Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

MASTER RAD

Diferencijalne jednačine u nastavi matematike

Mentor:
Dr Julka Knežević-Miljanović

Student:
Jelena Šobić

Beograd, 2012.

Cilj ovog master rada je da pokaže način uvođenja Diferencijalnih jednačina u nastavu matematike u srednjim školama. Prvo poglavlje daje kratak pregled razvoja diferencijalnih jednačina.

U drugom poglavlju su dati osnovni pojmovi običnih diferencijalnih jednačina. Definisan je pojam diferencijalnih jednačina prvog reda i izdvojene linearne jednačine kao glavna tema ovog master rada.

U trećem delu, predstavljene su dve metode rešavanja linearnih diferencijalnih jednačina i izvedena osnovna formula opšteg rešenja.

Na kraju rada date su primene linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Jasno je da imaju široku primenu, ali ovde se baziramo samo na predmete koji se izučavaju u srednjim školama i sa kojima su učenici upoznati, kao što je fizika, hemija i biologija.

Sadržaj

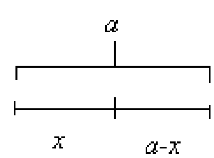
1 Istorija diferencijalnih jednačina

Problem pronalaženja tangente na krivu proučavali su mnogi matematičari još od kada je Arhimed u antičko doba pokrenuo ovo pitanje. Neki smatraju da je Ferma[1] zaslužan za pronalazak diferencijala, ali je opšta tehnika pronalaženja tangenti prihvaćena tek kada su Njutn[2] i Lajbnic[3] čvrsto definisali svoje metode za tangente.

Fermaova metoda za pronalaženje tangente razvijena je 30-tih godina 17. veka, i premda nije strogo definisana, to je skoro isti metod koji su koristili Njutn i Lajbnic. Zbog nedostatka formalnog koncepta limesa, Ferma nije bio u mogućnosti da temeljno opravda svoj rad. Međutim, ispitivanjem njegovih tehnika postaje očigledno da je precizno razumeo metod koji se danas koristi u diferenciranju.

Da bismo razumeli Fermaov metod, potrebno je prvo razmotriti njegovu tehniku za pronalaženje maksimuma i minimuma. Prvi Fermaov dokumentovani problem u diferenciranju uključuje pronalaženje maksimuma i minimuma jednačine i jasno je da je ovaj rad doveo do njegove tehnike za pronalaženje tangente.

Problem koji je Ferma razmatrao je podela duži na dva segmenta tako da proizvod ova dva nova dela bude maksimum.



Slika 1.

Na slici je data duž dužine a koja je podeljena na dva dela, x i (a-x). Onda je Fermaov cilj bio da proizvod x(a-x) maksimizira. Njegov pristup bio je misteriozan u to vreme, ali uz korišćenje trenutnog znanja o limesu, Fermaov metod je veoma jednostavan za razumevanje. Ferma je uradio sledeće: svako pojavljivanje x zamenio je sa x+E i naveo da kada maksimum bude pronađen, x i x+E će biti jednaki. Dakle, imao je jednačinu:

$$x(a-x) = (x+E)(a-x+E).$$

Uprošćavanjem i jedne i druge strane redukovao je jednačinu na:

$$E^2 - aE - 2xE = 0$$

$$E(E - a - 2x) = 0$$

[1]Pjer de Ferma (1601-1665) - francuski matematičar

[2]Isak Njutn (1643-1727) - engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof

[3]Gotfrid Vilhelm Frajher (baron) fon Lajbnic (1646-1716) - nemački filozof, matematičar, pravnik, pronalazač, istoričar, diplomata i politički savetnik

$$E - a - 2x = 0.$$

U ovom trenutku Ferma je rekao: Neka bude E=0, i dobio da je

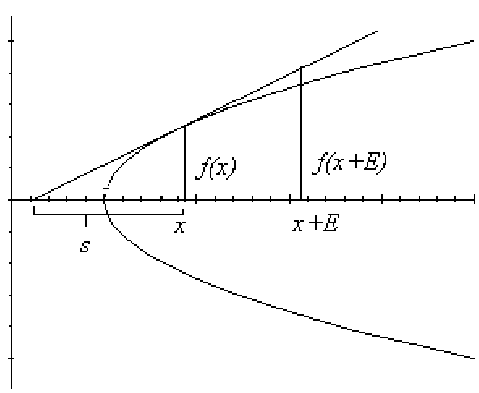
$$x = \frac{a}{2}.$$

Ovo nam kaže da bi se maksimizovao proizvod dve dužine, svaka od njih treba da bude polovina ukupne dužine duži. Iako je ovaj rezultat ispravan, Fermaov metod sadrži misteriozne rupe koje su ispravljene jedino trenutno postojećim znanjem. Ferma jednostavno dozvoljava da bude $E = 0$, pa u koraku gde se deli sa E dobija deljenje sa nulom. Međutim, iako je Ferma formulisao njegov metod govoreći da je $E = 0$, on je zapravo razmatrao limes od E kada E teži nuli (što objašnjava zašto njegova algebra radi ispravno). Fermaov metod ekstrema može se razumeti i u savremenom smislu. Zamenom $x + E$ za x, on govori da je $f(x+E) = f(x)$ ili da je $f(x+E) - f(x) = 0$. Kako je $f(x)$ polinom, ovaj izraz će biti deljiv sa E. Dakle Fermaova metoda može se shvatiti kao definicija izvoda (kada se koristi za pronalaženje ekstrema):

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} = 0.$$

Iako Ferma nikada nije bio u stanju da da logički doslednu formulaciju, njegov rad se može tumačiti kao definicija diferencijala.

Koristeći svoje misteriozno E, Ferma je nastavio da razvija metod za pronalaženje tangente na krivu. Razmotrimo grafik parabole. Ferma je želeo da nađe opštu formulu za tangentu na $f(x)$. U cilju da to uradi, on crta tangentu u tački x i razmatra tačku koja je udljena od tačke x za E.



Slika 2.

Kao što se vidi sa slike 2, iz sličnosti trouglova sledi sledeći odnos:

$$\frac{s}{s+E} = \frac{f(x)}{f(x+E)}.$$

Izdvajajući s, Ferma dobija da je

$$s = \frac{f(x)}{[f(x+E) - f(x)]\backslash E}.$$

Ferma je ponovo dopustio da je $E = 0$ (koristeći savremene termine, uzeo je limes E kada E teži nuli) i prepoznao da je donji deo jednačine identičan diferencijalu u njegovoj metodi ekstrema. Stoga, da bi našao nagib krive sve što je trebao da uradi jeste da nađe $\frac{f(x)}{s}$. Na primer, uzmimo u obzir jednačinu $f(x) = x^3$:

$$s = \frac{f(x)}{[f(x+E) - f(x)]\backslash E} = \frac{x^3}{[(x+E)^3 - x^3]\backslash E} = \frac{x^3}{3x^2 + 3xE + E^2}.$$

Ferma opet uzima da je $E = 0$ i dobija

$$s = \frac{x^3}{3x^2} = \frac{x}{3}$$

Sada se vratimo na početnu jednačinu:

$$f^{'}(x) = [f(x+E) - f(x)]\backslash E = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^3}{\frac{x}{3}} = 3x^2$$

Ovde je korišćena savremena notacija za izvod $f^{'}(x)$, za koju je Ferma prepoznao da je jednaka $[f(x+E) - f(x)]\backslash E$ kada je $E = 0$. Koristeći ovu metodu Ferma je uspeo da izvede opšte pravilo za tangentu na funkciju. Dakle, Ferma je razvio opštu metodu za diferenciranje, kao i za integraciju polinoma. Međutim, nikada nije uspeo da uvidi inverzan odnos između ove dve operacije, a logička nedoslednost u obrazloženju ostavila je njegov rad prilično nepriznatim. Tek sa Njutnom i Lajbnicom ova formulacija je postala moguća.

Zapravo, prema nekim istoričarima matematike, proučavanje diferencijalnih jednačina je počelo 1675. godine kada je Lajbnic napisao jednačinu $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$.

Potraga za generalnom metodom integraljenja diferencijalnih jednačina počela je kada je Isak Njutn klasifikovao diferencijalne jednačine prvog reda u tri klase:

$(1)\frac{dy}{dx} = f(x)$

$(2)\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$(3)x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} = u$

Prve dve klase sadrže samo obične izvode jedne ili više zavisnih promenljivih u odnosu na jednu nezavisnu promenljivu, i one su danas poznate kao obične diferencijalne jednačine. Treća klasa uključuje parcijalne izvode jedne zavisne veličine, a danas se zovu parcijalne diferencijalne jednačine.

Njutn bi desnu stranu jednačine izrazio preko stepena zavisnih promenljivih i kao rešenje pretpostavio beskonačan niz, a onda bi odredio koeficijente tog niza. Iako je Njutn primetio da konstantan koeficijent može biti izabran proizvoljno i zaključio da jednačina ima neograničen broj partikularnih rešenja, potpuni značaj ove činjenice, tj. da opšte rešenje jednačina prvog reda zavisi od proizvoljne konstante, je prihvaćen tek sredinom 18. veka.

1682. godine Lajbnic je postao saradnik na novom Lajpcigovom časopisu, „Acta Eruditorum“ („Časopis za obrazovane“), u kojem je 1684. objavio veoma značajan rad o diferencijalnom računu na šest strana, a potom, dve godine kasnije, 1686. godine, rad koji sadrži začetke integralnog računa.

1687. godine Džejms Bernuli[4] je pisao Lajbnicu uz molbu za uvođenje u misterije nove analize, međutim, kako je Lajbnic u to vreme putovao po inostranstvu, pismo je ostalo neodgovoreno do 1690. godine.

U međuvremenu Džejms i njegov brat Džon Bernuli[5] razotkrili su misterija bez pomoći. Njihov uspeh pokrenuo je široku prepisku sa Lajbnicom. U tim pismima se nalaze mnoge inovacije i predviđanja za buduće istaknute metode. 1692. godine Džejms Bernuli je pronašao poznati metod za integraljenje homogene diferencijalne jednačine prvog reda, a ne dugo nakon toga, problem integraljenja linearne diferencijalne jednačine prvog reda svodi na problem kvadrature.

Originalna otkrića praktično svih poznatih elementarnih metoda rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda su se dogodila tokom Bernuli dinastije.

Bernuli su bili švajcaraska porodica naučnika čiji je doprinos diferencijalnim jednačinama trajao od kraja XVII i XVIII vek. Nikolaus Bernuli I (1623-1708) je bio praotac ove poznate porodice matematičara. Džejms I, Džon I i Danijel I su najpoznatiji članovi porodice koji su mnogo doprineli novoj oblasti diferencijalnih jednačina.

U maju 1690. godine, Džejms Bernuli je objavio u „Acta Eruditorum“ svoje rešenje problema izohrona. Problem izohrone uključuje izohronu krivu, krivu duž

[4]Džejms Bernuli(1654-1705) - švajcarski matematičar, astronom i teolog

[5]Džon Bernuli(1667-1748) - švajcarski matematičar

koje će telo pasti uniformnom vertikalnom brzinom. Ovaj problem ga je doveo do diferencijalne jednačine koja izražava jednakost dva diferencijala.

Iz ovoga je Džejms zaključio da su integrali dva člana jednačine jednaka i po prvi put upotrebio reč *integral* u zapisu u „Acta Eruditorum“ 1696. godine. Dakle, drugi od dva glavna dela kalkulusa, u to vreme poznat kao *calculus summatorius*, promenjen je u *calculus integralis*, ili, kako ga mi danas znamo, *integralni račun*.

1691. godine inverzni problem tangenti doveo je Lajbnica do implicitnog otkrića metode razdvojenih promenljivih. Ali, Džon Bernuli je taj koji nam je, u pismu Lajbnicu 9. maja 1694. godine, dao eksplicitan proces i pojam *seperatio indeterminatorum* ili razdvajanje promenljivih.

Ali čak i tad, u jednom, ali važnom slučaju:

$$xdy - ydx = 0$$

ovaj proces nije uspeo jer je doveo do $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$, a $\frac{1}{x}dx$ tada još nije bio integraljen.

Međutim, u istoj godini Lajbnic je rešio problem kvadrature hiperbole - problem pronalaženja kvadrata jednake površine kao što je površina ispod krive na datom intervalu.

Džon Neperov[6] rad na logaritmima, koji je objavljen osamdeset godina ranije, omogućio je Lajbnicovo tumačenje integraljenja diferencijala $\frac{1}{x}dx$ kao $\log x$.

1696. godine, Džon Bernuli, student i ravnopravan suparnik svom bratu Džejmsu, dao je glavni doprinos proučavanju diferencijalnih jednačina putem postavljanja svog čuvenog problema brahistohrone, problema nalaženja jednačine putanje kojom će čestica pasti od jedne do druge tačke u najkraćem vremenu.

Jednačina koju je Džejms Bernuli predložio kao rešenje, decembra 1695. godine:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

danas je poznata kao Bernulijeva jednačina.

Sledeće godine Lajbnic je rešio jednačinu uvodeći smenu i uprošćavajući je do linearne diferencijalne jednačine, slično metodu koji se danas koristi.

Onda je 1698. Džon Bernuli rešio problem pronalaženja ortogonalnih trajektorija jednoparametarske familije krivih - pronalaženje krive koja preseca sve krive familije krivih pod pravim uglom. Ovim je, takođe, rešen i problem kosih trajektorija.

[6]Džon Neper(1550-1617) - škotski matematičar, fizičar, astronom, astrolog; poznat po pronalasku logaritma

Praktično sve poznate osnovne metode rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda pronađene su krajem XVII veka.

U prvim godinama XVIII veka nekoliko problema dovelo je do diferencijalnih jednačina drugog i trećeg reda. 1701. godine Džejms Bernuli je objavio rešenje problema izoperimetrije - problem u kojem je potrebno jedan integral postaviti da bude maksimalan ili minimalan, a integral druge funkcije ostaje konstantan. Ovo je dovelo do jednačina trećeg reda. U pismu upućenom Lajbnicu, 20. maja 1716. godine Džon Bernuli raspravlja o jednačini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{y}{x^2}$$

gde opšte rešenje, kada je napisano u obliku

$$y = \frac{x^2}{a} + \frac{b^2}{3x}$$

obuhvata tri slučaja: Kada b teži nuli, krive su parabole; kada a teži beskonačno, to su hiperbole; u suprotnom, one su trećeg reda.

Jakopo Rikatijeva[7] rasprava o posebnim slučajevima krivih čiji su radijusi zakrivljenosti zavisili isključivo od odgovarajućih koordinata rezurtirala je time da se njegovo ime povezuje sa jednačinom

$$y^{'} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2.$$

Rikatijeva rasprava nije pružala rešenje. Zapravo, Danijel Bernuli[8] je taj koji je dao rešenje ove jednačine koja je danas poznata kao Rikatijeva.

Generalno, ova jednačina ne može da se reši osnovnim metodama. Međutim, ako je poznato partikularno rešenje $y_1(x)$, onda opšte rešenje ima oblik:

$$y = y_1(x) + z(x),$$

gde je $z(x)$ opšte rešenje Bernulijeve jednačine

$$z^{'} - (Q + 2Ry_1)z = Rz^2.$$

Do 1724. godine Danijel Bernuli je pronašao potrebne i dovoljne uslove za integraljenje jednačine u konačnom obliku:

$$y^{'} + ay^2 = bx^m.$$

[7]Jakopo Frančesko Rikati(1676-1754) - italijanski matematičar

[8]Danijel Bernuli(1700-1782) - švajcarski fizičar, lekar i matematičar, bratanac Džejmsa Bernulija

Leonard Ojler[9] je dao sledeće veliko otkriće kada je postavio i rešio problem svođenja određene klase jednačina drugog reda na jednačine prvog reda. Njegov problem pronalaženja drugog rešenja iz poznatog sastoji se iz svođenja jednačina drugog reda na jednačine prvog i od prnalaženja integralnog faktora. Pored toga, Ojler je potvrdio da je količnik dva različita integralna faktora diferencijalnih jednačina prvog reda rešenje jednačine.

Ojler je počeo sa proučavanjem homogenih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima u pismu koje je napisao Džonu Bernuli 15. septembra 1739., koje je objavljeno u „Miscellanea Berolinensia“ 1743. godine. U roku od godinu dana Ojler je završio svoje proučavanje uspešno se suočivši sa stalnim kvadratnim faktorima i svoju pažnju usmerio na nehomogene diferencijalne jednačine.

Metod sukcesivnog smanjenja reda jednačina uz pomoć integralnih faktora doveo je do jednačina integrabilnih u konačnom obliku. Ojler je prvo svodio ove jednačine korak po korak, a zatim ih integralio. Za one jednačine koje nisu bile integrabilne u konačnom obliku Ojler je koristio metod integraljenja nizovima.

Aleksis Kold Klero[10] je primenio proces diferenciranja na jednačinu:

$$y = x\tfrac{dy}{dx} + f\tfrac{dy}{dx},$$

koja je poznata kao Klerova jednačina i 1734. objavio svoje istraživanje o ovoj klasi jednačina. Klero je bio među prvima koji je rešio problem singularnog rešenja - nalaženje jednačine ovojnice familije krivih koje predstavljaju opšte rešenje.

Džozef Luj Lagranž[11], dok je radio na problemu određivanja integralnog faktora za opštu linearnu jednačinu, formalizovao je koncept *adjoint* jednačine (asistent jednačine)... Lagranž ne samo da je ogredio integralni faktor za opštu linearnu jednačinu, već je i uredio dokaz opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine reda n. Pored toga, Lagranž je otkrio metod varijacija konstanti.

Oslanjajući se na Lagranžov rad, Žan le Rond d'Alambert[12] je našao uslove pod kojima red linearne diferencijalne jednačine može biti snižen. Izvođenjem metode rešavanja izuzetnih slučajeva, d'Alambert je rešio problem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, i pokrenuo proučavanje linearnih diferencijalnih sistema. U traktatu napisanom 1747. godine, koji je posvećen oscilacijskim nitima, d'Alambert je došao do parcijalnih diferencijalnih jednačina, gde

[9] Leonard Paul Ojler(1707-1783) - švajcarski matematičar i fizičar; veliki doprinos u matematičkoj analizi i teoriji grafova

[10] Aleksis Kold Klero(1713-1765) - francuski matematičar

[11] Džozef Luj Lagranž(1736-1813) - italijansko-francuski astronom i matematičar; veliki doprinos analizi i teoriji brojeva

[12] Žan le Rond d'Alambert(1717-1783) - francuski matematičar, fizičar i filozof

je dao svoj glavni doprinos u ovom polju.

Period od početnog otkrića opštih metoda integraljenja običnih diferencijalnih jednačina završen je 1775., stotinu godina nakon što je Lajbnic upotrebio integralni znak. Za mnoge probleme formalne metode nisu bile dovoljne. Bila su potrebna rešenja sa posebnim svojstvima, i na taj način, kriterijumi koji garantuju postojanje takvih rešenja postajali su sve važniji. Problemi graničnih vrednosti doveli su do običnih jednačina, kao što je Beselova jednačina, koja je dovela do proučavanja Lager, Ležandr i Hermit polinoma. Proučavanje ovih i drugih funkcija koje su rešenja jednačina hipergeometrijskog tipa dovelo je do savremenih numeričkih metoda.

Tako je 1775. godine, kako je sve više i više pažnje posvećivano analitičkim metodama i problemima egzistencije, traganje za opštim metodama integraljenja običnih diferencijalnih jednačina završeno.

2 Diferencijalne jednačine.

Problemi matematike, fizike, tehnike, astronomije i drugih nauka mogu se često matematički izraziti pomoću jednačina u kojima su sadržane veze između nepoznatih funkcija i njenih izvoda. Takve jednačine se zovu **diferencijalne jednačine**.

2.1 Osnovni pojmovi

Jednačina u kojoj se pojavljuje nepoznata funkcija, zajedno sa svojim izvodima, naziva se **diferencijalna jednačina**.

Ako nepoznata funkcija zavisi samo od jedne nezavisne promenljive, pa se javljaju samo obični izvodi, onda se takva diferencijalna jednačine naziva **obična**, a ako nepoznata funkcija zavisi od više nezavisnih promenljivih, pa se javljaju njeni parcijalni izvodi, onda se takva diferencijalna jednačina naziva **parcijalna**. Na primer, sledeće jednačine su obične

$$y' = \frac{y^2+xy-x^2}{x^2},\ (3x^2+6xy^2)\,dx + (6x^2y+4y^2)\,dy = 0,$$

dok je jednačina

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

parcijalna jer sadrži parcijalne izvode funkcije $z = z(x,y)$. Kako je oblast diferencijalnih jednačina jako široka i kompleksna, učenicima se predstavljaju samo obične diferencijalne jednačine.

Opšti oblik diferencijalne jednačine je

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

gde je F realna funkcija od $n+2$ promenljive.

Red obične diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji učestvuje u njoj. Na primer, jednačine

$$y' = 6x \text{ ili } y' - 3y = 0$$

su jednčine prvog reda, a jednčine

$$x^2y'' + 2003xy' + y = 6x^{100}\ln x \text{ i } y^{20}y'' = (y')^2$$

su drugog reda.

Postupak određivanja nepoznate funkcije iz date diferencijalne jednačine naziva se rešenje te jednačine ili integraljenje jednačine. U stvari, *Rešenje diferencijalne jednačine* (1) *na intervalu D je funkcija $\varphi(x)$ koja je n puta diferencijabilna na D i koja kada se zameni u* (1) *pretvara ovu u identitet.*

Diferencijalna jednačina ima više od jednog rešenja i ako postoji relacija koja u sadrži sva rešenja date jednačine, njom je definisano opšte rešenje te jednačine.

Primer 1. Rešiti jednačinu $y^{'} = 2x$ po y.

Rešenje: Integraljenjem date jednačine dobijamo da je

$$y = \int 2x\,dx = 2 \cdot \tfrac{x^2}{2} + C = x^2 + C$$

rešenje date jednačine definisano na celom $\mathbb{R}$, gde je C proizvoljna realna konstanta.

▲

Odavde vidimo da se svake dve primitivne funkcije jedne iste jednačine razlikuju samo konstantu C. Odavde sada možemo definisati opšte rešenje diferencijalne jednačine.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) *je skup svih krivih u ravni xOy koji je definisan jednačinom*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \text{ tj. } \psi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

gde su $C_1, C_2, ..., C_n$ proizvoljne konstante.

U primeru 1. opšte rešenje je skup parabola $y = x^2 + C$, tj. $y - x^2 - C = 0$.

Obrnuto, ako je $f(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ data familija funkcija, moguće je formirati običnu diferencijalnu jednačinu reda n, koja za opšte rešenje ima tu familiju.

Primer 2. Formirati diferencijalnu jednačinu čije je rešenje

$$y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)\ .$$

Rešenje: Diferencirajmo datu jednačinu dva puta:

$$y^{'} = C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x)$$

$$y^{''} = -C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x)$$

Iz ovde dve jednačine i početne eliminišemo konstante C_1 i C_2. Konkretno, sabraćemo početnu jednačinu sa dvaput diferenciranom i dobijamo traženu diferencijalnu jednačinu

$$y^{''} + y = 0.$$

▲

2.2 Košijevo rešenje jednačine prvog reda

Opšti oblik diferencijalne jednačine prvog reda je

$$F(x, y, y^{'}) = 0, \tag{2}$$

ili u *normalnom obliku*

$$y^{'} = f(x, y). \tag{3}$$

Opšte rešenje jednačine (2), odnosno (3) je familija krivih $y = \varphi(x, C)$, gde je $C \in \mathbb{R}$ i u njemu su sadržane sve funkcije zavisne od promenljive x, koje kada se zamene u jednačine (2) ili (3) njih čine identitetom. Članovi ove familije zovu se i **integralne krive**.

Na primer, jednačina

$$y^{'} = y,$$

ima za opšte rešenje familiju krivih

$$y = Ce^{x},$$

gde je C proizvoljna realna konstanta.

Ako želimo da izdvojimo onu integralnu krivu koja zadovoljava dodatni uslov: na primer da prolazi kroz datu tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$, onda na osnovu toga određujemo konstantu C, tj. imamo jednačinu $y_0 = \varphi(x_0, C)$ po nepoznatoj C. Ako ova jednačina nema rešenja, onda ne postoji integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0). Integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) naziva se **Košijevo rešenje** jednačine (2). U zavisnosti od funkcije F, odnosno f, Košijevo rešenje postoji ili ne postoji, ono je jedinstveno ili nije jedinstveno.

Dakle, za jednačinu (2) tj. (3) definišemo *Košijev problem* (*Košijev zdatak*):

> *Za datu tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ odrediti rešenje $y = \varphi(x)$ definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava uslov*
>
> $$\varphi(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Jednakost (4) naziva se *Košijev uslov.*

Primer 3. Rešimo Košijev problem: $y^{'} = x + 4, y = 1 za x = 0.$

Rešenje: Integraljenjem nalazimo da je

$$y = \int (x + 4)\, dx = \tfrac{x^2}{2} + 4x + C$$

opšte rešenje date diferencijalne jednačine, gde je C proizvoljna konstanta. Zamenjivanjem Košijevog uslova u opšte rešenje dobijamo da je $C = 1$. Dakle, rešenje Košijevog problema je

$$y = \frac{x^2}{2} + 4x + 1.$$

▲

Ako u opštem rešenju $y = \varphi(x, C)$ jednačine (2) uzmemo za C konkretnu vrednost, $C = C_0$, onda se dobija funkcija $y = \varphi(x, C_0)$, koja se zove **partikularno rešenje** jednačine (2), odnosno (3).

Na primer, ako u primeru 3. u opštem rešenju jednačine uzmemo da je $C = 0$, dobijamo da je

$$y = \frac{x^2}{2} + 4x$$

jedno njeno partikularno rešenje tj. partikularni integral. Kao što se može videti, Košijevo rešenje je zapravo jedno partikularno rešenje date jednačine.

Sledeće teoreme daju uslove za postojanje i jedinstvenost rešenja Košijevog problema za diferencijalne jednačine prvog reda.

Teorema 1 (Peanova teorema) *Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna i ograničena u oblasti kojoj pripada tačka (x_0, y_0), tada Košijev problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ima rešenje.*

Teorema 2 (Pikarova teorema) *Ako je pored uslova u Peanovoj teoremi i parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidan i ograničen u oblasti kojoj pripada tačka (x_0, y_0), tada Košijev problem ima jedinstveno rešenje.*

Tačke (x_0, y_0) za koje su ispunjeni uslovi Pikarove teoreme zovu se **regularne**, a tačke za koje ti uslovi nisu ispunjeni, zovu se **singularne** tačke integralnih krivih $y = \varphi(x, C)$.

Rešenje $y = \varphi(x)$, takvo da su sve tačke $(x_0, \varphi(x_0))$ singularne nazivamo **singularnim rešenjem**.

Primer 4. Rešimo Košijev problem: $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0$.

Rešenje: Jednačinu ćemo zapisati u obliku

$$dx = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\, dy,$$

odakle dobijamo da je

$$x = \sqrt[3]{y} + C \text{ tj. } y = (x - C)^3.$$

Ako iskoristimo Košijev uslov, dobijamo da je $C = 0$, tj. $y = x^3$ rešenje Košijevog problema i jedno partikularno rešenje. Takođe, Košijev uslov zadovoljava i funkcija $y = 0$. Postojanje više rešenja potvrđuje i to što nisu ispunjeni uslovi Pikarove teoreme, tj. parcijalni izvod nije ograničen u okolini tačke $(0, 0)$. A kako se ne može dobiti iz opšteg rešenja, to je $y = 0$ singularno rešenje ove jednačine.

▲

Dakle, vidimo da prilikom rešavanja diferencijalnih jednačina se susrećemo sa tri vrste rešenja, opšte, partikularno i singularno. Određivanje singularnih rešenja je jako složeno pa se ne izučava u srednjoj školi. Dakle, bavićemo se isključivo određivanjem opšteg i partikularnog rešenja jednačina prvog reda, i to linearnih diferencijalnih jednačina.

2.3 Diferencijalne jednačine prvog reda

U prethodnom poglavlju smo definisali diferencijalne jednačine prvog reda. Dakle, to su jednačine koje sadrže nezavisno promenljivu, nepoznatu funkciju i njen prvi izvod. U nastavi matematike pominju se mnoge diferencijalne jednačine prvog reda.

Diferencijalna jednačina sa razdvajanjem promenljivih je jednačina oblika

$$y' = f(x)g(x).$$

Homogena diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika

$$y^{'} = f(\tfrac{y}{x}), x \in \mathbb{R}.$$

Linearna diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika

$$A(x)y^{'} + B(x)y + C(x) = 0,$$

gde su A(x), B(x) i C(x) neprekidne funkcije.

Bernulijeva diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika

$$y^{'} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

gde je n konstanta.

Rikatijeva diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika

$$y^{'} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Mi ćemo se usresrediti na linearne diferencijalne jednačine prvog reda, njihov oblik i metode rešavanja. Takođe, treba napomenuti da se neke od diferencijalnih jednačina prvog reda, kao što je Bernulijeva jednačina, korišćenjem odgovarajućih smena svode na linearnu diferencijalnu jednačinu.

2.4 Linearne diferencijalne jednačine prvog reda

Rekli smo da ova jednačina ima oblik

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \tag{5}$$

gde su A(x), B(x) i C(x) neprekidne funkcije. Ako funkcija A(x) nije identički jednaka nuli tj. $A(x) \not\equiv 0$, onda jednačinu (5) uvek možemo podeliti sa A(x), pri čemu dobijamo jednačinu oblika

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{6}$$

pa ćemo pod **linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda** nadalje smatrati jednačinu (6).

Ako uzmemo da je $Q(x) \equiv 0$, onda jednačina (6) prelazi u jednačinu oblika

$$y' + P(x)y = 0, \tag{7}$$

koju zovemo **linearna homogena diferencijalna jednačina prvog reda**.

3 Metode rešavanja linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda

Rešiti diferencijalnu jednačinu znači naći njeno opšte rešenje, sva singularna rešenja i ispitati ponašanje rešenja u blizini singularnih tačaka. Međutim, kako je pitanje singularnih rešenja uglavnom komplikovano i složeno, u nastavi matematike u srednjoj školi se obrađuju samo opšta i partikularna rešenja diferencijalnih jednačina.

3.1 Metod razdvajanja promenljivih

Pretpostavimo da su funkcije P(x) i Q(x) neprekidne na nekom intervalu $S \subset \mathbb{R}$. Kod ove metode tražimo rešenje jednačine (6) u obliku

$$y = u(x)v(x). \tag{8}$$

Diferenciranjem jednačine (8) dobijamo:

$$y^{'} = u^{'}(x)v(x) + u(x)v^{'}(x). \tag{9}$$

Kada jednačine (8) i (9) ubacimo u nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu dobije se:

$$u^{'}(x)v(x) + u(x)v^{'}(x) + P(x)u(x)v(x) = Q(x),$$

tj.

$$(u^{'}(x) + P(x)u(x))v(x) + v^{'}(x)u(x) = Q(x). \tag{10}$$

Kako se rešenje traži u obliku proizvoda dve funkcije, onda jednu od njih možemo birati proizvoljno. Tako, funkciju u(x) biramo da je

$$u^{'}(x) + P(x)u(x) = 0,$$

odakle je

$$\frac{u^{'}(x)}{u(x)} = -P(x),$$

odnosno

$$u(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \tag{11}$$

Zamenom (11) u (10) dobijamo

$$v^{'}(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

tj.

$$v'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx},$$

odakle sledi da je

$$v(x) = C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx. \tag{12}$$

Najzad, kada (11) i (12) zamenimo u formulu (8) dobijamo *opšte rešenje* nehomogene linearne diferencijalne jednčine prvog reda

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int P(x)\,dx}(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx). \tag{13}$$

3.2 Metod varijacije konstanti

Pretpostavimo da su funkcije P(x) i Q(x) neprekidne na nekom intervalu $S \subset \mathbb{R}$. U svrhu pronalaženja opšteg rešenja jednačine (6), najpre ćemo naći rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine:

$$y' + P(x)y = 0$$

To je jednačina koja razdvaja promenljive, pa je

$$\frac{y'}{y} = -P(x),$$

odakle dobijamo:

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C|.$$

Napomena: Uzimajući konstantu u obliku $\ln|C|, C \neq 0$ ne umanjujemo opštost jer ovako definisana konstanta uzima sve realne vrednosti.

Dalje,

$$ln|\frac{y}{C}| = -\int P(x)\,dx,$$

tj.

$$|\frac{y}{C}| = e^{-\int P(x)\,dx},$$

pa je rešenje jednačine (7):

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Sada ćemo rešenje homogene linearne jednačine iskoristiti da rešimo nehomogenu linearnu jednačinu. Potražićemo rešenje jednačine (6) u obliku

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}, \tag{14}$$

pri čemo C ne posmatramo kao konstantu već kao funkciju od x. Diferencirajmo prethodnu jednakost po x:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx}, \tag{15}$$

a zatim jednakosti (14) i (15) vratimo u (6):

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

tj.

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Odavde dobijamo da je

$$C(x) = C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx,$$

gde je C_1 konstanta, pa je

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}(C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx)\ .$$

Dakle, ponovo smo dobili da je opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine oblika (13).

Treba napomenuti da se opšte rešenje jednačine (6) može prestaviti kao zbir jednog njenog partikularnog rešenja i opšteg rešenja jednačine (7). Tako, ako je y_1 partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine, onda imamo sledeće:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x).$$

Kada oduzmemo drugu jednačinu od prve, dobijamo

$$(y - y_1)' + P(x)(y - y_1) = 0,$$

pa je odavde

$$y - y_1 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

što nam daje opšte rešenje

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Takođe, opšte rešenje nehomogene linearne jednačine se može naći i ako su poznata dva partikularna rešenja, y_1 i y_2. Tada je:

$$\frac{dy_1}{dx} + Py_1 = Q$$

$$\frac{dy_2}{dx} + Py_2 = Q,$$

tj.

$$\frac{d(y_2-y_1)}{dx} + P(y_2 - y_1) = 0.$$

Dakle, $y_2 - y_1$ zadovoljava odgovarajuću homogenu jednačinu. Pa prema prethodnom, opšte rešenje nehomogene jednačine je:

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

3.3 Primeri linearnih jednačina

Kao što smo prethodno videli, postoje dve metode rešavanja linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda i obe daju isto opšte rešenje. U ovom delu navešćemo nekoliko primera i pokazati kako se rešavaju konkretni zadaci. U prvom primeru pokazaćemo primenu obe metode, dok će ostali primeri biti urađeni samo jednom metodom ili direktnom primenom formule (13) .

Primer 1. Naći opšte rešenje jednačine

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3.$$

Rešenje:

1° Metod razdvajanja promenljivih : Zamenom $y = uv$, data jednačina prelazi u

$$v\frac{du}{dx} + u(\frac{dv}{dx} + v) = x^3.$$

Ovu jednačinu sada rastavimo na dve

$$\frac{dv}{dx} + v = 0 \text{ i } v\frac{du}{dx} = x^3.$$

Iz prve jednačine dobijamo

$$\frac{dv}{v} = -dx \text{ tj. } v = e^{-x}.$$

Sada u drugu ubacimo v

$$e^{-x}\frac{du}{dx} = x^3 => du = x^3e^xdx,$$

i parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$u = \int x^3e^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C.$$

Ubacivanjem u i v u $y = uv$ nalazimo opšte rešenje početne jednačine

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + Ce^{-x} \ .$$

2° Metod varijacije konstanti: Iz homogene jednačine

$$y' + y = 0$$

sledi da je

$$y = Ce^{-x}.$$

Posmatrajući C kao funkciju od x i diferenciranjem gore dobijene jednakosti dobijamo:

$$y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}.$$

Kada sve ovo vratimo u početnu jednačinu, ona daje

$$C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = x^3$$

tj.

$$C' = x^3 e^x,$$

pa integraljenjem dolazimo do C:

$$C = \int x^3 e^x \, dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C_1.$$

Na kraju, zamenom u $y = Ce^{-x}$ dobijamo da je rešenje

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + Ce^{-x} \ .$$

▲

Primer 2. Metodom varijacije koeficijenata naći opšte rešenje jrdnačine

$$y' + ay = \sin x.$$

Rešenje: Rešavanjem, najpre, homogene jednačine

$$y' + ay = 0$$

dobijamo

$$y = Ce^{-ax}.$$

Diferencirajmo gornju jednačinu, pri čemu je $C = C(x)$,

$$C'e^{-ax} - aCe^{-ax} + aCe^{-ax} = \sin x, \text{ tj. } C' = e^{ax} \sin x,$$

pa kada integralimo poslednju jednakost dobijamo:

$$C = \int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^x(a\sin x - \cos x)}{a^2+1} + C_1,$$

gde je C_1 konstanta. Najzad, ubacivanjem u rešenje homogene jednačine dolazimo do konačnog rešenja:

$$y = \frac{(a\sin x - \cos x)}{a^2+1} + C_1 e^{-ax}.$$

▲

Primer 3. Naći opšte rešenje jednačine

$$y^{'}\cos x = y\sin x + \cos^2 x$$

Rešenje: Najpre ćemo datu jednačinu prevesti u linearnu jednačinu oblika (6), tako što ćemo celu jednačinu podeliti sa $\cos x$, uz uslov da je $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$y^{'}\cos x = y\sin x + \cos^2 x / : \cos x$$

i dobija se jednačina

$$y^{'} - y\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x.$$

Odavde imamo da je $P(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$ i $Q(x) = \cos x$, pa je opšte rešenje

$$y = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx}(C + \int \cos x e^{-\int \tan x\,dx}\,dx)$$

$$= e^{-\ln\cos x}(C + \int \cos x e^{\ln\cos x}\,dx)$$

$$= \frac{1}{\cos x}(C + \int \cos^2 x\,dx) = \frac{1}{\cos x}(C + \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx)$$

$$= \frac{1}{\cos x}(C + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}).$$

▲

Primer 4. Naći opšte rešenje jednačine $xy^{'} - 2y = x^2$.

Rešenje: Najpre ćemo jednačinu svesti na standardan oblik tako što ćemo je podeliti sa x, $x \neq 0$. Dakle, rešavaćemo jednačinu

$$y^{'} - \frac{2}{x}y = x.$$

Vidimo da je $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = x$. Kada ubacimo u formulu za opšte rešenje, dobijamo

$$y = e^{\int \frac{2}{x}\,dx}(C + \int x e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}\,dx).$$

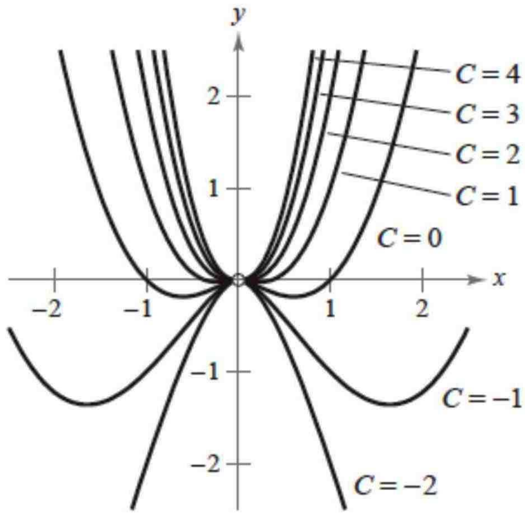
Izračunavanjem dolazimo do rezultata:

$$y = e^{2\ln x}(C + \int x e^{-2\ln x}\,dx) = x^2(C + \int \frac{1}{x}\,dx)$$

tj.

$$y = x^2(C + \ln|x|).$$

Na slici je prikazano nekoliko krivih rešenja.



Slika 3.

▲

Primer 5. Naći opšte i partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1,\ y(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Rešenje: Najpre ćemo jednačinu podeliti sa t, da bi smo dobili standardni oblik jednačine:

$$y' + \tfrac{2}{t}y = t - 1 + \tfrac{1}{t},\ y(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Na osnovu dobijene jednačine vidimo da je $P(t) = \frac{2}{t}$, a $Q(t) = t - 1 + \frac{1}{t}$. Integraljenje $P(t)$ daje

$$\int P(t)\,dt = \int \tfrac{2}{t}\,dt = 2\ln|t| = \ln t^2,$$

i kada ubacimo ovo, zajedno sa $Q(t)$, u formulu dobijamo da je

$$y(t) = e^{-\ln t^2}(C + \int (t - 1 + \tfrac{1}{t})e^{\ln t^2}\,dt)$$

tj.

$$y(t) = \tfrac{1}{t^2}(C + \int (t^3 - t^2 + t)\,dt) = \tfrac{1}{t^2}(C + \tfrac{t^4}{4} - \tfrac{t^3}{3} + \tfrac{t^2}{2}).$$

Dakle, opšte rešenje je

$$y(t) = \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2} + \tfrac{C}{t^2}.$$

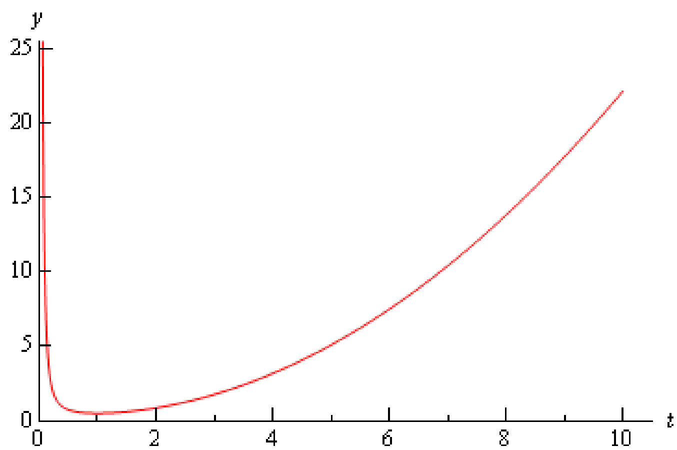
Sada, iskoristimo početni uslov da bismo dobili konstantu C.

$$\tfrac{1}{2} = y(1) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{C}{t^2}$$

odakle se dobija da je $C = \frac{1}{12}$, pa je konačno rešenje jednačine

$$y(t) = \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12t^2}.$$

Na grafiku je predstavljeno rešenje.



Slika 4. ▲

Primer 6. Metodom razdvajanja promenljivih rešiti jednačinu

$$y' + y \cos x = \sin 2x.$$

Rešenje: Rešenje tražimo u obliku $y = uv$, gde je $u = u(x)$ i $v = v(x)$. Ubacimo ga u početnu jednačinu:

$$u'v + uv' + uv \cos x = \sin 2x,$$

odnosno,

$$u'v + u(v' + v \cos x) = \sin 2x.$$

Uzmimo da je

$$v' + v \cos x = 0.$$

Integraljenjem dobijamo:

$$\int \tfrac{v'}{v}\, dx = -\int \cos x\, dx \text{ tj. } v = e^{-\sin x}.$$

Kada v ubacimo u gornju jednačinu, ona postaje

$$u'e^{-\sin x} = \sin 2x.$$

Sada iz ove jednačine dobijamo u:

$$u = \int \sin 2x e^{\sin x}\,dx = 2\int \sin x \cos x e^{\sin x}\,dx = 2\sin x e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C.$$

Pošto smo našli i u i v, vratimo ih u rešenje i dolazimo do

$$y = uv = (2\sin x e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C)e^{-\sin x} = 2\sin x - 2 + Ce^{-\sin x},$$

što je traženo opšte rešenje.

▲

Primer 7. Naći opšte i partikularno rešenje jednačine

$$y' + e^x y = e^{2x},\ y(0) = 1.$$

Rešenje: Za nalaženje opšteg rešenja koristićemo formulu (13). Iz jednačine imamo $P(x) = e^x$ i $Q(x) = e^{2x}$, pa je

$$y = e^{-\int e^x\,dx}(C + \int e^{2x}e^{\int e^x\,dx}\,dx) = e^{-e^x}(C + \int e^{2x}e^{e^x}\,dx)$$

korišćenjem smene $e^x = t$ dolazimo do konačnog rešenja:

$$y = e^{-e^x}(C + e^{e^x}(e^x - 1)) = e^x - 1 + Ce^{-e^x}.$$

Sada, iskoristimo uslov

$$y(0) = 1 = e^0 - 1 + Ce^{-e^0} = Ce^{-1},$$

pa je odavde $C = e$. Dakle, partikularno rešenje je

$$y = e^x - 1 + e^{1-e^x}.$$

▲

Iako Bernulijeva diferencijalna jednačina

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

nije linearna, ona se, kao što smo to napomenuli u trećem poglavlju, može svesti na jednu korišćenjem smene $y = z^{\frac{1}{1-n}}$. S obzirom na važnost ove jednačine, prikazaćemo na jednom primeru kako se ona rešava.

Primer 8. Rešiti Bernulijevu jednačinu

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y},\ x > 0.$$

Rešenje: Najpre ćemo jednačinu dovesti u pravi oblik tako što ćemo je podeliti sa x, pa je

$$y' - \frac{4}{x}y = xy^{\frac{1}{2}}.$$

U sledećem koraku uvodimo smenu. Kako je $n = \frac{1}{2}$, kada zamenimo u $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ dobijamo smenu $y = z^2$. Ubacivanjem u gornju jednačinu ona prelazi u

$$2zz' - \frac{4}{x}z^2 = x(z^2)^{\frac{1}{2}}$$

tj., kada podelimo sve sa $2z$

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2},$$

a to je linearna diferencijalna jednačina. Nadalje rešavamo poznatim postupkom. Kako je $P(x) = -\frac{2}{x}$ i $Q(x) = \frac{x}{2}$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{2}{2x}\,dx}(C + \int \frac{x}{2}e^{-\int \frac{2}{2x}\,dx}\,dx) = e^{\ln x^2}(C + \int \frac{x}{2}e^{\ln x^{-2}}) = x^2(C + \int \frac{1}{2x}) \\ &= x^2(C + \ln |x|^{\frac{1}{2}}), \end{aligned} \tag{16}$$

a kako je $x > 0$, možemo se osloboditi apsolutne zagrade, pa je

$$z = x^2(C + \ln \sqrt{x}).$$

Sada dobijeno z vratimo u smenu i dobijamo rešenje Bernulijeve jednačine:

$$y = z^2 = x^4(C + \ln \sqrt{x})^2.$$

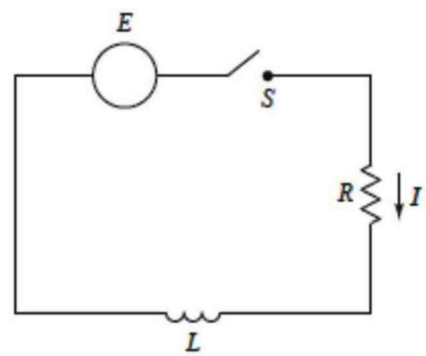
▲

4 Primena

Skoro svako fizičko stanje koje se javlja u prirodi može se opisati pomoću odgovarajuće diferencijalne jednačine. Do diferencijalne jednačine se može doći na lak ili težak način, zavisno od situacije i pretpostavki koje se donose o situaciji. Proces opisivanja fizičkog stanja pomoću diferencijalne jednačine naziva se *modeliranje*.

4.1 Električna kola

Razmotrimo prosto električno kolo prikazano na slici ispod.



Slika 5.

Elektromotorna sila (obično baterija ili generator) proizvodi napon od $E(t)$ volti (V) i struju od $I(t)$ ampera (A) u vremenu t. Kolo takođe sadrži i otpornik sa otporom od R oma (Ω), kao i induktor sa induktivnosti od L henrija (H). Omov zakon daje pad napona kroz otpornik kao RI. Pad napona zbog induktora je $L\frac{dI}{dt}$. Prema drugom Kirhofovom zakonu, ako je prekidač zatvoren kada se primenjuje, elektromotorna sila (napon) jednaka je zbiru pada napona u ostatku kola. To znači da struja I zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t), \tag{17}$$

što je u stvari nehomogena linearna diferencijalna jednačina prvog reda čije rešenje daje struju I u vremenu t.

Primer 1. Naći struju u RL kolu u kom su otpor, indukcija i napon konstantni. Pretpostaviti da je $I(0) = 0$.

Rešenje: Krećemo od jednačine

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

odnosno

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L} \ .$$

Kako su L, R i E konstantni, rešavamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda, gde je $P(t) = \frac{R}{L}$ i $Q(t) = \frac{E}{L}$.

$$I(t) = e^{-\int \frac{R}{L}\,dt}(C + \int \frac{E}{L}e^{\int \frac{R}{L}\,dt}\,dt) = e^{-\frac{Rt}{L}}(C + \frac{E}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{Rt}{L}}) = e^{-\frac{Rt}{L}}(C + \frac{E}{R}e^{\frac{Rt}{L}})$$

tj.

$$I(t) = Ce^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R}.$$

Kako je $I(0) = 0$, kada ubacimo u gornju jednakost dobijamo da je $C = -\frac{E}{R}$. Na kraju, ubacujući C dobijamo da je krajnji rezultat

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \ .$$

▲

Primer 2. Pretpostavimo da je u prostom kolu otpor 12Ω, a induktivnost $4H$. Ako baterija daje konstantan napon od $60V$ i prekidač je zatvoren kada je $t = 0$ tako da struja počinje sa $I(0) = 0$, naći:
a) $I(t)$;
b) struju nakon $1s$;
c) graničnu vrednost struje.

Rešenje: a) Ako stavimo $L = 4, R = 12, E(t) = 60$ u (17) dobijamo početni problem vrednosti

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \ , \ I(0) = 0$$

ili

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15, \ I(0) = 0.$$

Odavde je $P(t) = 3$, $Q(t) = 15$, pa je rešenje ove diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} I &= e^{-\int 3\,dt}(C + \int 15e^{\int 3\,dt}\,dt) = e^{-3t}(C + 15\int e^{3t}\,dt) = e^{-3t}(C + 5e^{3t}) \\ &= Ce^{-3t} + 5. \end{aligned} \tag{18}$$

Dakle, $I(t) = 5 + Ce^{-3t}$. Sada, koristeći uslov $I(0) = 0$ dobijamo koeficijent C:

$$0 = 5 + Ce^0 \text{ tj. } C = -5.$$

Pa je konačno rešenje $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$.
b) Nakon $1s$ struja je

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75A$$

c)

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5A.$$

▲

4.2 Njutnov zakon hlađenja

Njutnov zakon hlađenja kaže da je brzina hlađenja tela proporcionalna razlici temperature tela i okoline. Ovaj zakon je jako zgodan za modeliranje diferencijalnom jednačinom. Ako označimo sa $T(t)$ temperaturu tela u trenutku t, sa T_e temperaturu okoline, a sa T početnu temperaturu tela, onda bi jednačina ovog zakona glasila

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_e), \tag{19}$$

gde je k konstanta proporcionalnosti. Ako uzmemo da je $x = T - T_e$, tako da je $\frac{dx}{dt} = \frac{dT}{dt}$, onda gornja jednačina prelazi u linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\tfrac{dx}{dt} = kx,$$

čije je rešenje $x = Ce^{kt}$. Sada, kada vratimo u ovo rešenje $x = T - T_e$, dobijamo

$$T = T_e + Ce^{kt}. \tag{20}$$

Ako pretpostavimo da je za $t = 0$, $T = T_0$ dobijamo $T_0 - T_e = Ce^0$ tj. $T_0 - T_e = C$, pa je

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{kt}. \tag{21}$$

Ova poslednja jednačina pokazuje kako se temperatura tela manja sa vremenom.

Primer 3. Šoljica kafe se sipa iz lonca ciji je sadržaj $95°C$ u neizolovanu šoljicu u sobi na $20°C$. Posle jednog minuta kafa se ohladila do $90°C$. Koliko je vremena potrebno da se kafa ohladi na pijuću temperaturu od $65°C$?

Rešenje: Iz zadatka vidimo da je $T_e = 20°C$, i $T = 95°C$ za $t = 0$. Ako to ubacimo u (20) dobićemo C:

$$T(0) = 95 = 20 + Ce^0 \text{ tj. } C = 75.$$

Za $t = 1$, $T(1) = 90$. Ubacimo ovaj podatak, kao i dobijeno C ponovo u (20) i izračunajmo koeficijent k:

$$90 = 20 + 75e^k$$

odnosno,

$$e^k = \tfrac{70}{75} \text{ tj. } k = \ln \tfrac{70}{75},$$

pa dobijamo da je

$$k = -0.06899287.$$

Sada, kada imamo C i k možemo naći vreme, t. Zapravo, kada još jednom sve ove podatke ubacimo u (20) dobijamo jednačinu po t

$$65 = 20 + 75e^{-0.06899287t}$$

čije je rešenje

$$t = 7.40403479.$$

Dakle, vreme potrebno da se kafa ohladi na $65°C$ je 7.4 minuta.

▲

Primer 4. Termometar je uklonjen iz prostorije u kojoj je temperatura $600°F$ i iznet napolje gde je temperatura $100°F$. Posle jednog minuta termometar je očitavao $500°F$. Koliko termometar očitava za $t = 2$ minuta? Koliko treba vremena da temperatura na termometru dospe do $200°F$?

Rešenje: Najpre ćemo odrediti C i k koristeći jednačinu (20). Ubacimo najpre u jednačinu $T_e = 100°F$, i $T = 600°F$ za $t = 0$

$$600 = 100 + Ce^0,$$

i dobijamo da je $C = 500$. Sada ćemo iskoristiti činjenicu da se temperatura za 1 minut snizila na $500°F$, tj.

$$T(1) = 500 = 100 + 500e^k$$

odakle je

$$e^k = \tfrac{4}{5}$$

odnosno,

$$k = -0.2231436.$$

Dakle, dobili smo C i k. Tako da jednačina (20) dobija oblik

$$T(t) = 100 + 500e^{-0.2231436t},$$

odakle, nadalje lako rešavamo zadatak.

Za $t = 2$, temperatura na termometru je:

$$T(2) = 100 + 500e^{-0.2231436 \cdot 2} = 100 + 500e^{-0.4462872} = 100 + 319.99$$

tj.

$$T(2) = 419.99°F.$$

Vreme potrebno da se temperatura spusti na $200°F$ dobijamo iz osnovne jednačine na sledeći način:

$$200 = 100 + 500e^{-0.2231436t},$$

$$e^{-0.2231436t0} = \tfrac{1}{5},$$

$$-0.2231436t = \ln \tfrac{1}{5},$$

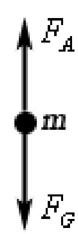
pa je traženo rešenje

$$t = 7.2 \text{ minuta.}$$

▲

4.3 Slobodan pad

Razmotrimo padajući objekat sa masom m i izvedimo diferencijalnu jednačinu čije rešenje će nam dati brzinu objekta u trenutku t. Pretpostavimo da na objekat u toku pada deluju samo gravitacija i otpor vazduha. Na sledećoj slici prikazane su sile koje deluju na objekat.



Slika 6.

Napomena: Smatraćemo da sila koja deluje na dole je pozitivna sila, a ona koja deluje na gore, negativna sila. Takođe, smatraćemo i da objekat ima pozitivnu brzinu ako pada na dole.

Sa slike vidimo da na objekat deluju dve sile F_G i F_A. F_G je sila usled gravitacije i data je sa $F_G = mg$, gde je g ubrzanje usled gravitacije i $g = 9.81m/s^2$. F_A je sila usled otpora vazduha i proporcionalna je brzini, v, objekta. Ona je data sa $F_A = -kv$, gde je $k > 0$, a „-“ nam daje smer delovanja sile. Drugi Njutnov zakon kretanja se može zapisati kao

$$m\frac{dv}{dt} = F(t, v),$$

gde je $F(t, v)$ zbir sila koje deluju na objekat. U ovom slučaju imamo dve sile i to F_G koja deluje u silaznom smeru pa će biti pozitivna i otpor vazduha koji deluje na gore i samim tim će biti negativan. Stavljajući sve to u Drugi Njutnov zakon dobijamo

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Kada ovo malo sredimo sledi

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g, \tag{22}$$

a to je linearna diferencijalna jednačina koja nam daje brzinu padajućeg objekta.

Primer 5. Predmet mase 5kg pušten je da slobodno pada sa visine od 1000 m pod uticajem gravitacije. Pretpostavimo da je sila otpora vazduha proporcionalna brzini objekta sa konstantom proporcionalnosti $k = 50Ns/m$. Odrediti jednačinu kretanja objekta. Kada će objekat udariti u zemlju?

Rešenje: Početni problem slobodnog pada je

$$v' + \frac{k}{m}v = g,\ v(0) = 0.$$

Pošto su nam dati k i m a znamo i koliko je g, jednačina prelazi u

$$v' + \frac{50}{5}v = 9.81,$$

odnosno

$$v' + 10v = 9.81,$$

Nađimo rešenje:

$$v(t) = e^{-\int 10\,dt}(C + \int 9.81e^{\int 10\,dt}\,dt) = e^{-10t}(C + 0.981e^{10t}) = Ce^{-10t} + 0.981.$$

Iz ove jednačine i uslova $v(0) = 0$ nalazimo konstantu:

$$0 = Ce^0 + 0.981, \text{ tj. } C = -0.981.$$

Konačno, dobijamo da je brzina kretanja objekta

$$v(t) = 0.981 - 0.981e^{-10t}.$$

Neka je $y(t)$ položaj predmeta u odnosu na početnu tačku. Kako je $\frac{dy}{dt} = v$, integraljenjem po t dobijamo

$$y(t) = 0.981t + 0.0981e^{-10t} + C,$$

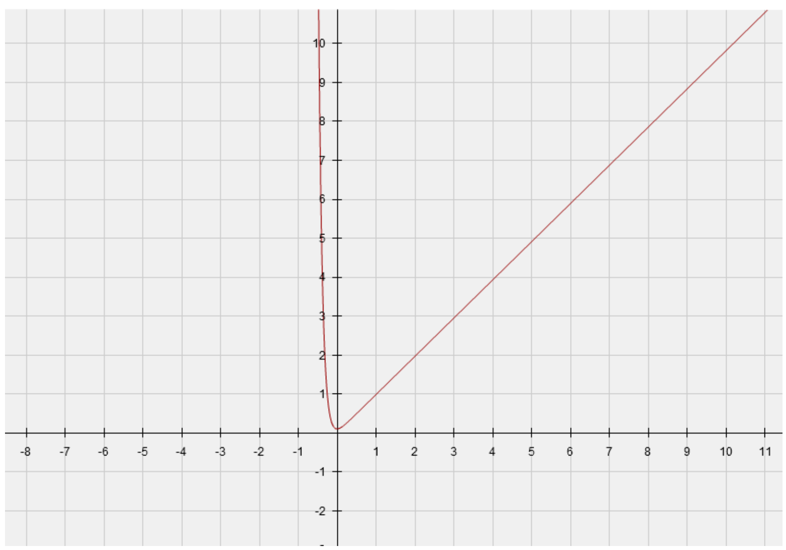
a kako je $y(0) = 0$, to sledi da je $C = -0.0981$ pa je

$$y(t) = 0.981t + 0.0981(e^{-10t} - 1).$$

Da bismo našli za koje će vreme predmet udariti o tlo, treba da nađemo T tako da je $y(T) = 1000$. Znači, moramo da nađemo T tako da je

$$0.981T + 0.0981(e^{-10T} - 1) = 1000.$$

Izračunavanjem dobija se da je $T \approx 1019.47s$. Na slici je prikazan izgled grafika jednačine kretanja.



Slika 7.

▲

Primer 6. Padobranac čija je masa 75 kg skače iz helihoptera koji lebdi 2000 m iznad zemlje i pada pod uticajem gravitacije. Pretpostavimo da je sila otpora vazduha proporcionalna brzini padobranca sa konstantom proporcionalnosti $k = 30Ns/m$ kada je padobran zatvoren, a $k_1 = 90Ns/m$ kada je padobran otvoren. Ako se padobran otvori tek kada padobranac dostigne brzinu od $20m/s$, posle koliko sekundi će pasti na zemlju?

Rešenje: Rešavanje ovog zadatka ima dve faze: I) kada je padobran zatvoren; II) kada je padobran otvoren.

U prvom slučaju, kada padobran nije otvoren, imamo da je $k = 30Ns/m$, pa nalazimo rešenje jednačine

$$v' + \tfrac{30}{75}v = 9.81.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} v &= e^{-\int 0.4\,dt}(C + \int 9.81 e^{\int 0.4\,dt}\,dt) = e^{-0.4t}(C + 9.81 \int e^{0.4t}\,dt) \\ &= e^{-0.4t}(C + 24.525e^{0.4t}) = 24.525 + Ce^{-0.4t}. \end{aligned} \tag{23}$$

Kako je $v(0) = 0$, to nam, ubacujući u gornju jednakost, daje $C = -24.525$, pa je konačno

$$v = 24.525 - 24.525e^{-0.4t}.$$

Sada moramo da nađemo u koje vreme se otvorio padobran. Neka to bude vreme t_1. Njega nalazimo iz činjenice da se padobran otvorio kada je padobranac imao brzinu $20m/s$.

$$20 = 24.525 - 24.525e^{-0.4t}$$

$$-4.525 = -24.525e^{-0.4t}$$

$$-0.4t = \ln \tfrac{4.525}{24.525}$$

dakle,

$$t_1 = 4.22s.$$

Takođe, kada je padobran otvoren, padobranac se nalazi na visini od $2000 - y(t_1)$, gde je y put koji pređe padobranac kada je zatvoren padobran.

$$y = \int (24.525 - 24.525e^{-0.4t})\,dt = 24.525t + 61.3125e^{-0.4t} + C_1.$$

Pošto je $y(0) = 0$, dobijamo da je $C_1 = -61.3125$. Dakle, jednačina pređenog puta je

$$y = 24.525t + 61.3125e^{-0.4t} - 61.3125.$$

Sada izračunajmo $y(t_1)$:

$$y(4.22) = 24.525 \cdot 4.22 + 61.3125e^{-0.4 \cdot 4.22} - 61.3125 \approx 53.52m.$$

U sledećoj fazi je $v(0) = 20m/s$, $y(0) = 53.52$ a $k_1 = 90Ns/m$. Sada je

$$v' + \tfrac{90}{75}v = 9.81.$$

Odavde je

$$
\begin{aligned}
v &= e^{-\int 1.2\,dt}(C + \int 9.81e^{\int 1.2\,dt}\,dt) = e^{-1.2t}(C + 9.81\int e^{1.2t}\,dt) \\
&= e^{-1.2t}(C + 8.175e^{1.2t}) = 8.175 + Ce^{-1.2t}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Iz $v(0) = 20$ dobijamo da je $C = 11.825$, pa je

$$v = 8.175 + 11.825e^{-1.2t}.$$

Sada nalazimo jednačinu kretanja:

$$y = \int(8.175 + 11.825e^{-1.2t})\,dt = 8.175t - 9.854e^{-1.2t} + C_1.$$

Kada u nju ubacimo $y(0) = 53.52$ dobijamo $C_1 = 63.374$, tako da je

$$y = 8.175t - 9.854e^{-1.2t} + 63.374.$$

Nađimo t_2, vreme za koje će padobranac pasti na zemlju od trenutka kada se otvorio padobran:

$$2000 - 53.52 = 8.175t_2 - 9.854e^{-1.2t_2} + 63.374$$

$$1883.106 = 8.175t_2 - 9.854e^{-1.2t_2}$$

odnosno

$$t_2 = 230.35s.$$

Pa je ukupno vreme potrebno da padobranac padne na zemlju

$$t_1 + t_2 = 4.22 + 230.35 \approx 235s.$$

▲

4.4 Problem smeša

Problemi smeša kojima ćemo se baviti uključuje rezervoar u koji se dodaje neka supstanca određenom ulaznom stopom, a napušta sistem određenom izlaznom stopom. U ovom problemu promenljivu $y = y(t)$ ćemo rezervisati da čuva količinu supstance u rezervoaru u svakom datom trenutku t. Diferencijalna jednačina koja učestvuje u ovom problemu nastaje iz sledećih prirodnih odnosa:

$$\frac{dy}{dt} = (\textit{ulazna stopa}) - (\textit{izlazna stopa}). \tag{25}$$

Kao što vidimo, u zavisnosti od problema, dobijaćemo različite linearne diferencijalne jednačine.

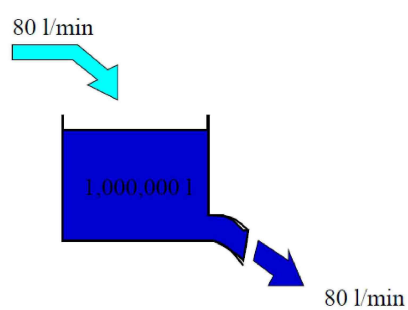
Primer 7. U početku rezervoar sadrži jedan milion litara čiste vode. Onda su otvorena dva ventila, jedan omogućava rastvoru vode i fluorida, sa koncentracijom fluorida od $0,1kg$ po litru vode, da teče u sistem po stopi od $80l/min$, a drugi ventil omogućava da rastvor izlazi iz rezervoara po stopi $80l/min$. Pod pretpostavkom da se rastvor stalno meša tako da u rezervoaru imamo homogenu tečnost:

a) pronađi izraz za iznos (u kilogramima) fluorida u rezervoaru posle t minuta i

b) pronađi koliko je vremena potrebno da koncentracija rastvora dođe na nivo $0.05kg/l$.

Rešenje: Kao što smo pomenuli na početku, uzimamo da je $y(t)$ broj kilograma fluorida u rezervoaru u vremenu t i iskoristimo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dt} = (\textit{ulazna stopa})\text{-}(\textit{izlazna stopa}).$$



Slika 8.

a) Da bismo formirali konkretnu jednačinu potrebno je da nađemo ulaznu i izlaznu stopu fluorida.

Ulazna stopa: Imamo da u sistem ulazi $80l/min$ i svaki litar sadrži $0.1kg$ fluorida. Dakle, u bilo kom trenutku imamo da u rezervoar ulazi $80 \cdot 0.1 = 8kg$ fluorida, tako da je ulazna stopa 8.

Izlazna stopa: Ceo sistem sadrži ykg fluorida u svakom trenutku koji je raspoređen na jedan milion litara vode, tako da svaki litar u rezervoaru sadrži $\frac{y}{1000000}kg$ fluorida u svakom trenutku. Dato nam je da sistem napušta $80l/min$ rastvora, što znači da u svakom trenutku rezervoar napusti $80\frac{y}{1000000}kg$ fluorida, tako da je izlazna stopa $8\frac{y}{100000}$. Zamenom u formulu dobijamo

$$\frac{dy}{dt} = 8 - 8\frac{y}{100000},$$

odnosno,

$$\frac{dy}{dt} + 0.00008y = 8.$$

Odavde je $P(t) = 0.00008$ a $Q(t) = 8$. Najpre ćemo izračunati

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{\int 0.00008\,dt} = e^{0.00008t},$$

a sada ubacimo ovo u formulu opšteg rešenja linearne diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} y = e^{-\int P(t)\,dt}(C + \int Q(t)e^{\int P(t)\,dt}\,dt) = e^{-0.00008t}(C + \int 8e^{0.00008t}\,dt) = \\ = e^{-0.00008t}(C + \frac{8}{0.00008}e^{0.00008t}), \end{aligned} \tag{26}$$

pa dobijamo da je

$$y = 100000 + Ce^{-0.00008t}.$$

Zadatak nam kaže da je na početku rezervoar sadržao samo čistu vodu, što zapisujemo kao $y(0) = 0$. Kada ubacimo u gornju jednakost dobijamo

$$0 = 100000 + Ce^{0} => C = -100000.$$

Vraćanjem ponovo u gornje rešenje dobijamo odgovor na prvo pitanje, tj. količina fluorida u rezervoaru posle t minuta je

$$y = 100000 - 100000e^{-0.00008t}.$$

b) Zanima nas koliko je vremena potrebno da koncentracija dostigne nivo od $0.05kg/l$. Vidimo da je ova koncentracija ekvivalentna sa tim da se u rezervoaru nalazi ukupno $1000000 \cdot 0.05 = 50000kg$ fluorida, što nam zapravo govori da tražimo vrednost t koja zadovoljava da je $y = 50000$. Dakle, rešavamo sledeću jednačinu

$$50000 = 100000 - 100000e^{-0.00008t},$$

tj.

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-0.00008t}$$

odakle je

$$e^{-0.00008t} = \frac{1}{2}.$$

Kada prođemo kroz ovu jednakost funkcijom ln, dobija se

$$-0.00008t = \ln\frac{1}{2}$$

pa je traženo vreme

$$t \approx 8664.34 \text{ min}.$$

▲

Primer 8. Rezervoar sadrži 50 galona rastvora sastavljenog od 90% vode i 10% alkohola. Drugi rastvor, koji sadrži 50% vode i 50% alkohola, dodaje se u rezervoar po stopi od 4 galona po minuti. Kako se drugi rastvor dodaje, rezervoar se prazni po stopi od 5 galona po minuti. Predpostavljajući da se rastvor u rezervoaru stalno meša, koliko je alkohola u rezervoaru posle 10 minuta?

Rešenje:

Slika 9.

Neka je y broj galona alkohola u rezervoaru u trenutku t. Znamo da je na početku u 50 galona rastvora 10% alkohola tj. $y = 5$ kada je $t = 0$. Kako u svakom trenutku u rezervoar uđe 4 galona a izađe 5, to je broj galona rastvora u rezervoaru u svakom trenutku $50 - t$. Pošto rezervoar gubi $5gal/min$ to je izlazna stopa $5 \cdot \frac{y}{50-t}$. Zatim, kako rezervoar prima $4gal/min$ rastvora koji sadrži 50% alkohola, to znači da je ulazna stopa 2 galona alkohola po minuti. Na osnovu ovoga formiramo diferencijalnu jednačinu za promenu stope alkohola u rezervoaru koristeći (25):

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{5}{50-t}y$$

tj.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{5}{50-t}y = 2.$$

Kako je $P(t) = \frac{5}{50-t}$ nađimo najpre

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{5}{50-t}\,dt = -5\ln|50-t|.$$

Kako je po uslovu zadatka $t < 50$, možemo se osloboditi apsolutnih zagrada, pa je

$$\int P(t)\,dt = \ln\frac{1}{(50-t)^5}.$$

Dakle, generalno rešenje je

$$y = e^{-\int P(t)\,dt}(C + \int Q(t)e^{\int P(t)\,dt}\,dt) = e^{-\ln\frac{1}{(50-t)^5}}(C + \int 2e^{\ln\frac{1}{(50-t)^5}}\,dt)$$
$$= (50-t)^5(C + 2\int \frac{1}{(50-t)^5}\,dt) = (50-t)^5(C + \frac{1}{2(50-t)^4}) = C(50-t)^5 + \frac{50-t}{2}. \quad (27)$$

Kada u rešenje ubacimo da je $y = 5$ kada je $t = 0$ dobijamo

$$5 = \frac{50}{2} + C50^5$$

tj.

$$C = -\frac{20}{50^5},$$

što daje konačnu jednačinu

$$y = \frac{50-t}{2} - 20(\frac{50-t}{50})^5.$$

Najzad, kada je $t = 10$, količina alkohola u rezervoaru je

$$y = \frac{50-10}{2} - 20(\frac{50-10}{50})^5 = 20 - 20(\frac{4}{5})^5 = 13.45gal$$

što predstavlja 33.6% alkohola.

▲

4.5 Radioaktivno raspadanje

Poznato je da određene radioaktivne supstance ispoljavaju osobinu spontanog raspadanja. To jest, ako $Q(t)$ predstavlja količinu supstance u vremenu t, onda $Q(t)$ zadovoljava homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -rQ(t), \tag{28}$$

gde je r pozitivan realan broj i naziva se *koeficijent raspadanja*. To znači da je stopa raspadanja supstance u vremenu t proporcionalna količini prisutnoj u vremenu t. Ova jednačina se lako rešava i daje nam da je

$$Q(t) = Q_0 e^{-rt},$$

gde je $Q_0 = Q(0)$ početna količina supstance. Radioaktivne supstance se često karakterišu svojim poluživotom a ne koeficijentom proporcionalnosti. Poluživot je vreme τ koje je potrebno da se polovina radioaktivne supstance raspadne, tj.

$$Q(\tau) = \frac{Q_0}{2}.$$

Primer 9. Element torijum-234 (Th-234) ispoljava radioaktivno raspadanje. Ako se $100mg$ torijuma-234 raspadne u $82.04mg$ u jednoj nedelji, nađi jednačinu za količinu elementa u vremenu t. Takođe, pronađi poluživot elementa.

Rešenje: Neka $Q(t)$ označava količinu torijuma-234 u vremenu t, i neka se t meri danima a $Q(t)$ miligramima. Znamo da je u vremenu $t = 0$ početna količina $100mg$, tj. ako označimo sa $Q(0) = Q_0$, onda je $Q_0 = 100$, pa je

$$Q(t) = 100e^{-rt}.$$

Kako se za nedelju dana element raspao na količinu od $82.04mg$, ubacivanjem u gornju jednačinu dobijamo konstantu proporcionalnosti:

$$Q(7) = 82.04 = 100e^{-7r}$$

tj.

$$r = -\frac{\ln 0.8204}{7} = 0.028.$$

Znači, jednačina količine torijuma-234 u vremenu t je

$$Q(t) = 100e^{-0.028t}.$$

Nađimo sada poluživot elementa, τ. Kako je

$$Q(\tau) = Q_0 e^{-r\tau} = \frac{Q_0}{2},$$

to dobijamo

$$e^{-0.028\tau} = \frac{1}{2}$$

tj.

$$\tau = \frac{\ln 2^{-1}}{-0.028} = 24.76.$$

Dakle, vreme potrebno da se polovina torijuma-234 raspadne je 24.76 dana.

▲

Primer 10. Ugljenik-14 je radioaktivni izotop ugljenika koji se stalno obnavlja u atmosferi i akumulira se u živim organizmima. Dok organizam živi količina $C-14$ u organizmu ostaje konstantna, jer se raspad kompenzuje novim količinama unesenim u organizam. Kada organizam umre, količina ugljenika-14 u ostacima se raspada. Poluživot ugljenika-14 se može izmeriti u laboratoriji i iznosi $\tau = 5730$ godina. Ako je pronađeno da određeni ostaci sadrže 14% prvobitne količine ugljenika-14, nađi kada je organizam izumro.

Rešenje: Pretpostavimo da je vreme kada je organizam umro postavljeno na $t = 0$, i neka je $Q(0) = Q_0$ početna količina $C-14$ u organizmu. Kako je poluživot ugljenika-14 $\tau = 5730$ godina, iz jednakosti

$$Q(\tau) = Q_0 e^{-r\tau} = \frac{Q_0}{2},$$

dobijamo da je

$$r = \frac{\ln 2^{-1}}{-5730} = 0.00012097.$$

Kako je u organizmu ostalo 14% početne količine $C-14$, to je

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = 0.14$$

što nam daje

$$e^{-0.00012097t} = 0.14$$

tj.

$$t = \frac{\ln 0.14}{-0.00012097} \approx 16253.$$

Dakle, organizam je umro pre više od 16000 godina.

▲

4.6 Dinamika populacije

Ovde ćemo razmatrati diferencijalnu jednačinu koja je nastala proučavanjem fenomena rasta populacije vrsta u dobro definisanom okruženju koju nazivamo *kolonija*. Neka je $N(t)$ broj vrsta u populaciji u vremenu t. Stanovništvo će se vremenom promeniti. Zaista, stopa promene N će biti zbog rađanja i migracija u koloniju (to povećava N) i zbog umiranja i migracija iz kolonije (to ga smanjuje). Na osnovu zakona o očuvanju populacije imamo

Stopa promene N=stopa rasta populacije - stopa smanjenja populacije.

Sada, neka su r_b i r_d pozitivne konstante koje predstavljaju stopu nataliteta i stopu mortaliteta po jedinici populacije. Onda, $r_bN(t)$ predstavlja stopu rasta populacije kroz rađanje u vremenu t, i slično tome, $r_dN(t)$ predstavlja stopu opadanja populacije u odnosu na smrt u vremenu t. Neka $M(t)$ predstavlja stopu migracije u vremenu t. Ako stopa imigracije u koloniju prevazilazi izlazak iz nje onda je $M(t) > 0$, a ako je obrnuto, onda je $M(t) < 0$. Dakle, prema zakonu o očuvanju populacije dolazimo do diferencijalne jednačine

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_bN(t) - r_dN(t) + M(t).$$

Ako uzmemo da je $r_b - r_d = k$, onda se prethodna jednačina svodi na

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) + M(t). \tag{29}$$

Mi ćemo potražiti rešenje ove jednačine kada nema migracije tj., kada je $M(t) = 0$, a to je

$$N(t) = Ce^{kt},$$

tj., ako je za $t = 0$, $N(0) = N_0$, gde je N_0 početno stanje populacije,

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Primetimo da kada je $k > 0$ populacija raste, tj. $r_b - r_d > 0$, odnosno broj rođenih je veći nego broj umrlih. U ovom slučaju se k zove *stopa rasta*. Slično, kada je $k < 0$ tj., $r_b < r_d$ onda u proseku umre više ljudi nego što se rodi. Tada k nazivamo *stopa opadanja*.

Primer 11. Pretpostavimo da je populacija u određnoj zemlji u 2000. godini bila 56 miliona i da je prirodna stopa rasta populacije 2% godišnje. Pored toga, pretpostavimo da $k(t)$ predstavlja neto stopu rasta populacije usled imigracije i emigracije t godina nakon 2000. godine.

a) Neka je $y(t)$ populacija zemlje t godina nakon 2000. Napisati početnu vrednost problema uključujući y.

b) Rešiti jednačinu ako je $k(t) = 0.04t$.

c) Šta ovaj model predviđa za populaciju zemlje u 2012. godini?

d) Kada će populacija zemlje dostići 100 miliona?

Rešenje: a) Prema datim podacima u zadatku vidimo da je naše $k = 0.02$, pa $y(t)$ zadovoljava početnu vrednost problema

$$\tfrac{dy(t)}{dt} = 0.02y + k(t),\ y(0) = 56.$$

b) Kako je rečeno da je $k(t) = 0.04t$, to prethodna jednačina prelazi u

$$\tfrac{dy(t)}{dt} - 0.02y = 0.04t,$$

odakle vidimo da je $P(t) = -0.02$, a $Q(t) = 0.04t$. Koristeći formulu za opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int 0.02\,dt}(C + \int 0.04te^{-\int 0.02\,dt}\,dt) = e^{0.02t}(C + 0.04\int te^{-0.02t}\,dt) \\ &= e^{0.02t}(C + 0.04(-\frac{te^{-0.02t}}{0.02} - \frac{e^{-0.02t}}{(0.02)^2})) = 2(-t - \frac{1}{0.02}) + Ce^{0.02t}. \end{aligned} \tag{30}$$

Kako je $y(0) = 56$ lako nalazimo C:

$$56 = -100 + Ce^0,\ \text{tj.},\ C = 516,$$

pa je traženo rešenje jednačine

$$y(t) = 2(-t - \tfrac{1}{0.02}) + 156e^{0.02t}$$

c) Kako računamo promene u odnosu na 2000. godinu to nam je za ovaj deo zadatka $t = 12$, što znači da je

$$y(12) = 2(-12 - \tfrac{1}{0.02}) + 156e^{0.02\cdot 12} = -124 + 198.31 \approx 74.31 \text{ miliona}.$$

d) Da bi smo videli kada će populacija zemlje dostići 100 miliona u jednačinu dobijenu u delu pod b) ubacujemo $y = 100$ i dobijamo:

$$2(-t - \frac{1}{0.02}) + 156e^{0.02t} = 100$$

tj.

$$-t + 78e^{0.02t} = 100.$$

Odavde se izračunavanjem dobija da je $t \approx 23$ godine, što znači da će zemlja dostići traženu populaciju 2023. godine.

▲

Primer 12. Statistika pokazuje da svetska populacija od Drugog svetskog rata raste po stopi od 1.9% godišnje. Dalje, zapisi Ujedinjenih nacija ukazuju na to da je svetska populacija 1975. godine bila oko 4 milijarde. Pretpostavljajući eksponencijalni model rasta:

a) Kolika će populacija biti u 2012. godini?

b) Kada će svetska populacija biti 10 milijardi?

Rešenje: Kako je na osnovu zadatka $k = 0.019$ i nema migracija, posmatraćemo jednačinu

$$N' = 0.019N,\ N(0) = 4.$$

Nađimo rešenje ovog problema. Imamo da je

$$\frac{N'}{N} = 0.019$$

pa integraljenjem dobijamo

$$N = Ce^{0.019t}.$$

Iz uslova $N(0) = 4$ nalazimo C:

$$N(0) = 4 = Ce^0$$

odnosno,

$$C = 4,$$

pa je rešenje početnog problema

$$N = 4e^{0.019t}.$$

Sada je lako naći kolika će populacija biti u 2012. godini, tako što ćemo $t = 37$, broj godina u odnosu na 1975., ubaciti u gornje rešenje:

$$N(37) = 4e^{0.01937} \approx 8.08 \text{ milijardi}.$$

b) Za rešavanje ovog dela, ubacićemo u rešenje problema $N = 10$ i izračunavanjem naći t.

$$10 = 4e^{0.019t},$$

tj.

$$e^{0.019t} = 2.5,$$

pa je odavde

$$t = \frac{\ln 2.5}{0.019} \approx 49 \text{ godina.}$$

Dakle, svetska populacija će dostići 10 milijardi tokom 2024. godine.

▲

5 Literatura

1. Svetlana Janković, Julka Knežević-Miljanović, „Diferencijalne jednačine II: zadaci sa elementima teorije“, Matematički fakultet, Beograd, 2005.

2. Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, „Analiza sa algebrom 4“, Krug, Beograd, 2011.

3. M. Bertolino, „Diferencijalne jednačine“, Naučna knjiga, 1980.

4. Dimitrije Danić, „Osnovi infinitezimalnog računa“, Izdavačka knjižara Branislav Cerović-Ajhštet, Beograd, 1922.

5. Morris Tenenbaum, Harry Pollard, „Ordinary differential equations“, Dover Publications, Inc., New York, 1963.

6. http://faculty.kfupm.edu.sa/MATH/ahasan/coursecontents/

7. http://math.utoledo.edu/ melbialy/classes/Elem-DE/Finan-diffq1book.pdf

8. http://www.scribd.com/doc/33949835/MATEMATIKA-ZA-INZENJERE-II-diferencijalne-jedna