УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

РАЗВОЈ МАТЕМАТИЧКИХ КОМПЕТЕНЦИЈА – ОД ПЕРЦЕПЦИЈЕ ДО АПСТРАКЦИЈЕ

- МАСТЕР РАД -

Ментор: Проф. Др Милан Божић

Студент: Мирјана Вучићевић
Број индекса: 1055/2010

Београд
Септембар 2012.

Садржај

1. Увод

Рад се састоји од три битна дела: Како деца схватају облике; Математички задаци и схватања ученика. Учионица као основни фактор који подржава или омета високи ниво математичког размишљања и закључивања; Употреба симбола, речи и дијаграма као показатаља усвајања математичког знања: неформални модел

Први део рада говори о томе које критеријуме користе деца узраста од четири до шест година да разликују чланове једне класе облика, односно кругова, квадрата, троуглова и правоугаоника. Овај део има за циљ да сазна да ли постоје докази о тзв. *препрепознајном* нивоу, који се налази пре ван Хејловог Нивоа 1 (визуелизација). Ова студија је осмишљена да се испитају геометријски појмови које су формирала мала деца. Циљ је да се одговори на следећа питања: Које критеријуме користе деца предшколског узраста за разликовање чланова класе (на пример, кругови или троуглови)? Да ли они користе критеријуме на доследан начин? Да ли се садржај, комплексност и стабилност ових критеријума повезани са старости или полом деце?

Други део рада се фокусира на испитивање и илустровање како учионица (уопште радно окружење) може да утиче на ангажовање ученика да решавају математичке задатке који су постављени да подстакну високи ниво математичкоког размишљања и закључивања. У циљу подстицања ученика да се баве математиком, учионица мора постати средина у којој ће ученици бити у стању да се активно укључе у математичке активности. Када се ангажованост ученика успешно одржава на високом нивоу, велики број помоћних фактора је присутан. Пад нивоа ангажовања ученика дешава се на различите начине и из различитих разлога. Четири приказа пружају конкретне илустрације на који који начин ангажовање ученика на високом нивоу когнитивних процеса зависи од учионице, да ли ће се наставити или прекинути.

Трећи део рада приказује резултате студије која се бави стратешким вештинама, схватања геометријских и алгебарских појмова, ученика осмог разреда током њиховог ангажовања на решавању задатака. Сврха студије је провера модела који истиче стратешке вештине представљања као посредника вештина читања, просторне оријентације и представљања задатка у решавању проблема. Студија, изложена у овом раду, указује на потребу за новим моделима учења како би се помогло предавачима у интерпретацији различитих математичких способности. Овим би се омогућило да предавачи долазе до правилних закључака о узроцима математичких успеха, неуспеха и развоја.

2. Како деца схватају облике

Ван Хејлов модел геометријског размишљања је међународно призната теорија која се користи за одређивање нивоа постигнућа ученика у области геометрије. Он такође предлаже начине како да наставници воде своје ученике кроз нивое. Већина истраживања ван Хејловог модела геометријског размишљања односи се на адолесценте, и као таква, не даје много података о развоју мале деце у смислу ван Хејлових нивоима геометријске мисли. Једна студија, „Young Children's Concepts of Shape“, чији су аутори Clements, Swaminathan, Hannibal, Sarama (1999) покушава то да дода литератури.

Процене математчког учења указују на то да ученик основне школе не успева да научи основне геометријске појмове и геометријско решавање проблема. Учење напамет геометријских појмова од стране америчких ученика доводи до тога да они често не препознају компоненте, особине и повезаност између особина. Један принцип наставе за разумевање је да знање треба градити на већ постојећим идејама детета. Истраживани су критеријуми које користе деца предшколског узраста за разликовање чланова једне класе облика од других фигура. Предходне ставке истраживања у вези са геометријским појмовима за децу пружиле су корисне основе, али су такође оставиле празнине које ометају развој наставног плана и унапређење наставе. Три доминантне ставке истраживања су засноване на теоријама Пијажеа, ван Хејла, и когнитивних психолога (Clements & Battista, 1992b).

Према ван Хејловој теорији, напредак ученика кроз нивое размишљања у геометрији одвија се уз помоћ инструкција (van Hiele, 1986). Размишљање се развија из почетног, Гешталт – визуелног нивоа кроз све софистицираније нивое: дескриптивне и аналитичке, апстрактне и релационе, формално дедуктивне и математички ригорозне. На визуелном нивоу, деца препознају облике по изгледу, коришћењем визуелних прототипа, говорећи на пример, да је дата фигура правоугаоник, јер „изгледа као врата“. Деца на овом нивоу не знају особине геометријских фигура. Клемент и Батиста (Clements & Battista, 1992b) предложили су ниво, коју су назвали *препрепознајни*. На овом нивоу, деца могу да издвоје подскуп фигура ослањајући се на визуелне карактеристике и нису у стању да препознају многе уобичајене облике или да праве разлику између фигура у истој класи.

Когнитивни психолози пружили су информације о начинима дечијег сазнавања, нарочито опажајног (Anderson, 1985). Докази фаворизују опцију анализе (препознавање комбинација основних карактеристика) за разлику од шаблона за препознавање као што су слова или фигуре. Таква анализа је несвесна и подељена, чак и ако деца поседују декларативно знање о опаженом објекту (тј., језик заснован на знању и чињеницама о стварима).

Пијажеове студије нису засноване на образовним интересима. У Пијажеовим истраживањима друга важна тема која је проучавана је *Тополошко првенство* *хипотеза.* Ова хипотеза - која каже да се геометријске идеје развијају из тополошких односа (повезаност, ограђеност, непрекидност) до пројективних (праволинијских) и еуклидских односа (углови, паралелност и одстојање), није добла снажну подршку (Clements & Battista, 1992b; Greeslin & Shar, 1979). Чини се да су присутни у раном узрасту одређени еуклидски појмови, на пример, умножавање и препознавање еуклидских особина. Реконструкцијом ових особина из сећања, ротирајући и спајајући облике – ментално обликовање. Тако, у супротности са тврдњама Пијажеа и Инхелдера (Piaget & Inhelder, 1967), чак и предшколска деца треба да су у стању да раде са таквим геометријским идејама. Слично томе, когнитивна психологија није утемељена на образовним интересима.

Насупрот томе, ван Хејлово истраживање је засновано на образовним интересима, али он се није бавио малом децом. У оригиналу теорије (van Hiele, 1986; van Hiele-Geldof, 1984) и у већини даљих истраживања, фокус је био на ученицима у средњој школи и ван ње. Они који су проучавали малу децу подржавали су идеју да је њихово геометријско размишљање у основи „визуелно“, мада то не утиче на разноврсност њихових одговора. Клемент и Батиста (Clements & Battista, 1992b) тврде да је комбинација три перспективе неопходна, пошто ван Хејлова теорија не описује адекватно схватања мале деце. Два важна питања су: да ли степен геометријског размишљања постоји пре визуелног нивоа и какав је начин размишљања на раном нивоу. Такво истраживање је потребно да се препознају специфичне, оригиналне идеје које мала деца развијају око геометријских фигура.

2.1. Методи

Учесници. Учесници у истраживању су била деца претежно средњих разреда, њих 97, 48 дечака и 49 девојчица, из две предшколске установе и основне школе. Деца су узраста од 3.5 године (тј. 3 године и 6 месеци) до 6.9 година и били су подељени у три групе према узрасту. Деца млађа од 4,5 године, у време студија, су груписани као четворогодишњаци (n=25); деце између 4.5 и 5.5 су груписани као петогодишњаци (n=30); и они изнад 5.5 су груписани као шестогодишњаци (n=42).

Интервју. Подаци су прикупљени првенствено кроз интервјуе један-на-један током прве половине првог полугодишта. Фокус разговора је био на одговорима које су деца давала док су решавли задатаке. То су били задаци у којима су деца тражило да „означе сваки од облика који је круг“, на страни на којој су се налазиле различите фигуре, *Слика 1.* Ако би дете ћутало испитивач би поновио питање. Ако дете ни тад не одреагује, испитивач би упитао: „Знаш ли шта је круг?“. Сва деца су одговарала потврдно, а онда би их питали: „Да ли можеш да пронађеш неки круг овој страници?“. Након што дете обележи неки круг, испитивач би га упитао има ли још неки на тој страници. Када би одговор на то питање био негативан, испивач би поставио питање слично следећем: „Зашто си означио баш тај? Како знаш да је то круг? Видим да ниси изабрао овај? Можеш ли ми рећи зашто?“. Сличан поступак је спроведен на квадратима, троугловима, правоугаоницима, и на крају са круговима и квадратима као сложеним фигурама где се преклапају облици. Ови задаци су изабрани из претходних истраживања ван Хејлове теорије и Агам програма (наставни план и програм дизајниран да развије „визуелни језик“ деце узраста од 3 до 7 година) (Razel & Eylon, 1990). Начин истраживања је задржан (коришћени су цртежи и оловке уместо исечака) да би се резултати овог истраживања могли поредити са предходним где су коришћени исти задаци и технике (Clements & Battista, 1992a; Razel & Eylon, 1991). Сваки интервју је снимљен и трајао је око 20 минута. Добијени одговори су кодирани, а подаци су анализирани за утврђивање образаца у дечијем разумевању геометријских концепата.

Добијене су две групе података. Прва група података добијена је на основу анализе означених одговора на папиру. Друга група података добијена је на основу спонтаног разговора са децом, да се појасне критеријуми које су деца користила при селекцији фигура. (нпр. Како сте знали да дата фигура јесте/није правоугаоник?). Дечији одговори су кодирани и смештени у једну од 22 категорије. Категорије за одговоре који нису посматрани у овом истраживању не налазе се у табелама. Насупрот томе, ако се одређени одговор не уклапа у постојеће категорије, истраживачи су заједнички или додавали нове категорије или проширивали постојеће. Сваки одговор је класификован у једну од две категорије, визуелне или теоријске, Табела 1. Одговор је визуелни ако дете говори да изабрани објекат личи на неки предмет или ако користи описе типа „шиљаст“, „округао“, „мршав“. Теоријски одгововр је ако дете примећује геометријске особине фигура, нпр. „има три стране“, „има четири стране исте дужине“. У случајевима вишеструких одговора о једној фигури, доминантна реакција је била кодирана када је то могуће, ако ниједан одговор није био доминантан , кодиран је као „више од једног одговора у визуелној категорији“ или „више од једног одговора у теоријској категорији“. У раном процесу кодирања, све сумње су разрешене кроз заједничку дискусију истрживача. Вишеструки одговори који обухватају обе категорије су смештени у категорију која преовладава; после једноставног визуелног одговора следи један или више теоријских одговора који су кодирани на том нивоу (у складу са ван Хејловом теоријом). Независна бодовања и кодирање одговора за двоје случајно изабране деце довела у 100% сагласност два аутора. Вербални одговори за сваки задатак су категорисани у две групе, примере и оне који нису примери класе (у случају да нису примери, деца треба да објасне зашто дати облик није пример).

Табела 1: Кодирање вербалних одговора деце након задатка селекције фигура.

Категорија	Вербални одговори
Визуелна	Црта на папиру или у ваздуху, говорећи: „То изгледа овако...“ „То личи [не личи] на [име фигуре].“ Референца на другу фигуру на истој страни: „Иста је као ова...“ „Нешто као [име фигуре]“ Идентификује другу фигуру на страни и изјављује: „Ово није исто као оно...“ Примећује линије које нису хоризонталне или вертикалне. „Шиљасто“ или „има углове“ Личи на [име објекта] Мршаво/ дебело/ дуго. Велико/ мало. Оријентација, гестикулирајући објашњава: „Закривљено је на доле...“ Остали визуелни одговори : „То је смешно...“ Више од једног визуелног одговора.
Теоријска	Наводи и показује гестом присуство или одсуство одређених атрибута или особина (нпр. "То је правоугаоник, јер нема тачке на врху.") Округло / закривљено / нема праве стране / нема углове (нпр., "То је округао врх, тако да то није троугао.") Број углова. Број страна. Врста линије (на пример, "Има две линије које иду горе и доле.") Дужина стране (нпр., "Две стране су исте дужине, и друге две су исте дужине.") Више од једног својственог одговора.
Нема одговора Не знам	Нема одговора или „Не знам...“ „Само зато што...“

2.2. Резултати

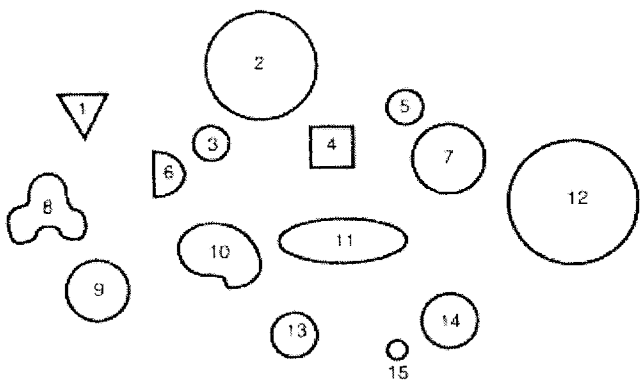
Исправност оцене за сваки облик селекције сумирана је у Табели 2. Поузданост за ову популацију су кругови .76; квадрати .83; троуглови .55 ;правоугаоници .82, и заједно кругови и квадрати .84. Корелација између резултата по задацима је различита, почев од r =.15 (круг и правоугаоник, једина корелација која није била статистички значајна) до r =.48 (круг и квадрат). Није било значајне разлике између дечака и девојчица на укупном нивоу за било који задатак

Табела 2: Просечна тачност резултата и стандардна девијација за пет задатака селекције фигура.

Облици	Могући резултат	Средња вредност	4годишњаци (n=25)	5годишњаци (n=30)	6годишњаци (n=42)
Кругови	15	14.41 (1.4)	13.76 (2.0)	14.33 (1.4)	14.86 (0.4)
Квадрати	13	11.30 (2.3)	10.64 (2.7)	11.17 (2.7)	11.79 (1.7)
Троуглови	14	8.24 (2.5)	7.92 (2.7)	8.17 (2.6)	8.48 (2.2)
Правоугаоници	15	8.16 (3.2)	7.68 (3.9)	7.70 (2.9)	8.79 (2.9)
Кругови и квадрати	28	17.24 (4.8)	13.68 (7.0)	17.40 (3.0)	19.24 (2.4)

Круг

Задатак у коме је требало означити кругове, *Слика 1* деци је био најлакши. Њихов средњи резултат био је 14,41 од могућих 15 (Табела 2). Уочава се старосна разлика у овом задатку, шестогодишњаци су задатак урадили знатно боље него млађа деца (F=5,54; p<.005).



Слика 1. Задатак у коме је требало означити кругове.

Табела 3 показује вербалне одговоре деце за примере и облике који нису примери круга, „непримери“. У свим одговорима четворогодишњаци су давали примере кругова, 9% је кодирано са „Нацртај на папиру или у ваздуху“. 20% од 25 четворогодишњака пружило је одговор на најмање један од девет примера кругова.

Табела 3: Проценат вербалних одговора за примере и „непримере“ кругова.

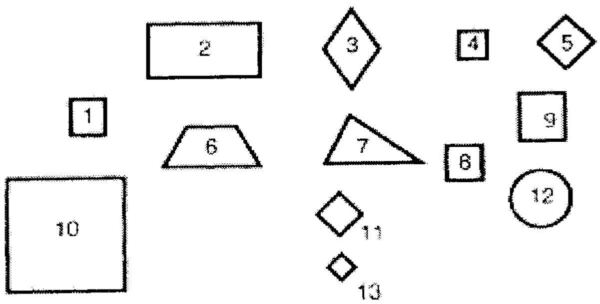
Вербални одговори	Примери кругова						„Непримери“ кругова					
	4 год		5 год		6 год		4 год		5 год		6 год	
	n = 25		n = 30		n = 42		n = 25		n = 30		n = 42	
	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C
Визуелни одговори												
Црта	9	20	5	13	4	5	1	4	8	7	4	5
Личи на...(облик)	1	4	3	7	11	10	10	40	17	50	17	14
Други облик на страници	0	0	0	0	0	0	5	12	1	7	0	0
Нешто као...	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	2	2
Није исто што и...	1	8	1	3	0	0	1	8	1	3	0	0
Искошено/дијагонално/савијено	0	0	0	0	0	0	1	4	1	3	0	0
Шиљато	0	0	0	0	0	0	1	4	0	0	0	0
Личи на...(предмет)	5	12	0	3	0	0	7	28	15	27	10	5
Мршаво/дебело/дуго	0	0	0	0	0	0	0	0	3	17	2	2
Величина	1	12	3	10	0	0	0	0	1	7	0	0
Оријентација	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Мешовити одговори	1	4	1	7	0	0	1	8	2	10	4	5
Вишеструки одговори	1	8	1	17	3	5	8	32	8	27	10	12
Теоријски одговори												
Присуство особина	0	0	1	3	3	2	6	20	4	13	4	5
Кружно/ Нема стране	23	44	26	47	32	14	8	20	2	7	6	10
Број углова	0	0	0	0	0	0	1	4	1	3	0	0
Број страна	0	0	0	0	0	0	1	4	1	3	2	2
Врста линије	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Дужина стране	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Вишеструки одговори	0	0	0	0	0	0	1	8	1	4	0	0
Нема одговора/ Не знам	59	84	51	90	47	90	49	80	34	60	38	98

Напомена R је проценат свих одговора одређене старосне групе у датој категорији. Колона процената не даје суму 100 због грешака заокруживања. C је проценат деце одређеног узраста која су дала одређени одговор бар једном. Колона процената не даје суму 100 зато што су деца давала више одговора.

Елипса (фигура 11) највише је збунила децу; 12% деце означило је као круг, скоро сва та деца су староси 4 или 5 година. 20% четворогодишњака је препознало закривљени облик (фигура 10), као круг. Деца, посебно старости 4-5 година дала су више вербалних одговора за „непримере“ него за примере кругова. Велика већина деце није одговорила усмено на једну или више ставки, тако да категорија *Нема одговора/Не знам* представља око једне трећине до једне половине свих одговора. За примере кругова, доминантна реакција била је у категорији „округло, закривљено, нема праве стране, нема углова", визуелна објашњења „личи на" су најчешће за „непримере". Нема значајне корелације између броја визуелних или теоријских одговора деце и њихове правилне селекције. *Нема одговора/Не знам* категорија је значајно негативно повезана са селекцијом тачности (r =-.45, p<.001).

Квадрат

Средњи резултат, у задатку у коме је требало означити квадрате, *Слика 2*, је 11.3 од могућих 13, што указује да деца ипак могу да разликују квадрат од других облика на страници (Табела 2). Иако нема значајније укупне развојне разлике (F = 1,98; p =.144), 28% четворогодишњака и 13% петогодишњака, у поређењу са само 5% шестогодишњака, препознали су ромб (фигура 3) као квадрат.



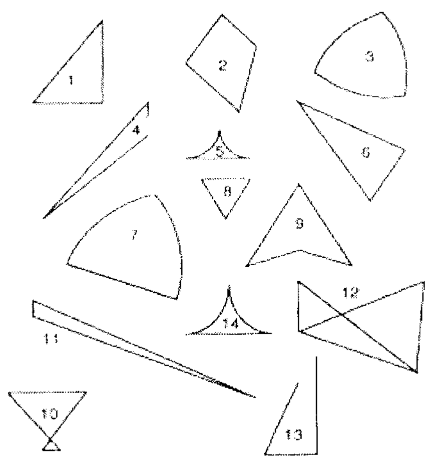
Слика 2. Задатак у коме је требало означити квадрате.

Насупрот томе, 63% деце узраста 4-5 година и 68% шестогодишњака препознало је квадрате иако немају ни једну хоризонталну страну као (фигуре 5, 11 и 13). Велики број вербалних одговора је категорисан као *Нема одговора/Не знам*. Најчешће визуелне категорије су „личи на.." (посебно често за децу старости 4 и 5 година) и за „непримере" су чести вишеструки одговори (Табела 4). Теоријски одговор „четири стране" је понудило од 7% до 16% (Табела 4). Број одговора у *Нема одговора/Не знам* категорији је значајно негативно повезан са коректним избором (r =-.54, p<.001), број визуелних одговора није битно повезан. Број теоријских одговора је у значајној вези са коректним избором (r=.34, p<.01).

Табела 4: Проценат вербалних одговора за примере и „непримере“ квадрата

Вербални одговори	Примери квадрата						„Непримери“ квадрата					
	4 год		5 год		6 год		4 год		5 год		6 год	
	n = 25		n = 30		n = 42		n = 25		n = 30		n = 42	
	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C
Визуелни одговори												
Црта	6	16	5	13	0	0	2	8	5	13	0	0
Личи на (облик)	13	28	7	27	11	7	20	56	31	60	23	10
Други облик на страници	4	12	6	17	6	5	5	20	2	7	0	0
Нешто као...	0	0	0	3	0	0	1	4	1	3	0	0
Није исто што и...	2	8	0	3	0	0	1	4	1	3	0	0
Искошено/дијагонално/савијено	1	4	0	0	2	2	2	4	0	0	3	2
Шиљато	0	0	0	3	0	0	1	4	1	3	3	2
Личи на...(предмет)	2	8	0	0	2	21	4	20	3	12	10	5
Мршаво/дебело/дуго	0	0	0	0	0	0	1	4	1	3	0	0
Величина	0	0	3	10	0	0	0	0	2	3	0	0
Оријентација	1	4	6	17	0	19	1	4	1	3	0	0
Мешовити одговори	0	0	1	7	0	0	2	8	0	0	3	2
Вишеструки одговори	1	4	4	20	3	5	6	28	11	30	20	12
Теоријски одговори												
Присуство особина	1	8	0	0	0	0	4	16	0	0	3	2
Кружно/ Нема стране	0	0	0	0	0	0	1	4	0	0	0	0
Број углова	3	12	7	10	6	2	3	8	2	10	0	0
Број страна	7	20	15	17	16	9	2	12	3	10	0	0
Врста линије	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2
Дужина стране	0	0	1	7	2	2	1	4	1	3	3	2
Вишеструки одговори	0	0	5	13	0	0	0	0	2	7	3	2
Нема одговора/ Не знам	60	96	39	80	53	100	45	84	36	83	30	93

Троугао



Слика 3. Задатак у коме је требало означити троуглове.

Избор троугла, *Слика 3* био је тежи задатак за децу, резултат је 8.24 од могућих 14 (Табела 2). Није било статистички значајне разлике у коректним одговорима међу старосним групама (F=0,414; p=.662). Деца старости 5 година су била боља у препознавању примера троуглова од деце старости 4 и 6 година (фигуре 1, 6, 8, 10, 11, 12), такође боље су препознавали закривљене стране, било конвексне или конкаване (фигуре 3, 5, 7, 14).

Табела 5: Проценат вербалних одговора за примере и „непримере“ троуглова.

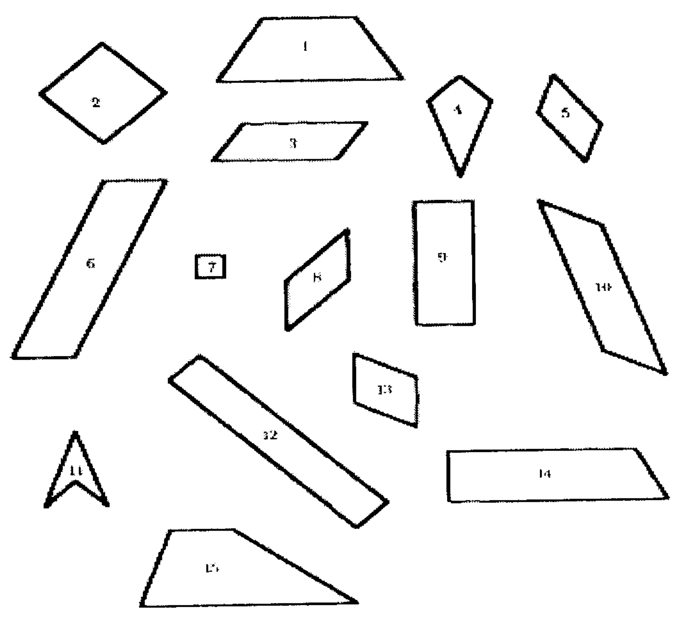
Вербални одговори	Примери троуглова						„Непримери“ троуглова					
	4 год		5 год		6 год		4 год		5 год		6 год	
	n = 25		n = 30		n = 42		n = 25		n = 30		n = 42	
	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C
Визуелни одговори												
Црта	7	20	8	23	0	0	9	28	7	23	3	2
Личи на (облик)	3	12	8	30	2	2	3	20	8	30	11	12
Други облик на страници	3	16	3	10	2	2	9	40	9	37	5	7
Нешто као...	1	4	1	3	0	0	2	12	3	17	2	2
Није исто што и...	1	4	0	0	0	0	1	4	0	0	0	0
Искошено/дијагонално/савијено	1	4	0	0	2	2	3	16	2	13	2	2
Шиљато	3	8	0	0	6	7	1	4	0	0	0	0
Личи на...(предмет)	1	4	1	3	2	2	2	12	2	13	8	10
Мршаво/дебело/дуго	0	0	2	10	2	2	1	4	2	13	0	0
Величина	3	16	1	3	6	7	1	4	0	0	0	0
Оријентација	7	24	11	30	4	5	2	8	3	7	2	2
Мешовити одговори	1	4	2	7	0	2	3	16	2	13	5	7
Вишеструки одговори	3	16	10	33	15	7	7	28	7	33	9	10
Теоријски одговори												
Присуство особина	5	20	3	10	4	5	3	16	4	20	5	5
Кружно/ Нема стране	0	0	0	0	0	2	1	4	0	3	3	2
Број углова	5	16	5	10	4	2	4	16	13	40	2	2
Број страна	3	12	11	27	13	10	2	12	10	27	14	7
Врста линије	1	4	0	0	0	0	1	4	2	13	0	0
Дужина стране	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0
Вишеструки одговори	1	4	6	13	6	2	0	0	6	33	0	0
Нема одговора/ Не знам	53	96	28	73	31	93	50	92	18	50	31	100

Петогодишњаци су имали мање оговора у *Нема одговора/Не знам* категорији, а посебно за „непримере“ (Табела 5). Визуелни одговори чине 34% до 47% укупних одговора, ни једна визуелна категорија не доминира. Теоријски одговори чине 11% до 35% укупних одговора, доминантне категорије су „број углова“ и „број страна“. Деца, посебно она од 4 и 5 година старости, дала су више вербалних одговора за „непримере“ него за примере. Број *Нема одговора/Не знам* одговора је значајно негативно повезан са исправаним избором (r=-.39, p<.01).

Правоугаоник

При избору правоугаоника, *Слика 4*, средњи резултат је био 8.16 од могућих 15 (Табела 2), али није било значајних разлика између старосних група ($F=1.405$; $p=.25$). Фигура 2 изабрана је од стране 28% четворогодишњака, у поређењу са 17% петогодишњака и 10% шестогодишњака. Фигура 7 изабрана је од стране 16% четворогодишњака, за разлику од 3% петогодишњака и 7% шестогодишњака. Деца су препознавала „дуге" паралелограме или трапезе (облици 3, 6, 10 и 14) као правоугаонике, што није био случај са „краћим".

Правоугаоници 9 и 12 су изабрани од стране већине деце. Ови подаци указују на то да деца имају прототип дугог правоугаоника, са само благим предрасудама према вертикалности. *Нема одговора/Не знам* категорија одговора доминира код четворогодишњака, а визуелни одговори доминирају код петогодишњака и шестогодишњака. То потврђује чињеницу да се деца ослањају на визуелну слику када праве разлику између облика (Табела 6). Визуелни одговори који доминирају су „То личи на..", мада код шестогодишњака чест одговор је у категорији „мршаво / дебело / дуго". Теоријски одговори су у распону од 5% код четворогодишњака, 11% код петогодишњака, и 19% код шестогодишњака, при том да се такав одговор код петогодишњака јавља бар једном. Опет, више вербалних одговора дато је за „непримере" него за примере. Број *Нема одговора/Не знам* одговора је значајно негативно повезан са исправним избором ($r=-.31$, $p<.05$), број визуелних одговора је значајној вези ($r=.32$, $p<.05$), а теоријски одговори нису значајно повезани са исправним избором.

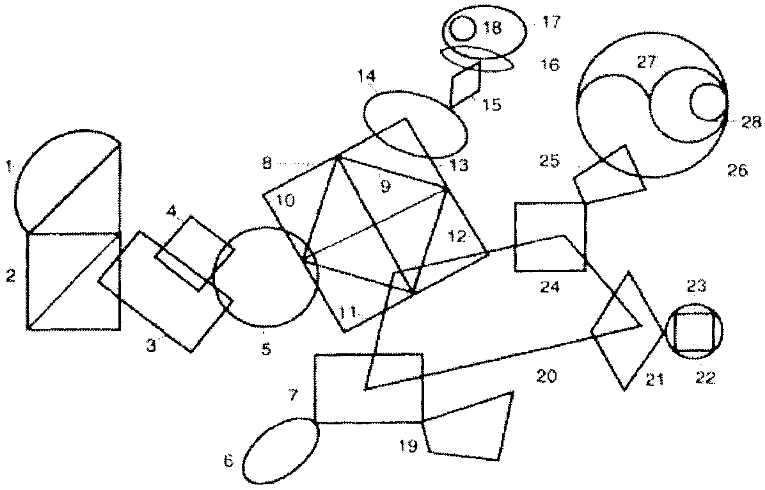


Слика 4. Задатак у коме је требало означити правоугаонике.

Табела 6: Проценат вербалних одговора за примере и „непримере“ правоугаоника.

Вербални одговори	Примери правоугаоника						„Непримери“ правоугаоника					
	4 год		5 год		6 год		4 год		5 год		6 год	
	n = 25		n = 30		n = 42		n = 25		n = 30		n = 42	
	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C
Визуелни одговори												
Црта	2	8	4	13	3	2	5	36	5	30	3	5
Личи на (облик)	15	40	24	60	13	5	4	28	9	43	10	10
Други облик на страници	2	0	2	7	0	0	3	16	7	33	2	2
Нешто као...	0	0	2	3	6	5	1	12	0	3	1	2
Није исто што и...	1	4	1	3	0	0	0	4	0	3	0	0
Искошено/дијагонално/савијено	0	0	2	7	6	5	0	4	0	3	3	7
Шиљато	1	4	1	3	3	2	1	12	1	7	1	2
Личи на...(предмет)	0	0	2	7	0	0	3	24	6	27	8	7
Мршаво/дебело/дуго	1	4	2	7	19	7	1	8	1	7	6	5
Величина	1	4	2	7	0	0	0	0	1	7	0	0
Оријентација	0	0	4	7	0	0	1	4	7	30	2	2
Мешовити одговори	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	0	0
Вишеструки одговори	3	12	5	10	6	5	3	20	5	33	11	10
Теоријски одговори												
Присуство особина	1	24	0	0	0	0	1	4	0	3	2	2
Кружно/ Нема стране	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
Број углова	2	4	1	3	0	0	3	4	2	17	0	0
Број страна	0	0	7	13	6	5	1	8	4	20	2	2
Врста линије	0	0	1	3	0	0	0	0	1	7	0	0
Дужина стране	0	0	4	10	6	5	0	0	1	13	5	2
Вишеструки одговори	2	4	6	13	3	2	0	0	6	20	1	2
Нема одговора/ Не знам	69	92	32	70	28	95	73	100	43	87	40	100

У последњем задатку, *Слика 5*, где се појављују кругови и квадрати, просечан резултат био је 17.24 од могућих 28 (Табела 2). Уочена је значајна разлика међу старосним групама, шестогодишња деца су постигла боље резултате од млађе деце ($F=13,526$; $p<.0001$). Млађа деца су препознала две елипсе, као кругове. У овом задатку, неке фигуре су уписане у друге, мала је вероватноћа да ће деца да препознају уписане кругове и квадрате.



Слика 5. Задатак у коме је требало означити уписане кругове и квадрате.

На пример, у фигуру 8 (квадрат) уписан је други квадрат , фигура 9. Фигура 8 је подељена у четири квартала, тако настају још четири квадрата (фигуре 10, 11, 12, и 13). 32% деце означило је фигуру 8, само 17% означило је фигуру 9, а још мањи проценат деце означио је фигуре 10, 11, 12 и 13. Неколико четворогодишњака означило је уписане квадрате. Слично је било са круговима. 76% деце препознало је облик 26 (спољашњи круг), док је само 17% идентификовало круг уписан у овај круг (облик 27). Такође, само 35% деце означило је квадрат уписан у круг (фигура 23), док је 87% деце означило само круг (фигура 22). Све у свему резултати на овом задатку су били слабији него на осталим задацима. Мали број деце је дао вербалне одговоре за ове фигуре (од 2% до 11%), са неколико (0% до 6%) одговора базираних на својствима фигура (Табела 7). Деца показују знаке умора на овом задатку и можда посвећују мање пажње при означавању. Број *Нема одговора/Не знам* одговора је значајно негативно повезан са исправним одговорима ($r = -.68$, $p < .01$).

Кроз задатке, *Нема одговора/Не знам* категорија одговора је у сталној негативној корелацији са избором тачних одговора, али веза између тачних одговора и визуелних и теоријских одговора варира са задатком. Визуелни одговори су били значајно повезани са тачном селекцијом само код правоугаоника, Теоријски одговори су значајно повезани само код квадрата.

Табела 7: Проценат вербалних одговора за примере и „непримере“ кругова и квадрата

Вербални одговори	Примери кругова / квадрата						„Непримери“					
	4 год		5 год		6 год		4 год		5 год		6 год	
	n = 25		n = 30		n = 42		n = 25		n = 30		n = 42	
	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C	R	C
Визуелни одговори												
Црта	9	4	5	3	0	0	2	8	0	0	0	0
Личи на (облик)	0	4	1	10	0	0	0	0	1	7	1	2
Други облик на страници	0	0	1	3	0	0	0	0	1	3	0	0
Нешто као...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
Није исто што и...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Искошено/дијагонално/савијено	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Шиљато	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0
Личи на...(предмет)	1	4	0	0	0	0	1	8	1	3	0	0
Мршаво/дебело/дуго	0	0	1	3	0	0	0	0	1	3	0	0
Величина	0	4	0	3	0	0	0	0	1	3	0	0
Оријентација	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	0	0
Мешовити одговори	1	4	0	0	4	2	0	0	0	0	0	0
Вишеструки одговори	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0	0
Теоријски одговори												
Присуство особина	1	8	1	7	0	0	0	0	0	0	0	0
Кружно/ Нема стране	1	4	5	10	0	0	0	0	2	10	0	0
Број углова	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Број страна	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Врста линије	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Дужина стране	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Вишеструки одговори	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Нема одговора/ Не знам	91	100	84	97	96	100	97	96	95	100	98	100

Коначна статистичка анализа требало је да утврди доследност вербалне реакције деце међу задацима. Корелације између броја одговора у свакој од три широке категорије израчуната је преко задатака. Свих 10 корелација између укупног броја *Нема одговора/Не знам* одговора је позитивно и значајно; свих 25 корелација између укупног броја *Нема одговора/Не знам* и визуелних одговора је негативно (само 9 је значајно) и 24 од 25 корелације између *Нема одговора/Не знам* одговора и својствених одговора је негативно (али ниједна значајна). Исто тако, 9 од 10 корелација између визуелних категорија су биле позитивне (3 значајне), све корелације између теоријских категорија су позитивне (4 значајне). Визуелне и теоријске корелације су мешовите; 11 је позитивно (2 значајне), 14 је негативно (3 значајне). Додатни проблем је што на квадрату, троуглу, правоугаонку деца понекад изгледа да не разликују појмове стране и угла. Дете би рекло да фигура има четири стране и онда, када би их замолили да их изброје, они би бројали углове. Ова пракса је нарочито распрострањена међу најмлађом децом и то треба узети у обзир у даљим истраживањима.

2.3. Дискусија

Истраживани су критеријуми које деца користе за разликовање геометријских облика у нашем друштвено-културном окружењу. Деца су препознавала кругове са високим степеном тачности. Шестогодишњаци су знатно боље обавили задатак од млађе деце, која су чешће бирала елипсе и закривљене облике. Већина деце је описала кругове као „округло", уколико су уопште покушали да опишу. Дакле, круг је лако препознати, али тешко описати. Резултати указују да су деца повезивала облике са визуелним узорима. У поређењу са препознавањем кругова, тачност у препознавању квадрата била је незнатно мања. Млађа деца су више грешила у препознавању облика који нису квадрати, али ништа лошији нису били при идентификовању квадрата без хоризонталних страна. Деца су више грешила у препознавању троуглова и правоугаоника него кругова и квадрата.

Теоријски одговори су поново присутни, али ретко, посебно за правоугаонике. Деца старости пет година су чешће него млађа или старија деца прихватали нестандардне троуглове и оне са заобљеним странама. Деца су правилно препознала нешто мало више од половине правоугаоника. За четворогодишњаке је више вероватно да ће прихватити квадрате као правоугаонике, (јер се њихов прототип правоугаоника слабо разликује од квадрата), мање су у стању да суде о једнакости свих страна. Иако су и квадрати били укључени у задатак у коме је требало препознати правоугаонике (у првобитној верзији задатка) процена хијерархијске инклузије, није очекивана нити пронађена међу децом. Њихови одговори показују да је пут ка таквом хијерархијском начину размишљању изузетно сложен. Овај налаз поново отвара питање, да ли је стриктно визуелни приступ учењу геометријских облика неопходан предуслов за више флексибилно категоричко размишљање, или само наноси штету у раном развоју таквог размишљања. Кеј (Kay, 1987) је представио инструкције: а) почети са општим случајем четворостране фигуре, затим наставити са правоугаоницима, и на крају квадратима; б) скренути пажњу на битне карактеристике сваке класе фигура и хијерархијске односе међу класама; в) користити појмове који садрже те односе („квадрат-правоугаоник"). На крају предавања, већина ученика је препознала карактеристике четвоространих фигура, правоугаоника и квадрата, и око половине ученика препознало је хијерархијске односе између класа. Иако дубина тог схватања (нарочито од хијерархијских односа) и генерализација донетих на основу емпиријских резултата мора бити доведена у питање (Clements & Battista, 1992b).

Сва деца су тежила да прихвате „дуге" четворостране фигуре са најмање једаним паром паралелних страна као правоугаонике. Налази у вези квадрата и правоугаоника указују на спор раст предиспозиција и способности да их разврстају на основу правих углова. Ови резултати могу да илуструју тешкоће схватања, али оне такође могу проистећи из раног увођења појма квадрата и правоугаоника, а тиме и правих углова. Тачност одговора је најмања код комплексних облика круг-квадрат. Поред тога, шестогодишњаци су били знатно прецизнији од млађе деце. Више деце идентификовало је елипсе као кругове у овом сложеном задатку са уграђеним облицима.

Иако су неке развојне разлике пронађене, то се десило на само два од пет задатака, кругови и уграђене фигуре, и разликују се само шестогодишњаци од деце старе четири и пет година. Додатне старосне разлике су веће одбацивање фигура које нису квадрати код шестогодишњака, и веће прихватање троуглова и фигура које нису троуглови код петогодишњака. У складу са овим налазима, подаци показују да не постоји никаква разлика међу половима при раном стицању геометријских знања.

2.4. Закључак, теоријске и образовне последице

Ови резултати имају две теоријске импликације у погледу дечијег разумевања геометрије. Прво, подаци подржавају претходне тврдње (Clements & Battista, 1992a) да *препрепознајни* ниво постоји пре ван Хејловог Нивоа 1 (визуелни ниво). Ови налази, такође, подржавају Пијажеову теорију. Децу која се не могу поуздано да разликују кругове, троуглове, и квадрате од облика који нису примери тих класа треба класификовати као *препрепознајне*. Ону децу која то уче треба разматрати *у транзицији*, уместо на визуелном нивоу. Деца на овом нивоу тек почињу да формирају шеме (мреже односа који повезују геометријске појмове и процесе у специфичне шаблоне). Развој шема може омогућити деци да утврде присуство неких карактеристичних особина, нпр. „затворено" и „округло" да одговара круговима, четири скоро једнаке странама са приближно правим угловима одговара квадратима, и паралелне „дуге" супротне стране да одговарају правоугаоницима. Касније, други визуелно-просторни елементи, као што су прави углови квадрата, укључују се у ове шеме и тако се стварају обрасци. Старија деца могу да приступе овим особинама одвојено, док млађа деца нису у стању да се фокусирају на појединачне особине. Млађа деца могу да створе образац при препознавању правоугаоника без знања неких специфичних особина ове фигуре (Smith, 1989).

Друго, резултати подржавају реконцептуализацију ван Хејловог Нивоа 1. Висок проценат визуелних одговора је у складу са теоријским одговорима. Међу овом децом такође постоје докази о познавању својстава и компоненти облика, мада те особине не могу бити јасно дефинисане (нпр.стране и углови). Нека деца изгледа да користе подударање визуелних образаца и своја резоновања о датим фигурама да би решили ове задатке избора. Тако, кроз ове студије, обезбеђен је и доказ да је први ниво геометријског размишљања, као што је предложено од стране ван Хејла, више синкретички* него визуелни, као што је Клемент предложио (Clements, 1992). Овај ниво је синтеза вербално-декларативног и имагинативног знања. Стога, је предложен израз *синкретички* ниво, уместо *визуелни* ниво, означавајући

* **Синкретизам** је формирање теорије некритичким спајањем појмова, идеја, закона и чињеница које потичу из различитих теоријских система и које су међусобно инкомпатибилне. У психологији појава карактеристична за ране ступњеве сазнајног развоја детета када се неке појаве и феномени, који су само перцептивно, просторно, временски, или, пак, само асоцијативно, субјективно повезани, сматрају за објективно, реално повезане.

комбинацију без анализе. На овом нивоу, деца лакше користе декларативно знање да објасне зашто дата фигура није члан класе, јер супротност између фигуре и визуелних образаца захтева навођење разлика. Деца прелазећи на следећи ниво понекад искусе сукоб између ова два дела (визуелни образац и компоненте чињеничне анализе), што доводи до погрешно урађеног задатака.

У појединим случајевима, када деца имају више референци, више и греше. Ове грешке су направљене, јер уместо да се ослањају искључиво на поређење са визуелним обрасцима, ова старија деца почињу да се ослањају на својства која описују неку класу. На пример, много млађа деца називају фигуру квадрат, „само зато што изгледа као један од њих", типичан визуелни одговор. Међутим, неки знају карактеристичне особине квадрата, за њих је квадрат „четири једнаке стране и четири тачке". За њих је ортогоналност још увек апстрактан појам, неки ће прихватити ромбове као квадрате. Чак и ако њихов прототип има карактеристике ортогоналности, мала деца препознају облике на основу сличности, зато они прихватају облике који су „довољно близу" (Smith, 1989). Мала деца занемарују те битне чињенице и ослањају се на мање важне карактеристике, што може довести до грешака. Мервис и Рош (Mervis & Rosch, 1981) теорија генерализације, заснована на сличности и веома репрезентативним примерма ће бити најпрецизнија. Ова теорија објашњава већи број исправних одговора деце, од стране оних који су одлуке доносили на основу визуелних прототипова не обраћајући пажњу на небитне особине. На крају, битне особине засноване на шемама са интегрисаним декларативнним знањем, заједно са другим визуелним вештинама, могу бити неопходне за високе перформансе, поготово у сложеним, уграђеним конфигурацијама.

Оваква теорија може да објасни развојне разлика у овој студији. Предлаже се да деца више развијају имагинарне прототипве и постепено стичу вербално декларативно знање. Фигуре које су више симетричне и имају мање могућих имагинарних прототипова (кругови и квадрати) погодније су за развој имагинарних прототипова и на тај начин долази до бољих резултата тј. већа тачност при избору фигура. Правоугаоници и троуглови имају више могућих прототипова. Подржавање ове теорије је доказ да је највећа доследност за оне облике са најмање визуелних и теоријских одступања у оквиру класе (кругови и квадрати); ако има више одступања (код правоугаоника и троуглова), доследност је мања.

Шаролики дечији одговори (неки визуелни, неки теоријски) могу бити још једна од манифестација овог синкретичког нивоа. Они су поткрепили Клементсову (Clements, 1992) тврдњу да геометријски нивои размишљања коегзистирају. Напредак кроз такве нивое одређен је више социјалним утицајима, него старосним развојем. Иако се сваки виши ниво заснива на знањима са нижих нивоа, природа нивоа не искључује примену знања са претходних нивоа у одређеним контекстима.

3. Математички задаци и схватања ученика. Учионица као основни фактор који подржава или омета високи ниво математичког размишљања и закључивања

Током протекле деценије, много дискусија и брига фокусирано је на ограничења у концептуалном разумевању ученика, као и на њихово размишљање, закључивање и вештине решавања проблема у математици (Hiebert & Carpenter, 1992; Lindquist & Kouba, 1989; National Research Council, 1989). Као одговор на ове проблеме, Национални савет наставника математике (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM) објавио је предложене реформе наставног плана и програма, оцењивања и наставне праксе у основним и средњим школама (NCTM 1989, 1991, 1995). Међу основним циљевима ових реформских напора је да се побољша разумевање математике код ученика и да им се помогне да постану бољи математички извршиоци и мислиоци. Шта значи бити математички извршилац и мислилац? Одговори на ово питање зависе од нечијег погледа на математику. Поглед на математику, који бива све више прихваћен у последњих неколико година, је заснован на динамичном и истраживачком ставу према овој дисциплини (Romberg, 1992; Schoenfeld 1992, 1994).

Овај више динамичан појам математичке активности има идеје о томе шта ученици треба да науче и каквим врстама активноси треба да се посвете ученици и наставници током интерактивне наставе. Учење се посматра као процес стицања „математичких склоности“ или „математичке тачке гледишта“, као и стицање математичког знања и алата за рад и даљу изградњу знања (Schoenfeld 1992, 1994). Имати математичке склоности одликује се следећим активностима: истраживање у потрази за обрасцима да се разумеју основне математичке структуре и односи; употреба расположивих ресурса ефикасно и на одговарајући начин да се формулишу и реше проблеми, дати смисао математичким идејама, размишљање и резоновање на прилагодљив начи; генерализовање, оправдавање и комуникација математичких идеја и одлучивање о томе да ли су математички резултати разумни. Ове активности имају много тога заједничког са стварним процесима схватања, Ресник (Resnick, 1987) и други су то предложили као карактеристике на високом нивоу размишљања у различитим академским домена. Ако су ученици у стању да развију ове капацитете, учионица мора постати средина у којој они имају честе прилике за ангажовање у динамичним математичким активностима које се заснива на вредним математичким задацима (NCTM, 1991).

3.1. Значај математичких наставних задатака

Математички задаци су најважнији за образовање ученика „јер задаци преносе поруке о томе шта је математика, и шта значи радити математику“ (NCTM, 1991). Задаци које ученици решавају треба да их наведу да размишљају о тематици, различити задаци представљају различите когнитивне захтеве за ученике (Doyle, 1983). Структура задатака може утицати на начин на који ученици мисле, може да послужити да ученици ограниче или прошире своје виђење предмета на коме су ангажовани. Ученици из сопствених искустава развијају осећај шта значи „радити математику" (Schoenfeld 1992, 1994).

Како је могуће ангажовати ученике да доследно и успешно раде задатке високог нивоа размммишљања? Истраживањима (Doyle, 1983, 1986, 1988) дошло се до резултата да су задаци високог нивоа често сложени и више времена је неопходно за такве задатке, него за рутинске активности. Док решавају такве задатке ученици више времена проводе у учионици. Самим тим више су подложни различитим утицајима који могу изазвати пад концентрације. Предходна студија (Stein, Grover, Henningsen, 1996) показује да је јако тешко одржати коцентрацију ученика на потребном нивоу док решавају задатке. Много тога је написано о типовима математичких задатака који пружају ученицима могућност да се бве математиком, мање истраживања односи се на окружење у коме се настава изводи. Овај рад разматра ту празнину, фокусирајући се на учионицу као фактор који утиче на рад ученика.

Начини за спровођење задатака високог нивоа. Фактори који доприносе опадању високих захтева, када се то посматра у обрнутом смеру, могу да укажу на начине одржавања високог нивоа захтева. Везе између онога што ученици већ знају и разумеју, такође играју важну улогу у ангажовању ученика за висок ниво мисаоних процеса. Неки истраживачи су истакли да, ако су когнитивни захтеви задатака у складу са предходим знањем ученика, когнитивни процеси при изради задатака пре ће се задржати на високом нивоу. Веома је битна и расподела времена проведеног у учионици, тако да највећи део времена буде посвећен решавању задатака (Doyle, 1986).

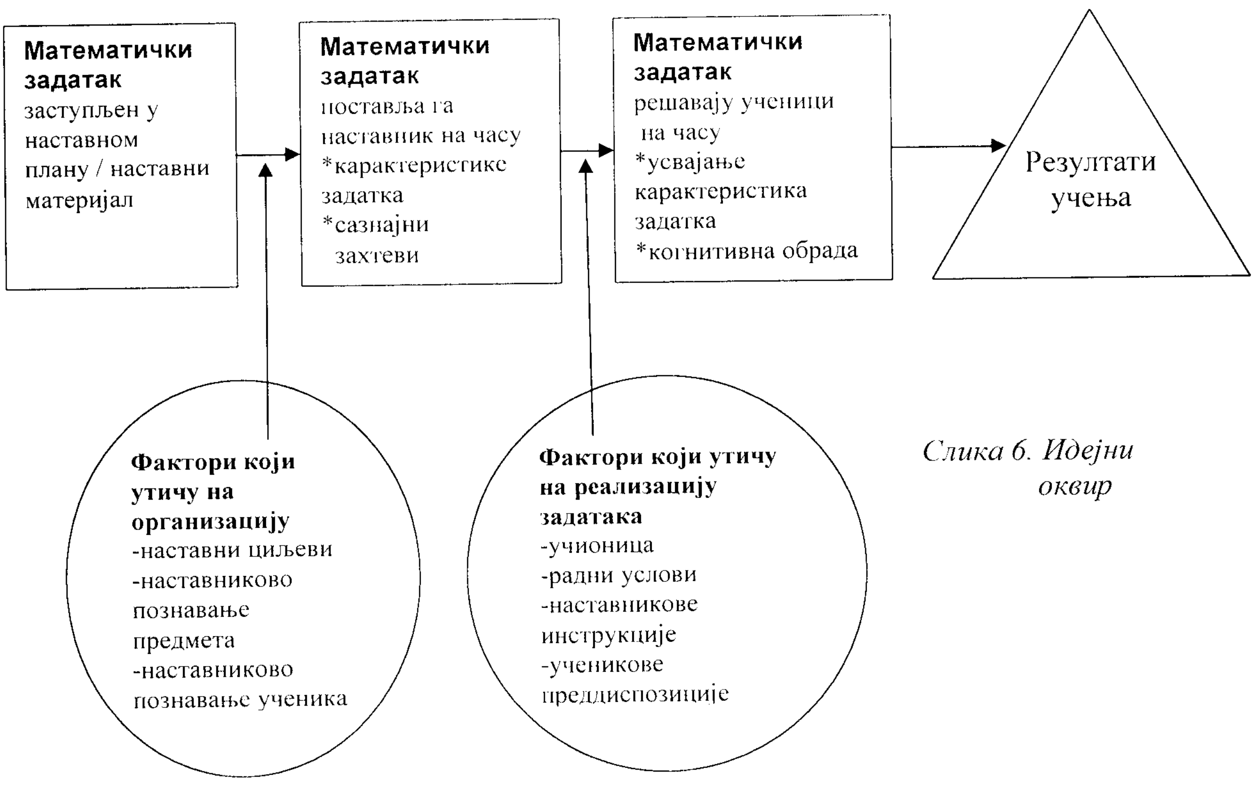
У прегледу истраживања о утицају учионице на дечију концентрацију и размишљање, Андерсон (Anderson, 1985) подржава ове идеје, као и неке друге. Андерсон је истакао значај Виготског и његовог појма „зоне наредног развоја" при помагању ученицима да разумеју и да граде везе између важних идеја. Зона наредног развоја се јавља када ученик не може сам да уради задатак, и тада уз помоћ наставника или бољег вршњака, успева да сам доврши задатак, али да то не умањује укупну комплексност или когнитивне захтеве задатка. Важно је охрабрити ученике да се укључи самоконтрола или самоиспитивање у својству напретка кроз задатке (Anderson, 1985; Schoenfeld, 1983). Самоконтрола може да повећа осећај компетентности ученика, и заузврат, њихова мотивација да остане на изузетно високом нивоу. Ови резултати указују да само присуство задатака високог нивоа у учионици неће аутоматски довести до активирања ученика да раде математику. Без ангажовања током наставе, од ученика се не може очекивати да развију способност да мисле, траже разлоге, и решавају проблеме на одговарајући математички начин. Амбијент учионице и животна средина мора да активно подржи успешно ангажовање ученика на високом нивоу размишљања и резоновања.

Овај рад испитује учионицу као фактор који омета или подстиче ангажовање ученика на високом нивоу математичког размишљања и резоновања. Суштина овог истраживања су математике учионице које учествују у пројекту QUASAR

(Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning), национални просветни пројекат за реформе, чији је циљ подстцање и проучавање развоја примене побољшаних наставних програма математике за ученике који похађају средње школе у економски неразвијеним срединама (Silver & Stein, 1996). Пројекат је заснован на претпоставци да су неуспеси економски сиромашних и мањинских ученика последица недостатка могућности да учествују у садржајном и сложеном учењу, а не због недостатка способности или потенцијала. Од јесени 1990, групе наставника математике из шест географски расутих и етнички различитих градских средњих школа радили су, у сарадњи са партнерима из оближњих универзитета, на побољшању своје локалне наставе и професионалног развоја. Све то у циљу побољшања наставе, помоћи ученицима, корисним упутствима да их подстакну на размишљање, резоновање, и решавање проблема.

3.2. Идејни оквир

Оквир, приказан на *Слици 6*, дефинише математички задатак као наставну активност, која има за циљ да фокусира пажњу ученика на одређене математичке појмове, идеје и вештине (Stein et al., 1996). У том оквиру математички задатак прође кроз три фазе (на слици је то представљено правоугаоницима): предвиђање планом и програмом, постављање од стране наставника на часу, и решавање од стране ученика. Оквир даље наводи две димензије математичких задатака. Прва димензија су *карактеристике задатка*. Карактеристике задатка се односе на аспекте задатка који су важни за развој разумевања, резоновања и доношења одлука.



Слика 6. Идејни оквир

Друга димензија, *сазнајни захтеви*, односи се на начин размишљања док наставник поставља задатак (почетна фаза) и на начин размишљања за време израде задатка (фаза имплементације). Ови процеси размишљања могу да се крећу од меморисања поступака и алгоритама (са или без обраћања пажње на појмове, разумевање, или значење) до сложеног размишљања и схватања стратегија које су типичне за математику (претпостављање, оправдавање или тумачење). Ово истраживање фокусирано је на димензију сазнајних захтева и како учионица као фактор утиче на ученике од почетне фазе до фазе реализације задатака.

Према овом оквиру, функционални и сазнајни захтеви задатака могу да се трансформишу између било које две узастопне фазе. На пример, задатак може бити постављен тако да захтева висок ниво когнитивних активности од стране ученика, а током фазе имплементације може бити трансформисан на такав начин да се размишљање ученика фокусира само на поступке, без повезивања. Други круг на *Слици 6* представља учионицу као фактор који утиче на начин размишљања ученика током фазе имплементације задатка. Ови фактори укључују утицај разреда, захтеве задатка, и наставникове и ученикове могућности.

3.3. Циљ истраживања

Циљ овог рада је да идентификује, разматра и илуструје начине како учионица као фактор утиче на ангажовање ученика при решавању задатака високог нивоа. Предходни рад (Stein et al., 1996) је утврдио различите обрасце ученичког ангажовања на задацима који су постављени да подстакну ученике да раде математику. У неким случајевима, ученици су активно ангажовани на високом нивоу сазнајних процеса карактеристичних за математику. У другим случајевима нису. У оним случајевима када ангажовање ученика на задацима не служи за пример, примећене су три карактеристичне врсте ученичких активности: когнитивна активност која се усредсредила на механичку употребу поступака (без везе са основним значењем), несистематична истраживања, активности без математичке усредсређености. Ова студија препознаје и описује обе врсте фактора, оне који су у вези са одржавањем високог нивоа когнитивних захтева и оних који утичу на пад. Поред тога, студија обухвата и учионицу, као фактор који утиче на оджавање или опадање когнитивних способности.

3.4. Методологија

Извори података. Обучени и образовани посматрачи написали су резимее о запажањима на часу. Ови резимеи чине примарне податаке коришћене у почетној студији. Сваке школске године од јесени 1990 до пролећа 1993, три тродневна истраживања (јесен, зима и пролеће), спроведена су у одељењима три репрезентативна наставника математике, на сваком од четири пројекта. Нацрти учионица описани у овој студији урађени су на основу пројеката четири наставника. Посматрач је хватао детаљне белешке током наставниковог предавања и реакције ученика, истовремено је и сниман час. Након часа, посматрач користи снимак и своје белешке да доврши пројекат „Учионица као објекат посматрања" (COI – Classroom Observation Instrument). У оквиру истаживања, посматрач обезбеђује описе и скице физичког окружења у просторији, редослед наставних догађаја, и одговоре на питања у вези са пет тема: математички задаци, дискусије, интелектуално окружење, управљање и оцењивање, и групни рад (ако се то догодило).

Поступак шифровања. За почетне студије, узет је узорак од 144 задатка за шифровање. Циљ је стицање репрезентативне слике о настави преко четири пројекта за прве три године. У COI за шифровање коришћен је систем заснован на концептуалном оквиру приказаном на *Слици 6.* Девстнаест начина шифровања, организовано у четири главне категорије, је направљено за сваки задатак (Doyle, 1983; Anderson, 1985; Silver, 1985). *Описне шифре* садрже број минута и проценат времена посвећен задатку, овакви извори су послужили као основа за задатак, математичку тему задатка, смисао, и да ли је задатак је решен као заједнички подухват ученика.

Сетап шифре су додељене на основу прегледа задатака, као што је наведено од стране наставника током почетних објашњења шта ученици треба да раде, и током израде задатка у било ком каснијем моменту када наставници пружају додатна објашњења за усмеравање ученика, како да приступе задатку. Током сетап фазе, шифре су додељене за оперативне функције и за когнитивне захтеве задатка. Когнитивни захтеви су класификовани на следећи начин: памћење; употреба формула, алгоритама, или поступака без везе са концептима; употреба формула и алгоритама али су поступци повезани са концептима; и когнитивна активност која се може окарактерисати као „раде математику", укључујући комплексна математичка размишљања и резоновања, активности као што су прављење и тестирање претпоставки, формирање проблема, и тражење обрасца.

Имплементационе шифре такође су направљене за карактеристике задатака и сазнајне захтеве. Ови шифре су додељене са освртом на начине како су ученици решавали задатак. Код кодирања сазнајних захтева задатака који су решени, кодери су покушали да суде о врстама сазнајних процеса који су се појавили код већине ученика. Током ове фазе, кодери су самостално препознали потребу за новом шифром, која би требало да опише најчешћи начин на који ученици решавају задатке, при чему ученици изучавају значајније математичке идеје, али не успевају да остваре систематски и одржив напредак у развоју математичких стратегија или разумевања. У овом тексту, ова нова шифра се назива *несистематично истраживање.*

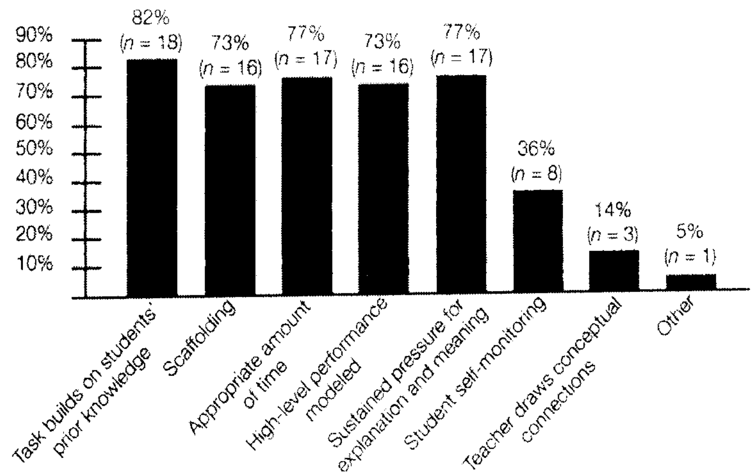
Последња категорија шифри даје судове о факторима повезаним са решавањем задатка. За задатке високог нивоа, кодери су упућени да идентификују што више могућих фактора који би могли да помогну у одржавању задатака на високом нивоу (нпр. обликовање на високом нивоу постигнућа од стране наставника или напреднијих ученика, покушај да се дође до оправдања, објашњења, или значења кроз наставникова испитивања, коментаре и повратне информације; зона наредног развоја [наставници или напреднији ученици поједностављују задатак тако да се може решити, при том задржавајући комплексност задатака]; или избор задатака који се заснивају на претходним знањима ученика).

У ранијим студијама термин, *висок ниво*, је коришћен да опише задатке који укључују употребу формула, алгоритама или процедура, повезивање идеја, разумевање. За задатке високог нивоа који су одбијени, откривени су разлози њиховог пада са листе. Проблематични аспекти задатака (ученици треба да траже од наставника да се смањи двосмисленост и сложеност задатака, навођењем јасних поступака или да наставник „преузме" проблематичне делове задатка); померање нагласка са суштине и разумевања на тачност и потпуност одговора; недостатак или вишак времена за решавање захтевних делова задатака; и проблеми управљања разредом, што спречава трајни ангажман на високом нивоу когнитивних активности. Аутори ове студије, заједно са трећом особом, служили су као примарни кодери у почетном истраживању. Репрезентативни примерак (25% од 144 задатака) је двоструко кодиран. Поузданост кодера је у распону од 53% до 100%, са просеком од 79%.

Узимање узорака за ову студију. У почетној студији, 58 од 144 задатака означени су као задаци који треба да подстакну ученике да раде математику. Ових 58 задатака чине базу података за ову студију. Током решавања ових 58 задатака, ученици су се активно укључили у решавање 22 задатка. У преосталих 36 задатака, ангажовање ученика није служило за пример. У 8 задатака, размишљање ученика усмерено је на поступке без везе са основним значењем; у 11 задатака ученици су укључени у несистематично истраживање; у 10 задатака за мишљење ученика се сматра да нема математичког фокуса. И у преосталих 7 задатака облици ученичког размишљања, током фазе решавања задатака, представљају различите категорије когнитивног ангажовања, од којих ни једна није била довољно добра.

3.5. Резултати

Одржавање високог нивоа когнитивних захтева. На *Слици 7*, број на врху сваке траке показује број и проценат задатака за које је посебно процењен утицај датог фактора у одржавању когнитивних захтева на потребном нивоу. Три до пет фактора по задатку, процењује се од стране кодера, утичу на ученике да остану ангажовани на одређеним задацима. Као што је приказано на *Слици7*, пет фактора је највише утицало на одржавање и ангажовање ученика да решавају задатке: задатак се надовезује на претходна знања ученика (82%), зона наредног развоја (73%), довољно времена (77%), обликовање на високом нивоу постигнућа (73%), и стални притисак за објашњењем и значењем (77%). Укупно је разматрано 22 задатка, укупан збир процената је већи од 100, јер обично више од једног фактор је изабрано за сваки задатак.



Слика 7. Број и проценат задатака за које је процењен утицај датог фактора у одржавању когнитивних захтева на високом нивоу.

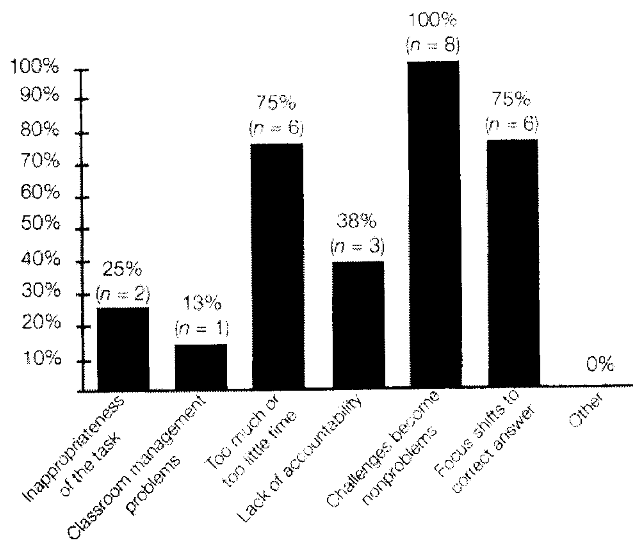
Задаци који најбоље одржавају когнитивне захтеве на високом нивоу су задаци засновани на предходном знању ученика и за које је додељена одговарајућа количина времена, ни премало ни превише (Doyle, 1986). Понашање и подршка наставника на високом нивоу ангажовања ученика, укључујући и зону напредног развоја, обликовање на високом нивоу постигнућа, и стални притисак на ученике да обезбеде смислена објашњења, такође су идентификовани од стране других истраживача, као важни утицаји у који охрабрују ученике да се ангажују на високим нивоима. Ови резултати показују да, иако су ученици активно укључени у рад (за разлику да буду пасивни посматрачи), наставници и даље имају важну улогу у проактивном подржавању ученика на високом нивоу ангажмана (Anderson, 1989; Doyle, 1988). Друга два фактора, који су идентификовани као утицајани, су самопраћење и концептуалне везе исцртане од стране наставника, и у овој студији имају мањи утицај, тј. они су битни фактори у само 36% и 14% од задатака, редом.

3.5.1. Карактеристични фактори који утичу на пад

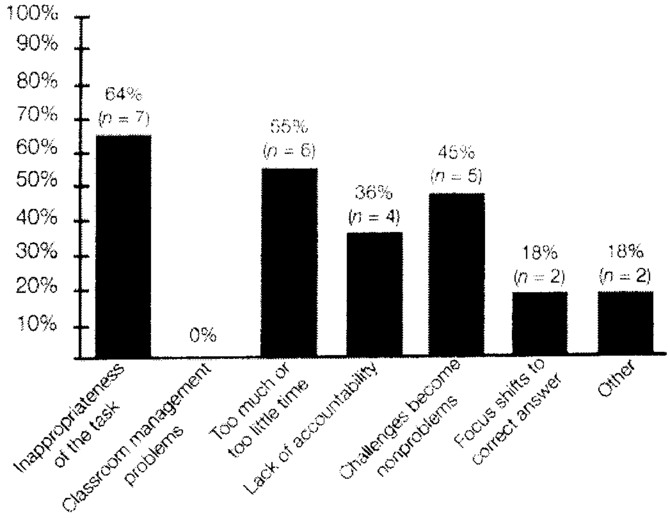
Фактори који су везани за сваку од три врсте пада илустровани су на *Слици 8*. Овај одељак почиње описом карактеристичних профила фактора за сваку од три врсте пада.

Пад услед коришћења поступака, без везе са појмовима, значењем и разумевањем. Фактори који најчешће утичу на пад приликом процеса размишљања ученика су употреба поступака без повезивања, значења или разумевања, уклањање сложених делова задатка, померање фокуса са разумевања на тачност и потпуност одговора, и неодговарјуће време предвиђено за решавање задатака. Најчешће навођени фактор је да су сложени делови задатка уклоњени током фазе имплементације, чиме се захтева нижи и мање одржив ниво размишљања, труда и резоновања од стране ученика. Због високих захтева задатка ученици (и наставници) могу да схвате задатке као двосмислене, ризичне, или обоје, често постоји „повлачење" ка смањењу комплексности (Doyle, 1988). Смањење комплексности може да се изврши на неколико начина, укључујући притисак ученика на наставника да пружи јасне поступке за комплетирање задатка, или да „преузме" сложене делове задатка и обави их за ученике. Када се то уради, когнитивни захтеви задатка су ослабљени и когнитивна обрада ученика постаје каналисана и више предвидива, (често) то постаје само механички облик размишљања.

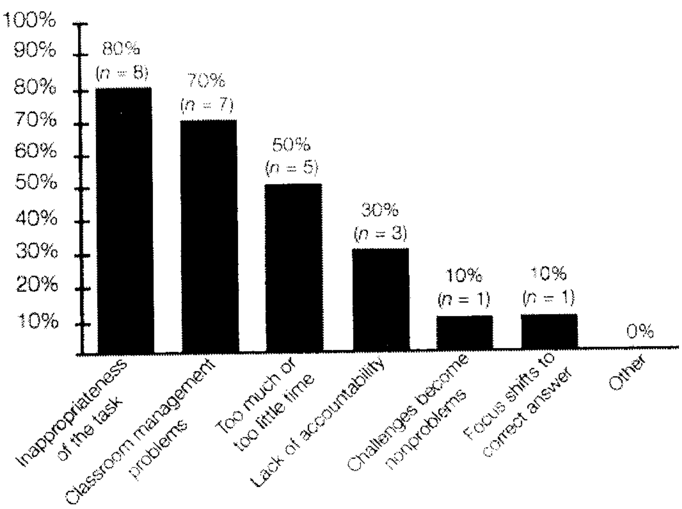
Други, често помињан, фактор је промена фокуса са значења и разумевања према потпуности или тачности одговора. Ученици постају оптерећени решењем, мање се посвећују процесу размишљања који ће довести до решења. Предходна математичка искуства наставника и ученика често доводе до преокупације решењима, на рачун разумевања. Задаци због којих долази до пада ученичког размишљања, често им је посвећено превише или премало времена. У овој ситуацији, ученици имају јако мало времена да се боре са важним математичким идејама садржаним у задатку. Брз темпо одаје утисак покривања терена на ефикасан начин, али често одузима ученицима време потребно да се истински усрдсреде на садржаје, да истражују и размишљају, и на карактеристичан начин раде математику.



Пад услед процедуралног размишљања без повезаности. (укупан број задатака је 8)



Пад услед несистематичних истраживања
(укупан број задатака је 11)



Пад услед нематематичких активности
(укупан број задатака је 10)

Слика 8. Број и проценат задатака за које је процењено да дати фактор утиче на пад когнитивних захтева. Укупан збир процената је већи од 100, јер обично више од једног фактора је изабрано за сваки задатак.

Пад услед несистематичних истраживања. Фактори који најчешће утичу на пад услед несистематичног облика математичког истраживања су неадекватност задатака за одређене групе ученика, неадекватна количина времена предвиђена за те задатке, као и уклањање сложених аспеката задатака. Фактор, неадекватност задатка, обухвата низ разлога, укључујући низак ниво мотивације, недостатак предходног знања, као и недостатак одговарајућих специфичних задатака. Све ово се односи на примереност задатака за дату групу ученика. Важан фактор за успех при решавању задатака високог нивоа је разматрање односа између ученика и задатка, наставници треба да познају своје ученике, да би направили прави избор задатака у погледу степена сложености и јасноће задатака. Наставници су ти који треба да усмере ученике, тако да на високом нивоу размишљања може да дође до напретка у решавању задатка.

Други, најчешће помињани фактор, је неадекватна количина времена. За разлику од пада у процедуралним активностима, за ову врсту пада (у несистематичним истраживањима) проблем је био превише времена у већини задатака, за које је овај фактор оцењен као утицајан. Додатно време само по себи (тј., без увођења додатних помоћних фактора) изгледа да само погоршава ситуацију. Услед несистематичних истраживања ниво тежине задатка опада, јер су уклоњени сложени делови задатка

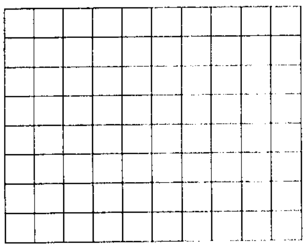
Пад услед нематетатичких активности .Фактори који најчешће утичу на пад активности, а немају математичку основу, су неадекватност задатка, проблеми управљања разредом, и неадекватна количина времена. Управљање проблемима у разреду игра битну улогу када су у питању сметње у решавању задатака, утиче на комплетан недостатак математичког ангажовања од стране ученика. Наставници се боре да одрже ученике под контролом, држећи их фокусиране на математику. Још једном, неодговарајућа количина времена ствара проблеме, превише времена у већини задатака наводи се као утицајан фактор.

Доминација три главна фактора, приликом пада изазваног процедуралним размишљањем без повезаности, (у односу на релативно слабо присуство других фактора) указује на јасну слику активности у учионицама у којима ће доћи до ове врсте опадања. Овакве оштре разлике између превласти различитих фактора, нису лако уочљиве у паду при несистематичним истраживањима. У ствари, овај профил је најнејаснији, неколико фактора доприноси да дође до умереног пада. То указује да постоји мање очигледан скуп утицаја који делују у овим случајевима. Профил фактора приликом пада услед нематематичке делатности јасније је диференциран. Најзначајнија карактеристика овог профила је снажно присуство фактора проблема управљања разредом.

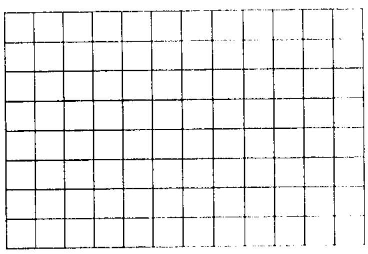
Фактор који се провлачи кроз све три врсте пада је неадекватна количина времена. Планирање одговарајуће количине времена, за фазу решавања задатка, изузетно је важно како би се избегао пад свих врста. Фактори који се појављују у два од три профила су уклањање сложених делова задатака (пад у процедуралном размишљања и несистематичним истраживања) и неадекватност задатка за одређени скуп ученика (пад у несистематичним истраживањима и услед нематематичких активности). Фактор неадекватност задатка је веома широк, обухвата низ разлога због којих долази до ниског математичког ангажмана.

3.5.2. Квалитативни приказ

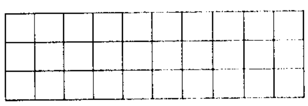
Одржавање когнитивних захтева на потребном нивоу. Циљ овог низа тестова је да истражи односе између разломака, децималних записа, и процената. Пре ових тестова, ученици су имали моделовање разломака, децималних записа и процената, користећи различита излагања. У поставци овог задатка, сваки ученик је добио низ правоугаоних мрежа различитих величина (видети *Слику 9*) и очекивало се да осенчи одређени део правоугаоне површине. Делови које треба осенчити наведени су на различите начине, укључујући: проценат од укупног броја квадрата, раломак од укупног броја, децимални део укупног броја, или одређен број квадрата.



1. а. Осенчити 0.725 део површине правоугаоника.
   б. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у разломцима?
   в. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у процентима?



2. а. Осенчити 3/8 површине правоугаоника.
   б. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у процентима?
   в. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у децималном запису?



3. а. Осенчити 6 квадратића у правоугаонику.
   б. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у разломцима?
   в. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у децималном запису?
   г. Који део површине правоугаоника је осенчен, изражено у процентима?

Слика 9. Задатак који истражује везе између разломака, децималних записа и процената (Bennett & Foreman, 1990).

Од ученика се очекује да за сваки пример да одговоре, који део површине је осенчен преко процената, децималног записа и разломака. Такође, од ученика се очекује да за сваки од задатака дају бар по једно објашњење како су дошли до решења. Задатак пружа прилику да се ученицима олакша тражење веза између три начина представљања. Током решавања овог задатка, високи когнитивни захтеви су одржавани и различити фактори су били у игри да одрже ученике на високом нивоу ангажмана.

Задаци су дизајнирани тако да се заснивају на предходним знањима и искуствима ученика са децималама, процентима и разломцима који су представљени на више начина. Ученици су прошли претходну лекцију која се односи на проценте, дужину и површину користећи различита представљања, укључујући и правоугаоне области различитих величина. Тако да ученици нису били блокирани представљањем области уобичајеном мрежом формата 10×10. Наставник је често усмеравао пажњу ученика на њихова претходна знања. На пример, као стратегију за решавање проблема 2а, један ученик је представио решење у коме је прегруписао све квадрате у осам „група“ а затим осенчио три групе. Да би помогли ученицима да виде процентуално и децимално решење, који део фигуре је осенчен (2б и 2в проблеми), наставник их подећа на неке основне конверзије које су већ знали. То охрабрење је довело ученике да користе чињеницу да је $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=25\%$ и самим тим да је $\frac{1}{8}=12.5\%$. Дакле, $\frac{3}{8}$ би требало да износи 37.5%, што ће бити написано као 0.375. У дискусији о задатку 3, наставник је охрабрио ученике да користе своје претходно знање да конвертују $\frac{6}{40}$ у проценте, без употребе калкулатора. Један ученик је записао разломак као $\frac{12}{80}$ и сматра да у циљу да се дође до 100 од 80, он је морао да дода 20, што је $\frac{1}{4}$ од 80, па је додао $\frac{1}{4}$ од 12, тако да је добио $\frac{15}{100}$ или 15%. Други ученик је разломак $\frac{6}{40}$ претворио разломак у $\frac{3}{20}$, затим је помножио бројилац и именилац за 5 да добије разломак $\frac{15}{100}$ или 15%.

Други кључни фактор за успешно решавање задатака су сугестије од стране наставника. Наставник је успео да помогне ученицима, да образложе проблеме, без смањења комплексности задатка. На пример, наставник је прозвао ученицу да реши први задатак. Демонстрирајући први задатак, ученица је осенчила 72.5 од 80 квадрата. Наставник је није одмах исправио, уместо тога, он ју је замолио да објасни своје размишљање, али она није била сигурна. Када ју је наставник замолио да поново прочита задатак, она је схватила да је можда направила грешку. Када је уследила дискусија задатка 1ц, наставник је питао колико класа је могло да се користити да је било укупно 80 квадрата. Ученица је размишљала о томе и одговорила да могу да сазнају колики проценат заузима сваки квадрат, и да сваки квадрат мора да буде више од 1%. Други ученик износи мишљење да је сваки квадрат 1.25%. Ученица је даље објаснила да би после издвајања преостало још

20 квадрата, тих 20 поделити на 80 и то ће дати $\frac{1}{4}$ више за сваки квадрат. Ученица је тада била у стању да покаже колико квадрата треба осенчити за 72.5% . Дакле, наставник је успео да усмери ученицу (и разред) на одговарајуће аспекте задатка.

Три важна фактора који подржавају ангажовање ученика да раде математику су очигледна. Прво, наставник је дозволио одговарајућу количину времена за дискусију о проблемима, пружајући ученицима прилику за разматрање више стратегија за решавање датог проблема. На пример, објашњење ученице (описано горе) за први задатак, други ученик је помножио 0.725 са 80 , и добио 58 , то је $\frac{58}{80}$, затим је скратио на $\frac{29}{40}$. Други ученик је објаснио како користи дигитрон да дође до решења. Кроз све дискусије о задацима, наставник је инсистирао да ученици објасне своје начине решавања. Када би ученици стигли до нумеричког одговора, морали би да објасне на шта се тај број односи и како су дошли до те вредности.

Овај сценарио илуструје разноликост разреда, задатака, наставника, ученика и фактора који подржавају размишљање ученика током решавања задатака. Како се задатак одвијао, наставник је успео да успешно управља сложеним низом фактора потребних да се размишљање ученика одржи на високом нивоу когнитивних захтева задатака.

Пад у процедуралном размишљању без повезанозси са значењем. Овај математички задатак био је саставни део низа предавања која су усмерена на решавање проблема. Ученици су упознати са Polya's процесом решавања проблема у четири корака и решавали су бар један нерутински проблем пре него што наишли на следећи:

За дан мајки, Дејви, мој млађи брат, Кети, моја млађа сестра, и ја сакупљали смо новац да купимо поклон мајци. Дејви је сачувао 80 пенија, две новчанице од 5 центи, и једну новчаницу од 10 центи. Кети ми је дала 3,5 долара и ја сам додао остатак. Заправо, са оним што су ми Дејви и Кети дали било је укупно 17 новчића у мојој каси,укупно 8.12 долара. Које новчанице су биле у мојој каси?(Meyer & Sallee, p. 335)

Ученици су започели рад на овом задатку у малим групама. Очекивало се да ће ученици заједничким радом да реше проблем. Док је наставница, поставила задатак, поделила је свакој групи по једну копију задатка, и један примерак обрасца за уносе Polya's четири корака за решавање проблема. Ученици су упућени да се позову на Polya's кораке како би решили проблем и да сходно томе документују свој рад. Поставка задатка подстиче когнитивне процесе. Решавање задатка захтева сложен и одржив математички начин размишљања и резоновања, јер не може се решити уз добро увежбане примере, лако доступне формуле или поступке.

Током решавања задатка, когнитивни процеси ученика су опадали у току размишљања, постојало је мало или нимало везе са разумевањем или значењем. Неуспех ученика да се ангажују на високом нивоу когнитивних процеса је био под утицајем различитих фактора, пре свега уклањање сложених аспеката задатка. Наставници су објаснили ученицима да морају да прате Polya's кораке, да усмере своја размишљања по унапред осмишљеним путевима, на штету њиховим математичким идејама и процесима. Током решавања задатка, наставница је управљала процесом размишљања ученика од поделе задатка, и током корака који одговарају Polya's процесу. Прво, ученици су упућени на рад на првом Polya's кораку у својим малим групама (разумевање проблема), а затим да о томе дискутују у одељењу. Онда им је речено да ураде исто у другом кораку (разрада плана). Тек након завршетка ова прва два корака ученици су почели да раде на решавању задатка у оквиру својих група. У било ком тренутку, рад ученика је ограничен одређеним Polya's кораком.

У оквиру сваког од ових корака, постоје докази да ученици који се баве Polya's начином решавања задатака, само су површински томе приступили. На пример, док су наствница и ученици разговарали о првом кораку, разумевање проблема, фокусирали су се да наводе главне чињенице овог проблема (на пример, Дејви је сачувао 80 пенија, две новчанице од 5 центи, и једну новчаницу од 10 центи). Они нису одмах прешли на расправу о главним карактеристикама математичких проблема, структури односа између тих функција, или о циљу задатка. Слично томе, у току расправе о другом кораку, стратегија је наведена, али нема дискусије о томе шта је тачно та стратегија подразумевала, зашто је то потребно за приступ тренутној ситуацији, или како се користи стратегија.

На пад, у механичке облике размишљања, утицала је и фокусираност на тачне одговоре. У овом случају, одговор који је оцењен као исправан или неисправан није математичко решење проблема, већ да ли се уклапа у одређени Polya's корак. Коректност одговора ученика у сваком од ових корака је постао фокус, а не математички приступ проблему.

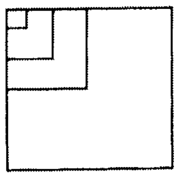
Коначно, на пад ангажовања ученика са високог нивоа когнитивних процеса утицао је и недостатак времена. Решавање задатка је било веома брзо, прелазак са једног корака на други са веома мало времена посвећеног стварном решавању проблема. У сваком кораку, ученици су дискутовали у оквиру својих група, уз превремена заустављања када су поједини ученици тражили да прикажу своје одговоре читавом разреду. Ученици су имали само 10 минута да раде на решавању проблема *Дан мајки* (трећи корак). Када је наставница саопштила да је време истекло, многе групе су изразиле потребу за више времена.

Све у свему, радећи на овом потенцијално вредном задатку ученици нису напредовали у смислу ангажмана на математичким садржајима и процесима уграђеним у проблему. Фрагментишући и усмеравајући размишљање ученика, употребом Polya's корака у овом случају, дошли смо до механичког размишљања, а не до суштинског и креативног ангажовања на проблему.

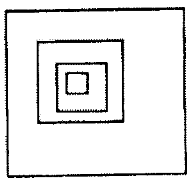
Пад услед несистематичних истраживања. Општи циљ овог низа истраживања је да се ученици упознају са појмом мерења, као и односа између линеарног и површинског мерења. Ученици су предходно одслушали низ предавања која обухватају линеарна и површинска мерења. У поставци задатка, свака група од три или четири ученика, добила је од наставника лист са објашњењима шта је њихов први задатак, да направе квадратни метар. Требало је да направе квадратни метар што је могуће ефикасније коришћењем следећих материјала (али не и маказе): папир, трака, лењири, основу десет за мерење. Након прављења квадратног метара, ученици су требали да направе квадратни дециметар, центиметар, и квадратни милиметар у једном углу свог модела квадратног метра (постављање мањих квадрата унутар већих). Изградњом квадратног метра ученици су могли да стекну добар осећај о величини квадратног метра и како је његова величина у вези са другим јединицама за мерење површине. Поред тога, ученици су могли да користе своје моделе и да истражују и друге правоугаонике са истом површином. Поставка задатка охрабрује ангажовање ученика. У извршавању задатка, ученици су морали да се ослањају на знање стечено из својих предходних искустава са мерењем, и да одлуче коју јединицу мере и које мерне алате да користе, обзиром на ограничења која су постављена од стране наставника. Такође, ученици су морали да нагађају како да изграде квадратни метар ефикасно и тачно и како да покажу односе међу различитим величинама квадрата.

Како се одвијало решавање задатка, постало је јасно да, иако су ученици радили на задатку, когнитивни захтеви задатка нису одржани. Као што доказују њихови методи конструкције, многе групе су посматрале своје квадрате искључиво у смислу линеарне димензије, без фокуса на површинске јединице. Многе групе су градиле своје моделе на следећи начин, прво су првили четири жице од папира, свака дужине један метар, затим би формирали квадрат, и на крају попуњавали празан простор у средини (у суштини прво су правили обод). Такође, недостатак ученичког ангажовања, евидентан је у начину на који су многе групе тумачиле упутства за моделовање мањих квадрата. Изгледало је да су промашили поенту, правећи мање квадрате као изоловане моделе, један унутар другог. Наставник је намеравао да ученици праве мање квадрате, тако да сваки квадрат дели област и делимично ивице са квадратима већим и мањим од себе (види *Слику 10* за илустрацију), што визуелно јасно ствара односе између различитих мера, линеараних и површинских.

Један од разлога зашто ученици нису успели да реше задатак на очекивани начин је што је постављен на неадекватан начин и нису јасно наведена специфична очекивања. О чему сведочи велика количина времена проведеног у конструкцији са чињеницом да ученицима треба дати више смерница о томе шта се очекује од њих, у смислу како да сместе мање квадрате у оквиру већих модела. Наставник је могао да наговести ученицима да поставе мање квадрате у веће, тако да односи између мерних величина буду очигледни. Ово упутство би усмерило ученике, одржавајући когнитивне захтеве задатка на истом нивоу. Додатни разлог, односи се на неадекватност задатка за ове групе ученика, је што се јавља недостатак предходног знања, потребног да се ефикасно реши проблем. Многи ученици нису имали потребна знања о везама између различитих линеарних величина, а посебно о томе како се линеарна величина може односити на површину.



Начин на који је требало да ученици реше задатак.



Начин на који је већина ученика решила задатак.

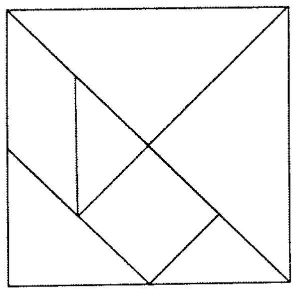
Слика 10. Задатак „Направити квадратни метар"

Други фактор, који је утицао на пад когнитивних захтева, је то што је ученицима дато превише времена да изграде своје моделе квадратног метра. Ученици су добили предуг период да заврше своје активности. Ако би био дат чвршћи рок, неке групе би биле више мотивисане да раде ефикасније. Такође, пошто су се многе групе мучиле у овом почетном делу задатка, можда је корисно да наставник интервенише у раду тих група раније то би им помогло да ефикасније усвоје план рада.

Коначни фактор који је утицао на пад приликом израде овог задатка је да су неки од математички сложених аспеката задатка уклоњени или остали у сенци дуготрајаног процеса изградње квадратног метра. Групе које су достигле део задатка у којем је требало да се направе различите мерне величине за површину нису биле фрустриране задатком. Начин на који су то многе групе урадиле (приказан на *Слици 10*), показује да они нису схватили значај распореда ових квадрата.

Пад услед нематематичких активности. Општи циљ овог низа предавања је да подстакне ученике да користе моделе да открију својства геометријских фигура уместо да их механички уче напамет. Овај задатак посебно се фокусира на углове и како могу да се користе да дефинишу различите врсте троуглова.

У поставци задатка наставник је сваком пару ученика дао танграм слагалицу (*Слика 11*) која се састоји од пет троуглова, једног квадрата и једног паралелограма. Ученици су такође добили и лист са задацима. Од оченика се очекује да: а) препознају два дела који су исти (подударни) и да их елиминишу; б) евидентирају типове углова који се јављају код осталих пет фигура; в) размотре и евидентирају сличности и разлике код углова тих фигура.



Слика 11. Задатак „Танграм"

Ово истраживање је требало да доведе до закључка да су троуглови танграм слагалица једнакокраки, да у слагалици постоје два пара подударних труглова, да су оштри углови свих троуглова и оштри углови паралелограма међусобно једнаки. Ученици нису много, ако су уопште, остварили некакав напредак кроз овај задатак. Они су се највише укључивали у задатак када је наставник био код њиховог стола, помагао им и постављао питања. Током осталог времена, они су били само делимично заинтересовани, претежно су седели беспослени, играли се слагалицом на матаматички некористан начин, или разговарали са другим ученицима у разреду о темама које се не тичу математике. Ученици нису успели да се укључе у високи ниво когнитивних процеса из више разлога. Разлог је пре свега неадекватност задатка у погледу недовољно јасних и конкретних очекивања. Очекивања задатка нису била довољно прецизна да воде ученике ка откривању математичких особина. Недостатак конкретности је посебно проблематичан, јер ученици нису имали предходно знање које је неопходно да би ефикасно направили поређења. На пример, незнање ученика да разликују оштре, тупе, и праве углове омета их у покушају да евидентирају и генерализују своје налазе. Као резултат, већина ученика играла се са неколико поређења, али није успела да оствари напредак.

Други фактор који је довео до пада у когнитивним захтевима је управљање проблемима у учионици. На почетку фазе имплементације, некима од ученика је била потребна оловка, другима је био потребан папир за записивање чињеница до којих су дошли, а остали су радили или се играли са деловима танграма. Током фазе решавања задатка, значајан број ученика слободно се шетао учионицом, обилазећи своје пријатеље. Многи ученицису су се искључили из задатка, јер нису били сигурни како да наставе са решавањем задатком. Коначни фактор који је допринео паду нивоа ангажовања ученика на овим задатку је превише времена. Упркос чињеници да је напредак у раду мали, ученицима је било дозвољено да наставе рад на том задатку још 38 минута. Број ученика који су се искључили из решавања задатка стално је растао у том периоду, када су дошли до закључка да не могу ефикасно да наставе рад на задатку.

Овај, потенцијално вредан задатак, био је типичан представник задатака који су одбијени због изазивања нематематичких активности. Конкретно у овом случају, управљање проблемима насталим у учионици и проблем са временом уско су повезани са проблемом неслагања између сазнајних захтева задатка и предзнањем ученика.

3.6. Резиме и закључци

На почетку студије, тражи се да се обрати пажња на три области: (а) да се утврди који облик фактора, повезано са задацима који су постављени да подстакну ученике да се баве математиком, утиче на ученике да се укључе на високом нивоу размишљања и резоновања, (б) да опише факторе који утичу на три карактеристична обрасца пада ангажовања ученика са високих когнитивних процеса, и (в) да обезбеди детаљне квалитативне приказе из базе података како би илустровали сва четири обрасца и профила фактора повезаних са њима.

Резултати истраживања указују на скуп фактора који помажу ученицима да се укључе на високим нивоима. Међу њима су фактори који се односе на примереност задатка за ученике и подршка од стране наставника, као што су зона наредног развоја и стално инсистирање на томе да ученици обезбеде смислена објашњења или да успоставе значајне везе. Ови налази говоре о улози наставника у реформисаним учионицама, у којима се од ученика очекују да буду активно укључени у решавање математичких задатака. Не само да наставник одабере одговарајуће и математички вредне задатке, већ да активно и доследно подржава когнитивну активност ученика без смањивања комплексности и когнитивних захтева задатка. Пад ангажовања ученика на ниже нивое когнитивних активности догодио се на различите начине и из различитих разлога. За сваки од три обрасца пада, може да се идентификује скуп доминантних фактора који су допринели паду у когнитивним захтевима задатака.

Није лако утврдити профил фактора који су повезани са падом при несистематичним истраживањима, образац који није предвиђен у почетном систему кодирања. У овом обрасцу, ученици су озбиљно покушавали да раде задатке који су захтевали висок ниво когнитивних активности, и наставници су покушавали да одрже ангажовање на високом нивоу, али на крају ученици нису били успешни. Недостатак јасног фактора повезаног са профилом овог модела може бити због неадекватности у категоријама фактора. Ова претпоставка је емпиријско питање које може да захтева даља истраживања.

Кроз сва три обрасца пада постојао је један фактор, неадекватна количина времена додељена за задатак (или премало или превише), међутим овај фактор другачије функционише у сваком од три обрасца пада. У складу са истраживањима о ангажовању ученика, ови налази сугеришу да планирање одговарајуће количине времена и флексибилност са временским одлукама играју важну улогу у избегавању смањења нивоа когнитивних активности од стране ученика (Doyle, 1986). Друга два фактора, уклањање сложених аспеката задатка и неадекватност задатка из разних разлога (нпр. недостатак интересовања, мотивације, знања, или нејасна очекивања задатка) били су доминантни утицаји у два од три обрасца пада.

Резултати су омогућили да се испитају фактори који нису оцењени као утицајни у три карактеристична обрасца пада ангажовања ученика. Утврђено је да је проблем руковођења одељењем био доминантан утицај у само једном од три карактеристична обрасца: пад услед нематематичких активности. Будућа истраживања би дубље истражила варијације у начинима управљања проблемима у учионици, да ли то јесте или није утицало на различите обрасце пада у задацима који су на располагању у бази података (Doyle, 1988).

4. Употреба симбола, речи и дијаграма као показатеља усвајања математичког знања: неформални модел

Овај рад приказује резултате студије која се бави стратешким вештинама, схватања геометријских и алгебарских појмова, ученика осмог разреда током њиховог ангажовања у решавању задатака. Посматране стратегије су изведене из теорије Двоструког кодирања (Dual Coding Theory – DCT, Paivio 1971, 1990). Сврха студије је провера модела који истиче стратешке вештине представљања као посредника вештина читања, просторне оријентације и представљања задатка у решавању проблема. Предложени модел је тестиран коришћењем линеарно структурних једначина.

Изазов за данашње предаваче математике је стицање посвећености савременим теоријама и моделима учења који ће објаснити повећање разумевања математике, како је приказано и описано у националним општим документима (Kilpatrick, Swafford, Findell, 2001; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000) Посвећеност теоријама учења је неопходна јер дозвољава предавачима, менторима, креаторима наставног плана, креаторима политике и родитељима да досегну ван посматраног понашања и учинка ученика, чиме се долази до закључака шта доводи до пораста у разумевању математике. Овај рад потврђује да је неопходно представити и теоријске и емпиријске податке предавачима математике који се посвећују новим идејама о начину на који ученици размишљају (NCTM, 1995).

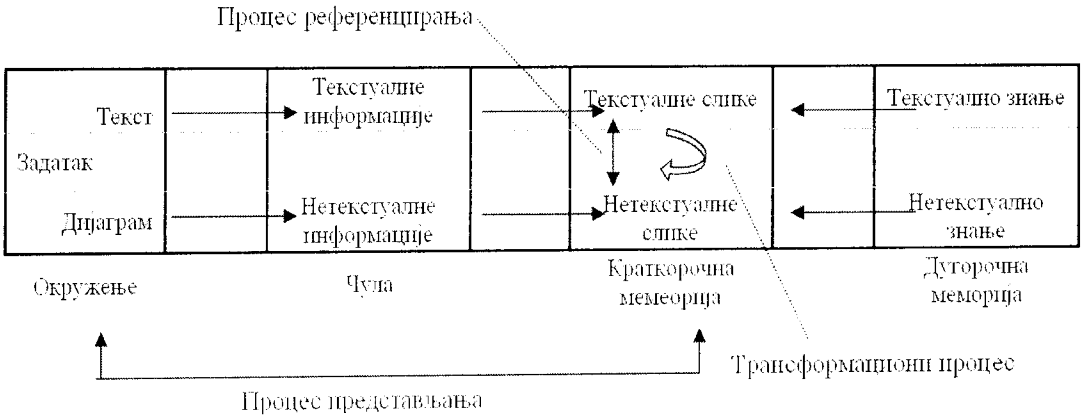
Како је већина предавача математике, оформила основне идеје о математичком начину размишљања из принципа заснованих у развојним теоријама, теоријама понашања и теоријама заснованих на интелигенцији, највероватније ће морати да промене своја веровања о начину на који ученици уче и креирају нове моделе учења. Нажалост, постоји неколико модела учења математике који су конзистенти са тренутним теоријама и многим запажањима код ученика успешних у математици. Последица овога је да су нови нацрти за учење и промене у наставним плановима вођени одозго на доле, без много посвећивања пажње развоју појма учења код предавача. Студија, изложена у овом раду, указује на потребу за новим моделима учења како би се помогло предавачима у интерпретацији различитих математичких способности. Овим би се омогућило да предавачи долазе до правилних закључака о узроцима математичких успеха, неуспеха и развоја.

Савремени начини учења математике, који се могу наћи у Принципима и стандардима за школску математику (Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, 2000), нису довољни као модели сазнања и учења јер пружају само описе (нпр. видове) математике која се учи. Овај мета-теоријски приступ опису учења има дугачку историју у настави математике и заснован је на радовима Greeno (1977), Heibert i Carpenter (1992) i Schoenfeld (1985, 1992). Сличност у овим радовима је што описују учење математике као пратећи раст у оквиру базе знања, стратегија, метакогниције и мотивације, и засноване су на основама обраде информација које сугеришу на капацитет у основним меморијским системима, чиме подржавају и ограничавају мишљење.

Студија представљена у овом раду предлаже модел који је изграђен на налазима о ефикасности основних вештина, као што су читање и просторна оријентација, и укључује предходна сазнања која потврђују интеракцију ученика са спољашњим презентацијама након које стратешки конструишу унутрашња и спољашња представљања за решење проблема. Циљ студије је да се предавачи упознају са тачним и корисним алтернативним моделом током процеса мењања њиховог схватања како ученици прилазе активности представљања у решавању проблема.

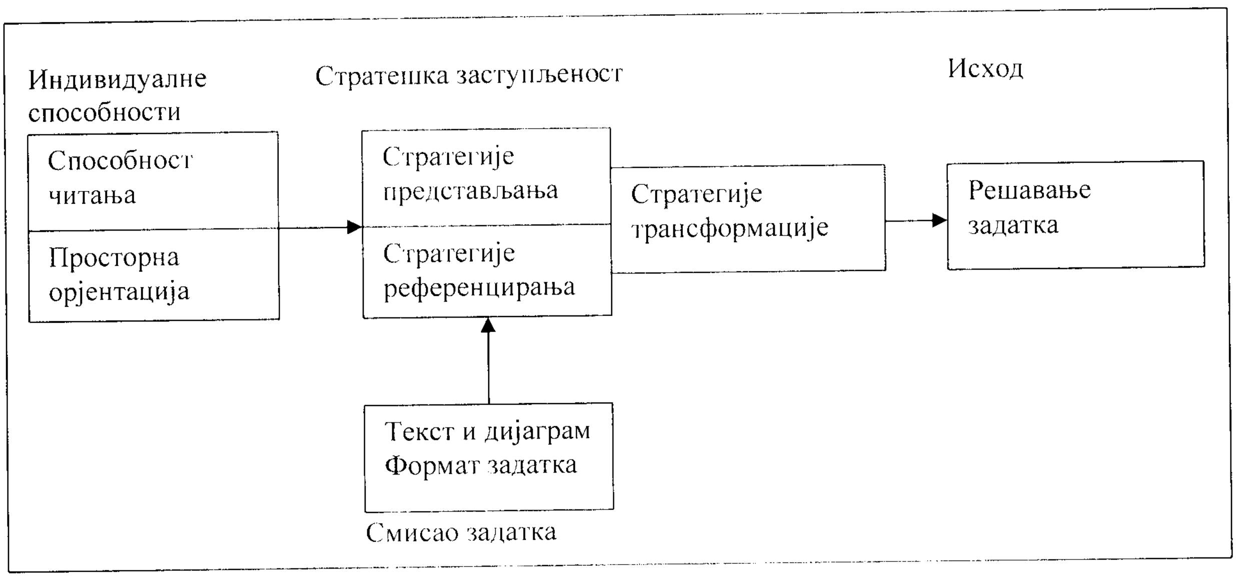
4.1. Теоријски модел стратешког представљања

Предложени модел је базиран на двема основама. Прва је модел четворокомпонентне обраде информација, који је Силвер (Silver, 1987) представио предавачима математике – модел који уочава основне компоненте когнитивног система човека. Четири компоненте су окружење, чула, краткотрајно и дугорочно памћење. Друга основа је Теорија двоструког кодирања (Dual Coding Theory – DCT, Paivio, 1971, 1990) која уочава три процеса битна за ову студију: процес представљања, процес референцирања и организационо-трансформациони процес. Ови процеси помажу уочавању разлика између функционалних особина унутрашњег представљања и структурних особина самог представљања. Као схватање функционалности унутрашњег представљања, *Дијаграм 1* приказује да визуелни модалитет, као подстицај из окружења, мора прво бити прихваћен путем чула вида како би био претворен у информацију (Paivio, 1971, 1990). Битно је напоменути да DCT описује специфичан систем представљања појединачно за свако чуло (нпр. вид, слух, додир и сл.). У оквиру визуелног домена, текст и дијаграми који су представљени у окружењу, резултују аналогним запажањима која су представљена у краткорочној меморији истим системом симбола као и оригинални стимуланси, или се информација преводи у алтернативни систем симбола кодова (нпр. слике дијаграма у слике текста), кроз процес описан као процес референцирања. Уколико су унутрашње представе стимуланса активно организоване и претворене у краткорочну меморију, онда се формирају нове представе које не деле исте површинске карактеристике као и доживљени стимуланс.



Дијаграм 1. Модел четворокомпонентне обраде информација.

Дијаграм 2 открива централну хипотезу студије, укључујући стратегијско представљање као медијатора утицаја индивидуалних карактеристика читања и просторне оријентације, који могу бити разнолико употребљени под умереним утицајем контекста задатка. Паралелно са развојем способности читања и просторне оријентације потребан је раст спретности стратешког представљања које утиче на учинак решавања проблема. У даљем тексту следи детаљније о променљивима представљеним на *Дијаграму 2*.



Дијаграм 2. Модел интеракције између индивидуалних променљивих, смисаоне променљиве и стратешки заступљених променљивих.

Способност читања и просторне оријентације. Налази истраживачких студија су идентификовале, статистички битну, позитивну релацију између различитих типова тестова способности читања и просторне оријентације (Battista, 1990; Bishop, 1990; Friedman, 1994; Hembree, 1992; Kilpatrick, 1975; Sherman, 1980; Silver & Thompson, 1984; Treacy, 1944). Временом се кроз надмоћ доказа подржало веровање међу предавачима да су способност читања и просторне оријентације критични фактори за објашњење индивидуалних и групних успеха и неуспеха код ученика на тестовима математике.

У случају способности читања постоји фокус на снажном ефекту различитих типова тестова читања и њихових веза са математичким способностима. Трејси (Treacy, 1944) је представио доказе и о значају вербалних способности. Кроз математичке тестове и 15 различитих тестова способности читања, Трејси је указао на ефекте различитих способности као што су обим лексикона речи и разумевање. Свеукупни налази указују да су појединачни тестови значајно повезани са математичким способностима, што имплицира да индивидуе поседују генерализоване вербалне способности на основу којих се може предвидети способност решавања математичких проблема. До 1992. године је сакупљено толико доказа, да постоји веза између способности читања и оријентације у простору, да је метаанализа 47 оваквих студија произвела довољно велики ефекат у шестом, седмом и осмом разреду (Hembree, 1992). У последње време, пажња се је пребачена на ученике који уче енглески као други језик са истим нагласком на способности читања као разлога за лош успех у математици. Нажалост, са свом пажњом окренутом ка способности читања, мало се сазнало зашто особе са добрим способностима читања имају успеха у решавању математичких проблема (Kilpatrick et al., 2001).

Истраживања о способности оријентације у простору и њеним односом са успехом у математици су мање закључива. Нема генерализованог ефекта који је прихваћен међу истраживачима и критичарима ове литературе која је документовала широк спектар односа између различитих просторних тестова и успеха у математици (Battista, 1990; Bishop, 1980; Clements & Battista, 1992; Friedman, 1994; Hembree, 1992; Sherman, 1980). Тартре (Tartre, 1990) објашњава да недостатак доследности у мерењу просторне оријентације, у литератури за наставу математике, је узрокован распоном документованих ефеката. Она предлаже да просторне вештине формирају фактор другог реда, са просторном визуализацијом и просторном оријентацијом као факторима првог реда. Тартре је дефинисала просторну визуелизацију, као менталну манипулацију објектима или деловима објеката. Супротно томе, она идентификује променљиве просторне оријентације као могућност разумевања статичних визуелних репрезентација. Истраживања у овој области генерално подржавају ову класификацију.

Способност оријентације у простору овде је посматрана због њене доследности са потребама посматраних задатака, односно задатак представља резултате са фиксним односима, које је потребно разумети без употребе менталне манипулације. Тартре (Tartre, 1990) као и разјашњава структуру просторне оријентације, посебно дефинисане као способност разумевања визуелне репрезентације без потребе за употребом визуализације неопходне за стварање менталне слике покретних објеката. Тартре користи за мерења перцепције Гешталтов завршни тест, и сугерише да морају да утичу на вештине решавања математичких задатака јер тестови мере менталну организацију информација представљене фигуре, когнитивну способност која се такође назива и *брзина закључивања* (speed of closure). Из перспективе конструктивизма, способност просторне оријентације изгледа да је повезана са идејом просторног структурирања које Батиста и Клемент (Battista & Clements, 1996) описују као конструкцију структуре или форме објекта. Претпоставили су да је просторно структурирање велика снага у раду ученика са просторним задацима, и сугерисали су да способност конструисања форме објекта варира од ученика до ученика као и да је битан фактор у разумевању њхових стратегија у решавању задатих математичких проблема.

Стратегијско представљање. Стратегијско представљање у визуелном модалитету се састоји од три менталне стратегије повезане са три интерна процеса DCT. Ова изјава је заснована на претпоставци да функционалне карактеристике три процеса DCT одређују како и када се дешава активирање специфичних унутрашњих представљања. Сама унутрашња представљања, типично посматрана као индивидуалне когнитивне конфигурације, и њихови одговарајући спољашњи прикази су били центар истраживања представљања у математици. Супротно овоме, фокус је на томе како су конструисана специфична представљања, одвајајући унутрашње процесе од опажених продукта којим могу резултирати под контролисаним условима (Paivio, 1990).

Три категорије стратегија омогућене од стране DCT процеса, и то су стратегије представљања, референцирања и трансформације. Прва категорија, *стратегија представљања*, се користи за представљање писаног текста из претходно запамћеног текста и цртање дијаграма који представља информацију која није представљена текстом. Резултујући текст и дијаграм често су посматрани као физичка и лингвистичка спољашња представа индивидуалних математичких идеја. Ипак су и продукт менталног процеса који их ствара. У суштини, истраживања меморије и когниције су открила да развој унутрашњих стратегија представљања може објаснити репродукцију речи и сећање облика фигура (Morris & Gruneberg, 1994; Paivio, 1971).

Друга категорија стратегијских вештина представљања, *стратегија референцирања*, је одговорна за начин на који се не текстуални прикази формирају из речи и како се текстуални прикази формирају из слика (Paivio, 1971, 1990). Као и са стратегијама представљања, најпрактичнији доказ који је уочен да је употребљен процес стратегијског представљања, јесу спољашњи текстови или слике конструисане након интеракције са датим информацијама истог симбола (Paivio, 1990). Промена из једног система представа у другу, при очувању значења, у настави математике је предложена као трећи од пет нивоа таксономије (Hitt, 1998). Такође је прихваћено да ученици могу и да раде скице дијаграма при решавању проблема и да успешно користе језик као средство комуникације о дијаграмима, нарочито код дијаграма који садрже геометријске информације (van Hiele, 1986).

И као коначна, *стратегија трансформације* је дефинисана као скуп организационих и трансформационих процеса које идентификује DCT (Paivio, 1990). Стратегија трансформације објашњава како се нова спољашња представа претвара да би се описали објекти или структуре које нису дефинисане током предходних сусрета или представљених стимуланса. При креирању нове унутрашње представе користе се постојеће унутрашње представе које су направљене кроз процес представљања или процес референцирања или су преузете из информација у дугорочном памћењу. На пример када ученици креирају алгебарски појам из статичних речи, симбола и слика, користе стратегије трансформације како би направили нову форму представе за задатак. Како је овде дефинисано, стратегије трансформације се ослањају на унутрашњу представу формирану из представљених информација или дугорочног памћења и фокусирају пажњу на имплицитну структуру задатка.

Смисао задатка. Дошло је до акумулације доказа о значајном утицају смисла, садржаја и формата задатка на резултате решавања проблема (Kilpatrick, 1975). Употреба дијаграма у решавању проблема се показала као врло ефикасна у многим студијама метаанализе која открива значајан средњи ефекат кроз мноштво примера. Иако постоји изобиље доказа о ефекту дијаграма у литератури, постоји интересовање за објашњењем како и зашто ученици успешно користе дијаграме и текст током решавања проблема.

Објашњења о ефикасности дијаграма варирају од претпоставки да они смањују потребу за писменошћу, преко веровања у једноставни ефекат надоградње, до комплексних објашњења обраде информација која описују ефекте као функције приступања ресурсима краткорочног памћења. Опште мишљење да дијаграми чине задатке једноставнијим, тако што смањују њихову тежину, у оквиру потребног нивоа писмености, није емпиријски потврђено. Заправо, студије су показале да не постоји знатна предност код ученика који су суочени са задатком који захтева низак ниво писмености од ученика који добијају релативно супериорнији ефекат представљених дијаграма у задатку. Недостатак утицаја снижавања потребног нивоа писмености, за решавање задатка, подржава један од ставова у настави математике да дијаграми имају независан утицај од текста и да је то утицај надоградње. Централна идеја овога је да се пружањем више информација отвара више могућности за повезивање предходног знања и самим тим побољшава ефикасност решавања проблема.

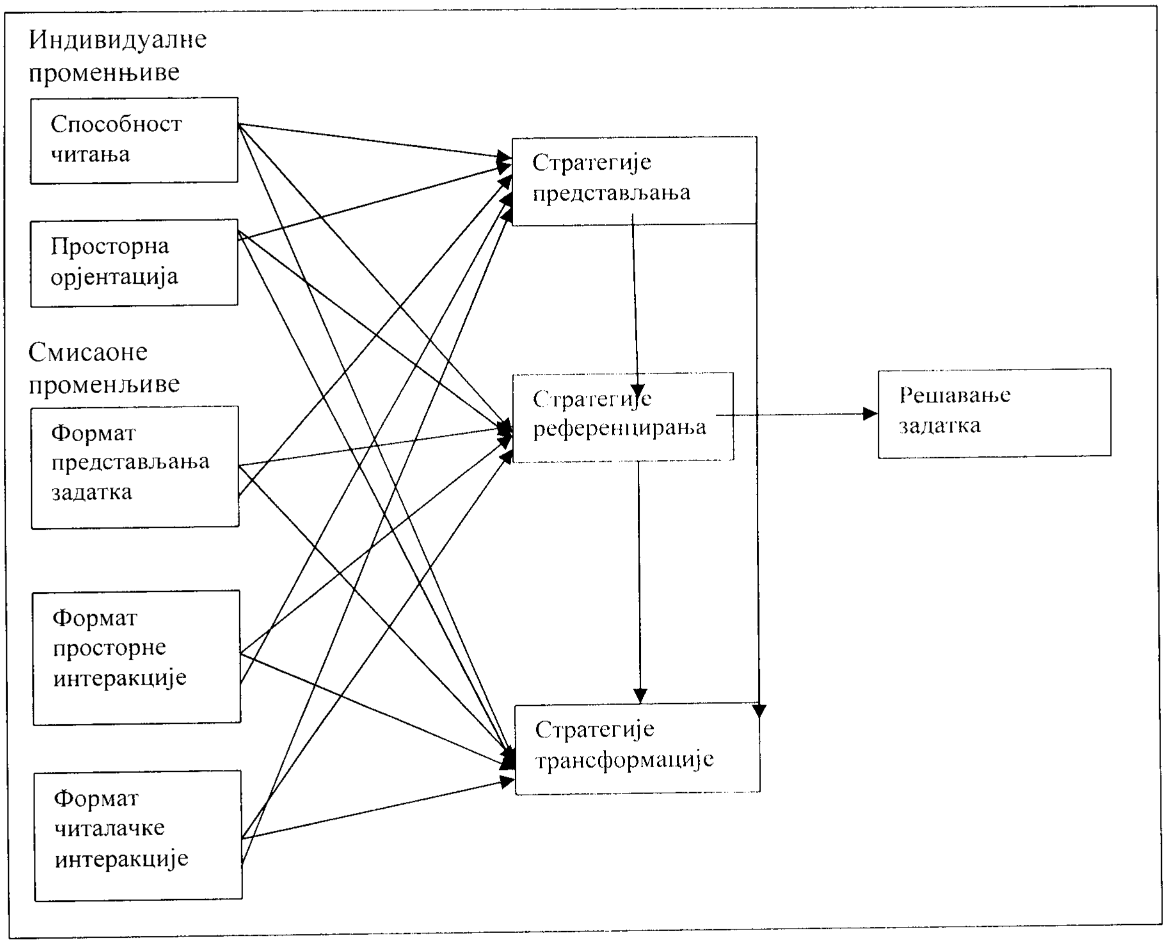
Ипак, скорашња објашњења утицаја дијаграма сугеришу да различите комбинације текста са дијаграмима производе комплекснији ефекат интеракције од једноставног ефекта надоградње код свих ученика (Mayer & Anderson, 1992; Mayer & Gallini, 1990; Mayer & Sims; Pyke, 1996). Ови истраживачи тврде да се дијаграми и текст надмећу за ограничени простор у краткорочном памћењу правећи ефекте интеракције као што су подељена пажња и когнитивни капацитет. Ово истраживање прикаказује да, у неким случајевима, додатак дијаграма не доприноси позитивним ефектима које предвиђа ефекат надоградње.

Студије које су прављене са намером да кроз посматрање рада ученика направе увид у разумевање зашто дијаграми понекад не успевају да буду успешни колико се очекује од њих, су закључиле да неки ученици обраћају пажњу само на детаље на дијаграму, сматрајући их више сликама него фигурама за представљање генерализованих особина. На пример (Sherrill, 1973), дошло се до тога да ученици, којима су дати задаци са прецизним дијаграмима (нпр. проблеми са прецизно представљеним угловима), показују боље резултате у поређењу са онима који добијају непрецизне дијаграме или само текстуалне задатке. Закључено је да, у случају непрецизних дијаграма, ученици претпостављају да су детаљи дијаграма тачни (нпр. изглед задатог угла), и игноришу информацију у текстуалном облику. Ови налази се слажу са новијим идејама које предлажу да ученици не разумеју концепт дијаграма и не успевају да успешно употребе одговарајуће стратегије за њихову успешну употребу.

Способности и интеракција задатка. У случају студија текста и дијаграма, резултати интеракције су показали да постоји веза између формата задатка и способности читања и просторне оријентације, тако да реакција на дијаграме и текст значајно варира у односу на профил способности ученика. Ово истраживање је пронашло да ученици са слабим способностима читања, налазе тешким задатке базиране само на тексту у односу на ученике са бољим способностима читања. Исто тако, ученици са бољим способностима оријентације у простору имају велику предност, када су дијаграми укључени у задацима, у односу на ученике са слабијим способностима просторне оријентације (Mayer & Simms, 1994; Pyke, 1996). Да би се издвојили различити учинци, приписани ефекту интеракције из директног утицаја способности и формата, ова студија представља мерења ефекта интеракције као јединственог извора променљивих у резултату решавања проблема.

Путања тестирања модела. Теоријске идеје DCT (Paivio, 1990) пружају образложење за сугерисање неформалног поретка промењивих које разматра студија. Овакав неформални поредак или модел односа променљивих је приказан на *Дијаграму* 2.

Ланац расуђивања сугерише да способности и формат задатка доприносе употреби стратегија представљања, које затим доприносе постизању бољег учинка. Такође су подразумеване хипотезе посредовања обухваћене студијом представљене недостатком директних веза (нпр. путева) између индивидуалних и контекстних променљивих и коначних променљивих.



Дијаграм 3. Путања дијаграма одређује специфичне везе између променљивих у истраживању.

Дијаграм 3 представља модел веза студије, који открива везе између променљивих које треба проценити. Још једном је битно приметити везе које недостају на дијаграму, како би разумели хипотезу посредовања студије. Прецизније, везе које недостају откривају да стратегије представљања, референцирања и трансформације посредују у улози способности читања, просторне оријентације и формату представљеног задатка. Уколико је модел исправан, без директних утицаја способности и променљивих формата у објашњавању решавања задатка, резултате би било могуће прецизно предвидети из оцена ученика за сваку променљиву и предвиђених веза између парова променљивих.

4.2. Методи

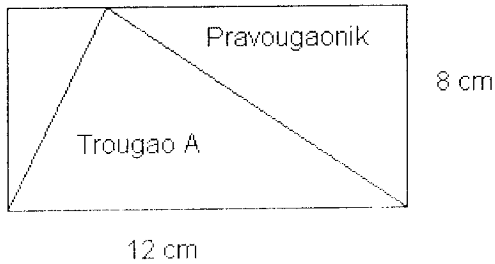
Подаци за истраживање прикупљени су од 174 ученика осмог разреда из одабраних градских и приградских школа, из два града средње величине у оквиру једне државе на североистоку Сједињених Држава. Појединачни ученици су изабрани на основу свог залагања и уз дозволу њихових школа, наставника и родитеља. Четири наставника математике из две школе, у два различита округа, радили су са ученицима који су учествовали у истраживању. Наставници у школама су потврдили да међу учесницима постоји нормалан опсег различитости, и различити нивои математичких способности.

Сакупљање података. Подаци су добијени из школске евиденције и од процене на часовима. Подаци прикупљени на часовима укључују одговоре ученика на тестовима просторне оријентације и на процени истраживача који су захтевали мерење стратешки заступљених променљивих. Резултати за способност читања добијени су из школских евиденција. Ученицима су случајним избором додељивани задаци у формату текста или дијаграма. Као резултат тога, за оба формата података (текст наспрам дијаграма) добијен је сличан број ученика из сваке школе.

Материјал за истраживање. Седам појединачних задатака осмишљено је тако да једнако допринесу збиру бодова који би указивао на способност ученика да примењују како алгебарска тако и геометријска знања при решавању проблема (NCTM, 1989, 2000). Да би се постигла ваљаност садржаја, седам задатака је одабрано након ригорозног развојног процеса. Одабрани задаци су морали да задовољавају следеће критеријуме: а) применом геометријских односа потребно је решити проблем, (б) израз или једначина која представља алгебарски део је садржана у структури проблема, и (в) за постизање решења потребна је интеграција обе вештине, тако да од исправног решења могло би се закључити да су ученици примењивали геометријске релације и користили алгебарске вештине. На *Слици 12* представљен је пример задатка који је изабран за употребу у овој студији.

Формат дијаграма

Троугао у правоугаонику



Који део површине правоугаоника није прекривен троуглом А?

Текстуални формат

Троугао у правоугаонику

Најдужа страна троугла представља дужину правоугаоника, који има димензије 12 центиметара и 8 центиметара. Трећа тачка троугла налази се на супротној дужој страни правоугаоника. Који део површине правоугаоника није прекривен троуглом?

Слика 12. Пример задатка коришћеног у истраживању.

Читање и просторна оријентација. Резултати читања и просторних способности добијени су из поузданих тестова. Способност читања мерена је степеном читалачке способности - Degree of Reading Power (DRP) тестом (Touchstone Applied Science Associates [TASA], 1995). Добијени резултати представљају способност ученика да схвате и површински разумеју текст док читају. Површинско разумевање је разумевање текста као предуслов за анализу, процену, као и проширивање идеја у текстуалном саопштењу (TASA, 1995). Завршни Гешталт тест је коришћен за мерење способности просторне оријентације. У овом процесу, начин задавања задатка користи се као променљива за шифровање (текст = -1; цртеж= 1).

Стратешка заступљеност променљивих. Циљ, приликом процене стратешке заступљености, је био да се пронађу докази да ученик може да користи три врсте стратегија које проистичу из унутрашње заступљености процеса DCT. Три стратешке заступљености променљивих су мерене на основу анализе одговора. За потребе ове студије, ученици су одговорили на низ од три питања на посебном листу папира одмах након покушаја да реше сваки задатак. Прво питање је било, „употребом само речи описати проблем на ком сте управо радили“; друго питање је било:“ нацртати и означити слику или дијаграм који представља проблем на ком сте управо радили“ и треће питање, „користећи бројеве и симболе написати реченицу, математички израз или једначину, која би се могла користити да се реши проблем на ком сте управо радили".

Оцењени су сви одговори (тј. текстуални, дијаграм, и алгебарски), евидентиране су оцене за поједине задатке на појединачним променљивим на посебним обрасцима за оцењивање. Критеријуми за оцењивање текстуалних одговора и дијаграма су основани са циљем да се укаже колико је користан појединачан одговор за напредак ка решењу задатка. Задовољавајући текстуални одговори садрже податке: шта је требало урадити да се реши проблем, коришћење одговарајућег математичког речника, и нема информација о процесима који не доводе до исправног решења. За нетекстуалне одговоре, корисни критеријуми укључују одговарајуће доказе да је нацртан дијаграм и да дијаграми не садржи нетачне податке. Рубрике су конструисане тако да омогуће лаку класификацију одговора у корисне (кодиране са 1), и некорисне (кодиране са 0) категорије, мада постоје и одговори који се не могу сврстати ни у једну од ове две рубрике.

Укупан број бодова израчунава се као сума оцена за сваки задатак. Укупне оцене су у распону од 0 до 7. Практичан резултат коришћења ових критеријума је да оцене корисно указују на постојање спољашњих симбола, да су ученици ангажовани у процесима за креирање унутрашњих представа имали потенцијал да подрже решавање проблема. Насупрот томе, некорисни резултати, грешке или недостатак информација, сугеришу на могући недостатак у заступљености и стратегијама референцирања које би могле да објасне слаб учинак у решавању проблема. Кронбах алфа је коришћена за тестирање поузданости скале, што показује да је скуп од седам задатака мало бољи за процену стратегија референцирања (α= .77) него стратегија представљања (α= .65).

Оцена за трећу стратешку заступљеност променљиве, стратегија трансформације, означена је од стране ученика одговорима на треће питање након сваког задатка. Критеријуми за бодовање су развијени на основу корисно/не корисно разлике изведене из анализе огледних података. Корисне одговоре карактерише постојање формула, једначина, или израза који су могли да се користе за генерисање исправног решења. Поред тога, корисни одговори не садрже никакве грешке у формулама, изразима, или једначинама које су од суштинске важности за успешно решавање проблема. Постоји један изузетак у овом другом критеријуму, дозвољене су грешке у аритметици. На пример, ако проблем захтева да се израчуна обим фигуре, обим је изражен исправним сабирањен, али бројеви нису били сабрани исправно, онда је грешка занемарена. Кронбах алфа од .84 показује поузданост оцењивања кроз задатке.

4.3. Резултати

Тестирање степена читалачке способности открива типичну расподелу резултата на овом узрастном нивоу (M = 62.6, СД = 16.61) и завршни Гешталт тест даје подједнако типичне резултате (M = 12.06, СД = 3.28). Процена читања и способности просторне оријентације по формату интеракције променљивих резултирала је следеће: читање по формату (M = .83, СД = 64.93), способност просторне оријентације по формату (M = - .08, СД = 12.53). Средње оцене и стандардне девијације су приказане у Табели 8. Средње вредности у *Табели 8* откривају да су ученици били успешнији са стратегијама представљања и референцирања него са стратегјма трансформације.

Табела 8: Средње оцене и стандардне девијације.

Облик презентације	M		СД
		Заступљене стратегије	
Дијаграм	4.63		1.96
Текст	2.49		2.20
Комбиновано	3.57		2.33
		Референтне стратегије	
Дијаграм	3.07		2.55
Текст	2.73		1.85
Комбиновано	2.90		2.23
		Трансформационе стратегије	
Дијаграм	1.40		1.64
Текст	1.41		1.92
Комбиновано	1.40		1.78
		Карактеристике задатака	
Дијаграм	1.81		1.77
Текст	1.53		1.83
Комбиновано	1.67		1.80

Напомена. Резултати су добијени на основу одговора 174 ученика на истом скупу од седам задатака приказаних у различитим форматима, 88 ученика је добило верзију дијаграма, 86 ученика је добило текстуалну верзију.

4.4. Дискусија

Истраживање извештава у овом чланку о тестираном моделу осмишљеном да помогне наставницима у изградњи нових схватања о стратешкој заступљености процеса код ученика, када су дати задаци који представљају математичке ситуације кроз речи и дијаграме. Модел интегрише читање и способности просторне оријентације.

Улога читања и просторне оријентације. Модел и подаци добијени из истраживања пружили су прилику да се поново прошире уобичајене претпоставке о способности читања, способности просторне оријентације, формату презентовања задтка и њиховој интеракцији. Као што се очекивало, подаци су потврдили постојање најчешће двоструких односа између решавања проблема и способности читања ($r = .53$) и између решавања проблема и просторних способности ($r= .13$). Резултати у вези са способности читања и способности просторне оријентације, указују на то да је свака од њих допринела искуству ученика на јединствен начин. Као што се обично јавља у литератури, читање је имало огроман утицај на сваку од стратешки заступљених променљивих, можда то указује на везу између општих вештина писмености и приказаног знања.

Занимљиво је тумачење резултата, да дијаграм не служи као помоћ ученицима ниских и просечних способности просторне оријентације, заправо дијаграми су корисни ресурси за ученике високих способности просторне оријентације да из њих генеришу најкорисније приказе (алгебарске једначине). Обзиром да је нормалан опсег у просторним могућностима, изгледа да су само они ученици који поседују високе способности просторне оријентације научили да користе своје вештине и ефикасно реше математичке проблеме. Ово је у складу са закључцима да многи ученици имају тенденцију да виде дијаграме само као слике, а не као изворе битних информација о структури неког проблема.

Важно је гледати даље од општих позитивних ефеката читања и способности просторне оријентације, о којима се често пише у литератури, и покушати да се објасне разлике о томе како различите способности подржавају изградњу представа у току решавања проблема. Подаци из ове студије сугеришу да су читање и мере опште писмености вештине потербне за све врсте заступљености, док способност просторне оријентације најбоље подржава специјализовану стратегију усклађено са визуелно представљеним задацима. Важно је разумети закључке ове студије о смислу обухваћених задатака и природне способности процене. Задаци су пажљиво састављени да представе проблеме статичке геометријске релације које поседују алгебарску структуру. Иако ово можда изгледа вештачки, овакав тип задатака прилично је уобичајен и налази се на већини процена на овом узрастном нивоу. Што је још важније, задаци не захтевају менталну манипулацију да би се дошло до решења (нпр. ротација, дилатација). Ово не ограничава својства резултата, али омогућава веће специфичности у разумевању улоге просторне оријентације у решавању проблема, разликујући је од просторне визуелизације. Свакако, горе наведена тврдња може бити оспорена, али јасно је да подаци и модел ове студије указују на потребу да се научи више о томе како различите врсте читања и просторних вештина подржавају и ограничавају развој различитих врста стратешке заступљености. У складу са новим идејама о учењу математике, рад показује да треба да се знање, вештине и стратегије употребе и развију на координиран начин за успешно представљање и решавања проблема.

Карактер стратешке заступљености. Приказивачка моћ је од фундаметалног значаја како да људи схвате математичке идеје (Kilpatric et al., 2001; NCTM, 2000). Ова студија показује да приказивачка моћ подразумева одлично знање (познавање надлежности) са свим стратегијама заступљености и могућност координације приликом решавања проблема. Истраживање представља доказ да су ученици успешно показали заступљеност стратегија за репродукцију проблематичних излагања, како сведоче и ранији налази пронађене су склоности за вербалне и визуелне стратегије (Campbell et al., 1995). Поред тога, представљене стратегије су се односиле на додатну обраду у вези са референтним и трансформационим стратегијама, иако није директно повезано са проналажењем више начина за решавање задатка када су разматране друге две променљиве.

Подаци такође показују да су користили унакрсни систем симбола референтних стратегија (нпр. генерисање менталне слике из речи и дијаграма од текста). Међутим, референтне стратегије само сведоче о малом директном утицају на објашњења решавања проблема у овој студији, као и о заступљенима стратегијама, чини се да имају значајнију улогу у пружању подршке за употребу стратегија трансформације (Mayer & Gallini, 1990; Mayer & Sims, 1994).

Стратегије трансформације, како је доказано у овој студији, представљају способност да се структура једног задатка представи бројевима, симболима, изразима, и једначинама. Овај посебан случај трансформација могао би се назвати алгебарски приказ и тумачи се као умно обављање посла, да се активно реконструишу приказани подаци у новом облику, фокус је на унутрашњим и спољашњим представама, уместо на изградњи унутрашњих представа као копија споља представљених информација. Павио (Paivio, 1990) је описао основе трансформације као и организацију и манипулисање компонентама унутрашњих представа, и описао је ове процесе као процесе који захтевају више креативности од осталих заступљених стратегија.

Досадашње активности показују да када ученици користе алгебарске представе, узете као доказ стратегија трансформације, имају веће шансе да реше задатке из ове студије. Све у свему, резултати о свим стратешким заступљеностима променљивх, у складу са претходним радом, налазе да вешти ученици описују проблемске ситуације користећи визуелне и текстуалне стратегије, али често не успевају да конструишу и ефикасно представе структуру неког проблема.

4.5. Закључак

О учењу математике се тренутно говори као о функцији комплексног и истовременог раста базе знања, стратегије, мотивације и метакогниције (Kilpatrick et al., 2001; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1992). Тврди се у овом чланку, да постоји неколико модела који би помогли да се објасни едукаторима како се тачно развија математичко знање, описано кроз ове конструкте. Дакле циљ овог истраживања је био да се артикулише и емпиријски тестира теоријски модел који би помогао едукаторима да дођу до закључака о узроцима математичке успешности.

Добијени резултати предлажу промене за објашњење приказаног знања базираног на основним когнитивним процесима, изражено у теорији двоструког кодирања (Paivio, 1971, 1990). Испоставило се да су стратегије за приказ развоја у координацији са развојем претходног знања и вештина повезане са читањем и способностима просторне оријентације. Такође, изградња представа користећи симболе алгебре, као доказ трансформисаних унутрашњих представа, утврђено је да је чврсто повезана са решавањем проблема у поређењу са коришћењм само текста или цртежа. Коначно, чини се да специјализована примена различитих врста просторних способности је од посебног значаја када се ради о нетекстуалном приказу задатака.

Студија извештава у овом чланку да представе ученика не настају једноставно, аутоматски, и природно из спољних представа у једну менталну слику у уму. Подаци показују да карактеристике ученичких представа варирају у зависности од њихових способности, начина презентовања задатка и вештина које су ученици стекли. Дакле, овде се тврди, у складу са теоријом двојног кодирања, да се спољна представа најбоље може посматрати за наставне и процењивачке сврхе као и предмета структурних и функционалних карактеристика високо специјализованих система унутрашњих представа. Тачније, када су задаци пажљиво дизајнирани, може се открити основна писменост и тачност при стварању унутрашњих представа, способност да се опише задатак алгебарским путем може открити нешто о учениковој бази знања и стратегијама за стварање симболичног приказа структуре једног задатка (Mayer & Anderson, 1992; Mayer & Gallini, 1990; Mayer & Sims, 1994).

Да закључимо, тест модел овог истраживања није успео да одбаци посредну хипотезу и подразумева да развој стратешке заступљености напредује уз стицање основних особина. Имајући у виду значај стратешке заступљености који је пронађен овде, постоји разлог да се питању више-је-боље приступи као коришћењу спољне представе. За разлику од додатних претпоставки, резултати овог рада могу се проширити на теоретским основама да сугеришу да актуелни приступи за употребу.

4.6. Ограничења

Студија има два ограничења која треба имати у виду приликом тумачења резултата и размишљања о будућим истраживањима. Прво, избор једног индикатора модела поставља питања о вези између посматраних стратегија и подразумеваних когнитивних процеса. Иако се водило рачуна да се развију прецизне, поуздане, и важеће мере, истраживању недостаје конвергентан доказ за утврђивање валидности за посредне променљиве. Друго ограничење је релативно узак садржај задатака за решавање. Конкретно, задаци су дизајнирани са следећим карактеристикама: (а) сваки задатак је имао очигледну алгебарску структуру, (б) геометријска размишљања су изнад основнх фигура, потребно је препознавање, (в) ефекти уобичајених формата променљивих су систематски уклоњени, (г) коришћени су само задаци који би могли бити завршени за 3 минута од стране већина ученика. Важно је приметити да ни у ниједан задатак није уграђен проблем у реалном контексту. Иако се може тврдити да одабрани задаци представљају прилику за ученике да покажу добар математички учинак, такође је истина да су ови задаци далеко од математичких проблема са којима се ученици сусрећу у свакодневном животу. Дакле, важно је признати да, иако резултати пружају важан увид у математичко знање, генерализовање налаза је ограничено због природе задатака.

5. Литература

1. Aiken, L. R. (1971). Verbal factors and mathematics learning: A review of research. Journalfor Research in Mathematics Education, 2, 304-313.

2. Anderson, J. R. (1985). Cognitive psychology and its implications (2nd ed.). New York: W. H. Freeman.

3. Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. Journal for Research in Mathematics Education, 21, 47-60.

4. Bennett, A., & Foreman, L. (1990). Visual mathematics course guide (Vol. 2). Portland, OR: Math Learning Center.

5. Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education-a review. Educational Studies in Mathematics, 11, 257-269.

6. Campbell, K. J., Collis, K. F., & Watson, J. M. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. Educational Studies in Mathematics, 28, 177-194.

7. Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992a). The development of a LOGO-based elementary school geometry curriculum (Final report to the National Science Foundation for Grant MDR-8651668). Buffalo: State University of New York at Buffalo and Kent, OH: Kent State University.

8. Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992b). Geometry and spatial reasoning. In D. A.

9. Doyle, W. (1983). Academic work. Review of Educational Research, 53(2), 159-199.

10. Douglas H. Clements, Sudha Swaminathan, Mary Anne Zeitler Hannibal, JulieSarama. Young Children's Concepts of Shape. for Research in Mathematics Education, Vol. 30, No. 2 (Mar., 1999), pp. 192-212.

11. Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. In M. C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (3rd ed.; pp. 392-431). New York: Macmillan.

12. Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. Educational Psychologist, 23, 167-180.

13. Friedman, L. (1994). Meta-analytic contributions to the study of gender differences in mathematics: The relationship of mathematical and spatial skills. International Journal of Education Research, 21, 361-371.

14. Geeslin, W. E., & Shar, A. O. (1979). An alternative model describing children's spatial preferences. Journal for Research in Mathematics Education, 10, 57-68.

15. Greeno, J. G. (1977). Processes of understanding in problem solving. In N. J. Castellan, Jr., D. B. Pisoni, & G. R. Potts (Eds.), Cognitive theory (pp. 43-48). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

16. Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. Journal for Research in Mathematics Education, 23, 242-273.

17. Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-97). New York: Macmillan.

18. Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of func- tion. Journal of Mathematical Behavior, 17, 123-134. Hoyle, R. H., & Smith, G. T. (1994). Formulating clinical research.

19. Kay, C. S. (1987). Is a square a rectangle? The development of first-grade students' understanding of quadrilaterals with implications for the van Hiele theory of the development of geometric thought. Dissertation Abstracts International, 47, 2934A. (University Microfilms No. DA8626590)

20. Kilpatrick, J. (1975). Problem solving in mathematics. Review of Educational Research, 39, 523-534.

21. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathe- matics. Washington, DC: National Academy Press.

22. Lindquist, M. M., & Kouba, V. L. (1989). Measurement. In M. M. Lindquist (Ed.), Results from the fourth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress (pp. 35-43). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

23. Mayer, R. E., & Anderson, R. B. (1992). The instructive animation: Helping students build connections between words and pictures in multimedia learning. Journal of Educational Psychology, 84, 444-452.

24. Mayer, R. E., & Gallini, R. B. (1990). When is an illustration worth ten thousand words. Journal of Educational Psychology, 82, 715-726.

25. Mayer, R. E., & Sims, V. K. (1994). For whom is a picture worth a thousand words? Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. Journal of Educational Psychology, 86, 389-401.

26. Mervis, C. B., & Rosch, E. (1981). Categorization of natural objects. Annual Review of Psychology, 32, 89-115.

27. Meyer, C., & Sallee, T. (1983). Make it simpler. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

28. Marjorie Henningsen and Mary Kay Stein. Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and InhibitHigh-Level Mathematical Thinking and Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 28, No. 5 (Nov., 1997), pp. 524-549.

29. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

30. National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional standards for teaching mathematics.

31. National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

32. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

33. Paivio, A. (1971). Imagery and verbal processes. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

34. Paivio, A. (1990). Mental representations: a dual coding approach. New York: Oxford University Press.

35. Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). The child's conception of space (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: W. W. Norton.

36. Pyke, C. (1996, April). Problems that use algebra and geometry: the picture and text connection. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY.

37. Pyke, C. (2003, November) The Use of Symbols, Words, and Diagrams as Indicators of Mathematical Cognition. A CausalModel. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 34, No. 5 (Nov., 2003), pp. 406-432

38. QUASAR Documentation Team. (1993, March). The QUASAR teacher background questionnaire sum- mary report on selected items. Pittsburgh, PA: Learning Research and Development Center, University of Pittsburgh.

39. Razel, M., & Eylon, B. -S. (1990). Development of visual cognition: Transfer effects of the Agam program. Journal of Applied Developmental Psychology, 11, 459-485.

40. Razel, M., & Eylon, B. -S. (1991, July). Developing mathematics readiness in young children with the Agam Program. Paper presented at the fifteenth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Genova, Italy.

41. Resnick, L. B. (1987). Education and learning to think. Washington, DC: National Academy Press.

42. Reston, VA: Author. National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

43. Romberg, T. A. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 49-64). New York: Macmillan

44. Romberg, T. A. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: Connections between theory and practice. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and prob- lem solving (pp. 287-304). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

45. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-371). New York: Macmillan.

46. Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

47. Sherman, J. (1980). Mathematics, spatial visualization, and related factors: Changes in girls and boys, grades 8-11. Journal of Educational Psychology, 72, 476-482..

48. Sherrill, J. M. (1973). The effects of different presentations of mathematical word problems upon the achievement of tenth grade students. School Science and Mathematics, 78, 277-282.

49. Silver, E. A., & Stein, M. K. (1996). The QUASAR project: The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. Urban Education, 30, 476-522.

50. Silver, E. A., & Thompson, A. G. (1984). Research perspectives on problem solving in elementary school mathematics. Elementary School Journal, 84, 529-545.

51. Smith, L. B. (1989). A model of perceptual classification in children and adults. Psychological Review, 96, 125-144.

52. Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical think- ing and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. American Educational Research Journal, 33, 455-488.

53. Tartre, L. A. (1990). Spatial skills, gender, and mathematics. In E. Fennema & G. Leder (Eds.), Mathematics and gender: Influences on teachers and students (pp. 27-59). New York: Teachers College Press.

54. Touchstone Applied Science Associates. (1995). Degree of reading power test. Brewster, NY: Author.

55. Treacy, J. P. (1944). The relationship of reading skills to the ability to solve arithmetic problems. Journal of Educational Research, 38, 86-96.

56. van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic Press.

57. van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele (pp. 1-214). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. 289 697).