).

$$\frac{Mg \sin \alpha}{3} < fMg \cos \alpha \qquad tg\, \alpha < 3f \cdot \cdot 1).$$

Ако не стоји услов 1). онда је котрљање праћено и клизањем.

Ако се проблем горњи по последњој хипотези третира, имаћемо ове једначине динамичке.

Реакција се ox на котур своди на компоненту N и компоненту $F = fN$. Угао $ACB = \theta$ и апсциса $OA = x$ нису везани више једначином 1). § 210. јер нема котрљања и једначине су кретања тежишта:

$$\frac{Md^2x}{dt^2} = Mg \sin \alpha - fN, \quad o = - Mg \cos \alpha + fN \cdot \cdot 2).$$

Нормална је реакција, према другој једначини, стална, $N = Mg\cos\alpha$. Кад се ово смени у првој, имаћемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,(sin\,\alpha - f\cos\alpha) \cdot \quad \cdot 3).$$

$g\,(sin\,\alpha - f\cos\alpha)$ је позитивно због $tq\,\alpha > 3f$, јер има и клизања.

Интегрисањем 3) од $t = o$ до $t = t$, имамо:

$$x = \frac{gt^2}{2}\,(sin\,\alpha - f\cos\alpha).$$

Примена теореме о моментима односно тежишта даје:

$$Mk^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = fNR, \quad \cdot k^2 = \frac{R_2}{2} \cdot \quad \cdot 4.)$$

$$\theta = \frac{xgt^2\cos\alpha}{R} \quad \cdot \quad \cdot 5.)$$

За верификацију нађених резултата, пођимо од релативне брзине тачке A.

Нека је u брзина тачке котура у A. Ова је брзина резултанта транслационе брзине тежишта и брзине од ротације око центра:

$$u = \frac{dx}{dt} - R\,\frac{d\theta}{dt}$$

или из 3., 4. и 5.

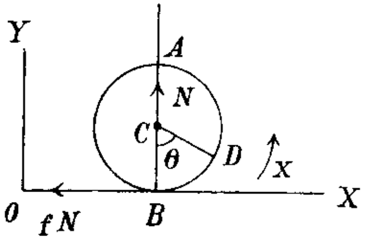
$$u = gt\,(sin\,\alpha - 3f\cos\alpha.)$$

Ова је брзина увек позитивна, због $tq\,\alpha > 3f$, није нула и клизање траје вечито.

Ако не би било трења, точак би клизио без котрљања.

§ 215. — Кретање прстена вертикалног по хоризонталној прави, кад постоји трење.

Нека је AB хомогени прстен полупречника R; почетна раван кретања је xoy и у њој остаје прстен за време кретања.



Сл. 130.

C је центар прстена, $x = oB$, $\theta = \sphericalangle\, BCD$.

Прва фаза. Нека је брзина тежишта C хоризонтална и $v = \frac{dx}{dt}$. Прстен се обрне за угао θ, брзином $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Брзина је тачке B и једнака брзини $\frac{dx}{dt}$ и $R\,\frac{d\theta}{dt}$:

$$u = \frac{dx}{dt} + R\,\frac{d\theta}{dt} \cdot \quad \cdot 1).$$

Нека је за $t = o$, $x = o$ и $u > o$, онда тачка прстена клизи по ox, сила трења је у правцу ox ка o, ако прстен клизи ка x. Силе које дејствују на прстен су: Mg (тежа) и нормална реакција N и трење fN. M је маса прстена.

Теорема о кретању тежишта даје:

$$0 = N - Mg, \qquad N = Mg$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,fg \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \quad \cdot 2).$$

Ако је Mk^2 моменат инерције прстена односно вертикалне праве на прстен кроз C, теорама момената даје:

$$k^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -fRg \cdot \cdot 3).$$

Из 2) имамо:

$$\frac{dx}{dt} = -fgt + v_0 \quad \text{и} \quad x = -\frac{fgt^2}{2} + v_0 t$$

јер је $x = o$ за $t = o$.

v_0 је почетна брзина v. Из 3) је:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{fRg}{k^2} t + \omega_0 \quad (\omega_0 \text{ почетна брзина } \omega),$$

и из 1). је:

$$u = -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)t + u_0 \cdot \cdot 4).$$

или како је:

$$u_0 = v_0 + R\omega_0 \cdot \cdot \cdot$$

из 4) је јасно, да u опада са t и за $t = T$

$$T = \frac{u_0}{fg\,(1 + \frac{R^2}{k^2})} \cdot \cdot 5).$$

постаје

$$u = o.$$

Друга фаза. Кад наступи моменат T, брзина је тачке прстена у B нула, питање је: да ли је кретање, после тога времена, котрљање или клизање. Брзина u остаје нула, јер ако то није случај, већ добије вредност какву, систем ће се наћи у првобитним условима и сила трења од клизања fN свешће u на нулу. Значи од времена T је $u = o$ и кретање је котрљање.

Ако се занемари трење котрљања, тангенцијална реакција F влада се по закону трења од клизања у мировању т. ј. мора бити сила непозната мања од fN. Ово се потврђује тиме, што се налази да је $F = o$. Како постоји котрљање то је рад од F нула а тако исто од N и теже и котрљање је униформно.

Једначине су кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = o$$

Једначина $M\frac{d^2x}{dt^2} = -F$ казује да је $F = o$. У другој фази су $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ константне количине и остају константне и после времена T. Ако те вредности обележимо са V и Ω оне се могу наћи лако.

u је после T стално нула, из 1) је онда:

$$V + R\Omega = o \cdot \cdot 6).$$

До вредности за V и Ω можемо доћи елиминисањем f из 2. и 3. Резултат је елиминиције:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{k^2}{R}\frac{d^2\theta}{dt^2} = o \cdot \cdot \cdot$$

или

$$\frac{dx}{dt} - \frac{k^2}{R}\frac{d\theta}{dt} = v_0 - \frac{k^2}{R}\omega_0 \cdot \cdot 7).$$

Лева страна у 7. остаје стална у првој и другој фази кретања, јер је се до 7. дошло елиминисањем f, а ово значи да вреди 7. за ма какав закон тангенцијалне реакције. У крајњој фази је:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \text{и} \quad \frac{d\theta}{dt} = \Omega = -\frac{V}{R} \quad (\text{из } 6).$$

Из овога и 7. је:

$$V\left[1+\frac{k^2}{R^2}\right]=v_0-\frac{k^2}{R}\,\omega_0$$

Одавде се налази V. Ако је, пошто је $v_0 > o$, $v_0 - \frac{k^2}{R}\,\omega_0 < o$, крајње је котрљање такво да је $V < o$, супротно почетној транслацији прстена. Ово се постиже бацањем прстена са $v_0 >$ о напред, са $\omega_0 > \frac{Rv_0}{k^2}$. Прстен се прво креће клизећи и котрљајући и заустави, па се врати котрљајући се униформно.

IV. Трење од котрљања.

§ 216. — *Узмимо сад* у рачун трење од котрљања, изостављајући трење од пивотирања.

Нека је дат кружни цилиндар, који се може котрљати по хоризонталној равнини, ако се хоће да води рачун о трењу при котрљању, узима се хипотеза да се реакција подлоге састоји:

1). Из нормалне реакције N у тачци додира n,

2). Из тангенцијалне реакције F, која се противи клизању.

3). Из спрега, момента H, чија је оса паралелна генеритрисама цилиндра. Овај се спрег противи котрљању.

Можемо имати три случаја:

1). *Равнотежа*. Ако равнотежа постоји онда су услови:

$$F < fN, \quad H < N\delta$$

где је f коефициенат трења од клизања а δ је линеарни коефицијенат, звани коефициенат од котрљања. Ово је δ константа, зависна од пречника цилиндровог и природе додирних тела.

2). *Котрљање*. Ако постоји котрљање без клизања, онда је

$$F \leqq fN \text{ и } H = N\delta$$

3). Клизање је без котрљања дато условом $F = fN$, $H = o$.

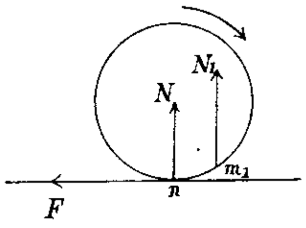
4). *Клизање и котрљање*

$$F = fN \text{ и } H = N\delta.$$

H се обично занемарује као мало.

§ 217. — *Котрљање*. Овде је $H = N\delta$. Овај се спрег може сложити са нормалном реакцијом N. Резултанта из N и H је сила N', једнака и паралелна са N, удаљена од N за δ. Тако, да би се водило рачуна о трењу при котрљању, ваља узети за реакцију пода не силу примењену у додиру стварном, већ у одстојању δ од додира. Тангенцијална је реакција сила $F < fN$. У миру је $H < N\delta$ и зато се нормална реакција преноси у напред за $\varepsilon < \delta$.

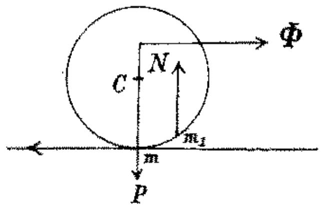
§ 218. — *Котрљање* хомогеног, кружног цилиндра тешког по хоризонталној равнини. Ако цилиндар мирује, тражи се сила Φ паралелна са подом, и управна на генератрисима, која је у стању да помери цилиндар са котрљањем.



Сл. 135.

Нека је h одстојања нападне тачке силе Φ од пода, P тежина цилиндра. Одредимо Φ за случај равнотеже. У овоме су случају силе: Φ, P и нормална реакција N, пренета у m_1, за $\varepsilon < \delta$, и $F < fN$.

Ако напишемо да су пројекције ових сила на нормали и вертикали нуле, имаћемо:



Сл. 136.

$$N = P \text{ и } F = \Phi \cdot \cdot 1).$$

Ако ставимо да су моменти односно m нуле, имаћемо:

$$\Phi h - N\varepsilon = o \cdot \cdot 2).$$

Ако је $F < fN$ и $\varepsilon < \delta$, из 1) 2) је

$$\Phi < Pf \text{ и } \Phi < \frac{P\delta}{h} \cdot \cdot 3).$$

Ако је 3) испуњено, равнотежа постоји.

За случај да је:

$f > {}^{\delta}/_{h}$, $h > {}^{\delta}/_{f}$, Φ може бити такво, да је:

$$Pf > \Phi > \frac{P\delta}{h}$$

и равнотеже нема. Постоји котрљање, јер је Φ мање од трења од клизања fP, клизање не може бити.

Ако је:

$$f < {}^{\delta}/_{h}, \quad h < {}^{\delta}/_{f},$$

онда је:

$$\frac{P\delta}{h} > \Phi > Pf$$

онда је кретање клизање.

Узмимо за пример нека је: $h > {}^{\delta}/_{f}$. $Pf > \Phi > \frac{P\delta}{h}$. Цилиндар почиње да се котрља и за време t достигне извесну брзину v, тражи се сад: каква мора да је сила Φ од времена t да је котрљање цилиндра униформно?

За униформност кретања нужно је да су у равнотежи силе при кретању. Из једначина:

$$N = P, F = \Phi \text{ излази да је: } \Phi < Pf$$

да не буде клизања.

Ако се узму моменти односно геометријског додира у m, са тиме, да је сума момената нула за униформно кретање и одстојање N је од m једнако δ при котрљању, онда је

$$\Phi = \frac{P\delta}{h}.$$

Сила Φ, потребна да крене цилиндар на котрљање, је $\Phi > \frac{P\delta}{h}$, а мање од fP; кад се постигне брзина центра, која се тражи, да се стално ова брзина котрљања и одржавања,ваља нагло дати сили Φ вредност $\frac{P\delta}{h}$.

ЛИТЕРАТУРА

(динамика система)

Carnot — Géometrie de position.
Chasles — Aperçu historique.
Haton de la Goupillière — Géometrie de masses.
Heise — Vorlesungen über analylischen Geometrie des Raumes.
Marcel — Deprez, Brassine, Joukovsky — Comptes rendus XIV, XXIII и Bulletln de l'association française pour l'avancement des sciences 1889.
Maurice Lévy — Traité de Statique graphique.
Dostor — Archiv de Grünnert.
Delaunay — Mécanique.
Bonnet — Mémoires de l'Accademie de Montpellier t. I.
Fourret — Bulletin de la société mathématique t. XIV.
De Saint Germain-Comptes rendus t. CVII.
Jacobi — Journal de Crelle t. 26, Gesamelte Werke.
Routh The treatise of the Dynamics of a System of rigid bodies.
Dorna — Mémoires de l'Accademie de Turin.
Mestschersky — Bulletin de la société mathématique — 1894.
Klein und Sommerfeld — Über die Theorie des Kreisels.
Poincaré — Mécanique céléste.
Résal — Mécanique céléste.
Tisserand — Traité de Mecanique céléste.
Webster — Traité Dynamic of particles and of rigid élastic bodies.

ГЛАВА XIX

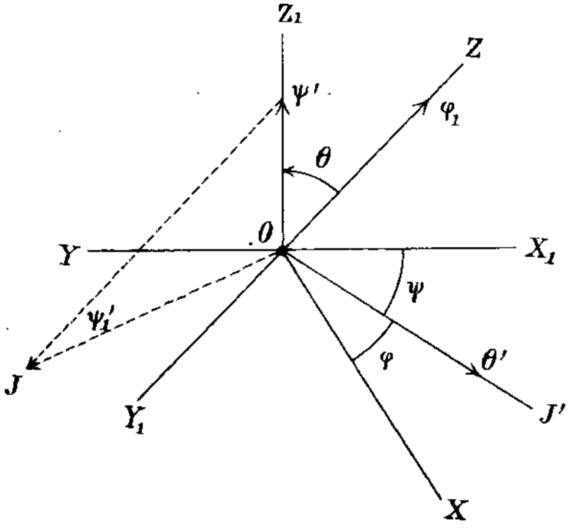
Обртање тела око сталне (утврђене) тачке.

§ 219. — *Ајлерове једначине.* Да би утврдили положај тачака у телу, односно тело, које се обрће, узећемо два система, један сталан што иде кроз O, чије су осе координатне Ox_1, Oy_1, Oz_1 и један систем покретан са телом, чије су осе координатне Ox, Oy, Oz. Чим се зна положај триједра $Oxyz$, зна се и положај тела. Систем оса покретних $Oxyz$, према сталним $Ox_1\ y_1\ z_1$, одређен је угловима, што их осе међу собом склапају, а који су обележени на шеми са $\alpha\ \alpha_1 \cdots$

	x	y	z
x_1	α	α'	α''
y_1	β	β'	β''
z_1	γ	γ'	γ''

Сл. 133.

$\alpha\,\beta\,\gamma$ су косинуси углова праве Ox са $Ox_1\ Oy_1, Oz_1$ и т. д. Између ових девет косинуса постоје шест релација, због чега се само три могу сматрати као произвољне количине, којима је положај система утврђен. За проучавање горњега проблема се уводе три независна угла Ајлерова: θ, φ и ψ, који се овако одређују.



Сл. 134.

Нека је $0J'$ пресек равни xy и $x_1 y_1$, ψ угао између $0J'$ и $0x_1$, (мери се од $0x_1$ ка $0J'$). $0J'$ је управно на $0Z_1 Z$. Нека је θ угао између $0Z'$ и $0Z$ (од $0Z'$ ка $0Z$ се мери). $0Z$ је управно на $J' 0x$ и угао φ је угао, за који ваља померити $0J'$ око $0Z$ у позитивном смислу да се поклопи са $0x$. Угао $J'0y = \varphi + \pi/2$.

θ, φ и ψ су независни један од другога и могу се узети за произвољне, положај је триједра $0xyz$ одређен кад се ови углови знају.

§ 220. — *Ротација тренутна.* Брзина је тела, што се обрће око 0 у времену t, обртање ω око извесне осовине што иде кроз 0. Ово се обртање ω зове обртање тренутно у времену t и представља се извесним вектором. Нека су p, q, r компонене

од ω у правцу $0x$, $0y$, $0z$, задатак је наћи p, q и r као функције од θ, φ и ψ и њихових извода по t.

Да би се тело из положаја, који заузима у времену t, довело у положај времена $t + dt$, ваља ова обртања извести.

Ваља обрнути тело за угао $d\psi$ око $0Z_1$, θ и ψ се узимају да су стални. Око новог положаја $0J'$ ваља тело сад обрнути за угао $d\theta$, сматрајући φ и ψ за стално и за тим га обрнути око $0Z$ за $d\varphi$. Ако се сва ова обртања изврше једновремено за dt, угаоне ће брзине бити око поменутих осовина ψ', θ' и φ' $\left(\theta' = \frac{d\theta}{dt}, \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \psi' = \frac{d\psi}{dt}\right)$.

За то се узима да је обртање тренутно ω састављено из три ротације θ', φ' и ψ' око $0J'$, $0Z$ и $0Z_1$. Ова се обртања могу представити сегментима по осама $0J'$, $0Z$ и $0Z_1$. Пројекција је ове ротације ω по осама ма којим равна суми пројекција од θ', φ', ψ' по истим осовинама.

Пројекције се од ψ' по $0x$ и $0y$ добијају, ако се прво ψ' пројектује на $x0y$ по ψ_1', у правцу осовине $0J$ ($0J' \perp 0J$), за тим се ψ_1' пројектује на $0x$ и $0y$

$$\psi_1' = \psi' \sin\theta.$$

Пројекције су од ψ' на $0x, 0y, 0z$:

$$\psi' \sin\theta \sin\varphi, \quad \psi' \sin\theta \cos\varphi, \quad \psi' \cos\theta.$$

Пројекције су θ' на $0x$ $0y$ и $0z$:

$$\theta' \cos\varphi, \quad \theta' \cos(\varphi + \pi/2);$$

Пројекције од φ' су:

$$0, \; 0, \; \varphi'.$$

Пројекције су ω на $0x\ 0y\ 0z$ p, q, r, по правилу о једнакости пројекција онда:

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \cdot \cdot 1).$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Косинуси $\gamma, \gamma' \gamma''$, косинуси углова $0z_1$ са $0x$, $0y$, $0z$ су према 1).

$$\gamma = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma' = \sin\theta \cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\theta.$$

У механици небеској су θ и ψ другојачије оријентисани и из 1) се ти обрасци добијају кад се θ и ψ смене са $-\theta$ и $-\psi$.

§ 221. — *Жива сила тела.* Ако је v брзина једне тачке m нашега тела, чије су координате xyz, $p\,q\,r$ су компоненте ротације ω, $v_x\,v_y\,v_z$ пројекције брзине по $0x$, $0y$, $0z$, из кинематике знамо да постоје односи:

$$v_x = qz - ry, \ v_y = rx - pz, \ v_z = py - qr,$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = p^2(y^2 + z^2) + q^2(z^2 + x^2) +$$
$$+ r^2(x^2 + y^2) - 2qr\,yz - 2rp\,zx - 2pq\,xy.$$

Ако обележимо са:

$$\Sigma\, m\,(y^2 + z^2) = A, \ \Sigma\, m\,(z^2 + x^2) = B, \ \Sigma\, m\,(x^2 + y^2) = C$$
$$\Sigma\, myz = D, \quad \Sigma\, mzx = E, \quad \Sigma\, mxy = F,$$

где су A, B, C моменти лењивости тела односно $0x$, y, z, имаћемо израз за живу силу T из једначине:

$$\Sigma\, mv^2 = 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp -$$
$$- 2Fpq \cdot \cdot 1).$$

Ако су $0x, y, z$ осовине главне лењивости односно 0, онда је:

$$\Sigma mv^2 = 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \cdot \cdot 2)$$

§ 222. — *Моменти величине кретања.* Величина је кретања тачке m, чија је брзина v, у правцу $0x$, $0y$ и $0z$:

$$mv_x, \ mv_y, \ mv_z.$$

Сума момената величине кретања λ у правцу истих осовина је:

$$\lambda = \Sigma m\,(yv_z - zv_y) = \Sigma m\,[p\,(y^2 + z^2) - qxy - rxz],$$

или:

$$\lambda = Ap - Fq + Er = \frac{\partial T}{\partial p};$$

у правцу $0y$ и $0z$ су суме момената:

$$\mu = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \nu = \frac{\partial T}{\partial r}$$

Ако су $0x, y, z$ главне осе лењивости, онда су суме момената величине кретања:

$$\lambda = Ap, \quad \mu = Bq, \quad \nu = Cr \cdot \cdot 1).$$

Резултујући моменат величине кретања односно 0 јесте вектор 0σ, чије су пројекције на $0x$, $0y$, $0z$: λ, μ и ν.

§ 223. — *Једначине кретања.* Нека на тело дејствују силе $F_1\ F_2 \cdot \cdot F_n$ и реакција Q од утврђене тачке 0, ако се сад примени теорема о моментима величине кретања, имаћемо једначине динамичке за наше тело.

Нека су L, M и N моменти сила датих F у правцу $0x$, $0y$, $0z$ и нека се конструише резултујући моменат из ових компонената и представи вектором $0S$ (чије су пројекције L, M, N). Моменат отпора 0 је нула.

Апсолутна брзина u тачке σ је једнака и паралелна са $0S$. Координате су $\sigma: \lambda, \mu, \nu$. Кад се t мења и λ, μ, ν се мењају; σ се креће према $0x$, $0y$, $0z$ релативном брзином $\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$.

Антренирајућа је брзина тачке σ:

$$q\nu - r\mu, \quad r\lambda - p\nu, \quad p\mu - q\lambda.$$

Апсолутна је брзина u једнака геометријској суми из релативне и антренирајуће брзине и њене су пројекције:

$$\frac{d\lambda}{dt} + q\nu - r\mu, \quad \frac{d\mu}{dt} + r\lambda - p\nu, \quad \frac{d\nu}{dt} + p\mu - q\lambda \cdot \cdot 1).$$

По теореми о моментима величине кретања постоје једначине:

$$\frac{d\lambda}{dt} + q\nu - r\mu = L, \quad \frac{d\mu}{dt} + r\lambda - p\nu = M, \quad \frac{d\nu}{dt} +$$
$$+ p\mu - q\lambda = N \cdot \cdot 2).$$

§ 224. — *Ајлерове једначине.* Ако за осе $0x$, y, z узмемо главне осе лењивости односно 0 и у 2) сменимо онда λ, μ, ν са $\lambda = Ap$, $\mu = Bq$, $\nu = Cr$, добићемо из 2) (§ 223) једначине, познате под именом Ајлерових:

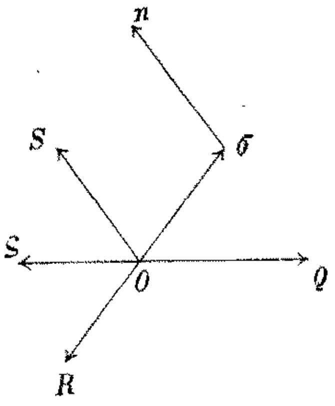
$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M \cdot \cdot I).$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N$$

Кад се овим једначинама придодају три једначине под 1) (§ 220), имамо шест једначина из којих се налазе p, q, r, θ, φ и ψ као функције времена. L, M, N зависе од θ, φ, ψ и p, q, r.

Ако се одмах хоће θ, φ и ψ да има, ваља из I) и 1) (§ 220) елеменисати p, q, r и онда се добијају три једначине другога реда по ψ, θ, φ. Општи интеграли имају 6 констаната, које се из почетних услова $\psi_0, \theta_0, \varphi_0, p_0, q_0, r_0$ налазе.



Сл. 139.

§ 225. — *Реакција сталне тачке.* Да би одредили реакцију Q, или њене пројекције Q_x, Q_y, Q_z, применићемо теорему о пројекцији количине кретања. Тачка ϱ резултанте количине кретања има брзину апсолутну једнаку и по величини и по смислу са резултантом спољних сила, чије су пројекције:

$$\Sigma X + Q_x, \quad \Sigma Y + Q_y, \quad \Sigma Z + Q_z \quad \cdot 1)$$

Ако су a, b, c координате ϱ односно покретних оса, онда апсолутна брзина, стављена равна пројекцијама 1), изражава теорему о пројекцији величине кретања:

$$\frac{da}{dt} + (qc - rb) = \Sigma X + Q_x$$
$$\frac{db}{dt} + (ra - pc) = \Sigma Y + Q_y \cdot \cdot I).$$

$$\frac{dc}{dt} + (pb - qa) = \Sigma Z + Q_z$$

$$a = \Sigma m v_x = \Sigma m\,(qz - ry) = q\,\Sigma mz - r\,\Sigma my.$$

Ако са ξ, η, ζ обележимо координате тежишта односно $0xyz$ и сетимо се израза $\Sigma mx = M\xi$ и т. д. имаћемо:

$$a = M\,(q\zeta - r\eta),\ b = M\,(c\xi - p\zeta),\ c = M\,(p\eta - q\xi).$$

Кад се ово замени у 1) имаћемо:

$$\zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} + q\,(p\eta - q\xi) - r\,(r\xi - p\zeta) = \frac{Q_x + \Sigma X}{M}$$

$$\xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + r\,(q\zeta - r\eta) - p\,(p\eta - q\xi) = \frac{Q_y + \Sigma Y}{M} \quad 2).$$

$$\eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + p\,(r\xi - p\zeta) - q\,(q\zeta - r\eta) = \frac{Q_z + \Sigma Z}{M};$$

ξ, η, ζ су константе.

Ако је тело утврђено у тежишту из 2) имамо:

$$Qx + \Sigma X = Qy + \Sigma Y = Qz + \Sigma Z = o.$$

Q је једнако а супротно резултанти спољних сила R.

§ 226. — *Нека су* и осовине $0x, y, z$ у телу покретне. Ако је ово случај, онда су p, q, r зависни од $\theta, \varphi, \psi, \theta', \varphi', \psi'$ и од обртања тела према осама покретним. Пројекције су брзине једне тачке m у односу осовина $0x,\ y\ z$:

$$v_x = qz - ry,\ v_y = rx - pz,\ v_z = py - qx,$$

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq.$$

$$A = \Sigma m\,(y^2 + z^2) \cdot \ \cdot \ \cdot$$

$$\lambda = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap - Fq - Er \text{ и т. д.}$$

Осовине ox, y, z су покретне и њихово је тренутно обртање ω' различно од ω (обртања тела). Нека су p', q', r' компоненте од ω' по $0x, y, z$. Кад се сад напише, да је апсолутна брзина σ једнака са пројекцијама L, M, N, једначине су кретања облика:

$$\frac{d\lambda}{dt} + q'\nu - r'\mu = L$$

$$\frac{d\mu}{dt} + r'\lambda - p'\nu = M \cdot \ \cdot 1).$$

$$\frac{d\nu}{dt} + p'\mu - q'\lambda = N$$

Како су $0xyz$ покретне осовине, изрази A, B, C, D, E, F нису сталне количине, већ се са t мењају и за то се за одредбу $\frac{d\lambda}{dt}$ и т. д. и о томе мора водити рачун.

Пример. Нека су сталне осовине $0x_1\ y_1\ z_1$; елипсоид је инерције односно 0 обртни, $0z$ је обртна осовина; $0x$ и $0y$ нека су осовине непокретне и везане са телом. $0x_2$ нека пада у $0J'$ и $0y_2$ у $0J$. $0x_2$ и $0y_2$ су покретне осовине. Нека су θ, φ и ψ углови Ајлерови. Ротиција тренутна тела је $\omega\ (p_2\ q_2\ r)$; њене су компоненте по $0x_2\ \theta'$, по $0z_1\ \psi'$ и по $0z\ \varphi'$ и пројекције по $x_2\ y_2$ и z су.

$$p_2 = \theta', \quad q_2 = \psi' \sin\theta, \quad r = \varphi' + \psi' \cos\theta$$

$$\lambda = Ap_2,\ \mu = Aq_2,\ \nu = Cr.$$

L_2, M_2, N су пројекције момента по $x_2\ y_2\ z$. Углови $0x_2\ y_2\ z$ према $0x_1\ y_1\ z_1$ су θ, o, ψ. Осе $0x_2\ y_2\ z$ се обрћу ротацијом тренутном ω', чије су пројекције

$$p' = \theta',\ q' = \psi' \sin\theta,\ r' = \psi' \cos\theta.$$

Једначине су кретања:

$$\frac{d\lambda}{dt} + q'\nu - r'\mu = L_2$$

$$\frac{d\mu}{dt} + r'\lambda - p'\nu = M_2$$

$$\frac{d\nu}{dt} + p'\mu - q'\lambda = N$$

Ако се λ, μ, ν, p_2, q_2, r и p', q', r' замене својим вредностима, имаћемо:

$$A\theta'' - A\psi'^2 \sin\theta \cos\theta + Cr\psi' \sin\theta = L_2$$

$$A\psi'' \sin\theta + 2A\psi'\theta' \cos\theta - Cr\theta' = M_2$$

$$C\frac{dr}{dt} = C\frac{d(\varphi' + \psi' \cos\theta)}{dt} = N.$$

Ове су једначине корисне за случај кад је $N = o$, а L_2, M_2 независни од φ, r је онда константно и прве две дају θ и ψ као функције времена. Ово се јавља у проблему Puiseux-a за обртање земљино око њеног тежишта. (Resal, Slesser 1861. Quarterly Journal).

II. Случај кад спољне силе имају резултанту, што пролази кроз сталну тачку.

§ 227. — *Први интеграли.* Најпростији случај код обртања једнога тела око утврђене тачке јесте, или да на тело не дејствују никакове спољне силе или, да резултанта њихова пролази кроз утврђену тачку. Моменти су силе односно тачке 0 (утврђене) нуле, $L = M = N = o$ и Ајлерове су једначине:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = o$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = o \cdot \cdot 1).$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = o.$$

У овом се случају једначине 1). могу независно од једначина између pqr и $\theta\varphi\psi$ интегрисати. Једначине под 1). имају два прва интеграла. Први се добија ако се једначине под 1) редом помноже са p, q, r и интегришу, интеграл је:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \cdot \cdot 2).$$

Други се интеграл добија множењем једначина 1). са Ap, Bq, Cr и сабирањем и интеграл је:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2 \cdot \cdot 3).$$

Интеграли 2. и 3. излазе из општих теорема. Интеграл 2. је интеграл живе силе, јер је рад сила спољних нула.

За тумачење интеграле 3, сетимо се да су пројекције момента величине кретања 0σ: Ap, Bq, Cr и 3). означује, да је дужина 0σ стална и једнака l. Пошто је $L = M = N = o$, то је и $0S$ = нула, тачка σ има брзину нула, она је стална, то је и дужина 0σ стална. У овоме се случају теорема о површинама примењује на сваку раван кроз 0. Раван управна на 0σ је раван максималне површине.

Из 2. и 3. елиминација сталних количина на десној страни даје израз:

$$A(Ah - l^2)p^2 + B(Bh - l^2)q^2 + C(Ch - l^2)r^2 = o \cdot \cdot 4).$$

Једначине су тренутне обртне осовине: $\frac{p}{x}=\frac{q}{y}=\frac{r}{z}$ и из 4). се види, да та осовина описује конус другога реда, дат једначином:

$$A(Ah-l^2)x^2+B(Bh-l^2)y^2+C(Ch-l^2)z^2=o\cdot\cdot 5)$$

Угао између 0σ и тренутне осовине дат је једначином:

$$Cos\,\omega\sigma=\frac{p\,Ap+q\,Bq+r\,Cr}{\omega l}=\frac{h}{l\omega}$$

и излази да је сталан (Poinsot)

§ 228. — *Интегрисање елиптичким функцијама.* Нека су количина $A>B>C$ и узмимо константе:

$$\frac{h}{l}=\mu,\ \frac{l^2}{h}=D,\ h=D\mu^2,\ l=D\mu\ (Greenhill)..$$

Из горњих једначина, 2. и 3. и друге под 1). (§ 227) имамо онда:

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=D\mu^2$$

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=D^2\mu^2\cdot\cdot 1).$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=o.$$

Ако из прве две нађемо p и r и заменимо у трећој, имаћемо једначину за q. Елиминиција r из прве две даје:

$$Ap^2(A-C)+Bq^2(B-C)=D(D-C)\mu^2\cdot\cdot 2).$$

$D-C>o$ и нула је за случај ако су $p_0=q_0=$o, кад је почетна ротација око $0z$. Из 2). имамо:

$$p^2=\frac{B(B-C)}{A(A-C)}(f^2-q^2),\quad f^2=\mu^2\frac{D(D-C)}{B(B-C)}$$

и слично:

$$r^2=\frac{B(A-B)}{C(A-C)}(g^2-q^2),\ \ g^2=\mu^2\frac{D(A-D)}{B(A-B)}.$$

$$A-D>o\ \text{ и нула је за }\ q_0=r_0=o.$$

Да су p и r реелни, нужно је да је q^2 мање од f^2 и g^2, и ради овога нађимо разлику:

$$g^2-f^2=\mu^2\frac{D(A-C)(B-D)}{B(B-C)(A-B)}.$$

Знак од g^2-f^2 зависи од знака $B-D$, који је дат почетним условима.

Нека је $B-D>o$, $g^2>f^2$, q варира између $-f$ и $+f$: r није никад нула и нека је $r>$ o, p је нула за случај $q=\pm f$. Кад q расте $\frac{dq}{dt}>o$, трећа од једначина под 1. казује да је $p<$ o. Кад q опада $p>o$. Ово је нужно због знакова, које ваља пред кореном узети.

Кад се нађене вредности за p и r замене у трећој једначини под 1). имаћемо:

$$\frac{dq}{dt}=\sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}\sqrt{(f^2-q^2)(g^2-q^2)}\cdot\cdot 2).$$

Пред кореном је знак $+$ док q расте и непостане $+f$, кад q иде од $+f$ ка $-f$ пред кореном ваља да стоји знак — и т. д.

Ако у 2. ставимо:

$$(f<g)$$

$$q=fs,\ k^2=\frac{f^2}{g^2}=\frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}$$

и решимо по t, имаћемо:

$$n\,(t - to) = \int\limits_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)\,(1 - k^2 s^2)}} \cdot \cdot 3).$$

$$n = \mu \sqrt{\frac{D\,(A - D)\,(B - C)}{ABC}}.$$

t_0 је време кад је први пут $q = o$ растући; k^2 је модул и он је мањи од 1 јер је $g > f$.

Ако са τ обележимо $n\ (t - to)$, $\tau = n\ (t - to)$ и извршимо инверзију интеграла 3, имаћемо:

$$s = sn\,\tau$$

или:

$$q = fs \qquad = \varepsilon\,\mu \sqrt{\frac{D\,(D - C)}{B\,(B - C)}}\ sn\,\tau$$

$$p = f \sqrt{\frac{B\,(B - C)}{A\,(A - C)}}\,\sqrt{1 - sn^2\,\tau} = \varepsilon'\,\mu \sqrt{\frac{D\,(A - C)}{A\,(A - C)}}\,cn\,\tau$$

$$\cdot \cdot 3).$$

$$r = g \qquad \sqrt{\frac{B\,(A - B)}{C\,(A - C)}}\,\sqrt{1 - k^2\,sn^2\,\tau} =$$

$$= \varepsilon''\,\mu \sqrt{\frac{D\,(A - D)}{C\,(A - C)}}\,dn\,\tau$$

$$\mu > o \text{ а } \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \text{ су } \pm 1.$$

Из 3. је јасно, да су p и q периодичке функције (елиптичке) и тако и постају нуле, док r није никад нула. Ако је $r_0 > o$, $r > o$ и $\varepsilon'' = + 1$ то су онда $\frac{dp}{dt}$ и q знака $+$. Због израза:

$$\frac{d\,cn\,\tau}{d\tau} = - sn\,\tau\,dn\,\tau$$

$\varepsilon\,\varepsilon' = - 1$, дакле $\varepsilon' = - 1$ и $\varepsilon = + 1$.

Периода је интеграла 3):

$$T = \frac{4K}{n} = \frac{4}{n} \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)\,(1 - k^2)\,s^2}}.$$

Кад t постане T, p, q и r добијају старе вредности као и за t. Тренутна осовина заузме исти положај у телу за T као и за t, али не и у простору.

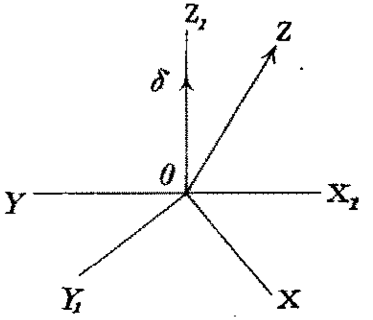
§ 229. — *Израчунавање* углова θ, φ и ψ. Нека је сад узето за $0z_1$, правац сталан $0\delta = o\sigma = l$. Пројекције су $o\sigma$ на $0xyz$:

$$l\,sin\,\theta\,sin\,\varphi = Ap$$

$$l\,sin\,\theta\,cos\,\varphi = Bq \cdot \cdot 1)$$

$$l\,cos\,\theta = Cr$$

јер су косиниси углова $\gamma, \gamma', \gamma''$, $0x$, $0y$, $0z$ са $0z_1$, $sin\,\theta\,sin\,\varphi$, $sin\,\theta\,cos\,\varphi$ и $cos\,\theta$.



Сл. 140.

Из 1). се без интегрисања имају θ, и φ као функције $p\ q\ r$, односно t.

За ψ ћемо поћи од две раније једначине:

$$p = \psi'\,sin\,\theta\,sin\,\varphi + \theta'\,cos\,\varphi,$$

$$q = \psi'\,sin\,\theta\,cos\,\varphi - \theta'\,sin\,\varphi.$$

Елиминација θ' даје:

$$\psi' = \frac{p\,sin\,\varphi + q\,cos\,\varphi}{sin\,\theta}$$

Можемо наћи из 1):

$$p\,sin\,\varphi + q\,cos\,\varphi = \frac{Ap^2 + Bq^2}{l\,sin\,\theta} \text{ и } l^2\,sin^2\,\theta = A^2\,p^2 + B^2\,q^2$$

Кад се ово замени у израз за ψ', имаћемо:

$$\psi' = l\,\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2\,p^2 + B^2\,q^2} = l\,\frac{h - Cr^2}{l^2 - C^2\,r^2} \quad \cdot\ \cdot\ 2).$$

Како је $\psi' > o$, ψ расте; раван $Z0Z_1$ позитивно се обрће око $0Z_1$ (око 0δ).

Из 2) имамо, пошто је ψ периодичка функција:

$$\psi'\,(t + T) = \psi'\,(t), \text{ или:}$$

$$\psi\,(t + T) = \psi\,(t) + \psi_1$$

ψ_1 константа.

§ 230. — Одредба угла ψ. Из 2) (§ 229) имамо:

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu\,D\,\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2\,p^2 + B^2\,q^2}\,.$$

Кад се овде смени p и q нађеним елиптичким функцијама, имаћемо:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{n}\,\frac{(B - C) - (B - A)\,Sn^2\,\tau}{A\,(B - C) - C\,(B - A)\,Sn^2\,\tau}$$

$$\tau = n\,(t - t_0)$$

или:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{nC} + \frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C - A)\,(B - C)}{A\,(B - C) - C\,(B - A)\,Sn^2\,\tau}\,.$$

Одредимо један аргуменат ic сталан из:

$Sn^2\,ic = \dfrac{A\,(B - C)}{C\,(B - A)}$, $A > B$, $sin^2\,ic$ је имажинерно

и имаћемо:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{nC} + \frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C - A)\,(B - C)}{C\,(B - A)}\,\frac{1}{Sn^2\,ic - Sn^2\,\tau}$$

Из познатих елементарних односа елиптичких функција имамо:

$$cn^2\,ic = \frac{B\,(A - C)}{C\,(A - B)} \text{ и } dn^2\,ic = \frac{D\,(A - C)}{C\,(A - D)}$$

$$i\,sn\,ic.\,cn\,ic.\,dn\,ic = \frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C - A)\,(B - C)}{C\,(B - A)}$$

и једначина је за ψ':

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu D}{nC} + \frac{i\,sn\,i\,c\,cn\,i\,c\,dn\,i\,c}{sn^2\,i\,c - sn^2\,\tau}$$

Знамо за теорему:

$$1).\ sn^2\,u - sn^2\,v = \frac{\theta^2\,(o)}{k}\,\frac{\Pi\,(u - v)\,H\,(u + v)}{\theta^2\,(u)\,\theta^2\,(v)}$$

(Briot et Bouquet F. elliptiques p. 494).

за ма каква два аргумента u и v.

Из 1) је:

$$\frac{2\,sn\,u\,cn\,u\,dnu}{sn^2\,u - sn^2\,v} = -2\,\frac{\theta'\,(u)}{\theta\,(u)} + \frac{H'\,(u - v)}{H\,(u - v)} + \frac{H'\,(u + v)}{H\,(u + v)}$$

Ако се овде стави $u = i\,c$, $\nu = \tau$ и са λ обележи $\lambda =$

$$= \frac{\mu D}{nC} - \frac{i\,\theta'\,(i\,c)}{\theta\,(i\,c)}$$

имаћемо:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \lambda + \frac{i}{2}\,\frac{H'\,(i\,c - \tau)}{H\,(i\,c - \tau)} + \frac{i}{2}\,\frac{H'\,(i\,c + \tau)}{H\,(i\,c + \tau)}.$$

Ако је $\psi = o$ за $\tau = o$, интегрисањем последње једначине добијамо:

$$\psi = \lambda\tau + {}^{i}/_{2}\,log\,\frac{H\,(i\,c + \tau)}{H\,(i\,c - \tau)} \quad \cdot\ \cdot\ \mathrm{I}).$$

На овај смо начин нашли сва три угла θ, φ и ψ.

Важно је изнети овде Јакобијев метод за налажење 9 углова $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, $\gamma\gamma'\gamma''$ као функције времена.

Из 1). § 229 имамо одмах $\gamma, \gamma'\gamma''$.

Из истих је једначина:

$$Sin\,\theta = \frac{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}}{D\mu}$$

или заменом p и q, имамо:

$$Sin\,\theta = \sqrt{\frac{C(A-B)(D-C)}{D(A-C)(B-C)}}\sqrt{sn^2\tau - \frac{A(B-C)}{C(B-A)}} =$$

$$= \nu\frac{\sqrt{H(\tau - ic)\,H(\tau + ic)}}{\theta(\tau)}.$$

$\nu = cost.$

Ако обележимо са $w = e^{i\psi}\sin\theta$ и диференцијалимо, добијамо:

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} = \frac{i\,d\psi}{dt} + cotg\,\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Заменом ψ и θ налазимо да је w елиптичка функција од t.

Кад је $k = 1$, θ, φ и ψ се изражавају елементарним функцијама: $k=1$ за $D=B$ и онда је $S=Sn\tau= = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = -i\,tg\,i\,\tau$, $Cn\,\tau = \sqrt{1-s^2}$, $\frac{1}{Cos\,i\tau} = = dn\,\tau$. Ако се уведе чисто имагинерни аргуменат ic из:

$$tq^2c = \frac{A(B-C)}{C(A-B)}, \frac{1}{Cos^2C} = \frac{B(A-C)}{C(A-B)}$$

Имаћемо из ψ':

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu B}{nC} + \frac{tq\,C}{Cos^2c}\,\frac{1}{tq^2c - tq^2\,i\tau}$$

или:

$$\psi = \lambda\tau - {}^{i}/_{2}\log\frac{\sin(c + i\tau)}{\sin(c - i\tau)}$$

За $A = B$, $Sn\,\tau = \sin\tau$ и т. д.

§ 231. — *Геометријско представљање кретања (Poinsot)*. Нека су $0x, 0y, 0z$ главне осе елипсоида лењивости. У извесном тренутку тренутна оса ω сече елипсоид у тачци m, коју Поенсо зове пол и изводи ове теореме:

I). *Теорема*. Жива је сила тела $\frac{\omega^2}{0m^2}$.

Ово излази из тога, што је моменат инерције тела односно 0ω $\frac{1}{0m^2}$, како је брзина ω, жива је сила $\Sigma mv^2 = \frac{\omega^2}{0m^2}$.

II). *Теорема*. У свакоме је тренутку тангентна раван на елипсоиду инерције у полу m управна на резултујући моменат величине кретања 0σ.

Једначина је елипсоида лењивости:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

Косинуси углови 0ω су: $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, координате су тачке m, x, y, z и:

$$x = 0m\frac{p}{\omega};\ y = 0m\frac{q}{\omega},\ z = 0m\frac{r}{\omega}.$$

Тангентна је раван у m на елипсоиду:

$$AXx + BYy + CZz = 1$$

и ова једначина постаје:

$$\frac{0m}{\omega}(Ap\,X + Bq\,Y + Cr\,Z) = 1$$

Ово је управна раван на 0σ, јер су пројекције од 0σ: Ap, Bq Cr.

III). *Теорема*. Одстојање сталне тачке 0 од тангентне равни у m на елипсоиду, једнако је квадратном корену из живе силе подељеном са моментом количине кретања.

Ако је δ одстојање 0 од тангентне равни, оно је једнако:

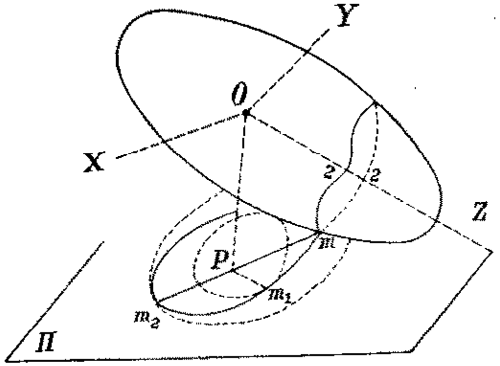
$$\delta = \frac{\omega}{0m}\,\frac{1}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}.}$$

Овим је теорема доказана.

Ако се ово примени сад на случај, кад је резултантна сила једна и пролази кроз утврђену тачку, онда је 1): жива сила константа $h = D\mu^2$

$$\frac{\omega}{0m} = \sqrt{h} = \mu\sqrt{D}.$$

2). 0σ је сталног правца, тангентна раван је сталног правца и управна на 0σ; 3). резултујући је моменат $0\sigma = l$ или μD, одстојање је тангентне равни у m од 0:



Сл. 141.

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = \frac{1}{\sqrt{D}.}$$

Раван Π у m тангентна на елипсоиду је стална и у сталноме одстојању од 0. Ову раван елипсоид инерције непрестано додирује. Тачка је додира m пол, $0m$ је тренутна обртна осовина и брзина је обртна $\omega = 0m\,\sqrt{h}$ променљива са $0m$. Поенсо зове *полходијом* (polhodie) курбу описану полом m на површини елипсоида и херполходијом (herpolhodie) курбу описану полом m у сталној равни Π. Конус, геометријско место тренутних осовина у телу, има теме у 0 и за директрису полходију; конус, геометријско место тренутних осовина у простору, има теме у 0 а за основицу полходију. Да би се добило кретање, ваља сматрати котрљање првог конуса по другом тако, да угаона брзина ω буде сразмерна са $0m$, по једначини $\omega = 0m\,\sqrt{h}.$

Како је тачка, елипсоида додирна са Π, брзине нула, кретање се може добити котрљањем и пивотирањем (без клизања) елипсоида инерције по равни Π.

§ 232. — *Полходија*. Ова се линија може дефинисати као геометријско место пола m (xyz) елипсоида лењивости, где је тангентна раван:

$$Ax\,X + By\,Y + Cz\,Z = 1$$

у сталном одстојању $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{D}.}$ од почетка.

Елипсоид инерције је однесен на своје осе.

Овај је услов изражен једначином:

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D \cdot \cdot 1$$

Једначина је елипсоида:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \cdot \cdot 2.$$

Једначина 1) и 2) одређују полходију. Она је курба 4-ог реда и то алгебарска.

До полходије се може доћи као линије, која постаје пресецањем конуса, који је геометријско место тренутних осовина $0m$ у телу, и елипсоида лењивости.

Једначина се конуса добија из 1) и 2) и она је:

$$A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0$$

Да је конус реалан, потребни су услови:

$$A \geqq D \geqq C$$

а то је, да је одстојање 0 од тангенте равни $\frac{1}{\sqrt{D}} < \frac{1}{\sqrt{C}}$ и $\frac{1}{\sqrt{D}} > \frac{1}{\sqrt{A}}$. За $D = A$ или $D = C$ конус се своди на две имагинерне равни, које се поклапају са $0x$ или $0z$. Полходија је онда сведена на две тачке c, c' или a, a'. За $D = B$ конус се своди на две равни стварне што иду кроз средњу осовину:

$$x = \pm z \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}$$

Полходија се своди на две елипсе ee', које се секу у bb' средње осе..

У опште, полходија има 4 темена z, z' и два симетрична, за које је потег $0m$ из центра maxim. или minim. При кретању се једна грана полходије котрља по Π., друга грана се котрља по симетричној равнини са Π односно 0.

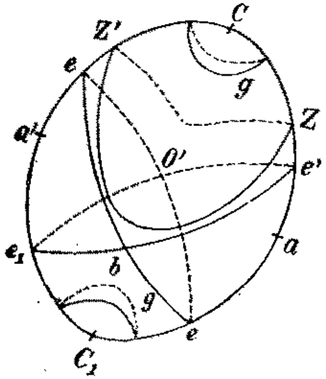
Херполходија. Ако се из тачке 0 повуче перпендикуларна $0P$ на Π, дужина је $0P = \frac{1}{\sqrt{D}}$. Вектор $Pm = \rho$ тачке херполходије јесте:

$$\rho = \sqrt{0m^2 - \frac{1}{D}}$$

$0m$ варира између maximum-а и minimum-а, тако исто и ρ између ρ_1 и ρ_2. Херполходија се налази између два концентрична круга из 0 полупречника ρ_1 и ρ_2 и она додирује ова два круга у m_1 и m_2. Нема инфлексионих тачака. (Сл. 141).

Лук $m_1 m_2$ је $^1/_4$ лука полходијиног.

За $D = A$ или $D = C$ полходија је тачка, а тако и херполходија.



Сл. 142.

За $D = B$ полходија се своди на две елипсе e, e', херполходија је облика двојне спирале. За случај кад је елипсоид обртни, полходија и херполходија су кругови; ако је елипсоид лењивости свера, херполходија и полходија су тачке.

§ 233. — *Једначина херполходије.* Нека су xyz координанте тачке m (пола) односно главних оса инерције, како је $\frac{\omega}{0m}$ константно и једнако са $\sqrt{h}$, то су:

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{0m} = \sqrt{h} \cdot \cdot 1).$$

p, q, r су елиптичке функције од t, то су исто онда и xyz.

Из Ајлерових једначина и 1). добијамо:

$$A\frac{dx}{dt} + \sqrt{h}(C - B)yz = o,$$

$$B\frac{dy}{dt} + \sqrt{h}(A - B)zx = o \text{ и т. д.}$$

Нека су ϱ и χ поларне координате тачке m према полу P, према пројекцији 0 на Π.

$$0P = \frac{1}{\sqrt{D}} \text{ и}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + \frac{1}{D}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \cdot \quad \cdot 2).$$

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = D.$$

Прва једначина излази из односа:

$$0m^2 = Pm^2 + 0P^2$$

друге су две једначине једначине полходије.

Кад се из последњих једначина нађу изрази за x^2, y^2, z^2 и обележимо са: $\Delta = (A - B) (B - C) (C - A)$,

$$a = - \frac{(B - D (C - D)}{BCD},\ b = - \frac{(C - D) (A - D)}{CAD}$$

$$c = - \frac{(A - D)'B - D)}{ABD.},$$

имаћемо:

$$x^2 = \frac{BC (C - B)}{\Delta} (\varrho^2 - a)$$

$$y^2 = \frac{CA (A - C)}{\Delta} (\varrho^2 - b)$$

$$z^2 = \frac{AB (Б - A)}{\Delta} (\varrho^2 - c^2)$$

$A > B > C$, D је између B и C, $\Delta < 0$, $a > o$, $b > o$, $c > o$ z је увек позитивно и није никад нула. Да су x^2 и y^2 позитивни треба да је $\varrho^2 - a > o$, $\varrho^2 - b < o$, ϱ^2 осцилира између a и b.

Из прве једначине под 2). имамо:

$$\varrho \frac{d\varrho}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

или, с погледом на Ајлерове једначине:

$$\varrho \frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{h}\, xyz \left(\frac{B - C}{A} + \frac{C - A}{B} + \frac{A - B}{C}\right) =$$

$$= - \frac{\Delta \sqrt{h}}{ABC} xyz;$$

или:

$$\varrho \frac{d\varrho}{dt} = \mu \sqrt{D} \sqrt{- (\varrho^2 - a) (\varrho^2 - b) (\varrho^2 - c)} \cdot \quad \cdot 3).$$

Одавде се налази ϱ^2 као функција времена.

Ако су m и m' две узастопне тачке пола m у телу, раван троугла mom' је тангентна на конусу, који је геометријско место тренутних оса у телу и пројекције су на главне равни елипсоида од $S = mom'$ S_x S_y S_z: $2S_x = ydz - zdy$, $2S_y = zdx - xdz$, $2S_z = xdy - ydx$.

Пројекција S на Π је $^1/_2 \varrho^2\, d\chi$

Равни $x0y$, $y0z$ и $z0x$ са Π склапају углове чији су косинуси $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ и онда је:

$$\varrho^2\, d\chi = 2\gamma Sx + 2\gamma' Sy + 2\gamma'' Sz \cdot \quad \cdot 3').$$

$$\gamma = \frac{Ap}{l} = \frac{A \sqrt{h}}{l} x = \frac{A}{\sqrt{D}} x,$$

$$2Sx = ydz - zdy = \frac{x\sqrt{h}}{BC} \left[B (A - B)\, y^2 + C (A - C) z^2\right] dt.$$

$2S_x = \frac{x\sqrt{h}}{BC} (A - D)\, dt$. Кад се слично нађе за S_y S_z и замени у $3'$ имаћемо:

$$\varrho^2 \frac{d\chi}{dt} = \mu \left[\frac{A - D}{BC} Ax^2 + \frac{B - D}{CA} By^{2'} + \frac{C - D}{AB} Cz^2 \right) \cdot \quad \cdot 4).$$

Ако се $x^2\,y^2\,z^2$ замени са ϱ^2 и са Σ означи

$$\Sigma = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD} = -\sqrt{-abc\,D}, \text{ из } 4)$$

имамо:

$$\varrho^2\frac{d\chi}{dt} = \mu(\varrho^2+\Sigma) \cdot \cdot \; 4.)$$

3. и 4'. дају ϱ и χ као функције времена. Избацивање t из 3. и 4'. даје:

$$d\chi = \frac{(\varrho^2+\Sigma)\,d\varrho}{\varrho\sqrt{D}\sqrt{-(\varrho^2-a)\,(\varrho^2-b)\,(\varrho^2-o)}} \cdot \cdot \; \mathrm{I}).$$

I је једначина херполходије. Из I је јасно да херполходија нема инфлексионих тачака, јер изражен полупречник кривина са ϱ није никад ∞ због $A < B + C$. Нема ни рамбурсмана, јер $\frac{d\chi}{d\varrho}$ није нула ни за једну вредност ϱ^2 између a и b.

За случај да је $B = D$ $\Sigma = o$ и $a = c = o$:

$$d\chi = \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{B}\sqrt{b-\varrho^2}} = -\sqrt{\frac{B}{b}}\,\frac{d\,\frac{\sqrt{b}}{\varrho}}{\sqrt{{}^{b}/_{\varrho^2}-1}}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\varrho} = \frac{e^{\lambda\chi}+e^{-\lambda\chi}}{2} \text{ за } \lambda = \sqrt{\frac{b}{B}}$$

ово је једначина спирале.

Једначине су херполходије облика

$$\varrho^2\frac{d\chi}{dt} = \mu\varrho^2+\nu \;\text{ и }\; \varrho\frac{d\varrho}{dt} = \lambda\sqrt{F(\varrho^2)}$$

$\mu\;\nu\;\lambda$ су константе и $F(\varrho^2)$ полином трећег степена по ϱ^2, између ових констаната постоји однос:

$$\nu = \pm\,\lambda\sqrt{-F(o)}.$$

III. Кретање чврстог тела тешког око једне сталне тачке.

§ 234. — *Интеграли добивени општим теоремама.* Ако су непокретне осовине $0x_1\,y_1\,z_1$, 0 стална тачка око које се тело обрће и $0xyz$ осовине покретне у телу, које се поклапају са главним осама инерције, па са M означимо масу тела, а са ξ_1, η_1, ζ_1 координате тежишта G односно $0x_1\,y_1\,z_1$, а са $\xi\;\eta\;\zeta$ односно система $0xyz$, онда се могу свега два интеграла прва написати, за тело које се обрће око сталне тачке.

1). *Интеграл живе силе је:*

$$d\,{}^1/_2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -Mg\,d\xi_1,$$

или:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -2\,Mg\xi_1 + h \cdot \cdot \; 1).$$

јер је $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ жива сила и једина сила што дејствује на тело јесте тежа $-Mg$.

2). *Интеграл површине.* Силе што дејствују на тело су отпор од 0 и тежа $Mg \parallel$ са $0z_1$ и моменти су тих сила нула односно $0z_1$ осовине. Теорема се о моментима величине кретања примењује. Знамо да су пројекције резултанте 0σ количине кретања на $0xyz$, Ap, Bq, Cr, пројекција је 0σ на $0z_1$:

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma''$$

и ово је стално на основу теореме о површинама, те је други интеграл први:

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = K \cdot \cdot \; 2).$$

K је константа површина.

Само два прва интеграла имамо, кад је тело ма какво и положај је тежишта произвољан. Полазећи од нарочитих хипотеза, може се доћи до још по једног алгебарског интеграла и решити проблем квадратурама.

Важнији су случајеви, који доводе до још једнога интеграла ови:

1). Кад је тежиште у тачци 0 (Euler, Poinsot), ово смо већ третирали. 2). Кад је елипсоид лењивости обртни и тежиште је на обртној осовини (Lagrange и Poisson). 3). Елипсоид је лењивости обртни односно сталне тачке 0 а тежиште је у равни екватора: $\xi = o$, $A = B = 2C$ (Гђ. Ковалевска)) 4). $A = B$, $\xi = o \dfrac{2C}{A} = n < 4$, због $C \leqq A = B$ (R. Liouville). Поред ових случајева има још и других који дају и имажинерна решења, а доводе до нових интеграла.

§ 235. — Узмимо случај *Лагранжов*. Нека је $0z$ осовина елипсоида инерције односно тачке сталне 0. $0G$ је позитивно, $A = B$, $\xi = \eta = o$, $\zeta > o$, $\zeta = 0G$, $\zeta_1 = \zeta \cos\theta$ (θ је угао између z и z_1.

Теорема живих сила даје интеграл:

$$A(p^2+q^2)+Cr^2=-2Mg\zeta_1+h=-2Mg\,\xi\cos\theta+h \quad \cdot\ \cdot\ 1).$$

Теорема о површинама даје:

$$Ap\sin\theta\sin\varphi + Aq\sin\theta\cos\varphi + Cr\cos\theta = K \quad \cdot\ \cdot\ 2).$$

Трећа је Ајлерова једначина:

$$\begin{matrix} N = o \\ (A = B) \end{matrix} \quad \frac{dr}{dt} = o \text{ или } r = r_0 \quad \cdot\ \cdot\ 3).$$

Нов је интеграл $r = r_0$, и из те три једначине можемо решити проблем. Ове се једначине могу написати овако:

$$p^2 + q^2 = \alpha - a\cos\theta,$$

$$\sin\theta\,[p\sin\varphi + q\cos\varphi] = \beta - br_0\cos\theta,$$

$$r = r_0,$$

r_0, α, β, a и b су константе и то: a b су зависне од $\dfrac{2Mg\,\zeta}{A}$ и $\dfrac{C}{A}$ и r_0 α и β су произвољне, зависне од почетних услова.

Углови су φ, ψ, θ дати једначинама:

$$p = \psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi, \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt},$$

$$q = \psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$r = \psi'\cos\theta + \varphi'. \qquad \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

Кад се из последњих једначина вредности за p, q и r унесу у наша три интеграла, добићемо:

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta\,\psi'^2 + \theta'^2 = \alpha - a\cos\theta \\ &\sin^2\theta\,\psi' = \beta - br_0\cos\theta, \quad \cdot\ \cdot\ 1). \\ &\psi'\cos\theta + \varphi' = r_0. \end{aligned}$$

Избацивањем ψ' из прве две имаћемо, кад се стави $\cos\theta = u$:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2 = f(u) \quad \cdot\ \cdot\ 2).$$

Из друге је једначине под 1).:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0\,u}{1 - u^2} \quad \cdot\ \cdot\ 3).$$

И из треће под 1). је:

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u\,\frac{d\psi}{dt} = r_0 - u\,\frac{\beta - br_0\,u}{1 - u^2} \quad \cdot\ \cdot\ 4).$$

Да се нађе θ, ψ и φ, ваља из 2). наћи прво u као функцију времена t.

$f(u)$ је негативан полином за $-\infty$, -1 и $+1$ од u, а позитиван је за u_0, за коју је $\frac{du}{dt}$ стварно, и за $u = +\infty$. Његови су стварни корени u_1, u_2, u' између: $(-1, u_0)$, $(u_0, +2)$ и $(+1, +\infty)$ и $f(u)$ се може представити овако:

$$f(u) = a(u - u_1)(u_2 - u)(u' - u) \cdot \cdot 5).$$

θ осцилара између $(\theta_1 > \theta_2)$. θ_1 и θ_2 чији су косинуси u_1 и u_2. Кад u порасте од u_1 до u_2 ваља узети знак $+$ пред кореном:

$$\frac{du}{dt} = + \sqrt{f(u)}.$$

Кад опада u од u_2 до u_1 знак —.

Ако око $0z_1$ опишемо као око осовине два конуса C_1 и C_2 из 0 под угловима $\theta_1/_2$ и $\theta_2/_2$, при обртању ће оса $0z$ бити између ова два конуса (круга C_1 и C_2 на свери). Тачка z, где $0z$ сече сверу полупречника 1 из 0, описује сверну курбу између кругова C_1 и C_2. Кад су C_1 и C_2 близу, око $0z_1$ описује оса конуса $0Z$ близу један конус.

Ако положај тачке z на свери одредимо са луком $z_1 z = \theta$ и углом $x_1\ z_1\ z = \chi = \psi - {}^{\pi}/_{2}$, то је:

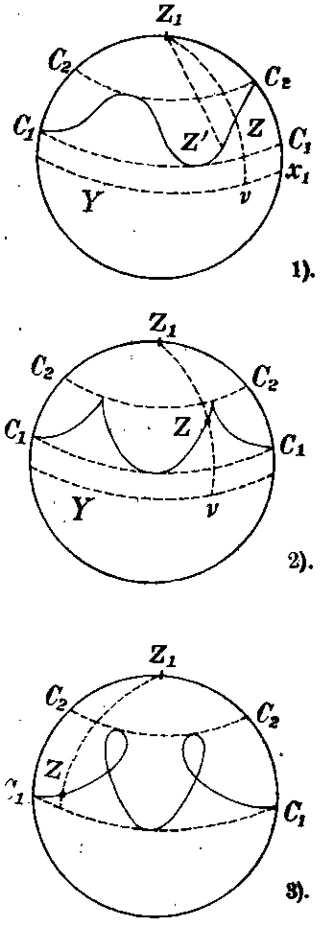
$$\frac{du}{dt} = \sqrt{f(u)}, \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0\, u}{1 - u^2}$$

или:

$$d\chi = \frac{(\beta - br_0\, u)\, du}{(1 - u^2)\sqrt{f(u)}} \cdot \cdot 6).$$

Ово је диференцијална једначина курбе тачака z. Угао тангенте на 6 са $z\ z_1$ је V

$$tq\, V = \frac{\sin\theta\, d\chi}{d\theta} \cdot \cdot 7).$$



Сл. 143.

Из троугла zmz' (m је у пресеку $z_1\ z'$ и паралелника кроз z, угао је код $z' = V$,) добија се лук $\overline{mz'} = d\theta$, arc. $mz = \sin\theta\, d\chi$ или:

$$tq\, V = -\frac{(1 - u^2)\, d\chi}{du} = -\frac{\beta - br_0\, u}{\pm\sqrt{f(u)}}$$

За u равно u_1 или u_2, $V = {}^{\pi}/_{2}$ и курба је тангента на C_1 или C_2. За случај да u поништи за u_1 или u_2 $\beta - br_0 u$, курба ће имати рамбурсмане на C_1 и C_2 и ово се јавља само на C_2.

§ 236. — Разни облици курбе Z.

Из односа:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0\, u}{1 - u^2}$$

ако ${}^{\beta}/_{br_0}$ не лежи између u_1 и u_2, $\frac{d\chi}{dt}$ је увек истога знака и вектор $z_1\ z$ обрће се у истоме смислу и курба је облика у слици 1). Ако је ${}^{\beta}/_{br_0}$ између u_1 и u_2, $\frac{d\chi}{dt}$ је час позитивно час негативно и лук

z_1 z обрће се у једноме или другоме правцу, курба је облика сл. 3). Ако је β/br_0 једнако u_1 или u_2, $\frac{d\chi}{dt}$ је истога знака, али курба има рамбурсмане на C_2 као у сл. 2.

Ови случајеви зависе од почетних услова. Ако је $\beta/bro > 1$, оно не може бити између u_1 и u_2. Ако је $\beta/bro < 1$ онда је

$$f\left(\frac{\beta}{bro}\right) = \left(\alpha - \frac{a\beta}{bro}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{b^2 ro^2}\right)$$

и од знака $\left(\alpha - \frac{a\beta}{bro}\right)$ зависи да ли ће $\frac{\beta}{bro}$ бити или не између граница u_1 и u_2. Ако је $\alpha - \frac{a\beta}{bro} = o$, $\frac{\beta}{bro}$ је равно једној граници u_1 или u_2, и то је увек u_2. Нека је:

$$-1 < \frac{\beta}{bro} < 1, \qquad \alpha = \frac{a\beta}{bro}$$

$$f(u) = \left(\frac{\beta}{bro} - u\right)\left[a\,(1 - u^2) - b^2 r_0^2 \left(\frac{\beta}{bro} - u\right)\right]$$

Један је корен између -1 и $+1$; други поништава израз у загради и чини $\beta/bro - u > o$ и он је мањи од β/bro и то је највећи корен $u_2 = \frac{\beta}{bro}$.

§ 237. — *Нека је дата* чигра и њој саопштимо ротирање ако $0z$ са угаоном брзином великом r_0, и $p_0 = q_0 = o$.

Наши су први интеграли:

$$(u = cos\theta) \cdot p^2 + q^2 = \alpha - au,\ sin\theta\,(psin\,\varphi + qcos\,\varphi) =$$
$$= \beta - br_0 u$$

У почетку је:

$$u_0 = cos\theta_0, \qquad \alpha - au_0 = o \qquad \text{и } \beta - br_0\,u_0 = o \text{ и}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^- = (u_0 - u)\,[a\,(1 - u^2) - b^2\,r_0^2\,(u_0 -- u)]$$

Да је $\frac{du}{dt}$ позитивно u мора бити између u_0 и u_1. што поништава израз у загради последње једначине. Из тог израза, стављеног да је једнак нули, имамо:

$$u_0 - u_1 = \frac{a\,(1 - u_1^2)}{b^2\,r_0^2}$$

$u_0 - u_1 > o$ и друга је граница мања од прве. Највећи корен u_2 је једнак u_0 Круг C_1 за u_1 је испод C_2 за u_0. Курба Z је тангентна на C_1 и управна на C_2, јер је за $u = u_0$, $\beta - br_0\,u = o$.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{br_0\,(u_0 - u)}{1 - u^2}$$

$\frac{d\psi}{dt}$ остаје истога знака и то знака ког је и r_0

Нека је почетна ротација врло велика, из:

$$u_0 -- u_1 = \frac{a\,(1 - u_1^2)}{b^2\,r_0^2}$$

види се да се u_0 мало разликује од u_1, конус од $0z$ налази се између два блиска конуса обртна. Кретање се равни Z_1 $0Z$ врши врло споро због:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{br_0\,(u_0 - u)}{1 - u^2}$$

јер је:

$$\left|\frac{d\psi}{dt}\right| < \left|\frac{a\,(1 - u_1^2)}{br_0\,(1 - u^2)}\right| < \frac{1}{r_0}$$

§ 238. — *Интегрисање* елиптичким функцијама. За решење Лагранжовог случаја ваља наћи u као функцију t из:

$$dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{du}{\sqrt{a(u-u_1)(u^1-u)(u_2-u)}}.$$

Овде имамо случај као и код свернога клатна, а ова се два случаја и поклапају кад се тело сведе на тачку. Кад се u нађе као фукција од t, онда се функцијама Θ и H налази φ и θ.

Периода је за u T:

$$T = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

Ако је r_0 одређено из услова:

$$a = b^2 r_0^2 u_0 \quad (Greenhill)$$

може се интегрисање извршити обичним функцијама јер се један круг C_1 своди на велики круг.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = b^2 r_0^2 u (u_0 - u)(1 - uu_0)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = br_0 \frac{u_0 - u}{1 - u^2}.$$

Ако се време рачуна од $u = u_0$ и $\psi = o$ кад је $t = o$, имаћемо:

$$\sqrt{1 - u^2}\, e^{(st-\psi)i} = \sqrt{1 - u\,u_0} - i\sqrt{u(u_0 - u)} \quad \cdot\cdot\ 1).$$

где је s:

$$s = \frac{br_0\,u_0}{2},\ i = \sqrt{-1}$$

Из 1). имамо:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta \cos(st - \psi) &= \sqrt{1 - u_0 \cos\theta} \\ \sin\theta \sin(st - \psi) &= -\sqrt{(u_0 - \cos\theta)\cos\theta} \end{aligned}\right\} \quad \cdot\ \cdot\ 2).$$

Из 2). се налазе θ и ψ као функције времена.

§ 239. — *Случај Гђ. Ковалевске.* Ако са $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ означимо косинусе углова $0xyz$ са $0z_1$, са $\xi\ \eta\ \zeta$ координате тежишта G према $0xyz$ и са P тежину, пројекције су P на $0xyz$:

$$-P\gamma,\ -P\gamma',\ -P\gamma''$$

Моменти су за $0xyz$:

$$L = -P(\eta\gamma'' - \zeta\gamma'),\ M = -P(\zeta\gamma - \xi\gamma''),$$
$$N = -P(\xi\gamma' - \eta\gamma)$$

Ајлерове су једначине:

$$A\,\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = P(\zeta\gamma' - \eta\gamma'')$$

$$B\,\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = P(\xi\gamma'' - \zeta\gamma) \quad \cdot\ \cdot\ 1).$$

$$C\,\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = P(\eta\gamma - \xi\gamma')$$

Ако је $0H = 1$ пренето на $0z_1$, координате су од H према $0xyz$ γ, γ' γ''. Брзина је релативна V_r тачке H према осама $0xyz$

$$\frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\gamma'}{dt},\ \frac{d\gamma''}{dt}\ (Poisson).$$

Антренирајућа је брзина V_e према $0xyz$:

$$q\gamma'' - r\gamma',\ r\gamma - p\gamma'',\ p\gamma' - q\gamma.$$

Како је H непокретно, ансолутна је његова брзина нула, и имамо односе:

$$\frac{dy}{dt}+qy''-ry'=o$$
$$\frac{dy'}{dt}+ry-py''=o \cdot \cdot 2).$$
$$\frac{dy''}{dt}+py'-qy=o$$

Једначине под 1. и 2. дају систем од 6 једначина са 6 непознатих p, q, r, y, y', y'' и решење је теоријски могуће.

За 1. и 2. знамо два интеграла између p, q, r, $y, y' y''$: интеграл живе силе и површински равни $x_1 0 y_1$. Овим се интегралима придружује познати однос:

$$y^2+y'^2+y''^2=1.$$

Нов је интеграл код Лангранжа за $A=B$, $\xi=\eta=o$ био $r=r_0$. Код Ковелевске је случај $A=B=2C$, $\xi=o$ и ако се удеси да је и $\eta=o$, онда из 1. имамо:

$$\frac{2dp}{dt}=qr,\ \frac{2dq}{dt}=-pr+cy'',\ \frac{dr}{dt}=-cy'$$
$$c=\frac{P\xi}{C}$$

Множећи другу са i и сабирајући је са првом **имамо**:

$$2\ \frac{d}{dt}(p+iq)=-ri(p+iq)+cy''i \cdot \cdot 3).$$

Из прве и друге под 2.) на последњи начин, налазимо:

$$\frac{d}{dt}(y+iy')=-ri(y+iy')+y''i(p+iq) \cdot \cdot 4).$$

Избацивање y'' из 3. и 4. даје:

$$\frac{d}{dt}[(p+iq)^2-c(y+iy')]=-ri[(p+iq)^2-c(y+iy')],$$

или:

$$d\ log\ \frac{[(p+iq)^2-c(y+iy')]}{dt}=-ri.$$

Сменом i са $-i$ и сабирањем израза добијамо по свршеном интегрисању нов интеграл:

$$[(p+iq)^2-c(y+iy')]\,[(p-iq)^2-c(y-iy')]=const,$$

Roger Liouville нашао је нов интеграл први за случај: $\xi=o$, $A=B=\frac{2C}{n}$ и из његовог излази Ковалевске за $n=1$, Лагранжов за $n=2$.

* * *

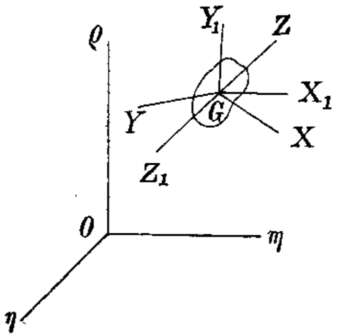
ГЛАВА XX.

Кретање слободног чврстога тела.

I. Ајлерове једначине.

§ 240. — За кретање слободног тела, ваља наћи кретање његовог тежишта и обртање тела око тежишта.

Ако су $0\xi\eta\xi$ сталне осовине у простору; G тежиште тела; нека су осовине $Gx_1\, y_1\, z_1$ паралелне са сталним осовинама и $Gxyz$ покретне осовине са телом, којима се одређују углови Ајлерови; и са $\xi\eta\xi$ обележимо координате тежишта; онда су једначине кретања тежишта, кад су ΣX, ΣY, ΣZ спољне силе што на тело дејствују:



Сл. 144.

$$M\,\frac{d^2\xi}{dx^2} = \Sigma X,\ M\,\frac{d^2\eta}{dt}\ \Sigma Y,\ M\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma Z \cdot\cdot\ 3).$$

M је маса тела.

Кретање тела око G је обртање тела око сталне тачке. Ако су $Gxyz$ главне осовине лењивости, ABC моменти лењивости тела у односу тих осовина; ω тренутна ротација, чије су компоненте односно xyz, pqr, онда су Ајлерове једначине за обртање тела око тежишта:

$$\begin{aligned} A\,\frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr &= L \\ B\,\frac{dq}{dt} + (A - C)\, pr &= M \cdot\ \cdot 2). \\ C\,\frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq &= N \end{aligned}$$

Из шест једначина под 1. и 2. можемо наћи ξ, η, ξ, θ, φ и ψ као функције времена t.

Кад тело није са свим слободно, услови нови смањују број непознатих али уносе непознате реакције.

Једначине се 1. и 2. морају сматрати да симултано постоје и интеграција се тако и врши.

У неким се случајевима може интеграција једначина 1. и 2. независно да врши.

1). Кад је тело чврсто и креће се у безваздушном простору. Тежиште описује параболу. Тежа је једина спољна сила и $L = M = N = o$.

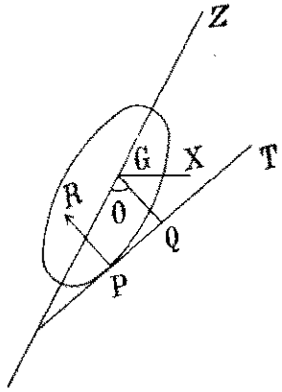
2). Кад се посматра кретање чврстога тела чије се честице из једнога центра 0 привлаче сразмерно одстојањима, атракција се своди на једну резултанту сроз G и G описује елипсу, обртање је око G по Поенсоу.

3). Кад је кретање планета замишљених да су састављене из хомогених слојева. По Њутновом закону гравитације овде се силе своде на једну резултанту кроз G. Елипсоид је инерције свера, обртање је око G обртање око сталне осовине. (Нутација и прецесија не постоје).

II. Кретање тешког тела у додиру са хоризонталном равнином.

§ 241. — Нека је тело обртно и нека клизи без трења по хоризонталној равни.

Нека је елипсоид инерције обртни односно тежишта G, са обртном осовином Gz, и нека тело додирује хоризонталну површину обртном површином око исте осовине.



Сл. 145.

На слици је представљен меридијан тела, којим тело додирује сталну раван. Тангентна раван у P је перпендикуларна на рави ZGP и њена је траса у меридијану PT. Нека је $\xi = GQ$ (GQ управна на PT) и θ угао између GQ и GZ. Додир је обележен односом:

$$\xi = f(\theta)$$

Кад је дат меридијан, одстојање $QP = \varrho$ је функција од θ познато, које се налази лако.

Тангента је PT:

$$x \sin\theta - z\cos\theta = f(\theta) \cdot \cdot 1).$$

Меридијан је анвелопа 1.) и координате се P добијају из 1. и 2 (извод по θ од 1).

$$x\cos\theta + z\sin\theta = f'(\theta) \cdot \cdot 2).$$

2) је нормала PR и $QP = \varrho = \pm f'(\theta)$.

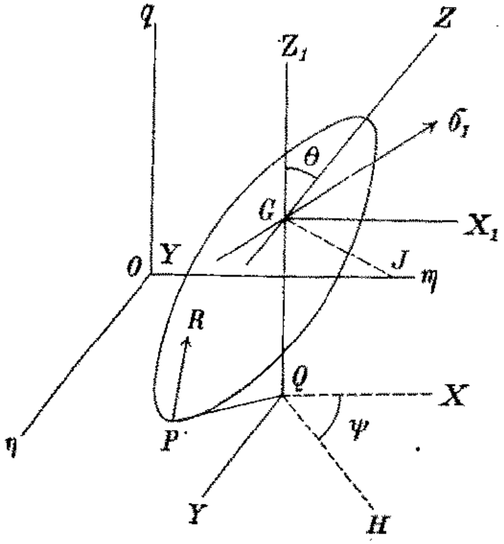
Нека наше тело додирује сталну равни $0\xi\eta$ у тачци P. Нека су $\xi\eta\zeta$ координате тежиште G, $\theta\varphi\psi$ Ајлерови углови. Моменти су лењивости $A = B$.

$GQ = \xi$ у правцу GZ' и ξ склапа са GZ угао θ

$\xi = f(\theta)$ (позната функција) $\cdot \cdot$ 3.)

Једначина 3.) изражава додир тела са хоризонталном равни.

Ако је M маса тела, на тело дејствују две силе: тежа Mg и реакција PR равни $0\xi\eta$.



Сл. 146.

Две су једначине кретања, с тога, што су пројекције наших сила на 0η и 0ξ нуле:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = o, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = o.$$

Тачка Q, хоризонтална пројекција тежишта, описује праву линију једнаком брзином.

Нека је хоризонтална пројекција G стална. Ако узмемо да је почетна брзина тежишта нула или вертикална, брзина је Q увек нула и G осцилира само по GZ'.

Применимо сад теорему живих сила на апсолутно кретање. Жива је сила сума: из $M\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$ живе силе све масе M сасређење у тежишту и $A(p^2 + q^2) + Cq^2$, живе силе у релативном кретању око G. Рад је реакције R нула, а теже је рад $-Mg\,d\xi$ Интеграл је живе силе:

$$M\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -2Mg\xi + h \cdot \cdot 3_a).$$

Моменти су реакције и теже нула односно GZ'. Теорема се о моментима примењује на релативно кретање око G. Како су пројекције момента величине кретање $G\sigma'$ на $Gxyz$: Ap, Aq, Cr, то се пројекције на GZ' лако налазе, и како су моменти спољних сила нуле, интеграл је први:

$$Ap \sin\theta \sin\varphi - Aq \sin\theta \cos\varphi + Cr \cos\theta = K \cdot \cdot 3_b).$$

Реакција и тежа секу осу GZ', $N = o$ и трећа је Ајлерова једначина:

$$C\frac{dr}{dt} = o, \qquad r = r_0 \cdot \cdot 4).$$

Ако сад у 3_a. и 3_b. заменимо r са r_0 и p, q са њиховим вредностима, израженим по изводима θ, φ и ψ, ξ са $f(\theta)$ и $\frac{d\xi}{dt} = \theta' f'(\theta)$, добићемо:

$$[1 + c f'^2(\theta)]\,\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = \alpha - af(\theta). \cdot \cdot 5).$$

$$\psi' \sin^2\theta = \beta - br_0 \cos\theta \cdot \cdot 6).$$

α и β су произвољне константе, $a = \frac{2gM}{A}$, $b = \frac{C}{A}$, $c = \frac{M}{A}$.

Из 5. и 6. налазимо θ и ψ као функције времена, φ се одређује из

$$r_0 = \varphi' + \psi' \cos\theta \cdot \cdot 7).$$

Из 5 и 6 се може избацити ψ' и имамо:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 [1 + c f'^2(\theta)] \sin^2\theta =$$

$$= [\alpha - a f(\theta)] \sin^2\theta - (\beta - br_0 \cos\theta)^2 \cdot \cdot 8).$$

Ако је $f(\theta)$ рационална функција по $\sin\theta$ и $\cos\theta$, из 8. θ је функција од t хиперелиптичка

Курбе описане на хоризонталној равни тачком P. Ако је Q стално и узме се за почетак коор. система и то поларног, да је Qx паралелно са Gx_1, $QP = \varrho$, онда је:

$\varrho = \pm f'(\theta)$ (f је одређено обртном површином тела којом тело додирује раван).

Угао $\chi = \measuredangle XQP = \psi + \pi/2$.

Раван GQP поклапа се са равни $z'\,Gz$ која хоризонтално пројектује обртну осовину. Нормала GJ на $z'\,Gz$ са GX_1 чини угао ψ; нормала QH на QP чини са QX угао ψ и угао $\chi = \psi + \pi/2$, дакле је:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

Избацивање dt из последње две једначине даје: χ као функцију θ или пошто је $\varrho = \pm f'(\theta)$ и $\chi = f_1(\varrho)$ а то је једначина путање тачке P.

Ако тачка Q није стална, онда се линија $(\chi\varrho) = o$ односи на систем $QXYz_1$.

§ 242. — *Чигра*. То је тело обртно које се додирује са равнином хоризонталном само у једној тачци T.

$$\xi = GQ = l\cos\theta \cdot \cdot 1).$$
$$l = GT,\ \varrho = QT = l\sin\theta \cdot \cdot 2)$$

Кад се ово замени у 8). § 241. полином је трећег степена по $\cos\theta$ и имамо случај Лагранжов и Поасонов.

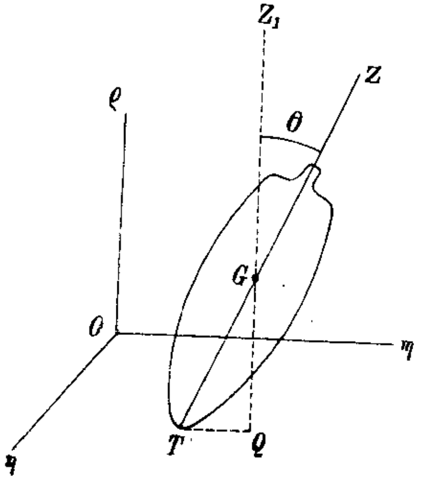
§ 243. — *Обртање* тешког ротационог цилиндра по хоризонталној равни. Овде тело додирује $0\xi\eta$ по PP'. Нека су $0\xi\eta\xi$ и $Gx_1\ y_1\ z_1$ осовине као и раније. Главне осе лењивости нека се сад не поклапају са $Qxyz$. Gx је паралелно са PP_1; Gy и Gz нека леже у нормалноме пресеку кроз G.

Кад је дат нормални пресек познат је однос:

$$\xi = f(\theta)$$

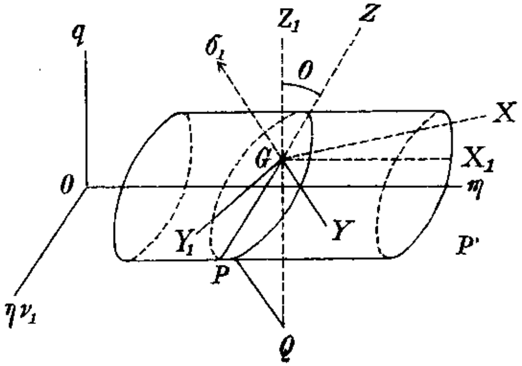
Gx је $\|$ са $0\xi\eta \| x_1\ G\,y_1$, угао је Ајлеров $\varphi = o$ и:

$$p = \theta',\ q = \psi' \sin\theta,$$
$$r = \psi' \cos\theta \cdot \ \cdot 1).$$



Сл. 146.

Узмимо да су почетне брзине такве да је Q стално.



Сл. 147.

Пошто $Gxyz$ нису главне осе лењивости, жива је сила T тела у обртању око G:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr^2 - 2Erp - 2Fpq \cdot \cdot 2).$$

Пројекције су резултујућег момента величине кретања $G\sigma'$ на $Gxyz$:

$$\frac{\partial T}{\partial p},\ \frac{\partial T}{\partial q},\ \frac{\partial T}{\partial r}.$$

По Кениговој теореми је из 1.) и 2.):

$$[A + Mf'^2(\theta)]\,\theta'^2 + (B\sin^2\theta + C\cos^2\theta - 2D\sin\theta\cos\theta)\,\psi'^2 -$$
$$- 2\,(E\sin\theta + F\cos\theta)\,\theta'\,\psi' = -2Mg\,f(\theta) + h \cdot \cdot 3).$$

Моменти су реакције и теже нула односно GZ' и теорема о моментима даје интеграл:

$$\gamma\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma'\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma''\frac{\partial T}{\partial r} = K \cdot \ \cdot 4).$$

Како је $\varphi = o$, $\gamma = o$, $\gamma' = \sin\theta$, $\gamma'' = \cos\theta$, из 4), имамо:

$$\sin\theta\,[Bq - Fp - Dr] + \cos\theta\,[Cr - Dq - Ep] = K$$

или:

$$(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta - 2D\sin\theta\cos\theta)\,\psi' -$$
$$(F\sin\theta + E\cos\theta)\,\theta' = K \cdot \ \cdot 5).$$

Из 3.) и 5.) можемо наћи ψ и θ као функције времена.

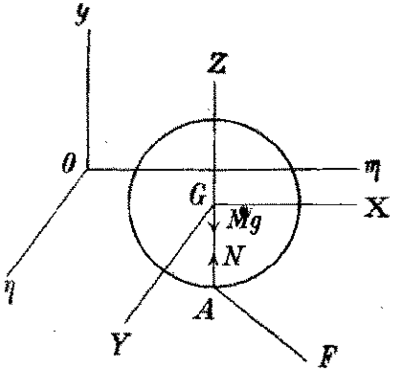
Ако је тело призма за GPP' се може узети раван XZ и $GQ = \xi = l\cos\theta$.

§ 244. — Обртање хомогене тешке сфере по хоризонталној равнини, водећи рачуна и о трењу (билијарске кугле).

Узмимо у хоризонталној равни две произвољне осовине правоугаоне 0ξ и 0η; за 0ξ позитиван правац на више. На лопту дејствују две силе: тежа Mg, чија је нападна тачка у G (тежиште) и реакција у A. Компоненте су од реакције у A: једна вертикална N и једна хоризонтална F, чије су пројекције X и Y у правцу 0ξ и 0η.

Једначине су кретања тежишта:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=X,\ M\frac{d^2\eta}{dt^2}=Y,\ M\frac{d^2\xi}{dt^2}=-Mg+N\cdot\ \cdot 1).$$



Сл. 148.

Пошто је $\xi = const$, из последње је:

$$N = Mg$$

Закон трења од клизања казује да је:

$$F = f\,Mg = f\,N\cdot\ \cdot 1').$$

Ако је ω брзина тренутна у времену t, и pqr су комоненте ω по $Gxyz$, примениђемо на релативно кретање око G теорему о моментима величине кретања односно $Gzxy$.

Релативна је брзина једне произвољне тачке куглине $m\,(xyz)$:

$$Vx = qz - ry,\ Vy = rx - pz,\ Vz = py - qx.$$

Момснат је величине кретања ове тачке односно Gz:

$$m\,(x\,Vy - y\,Vx) = rm\,(x^2+y^2) - pmxz - qm\,yz$$

Сума је свих момента:

$$\Sigma m\,(x\,Vy - y\,Vx) = MK^2r,$$ јер су:

$$\Sigma mxz = \Sigma m\,yz = o \ \text{и}\ \Sigma m\,(x^2+y^2) = MK^2$$

Обе силе спољне секу $0z$ и онда је:

$$d\,\frac{MK^2r}{dt} = o\cdot\ \cdot 2).$$

Једначина 2). казује: да је вертикална компонента r ротације константна.

За осе Gx и Gy налазимо, слично једначини под 2, ове две:

$$MK^2\,\frac{dp}{dt} = RY,\ MK^2\frac{dq}{dt} = -RX.$$

R је полупречник свере.

Применимо други закон трења, по коме је F супротног правца брзини тачке свере у A. Апсолутна је брзина тачке m резултанта из антренирајуће брзине и релативне, из:

$$\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\xi}{dt}\ \text{и}\ Vx = -qR,\ Vy = pR,\ Vz = o.$$

јер су координате тачке A: $x = y = o$, $z = R$.

Ако су u и v пројекције апсолутне брзине тачке A у односу 0ξ и 0η имаћемо:

$$u = \frac{d\xi}{dt} - qR,\ v = \frac{d\eta}{dt} + pR\cdot\ \cdot 3).$$

X и Y нека су сразмерни са u и v:

$$\frac{u}{v} = \frac{X}{Y}\cdot\ \cdot 4).$$

Диференцијаљењем једначине 3). добијамо:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - R\,\frac{dq}{dt},\ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + R\,\frac{dp}{dt}\cdot\ \cdot 5).$$

Из 1' и 1 имамо замсном у 5:

$$\frac{du}{dt} = \frac{X}{M} + \frac{R^2}{MK^2}\,X,\ \frac{dv}{dt} = \frac{Y}{M} + \frac{R^2}{MK^2}\,Y\cdot\ \cdot 5)'.$$

или:

$$\frac{du}{dv} = \frac{X}{Y},\ \frac{du}{dv} = \frac{u}{v},\ \frac{u}{v} = const\cdot\ \cdot 6).$$

Сила трења је стална по величини и правцу. Ово излази из 4. и 6. Кретање G бива услед ове силе F и пут је G парабола.

Из 5' је јасно, пошто су X и Y константе, да су u и v линеарне функције времена. u и v опадају са временом и постају нула за извесно време $t = T$. Пошто је $\frac{u}{v} = const$ то је и $v =$ нула кад и u.

После времена T кретање је свере котрљање без клизања. Тангентна је реакција равни сила непозната $F < fN$ и кретање је G после T праволинејно, униформно, ако се занемари трење од котрљања и пивотирања.

Ако у другој фази задржимо за F, X и Y као њене пројекције, и из 1 и 1' избацимо X и Y имаћемо:

$$6'). \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{K^2}{R}\frac{dq}{dt} = o, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{K^2}{R}\frac{dp}{dt} = o;$$

$u = v = o$ јер има само котрљања и пивотирања, из 3 је:

$$7). \qquad \frac{d\xi}{dt} - qR = o, \frac{d\eta}{dt} + pR = o.$$

Из 7. и 6' је:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = o \cdot \cdot 8).$$

8 казује да се G креће униформно по правој линији; и из 1' је $X = Y = o$.

Једначине су 6' добијене елиминацијом X и Y и вреде за ма какву тангенцијалну реакцију и вреде за све време кретања. Интегрисањем 6' имамо:

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{K^2}{R} q = a; \quad \frac{d\eta}{dt} - \frac{K^2}{R} p = b \cdot \cdot 9).$$

Ради тумачења последњих једначина узмимо једну тачку H изнад тежишта G у одстојању $GH = \frac{K^2}{R} = {}^2/_5\, R$. Њене су координате o, o, $\frac{K^2}{R}$. Из 9. излази, да су леве стране једначине пројекције на 0ξ и 0η апсолутне брзине тачке H, и јасно је, да је брзина ове тачке стална, дата почетним условима и независна од силе F. У финалном кретању (друга фаза) $u = v = o$, и

$$\frac{d\xi}{dt} = qR, \ \frac{d\eta}{dt} = -pR$$

Кад се ово унесе у 9). и нађе a и b, имаћемо:

$$a = \left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)\frac{d\xi}{dt}, \quad b = \left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)\frac{d\eta}{dt}, \text{ и због } \frac{K^2}{R^2} = {}^2/_5$$

$\frac{d\xi}{dt} = {}^5/_7\, a$, $\frac{d\eta}{dt} = {}^5/_7\, b$, $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d\eta}{dt}$ унесени у 9.) дају вредности за a и b. (Coriolis).

ЛИТЕРАТУРА

(ДИНАМИКА — ОБРТАЊЕ ТЕЛА)

D' Alembert — Précession des équinoxes — 1749
Traité de Dynamique — 1743.
Euler — Mémoires de l' Academie de Berlin — 1758.
Lagrange — Mécanique analytique, section IX.
Poisson — Journal de l' Ecole polytéchnique, cah. XVI. 1815.
Poinsot — Journal de Liouville, 1re série XVI.
Jacobi — Journal de Crelle t. XXXIX.
Hermite — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (1883).
Mme Kowalesky — Acta Mathematica t. XII.
Darboux, Koenig — Herpolhodographe.
Greenhill — Herpolhodie algébrique — Proceedings of the London mathématical Society-Vol. XXV.
Saint Germain — Comptes rendus 1885.
Siacci — Jn memoriam Dominici Chelini-Collectanea mathematica 1883.
Mac-Cullagh — Ellipsoïde de giration.
Greenhill — Fonctions elliptiques (intégrations par fonctions pseudo-elliptiques).
Steichen — Journal de Crelle t. 43
Tissot — Thèse, Journal de Liouville t. XVII. 1852.
Ftye — Sainte Marie, Journal de Liouvile t. III. 1877.
Astor — Nonvelles annales de Mathématiques 1894.
Saint Germain — Résumé de la théorie du movement d'un corps solide autour d'un point fixe.

* * *

ЛИТЕРАТУРА

(ТРЕЊЕ У ДИНАМИЦИ)

Rouleaux — Cinématique.
Routh — Dynamic.
Tait et Thomson — Natural Philosophie § 322.
Resal — Mécanique
Painlevé — Leçons sur le frottement.
Appell — Les mouvements de roulement en dynamique, Comptes rendus 1892.
Saint Germain — Bulletin des sciences mathematiques 1892.
Mayer — (Kön, Sächsiche. Gesel. 1893).
Jollett — Die Theorie der Reibung.

* * *

ГЛАВА XXI.

Релативно кретање.

I. Опште теореме.

245. — Ако се нека тачка m креће у покретном систему S, наћи кретање тачке m према једноме сталноме систему координатном у покретноме телу S значи наћи релативно кретање тачке m. За одредбу кретања система S, ваља наћи кретање осовина сталних $Oxyz$ у систему S које су са њим везане и покретне. Тачка m у свакоме тренутку има апсолутну брзину V_a, релативну V_r према систему $Oxyz$ и антренирајућу V_e, која долази од кретања система S. Из кинематике се зна овај однос између тих брзина:

$$(V_a) = (V_r) + (V_e) \cdot \cdot 1).$$

За убрзање постоји однос:

$$(J_a) = (J_r) + (J_e) + (J') \cdot \cdot 2).$$

J' је вектор, који се зове комплементарно убрзање.

Ако је F резултанта сила што дејствују на m онда је $F = (m J_a)$, и из 2. је:

$$F = (m J_r) + (m J_e) + (m J') \cdot \cdot 3).$$

Одавде је релативна сила:

$$(m J_r) = F - (m J_e) - (m J') \cdot \cdot I).$$

Ако ову геометријску једначину изразимо аналитички и сменимо убрзање релативно пројекцијама на осовине $Oxyz$, имаћемо из I). ове једначине за релативно кретање:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X - m (J_e)\, x - m (J'_x)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y - m (J_e)\, y - m (J'_y) \cdot \cdot \text{II.}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z - m (J_e)\, z - m (J'_z)$$

Кад се зна кретање система S у коме леже осовине $Oxyz$ зна се и J_e и J' и то изражено са xyz. Интегрисањем једначина II) имаћемо xyz изражено са t, и на тај начин одређено релативно кретање тачке m.

Вектор се $-(m J_e)$ зове **центрифугална сила**, она је једнака а супротна производу из масе m и убрзања антренирајућег, вектор се $-(m J')$ зове **центрифугална сложена сила**, једнака је и супротна са производом из масе и комплементарна убрзања.

Кретање релативно је једнако са апсолутним кретањем, ако се стварним силама F додају две фиктивне силе: центрифугална и центрифугална сложеиа.

Компоненте су центрифугалне сложене силе:

$$-2m\left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt}\right); -2m\left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt}\right);$$

$$-2m\left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt}\right);$$

где су p, q, r пројекције на $Oxyz$ тренутне ротације ω система S.

§ 246. — *Релативна жива сила.* Из једначина се II). могу добити све комбиниције као и за апсолутно кретање.

До теореме се о живим силама долази, ако се редом једначине под II, помноже са dx, dy, dz и саберу и имаћемо

$$\frac{dm\,V_r^{\,2}}{2}=Xdx+Ydy+Zdz-m\,(J_c)\;x\;dx-m\,(J_e)\;y\;dy$$
$$-m\,(J_e)\;z\;dz$$

Диференцијал је живе силе релативне раван елементарном раду датих сила и центрифугалне. Рад је центрифугалне сложене силе нула, јер је ова сила нормална на Vr и померају dx, dy, dz (ds).

247. — *Релативна равнотежа.* Једначине се релативне равнотеже добијају ако се у II стави $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2z}{dl^2}=o$, као и $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}=o$. Услови су за равнотежу релативну онда:

$$X-m\,(J_e)\;x=o.\quad Y-m\,(J_e)\;y=o,\quad Z-m\,(J_e)\;z=o$$

Једначине се за равнотежу добијају кад се стави да је сила F у равнотежи са центрифугалном силом.

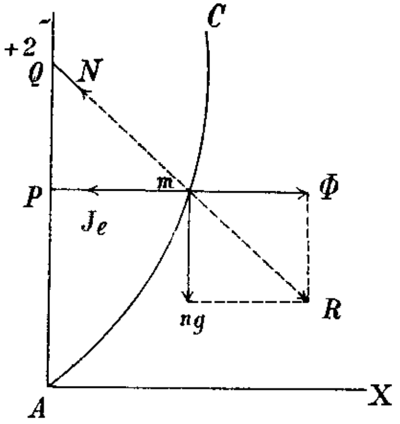
Пример. Нека једна тачка m може да клизи без трења по курби AC, која се курба обрће око вертикалне осовине Az брзином ω, тражи се релативна равнотежа тачке m.

На тачку m дејствују стварно две силе: реакција курбе N и тежа mg, да би нашли равнотежу релативну, курбу AC ваља сматрати као сталну и ради тога јој ваља додати силу Φ (центрифугалну). Да би нашли Φ ваља наћи J_e, а она се добија из антренирајућег кретања система AC, које је овде

обртање. При обртању m описује круг полупречника $mP=\rho$. Акцелерација је $-\frac{v^2}{\rho}=-\frac{\omega^2\rho^2}{\rho}=-\omega^2\rho$ и правац је ка P. Центрипентална је сила $-m\,\omega^2\rho$, а центрифугална $\Phi=m\omega^2\rho$. Између ове три силе Φ, N и mg мора бити равнотежа. Њихове су пројекције на Ax и Az:

$$\Phi-N\cos Nm\,P=o$$
$$-mg+N\sin Nm\,P=o.$$

Ако избацимо из ових једначина N и $tg\;Nm\,P$ сменимо са $\frac{PQ}{\rho}$, имаћемо услов:



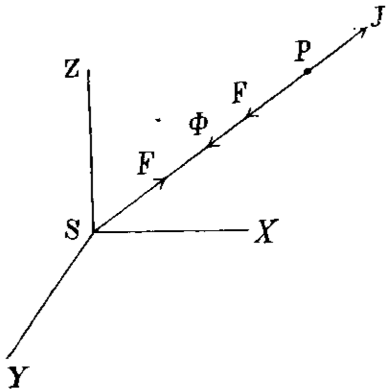
Сл. 149.

$$PQ=\frac{mg\rho}{\Phi}=\frac{g}{\omega^2}\;\cdot\;\cdot\;3).$$

Одредбом тачке Q одређен је положај m. Да би тачка m била у равнотежи потребно је да је субнормала једнака g/ω^2. Што је већа брзина, тачка је m ближа C и обратно.

§ 248. — *Релативно кретање* према систему осовина које се транслаторно крећу. Овде је тренутна ротација нула, $\omega=0$, и за кретање релативно довољно је стварним силама додати само центрифугалну силу, јер је центрифугална сложена нула. Антренирајуће је убрзање овде за све тачке система S исто и једнако са убрзањем почетка координатног система $0xyz$. Ако је кретање система $0xyz$ једнако, онда је и антренирајуће убрзање нула.

Пример. Обртање планете око сунца. Нека је S сунце и P планета, M и m њихове масе, r одстојање SP. Атракција тих тела је $F = F' = f\,\frac{Mm}{r^2}$.



Сл. 150.

Ако се тражи кретање P око S у односу оса $0xyz$, које се крећу транслаторно, ваља тачки P додати центрифугалну силу $\Phi = -(mJ_e)$ јер тачка P има акцелерацију J_c, једнаку са акцелерацијом центра S, која је $J_e = \frac{F}{M} = \frac{fm}{r^2}$

$$\Phi = \frac{m\,fm}{r^2} = \frac{fm^2}{r^2}.$$

Кад Φ спрегнемо са $F' = PF$ имамо да на P дејствују силе:

$$\frac{f\,Mm}{r^2} + \frac{fm^2}{r^2} = \frac{fm\,(M+m)}{r^2} \quad \cdot \;\cdot\; 1).$$

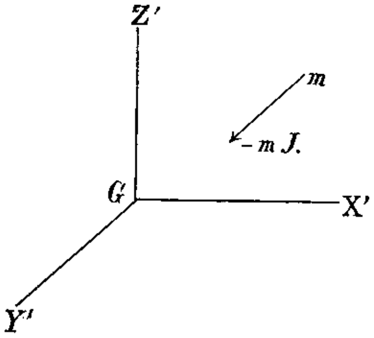
Из 1). излази, да је релативно кретање P око S, као да сунце мирује и да привлачи P масом не M већ $M + m$.

II. Кретање и релативна равнотежа система.

§ 249. — Све што вреди за кретање релативно тачке вреди и за систем, ако се образују збирови свих тачака, као што је раније рађено.

Да би извели теорему момената и живе силе система за кретање система око тежишта G, кад се систем креће, нека је убрзање тежишта $G\,J$. Ради налажења релативног кретања система према

осама $Gx'\,y'\,z'$ нека су исте сталнога правца и иду кроз G. Акцелерација је осовина $Gx'\,y'\,z'$, које саме себи остају паралелне, J. Све тачке покретних осовина, $Gx'y'z'$, које су у вези са телом, имају исту акцелерацију J, чије су компоненте abc на $Gx'y'z'$. Да осе $Gx'y'z'$ сматрамо за сталне ваља додати спољним и унутрашњим силама само центрифугалну силу $\Phi = -m\,J$ чије су пројекције $-ma$, $-mb$, $-mc$, јер је и овде као у § 248 центрифугална сила сложена нула. Према нађеној теореми о моментима за релативно кретање имамо:



Сл. 151.

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(x'\,\frac{dy'}{dt} - y'\,\frac{dx'}{dt}\right) = \Sigma\Sigma\,(x'\,Y_c - y'\,X_e) -$$

$$- \Sigma m\,(bx' - by') \quad \cdot \;\cdot\; \mathrm{I}).$$

Тежиште G је у почетку система. $\Sigma mbx' = \Sigma may' = \Sigma mcz' = o$ и онда је јасно, да се ова теорема примењује и на кретање релативно, као што је већ и доказано.

Ово вреди и за теорему о живој сили. Сматрајући $Gx'y'z'$ за сталне осе, додавањем центрифугалне силе, имаћемо:

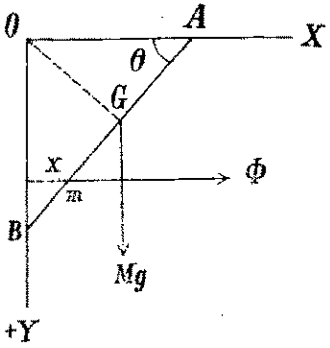
$$\frac{d\,\Sigma mv'^2}{2} = \Sigma\Sigma\,(Xidx' + Yidy' + Zidz') + \Sigma\Sigma\,(X_e dx' +$$

$$+ Y_c dy' + Z_c dz') - \Sigma\,(madx' + bdy' + cdz')$$

Последњи је члан нула, јер је тежишта G у почетку система $Gx_1y_1z_1$.

§ 250. — *Пример.* Крајеви полуге тешке $AB = 2l$ клизе по $x^{\text{ској}}$ и $y^{\text{ској}}$ осовини, наћи кретање полуге при обртању система $0xy$ око $0y$ брзином ω ($\omega =$ константно).

На полугу дејствују силе: тежа Mg која иде кроз G и нормалне реакције линије $0x$ и $0y$. Ако хоћемо релативно кретање полуге према осама $0xy$ ваља ове осовине сматрати за сталне додатком центрифугалне силе Φ и центрифугалне сложене Φ'. Кад се после примени теорема о живој сили рад је Φ' нула и рад је реакција нула.



Сл. 152.

Ако је Mk^2 моменат лењивости полуге према G, θ угао BAO, координате су тежишта G: $\eta = l \sin \theta$ $\xi = l \cos \theta$.

По Кениговој теореми је релативна жива сила:

$$Ml^2 \theta'^2 + Mk^2 \theta'^2. \qquad \theta' = \frac{d\theta}{dt}.$$

Елементарни је рад теже $Mgd\eta = Mgl \cos \theta \, d\theta$.

Центрифугална је сила за тачку m апсцисе x, $m\omega^2 x$; њен је рад $m\omega^2 x \, dx$. Ако обележимо $Bm = \varrho$, $x = \varrho \cos \theta$, $dx = -\varrho \sin \theta \, d\theta$ и $m\omega^2 x \, dx = - m\omega^2 \varrho \sin \theta \cos \theta \, d\theta$. Сума свих радова сила центрифугалних је $-\Sigma m\varrho^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta$. $\Sigma m\varrho^2$ је моменат лењивости полуге односно B и он је једнак $Mk^2 + Ml^2$ и тотални је рад центрифугалних сила:

$$- M (k^2 + l^2) \omega^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta.$$

Код хомогене полуге је $k^2 = {}^{l^2}/_3$, и ако се стави да је рад једнак живој сили, добијамо једначину:

$$d \frac{2l^2}{3} \theta'^2 = gl \cos \theta \, d\theta - \frac{4l^2}{3} \omega^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \cdot \cdot 1).$$

Ако је $\theta' = o$ за $\theta = \theta_0$, из 1). имамо

$$\theta'^2 = \omega^2 (\sin \theta - \sin \theta_0) \left(\frac{3g}{2l\,\omega^2} - \sin \theta - \sin \theta_0\right) \cdot \cdot 2).$$

Одавде се налази θ као функција t помоћу једног елиптичног интеграла првога реда.

Релативна равнотежа. — Ако се 1) диференцијали и скрати, имаћемо:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{3g}{4l} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \cdot 3).$$

Положаји се равнотеже добијају за оне вредности θ које чине да је $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = o$. Те су вредности дате једначинама.

$$\left.\begin{array}{l} \cos \theta = o, \text{ и} \\ 4l\omega^2 \sin \theta = 3g. \end{array}\right\} \cdot \cdot 4).$$

Да би нашли за који је случај равнотежа стабилна, ваља у 3 сменити θ са $\theta = \alpha + \varphi$, где је α једна вредност θ за равнотежни положај и φ мали угао. Кад се ово смени у 3). и занемере виши степени φ имаћемо:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi \left[\frac{3g}{4l} \sin \alpha + \omega^2 \cos 2\alpha\right].$$

Ако је:

$n = \dfrac{3g}{4l} \sin \alpha + \omega^2 \cos 2\alpha$ позитивно, равнотежа је за $\theta = \alpha$ стабилна и трајање је осцилација око овога положаја $\frac{2\pi}{\sqrt{n}}$. Ако је n негативно, равнотежа је лабилна. Ако је $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$ онда је равнотежа стабилна, ако нема друге, ако и друга постоји, онда је за $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$ лабилна.

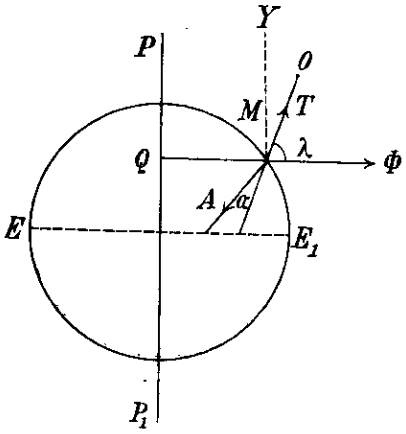
Ако је $\frac{3g}{4l\omega^2} = 1$, оба се положаја равнотежна поклапају са вертикалом и за $\theta = {}^{\pi}/_{2} + \varphi$ имамо

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2}\varphi^3$$

III. Равнотежа и кретање релативно на земљиној кугли.

§ 251. — *Релативна равнотежа* на површини земљиној. Земља се сматра као систем, који се обрће угаоном брзином ω (сталном) око линије полова PP'. Ако се за јединицу времена узме секунда, угаона је брзина ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2}$$



Сл. 153.

Нека је PP_1 линија полова, P северни пол; EE_1 раван екватора, $0M$ положај виска, λ географска ширина места M, наћи релативан положај $0M$ за случај обртања земљиног. Обележимо MQ са ϱ.

Силе што дејствују на M су атракција земљина MA и затезање конца T. Кад би земља мировала T би падало у правац MA. Ове две силе су у равнотежи са центрифугалном силом Φ. Угао α што га T прави са MA зове се девиациони угао вертикале и долази услед обртања земље. $T = mg$.

Да би нашли услове равнотеже, ваља земљу сматрати као мирну, додајући силама MA и T силу Φ. Φ је једнако са $m\omega^2\varrho$, ако је m маса тачке обешене о конац у 0. Ако је вертикала $0M$ у равни PMP' Φ склапа са $0M$ угао λ, географску ширину тачке M. Како су сад силе T, AM и Φ у једној равни, свака је од њих резултанта осталих двеју. $T = mg$ *је резултанта из центрифугалне силе и атракције.*

Сума је пројекција ових сила нула на два нормална правца на $M0$ и на нормали на $M0$:

$$A \cos\alpha - mg - m\omega^2\varrho\cos\lambda = o \cdot \cdot 1).$$

$$A \sin\alpha - m\omega^2\varrho\sin\lambda = o \cdot \cdot 2).$$

Из 1 и 2 се налази $A\cos\alpha$ и $A\sin\alpha$ и отуда A и α.

На екватору $\lambda = o$ и $\alpha = o$ и ако су на њему A, g и ϱ A_0, g_0, ϱ_0, из 1). имамо:

$$mg_0 = A_0 - m\omega^2\varrho_0 = A_0\left(1 - \frac{m\omega^2\varrho_0}{A_0}\right) \cdot \cdot 3).$$

$$\frac{m\omega^2\varrho_0}{A_0} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}.$$

Из 3) је:

$$mg_0 = A_0\left(1 - \frac{1}{17^2}\right) \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Кад би се земља обртала 17^2 пута брже, тела на екватору не би имала тежине, $g_0 = o$.

Ако се претпостави да је земља сверична и да је правац атракције A ка центру C и да је исте јачине свуда $A = A_0$, из троугла CMQ имамо:

$$\varrho = \varrho_0 \cos(\lambda - \alpha)$$ и из 2). је:

(ϱ_0 је полупречник земљин.)

$$\sin\alpha = \frac{m\omega^2\varrho_0}{A_0}\cos(\lambda - \alpha)\sin\lambda = \frac{1}{289}\cos(\lambda - \alpha)\sin\lambda \quad 4).$$

Како је α врло мало и 4). је приближно:

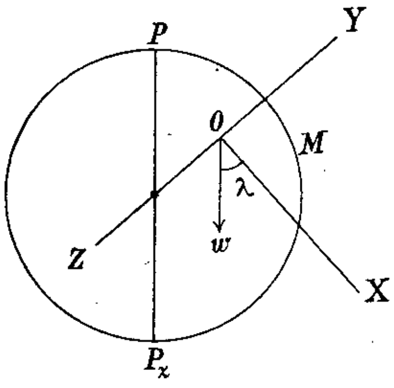
$$\alpha = \frac{1}{289}\cos\lambda\sin\lambda \cdot \cdot \text{ II}).$$

Ако сад водимо рачуна о I и II, из I је:

$$mg = A_0\left[\cos\alpha - \frac{1}{289}\cos(\lambda - \alpha)\cos\lambda\right] =$$

$$= A_0\left[1 - \frac{1}{289}\cos^2\lambda\right] \cdot \cdot \text{ III}).$$

§ 252. — *Релатиено кретање на земљи.* Нека је 0 једна стална тачка на земљи, и за осе узмимо: да $0z$ иде кроз центар земљин, ка центру нека је $0z$ позитивно; за $0y$ тангенту на паралелнику позитивно ка истоку и за x тангенту на меридијану, ка југу позитивно.



Сл. 154.

На тачку M, у близини тачке 0, дејствују две стварне силе: атракција земље A и сила F (X, Y, Z) која креће тачку M. Да би земљу сматрали као сталнуваља тачки M додати силу центрифугалну Φ и центрифугалну сложену Φ'. Атракција земље и Φ дају резултанту mg, која пада у правац $0z$. Да би нашли Φ' ваља наћи p, q, r, компоненте ω у праву $0xyz$. 0ω је сегменат, који представља тренутну ротацију, паралелан са полом и његов је правац ка југу, јер се земља креће од запада ка истоку. Пројекције су 0ω:

$$p = \omega\cos(ox, o\omega) = \omega\cos\lambda, \quad q = o, \quad r = \omega\sin\lambda$$

Пројекцију су силе центрифугалне сложене Φ':

$$2m\,\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt}, -2m\left(\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \omega\cos\lambda\frac{dz}{dt}\right), -$$

$$-2m\,\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt.}$$

Једначине су релативног кретања.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + 2m\,\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - 2m\,\omega\left(\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \cos\lambda\frac{dz}{dt}\right) \cdot \cdot \text{ I}).$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg + Z - 2m\,\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}.$$

Ово се примењује за случај кад је M близу тачке O, кад се тежа може сматрати да је у правцу OZ и једнака са mg.

Из I) имамо:

$$\frac{dmv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + m\,gdz \cdot \cdot 1).$$

Ако су X, Y, Z изводи функције сила U, онда је 1,

$$\frac{mv^2}{2} = U + mgz + h$$

§. 253. — *Падање слободно тешке* тачке. Ако је падање у празноме простору: $X = Y = Z = o$ и из I имамо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right) \cdot \cdot 1).$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}.$$

Ако тачка полази из почетка система са брзином нула, интегрисањем 1) имамо:

$$\frac{dx}{dt} = 2y\omega \sin\lambda$$
$$\frac{dy}{dt} = -2\omega\,(x \sin\lambda - z\cos\lambda) \cdot \cdot 2).$$
$$\frac{dz}{dt} = gt - 2\omega\, y\cos\lambda.$$

Ако из 2) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ заменимо у другој једначини под 1). имаћемо:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega \cos\lambda\, gt.$$

Кад се одавде нађе y и замени у првој и трећој једначини под 2) налазе се x и z као функције времена.

Како је ω врло мало, решења 2) можемо апроксимативно да нађемо методом неодређених сачинилаца, ако у 2) сменимо x, y, z са

$$x = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \cdot \cdot \cdot$$
$$y = y_0 + \omega y_1 + \omega^2 y_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot 3).$$
$$z = z_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 + \cdot \cdot \cdot$$

$x_0, x_1 \cdots$ су функције t и нуле за $t = o$ као и њихови први изводи. Ако се одреде $x_0, x_1 \cdots$ налази се:

$$x_0 = o, \quad y_0 = o, \quad zo = \frac{gt^2}{2}$$
$$x_1 = o, y_1 = \frac{gt^3}{3}\cos\lambda, z_1 = 0.$$
$$x = o, \quad y = \frac{gt^3}{3}\cos\lambda, \quad z = \frac{gt^2}{2}$$

Тачка остаје у равни yz и скреће на исток, јер је y позитивно. У yz тачка описује линију

$$3\sqrt{2g}\,y = y\omega z^{3/2} \cos\lambda \text{ (семикубичну параболу).}$$

Ако тражимо чланове даље, наћићемо за x једначину

$$x = \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \frac{gt^4}{6.}$$

Значи да има скретања ка југу и тачка не остаје у равни yz, већ се та раван услед обртања земљиног обрће.

За брзину тачке имамо израз

$$v = \sqrt{2gz.}$$

§ 254. — *Фуколтово клатно.* Ако је дужина клатна l, овде су силе $X, Y, Z, -m N\, {}^x/_l, - m N\, {}^y/_l - m N\, {}^z/_l$. N је отпор конца. Једначине су релативног кретања:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - Nx/_l + 2\,\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = - Ny/_l - 2\,\omega\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right) \cdot \cdot 1).$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{Nz}{l} - 2\,\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}$$

Тешко је ове једначине интегрисати, због овога ћемо посматрати случај малих осцилација. $^x/_l$ $^y/_l$ и ω ћемо сматрати за мале количине. Из једначине:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

која је услов да се тачка креће по сфери, може се узети да је

$$z = l \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2).$$

Кад се ово стави у трећој једначини 1) имаћемо:

$$N = g \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 3).$$

Ако се 2) и 3) замени у првим двема једначинама 1), имаћемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - {^g/_l}\, x + 2\,\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - {^g/_l}\, y - 2\,\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt} \cdot \cdot 4).$$

Из 4 имамо:

$$\frac{dv^2}{2} = - {^g/_l}\, (xdx + ydy) \cdot \cdot 5).$$

Ако се узму поларне координате r и θ, имаћемо:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

Из 5) је:

$$r'^2 + 2^2\,\theta'^2 = - {^g/_l}\, r^2 + h \cdot \cdot 6).\ r' = \frac{dr}{dt},\ \theta' = \frac{d\theta}{dt}.$$

Из 4 се добија и ова једначина:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = -2\omega\sin\lambda\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

или

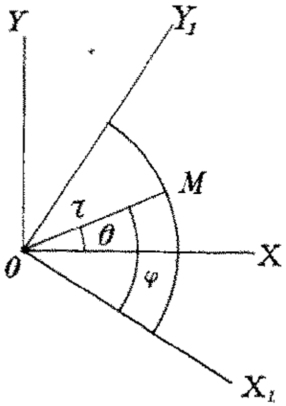
$$r^2\,\theta' = -\,\omega'\,r^2 + C \cdot \cdot 6^a).\ \omega' = \omega\sin\lambda$$

Специјалан случај. Нека је клатно било у равнотежи у вертикалном положају и онда му се да импулс за кретање. У почетку је $r = 0$ и 6^a) се своди на:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\,\omega' \text{ или}$$

$$\theta = \theta_0 - \omega'\,t.$$

Изгледа да клатно осцилира у равни, која се обрће једнако око $0Z$, у смислу негативном, брзином ω'. Ова се раван потпуно обрне за време $t = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{24^h}{\sin\lambda} = 32^h$ (Париз).



Сл. 155.

Општи случај. Из једначине 6^a) имамо:

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega'\right) = C.$$

Ако са φ обележимо угао $\varphi = \theta + \omega'\,t$, имаћемо:

$$r^2\,\frac{d\varphi}{dt} = C \cdot \cdot 7).$$

r и φ су координате тачке клатна M према осовинама $0x_1\ Y_1$, које се обрћу око $0Z$ у негативном смислу брзином ω', јер је $x0x_1 = \omega'\,t, x_10M = \theta + \omega'\,t = \varphi$.

Једначина 6) постаје:

$$r'^2 + r^2\,[\varphi'^2 + \omega'^2 - 2\omega'\,\varphi'] = -{^g/_l}\,r^2 + h$$

Ако се $r^2 \varphi'$ смени са C из 7) и занемаре виши степени $\omega'^2 r^2$, имаћемо:

$$r'^2 + r^2 \varphi'^2 = - {}^{g}\!/_{l}\, r^2 + h' \quad \cdot 8).$$

h^1 је нова константа.

Једначине 7) и 8) су једнаке са једначинама за интеграле о површинама и живој сили за случај кретања апсолутног једне тачке M, коју привлачи центар 0 силом сразмерном одстојању. Тачка M према $y_1 x_1 0$ описује елипсу. Трајање је револуције $T_1 = 2\pi \sqrt{{}^{l}\!/_{g}}$.

Раван се $x_1 0 y_1$ обрће око $0z$ у равни $0xy$, и M прелази малу елипсу хоризонталну центра у 0, која се обрће у супротном смислу брзином ω' и свршава обртање за $T = \frac{2\pi}{\omega'} = 32^h$ (Париз).

У експериментисању Фуколтовом у Пантеону, клатно је било удаљено од вертикалног положаја и свезано концем за један зид и било је непокретно према земљи, пре но што је се конац сагорео, и кретање клатна почело. Релативна је брзина $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = o$; $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ су нуле у почетку. $r_0 = a$ (оса елипсе). Почетна вредност је r била или maxim. или minim, пошто је $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = o$

Из 6^a је за $r = a$, $\frac{d\theta}{dt} = o$, $C = a^2 \omega'$ и почетна је вредност $\frac{d\varphi}{dt} > 0 \cdot$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \omega'$. Овде је клатно описивало елипсу у позитивном смислу око $0Z$ за исто време за које је се могла елипса обрнути у негативном смислу. Овај је појав сасвим различан од појаве коничног клатна, кад се занемари уплив обртања земље, јер ту имамо да крај клатна изгледа да описује малу елипсу, која се обрће у смислу у коме се и кретање по њој врши.

Теорема Швилијева (Chevilliet). C је код нас константна површина за кретање тачке M по елипси малој односно $0x_1\, y_1$. Ако су a и b велика и мала оса ове елипсе, T_1 време револуције тачке на елипси, онда је $C = \frac{2\pi ab}{T_1}$.

За C смо нашли да је:

$$C = a^2 \omega' \cdot \cdot \cdot$$

Из ове две једначине имамо:

$$\frac{b}{a} = \frac{T_1\, \omega'}{2\pi} = \frac{T_1}{T} \cdot \cdot 1).$$

T је трајање револуције елипсе око $0Z$.

Из 1) је јасна теорема: да се осовине покретне елипсе имају као трајања осцилације потпуне према револуцији елипсе.

За Фуколтов експеременат су били: $l = 67^m$ и $a = 3^m$, $T_1 = 16^s$, $T = 32^h$, ${}^{b}\!/_{a} = \frac{1}{7200}$ — елипса је била врло спљоштена.

* * *

ЛИТЕРАТУРА

(РЕЛАТИВНО КРЕТАЊЕ)

Gilbert — Application des équations de Lagrange en mouvement relatifs — Annales de la société scientifique de Bruxelles 1883.
Saint — Germain — Recueil d'exercices sur la mécanique rationelle
Bourlet — Nouveau traité des bicycles et bicyclettes.
Gilbert — Les preuves mécaniques de la rotation de la Terre.
Poinssot — Comptes rendus 1851.
Andrade — « » 1895.
Sparre — Pendule de Foucault — Mémoire de savants étrangers et Annales de la société scientifique de Bruxelles 1890—1891.
Gilbert — Etude historique et critique du probleme de la rotation d'un corps solide — Annales de la société de Bruxelles 2. anneé 1878.
Guyou — Comptes rendus 1888.
Bour — Journal de Liouville 1863.
Gilbert — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problémes de mouvement rélatifs.
Boussinesq — Aperçu sur la théorie de la bicyclette.
К. Стојановић — Обртање једног тела око утврђене тачке у релативном кретању (Глас Академије Наука).

ГЛАВА XXII.

D'Alembert-ов принцип.

I. Опште једначине динамике система.

§. 255. — *D'Alembert-ов принцип.* Ако имамо n материјалних тачака $m_1\, m_2 \cdots m_n$, чије су координате $x_1\, y_1\, z_1 \cdots x_n\, y_n\, z_n$, подложне извесним условима, оствареним без трења, зависним од времена, и ако на тај систем дејствују силе, чија је резултанта $X_\mathrm{v}, Y_\mathrm{v}, Z_\mathrm{v}, (F_\mathrm{v})$, онда у свакоме тренутку постоји равнотежа између датих сила F_v, сила инерције и сила од условних веза (forces de liaisons). Ако се систему да виртуелан померај δs, сума је радова: сила F_v, сила инерције и сила зависних од услова између тачака система нула. Ако су услови такви, да је виртуелно померање у времену t сагласно са тим померајима, онда су радови сила услова нула, и D'Alembert-ов се принцип своди на то: да је сума радова датих сила и сила инерције нула.

Ако су δx_v, δy_v δz_v компоненте виртуелног помераја тачке m_v, који је сагласан са везама, пројекције су силе инерције

$$z - m_\mathrm{v} \frac{d^2 x_\mathrm{v}}{dt^2}, - m_\mathrm{v} \frac{d^2 y_\mathrm{v}}{dt_2}, - m_\mathrm{v} \frac{d^2 z}{dt^2},$$

и принцип је изражен једначином основном динамике система:

$$\sum_v \left[\left(X_\mathrm{v} - m_\mathrm{v} \frac{d^2 x_\mathrm{v}}{dt^2} \right) \delta x_\mathrm{v} + \left(Y_\mathrm{v} - m_\mathrm{v} \frac{d^2 y_\mathrm{v}}{dt^2} \right) \delta y_\mathrm{v} + \right.$$

$$\left. + \left(Z_\mathrm{v} - m_\mathrm{v} \frac{d^2 z_\mathrm{v}}{dt^2} \right) \delta z_\mathrm{v} \right] = 0 \quad \ldots 1).$$

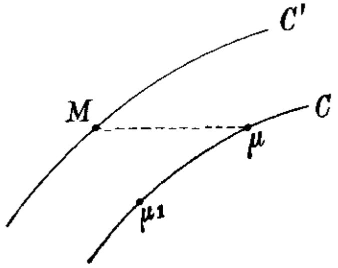
§. 256. — Нека су услови кретања система изражени једначинама:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1 y_1 z_1 \cdot \cdot x_n y_n z_n t) = 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 2). \\ f_h(x_1 y_1 z_1 \cdot \cdot x_n y_n z_n t) = 0 \end{array}$$

број $h < 3n$. Ако је $k = 3n - h$ или $h = 3n - k$, кретање је система одређено. За виртуелно померање система, поред једначина 1 § 255., постоје и ове, за извесно време t, које се сматра као стално:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \cdot \cdot + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \delta z_n = 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 3). \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \delta x_1 + \cdot \cdot + \frac{\partial f_h}{\partial z_n} \delta z_n = 0 \end{array}$$

Ако су услови 2 зависни од времена, виртуелно се померање не поклапа са реалним. Тако, ако се извесна тачка μ има померати по курби C, а и курба се креће, виртуелно је померање тачке μ μ_1 μ а реално је μM, та се два померања не поклапају. Стварна померања задовољавају једначину:



Сл. 156.

$$\frac{\partial fi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial fi}{\partial y_1} dy_1 + \cdot \cdot \quad + \frac{\partial fi}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial fi}{\partial t} dt = 0$$

Овакве су једначине несагласне са једначинама виртуелног помераја под 3 и са њима се поклапају за $\frac{\partial fi}{\partial t} = 0$.

Из једначина 3 је јасно, да између $3n$ варијација δx_v, δy_v δz_v има свега k произвољних и друге се $3n - k = h$ могу изразити као функције тих k пра-

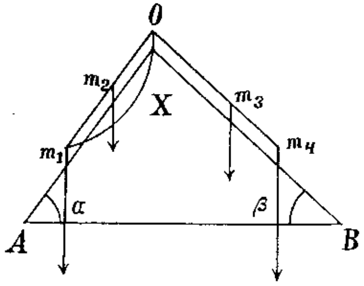
променљивих. Кад се ове нађене вредности замене у 1), она је задовољена за ма какву вредност тих произвољних варијација. За налажење динамичких једначина, употребљава се Лагранжов метод мултипликатора.

Ваља једначине под 3) редом помножити са λ_1 λ_2 λ_h и сабрати их са онима под 1), кад се затим изрази из 1 пред δx_v, δy_v, δz_n ставе равни нули, имаћемо за динамичке једначине ове изразе:

$$\begin{array}{l} m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = X_v + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_v} + \cdot \cdot + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_v} \\ m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} = Y_v + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_v} + \cdot \cdot + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_v} \cdot \cdot 4). \\ m_n \frac{d^2 z_v}{dt^2} = Z_v + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_v} + \cdot \cdot + \lambda_n \frac{\partial f_h}{\partial z_v}. \end{array}$$

Оваквих једначина 4 имамо $3n$ и под 2, h, свега је $3n + h$ једначина из којих се може наћи $3n$ координата $x_1 y_1 z_1 \cdots x_n y_n z_h$ и h параметара λ_1 $\lambda_2 \cdot \cdot \lambda_h$.

§ 257. — *Пример.* Нека имамо две праве $0A$ и $0B$ у истој равни вертикалној што склапају са хоризонтом α и β, на по тим правима клизе без трења тешке тачке m_1 m_2 m_3 m_4, везане концем без масе, тражи се кретање система.



Сл. 157.

Ако се од 0 ка A рачуна позитиван правац и $0m_1 = x$, сила је инерције за m_1

$- m_1 \frac{d^2x}{dt^2}$ а тачака: m_2, m_3, m_4 су силе инерције:

$$- m_2 \frac{d^2x}{dt^2}, - m_3 \frac{d^2x}{dt^2}, - n'_4 \frac{d^2x}{dt^2}$$

Позитиван је смисао од B ка 0.

Систем је у равнотежи под дејством горњих сила и тежина: $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$, $m_4 g$. Овде је виртуелно померање што и реално и оно је δx. Рад је сила инерције:

$$-m_1 \frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m_2 \frac{dx}{dt^2}\delta x - m_3 \frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m_4 \frac{d^2x}{dt^2}\delta x.$$

Рад је тежина:

$$m_1 g\delta x \sin\alpha + m_2 g\delta x \sin\alpha - m_3 g\delta x \sin\beta - m_4 \delta x \sin\beta.$$

Ако се стави, да је сума ових радова равна нули и нађе $\frac{d^2x}{dt^2}$ имаћемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha - (m_3 + m_4) g \sin\beta}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot \cdot \text{I}).$$

Из I) је јасно: да је $\frac{d^2x}{dt^2} = \text{const.}$, кретање је једнако убрзано.

II. Опште теореме изведене из принципа Даламберовог.

§ 258. — Општа сė једначина динамичка 1) из § 255. може написати овако:

$$\Sigma\left[m_\nu\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x_\nu + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y_\nu + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z_\nu\right)\right] = \Sigma(X_\nu \delta x_\nu + \\ + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) \cdot \cdot 1).$$

Из 1) можемо извести све теореме, које смо раније за системе извели.

a). Ако је померање транслаторно у правцу x^{cke} осовине, онда је:

$$\delta x_1 = \delta x_2 \cdot \cdot = \delta x_n \text{ и}$$
$$\delta y_1 = \delta z_1 \cdot \cdot = \delta z_n = 0, \text{ из 1) је:}$$

$$\Sigma m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \Sigma X_\nu \text{ или } \frac{d}{dt}\Sigma m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} = \Sigma X_\nu.$$

Овом је једначином исказана теорема о кретању тежишта.

b). Ако је могуће обртање око извесне осовине, на пр. z^{cke}, онда је $\delta x_\nu = -y_\nu \delta\theta$, $\delta y_\nu = x_\nu \delta\theta$ и $\delta z_\nu = 0$. $\delta\theta$ је елементарна ротација.

Из 1) је:

$$\Sigma m_\nu\left(x_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} - y_\nu \frac{dx^2_\nu}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\Sigma\left(x_\nu \frac{dy_\nu}{dt} - y_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) m_\nu = \\ = \Sigma(x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu)$$

Овим је исказана теорема о моментима.

c). Ако су услови независни од времена t, онда су:

$$dx_1 = \delta x_1,\ dy_1 = \delta y_1 \text{ и т. д.}$$

Из 1) онда имамо:

$$d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma(X_\nu dx_\nu + Y_\nu dy_\nu + Z_\nu dz_\nu)$$

Ово је специјалан случај теореме о живој сили.

* * *

ГЛАВА XXIII.

Лагранжове једначине.

I. Образовање Лагранжовних једначина.

§. 259. — *Ако* имамо n тачака у једноме систему и таквих услова, да систем зависи од k параметара: $q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k$ и времена $t_,$, онда се све координате могу изразити овим параметрима, и облика су:

$$\begin{aligned} x_v &= \varphi_v\,(q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k\, t) \\ y_v &= \psi_v\,(q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k\, t) \cdot \quad 1). \\ z_v &= \omega_v\,(q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k\, t) \end{aligned}$$

Ако се ове једначине уносу у једначине под 1) и 2). §. 255. све ће бити изражено параметрима q и временом t.

Померај је виртуелан облика:

$$\delta x_v = \frac{\partial \varphi_v}{\delta q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_v}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \cdot\cdot + \frac{\delta \varphi_v}{\partial q_k}\,\delta q_k.$$

Једначина D'Alembert-ова добија облик:

$$(P_1 - Q_1)\,\partial q_1 + (P_2 - Q_2)\,\delta q_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot (P_k - Q_k)\,\delta q_k = o;$$

$$P_\alpha = \sum_v m_v \left[\frac{d^2 x_v}{dt^2}\,\frac{\partial \varphi_v}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2 y_v}{dt^2}\,\frac{\partial \psi_v}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2 z_v}{dt^2}\,\frac{\partial \omega_v}{\partial z_\alpha}\right],$$

$$Q_\alpha = \sum_v \left(X_v \frac{\partial \varphi_v}{\partial q_\alpha} + Y_v \frac{\partial \psi_v}{\partial q_\alpha} + Z_v\,\frac{\partial \omega_v}{\partial q_\alpha}\right).$$

Једначине су кретања:

$$P_1 - Q_1 = o, \quad P_2 - Q_2 = o \cdot\ \cdot P_k - Q_k = o;$$

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\,\Sigma\, m\left(x'\,\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} + y'\,\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} + z'\,\frac{\partial \omega}{\partial q_\alpha}\right) -$$

$$- \Sigma\, m\left(x'\, d\,\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}}{dt} + y' d\,\frac{\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha}}{dt} + z'\, d\,\frac{\frac{\partial \omega}{\partial q_\alpha}}{dt}\right).$$

$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ и т. д.}$$

Овде смо индике ν изоставили. Ако са q'_1, q'_2 означимо изводе $\frac{dq_1}{dt}$ и т. д.

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

имаћемо из 1):

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\,q'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\,q_2' + \cdot\cdot + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\,q'_k + \frac{\partial \varphi}{dt}.$$

Ако се x' сматра као функција од q_1, q'_1, t имаћемо:

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha},\ \frac{\partial y'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha},\ \frac{\partial z'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial \omega}{\partial q_\alpha}.$$

Знамо из раније, да је:

$$\frac{d\,\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha\,\partial q_1}\,q_1' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha\,\partial q_2}\,q_2' + \cdot\ \cdot$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha\,\partial q_k}\,q_k' + \frac{\partial^1 \varphi}{\partial q_\alpha\,\partial t},$$

и одавде је:

$$\frac{d\,\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial q_\alpha}, \text{ и слично за } \psi \text{ и } \omega.$$

Ако обележимо живу силу са $T = {}^1/_2 \, \Sigma m \, (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, и све ово сменимо у изразу за P_a и ставимо $P_a = Q_a$ имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_a'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a, \quad \alpha = 1;\ 2,\ 3 \cdot \cdot k. \cdot \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Да би нашли Q_a, ваља наћи рад виртуелни датих сила. Овај је рад $Q_1 \, \delta q_1 + \cdot \cdot + Q_k \, \delta q_k$.

Ако су силе изводи какве функције U $(x, y, z, \cdot \cdot \cdot z_n)$, имаћемо:

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_v}\frac{\partial x_v}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial y_v}\frac{\partial y_v}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial z_v}\frac{\partial z_v}{\partial q_a}\right) = Q_a,$$

јер су:

$$X_v = \frac{\partial U}{\partial x_v},\ Y_v = \frac{\partial U}{\partial y_n},\ Z_v = \frac{\partial U}{\partial z_v},$$

$$x_v = \varphi_v,\ y_v = \psi_v,\ z_v = \omega_v;$$

и једначине I Лагранжове су:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_a'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \frac{\partial U}{\partial q_a} \cdot \cdot \cdot \mathrm{II}$$

§ 260. Лагранжове се једначине извеле независно од тога, да ли су параметри $q_1 \, q_1 \cdot \cdot q_k$ независни један од другог или не. Ако међу њима постоје односи:

$$\begin{array}{l} G_1\,(q_1\, q_2 \cdot \cdot q_k,\, t = 0 \\ G_2\,(q_1\, q_2 \cdot \cdot q_k,\, t = 0 \\ - - - - - - - \cdot \cdot 1). \\ G_\mu\,(q_1\, q_2 \cdot \cdot q_k\, t = 0 \end{array}$$

мора бити $\mu < k$. Варијацију параметра дају односи:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial G_1}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \cdot \cdot + \dfrac{\partial G_1}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0 \\ - - - - - - - \cdot \cdot 2) \\ \dfrac{\partial G_\mu}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \cdot \cdot \dfrac{\partial G_\mu}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0 \end{array}$$

Значи, да је овде независно промењивих $k - \mu$. Ако се овде употреби метод неодређених мултипликатора, имаћемо из 1) и 2) и **D'Alembert**-ове једначине за $P\alpha$ ове изразе:

$$P\alpha = Q\alpha + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial q_a} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q_a} + \cdot \cdot \lambda_\mu \frac{\partial G_\mu}{\partial q_a} (\alpha = 1 \cdot 2 \cdot \cdot k),$$

или:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q\alpha + \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial q_a} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q_a} + \cdot \cdot + \lambda_\mu \frac{\partial G_\mu}{\partial q_a} (\alpha = 1 \cdot 2 \cdot \cdot k).$$

Из ових k једначина и μ под 1) можемо наћи $k + \mu$ параметра $q_1 \, q_2 \cdot \cdot q_k$ и $\lambda_1 \, \lambda_1 \cdot \cdot \lambda_\mu$.

§ 261. *Пример.* — Тражи се (кретање) обртање тела око једне сталне тачке. Ако су ψ, θ и φ углови Ајлерови, жива сила T је:

$$T = {}^1/_2 \, (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

$$\begin{array}{l} p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\theta. \end{array}$$

Радови су датих сила:

$$\Sigma\,(X_v\,\delta x_v + Y_v\,\delta y_v + Z_v\,\delta z_v) = \Theta\delta_\theta + \Phi\delta\varphi + \Psi\delta\psi.$$

Једначина Лагранжова односно параметра φ је:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \Phi.$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'} = \frac{\partial T}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial\varphi'} = Cr,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\partial T}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{\partial T}{dq}\,\frac{\partial q}{d\varphi} = Ap\,\frac{\partial p}{\partial\varphi} + Bq\,\frac{\partial q}{\partial\varphi}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} = -\theta'\sin\varphi + \psi'\cos\varphi\sin\theta = q,\ \frac{\partial q}{\partial\varphi} = -p,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = pq\,(A-B),$$

и наша је једначина кретања:

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = \Phi.$$

Φ је сума момената N датих сила односно $0Z$.

$\Phi\delta\varphi$ је сума виртуелних радова датих сила у померају за $\psi = \theta = \text{const.}$ у обртању за $\delta\varphi$ око $0Z$. Ако се тело обрне за $\delta\varphi$ сума је радова сила:

$$\Phi\delta\varphi = \Sigma\,(X_v\,\delta x_v + Y_v\,\delta y_v + Z_v\,\delta z_v) = \Sigma\,(x_v\,Y_v - y_v\,X_v)\,\delta\varphi.$$

$$\Phi = \Sigma\,(x_v\,Y_v - y_v\,X_v) = N.$$

Тако се добија трећа једначина Ајлерова:

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = N,$$

и сличне две:

$$A\,\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,pq = M.$$

II. Примена Лагранжових једначина.

§ 262. — Кад су услови независни од времена, онда имамо:

$$dT = \Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),\ \text{или}$$

$$T = U + h \cdot\ \cdot 1)$$

T је интеграл живе силе. Ово се може извести и из једначина Лагранжових, као што смо то извели за случај примене Лагранжових једначина на кретање једне тачке.

Узмимо за ово пример обртања једног ротационог тела на хоризонталној равнини. Раније смо нашли да је:

$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2) + [Mf'^2(\theta) + A]\,\theta'^2 + A\,\psi'^2\sin^2\theta +$$
$$+ C\,[\varphi^1 + \psi'\cos\theta]^2 \cdot\ \cdot 1)$$

Функција је сила:

$$U = -Mg\,\xi = -Mg\,f(\theta).$$

Параметри су од којих зависи систем: $\xi, \eta\ \theta, \varphi, \psi$. Ако напишемо прво четири Лагранжове једначине за параметре ξ, η, φ и ψ, имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\xi'}\right) = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\eta^1}\right) = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\varphi^1}\right) = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\psi^1}\right) = 0.$$

Први су интеграли ови:

$$\xi' = \xi'_0,\ \eta' = \eta'_0,\ \varphi' + \psi'\cos\theta = r_0,$$

$$A\,\psi'\sin\theta + C\,[\varphi' + \psi'\cos\theta]\cos\theta = K.$$

Последња Лагранжова једначина била би за параметар θ, у место ње можемо узети једначину живе силе из 1) и пети је први интеграл:

$$T = U + h.$$

§ 263. — Ако су услови зависни од времена и онда се могу наћи некада први интеграли, слични интегралу живе силе:

У овоме случају T није хомогена функција по $q'_1\, q'_2$. $T = T_2 + T_1 + T_0$, T_2, T_1, T_0 су функције 2-ог, 1-ог и 0^0 степена по $q'_1\, q'_2 \cdots q'_k$

Слично ранијем налажењу, долазимо до израза:

$$Q_1 q'_1 + \cdots + Q_k q'_k = \frac{d}{dt}\left(\Sigma q_\alpha' \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \Sigma q_\alpha'' \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \Sigma q_\alpha' \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},$$

$$\Sigma q_\alpha' \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = 2T_2 - T_1,$$

и

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma q_\alpha'' \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} + \Sigma q_\alpha' \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

По свршеној редукцији — имаћемо:

$$\frac{d}{dt}[T_2 - T_0] = Q_1 q'_1 + \cdot + Q_k q'_k - \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \cdot 1)$$

Ако је:

$$Q_1 q_1' + Q_2 q'_2 + \cdot\ Q_k q'_k - \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} V(q_1\, q_2 \cdots q_k\, t),$$

имаћемо:

$$T_2 - T_0 = V + h.$$

Из 1) је:

$$T_2 - T_0 = U + F(t) + h$$

ако је $Q_1\, dq_1 + Q_k\, dq_k$ потпун диференцијал dU и ако $\frac{\partial T}{\partial t}$ зависи само од t.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F'(t) \cdot \text{(Painleve 1895)}.$$

III. Апелови канонични типови.

§. 264. — *До динамичких* једначина кретања можемо доћи на два начина, или полазећи од принципа виртуелних брзина, или виртуелних помераја.

Ако са X, Y, Z означимо компоненте резултанте активних сила, које промене производе, а са P_x, P_y, P_z означимо компоненте резултанте сила инерције, где је $P_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$, $P_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$, $P_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$, где је m маса а x, y и z су кординате тежишта тела, или тачке чија је маса m, онда принцип D'Alembert-ов за случај виртуелних брзина и помераја гласи:

$$(X - P_x)\,\delta v_x + (Y - P_y)\,\delta v_y + (Z - P_z)\,\delta v_z = o \cdot \cdot 1).$$

$$(X - P_x)\,\delta x + (Y - P_y)\,\delta y + (Z - P_z)\,\delta z = o \cdot \cdot 2).$$

$$\delta v_x = \frac{\delta x}{dt},\quad \delta v_y = \frac{\delta y}{dt},\quad \delta v_z = \frac{\delta z}{dt}.$$

Ако између старих брзина v_x, v_y, v_z, тачке, при слободном кретању, и нових координата q_1, q_2: q_3, постоје једначине:

$$\begin{aligned} v_x &= \varphi(q_1\, q_2\, q_3\, t) \\ v_y &= \psi(q_1\, q_2\, q_3\, t) \cdot \cdot 3). \\ v_z &= \chi(q_1\, q_2\, q_3\, t) \end{aligned}$$

све се остварљиве виртуелне варијације $\delta v_x, \delta v_y, \delta v$ добијају, кад се у једначинама:

$$\begin{aligned} \delta v_x &= \alpha_{11}\,\delta q_1 + \cdot \cdot + \alpha_{13}\,\delta q_3 \\ \delta v_y &= \alpha_{21}\,\delta q_1 + \cdot \cdot + \alpha_{23}\,\delta q_3 \quad \cdot 4). \\ \delta v_z &= \alpha_{31}\,\delta q_1 + \cdot \cdot + \alpha_{33}\,\delta q_3 \end{aligned}$$

променама δq_1, δq_2, δq_3 даду произвољне вредности; а све се пак ефективне варијације добијају dv_1, dv_2, dv_3, кад се у једначинама:

$$\begin{aligned} dv_x &= \alpha_{11}\, dq_1 + \cdot \cdot + \alpha_{13}\, dq_3 + A_1\, dt \\ dv_y &= \alpha_{21}\, dq_1 + \cdot \cdot + \alpha_{23}\, dq_3 + A_2\, dt \cdot \quad 5). \\ dv_z &= \alpha_{31}\, dq_1 + \cdot \cdot + \alpha_{33}\, dq_3 + A_3\, dt \end{aligned}$$

dq_1, dq_2, dq_3 смене својим ефективним варијацијама. Овде су:

$$\alpha_{11} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \alpha_{21} = \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \alpha_{31} = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \text{ и т. д.}$$

Кад се у једначини 1) смене $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$, својим вредностима 4), добићемо једначину:

$$(R_x - Q_x)\,\delta q_1 + (R_y - Q_y)\,\delta q_2 + (R_z - Q_z)\,\delta q_3 = 0, \cdot \cdot 6)$$

где су:

$$R_x = \alpha_{11} P_x + \alpha_{21} P_y + \alpha_{31} P_z = m\,[\alpha_{11} v'_x + \\ + \alpha_{21} v'_y + \alpha_{31} v'_z) \cdot \cdot 6a)$$

$$v'_x = \frac{dv_x}{dt.}, \text{ и т. д.}$$

$Q_x = \alpha_{11} X + \alpha_{21} Y + \alpha_{31} Z$, и слично за R_y, R_z, Q_y, Q_z.

Једначина 6), пошто су варијације $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ произвољне, повлачи једначине:

$$\begin{aligned} R_x &= Q_x \\ R_y &= Q_y \cdot \cdot 7) \\ R_z &= Q_z. \end{aligned}$$

Једначине 7), са једначинама, које се добијају из 5) деобом са dt:

$$\begin{aligned} v_x' &= \alpha_{11} q_1' + \cdots + \alpha_{13} q'_3 + A_1 \\ v_y' &= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + A_2 \cdot \cdot 8) \\ v_z' &= \alpha_{31} q_1' + \cdots + \alpha_{33} q'_3 + A_3 \end{aligned}$$

решавају потпуно проблем, јер у њима има шест непознатих v_x, v_y, v_z и $q_1\, q_2\, q_3$.

Упрошћавање *горњих једначина.* Из односа:

$$v'_x = \alpha_{11} q'_1 + \alpha_{12} q'_2 + \alpha_{13} q'_3 + A_1$$

види се, да је:

$$\alpha_{11} = \frac{\partial v_x'}{\partial q_1'}, \alpha_{12} = \frac{\partial v_x'}{\partial q_2'} \text{ и т. д.}$$

Према овоме је једначина 6а:

$$R_x = m\left[v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial q_1'} + \cdots + v'_z \frac{\partial v_z'}{\partial q'_1}\right].$$

Ако образујемо функцију:

$$\Theta = \frac{1}{2}\,(v_x'^2 + v_y'^2 + v_x'^2)\,m \cdot \cdot \cdot 8_a).$$

биће:

$$R_x = \frac{\partial \Theta}{\partial q_1'}, \quad R_y = \frac{\partial \Theta}{\partial q_3'}, \quad R_z = \frac{\partial \Theta}{\partial q_3'}.$$

Једначине су 7:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_1'} = Q_x, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial q_2'} = Q_y, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial q_3'} = Qz \cdot \cdot \cdot 9).$$

Ако формирамо израз:

$$P = \Theta - (Q_x q' + Q_y q_2' + Q_z q_3') \cdot \cdot \cdot 9_a).$$

имаћемо за горње једначине под 9 изразе:

$$\frac{\partial P}{\partial q_1'} = o, \quad \frac{\partial P}{\partial q_2'} = o, \quad \frac{\partial P}{\partial q_3'} = o \cdot \cdot 10).$$

Једначине под 10) су динамичке једначине кретања једне тачке. Овај се метод налажења једначина може применити на ма каква кретања. За једначине 10) ваља знати функцију P, која опет зависи од Θ и $Q_x q_1' + Q_y q_2' + Q_z q_3'$; Θ зависи од веза у систему а не и од примењених сила, којима је систем изложен, а други израз у P зависи од сила и линеарна је функција јачина тих сила. Једначине под 8 и 10 дају могућност за налажење шест непознатих v_x, v_y, v_z, q_1, q_2, q_3 као функције времена.

§ 265. — **Одредба Θ.** Кад је дат систем једначина: $v_x = \varphi(q_1\, q_2\, q_3\, t)$, $v_y = \psi(q_1\, q_2\, q_3\, t)$, $v_z = \bar{\omega}(q_1\, q_2\, q_3\, t)$, диференцијаљењем из њихваља наћи једначине под 5 или 8). Кад из поменутих једначина нађемо v_x', v_y' и v_z' и сменимо у 8 а, добићемо Θ, као полином другог степена по q_1', q_2' q_3', са коефицијентима који зависе од q_1, q_2, q_3 и t. У опште је Θ облика:

$$\Theta = \Theta_2 + \Theta_1 + \Theta_0.$$

Θ_2 је квадратна форма од q_1', q_2', q_3', Θ_1 линеарна, хомогена функција истих параметара, а Θ_0 израз независан од q_1', q_2', q_3'. Коефицијенти у Θ_2, Θ_1 и Θ_0 биће зависни од q_2, q_1, q_3 и t. Ако једначине φ, ψ и $\bar{\omega}$ не зависе од времена t, $\Theta_1 = o$, $\Theta_0 = o$ и Θ је облика $\Theta = {}^1/_2\ \Sigma\, q_i'\, q_j'\, M_{ij}$. $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$, $M_{ij} = M_{ji}$.

§. 266. — *Ако пођемо* од D'Alembert-овог принципа под 2) у прошлом параграфу, којим је обухваћен принцип виртуелних помераја или радова, означив са X, Y, Z компоненте резултанте активних и реакционих сила а са V_1, V_2, V_3 компонентне сила инерције, једначина ће виртуелних радова изгледати:

$$(X - V_1)\,\delta x + (Y - V_2)\,\delta y + (Z - V_3)\,\delta z = o \cdot \cdot \text{I}).$$

Код слободног кретања једне тачке, чије су старе координате x, y, z а нове q_1, q_2, q_3, нека постоје једначине ове:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(q_1\, q_2\, q_3\, t) \\ y &= \psi(q_1\, q_2\, q_3\, t) \quad \cdot \cdot \text{II}). \\ z &= \bar{\omega}(q_1\, q_2\, q_3\, t) \end{aligned}$$

Кад се једначине под II). варирају и диференцијале, имаћемо следећи систем једначина за виртуелне и ефективне варијације:

$$\begin{aligned} \delta x &= \beta_{11}\, \delta q_1 + \cdot \cdot + \beta_{13}\, \delta q_3 \\ \delta y &= \beta_{21}\, \delta q_1 \qquad + \beta_{23}\, \delta q_3 \cdot \cdot 1). \\ \delta z &= \beta_{31}\, \delta q_1 \qquad + \beta_{33}\, \delta q_3 \end{aligned}$$

и

$$x' = \frac{dx}{dt} = \beta_{11}\, q_1' + \cdots + \beta_{13}\, q_3' + B_1$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \beta_{21}\, q_1' + \cdots + \beta_{23}\, q_3' + B_2 \cdot 2).$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \beta_{31}\, q_1' + \cdots + \beta_{33}\, q_3' + B_3$$

Овде су:

$$\beta_{11} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \quad \beta_{31} = \frac{\partial\omega}{\partial q_1} \text{ итд.}$$

$$B_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad B_2 = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad B_3 = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t}.$$

Ако нађене вредности δx, δy, δz сменимо у једначини D'Alembert-овој под I. где смо са V_1, V_2, V_3 обележили $+\, m\,\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2z}{dt^2}$, добићемо једначину:

$$(P_1 - Q_1)\,\delta q_1 + (P_2 - Q_2)\,\delta q_2 + (P_3 - Q_3)\,\delta q_3 = o \cdot \cdot \text{I}_a)$$

Овде су:

$$\begin{aligned} P_1 &= \beta_{11}\, V_1 + \beta_{21}\, V_2 + \beta_{31}\, V_3 = m_1\, \beta_{11}\, v_1' + \cdot + m_1\, \beta_{31}\, v_3' \\ P_2 &= \beta_{12}\, V_1 + \cdot \cdot + \beta_{32}\, V_3 = m_1\, \beta_{12}\, v_1' + \cdot + m_1\, \beta_{32}\, v_3' \ 3) \\ P_2 &= \beta_{13}\, V_1 + \cdot \cdot + \beta_{33}\, V_3 = m_1\, \beta_{13}\, v_1' + \cdot + m_1\, \beta_{33}\, v_3' \end{aligned}$$

$$Q_1 = \beta_{11} X + \beta_{21} Y + \beta_{31} Z, \qquad v_1' = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Q_2 = \beta_{12} X + \beta_{22} Y + \beta_{32} Z, \qquad v_2' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$Q_3 = \beta_{13} X + \beta_{23} Y + \beta_{33} Z, \qquad v_3' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Пошто су варијације δq_1, δq_2, δq_3 произвољне, једначине I_a дају односе:

$$P_1 = Q_1, \quad P_2 = Q_2, \quad P_3 = Q_3 \cdot \cdot \mathrm{II}_a.$$

Једначине II_a су једначине кретања и оне се могу свести на згодније облике.

Ако пођемо од једначине прве под 2). сменивши x'_1 са v_1 имаћемо:

$$v_1 = \beta_{11}\, q_1' + \beta_{12}\, q_2' + \beta_{13}\, q_3' + B_1.$$

Диференцијаљењем по t налазимо:

$$\frac{dv_1}{dt} = v_1' = \beta_{11}\, q_1'' + \beta_{12} q_2'' + \beta_{13}\, q_3'' + \left[\frac{\partial \beta_{11}}{\partial q_1} q_1' + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial q_3} q_3'\right],$$ и слично за v_2' и v_3', одакле је

$$\frac{\partial v_1'}{\partial q_1''} = \beta_{11} \text{ и т. д.} \cdot \cdot 4).$$

Ако у изразу:

$$P_1 = m_1 (\beta_{11}\, v_1' + \beta_{21}\, v_2' + \beta_{31}\, v_3')$$

сменимо β_{11}, β_{21}, β_{31} са вредностима из 4). имаћемо:

$$P_1 = m_1 \left(\frac{\partial v_1'}{\partial q_1''}\, v_1' + \frac{\partial v_2'}{\partial q_1''}\, v_2' + \frac{\partial v_3'}{\partial q_1''}\, v_3'\right)$$

и слично за P_2 и P_3.

Ако обележимо са S израз $S = \frac{1}{2} (m_1\ [v_1'^2 + + v_2'^2 + v_3'^2])$, нађен израз за P_1 казује да постоје једначине:

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1''},\ P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2''}\ P_3 = \frac{\partial S}{\partial q_3''}.$$

Кад се нађене једначине смене у II, једначине су кретања

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1,\ \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2,\ \frac{\partial S}{\partial q_3''} = Q_3 \cdot \cdot \mathrm{III}).$$

Ако пак обележимо једном функцијом $R = S - (Q_1 q_1'' + Q_2 q_2'' + Q_3 q_3'')$, онда једначине III прелазе у:

$$\frac{\partial R}{\partial q_1''} = o,\ \frac{\partial R}{\partial q_3''} = o\ \ \frac{\partial R}{\partial q_2''} = o \cdot \cdot \mathrm{IV}.$$

На овај се облик, као најпростији, дају по Appell-у свести једначине кретања.

Функција S овде представља енергију акцелерације, као што T у Лагранжовим једначинама представља половину живе силе.

§ 267. — *Пример.* Смена параметара правоуглог координатног система поларним при кретању тела у равни или простору. Старе су координате x, y, нове $q_1 = r$, $q_2 = \theta$.

$$x = r \cos \theta = \varphi\,(r\theta),$$

$$y = r \sin \theta = \psi\,(r\theta).$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= r' \cos \theta - r'\, \theta' \sin \theta, \\ y' &= r' \sin \theta + r\theta' \cos\theta \end{aligned}\right\} \cdot \cdot 1).$$

$$x'' = r'' \cos\theta - 2r'\theta' \sin\theta - r\theta'' \sin\theta - r\theta'^2 \cos\theta,$$

$$y'' = r'' \sin\theta + 2r'\theta' \cos\theta + r\theta'' \cos\theta - r\theta'^2 \sin\theta,$$

$$S = \frac{m}{2}(v_1'^2 + v_2'^2) = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2) =$$

$$= \frac{m}{2}[(r''^2 - r\theta'')^2 + (r\theta'' + 2r'\theta')^2],$$

$$\beta_{11} = \cos\theta, \quad \beta_{12} = -r\sin\theta,$$

$$\beta_{21} = \sin\theta, \quad \beta_{22} = r\cos\theta.$$

$$Q_1 = \beta_{11}X + \beta_{21}Y = \cos\theta\, X + \sin\theta\, Y = R$$

$$Q_2 = \beta_{12}X + \beta_{22}Y = -rX\sin\theta + rY\cos\theta = Pr.$$

R и P су тоталне компоненте у правцу потега и у правцу управном на њему.

Једначине су кретања по обрасцу III.

$$\frac{\partial S}{\partial r''} = \frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2;$$

$$m(r''^2 - r\theta'')\, 2r'' = R \text{ и}$$

$$m(2rr'\theta' - r''^2 r) = Pr.$$

Литература. Ближе о овим трансформацијама динамичких једначина може се наћи у: P. Appell-у Mécanique rationnelle 2. -ème. édit. t. II. p. 364.—387. и делу М. Петровића Основи Математичке Феноменологије.

IV. Кретања мала око положаја стабилне равнотеже

§ 268. — Кад су општи услови кретања независни од времена, а то су изводи функције сила U, услови су за равнотежу

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = o, \frac{\partial U}{\partial q_2} = o \cdots \frac{\partial U}{\partial q_k} = o \cdot \cdot 1)$$

Ово су нужни али не и довољни услови. Могу бити ови случајеви:

a). Ако је за услов 1) U maxim. равнотежа је стабилна (Лагранж, Дирихлет), ово је случај увек кад је U за $q_1 = q_2 = \cdots q_k = o$ maxim. $U = o$, а за врло мале вредности параметара $U \gtreqless 0$.

b). Ако је U за неке параметре $q_1 = q_2 = q_3 = o$ $U = o$ и maxim за q_1, q_2, q_3, за положај $q_1 = o, q_2 = o, q_3 = o, q_4 = a_4 \cdots q_k = a_k$, где су a_k константе, положај равнотежни биће лабилни.

c). Ако постоје услови 1) али U није *maxim* равнотежа је нестабилна (F. Siacci).

§. 269. — *Мала кретања.* Нека су испуњени услови 1) и a прошлог §, U зависно од $q_1\ q_2 \cdots q_k$,

$U = o$ и maxim за $q_1 = q_2 \cdots = q_k = o$, како је уз то $\dfrac{\partial U}{\partial q_1} = o \cdot \cdot \cdot \dfrac{\partial U}{\partial q_k} = o$, равнотежа је стабилна. За $q_1\ q_2 \cdots q_k,\ q_1'\ q_2' \cdots q_k'$ врло мало, имаћемо мала кретања и овде ћемо изнети услове малих кретања и њихову природу. Пођимо од најпростијег случаја.

a). Кад је систем зависан од једнога параметра q, који је нула у равнотежном положају.

$$T = q'^2 f(q) = q'^2 [f(o) + q f'(o) + q^2 \frac{1}{2!} f''(o) + \cdots]$$

$f(o) > o$ јер за q врло мало $T > o$ и знака је $f(o)$.

$$T = aq'^2 + T_1 \cdot \cdot 1).$$

U је функција од q и нула је и maxim. за $q = 0$. Ако је $U = F(q)$. Кад се $F(q)$ развије у ред види се да је $F(o)$ и $F'(o)$ нула а $F''(0) < 0$ у опште, и ако се стави $^1/_2\ F''(0) = -\alpha, \alpha > 0$,

$$U = -\alpha q^2 + U_1 \qquad U_1 \lessdot -\alpha q^2.$$

За мале осцилације можемо занемарити T_1 и U_1.

Једначина је Лагранжова из $T = aq'^2$ и $U = -\alpha q^2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q},$$

или:

$$1). \cdot \cdot\ aq'' = -\alpha q, \quad q'' = -r^2 q, \quad {}^{\alpha}/_{a} = r^2.$$

Општи је интеграл:

$$q = \lambda (cos\ rt + \varrho)$$

λ и ϱ су две произвољне константе, које се одређују из почетних услова из q_0 и q_0'. Трајање је једне осцилације $\frac{2\pi}{r}$, r независи од q.

Ако су q и q' за $t = 0$: a_1 и b_1,

$$q = a_1\ cos\ rt + \frac{b_1}{r}\ sin\ rt.$$

Ако су у другом опиту q и q' за $t = t_1$: a_2 и b_2,

$$q = a_2\ cos\ rt + \frac{b_2}{r}\ sin\ rt.$$

За трећи случај, за $t = t_2$, q и q' могу бити $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$,

$$q = (a_1 + a_2)\ cos\ rt + \frac{b_1 + b_2}{r}\ sin\ rt.$$

Последња једначина постоји као збир првих двеју, с тога, што је 1) линеарна једначина и она обухвата оно што се зове *суперпозиција малих кретања*.

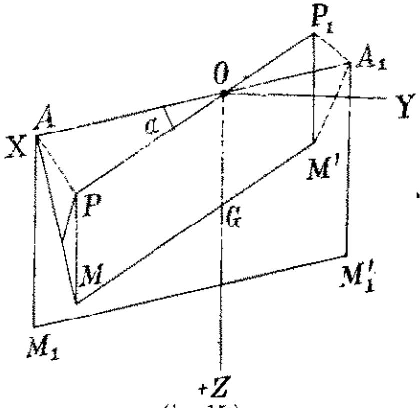
§ 270. — *Пример*. Ако се на крајевима у две тачке A и A_1 хоризонталне осовине налазе конци који држе полугу MM_1, тешку, а кроз средину полуге G пролази оса $0Z$ и полугу изведемо мало из равнотежног положаја, имаћемо случај малих кретања. $0A = 0A' = a$, $AM = A'M' = l$, $MM' = 2\ a$.

Ако је θ угао између AM и $0Z$, α угао између $0X$ и PP_1, из троугла равнокраког $A0P$ и троугла правоуглог AMP имамо:

$$l\ sin\ \theta = 2a\ sin\ {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cdot\ 2)$$

PP_1 је пројекција MM' на раван $X0Y$; $0Z$ позитивно на ниже.

Положај система зависи од θ и $\theta = 0$ у равнотежном положају.



Сл. 158.

Сила је тежина полуге, ако је $\xi = 0G = l\ cos\ \theta$ (G тежиште), функција сила U је:

$$U = Mgl\ (cos\ \theta - 1),$$

$$U = -Mgl\ {}^{\theta^2}/_{2} + U_1.$$

Ако се T одреди по теореми Кениговој, оно је:

$$T = {}^1/_2\ M [\xi'^2 + k^2 \alpha'^2] = {}^1/_2\ M\ [l^2 \theta'^2\ sin\ \theta + {}^1/_3\ a^2 \alpha'^2).$$

Из 2) је:

$$\alpha = 2\ arc\ sin\ ({}^l/_{2a}\ sin\ \theta).$$

Кад се одавде нађе α' и замени у T, имаћемо:

$$T = {}^1/_2\ M\left(l^2\ sin\ ^2\theta + {}^1/_3\ \frac{a^2\ l^2\ cos\ ^2\theta}{4a^2 - l^2\ sin\ ^2\theta}\right)\theta'^2.$$

Интеграл живе силе је:

$T = U + h$, за мала кретања су, за $\theta = 0$

$T = {}^1/_6\ Ml^2\ \theta'^2$ и $U = -{}^1/_2\ Mgl\ \theta^2$.

Једначина је кретања

$$\theta'' = -\,{}^{3g}/_{l}\,\theta.$$

Трајање је осцилације $2\pi\sqrt{{}^{l}/_{3g}}$

§ 271. — Ако T није облика $q'^2 f(q)$ и $f(0)$ није различито од нуле, то се постиже сменом промењљивих.

Нека је $f(q) = q^n \varphi(q)$, $\varphi(0) \gtreqless 0$, сменом имамо:

$$\frac{n+2}{2}\, q^{n/2} q' = s', \; q = s^{\frac{2}{n+2}}$$

$$T = q'^2 q^n \varphi(q) = \frac{4}{(n+2)^2}\, \varphi\left(s^{\frac{2}{n+2}}\right) s'^2.$$

φ није нула за $s = 0$.

Ако је такав случај да је за $q = 0$, $U(q)$ maxim. али да се сем првог извода још и неки други пониште, једначина малих кретања може бити облика:

$$aq'' = -\,2\alpha\, q^3 \cdot \cdot 1)$$

Трајање малих осцилација око равнотежног положаја зависи од амплитуде.

Из 1) је:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = {}^{\alpha}/_{a}\,(q_0^4 - q^4).$$

Ако q осцилира између $-\,q_0$ и $+\,q_0$, ${}^1/_4$ једне осцилације траје за време t:

$$= \sqrt{{}^{a}/_{\alpha}} \int_0^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{q_0^4 - q^4}} = \frac{1}{q_0}\sqrt{{}^{a}/_{\alpha}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}},$$

и она је за $q_0 = 0$, ∞.

§ 272. Може систем да зависи од два параметра q_1, q_2.

$$T = Aq_1'^2 + 2Bq_1' q_2' + Cq_2'^2 \cdot \cdot 1)$$

Ако $AC - B^2$ није нула за наше параметре $q_1 = q_2 = 0$ и T се развије по Маклорену, имаћемо:

$$T = aq_1'^2 + 2bq_1' q_2' + cq_2'^2 + T_1.$$

За q_1 и q_2 мало, T је знака првога тринома. Како је $T > 0$ за ма какво q_1', q_2', то је потребно да су:

$$a > 0, \; c > 0, \; b^2 - ac < 0.$$

Ако је $U = 0$ за $q_1 = q_2 = 0$ и maxim, то је:

$$U = -\,(\alpha\, q_1^2 + 2\beta\, q_1 q_2 + \gamma\, q_2^2) + U_1$$

Да је $U \leqq 0$ за мале вредности q_1 и q_2, услови су ва то:

$$\alpha > 0, \;\; \gamma > 0, \;\; \beta^2 - \alpha\gamma < 0.$$

Ако се занемаре U_1 и T_1 и примене Лагранжове једначине, имаћемо:

$$aq_1'' + bq_2'' = -\,(\alpha q_1 + \beta q_2),$$
$$bq_1'' + cq_2'' = -\,(\beta q_1 + \gamma q_2).$$

Интеграли су:

$$q_1 = \lambda_1 \cos(rt + \varrho), \quad q_2 = \lambda_2 (\cos rt + \varrho).$$

За r имамо једначину:

$$(ar^2 - \alpha)(cr^2 - \gamma) - (br^2 - \beta)^2 = 0.$$

Ако узмемо за r две стварне, позитивне вредности: r_1 и r_2, за $r = r_1$:

$$\frac{\lambda_1}{br_1^2 - \beta} = \frac{\lambda_2}{\alpha - ar_1^2} = \mu_1 \; (\mu_1 \text{ произвољна константа})$$

и:

$$q_1 = \mu_1 \, (br_1^2 - \beta) \cos (r_1 t + \varrho_1);$$
$$q_2 = \mu_1 \, (\alpha - br_1^2) \cos (rt + \varrho_1).$$

r_2 даје другу вредност и општи је интеграл:

$$q_1 = \mu_1 (br_1^2 - \beta) \cos (r_1 t + \varrho_1) + \mu_2 (br_2^2 - \beta) \cos (r_2 t + \varrho_2),$$
$$q_2 = \mu_1 (\alpha - ar_1^2) \cos (r_1 t + \varrho_1) + \mu_2 (\alpha - ar_2^2) \cos (r_2 t + \varrho_2).$$

$\mu_1, \mu_2, \varrho_1, \varrho_2$ су четири произвољне константе, које се одређују из почетних услова.

Кретање се у близини равнотежног положаја састоји из две осцилације, чије су периоде $\frac{2\pi}{r_1}$ и $\frac{2\pi}{r_2}$. Ако су ови бројеви нарочити, кретање ће имати периоду иначе не; r_1 и r_2 не зависе од q_1, q_2 то су инваријанте проблема.

Ако постоје услови:

$$^{\alpha}/_{a} = {}^{\beta}/_{b} = {}^{\gamma}/_{c} = p^2 = r^0$$

једначина за r је:

$$(r^2 - p^2)^2 = 0.$$

Општи је интеграл:

$$q_1 = \mu_1 \cos (pt + \varrho_1) \text{ и } q_2 = \mu_2 \cos (pt + \varrho_2).$$

Овде постоји само једна периода за сваку осцилацију, она је $\frac{2\pi}{p}$.

§. 273. — Ако имамо k параметара, и показано у прошлом параграфу применимо, имаћемо k_1 Лагранжових једначина и ове су једначине за мала кретања:

$$\alpha_{v1} q_1'' + \alpha_{v2} q_2'' + \cdots + \alpha_{vk} q_k'' = -(b_{v1} q_1 + \cdots b_{vk} q_k),$$
$$(\nu = 1, \; 2 \cdots k)$$

Интеграли су:

$$q_1 = \lambda_1 \cos (rt + \varrho) \cdots q_k = \lambda_k \cos (rt + \varrho).$$

За одредбу r ваља λ избацити из:

$$\lambda_1 (b_{11} - r^2 a_{11}) + \lambda_2 (b_{12} - r^2 a_{12}) + \cdots + \lambda k (b_{1k} - r^2 a_{1k}) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1 (b_{k1} - r^2 a_{k1}) + \cdots\cdots\cdots + \lambda k (b_{kk} - r^2 a_{kk}) = 0.$$

Ако λ нису нула, ова детерминанта мора бити нула:

$$\begin{pmatrix} b_{11} - r^2 a_{11} \cdots\cdots b_{1k} - r^2 a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{k1} - r^2 a_{k1} \cdots\cdots b_{kk} - r^2 a_{kk} \end{pmatrix} = 0$$

За r^2 имамо k вредности, а за r_v имамо $2k$ вредности. За једну од тих вредности, на пр. за $r = r_v$, имамо за λ вредности изражене произвољном константом ϱ_v и μ_v. Сума ових k партикуларних интеграла даје општи са $2k$ произвољних константата.

Општа осцилација је сложена из k резултујућих кретања, чије су периоде $\frac{2\pi}{r_1} \cdots \frac{2\pi}{r_k}$.

Суперпозиција малих кретања постоји због тога, што су нам једначине линеарне.

Корени су једначине за r реални. Кад то не би било, постојало би решење:

$$q_v = A_v (e^{bt} + e^{-bt}) \cos at + B_v (e^{bt} - e^{-bt}) \sin at$$

и q_ν је ∞ за $t = \infty$, што се противи условима стабилне равнотеже.

Ако једначина за r има двојне и тројне корене

$$q_\nu = \mu t \cos (rt + \beta),$$

$q_\nu = \infty$ за $t = \infty$, што је супротно хипотези о равнотежи.

§. 274. — Нека су за мала кретања испуњени сви ранији услови, али уз њих се придружују за време кретања пертурбационе силе, зависне од времена и параметара $q_1\, q_2 \cdots q_k$ и њихових извода.

Аке су X, Y, Z компоненте тих сила, што дејствују на тачку x, y, z, рад је њихов R_x.

$$R_\nu = \Sigma\left(X \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} + Y \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} + Z \frac{\partial \varpi}{\partial q_\nu} \right).$$

Једначине су поремећеног кретања.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \frac{\partial U}{\partial q_\nu} + R_\nu$$
$$\nu = 1,\ 2 \cdots k.$$

Ако се R_ν не поништавају у равнотежним положајима и само су функције времена, можемо их ставити да су облика:

$$R_\nu = 2A_\nu \cos (at + \alpha) + 2B_\nu \cos (bt + \beta) + \cdots$$
$$+ 2L_\nu \cos (lt + \lambda).$$

Сваки израз представља пертурбациону силу делимичну, периодâ: ${}^{2\pi}/_a$, ${}^{2\pi}/_b$ и т. д.

Ако смо сменом параметара узели такве параметре да су:

$$T = q'^2_1 + q_2'^2 + \cdots q'^2_k,$$
$$U = -(r_1^2 q_1^2 + r_2^2 q_2^2 + \cdots r_k^2 q_k^2),$$

једначине су поремећеног кретања:

$$q_\nu'' + r_\nu^2 q_\nu = A_\nu \cos (at + \alpha) + \cdots + L_\nu \cos (lt + \lambda),$$
$$v = 1,\ 2 \cdots k$$

Према томе, да ли је која од количина $a, b \cdots l$ једнака са $r_1\, r_2 \cdots r_k$, општи интеграли су:

$$q_\nu = \mu_\nu \cos (r_\nu t + \varrho_\nu) + \frac{A_\nu}{r_\nu^2 + a^2} \cos (at + \alpha) +$$
$$\cdots \frac{L_\nu}{r_\nu^2 - l^2} \cos (lt + \lambda). \quad \cdot \quad \cdot \quad 1)$$
$$v = 1 \cdots k.$$

Изрази сила R_ν, $A_\nu \cos (at + \alpha)$ уводе осцилације:

$$\frac{A\nu}{r_\nu^2 - a^2} \cos (at + a).$$

периоде исте као код сила, а амплитуде независне од почетних услова, који утичу само на λ_ν и ϱ_ν.

Ако је $a = r_1$ а различито од $r_2, r_3 \cdots r_k$, и $b \cdots l$ нису једнаки са $r_1, r_2, \cdots r_k$, општи су интеграли:

$$q_1 = \mu_1 \cos (r_1 t + \varrho_1) + \frac{A_1 t}{2r_1} \sin (r_1 t + \alpha) +$$
$$+ \frac{B_1}{r_1^2 - b^2} \cos (bt + \beta) + \cdots \frac{L_1}{r_1^2 - l^2} \cos (lt + \lambda).$$

и за $\nu = 2, 3 \cdots k$ остају исти са интегралима под 1).

Кад периода једне пертурбиционе силе тежи ка једној периоди просте осцилације, амплитуда пертурбације постаје све већа и већа; пертурбација се поклапа са простом одговарајућом осцилацијом, чија је амплитуда сразмерна са t и постаје бесконачна.

V. Осцилације око стабилног кретања.

§ 275. — Ако положај зависи од k параметара $q_1\, q_2 \cdots q_k$ и времена t, једначине су Лагранжове за кретање:

$$1) \ldots \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_v{}'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_v} = Q_v,\ v = 1 \cdot\ \cdot k.$$

Ако су партикуларна решења за 1):

$$q_1 = f_1(t),\ q_2 = f_2(t) \cdot\ \cdot q_k = f_k(t).$$

где константе интеграционе имају одређене вредности, каже се: да је ово кретање стабилно, кад је случај тај, да је систем стављен, под почетним условима ма каквим, у положај близак положају првобитном, изложен малим кретањима. Ови се услови налазе овако.

Ваља $q_1\, q_2 \cdots\cdot q_k$ сменити са:

$$q_1 = f(t) + s_1,\ q_2 = f_2(t) + s_2 \cdot\ \cdot q_k = f_k(t) + s_k$$

Једначине кретања постају:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'_v}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_v} = S_v.$$

Партикуларно кретање, чија се стабилност има испитати, је:

$$s_1 = 0,\ s_2 = 0 \cdot\cdot\cdot\cdot s_k = 0.$$

§ 276. — *Пример.* Нека је дата тачка масе $= 1$ привлачена центром 0, силом која је сразмерна $n^{\text{-ом}}$ степену одстојања.

$$F = -\mu r^n,\ \mu > 0$$

Једначине су кретања:

$$r'' - r\theta'^2 = -\mu r^n \text{ и } \frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0$$

Партикуларни су интеграли:

$$r = r_0,\ \theta' = \sqrt{\mu\, r_0{}^{n-1}},\ \theta = \sqrt{\mu\, r_0{}^{n-1}\, t}.$$

Овде је трајекторија круг, по коме тачка иде брзином сталном. Да би испитали да ли је ово кретање стабилно, ставимо:

$$r = r_0 + \xi,\ \theta = \sqrt{\mu\, r_0{}^{n-1} t} + \eta \cdot\ \cdot 2.)$$

Ако су ξ и η, ξ' и η' мали у почетку, да ли ξ и η то остају и даље? Означимо са ω константу $\sqrt{\mu\, r_0{}^{n-1}}$ и сменимо 2) у једначини кретања, па ћемо имати:

$$3) \cdot\cdot \xi'' - \omega^2 \xi - r\, r_0\, \omega \eta' = -n\, \omega^2 \xi \text{ и } r_0\, \eta'' + r\, \omega \xi' = 0.$$

Из друге имамо:

$3^1)$. $r_0\, \eta' + r\omega\, \xi = a\omega$ (a је мала произвољна константа).

Ако из последње заменимо η' у 3), имаћемо:

$$\xi'' + (n+3)\, \omega^2 \xi = 2a\omega^2.$$

За $n + 3 < 0$, ξ има чланове зависне од t тако да је ξ ∞ за $t = \infty$ и кретање циркуларно није стабилно; за $n + 3 > 0$.

$$\xi = b \cos(\omega t\, \sqrt{n+3} + \alpha) + \frac{2a}{n+3} \cdot\ \cdot 4)$$

b и α су константе произвољне.

Из 4) је јасно: да је ξ врло мало и $r = r_0 + \xi$ је мало и близу r_0.

Ако у 3) заменимо ξ и интегришемо, имаћемо:

$$r_0 \eta = -\frac{2b}{\sqrt{n+3}} sin\,(\omega t \sqrt{n+3} + \alpha) +$$

$$+ \frac{n-1}{n+3}\, a\, \omega t + c,$$

с врло мало. Значи да η расте са t, кретање није стабилно. Да је η мало, мора да је $n = 1$; за $n \gtrless 1$, да је η мало, треба a одредити тако из почетних услова, да је $a = 0$, а за то је услов $c = \omega r_0^2$.

VI. Примена Лагранжових једначина на релативна кретања.

§ 277. — Ваља и овде наћи Лагранжове једначине за апсолутно кретање, али за параметре, координате, којима је систем одређен ваља узети количине $q_1\ q_2 \cdots q_k$, које се односе на покретни систем $o\,x\,y\,z$. Те координате одређују положај $0\,x\,y\,z$ према сталним осама $0_0\, X_0\, Y_0\, Z_0$, јер је кретање $0\,x\,y\,z$ познато. Тако су једначине кретања:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_a}{\partial q_v{}'}\right) - \frac{\partial T_a}{\partial q_v} = Q_v, \qquad \nu = 1, 2 \cdot \cdot k$$

$$Q_v = \frac{\partial U}{\partial q_v}, \text{ ако је } U \text{ функција сила.}$$

v_a је компонента из v_r и v_e. Пројекције су од v_r на $oxyz$: x', y', z', ако су кординате тачке m xyz; v_e је брзина тачке m, кад би тачка m мировала у систему покретком и она је резултанта из брзине транслаторне v^0 и ротације ω. Ако су компоненте од v^0: $v^0{}_x$, $v^0{}_y$, $v^0{}_z$ и $p\,q\,r$ компонетне од ω, пројекције су од v_e: $v^0{}_x + qz - ry$ итд. Пројекције од v_a су $x' + v^0{}_x + qz - ry$ и апсолутна је жива сила T_a:

$$T_a = {}^1/_2\, \Sigma m\, [(x' + v_x{}^0 + qz - ry)^2 + (y^1 + v^0{}_y + rx - pz)^2 +$$
$$+ (z^1 + v^0{}_z + py - qx)^2]\cdot$$

x, y, z су функције од $q_1\ q_2 \cdots q_k$ и t, и T_a је изражено истим координатима.

§. 278. — Наћи кретање једне тешке полуге, која се са равнином, у којој лежи, обрће око осе oy брзином ω (сталном). Овде се тражи релативно кретање полуге према oyx у равни P. Положај је полуге одређен координама тежишта ξ, η (G) и углом θ. Апсолутна је брзина v_a тачке m резултанта из брзине v_r, која лежи у oxy и брзине антренирајуће v_e, која је управна на xoy и једнака је ωx.

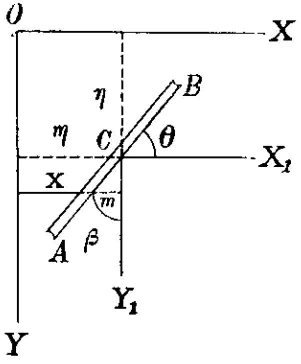
$$v_a{}^2 = v_r{}^2 + v_e{}^2 \cdot \cdot \cdot 1)$$

$$T_a = {}^1/_2\, \Sigma\, m v_a{}^2 = {}^1/_2\, (\Sigma\, m v_r{}^2 + \Sigma\, m v_e{}^2) \cdot \cdot 1').$$

Релативно је кретање кретање полуге у равни oxy, и њена је жива сила по теореми Кениговој.

$$\Sigma\, m v_r{}^2 = M\,[\xi'^2 + \eta'^2 + k^2 \theta'^2] \cdot 2).$$

Mk^2 је моменат лењивости односно G. $\Sigma\, m v_e{}^2 = \omega^2\, \Sigma\, m x^2$. $\Sigma m x^2$ је моменат лењивости односно oy и то је једнако $\Sigma m x_1{}^2$ односно $G y_1$, више производу из $M \xi^2$. Ако са r означимо Gm, $x_1 = r \cos\theta$, $\Sigma m x_1{}^2 - cos^2\theta\, \Sigma m r^2 = Mk^2 \cos^2\theta$.



Сл. 159.

$$\Sigma m v_r{}^2 = M\omega^2\, (k^2 \cos^2\theta + \xi^2) \cdot 3).$$

Из $1'$ 2 и 3 је

$$T_a = {}^1/_2\, M\, (\xi'^2 + \eta'^2 + k^2\, \theta'^2 + \omega^2\, k^2 \cos^2\theta + \omega^2\, \xi^2)$$

Једина је сила Mg, $U = Mg\eta$; једначине су кретања:

$$\frac{d}{dt}(\xi') - \omega^2 \xi = 0, \quad \frac{d}{dt}(\eta') = g, \; \frac{d}{dt}(k^2\theta') +$$

$$k^2\, \omega^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

Из ових је једначина:

$$\xi = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \eta = {}^1/_2\, gt^2 + Ct + D.$$

θ ћемо наћи доцније.

§ 279. — *Можемо* и другојачије наћи релативно кретање односно оса $0xyz$. Положај је система према $0xyz$ одређен параметрима $q_1\, q_2 \cdot\cdot q_k$, на систем дејствују дате силе и фиктивне: центрифугална и центрифугална сложена. Рад је првих сила:

$$Q_1\, \delta q_1 + Q_2\, \delta q_2 + \cdots Q_k\, \delta q_k$$

а рад фиктивних је:

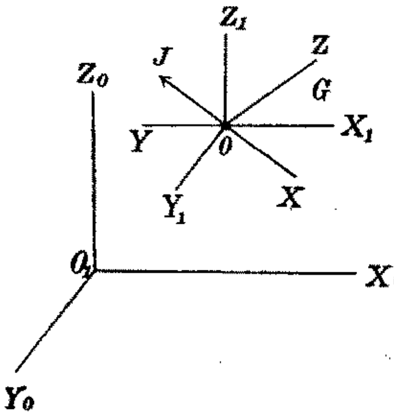
$$R_1\, \delta q_1 + R_2\, \delta q_2 + \cdots R_k\, \delta q_k.$$

Сада ваља наћи релативну брзину и релативну живу силу T_r и једначине су Лагранжове:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial q'_\nu}\right) - \frac{\partial T_r}{\partial q_\nu} = Q_\nu + R_\nu, \nu = 1 \cdot 2 \cdot\cdot k.$$

§ 280. — *Мешовит метод Жилбертов* (1883). Ако су покретне осовине $0xyz$; $q_1\, q_2 \cdots q_k$ параметри према $0xyz$, рад је датих сила:

$$Q_1\, \delta q_1 + \cdot\ \cdot Q_k\, \delta q_k.$$



Сл. 160.

Кроз 0 повуцимо координатне осе $x_1\, y_1\, z_1$ паралелно са сталним осовинама $0_0\ x_0\ y_0\ z_0$. Осе $0x_1\, y_1\, z_1$ имају само транслаторно кретање и оне се могу сматрати за сталне, ако им се дода само фиктивна сила центрифугална. Ако је J акцелерација тачке 0, центрифугална је сила $-Jm$: пројекције су од J: J_x, J_y, J_z.

Сума је радова центрифугалних сила:

$$-\Sigma m\, (J_x\, \delta_x + J_y\, \delta_y + J_z\, \delta_z).$$

Ставимо:

$$K = -\Sigma m\, (x\, J_x + y\, J_y + z\, J_z) = -M\, (\xi\, J_x + \eta\, J_y + \xi\, J_z) \cdot\cdot 2)$$

Из 1. и 2. се види: да је рад виртуелан центрифугалних сила δK.

Из 2. је јасно:

$$K = -M.J.\, 0G \cos J0G.$$

Како су сад $0x_1\, y_1\, z_1$ сталне осовине, увођењем центрифугалних сила на њих се могу применити Лагранжове једначине као на апсолутне осе. Ако је T жива сила односно $0x_1\, y_1\, z_1$, једначине су кретања:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu + \frac{\partial K}{\partial q_\nu} = \frac{\partial\, (U + K)}{\partial q_\nu},$$

$$\text{кад је } Q_\nu = \frac{\partial U}{\partial q_\nu}.$$

Да би нашли T, ваља наћи брзину v_1 тачке m односно $0x_1\, y_1\, z_1$ и v_1 је резултанта из v' и v_e'.

Пројекције су од v_r: $x'\, y'\, z'$ на $0xyz$; пројекције су од v_e' на исте осе $qz - ry$ и т. д.

$$T = {}^1/_2\, \Sigma m\, [(x' + qz - ry)^2 + (y' + rx - pz)^2 + (z' + py - qx)^2],$$

$$T = T_r + G + V.$$

$$T_r = {}^1/_2\, \Sigma m\, (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$C = {}^1/_2\, \Sigma m\, [(qz - ry)^2 + (rx - pr)^2 + (py - qx)^2],$$

$$V = \Sigma m\, [x'\, (qz - ry)^2 + y'\, (rx - pz) + z'\, (py - -qx)].$$

T је половина живе силе релативног кретања система односно $0xyz$; G је половина живе силе система услед антренирајуће ротације око тренутне осовине 0ω триједра $0xyz$ и то је:

$^1/_2\, H\omega^2$, H је моменат инерције у времену t материјалног система односно 0ω;

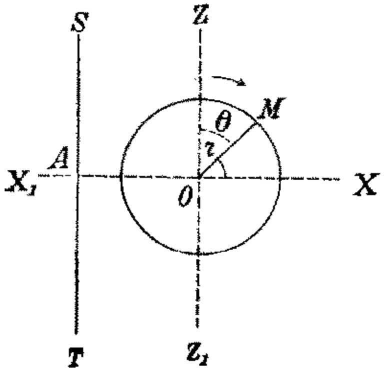
$$V = p\Sigma m\,(yz' - ry') + q\Sigma m\,(zx' - xr') + r\Sigma m\,(xy' - yx').$$

Вектор 0σ, чије су пројекције $\Sigma m\ (yz' - zy')$ и т. д. јесте резултујући моменат количине кретања релативног разних тачака односно 0, и V је:

$$V = \omega\sigma \cos \widehat{\omega\sigma}.$$

У свакоме специјалном случају се K, T_r G и V може лако одредити помоћу параметара q_v q_v' не прелазећи преко једначина за трансформацију координата.

§ 281. — *Кретање тачке M* тешке, која се налази на једноме кругу, који се обрће са угаоном брзином ω сталном око вертикалне осовине ST.



Сл. 161.

Тражи се кретање према систему $z0x$. Положај је тачке M одређен углом θ. Нека је m маса тачке M,r полупречник круга, $\mathrm{a} = 0A$, $0Z_1$ позитиван правац.

$$T_r = {}^1/_2\, m r^2 \theta'^2.$$

Тренутна је оса за тачку M zz'. Моменат је инерције тачке M према zz' H:

$$H = mr^2 \sin^2\theta,$$

$$G = \frac{\omega^2}{2} mr^2 \sin^2\theta.$$

Вектор 0σ је управан на равни $0zM$, $\cos \omega\sigma = o$, $V = o$.

Пројекције су силе:

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = mg, \quad U = mgr \cos\theta.$$

Израчунавање K. Убрзање је J центра 0, који се обрће око ST брзином угаоном ω, у правцу $0A$, и износи $\omega^2\mathrm{a}$ $(0A = \mathrm{a})$.

$$K = mr\omega^2 \mathrm{a} \sin\theta,$$

$$T = {}^1/_2\, mr^2 \theta'^2 + \frac{\omega^2}{2} mr^2 \sin^2\theta,$$

$$U + K = mgr \cos\theta + mr\omega^2 \mathrm{a} \sin\theta.$$

Једначина је кретања:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{g}{r} \sin\theta + \frac{\omega^2 \mathrm{a}}{r} \cos\theta.$$

Равнотежни је положај дат једначином:

$$\omega^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{g}{r} \sin\theta + \frac{\omega^2 \mathrm{a}}{r} \cos\theta = 0.$$

* * *

ГЛАВА XXIV

Аналитичка механика система. Канонске једначине — Јакобијева и Поасонова теорема.

I. Канонске једначине

§ 282. — Ако су параметри, којима је систем одређен $q_1\ q_2 \cdots q_k$, видели смо за случај кад је $k = 3$, да се Лагранжове једначине своде на канонску форму облика:

$$\frac{dp_v}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_v} = Q_v, \frac{dq_v}{dt} = \frac{\partial K}{dp_v} \cdot \cdot \text{I}).$$

То исто вреди и сада, само се за ν ваља узети **1**, 2. · · k. На овај начин у опште за систем имамо $2k$ једначина облика I).

Ако је функцији сила U зависна од $q_1\, q_2 \cdots q_k$ и t и стави се $H = K - U$, из I се добијају ове канонске једначине:

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_v}, \ \frac{dp_v}{dt} = - \frac{\partial H}{dq_v}, \nu = (1, 2 \cdot \cdot k).$$

§ 283. — Ако је U независно од t, што имамо за случај кад су силе изводи функције, онда постоји први интеграл звани живе силе, који је облика:

$$T = U + h \cdot \cdot 1).$$

Кад се ово стави у K,

$$H = K - U = T - U.$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

II. Теорема Јакобијева.

§ 284.—Ако је H функција од $p_1, p_2 \cdot\cdot p_k, q_1\ q_2, \cdot\cdot q_k\ t.$

$$H\,(p_1\, p_2 \cdot \cdot p_k\, q_1\, q_2 \cdot \cdot q_k\, t)$$

доказано је, да су канонске једначине, једначине карактеристика извесне једначине парцијалне првога реда. Овим се своди интегрисање канонских једначина на тражење једног комплетног интеграла једначине парцијалне, која је облика:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}, \frac{\partial v}{\partial q_2} \cdot \cdot \frac{\partial v}{\partial q_k}; q_1\, q_2 \cdot \cdot q_k\, t\right) = o \cdot \cdot \text{I}).$$

Интеграл је комплетни облика:

$$v\,(q_1, q_2 \cdot q_k\, t; a_1\, a_2 \cdot \cdot a_k) + const = o \cdot \cdot \text{II}).$$

Интеграли општи канонских једначина, а у исто време и једначине крајње кретања, су:

$$\frac{\partial v}{\partial a_1} = b_1, \frac{\partial v}{\partial a_2} = b_2 \cdot \cdot \cdot \frac{\partial v}{\partial a_k} = b_k,$$

$$p_1 = \frac{\partial v}{\partial q_1}, p_2 = \frac{\partial v}{\partial q_2} \cdot \cdot \cdot p_k = \frac{\partial v}{\partial q_k}.$$

Овде има свега $2k$ произвољних константата: $b_1\, b_2 \cdot\cdot b_k$, $a_1\ a_2 \cdot \cdot a_k$, што се почетним условима одређују.

§. 285. — *Ако у I* (§ 284) нема t у v, интеграл је комплетни облика:

$$v = - ht + W, \quad h \text{ је константа.}$$

Кад се ово замени у I, Јакобијева је једначина:

$$-h + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2} \cdot \cdot \frac{\partial W}{\partial q_k};\ q_1, q_2 \cdot \cdot q_k\right) = o,$$

Њен је комплетни интеграл

$$W(q_1, q_2 \cdot q_k,\ a_1, a_2 \cdots a_{k-1}\ h) + const = o,$$

$$v = -ht + W(q_1, q_2 \cdot \cdot q_k, a_1, a_2 \cdots a_{k-1}, h).$$

Једначине су кретања:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2 \cdot \cdot \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}, -t + \frac{\partial W}{\partial h} = -to;$$

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2} \cdots p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}.$$

Ово вреди, не само за случај кад t не фигурира у H, већ кад ма који параметар q_v фали. Тако ако нема q_1, онда је:

$$v = a_1 q_1 + \varphi(q_2 q_3 \cdots q_k t).$$

§ 286. — *Применимо ово на случај* из § 278, на кретање једне хомогене тешке полуге у равни која се обрће брзином ω око Oy. Овде су параметри били ξ, η, θ (q_1, q_2, q_3).

$$T = {}^1/_2 (\xi'^2 + \eta'^2 + k^2 \theta'^2 + \omega^2 k^2 \cos\theta + \omega^2 \xi^2),$$

$$U = g\eta.$$

T није хомогено по q_1', q_2', q_3';

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \xi'};\ p_2 = \frac{\partial T}{\partial \eta'}, p_3 = \frac{\partial T}{\partial \theta'},$$

$$p_1 = \xi', p_2 = \eta', p_3 = k^2 \theta';$$

$$K = p_1 \xi' + p_2 \eta' + p_3 \theta' - T.$$

$$K = 1/2\, [p_1^2 + p_2^2 + \frac{p_3^2}{k^2} - \omega^2 k^2 \cos^2\theta - \omega^2 \xi^2].$$

$$H = K - U,$$

$$H = {}^1/_2 (p_1^2 + p_2^2 + \frac{p_3^2}{k^2} - \omega^2 k^2 \cos^2\theta - \omega^2 \xi^2) - g\eta.$$

Јакобијева је једначина:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 - \omega^2 k^2 \cos^2\theta - \omega^2 \xi^2\right]$$

$$-g\eta = o.$$

Интеграл је ове једначине:

$$v = -ht + F_1(\xi) + F_2(\eta) + F_3(\theta).$$

Из последње две једначине имамо:

$$-2h + [F_1'^2(\xi) - \omega^2 \xi^2] + [F_2'^2(\eta) - 2g\eta] +$$

$$+\left[\frac{1}{k^2} F_3'^2 - \omega^2 k^2 \cos^2\theta\right] = o \cdot \cdot 1).$$

Како су ξ, η, θ независни параметри, израз 1). може постојати ако су задовољене једначине:

$$F'_1{}^2(\xi) - \omega^2 \xi^2 = 2a_1, \quad F_2'^2(\eta) - 2g\eta = 2a_2,$$

и

$$\frac{1}{k^2} F_3'^2(\theta) - \omega^2 k^2 \cos^2\theta = 2h - 2a_1 - 2a_2.$$

Кад се одавде нађу F_1, F_2 и F_3, v је:

$$v = -ht + \int \sqrt{\omega^2 \xi^2 + 2a_1}\, d\xi +$$

$$+\int\sqrt{2g\eta + 2a_2}\, d\eta + k\int\sqrt{\omega^2 k^2 \cos^2\theta + 2h - 2a_1 - 2a_2}\, d\theta.$$

a_1, a_2 h су три константе.

Једначине су кретања:

$$\frac{\partial v}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial v}{\partial a_2} = b_2, \quad \frac{\partial v}{\partial h} = -to.$$

Ако обележимо са $\Theta = \omega^2 k^2 \cos^2\theta + 2h - 2a_1 - 2a_2$, имаћемо ове изразе за једначине кретања:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\omega^2\xi^2 + 2a_1}} - k\int\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = b_1,$$

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{2g\eta + 2a_2}} - k\int\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = b_2,$$

$$k\int\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = t - to.$$

Из ових се једначина налазе ξ, η, θ са шест констананата $a_1, a_2, h, b_1, b_2, t_0$. Вредности су за p_1, p_2, p_3:

$$p_1 = \frac{\partial v}{\partial\xi} = \sqrt{\omega^2\xi^2 + 2a}, \quad p_2 = \frac{\partial v}{\partial\eta} = \sqrt{2g\eta + 2a_2},$$

$$p_3 = \frac{\partial v}{\partial\theta} = k\sqrt{\Theta}.$$

III. Теорема Поасонова.

§ 287. — У овој ћемо глави поменути главне особине из теорије парцијалних једначина, које су нам потребне за решавање динамичких једначина, не упуштајући се у доказивање теорема самих. За ближе сазнање свега, упућујем на дела: Goursat: Sur l'intégration des équations aux derivées partielles и Mémoire de Fr. Siacci (Reale Accademia dei Lincei 1881—1882).

Нека су дате диференцијалне једначине кретања у кананонској форми:

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1,\ 2 \cdots k) \cdot \cdot 1).$$

Интегрисање горњих једначина даје $q_1, q_2 \cdot\cdot q_k$, $p_1, p_2 \cdots p_k$ као функције времена t и $2k$ констананата произвољних.

Израз ма какав:

$$f(q_1, q_2 \cdots q_k,\ p_1, p_2 \cdots p_k, t) = C \cdot \cdot 2).$$

који је задовољен вредностима $q_\nu\ p_\nu$, изражених ма каквим односом зове се *први интеграл* једначине кретања 1). Израз 2, као однос између $q_\nu\, p_\nu$ и t, сталан за све време кретања, независан је од почетних услова кретања. Ако је $f = c$ један интеграл, $F(f) = C'$ је такође једап интеграл, где је F функција од f.

За два се прва интеграла $f_1 = c_1$ и $f_2 = c_2$ каже да су независна, ако не постоји функционална зависност међу њима, ако нема односа $f_2 = F(f_1)$.

Ако имамо n првих интеграла:

$$f_1 = C_1,\ f_2 = C_2 \cdots f_n = C_n \cdot \cdot 3).$$

они су разни, ако се ни један од њих, на пр. f_μ, не може другима изразити, ако не постоји однос:

$$f_\mu = F(f_1, f_2 \cdot \cdot f_{\mu-1},\ f_{\mu+1} \cdot \cdot f_n).$$

Из овога излази, ако постоје n првих интеграл под 3, онда је израз:

$$F(f_1, f_2 \cdot \cdot f_n) = C$$

такође један први интеграл, али не и различит од оних под 2).

Ако се знају $2k$ првих интеграла разних

$$f_1 = c_1, f_2 = c_2, \cdot \cdot f_{2k} = c_{2k},$$

систем једначина 1) је решен, јер ових $2k$ симултаних једначина дају $q_1, q_2 \cdots q_k, p_1, p_2 \cdots p_k$ као функције t и $2k$ констаната произвољних

Изрази:

$$f(q_1, q_2, \cdot \cdot q_k, p_1, p_2, \cdot \cdot p_k, t, c_1, c_2, \cdot \cdot c_n) = o$$

задовољени решењима q_v, p_v једначина под 1) и згодно изабраним константама $c_1, c_2 \cdot \cdot c_n$, зову се интегралима ма каквим једначина 1), за разлику од првих интеграла, у којима фигурише само једна константа.

§ 288. — Услови да је $f = c$ први интеграл. - Парантеза Поасонова.

Ако је

$$f(q_1, q_2 \cdot \cdot q_k, p_1, p_2 \cdot \cdot p_k\, t) = c$$

први интеграл каноиских једначина, тоталки извод f по t је нули:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} \cdot \cdot + \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = o \cdot \cdot 1)$$

Кад се у последњој једначини смене изрази $\frac{dq_v}{dt}$ и $\frac{dp_v}{dt}$ из канонских једначина, имаћемо:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial q_1} + \cdot \cdot + \frac{\partial f}{\partial t} = o \cdot \cdot 2).$$

Ако уведемо нотацију Поасонову, онда се последња једначина да овако написати:

$$(f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} = o \cdot \cdot \mathrm{I}).$$

Ако је једна од функција: f или H стална, $H = c$ или негативна, имаћемо следеће односе:

$$(f, c) = o, (f, H) = -(f H), (f, -H) = -(f, H).$$

Уз ове односе постоји и овај:

$$\partial \frac{(f, H)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, H\right) + \left(f, \frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

§ 289. — Идентичност Поасонсва. Ако су f, φ и ψ три функције ма какве, зависне од $q_1, q_2 \cdot \cdot q_k, p_1, p_2 \cdot \cdot p_k$ и t, па се образују изрази:

$$f_1 = (\varphi, \psi), \varphi_1 = (\psi, f), \psi_1 = (f, \varphi),$$

имаћемо:

$$(f, f_1) + (\varphi_1, \varphi) + (\psi_1 \psi) = o \cdot \cdot 1).$$

или

$$(f (\varphi, \psi)) + (\varphi, \psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) = o \cdot \cdot 2).$$

Овај се последњи израз зове идентичност Поасонова, и доказ се за њега може наћи у поменутим делима.

§ 290. — *Теорема Поасонова.* Ако су дата два прва интеграла једначина кретања:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(q_1, q_2 \cdot \cdot q_k, p_1, p_2 \cdot \cdot p_k, t) &= a, \\ \psi(q_1, q_2 \cdot \cdot q_k, p_1, p_2 \cdot \cdot p_k, t) &= b, \end{aligned}\right\} \cdot \cdot 1).$$

онда је:

$$(\varphi, \psi) = c \cdot \cdot 2).$$

такође један први интеграл.

За ово је доказ прост. Једначина 1). даје односе:

$$(\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = o, \ (\psi, H) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = o.$$

из којих се односа добија овај:

$$((\varphi, \psi), H) + \frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = o,$$

преко идентичности Поасонове за H, φ, ψ

$$(H, (\varphi, \psi)) + (\varphi (\psi, H)) + (\psi, (H, \varphi)) = o.$$

Из овога би изашло, да је довољно знати два прва интеграла φ, ψ, па горњим комбинацијама наћи остале, што није случај, јер изрази (φ, ψ) доводе или на већ нађене и познате прве интеграле, или на константе.

§ 291. — *Случај* кад H не зависи од времена t. У овом случају канонске једначине имају један интеграл, интеглал живе силе $H = h$, и ако је поред њега дат још један:

$$\varphi (q_1, q_2, \cdot\cdot q_k, p_1, p_2 \cdot\cdot p_k, t) = a$$

по Поасону је дат и интеграл нов:

$$(H, \varphi) = C.$$

Последњи се интеграл, због односа $(\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{dt} = o, \varphi = a$, своди на:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c.$$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c'$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = c''$ и т. д. **су** такође инеграли једначина кретања.

Ако φ не садржи t, имамо за интеграл израз:

$$(\varphi H) = o.$$

§ 292. — *Пример.* Посматрајмо кретање једне слободне тачке, масе 1, привлачене из почетка координантног система силом сразмерном са одстојањем. Ако су x, y, z координате тачке, жива сила T и функција силе U онда су:

$$T = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad U = -\frac{\mu^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Ако обележимо x, y, z са q_1, q_2, q_3, имаћемо:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial x'} = x', \; p_2 = y', p_3 = z';$$

$$H = T - U = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{\mu^2}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Једначине кретања у форми каноничкој су:

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1, \; \frac{dq_2}{dt} = p_2, \; \frac{dq_3}{dt} = p_3,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\mu^2 q_1, \; \frac{dp_2}{dt} = -\mu^2 q_2, \; \frac{dp_3}{dt} = -\mu^2 q_3.$$

I). Два се прва интеграла добијају применом теореме површина на пројекције кретања на две равни. Ови су интеграли:

$$p_3 q_1 - q_3 p_1 = c_2, \quad p_2 q_3 - q_2 p_3 = c_1 \cdot \cdot 1).$$

Ако прве стране једначина под 1). означимо са φ, ψ и применимо израз $(\varphi, \psi) = c_3$, или $\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) = c_3$, имаћемо:

нов интеграл, који је облика

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 = c_3 \cdot \cdot 2).$$

Ови интеграли садрже примену теореме површина на трећу раван. Никаква комбинација из ових интеграла не даје какав нов.

II). Нов је један интеграл, до кога се лако долази из једначина канонских:

$$p_1^2 + \mu^2 q_1^2 = a_1 \cdot \cdot 3).$$

Ако овај последњи интеграл комбинујемо са 2). имаћемо нов интеграл:

$$p_1 p_2 + \mu^2 q_1 q_2 = b_1 \cdot \cdot 4).$$

Из 4 и 2 налазимо нов интеграл:

$$p_2^2 + \mu^2 q_2^2 - (p_1^2 + \mu^2 q_1^2) = c_1',$$

који се због односа 3.) своди на израз:

$$p_2^2 + \mu^2 q_2^2 = a_2 \cdot \cdot 5).$$

Последњи интеграл 5 није нов, јер је он последица интеграла под: 2, 3 и 4, за шта је доказ однос:

$$(p_1^2 + \mu^2 q_1^2)(p_2^2 + \mu^2 q_2^2) = (p_1 p_2 + \mu^2 q_1 q_2)^2 + \mu^2 (q_1 p_2 - p_1 q_2)^2.$$

На овај смо начин нашли пет независних интеграла под 1, 2, 3 и 4. Више их не може бити, јер да их је шест, онда би се из њих нашле вредности за $q_1, q_2, q_3\ p_1, p_2, p_3$ константне.

III). Једначине кретања дају и овакав први интеграл, зависан од времена t:

$$\mu q_3 \cos \mu t - p_3 \sin \mu t = g_3 \cdot \cdot 6).$$

Ако се овај интеграл комбинује са изразима под 1) добићемо још ова два интеграла прва:

$$\left.\begin{aligned} \mu q_1 \cos \mu t - p_1 \sin \mu t = g_1 \\ \mu q_2 \cos \mu t - p_2 \sin \mu t = g_2 \end{aligned}\right\} \cdot \cdot 7).$$

Шест интеграла под 1, 2, 6 и 7 нису различни, јер постоји однос:

$$c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = o,$$

услед чега се своде само на пет интеграла неједнака.

Шести се интеграл може добити преко израза $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = b$, ако је $\varphi = a$ један први интеграл, пошто H не зависи експлицитно од времена t. Због овога из 6 имамо:

$$\mu q_3 \sin \mu t + p_3 \cos \mu t = f_3 \cdot \cdot 8).$$

Из нађених пет интеграла и овога под 8. проблем је решен, нађено је $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ зависно од t.

Ако се из 7). добију интеграли на последњи начин, имаћемо:

$$\left.\begin{aligned} \mu q_1 \sin \mu t + p_1 \cos \mu t = f_1 \\ \mu q_2 \sin \mu t + p_2 \cos \mu t = f_2 \end{aligned}\right\} \cdot \cdot 9).$$

Из 6., 7., 8. и 9. налазимо шест непознатих $(q_1, q_2\ q_3, p_1, p_2, p_3)$ као функције времена t и шест произвољних констаната: $g_1, g_2, g_3, f_1, f_2, f_3$. Решења су облика:

$$\mu x = \mu q_1 = g_1 \cos \mu t + f_1 \sin \mu x, \mu q_2 = \cdots$$

$$x' = p_1 = f_1 \cos \mu t - g_2 \sin \mu t, p_2. = \cdots$$

* * *

ГЛАВА XXV.

Судар и перкусија

I. Перкусија примењена на једну материјалну тачку.

§ 293. — Дешава се, да тачка каквог система нагло промени своје брзине у времену бескрајно малом, не мењајући приметно или јако положај свој, на пр. удар кејом биљарске лопте, пад еластичне лопте на подлогу чврсту и т. д. Овакве се појаве зову сударима и вели се, да кретања подлеже перкусији.

Некада се ове појаве приписивале тренутним силама, данас се оне приписују општим динамичким узроцима и за њих вреде показане теореме у динамици, те су појаве произведене великим силама, чије дејство траје врло кратко време.

§ 294. — *Перкусија примењена на једну материјалну тачку.* Нека на тачку масе m дејствује сила X, Y, Z; једначине су кретења:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Из ових једначина имамо:

$$\begin{aligned} \left(m\frac{dx}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 &= \int_{t_0}^{t_1} X\,dt \\ \left(m\frac{dy}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt \cdot\cdot \text{ I}). \\ \left(m\frac{dz}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt. \end{aligned}$$

Интеграли десне стране зову се импулсима силе. Из I имамо теорему:

Геометријска варијација величине кретања тачке у интервалу t_1—t_0 је једнака импулсу силе, која дејствује на тачку.

Ако су X, Y, Z, у t_1—t_0 мале силе, имамо обична кретања, ако су пак X, Y, Z врло велике количине реда $\frac{1}{t_1 - t_0}$, десне стране I.) имају коначну вредност и брзина има одређену и коначну вредност за време t_1—t_0; и ако је V maximum брзине у интервалу $t_1 - t_0$, померај је тачке мањи од $V(t_1 - t_0)$. Отуда теорема:

Врло велика сила, која дејствује на какву тачку за *кратко време*, производи варијацију коначну на брзини, не померајући осетно положај тачке.

Ако перкусију тачке обележимо вектором P и његове координанте означимо са a, b, c, из I. имамо:

$$a = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt, \quad b = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt, \quad c = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt,$$

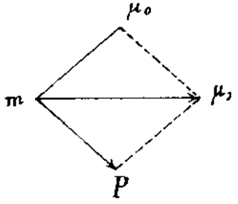
или:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = a \quad m\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = b,$$

$$m\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = c \cdot\cdot \text{ II}).$$

Ако је $m\mu_0$ величина кретања тачке m пре перкусије и $m\mu_1$ после, вектор P

$$(P) = (m\mu_1) - (m\mu_0) \cdot \cdot 1).$$



Сл. 162.

представља перкусију тачке P према једначинама II.

§ 295. — Ако имамо више сила: F' F'' и т. д. које дејствују на једну тачку, једначине су кретања:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X' + X'' + \cdots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y' + Y'' + \cdots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z' + Z'' + \cdots$$

или:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = a' + a'' + a''' + \cdots$$

$$m\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = b' + b'' + b''' + \cdots$$

$$m\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = c' + c'' + c''' + \cdots$$

$$a' = \int_{t_0}^{t_1} X'\,dx, \quad b' = \int_{t_0}^{t_1} Y'\,dt \text{ и т. д.}$$

Из последњих једначина излази: да је варијација величине кретања тачке m таква као да је тачка изложена једној перкусији P, чије су пројекције a, b, c, суме пројекција из a', a'', b', b'', и т. д.

$$a = a' + a'' + a''' \cdots b' = b'' \cdots b'' + c = c' + c'' + \cdots$$

§ 296. — Ако обележимо са $\Delta\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \left(m\frac{dx}{dt}\right) - \left(m\frac{dx}{dt}\right)_0$, варијацију величине кретања у интевалу $t_1 - t_0$; у опште ако обележимо са Δ u варијацију $u_1 - u_0$ и узмемо да само варирају количине $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ит.д. а не и x, y, z једначине се из § 295 могу овако написати:

$$\Delta\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma a, \ \Delta\left(m\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma b, \ \Delta\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma c \cdot\cdot 1).$$

Теорема је: варијација је пројекције величине кретања једне тачке на једну осу једнака суми пројекција перкусија на исту осу

Из 1.) имамо:

$$x\Delta\left(m\frac{dy}{dt}\right) - y\Delta\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma\,(bx - a\,y) \cdot 2).$$

Из 2.) излази теорема:

Варијација је момента величине кретања једне тачке односно ма какве осе једнака суми момената перкусија према тој осовини.

II. Перкусије примењене на систем.

§ 297. — Овде се ради као у динамици система. Све ћемо перкусије поделити на две категорије: унутарње и спољне $(a_i \ b_i \ c_i)$ и $(a_e \ b_e \ c_e)$.

Једначине 1.) § 296 су:

$$\Delta\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\,ai + \Sigma\,ae$$

$$\Delta\left(m\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma\,bi + \Sigma\,be \cdot \cdot 1).$$

$$\Delta\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma\,bi + \Sigma\,be.$$

Ако ово применимо на све тачке, образујемо још једном збирове, изрази ће: $\Sigma\Sigma ai$ бити нула због принципа акције и реакције, који вреди и за перкусије. Из I је онда:

$$\Delta\Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma\Sigma ae$$

$$\Delta\Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma\Sigma be\cdot\ \cdot \text{I}).$$

$$\Delta\Sigma m\frac{dz}{dt}=\Sigma\Sigma ce$$

Из I је теорема:

Варијација суме пројекција количине кретања за ма какву сталну осу је једнака са сумом пројекција спољних перкусија за исту осу.

Из I се, као у динамици система, дâ извести теорема тежишта. Ако су ξ, η, ξ координате тежишта, имамо:

$$\Sigma m\frac{dx}{dt}=M\frac{d\xi}{dt},$$

или:

$$\Delta\left(M\frac{d\xi}{dt}\right)=\Sigma\Sigma ae, \text{ и још две сличне.}$$

Ово даје теорему:

Варијација је величине кретања тежишта као да је сва маса сасређена у тежиту и као да су све перкусије спољне примењене на тежиште, као на једну тачку.

Из I. добијамо ове једначине:

$$\Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma\Sigma(xbe-yae) \text{ и две сличне.}$$

Ово даје теорему:

Варијација је суме момената величине кретања односно једне осе сталне једнака суми момената перкусија спољних односно исте осе.

Ово се примењује и за случај осовине везане са телом, јер су помераји неприметни.

III. Примена општих теорема.

§. 298. — *Директан судар две лопте.* Ако су масе две лопте m и m' и оне се сударе у времену to, њихов је судар директан кад су им брзине у правцу линије CC', што им спаја центре и лопте се не обрћу.

Ако обележимо CC' са ox, и брзине лопти са v_0, v'_0 у времену to кад почиње судар а са v_1, v_1' у времену t_1 кад судар престаје, могу ови случајеви наступити:

a). Од t_0 свере се деформишу и центри им се приближавају а постаје то приближавање највеће у времену t' ($t_0<t'<t_1$). У времену t' настаје појава реакције, која хоће лопте да удали и ове су силе врло велике, њихов је рад негативан и жива сила система опада. Од t' до t_1, кад престаје судар, или кад је додир само у једној тачци и ово је произведено великим силама реакције. Жива сила од t' до t расте, јер је рад реакције позитиван.

Ако се примене теореме о суми пројекција количине кретања на ox имаћемо:

$$mv_1+m'v_1'=mv_0+m'v_0'\cdot\ \cdot 1).$$

Ово се добија, стављајући да брзина V тежишта не варира.

$$V=\frac{mv_0+m'v_0'}{m+m'}=\frac{mv_1+m'v_1'}{m+m'}$$

Да би нашли v_1 и v'_1 морамо поћи од извесних хипотеза:

1). Нека су лопте нееластичне потпуно. Ово је случај, кад лопте и после судара остају у додиру. Кад је:

$$v_1 = v_1'$$

Из 1) је:

$$v_1 = v_1' = \frac{mv_0 + m' v'_0}{m + m'} = V \quad \cdot \cdot 2).$$

Овде се моменат t' поклапа са t_1, имамо губитак на живој сили и он је:

$$mv_0^2 + m' v'^2_0 - mv_1^2 - m' v'^2_1 = \frac{m m'}{m + m'} (v - v'_0)^2 \quad 3).$$

Овај се губитак јавља у облику топлоте итд.

2). Тела могу бити потпуно еластична. Овде нема губитка живе силе и нова је релација:

$$mv_1^2 + m' v'^2_1 = mv_0^2 + m' v'^2_0 \cdot \cdot \cdot 4)$$

Из 1) и 4) је:

$$m (v_1 - v_0) = m' (v_0' - v_1')$$
$$m (v_1^2 - v_0^2) = m' (v_0'^2 - v_1'^2)$$

или:

$$v_1 - v_1' = v_0' - v_0.$$

Ово казује, да брзина релативна две свере није варирала услед судара, већ само знак променила.

Ставимо:

$$v_1 = v_1' + \alpha, \quad v_1' = v_0 + \alpha, \quad \alpha = \frac{m - m'}{m + m'} (v_0 - v'_0).$$

3). Нека је тело непотпуно еластично (Newton). Овде је:

$$v_1 - v_1' = k (v'_0 - v_0), \quad 0 \leqq k \leqq 1$$

Поред једначине:

$$mv_1 + m' v_1' = mv_0 + m' v_0'$$

постоји и ова:

$$(1 - k^2) \frac{mm^1}{m + m'} (v_0 - v'_0)^2,$$

која даје губитак живе силе.

§ 299. — *Перкусија* примењена на систем, што се обрће око осовине $0Z$.

Ако осовину утврдимо у две тачке 0 и 0_1, и перкусије у времену t_0 обележимо са $P_1, P_2 \cdot \cdot P_n$, угаона брзина ω нагло прелази из ω_0 у ω_1. Нека су $x_v\, y_v\, z_v$ координате тачке на коју дејствује перкусија P_v $(a_v\, b_v\, c_v)$. Тело врши перкусије на $0\, 0_1$ а тачке 0 и 0_1 реагирају на тело перкусијама непознатим P и P^1, пројекција abc и $a'\, b'\, c'$. Ако са Mk^2 обележимо моменат лењивости тела односно $0Z$, $Mk^2\omega$ је сума момената величине кретања односно $0Z$. Применом теореме о моментима величине кретања имамо:

$$Mk^2\, \Delta\omega = \sum_v (x_v\, b_v - y_v\, a_v) \cdot \cdot 1)$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$$

Ако применимо теорему горњу на осу $0x$ и $0y$ имаћемо:

$$\Delta \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum_v (y_v\, c_v - z_v\, b_v) - hb'$$

$$\Delta \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \sum_v (z_v\, a_v - x_v\, c_v) + ha'$$

$$\varDelta\,\Sigma m\frac{dx}{dt}=\sum_{v}a_{v}+a+a'$$

$$\varDelta\,\Sigma m\frac{dy}{dt}=\sum_{v}b_{v}+b+b'$$

$$\varDelta\,\Sigma m\frac{dz}{dt}=\sum_{v}c_{v}+c+c'$$

h је $z^{ eka}$ коор. за $0'$.

$$\frac{dx}{dt}=-\omega y,\ \frac{dy}{dx}=\omega x,\ \frac{dz}{dx}=0.$$

Кад се ово смени у горњим једначинама, имаћемо:

$$-(\Sigma mxz)\,\varDelta\omega=\sum_{v}(y_{v}\,c_{v}-z_{v}\,b_{v})-hb'$$

$$-(\Sigma myz)\,\varDelta\omega=\sum_{v}(z_{v}\,a_{v}-x_{v}\,c_{v})+ha'$$

$$-(\Sigma my)\ \ \varDelta\omega=\sum_{v}a_{v}+a+a'\cdot\ \cdot\ \cdot 2)$$

$$(\Sigma mx)\,\varDelta\bar{\omega}=\Sigma b_{v}+b+b',$$

$$0=\sum_{v}(c_{v}+c+c'.$$

Из ових једначина можемо наћи: b', b, a и a' и само $c+c'$, $\varDelta\omega$ је одређено из 1).

§ 300. — Ако имамо само једну перкусију P_1 $(a_1\,b_1\,c_1)$, потражимо, да ли је могуће удесити да 0 и $0'$ не подлеже перкусији, да је $a=b=c==a'=b'=c'=0$?

Кад се ово унесе у последњу једначину 2) § 299. имамо:

$$c_1=0,$$

P_1 мора бити нормално на оси $0Z$ (оси ротације). Нека је сад раван $0_1\ x'\ y'$ раван xy., и нека P_1 лежи у $0_1\ x'\ y'$.

0_1x_1 нека је нормално на P_1 онда је:

$$a_1=0,\quad b_1\neq 0,\quad c_1=0,\quad z_1=0,$$

Из 2) § 299. је:

$$\Sigma mxz'=0,\ \ \Sigma myz'=0,\ \ \Sigma my=0,\ \ \varDelta\omega\,\Sigma mx=b_1\cdot\cdot 1)$$

$$Mk^2\,\varDelta\omega=x_1\,b_1.$$

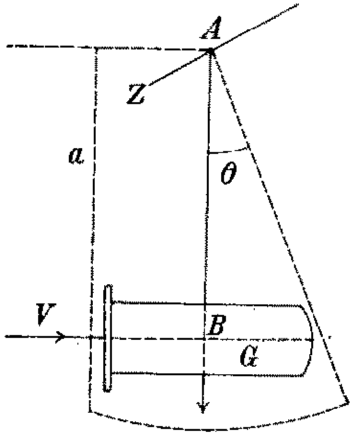
Прве две из 1) траже, да је $0Z$ главна оса лењивости за 0_1; трећа, да је тежиште у равни $Z0_1x'$; четврта, да је $x_1=\frac{k^2}{\xi}$.

Из овога је јасно, ако се $0Z$ узме за осу вешања тела, и $0Z$ је главна оса лењивости за једну тачку 0, перкусија мора бити у нормалној равни на $0Z$, нормално на раван $G0_1Z$ и нападна јој је тачка у A_1, пројекције 0_1, за коју је тачку 0_1 $0Z$ главна оса лењивости.

A_1 се зове центар перкусије односно $0Z$.

§ 301. — *Балистичко клатно.* Овим се апаратом мери брзина пројектила. Ова се справа састоји из цилиндра B напуњеног земљом. Цилиндар је B обешен о концу у тачци A око које се може обртати. Кад пројектил уђе у цилиндар он се заустави у извесној тачци. Из угла θ скретања клатна можемо наћи брзину пројектила.

Нека је m маса пројектила, v његова брзина и a одстојање ове брзине од тачке A у случају судара. Нека је Mk^2 моменат лењивости клатна односно осе Az и l одстојање тежишта G од A.



Сл. 163.

Применом теореме о моментима величине кретања система, сложеног из клатна и пројектила, имаћемо, пошто је mva моменат величине кретања пројектила пре судара, $Mk^2\omega_1 + ma^2\omega_1$ моменат после судара система (ω_1 је угаона брзина клатна):

$$mva = Mk^2\omega_1 + ma^2\omega_1,$$

$$v = \frac{Mk^2 + ma^2}{ma}\,\omega_1.$$

Кад се пређе из положаја вертикалног AB у положај где је θ maximum, жива сила је била у почетку:

$$(Mk^2 + ma^2)\,\omega_1^{\,2}, \text{ а за тим нула.}$$

Рад је система — $(Mgl + mga)\,(1 - \cos\theta)$ и теорема живе силе даје:

$$(Mk^2 + ma^2)\,\omega_1^{\,2} = 2\,(Mgl + mga)\,(1 - \cos\theta),$$

или:

$$\omega_1 = 2\sin{}^{\theta}/_{2}\sqrt{\frac{g\,(Ml + ma)}{Mk^2 + m^2}},$$

$$v = \frac{2}{ma}\sqrt{g\,(Ml + ma)\,(Mk^2 + ml^2)}\cdot\sin{}^{\theta}/_{2}$$

Ако се пројектил тако убаци, да оса не трпи перкусије, ако је зрно дошло до тачке на оси AB:

$$al = k^2,$$

онда је брзина:

$$v = 2\,\frac{(Ml + ma)}{m}\sqrt{{}^{g}/_{a}}\,\sin{}^{\theta}/_{2}$$

§ 302. — *Обртање тела око једне тачке сталне 0.* Нека се у времену t_0 примене перкусије $P_1, P_2 \cdot P_n$ оне мењају у $t_1 - t_0$ брзине разних тачака тела. Овим се перкусијама спољним придружује перкусија Po од отпора из тачке 0.

Нека су $0xyz$ главне осе лењивости, оне се могу сматрати за сталне за трајања перкусије. Нека су A, B, C моменти лењивости тела, $p_0\, q_0\, r_0$ компоненте ротације тренутне пре и $p_1\, q_1\, r_1$ после перкусије; нека су L, M, N суме момената датих перкусија односно $0xyz$.

Моменат перкусије P је нула, и онда је:

$$A\,(p_1 - p_0) = L,\quad B\,(q_1 - q_0) = M,\quad C\,(r_1 - r_0) = N$$

Одавде се налази p_1, q_1, r_1.

Пример. Нека је само једна перкусија $P(abc)$ Ако су:

$$L = yc - zb,\quad M = za - xc,\quad N = xb - ya,$$

$p_0 = q_0 = r_0 = 0$, имаћемо:

$$p_1 = \frac{L}{A},\quad q_1 = \frac{M}{B},\quad r_1 = \frac{N}{C}.$$

Из ових је једначина јасно, да је оса ротације ω_1 коњуговани пречник односно елипсоида инерције, за раван одређену са 0 и перкусијом.

Та је раван:

$$Lx + My + Nz = 0,$$

коњуговани је пречник ове равни у елипсоиду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

$$\frac{Ax}{L} = \frac{By}{M} = \frac{Cz}{N} \text{ тј. } \frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1}.$$

Ово последње је једначина осе ω_1.

§. 303. — *Слободно тело.* Нека на слободно тело у кретању, у тренутку t_0, дејствују перкусије

$P_1\ P_2 \cdots P_2$ за време $t_1 - t_v$ врло мало. Брзине тела се промене нагло и њих ваља наћи.

Ако су $\xi', \eta'\ \xi'$ компоненте брзине тежишта и p, q, r компоненте ротације, прво за систем $0\xi\eta\xi$ (стални), а друго за $0xyz$ (осе лењивости); $a_v\ b_v\ c_v$ нека су пројекције P_v на $0\xi\eta\xi$, по теореми о пројекцији количине кретања имамо:

$$M(\xi_1' - \xi_0') = \Sigma a_v,\ \ M(\eta_0' - \eta_0') = \Sigma b_v,$$
$$M(\xi_1' - \xi_0') = \Sigma c_v.$$

Како су $L_v\, M_v\, N_v$ моменти перкусије односно $0xyz$ имаћемо:

$$A(p_1 - p_0) = \Sigma L_v,\ B(q_1 - q_0) = \Sigma M_v,$$
$$C(r_1 - r_0) = \Sigma N_v.$$

Из ових 6 једначина имамо: $\xi_1'\ \eta_1'\ \xi'$ и $p_1\ q_1\ r_1$.

Проблеми перкусије доводе до решавања алгебарских једначина.

IV. Општа једначина теорије перкусије и теорема Карпотова.

§. 304. — Нека су $x\,y\,z$ координате једне тачке чија је маса m; $x'\,y'\,z'$ су изводи x, y, z по t, т. ј. пројекције брзине. Ако су v_0 и v_1 брзине за t_0 и t_1, постоји услед перкусије израз:

$$(w) = (v_0) - (v_1)$$

вектор (w) се зове изгубљена брзина.

Нека су $x_0'\,y_0'\,z_0'$ и $x_1'\,y_1'\,z_1'$ пројекције v_0 и v_1, пројекције су од (w)

$$x_0' - x_1',\quad y_0' - y_1',\quad z_0' - z_1'$$

mw је количина кретања изгубљеног, његове су пројекције:

$$m(x_0' - x_1') \text{ и т. д.}$$

или:

$$-\Delta(mx'),\ -\Delta(my'),\ -\Delta(mz').$$

Вектор mw овде игра улогу силе инерције по ***D'Alembert**-овом* принципу.

Једначине, по теореми пројекција количине кретања, су:

$$\begin{aligned} -\Delta(mx') + \Sigma a &= 0 \\ -\Delta(my') + \Sigma b &= 0 \cdot\ \cdot 1). \\ -\Delta(mz') + \Sigma c &= 0. \end{aligned}$$

Ако се на 1) примене теореме о виртуелним радовима, имамо из 1).

$$-\Delta(mx')\,\delta x - \Delta(my')\,\delta y - \Delta(mz')\,\delta z +$$
$$+ \Sigma(a\delta x + b\delta y + c\delta z) = 0.$$

Ако се ово примени на систем тачака, не водећи рачуна о трењу имаћемо:

$$\Sigma[-\Delta(mx')\,\delta x - \Delta(my')\,\delta y - \Delta(mz')\,\delta z + a\,\delta x +$$
$$+ b\delta y + c\delta z] = o \cdot\ \cdot 2)$$

Из ове се једначине добија толико једначина колико услова има за кретање у интервалу $t_1 - t_0$.

Код ових једначина ваља водити рачуна о томе, да ли услови кретања пре судара остају и после, или се мењају.

§ 305. — Ако услови пре судара и нарочито уведене везе постоје и после судара, а дате су перкусије нула, то је $a = b = c = o$ и из 2.) прошлог § имамо однос:

$$\Sigma[\Delta(mx')\,\delta x + \Delta(my')\,\delta y + \Delta(mz')\,\delta z] = o \cdot\ \cdot 1).$$

Овим је изразом исказана теорема Карнотова: Ако су услови пређашњи и нагло уведени услови остали и после судара, изгубљена је жива сила једнака живој сили, коју би систем имао, кад би свака тачка имала брзину изгубљену.

Из 1.) је јасно, да је та једначина, задовољена за виртуелна померања, сагласна са условима у тренутку перкусије, али како су ти услови и после перкусије остали исти, виртуелна се померања поклапају са реалним и:

$$\delta x = x_1'\,dt,\ \delta y = y_1'\,dt\ \ \delta z = z_1'\,dt$$

Из 1 је онда:

$$\Sigma\,[\Delta\,(mx')\,x_1' + \Delta\,(my')\,y_1' + \Delta\,(mz')\,z_1'] = o \cdot\ \cdot 2).$$

или:

$$\Sigma\,[m\,[(x_1' - x'_0)\,x_1' + \cdot\ \cdot\,] = o.$$

$$v_0^{\,2} = x_0'^{\,2} + y_0'^{\,2} + z_0'^{\,2},$$

$$v_1^{\,2} = x_1'^{\,2} + y_1'^{\,2} + z_1'^{\,2},$$

$$w^2 = (x_0' - x_1')^2 + (y_0' - y_1')^2 + (z_0' - z_1')^2.$$

v_0 је брзвна пре, v_1 после судара; w је изгубљена брзина.

Из 2.) је:

$$\Sigma\,mv_0^{\,2} - \Sigma\,mv_1^{\,2} = \Sigma\,mw^2\,(Carnot). \cdot\ \cdot \mathrm{I}).$$

§ 306. — *Употреба Лагранжовиx једначина.* Нека је систем одређен са k параметара $q_1\,q_2 \cdot q_k$. За време t_0 уведимо нове услове, кретање је поремећено и за време $t_1 - t_0$ брзине се знатно промене, а положаји не. Промене су брзина:

$$(q'_1)_0 - (q_1')_1 \cdot\ \cdot (q_k')_0 - (q_k')_1$$

Нека су нови услови без трења, и они могу бити темпоререрни или стални, ишчезнути или остати после перкусије, а првобитни услови нека су стални, нека остану такви и после перкусије.

$q_1, q_2, \cdots q_k$ се тако могу изабрати, да су нови услови, нагло уведени и који производе судар, одређени из

$$q_{n+1} = o,\quad q_{n+2} = o\ \cdot\ \cdot q_k = o.$$

$$n < k.$$

Услови се нови одређују из једначина:

$$\varphi_1\,(q_1 \cdot\ \cdot q_k) = o$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\varphi_{k-n}\,[q_1 \cdot\cdot q_k) = o$$

Ако се за нове параметре узму на место $q_{n+1} \cdot q_k$ ове количине:

$$r_{n+1} = \varphi_1\,(q_1 \cdot\cdot q_k)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$r_k = \varphi_{k-n}\,(q_1\,q_2 \cdot\cdot q_k)$$

нови су услови веза изражени једначинама:

$$r_{n+1} = o,\quad r_{n+2} = o \cdot\cdot r_k = o.$$

Ако су услови веза темпоререрни $q_{n+1}, \cdot\cdot q_k$ после судара нису нула, а нула су за услове перманентне.

За виртуелна померања, сагласна условима пре судара, за $q_1 \cdot\cdot q_k$ ваља узети $\delta q_1 \cdot\cdot \delta q_k$, али да је померај сагласан са условима уведеним мора бити:

$$\delta q_{n+1} = o \cdot\cdot \delta q_k = o.$$

Једначине су кретања за време $t_1 - t_0$:

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i = \sum_{i=1}^{i=k} Q_i\,\delta q_i \cdot\cdot 1).$$

Ако су δq_i произвољни, други члан, који представља суму виртуелних радова сила, обухвата и радове сила из ново уведених услова. Ове се силе елиминишу из посматрања виртуелног померања сагласног са свима условима, који вреде за време перкусија, за $\delta q_1 \cdot \cdot \delta q_k$ произвољно а $\delta q_{n+1} \cdot \cdot \delta q_k$ нула.

Из 1). имамо онда ових n једначина:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i, \quad i = 1, 2. 3 \cdot \cdot n \quad 2).$$

Овде нема сила из нових услова. Из 2). кад се обе стране помноже са dt и интегралимо, имамо ове једначине:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)_0 = o, \quad i = 1, 2, 3 \cdot \cdot n \quad 3).$$

јер су радови у Q_i од теже нула за $t_1 - t_0$ и $dt \frac{\partial T}{\partial q_i}$ нуле, јер је интервал $t_1 - t_0$ врло мали.

Једначине 3 су хомогене односно k разлика:

$$(q_1')_1 - (q_1')_0 \cdot \cdot (q_k')_1 - (q_k')_0.$$

$q_1\, q_2 \cdot \cdot q_k$ имају вредности што одговарају вредностима у тренутку перкусије, тако да су $q_{n+1}\, q_{n+2} \cdot \cdot q_k$ нуле, $q'_{n+1}\, q'_{n+2} \cdot \cdot q'_k$ нису нуле, ни пре ни после перкусије, нуле су само после перкусије за случај кад су уведени услови стални, јер је онда и $q_{n+1} = q_{n+2} \cdots = q_k = o$. У овоме случају n једначина 3.) дају:

$$(q_1')_1, (q_2')_1, \cdots (q_k')_1$$

што одређује стање брзина после судара потпуно. Ван овога случаја из 3) имамо само n једначина за k непознатих $(q_1')_1, (q_2')_1 \cdot \cdot (q'_k)_1$ и за потпуно решење проблема треба увести нарочите хипотезе за појаве после судара.

Једначине се n Лагранжове, изражене са 3) могу овако изразити:

Изводи T по изводима параметра оних, који нису нуле у тренутку судара, имају исте вредности пре и после судара.

§ 307. — *Пример. Судар директни дее лопте.* Нека су R_1 и R_2 полупречници лопти, m_1, m_2 масе, центри се крећу по $0x$ транслаторно. Нека су x_1, x_2 апсцисе центара, положај зависи од x_1, x_2. У тренутку судара нови је услов нагло уведен:

$$x_2 - x_1 - R_1 - R_2 = o.$$

Узмимо за q_1 и q_2 изразе

$$q_1 = x_1,\ q_2 = x_2 - x_1 - R_1 - R_2.$$

Услов је нов изражен са $q_2 = o$. Жива је сила:

$$T = {}^1/_2\,(m_1 x_1'^2 + m_2 x_2'^2) = {}^1/_2\,[m_1 q_1'^2 + m_2 (q_1' + q_2')^2].$$

Теорема 3). § 306. даје: $\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)_0 \cdot \cdot 1).$

q_1 није нула у тренутку почетка судара, док је q_2 нула. Из 1). је:

$$m_1 [(q_1')_1 - (q_1')_0] + m_2 [(q_1')_1 + (q_2')_1 - (q_1')_0 - (q_2')_0] = o.$$

Ова једначина изражава: да пројекција количине кретања на $0x$ није варирала. Да би нашли $(q_1')_1$ и $(q_2')_1$ ваља усвојити раније показане хипотезе код судара две лопте.

* * *

ЛИТЕРАТУРА

Routh — The treatise of the Dynamics of a systeme of rigids bodies.

Darboux — Etude géometrique sur les percussions et le choc des corps — Billetin de Sciences mathématiques — 1880.

Carrigore — Lagrange — Observation sur le mouvement et le choc des systèmes invariables

Poinsot — Questions dynamiques sur la percussion des corps.

ГЛАВА XXVI.

Основи теорије о машинама.

§ 308. — Машинама је задатак трансформисање (претварање) једне врсте рада у други.

Свака се машина састоји из три главна дела, који су:

1). Рецептор, који прима рад од моторних сила,

2). Део (outil) који издаје користан рад,

3). Трансмисија (пренашање) кретања.

Брзина дела машине, који издаје рад, има своју одређену вредонст, која је својствена органима машине, и та се брзина зове брзина режима. Ова је брзина позната.

§ 309. — *Примена* теореме о живој сили код машина. Ако је каква машина у раду од времена t_0 до t, за време $t—t_0$ моторне силе дејствују и произведу рад T_m, који се зове моторни рад; отпор и делови машине који издају рад дају негативни рад — Tu; трење, трепидације (пасивне ресистенције) производе такође негативан рад — T_p. Апсолутна вредност рада T_u зове се користан рад, T_r рад пасивни и однос је међу овим врстама рада:

$$T_u + T_p = T_r$$

T_r се зове отпорни рад. T_p се може смањити али не и уништити

Ако је v_0 брзина једног молекила машине у t_0 а v у t, теорема о живој сили даје:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^{\,2}}{2} = T_m - T_u - T_p = T_m - T_r \cdot \cdot \text{I)}.$$

Последице су из I ове:

1°. Ако машина полази из мировања и ради до времена t_1, кад јој је брзина v_1, из I имамо:

$$\Sigma \frac{mv_1^{\,2}}{2} = T'_m - T_u' - T_p',$$

или:

$$\Sigma \frac{mv_1^{\,2}}{2} < T'_m - T_u' \cdot \cdot \text{II)}.$$

T' су радови извршени у времену t_1.

Разлика између моторног и корисног рада је већа од половине живе силе, коју има машина.

2°. Половина живе силе, коју има машина у времену t_1, мора се сматрати као сила, која може дати кретање у следећем тренутку. Ако се примени теорема о живој сили за време од t_1 до t $(t > t_1)$ имаћемо:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_1^{\,2}}{2} = T_m - T_u - T_p,$$

или:

$$T_u = T_m + \Sigma \frac{mv_1^{\,2}}{2} - \left(T_p + \Sigma \frac{mv^2}{2}\right) \cdot \cdot \text{II)}.$$

Овде је случај, као да машина полази од мировања. Из II је јасно, да је $T_u < T_m + \Sigma \frac{mv_1^{\,2}}{2}$ и како се $\Sigma \frac{mv_1^{\,2}}{2}$ троши на накнађивање само једног дела моторног рада, увек је $T_v < T_m$ и ово показује немогућност перпетума мобиле.

3). Половина живе силе у времену t $(t < t_1)$ ваља се сматрати као отпоран рад, јер се у II $\Sigma \frac{mv^2}{2}$ додаје раду T_p. Ако се сад у t заустави машина ова се жива сила неће појавити као сила у следећим тренуцима, и представља губитак на моторном раду. Може се мотор зауставити а машина пуштити да се слободно креће под упливом живе силе $\Sigma \frac{mv^2}{2}$, која је незнатан део утрошеног рада.

4). Из I имамо:

$$d\Sigma \frac{mv^2}{2} = T_{em} - T_{er} \cdot \cdot \text{III)}.$$

(T_{em} је елементаран рад).

Из III имамо, да живи сила машине расте или опада од извесног момента, према томе да ли је елементарни рад моторски већи или мањи од елементарног отпорног рада.

Ако је рад елементарни моторски једнак раду отпорном, у том тренутку жива сила пролази кроз максимум или минимум.

§ 310. Свака је машина обично систем одређен једном координатом θ, што је угао за који се обрне ручица трансмисије машине. Ми ћемо са ω обележити угаону брзину, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

За одредбу живе силе ваља знати да има два дела важна у свакој машини:

1). Делови, који се обрћу сразмерно брзини ω; њихове су живе силе сразмерне са ω^2 и половина је њихове живе силе облика:

$A\omega^2$ (A је позитивна константа).

2). Има делова што осцилују и делова што се обрћу угаоном брзином, чији однос према ω зависи од θ.

Ако су x, y, z координате једног таквог дела, оне су периодичке функције θ.

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta), \quad z = \chi(\theta).$$

Компоненте су брзина:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(\theta)\,\omega, \quad \frac{dy}{d\theta} = \psi'(\theta)\,\omega, \quad \frac{dz}{dt} = \chi'(\theta)\,\omega,$$

и половина је њихове живе силе:

$$\frac{mv^2}{2} = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2)\,\omega^2 = f(\theta)\,\omega^2.$$

Тотална је жива сила:

$$[A + f(\theta)]\,\omega^2, \quad f(\theta) < A.$$

§ 311. — *Кретање машина.* Код сваке машине има три периоде:

1). Стављање у покрет.

2). Нормално кретање.

3). Периода заустављања.

За стављање у покрет, жива сила иде од нуле, расте, елементарни моторни рад мора бити већи од T_{er}. Обрнуто је у периоди заустављања.

Нормално кретање. Идеално је стање нормалног кретања да се машина креће униформно са брзином режима. Ако су t_0 и t два момента нормалне периоде, за сваку тачку мора да је $v = v_0$

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{mv_0^2}{2}, \text{ или из I).}$$

$$T_m = T_r = T_u + T_p \cdot \cdot 1).$$

Ово је немогуће остварити са свим, ово се постиже у неколико воланима (замајни точак).

---

§ 312. — *Узроци неправилности* у периоди нормалног кретања. Главни су узроци неправилности:

1). Делови машине, који се алтернативно крећу,

2). Неједнакост у јачини моторне силе, која је неизменична и периодична;

3). Неједнакост у отпорном корисном раду, који обично није константан већ периодичан.

Ако је Ω брзина режима, а ω угаона брзина, није могуће постићи: $\omega = \Omega = const.$ За $\theta = 2\pi$, ω, односно Ω добијају једнаке периодичке вредности и због тога се каже да машина описује циклус. У свакоме тренутку немамо једначину: $T_m = T_r$. Кад прође један циклус, брзине постану исте, варијација је живе силе нула и добија се једначина:

$$T_m^c = T_r^c = T_u^c + T_p^c.$$

T^c_m је моторни рад за време једнога циклуса.

Однос:

$$\frac{T_u^c}{T_m^c} = 1 - \frac{T_p^c}{T_m^c} \cdot \cdot \text{I}).$$

зове се користан коефицијенат (rendement) машине и он је увек мањи од 1, јер није могуће учинити $T_p^c = o$.

Коефицијенат регуларизације. ω постаје после једнога циклуса исто. Ако је за то време ω_1 највећа а ω_2 најмања вредност ω, узима се да је брзина режима за време од једног цикла $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$,

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \Omega$$

За правилно кретање мора да је

$$^1/_n = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega} \text{ минимум, или:}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\Omega}{n}$$

$^1/_n$ се зове коефицијенат регуларисања.

Додавањем волана *n*—у се даје одређена вредност и постиже толико *n* колико се хоће. У колико је *n* веће, у толико је кретање правилније.

§ 313. — *Израз за рад.* У нормалноме кретању моторне и отпорне силе зависе од положаја и брзина нападних својих тачака. Обично се узима да оне зависе само од положаја нападних тачака, од θ и сума је њихових радова онда:

$$T_\theta = g(\theta)\, d\theta.$$

Једначина је живих сила:

$$\frac{1}{2}\, d\, [A + f(\theta)]\, \omega^2 = g(\theta)\, d\theta \cdot \cdot \text{ I).}$$

Интегрисањем од o до θ имаћемо:

$$[A + f(\theta)]\, \omega^2 - [A + f(\theta)]\, \omega_0^2 = 2\int_o^\theta g(\theta)\, d\theta = 2T_\theta \cdot \cdot \text{ II).}$$

T_θ као и $f(\theta)$ су периодичке функције од θ и периода им је 2π.

Положаји машине, за које је жива сила *max.* или *minim.* су положаји равнотежни, у којима се не би машине задржале, кад би биле доведене брзином нула и силама које имају вредности као у нормалном кретању.

Из II је за случај $f(\theta) = o$

$$A\omega^2 = A\omega_0^2 + 2T_\theta.$$

Ако су T_1 и T_2 *max.* и *min.* од T_θ за θ од 0 до 2π, а ω_1 и ω_2 одговарајуће вредности ω, то је:

$$A\omega_1^2 = A\omega_0^2 + 2T_1,\ A\omega_2^2 = A\omega_0^2 + 2T_2,$$

или:

$$A(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2) = 2(T_1 - T_2).$$

Ако се овде стави $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\Omega}{n}$, имаћемо:

$$A = \frac{n}{\Omega^2}(T_1 - T_2) \cdot \cdot \text{ III).}$$

§ 314. — *Волани* Овако се зову они велики точкови на машинама чији је моменат лењивости J, односно осе њихове обртне, врло велики.

Они се додају за регулисање нормалног кретања машине.

Са воланом је жива сила машине:

$$(A + J)\, \omega^2.$$

Ако се ово замени у III § 313 имаћемо:

$$A + J = \frac{n}{\Omega^2}(T_1 - T_2).$$

Ако је n дато, волан се гради по једначини:

$$J = \frac{n}{\Omega^2}(T_1 - T_2) \cdot \cdot \text{ 1).}$$

Ако се узме у рачун само маса на периферији точка, моменат је инерције волана:

$$\frac{P}{g} R^2$$

P тежина обода волана, g убрзање од теже, R полупречник точка

Кад се ово стави у 1). имаћемо:

$$\frac{P}{g} R^2 = \frac{n}{\Omega^2}(T_1 - T_2) \cdot \cdot \text{ 2).}$$

$R\Omega = V$ је брзина једне тачке периферије и из 2). имамо:

$$PV^2 = ng\,(T_1 - T_2)\ (Poncelet) \cdot\ \cdot \text{I}.$$

P тежина круга (точка).

I се може и овако написати:

$$P = \frac{ng}{V^2}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_u^c}\right) T_r^c$$

$\frac{T_1 - T_2}{T_u^c}$ је број. Остали се делови овако одређују. Ако машина каква има $Nkc.$ (коњских снага) и чији волан чини N обрта у минуту,

$$V = \frac{2a\,RN}{60}.$$

је брзина једне тачке периферије волана.

За једну минуту (N обрта) користан је рад NT_u^c килограмо-метра; машина од 1 kc даје 75 kgm корисног рада у 1'', а наша даје

$$\frac{NT_u^c}{60}\,km.\ у\ 1''\ и\ \frac{NT_u^c}{60 \cdot 75}\ kc.$$

или:

$$P = \frac{ng}{V^2}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_u^c}\right)\frac{60 \cdot 75}{N}\ Nkc. \cdot\ \cdot \text{II}).$$

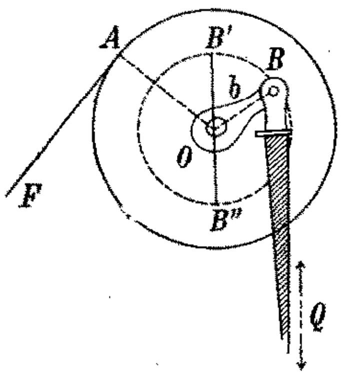
Код сваке машине ваља одредити само број $\frac{T_1 - T_2}{T_u^c}$.

§ 315. — *Пример.* Ако је осовина точка A што се обрће у 0 хоризонтална, разни отпори константни се могу заменити силом F, тангентном на кругу, полупречника $0A = a$. Моторни рад дејствује на QB, а ово обрће точак око осовине кроз 0. Нека је напор полуге $0B$ сталан и нека се креће паралелно извесном правцу, а точак се B обрће у правцу сатне казаљке.

По начину на који се преноси моторни рад имамо више случајева.

1). Машина са простим ефектом. Ово је случај кад моторна сила дејствује у истоме правцу, овде се дејство мотора врши за полу обрт од B' до B''. Потражимо однос између Q и F за периодичко кретање.

За потпун обрт точка брзина B долази у исте вредности. За кретање на ниже Q даје рад $2Qb$ и не дејствују више, сила F производи рад негативан $F = 2\pi a$ и једначина је:



Сл. 165.

$$2\,Qb = 2\pi\,Fa \cdot\ \cdot 1).$$

Ако је 1). задовољено и са θ обележимо угао $B'0B$, од 0 до θ је рад моторни и отпорни:

$$T_\theta = bQ\,(1 - \cos\theta) - Fa\theta = Fa\,[\pi\,(1 - \cos\theta) - \theta] \cdot\cdot 2).$$

T_θ је рад што одговара углу $\theta < \pi$.

Кад θ прође π, Q не ради и T_θ је од момента кад је θ било нула:

$$T_\theta = Fa\,(2\pi - \theta).$$

Maxim. и min. се добијају из једначине $\frac{\partial T_\theta}{\partial\theta} = o$, те су вредности дате једначине:

$$\sin\theta = {}^1/_\pi.$$

Корени су ове једначине:

$$\theta_2 = 0,1031\,\pi = 18^\circ\,33',6$$

$$\theta_1 = 0,8969\,\pi = 161^\circ\,26',4$$

θ_2 даје min. T_2, θ_1 max. T_1.

Кад B дође из B'' у B' једино остају отпорне силе, рад стално опада, за потпун обрт T_1 је maxim. T_2 minim. рада.

$$T_1 - T_2 = Fa\,(2\pi \cos\theta_2 + 2\theta_2 - \pi) = 2\pi a\, F_1\, 0 \cdot 5517,$$

пошто је $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

Из раније формуле имамо:

$$PV^2 = ng\,[T_1 - T_2) = n \cdot 5,4125.\ 2\pi a\, F \cdot\ \cdot 2).$$

Ако је V познато, налазимо из 2). P. Ако је као раније N број обрта волана у 1', Nkc моторна снага машине у коњским снагама, $\frac{N}{60}$ је број обрта у 1'' и

$2\pi a\, F\, \frac{N}{60}$ је рад отпорни за једну секунду у килограмо-метрима.

Занемарујући пасиван рад, $2\pi a\ F\,\frac{N}{60}$ је израз за користан рад у 1''.

Сила је у коњским снагама (парним):

$$Nkc = 2\pi\, a\, F \frac{N}{60 \cdot 75}$$

и

$$PV^2 = 24300\,\frac{n\,Nkc}{N}.$$

§ 316. — *Ако се* хоће да промени режим у једној машини то се постиже регулаторима. Њима се одржавају у одређеним границама варијације средње брзине једне машине. Регулатори су справе, које аутоматски регулишу потрошен рад, ради одржавања средње брзине на истој вредности (сталној), поред тога, што отпорни и моторни рад могу варирати.

Волани дејствују на осцилације брзине око њене средње вредности, а регулатори, обрнуто, на средњу брзину, коју мењају пертурбације произведене у режиму.

Теорија регулатора и волана чини главни део у теорији машина.

(КРАЈ)

ЛИТЕРАТУРА

J. Poncelet — Cours de Mécanique appliquée aux machines.
Poincaré — Cinématique et mécanismes — 1899.
Bour — Cours de Mécanique et machines — 1898.

ERRATA.

СТРАНА	РЕД	ОДОЗГО	У МЕСТО	ТРЕБА
16	16	»	BMP_1	BA_1P_1
16	27	»	B_1	B
18	4	»	X_2, Y_2, Z	x_2, y_2, z_2
25	11	»	равнини	линији
30	3	»	и не	која
35	2	одоздо	MM_1	MM_0
39	6	одозго	три тачке система	четири тачке систеиа
39	8	»	ABC	$ABCD$
39	11	»	у времену $t_2\,x_2\,y_2\,z$; A је прешло пут чије су пројекције $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$	B у времену $t_2\,x_2\,y_2\,z_2$, AB чије су пројекције $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ прешло је пут извесан.
40	1	»	M	M_1
41	5	»	qr	qz
42	1	»	MW_r	$M'W_r$
42	5	одоздо	$A\omega_1$ и $A\omega_2$	$A_1\omega_1$ и $A_e\omega_r$
42	1	»	$A\omega_2$	$A_e\omega_r$
43	4 и 5	одозго	$A\omega_1$	$A_1\omega_1$
44	12 и 16	»	S_3	S_2
45	8	»	максималном	минималном
46	7	одоздо	y_{21}	y_1, z_1
46	3, 4 и 5	»	$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$	$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$
49	9	одозго	MM_1	MU
50	8	»	AP_1	AP
51	5	»	ове	ових
51	6	»	површине	површина
51	7	»	резултујућа	резултујући
52	12	»	$\frac{dr_1}{dt}$	$\frac{dz_1}{dt}$
55	16	»	$\gamma\,\frac{d\gamma_2}{dt}$ —	$\gamma\,\frac{d\gamma_2}{dt} =$ —

СТРАНА	РЕД	ОДОЗГО	У МЕСТО	ТРЕБА
58	13	»	алгебарских	алгебарском
64	3	одоздо	M	M_0
66	8	одозго	рад не	рад
81	7	»	конуса	коника
83	1 и 5	»	конусу	конику
83	4	одоздо	x' y'	x' y' z'
87	3	одозго	$P = ds$	$PP' = ds$
90	5	»	једначине	једначина
90	10	»	ове једначине	ових једначина
91	8	одоздо	T_{43}	F_4
92	6	»	T_{16}	T_{15}
93	2	одозго	AA_3	AA_r
94	9	»	BA_1	BB_1
94	8	одоздо	$T_{k-1\ k}$	$T_{k+1,\ k}$
100	9	одозго	$ds = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y'}}\,dy$	$ds = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}\,dy$
106	5	»	$X \cdot Y\ Z$	$Xdx,\ Ydy,\ Zdz$
108	6	»	$q\xi,\ g\eta,\ q\xi$	$e\xi,\ e\eta,\ e\xi.$
109	1	»	$\left(\xi\,\frac{d\varphi}{dx} + \cdot\ \cdot\right)$	$\left(\xi\,\frac{d\varphi}{dx} + \cdot\ \cdot\right)\,ds$
116	7	»	$V_x = b +$	$V_x = a +$
116	2	одоздо	δR	$-\ \delta R$
120	1	»	$X\delta x,\ Y\delta y,\ Z\delta z$	$X\delta x\,ds,\ Y\delta y\,ds,\ Z\delta z\,ds.$
123	9	одозго	F се	N се
123	1	одоздо	тела AB	додирне површине тела AB
125	4	одозго	мировању	полазу
131	6	»	$\frac{df}{dt} =$	$\frac{df}{\partial t} +$
134	6	»	Ax	At
139	1	одоздо	$h = \frac{mv_0^2}{2} + z_0$	$h = \frac{v_0^2}{2} + z_0\ g$
144	13	одозго	X	x
146	4	одоздо	$\frac{\mu}{m} = k,$	$\frac{\mu}{m} = k^2$
152	4	»	лопте	лопте једнаке
152	3	»	разних	једнаких
153	10	одозго	$C = o$	$x = o$
156	8	одоздо	v расте са временом	v опада кад расте време
159	10	»	$X = \frac{m\mu}{x^2}$	$X = \frac{m\mu}{x^3}$
159	3	»	$m/2$	$-\ m/2$
163	1	»	φ	ψ
163	6	»	3)	2)
170	7	одозго	z'_0	y'_0
173	14	»	203	363
177	5	одоздо	тачку жижи	тачку P жижи

СТРАНА	РЕД	ОДОЗГО	У МЕСТО	ТРЕБА
179	8	одозго	60^2	60^2
184	1 и 2	одоздо	$\frac{d^2x_1}{dt^2},\ m\,\frac{dy_1^2}{dt^2},\ +f,\ +f$	$\frac{d^2x'}{dt^2}\ m'\,\frac{d^2y'}{dt^2} - f,\ - f$
184	3	»	mm_1	mm'
185	1	одозго	$x_1\ y_1\ z_1$	$x'\ y'\ z'$
191	6 и 8	»	r	2
225	6	»	ds	$d\sigma$

ERRATA.

КОД ОЗНАЧЕЊА У СЛИКАМА

СТРАНА	СЛИКА	У МЕСТО	ТРЕБА
16	3	B_1	B
17	4	B_1	p_1
23	8	o	o'
25	10	X	f
36	19	Y	J
36	19	J	I
41	24	M M_1 W_e	M M' W_e
49	36	0	w'
49	36	w	M
53	38	Ov_2	Ov_r'
91	55	A_1	$A.$
125	74	NA	NAP
177	94	M_1	M_0
198	102	Cn и $\dot{N}\beta$	C и Nb
202	105	$9A$	$0CA$