Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Master rad

PROBLEM MAKSIMALNOG PROTOKA I NJEGOVE KOMBINATORNE POSLEDICE

Milica Gladović

Beograd

2011.

Mentor: **Prof. dr Đorđe Dugošija**
Matematički fakultet u Beogradu

Članovi komisije: **Prof. dr Miodrag Živković**
Matematički fakultet u Beogradu

Prof. dr Milan Dražić
Matematički fakultet u Beogradu

Datum odbrane: 11. 11. 2011. god.

Problem maksimalnog protoka i njegove kombinatorne posledice

Rezime

Cilj ovog rada je formulacija i rešavanje problema maksimalnog protoka kroz transportnu mrežu kao i njegovih kombinatornih posledica, koje se inače u kombinatorici nezavisno izvode.

Interes za rešavanje problema maksimalnog protoka u transportnoj mreži proizilazi iz mogućnosti široke praktične primenu u ekonomiji, elektrotehnici, fizici, biologiji, urbanom planiranju, saobraćaju, telekomunikacijama, društvu i svim oblastima u kojima postoji neki vid transporta. U okviru transporta vrši se prenos materijalnih dobara među trgovačkim centrima, protok nafte i gasa, drumski, železnički i avio saobraćaj, prenos informacija u telekomunikacionom sistemu i šire. Mnogobrojni problemi koji se pojavljuju kod efikasnosti, brzine i ekonomičnosti transporta se rešavaju matematičkim putem.

Konstruisanjem, analizom i rešavanjem problema transportne mreže bavi se teorija grafova, kao deo diskretne matematike. Za određivanje najvećeg obima transporta u datim uslovima potrebno je odrediti maksimalni protok kroz odgovarajuću transportnu mrežu.

U radu je predstavljen dokaz Ford-Fulkersonove teoreme koja određuje uslove pod kojima se postiže maksimalni protok u transportnoj mreži i koja je od osnovnog značaja u teoriji grafova. Fundamentalnu ulogu za pronalaženje maksimalnog protoka u transportnoj mreži ima proučavanje reza u transportnoj mreži, koji predstavlja usko grlo transportne mreže. Pokazano je da se iz Ford-Fulkersonove teoreme mogu izvesti važni rezultati kombinatorike.

Ključne reči: *Teorija grafova, Transportne mreže, Maksimalni protok, Rez transportne mreže, Kombinatorne posledice*

Maximum flow problem and its combinatorial consequences

Summary

The aim of this work is the formulation and solving the maximum flow problem through the transportation network, as well as its combinatorial consequences which are independently deduced in combinatorics.

The interest for solving the problem of maximum flow in the transportation network is taken out of the possibilities of broad practical application in the economics, electrical engineering, physics, biology, urban planning, transportation, telecommunications, society and all the fields where there exists some kind of transport. In transport, the transfer of material goods between trade centres is done, the flow of oil and gas, road, railway and plane transport, transfer of information in the telecommunications system and broader. Numerous problems that occur in efficacy, speed and transport economics are solved by means of mathematics.

The theory of graph, as a part of discreet mathematics, is in charge of the construction, analisys and problem solving of the transport network. For determining the largest volume of transport in the given conditions it is necessary to determine the maximum flow through the corresponding transportation network.

In this work is shown the proof of the Ford-Fulkerson theorem, the one that determines the conditions under which the maximum flow in the transportation net is achieved and is one of fundamental importance in the graph theory. The main role for finding the maximum flow in the transportation network is given to the research of cut of the transportation network, which represents the bottleneck of the transportation network. It is shown that the important results of combinatorics could be drawn form the Ford-Fulkerson theorem.

Key words: *Graph theory, Transportation nets, Maximum flow, Transportation network bottleneck, Combinations consequences*

Predgovor

Rad se sastoji iz tri poglavlja. Prvo poglavlje predstavlja osnovne pojmove o grafovima i njihovu matričnu reprezentaciju. U drugom poglavlju definisani su transportna mreža, protok i rez u transportnoj mreži. Prikazani su rezultati koji dovode do dokaza Ford-Fulkersonove teoreme, Ford-Fulkersonov algoritam i primeri koji ukazuju na široku mogućnost primene. U trećem poglavlju rada su pogodnim izborom transportne mreže, kapaciteta i protoka u njoj iz Ford-Fulkersonove teoreme, dokazani važni kombinatorni rezultati.

Želela bih da se zahvalim:

Mentoru, dr Đorđu Dugošiji, na rukovođenju, potrošenom vremenu i pomoći prilikom izrade ovog rada.

Članovima komisije, dr Miodragu Živkoviću i dr Milanu Dražiću, na ljubaznosti, pažljivom čitanju i korisnim sugestijama koje su doprinele kvalitetu rada.

Dr Jozefu Kratici, na savetima za prevazilaženje problema na koje sam nailazila tokom izrade rada.

Najviše se zahvaljujem svojim roditeljima i bratu na razumevanju, strpljenju i bezgraničnoj podršci.

Beograd, 2011.

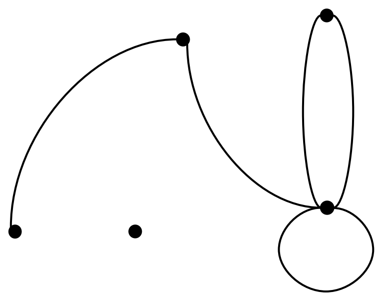
Kandidat:
Milica Gladović

Sadržaj:

1. Osnovni pojmovi o grafovima

Grafovi predstavljaju pogodno sredstvo za reprezentaciju objekata i modeliranje odnosa među objektima, pojavama i procesima sa kojima se svakodnevno susrećemo. Proučavanjem grafova bavi se deo matematike koji se naziva teorija grafova. Postoji veliki broj radova koji proučava grafove. Samo neki od takvih radova su: [4], [5], [6], [13], [14], [19], [29], [30], [32], [35], [36]. U ovom poglavlju biće navedene definicije grafova i njihovih osobina kao i njihovo predstavljanje korišćenjem matrica.

Definicija 1.1: Konceptualno, graf se sastoji iz tačaka i neprekidnih linija od kojih svaka povezuje neke dve od datih tačaka ili tačku sa samom sobom.



Slika 1.1. Graf

Formalno graf se definiše na sledeći način:

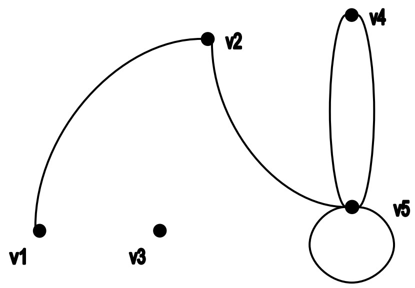
Definicija 1.2: Graf je uređeni par $G=(V,E)$, konačnog skupa tačaka V i multiskupa E, čiji su elementi dvočlani multiskupovi tačaka iz skupa V.

Drugim rečima, elementi skupa E mogu se pojaviti više od jednog puta, tako da svaki ima višestrukost.

Elementi skupa V ili u oznaci $V(G)$ nazivaju se *čvorovi* (eng. *vertex*, mn. *vertices*) grafa G, a elementi skupa E ili u oznaci $E(G)$ *grane* (eng. *edge*, mn. *edges*) grafa G. Čvorovi grafa mogu se obeležavati slovima (*u, v, w..ili* v_1, v_2....) ili brojevima (1, 2, 3...). Grane grafa obeležavamo takođe slovima ili brojevima. Najčešće grane grafa obeležavamo sa e_1, e_2.... Ako je grana e određena čvorovima u i v, granu e obeležavamo e=$\{u,v\}$. Tako i granu e koja povezuje čvor u sa samim sobom obeležavamo e=$\{u,u\}$, što je moguće jer smo granu grafa definisali kao dvočlani multiskup čvorova iz V.

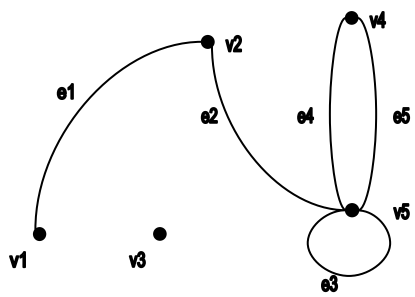
Primer:

Obeležimo čvorove sa prethodne slike 1.1. sa v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.



Slika 1.2. Graf sa slike 1.1 sa obeleženim čvorovima v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

Imamo skup čvorova V=$\{v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4, \ v_5\}$ i skup grana E=$\{\{v_1,v_2\}, \ \{v_2,v_5\}, \ \{v_5,v_5\}, \ \{v_5,v_4\}, \ \{v_5,v_4\}\}$. Ako grane obeležimo sa e_1=$\{v_1,v_2\}$, e_2=$\{v_2,v_5\}$, e_3=$\{v_5,v_5\}$, e_4=$\{v_5,v_4\}$, e_5=$\{v_5,v_4\}$ skup grana možemo zapisati kao E=$\{e_1, \ e_2, \ e_3, \ e_4, \ e_5\}$. Sada graf izgleda kao na slici:



Slika 1.3. Graf sa slike 1.1 zadat skupom čvorova V=$\{v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4, \ v_5\}$ i skupom grana E=$\{e_1, \ e_2, \ e_3, \ e_4, \ e_5\}$

Da bismo opisali graf koristimo sledeću terminologiju:

- Dva čvora *u* i *v* , spojena granom $\{u,v\}$ nazivaju se *krajnji čvorovi grane* $\{u,v\}$.
- Grane se nazivaju *susednim* ako imaju zajednički krajnji čvor.
- Dva čvora *u* i *v* nazivaju se *susednim* ako su povezana granom tj. $\{u,v\}$ je grana.
- Grane sa istim krajnjim čvorovima nazivaju se *paralelne grane*.

- Grana oblika $\{u,u\}$, koja povezuje čvor sa samim sobom, naziva se *petlja*.
- Graf se naziva *prost graf* ako ne sadrži petlje i paralelne grane.
- Graf bez grana naziva se *prazan graf*.
- Graf bez čvorova naziva se *nula graf*.
- Graf sa samo jednim čvorom naziva se *trivijalan graf*.
- *Stepen čvora v*, *d(v)*, je broj grana čiji je *v* krajnji čvor. Po konvenciji, petlja se računa dva puta a paralelne grane računaju se odvojeno.
- Čvor čiji je stepen 1 naziva se *izolovan čvor*.

Na datom primeru grafa sa slike 1.3. primenom prethodne terminologije dobijamo:

- v_1 i v_2 su krajnji čvorovi grane $e_1=\{v_1,v_2\}$.
- e_1 i e_2 su susedne grane jer im je v_2 zajednički krajnji čvor.
- v_1 i v_2 su susedni čvorovi jer su povezani granom $\{v_1,v_2\}$.
- e_4 i e_5 su paralelne grane sa istim krajnjim čvorovima v_4 i v_5.
- Grana e_3 je petlja jer povezuje čvor v_5 sa samim sobom.
- Graf na slici nije prost jer sadrži petlju e_3 i paralelne grane e_4 i e_5.
- Stepen čvora v_1 je $d(v_1)=1$, stepen čvora v_5 je $d(v_5)=5$, stepen čvora v_4 je $d(v_4)=2$ a stepen čvora v_3 je $d(v_3)=0$ pa je v_3 izolovan čvor.

Definicija 1.3: Graf *H* je podgraf grafa *G*, u oznaci $H\subseteq G$, ako je $V(H)\subseteq V(G)$, $E(H)\subseteq E(G)$.

Ako je $H\subseteq G$ *i* $H\neq G$, pišemo $H\subset G$ i zovemo ga *pravi podgraf*. Podgraf *H* od *G* za koji je $V(H)=V(G)$ zove se *podgraf koji razapinje G* ili *razapinjući podgraf*. Ako iz *G* izbacimo petlje i za svaki par susednih čvorova sve osim jedne grane dobija se *jednostavan podgraf koji razapinje G*.

Definicija 1.4: *Šetnja* u grafu G=(V,E) je konačan niz oblika $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$ sastavljen od naizmenično čvorova i grana iz grafa G, *tako da su* čvorovi v_{i-1} *i* v_i krajnji čvorovi grane e_i, $1\leq i\leq n$.

Šetnja započinje i završava se čvorom. v_0 je početni a v_n krajnji čvor šetnje $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$. *n* je dužina šetnje $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$.

Šetnja je dužine 0 ako se sastoji samo iz jednog čvora. U šetnji je dozvoljeno da se poseti čvor ili prođe kroz granu više od jednog puta, tj. u šetnji se mogu ponavljati čvorovi i grane. Ako važi $v_0 \neq v_n$ šetnja se naziva otvorena a u suprotnom zatvorena.

Definicija 1.5: *Šetnja je staza* ako se kroz svaku granu može proći najviše jednom, tj u stazi nema ponavljanja grana više od jednom.

Tada je mogući broj puta koji se *u* i *v* pojavljuju kao uzastopni čvorovi u stazi jednak najviše broju paralelnih grana koje povezuju *u* i *v*.

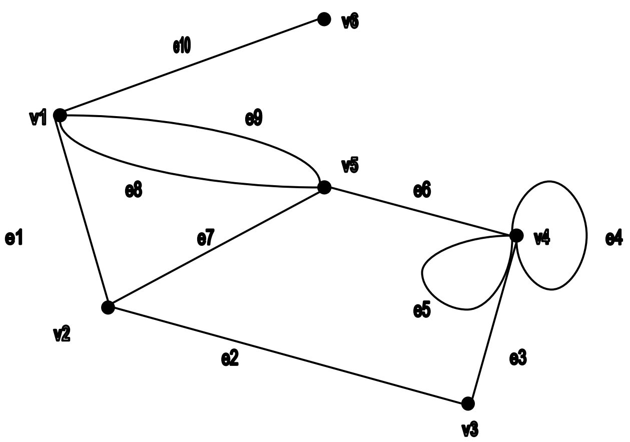
Definicija 1.6: *Staza je put* ako svaki čvor može biti posećen najviše jednom osim u slučaju kada su isti početni i krajnji čvor.

Definicija 1.7: Zatvoren put naziva se ciklus.

Definicija 1.8: Graf koji ne sadrži cikluse naziva se aciklični graf.

Primer:

Posmatramo graf G na sledećoj slici:



Slika 1.4. Graf

Šetnja $v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$ je otvorena, dok je šetnja

$v_4, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4$ zatvorena.

Šetnja $v_1, e_8, v_5, e_9, v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_4, v_4$ je staza.

Šetnja $v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$ je put a šetnja $v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$ je ciklus.

Šetnja koja počinje čvorom *u* a završava se čvorom *v* naziva se *u*-*v* šetnja.

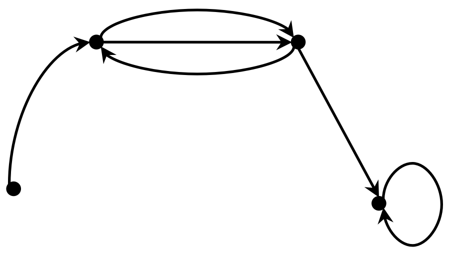
Definicija 1.9: Čvorovi *u* i *v* u grafu nazivaju se povezanim ako postoji *u*-*v* šetnja u grafu(tada postoji takođe i *u*-*v* put).

Ako su *u* i *v* povezani i *v* i *w* povezani tada su i *v* i *w* povezani čvorovi, tj. ako je *u-v* setnja i *v-w* šetnja tada je i *v-w* takođe šetnja.

Definicija 1.10: Povezan graf je graf u kome su svaka dva čvora međusobno povezana.

Grane u grafu mogu biti orijentisane tj. usmerene. Orijentacija grane, prikazuje se strelicom koja je usmerene od jednog ka drugom čvoru grane.

Definicija 1.11: Graf koji se sastoji iz čvorova i orijentisanih grana naziva se orijentisani graf ili digraf.

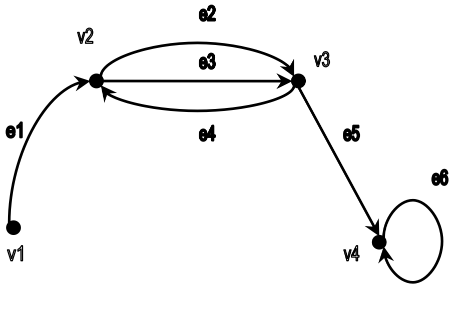


Slika 1.5. Digraf

Formalno:

Definicija 1.12: Uređeni par *G=(V,E)*, konačnog skupa čvorova, *V* i skupa grana, *E*, od kojih svaka predstavlja uređeni par čvorova iz V, naziva se *digraf*.

U digrafu *G=(V,E)*, V je konačan skup čvorova a E multiskup grana kao i kod neorijentisanog grafa, tj. grafa. Razlika u odnosu na graf je što u digrafu elementi skupa E nisu dvočlani multiskupovi nego uređeni parovi čvorova. Grana definisana čvorovima *u* i *v*, orijentisana od čvora *u* ka čvoru *v*, obeležava se sa *(u,v)* a grana suprotne orijentacije tj. od čvora *v* ka čvoru *u* sa *(v,u).* Takođe je kao i kod grafa potrebno obratiti pažnju na mnoštvo grana a orijentacija petlje je nebitna.



Slika 1.6. Digraf sa slike 1.5 sa obeleženim čvorovima i granama

U velikoj meri se koristi ista terminologija kao kod grafa. Za digraf važi:

- Čvor *u* je početni a čvor *v* završni čvor grane *(u,v)*. Grana je susedna sa svojim početnim i završnim čvorom.
- Dva čvora *u* i *v* nazivaju se *susednim* ako su povezana granom .
- Grane sa istim početnim i završnim čvorovima nazivaju se *paralelne grane*.
- Grana oblika *(u,u)*, koja povezuje čvor sa samim sobom, naziva se *petlja*.
- Digraf se naziva *prost digraf* ako ne sadrži petlje i paralelne grane.
- *Izlazni stepen* čvora *v,* koji označavamo *is(v)*, je broj grana kojima je *v* početni čvor.
- *Ulazni stepen* čvora *v*, koji označavamo *us(v)*, je broj grana kojima je *v* završni čvor.
- Definicije šetnje(staze, puta ili ciklusa) $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$, iste su kao i za graf s tim što je u digrafu v_{i-1} početni a v_i završni čvor grane e_i, $1 \le i \le n$.

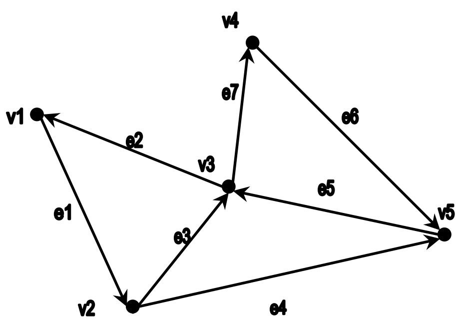
Kada u digrafu G posmatramo grane tako da ne uzimamo u obzir njihovu orijentaciju tada dobijamo osnovni neusmereni graf digrafa.

Definicija 1.13: Digraf je povezan ako je povezan osnovi graf koji dobijamo kada u digrafu ne uzmemo u obzir zadatu orijentaciju grana.

Definicija 1.14: Čvorovi u digrafu su povezani ako su povezani i u grafu koji dobijamo kada u digrafu ne uzmemo u obzir zadatu orijentaciju grana.

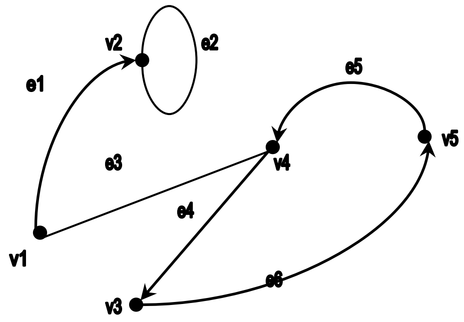
Definicija 1.15: Dva čvora v_i i v_j su *jako povezana* u digrafu *G* ako postoji orijentisani put v_i-v_j i orijentisani put v_j-v_i u *G.*

Definicija 1.16: Digraf *G* je jako *povezan* ako su svaka dva čvora digrafa *G* jako povezana.



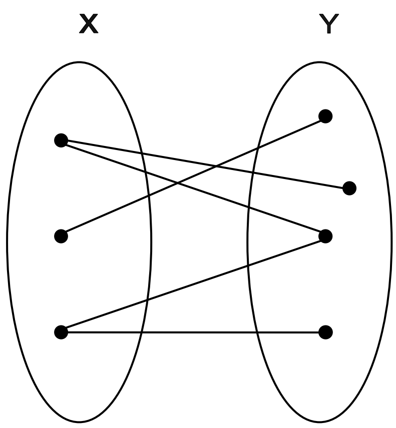
Slika 1.7. Jako povezan digraf

Definicija 1.17: Graf koji sadrži i orijentisane grane i grane bez orijentacije naziva se *mešoviti graf*.



Slika 1.8. Mešoviti graf

Definicija 1.18: Ako skup čvorova, *V,* grafa(digrafa) *G=(V,E)* možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa *X* i *Y, V=X* $\cup$ *Y,* tako da svaka grana iz *G* spaja neki čvor skupa *X* sa nekim čvorom iz skupa *Y*, onda kažemo da je *G= G(X,Y,E) bipartitni graf (bipartitni digraf)*.



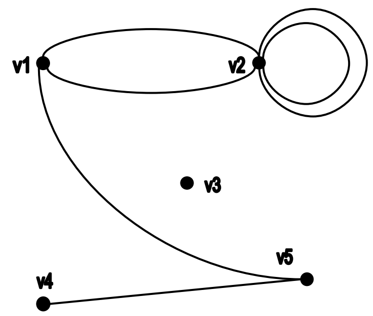
Slika 1.9. Bipartitni graf, *G=(V,E), V=X* $\cup$ *Y*

1.1. Matrično predstavljanje grafa i digrafa

Već je rečeno da se grafovi i digrafovi mogu upotrebiti za modeliranje i rešavanje mnogih praktičnih problema. Za rešavanje takvih problema često se koristi računar pa je neophodno znati kako se grafovi predstavljaju u računaru. Jedan od uobičajenih načina za predstavljanje grafova i digrafova u računaru je preko *matrica.* Detaljnije u $[21]$, $[24]$, $[32]$.

Definicija 1.1.1: *Matrica susedstva grafa* G=(V,E) je *n x n* matrica $A=\left[a_{ij}\right]$, gde *n* predstavlja broj čvorova u G, $V=\left\{v_1,....,v_n\right\}$ a broj a_{ij} je broj grana između čvorova v_i i v_j. Dakle $a_{ij}=0$, ukoliko u grafu ne postoji grana (v_i, v_j). Matrica *A* je simetrična tj. $A^T=A$.

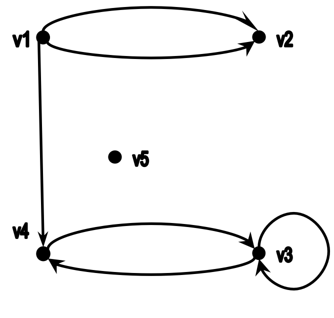
Rečeno je da se petlja računa dva puta a pralelne grane odvojeno.



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 1.1.1. Graf i njegova matrica susedstva

Definicija 1.1.2: *Matrica susedstva digrafa* G je $A=\left[a_{ij}\right]$, gde je a_{ij} broj grana kojima je v_i početni a v_j završni čvor, tj. broj grana orijentisanih od čvora v_i ka čvoru v_j.

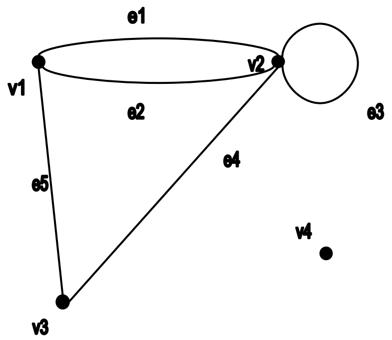


$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 1.1.2. Digraf i njegova matrica susedstva

Definicija 1.1.3: *Matrica incidencije(pripadnosti),* grafa G, sa n čvorova i m grana je n x m matrica $A=\left[a_{ij}\right]$ sa n vrsta(po jedna za svaki čvor) i m kolona (po jedna za svaku granu) i

- $a_{ij}=1$ ako je v_i krajnji čvor grane e_j
- $a_{ij}=0$ ako v_i nije krajnji čvor grane e_j

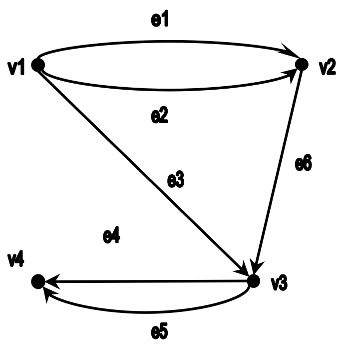


$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 1.1.3. Graf i njegova matrica incidencije

Definicija 1.1.4: *Matrica incidencije(pripadnosti),* digrafa G bez petlji, sa n čvorova i m grana je n x m matrica $A=\left[a_{ij}\right]$ sa n vrsta(po jedna za svaki čvor) i m kolona (po jedna za svaku granu) i

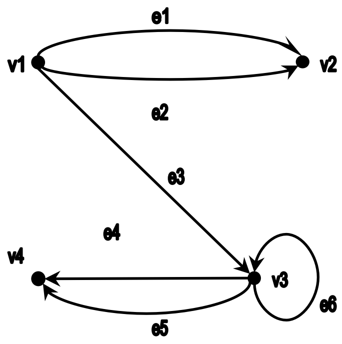
- $a_{ij}=1$ ako je v_i početni čvor grane e_j
- $a_{ij}=-1$ ako je v_i završni čvor grane e_j
- $a_{ij}=0$ ako grana e_j nije incidentna sa čvorom v_i



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Slika 1.1.4. Digraf bez petlje i njegova matrica incidencije

U slučaju digrafa matricu incidencije smo posmatrali pod uslovom da je digraf bez petlji, jer je za petlju isti čvor i početni i završni. U slučaju da se radi o čvoru v_i digrafa koji je granom e_j spojen sam sa sobom, element a_{ij} matrice incidencije je $a_{ij}=2$, što govori da je v_i i početni i završni čvor petlje e_j.



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Slika 1.1.5. Digraf sa petljom i njegova matrica incidencije

2. Problem maksimalnog protoka

U ovom poglavlju prikazan je metod za rešavanje problema maksimalnog protoka. Odeljci 2.1 i 2.2 formalizuju pojmove protoka i protoka u mreži i definišu problem maksimalnog protoka. Odeljak 2.3 opisuje Ford-Fulkersonov metod (*Ford-Fulkerson Max Flow Min Cut Method*) za pronalaženje maksimalnog protoka u mreži. Deo literature koja se bavi ovom tematikom je: [1], [4], [6], [7], [13], [14], [16], [17], [19], [29], [30], [31], [35], [36], [37].

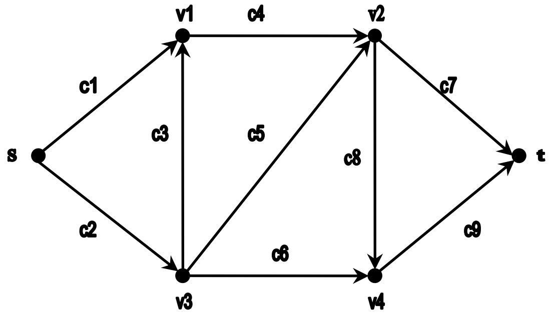
2.1. Definicije transportne mreže, protoka i reza

U ovom odeljku definisana je transportna mreža, kao i protok i rez u transportnoj mreži. Orijentisani graf se može interpretirati kao transportna mreža i koristiti da odgovori na pitanja o materijalnim tokovima. Svaka orijentisana grana u mreži može se posmatrati kao kanal za materijal. Na svakoj grani označen je kapacitet kao gornje ograničenje po kom materijal prolazi kroz datu granu. Čvorovi grana su raskrsnice, a osim izvora i ponora, materijal prolazi kroz čvorove mreže, bez prikupljanja u njima.

Definicija 2.1.1: Transportna mreža *M* je povezan orijentisani graf bez petlji $G=(V,E)$ u kom su ispunjeni sledeći uslovi:

1) postoji jedinstveni čvor, $s \in V$, takav da je $us(s)=0$, koji se naziva *izvor mreže M*
2) postoji jedinstveni čvor, $t \in V$, takav da je $is(t)=0$, koji se naziva *ponor mreže M*
3) svakoj orijentisanoj grani $e=(u,v) \in E$, funkcija $c:E \to R^+$, dodeljuje broj $c(e)=c(u,v)$, koji predstavlja *kapacitet(težinu) grane.*

Čvorove iz $V \backslash \{s,t\}$ nazivamo *središnjim čvorovima* mreže *M*.



Slika 2.1.1. Transportna mreža sa označenim kapacitetima grana c_i, $i=1,2..9$

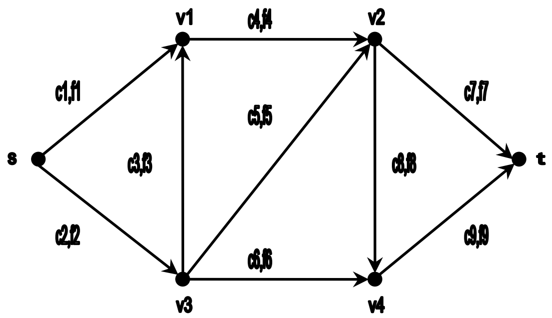
Definicija 2.1.2: *Protok(ili tok)* u transportnij mreži *M=(V,E)* je preslikavanje $f{:}E \rightarrow R^{+}$ koje svakoj grani *e=(u,v)* dodeljuje ne-negativan realan broj *f(e)=f(u,v),* tako da važi:

1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \ \forall e \in E$ (2.1.1)

-*<u>ograničenje kapacitetom</u> :*
količina toka duž bilo koje grane
ne može preći dati kapacitet grane

2) $\sum_{u \in V} f(u,v) = \sum_{u \in V} f(v,u), \ \forall v \in V \backslash \{s,t\}$ (2.1.2)

-*<u>zakon očuvanja protoka</u>:*
za svaki središnji čvor važi da je
količina toka koja u njega ulazi
jednaka količini toka koja iz njega
izlazi



Slika 2.1.2. Transportna mreža sa slike 2.1.1 i zadatim protocima f_i , *i=1,2..9*

Protoci f_i, *i=1,2..9,* na slici 2.1.2, zadati su tako da važi $f_i<c_i$, za $\vee$ *i=1,2..9*, odnosno ispunjen je uslov (2.1.1), i uslov (2.1.2), tj. $f_1+f_3=f_4$, $f_2=f_3+f_5+f_6$, $f_4+f_5=f_7+f_8$, $f_6+f_8=f_9$.

Definicija 2.1.3: Neka je *f* tok transportne mreže *M=(V,E)* i $s \in V$ je izvor mreže *M*. *Vrednost protoka kroz mrežu M, val(f)*, definišemo jednakošću:

$$val(f)=\sum_{v \in V} f(s,v) \tag{2.1.3}$$

Pokazaćemo da zbog zakona očuvanja protoka važi intuitivno očigledna činjenica, da je ukupna količina protoka koja dolazi iz izvora jednaka količini protoka koja ulazi u ponor:

$$val(f)=\sum_{v\in V} f(s,v)=\sum_{v\in V} f(v,t) \qquad (2.1.4)$$

Protok sa najvećom vrednošću naziva se *maksimalni protok u transportnoj mreži*. Protok f^* je maksimalni protok u transportnoj mreže M ako ne postoji protok f u M za koji je $val(f)>val(f^*)$.

Da bismo pokazali pod kojim uslovima se postiže maksimalni protok i dokazali važne zakone koji važe u transportnoj mreži potrebne su sledeće definicije.

Definicija 2.1.4: Rez R u transportnoj mreži M je razbijanje skupa čvorova V na dva disjunktna podskupa S i T, tako da izvor $s\in S$ a ponor $t\in T$.

Skupovi S i T na koje rez u mreži razbija skup čvorova V, nemaju zajedničkih čvorova i zajedno sadrže sve čvorove iz V, tj. $V=S\cup T$. Rez R označavamo $R=(S,T)$.

Kaže se da rez $R=(S,T)$ u transportnoj mreži M razdvaja izvor s od ponora t i on se još naziva i *s-t rez*.

Definicija 2.1.5: Kapacitet $c(R)=c(S,T)$, reza $R=(S,T)$, određen je izrazom

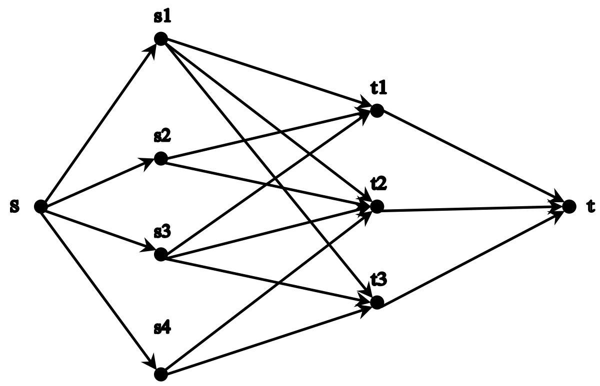
$$c(S,T)=\sum_{u\in S, v\in T} c(u,v) \qquad (2.1.5)$$

s-t rez R u transportnoj mreži M naziva se *minimalnim rezom*, ako ne postoji takav *s-t rez* R^* u M za koji važi $c(R^*)<c(R)$.

Sa $f(S,T)$ označavamo sumu protoka kroz grane orijentisane od S ka T a sa $f(T,S)$ sumu protoka kroz grane orijentisane od T ka S.

2.1.1. Opis transportne mreže sa više izvora i više ponora

Transportna mreža sa više izvora $S(s_1,\ldots, s_m)$ i više ponora $T(t_1,\ldots, t_n)$ se može svesti na digraf sa jednim izvorom i jednim ponorom. To se radi uvođenjem jednog zajedničkog čvora s – „superizvora" koji je sa izvorom vezan usmerenim granama (s, s_i) sa kapacitetima $c(s, s_i)=\infty$ *za* $i=1,\ldots, m$. Po istom principu se ponori spajaju sa novim čvorom– „superponorom" t usmerenim granama (t_i, t) sa kapacitetima $c(t_i, t) = \infty$ *za* $i =1,\ldots, n$.



Slika 2.1.1.1. Transportna mreža sa četiri izvora s_1, s_2, s_3, s_4 i tri ponora t_1, t_2,t_3

Uvešćemo još jednu oznaku:

$$f^+(v)=\sum_{e\in is(v)} f(e),\ f^-(v)=\sum_{e\in us(v)} f(e),\ \forall v\in V. \qquad (2.1.1.1)$$

Čvorovi iz S i T postaju središnji čvorovi uz poštovanje zakona očuvanja protoka.

$$f(s,s_i)=f^+(s_i) - f^-(s_i),\ \text{za } i=1, 2, \ldots, m \qquad (2.1.1.2)$$

$$f(t_j,t)=f^-(t_j) - f^+(t_j),\ \text{za } j=1, 2, \ldots, n \qquad (2.1.1.3)$$

Za sve ostale grane vrednost f ostaje ista. Novi izvor i ponor ne ograničavaju protok, pa je on isti kao i u polaznom grafu.

2.2. Veza protoka i reza i Ford-Fulkersonova teorema

Teorema 2.2.1: Za svaki protok *f* i bilo koji *s-t* rez, *(S,T),* u transportnoj mreži *M* važi

$$val\,(f)=f(S,T)-f(T,S). \tag{2.2.1}$$

Dokaz: Iz definicije 2.1.2. i definicije 2.1.3. imamo:

$$\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{v\in V} f(v,u) = \begin{cases} val(f), & u=s \\ 0, & u\in S\setminus\{s\} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Sumirajući ove rezultate nad svim čvorovima u *S* dobijamo:

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in V} f(v,u) = val(f) \tag{2.2.3}$$

Na levoj strani jednačine 2.2.3, *f(u,v)* i *–f(u,v)* za $u\in S$ i $v\in S$ pojavljuju se tačno jednom i poništavju jedna drugu. Izraz 2.2.3 je sada pojednostavljen do

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) = val(f) \tag{2.2.4}$$

Dakle,

$$f(S,T)-f(T,S)= val(f) \tag{2.2.5}$$

Izraz 2.1.3 je poseban slučaj izraza 2.2.5.

Posledica 2.2.1: Za svaki protok *f* i bilo koji *s-t rez, (S,T),* u transportnoj mreži *M* važi

$$val(f)\leq c(S,T). \tag{2.2.6}$$

Dokaz: Kako je za svaku vrednost *f(u,v)* ne-negativan broj, iz teoreme 2.2.1. sledi

$$val\,(f)=f(S,T)-f(T,S)\leq f(S,T)\leq c(S,T) \tag{2.2.7}$$

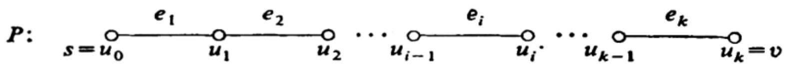
Ako za granu $e\in E$ transportne mreže *M=(V,E)* važi *f(e)=c(e)*, ona se naziva *f-zasićena* grana mreže *M*, a ako važi *f(e)<c(e)* grana *e* se naziva *f-nezasićena* grana mreže *M*. Grana *e* se naziva *f-pozitivna* ako važi *f(e)>0,* a ako važi *f(e)=0* *f*-nula grana. Jednakost vrednosti protoka i kapaciteta reza u formuli 2.2.7. se očigledno postiže u slučaju kada je *f(T,S)=0* i *f(S,T)= c(S,T)*. Drugim rečima, *f(S,T)= c(S,T)* ako i samo ako su sve grane usmerene od *S* ka *T, f-zasićene* a sve grane usmerene od *T* ka *S, f-nula*.

Posledica 2.2.2: Ako je *f* protok a *R* takav *s-t rez* u mreži *M* za koji važi *val(f)=c(R)* $\Rightarrow$ *f* je *maksimalni protok* a *R* je *minimalni rez*.

Dokaz: Pretpostavimo da je f^* *maksimalni protok* a R^* *minimalni s-t rez* mreže *M* i da za proizvoljni protok *f* i *s-t rez R* u mreži *M* važi *val(f)=c(R)*. Tada je $val(f) \leq val(f^*) \leq c(R^*) \leq c(R)$, pa zbog pretpostavke da je *val(f)= c(R)* svuda važi jednakost. Dakle, slede jednakosti $f=f^*$ *i* $R=R^*$. Znači *f* je *maksimalni protok* a *R minimalni s-t rez* u mreži *M*.

Dokazuje se da je vrednost maksimalnog protoka jednaka kapacitetu minimalnog reza. Razmatramo transportnu mrežu *M* s protokom *f*.

Neka je *P* put u *M* od izvora do bilo kog čvora *v*. *P* ne mora nužno biti usmereni put.



Sl2.1.3. Put *P* u mreži od izvora do čvora *v*

Grana e_i puta *P* naziva se *direktna grana* puta *P*, ako je orijentisana od u_{i-1} ka u_i. Inače ona se naziva *obrnuta grana* puta P. Pretpostavimo da za svaku granu *e* puta *P* važi:

$$\varepsilon_i(P)=\begin{cases} c(e_i)-f(e_i), & e_i-direktna\_grana; \\ f(e_i), & e_i-obrnuta\_grana. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Rezidualni kapacitet puta *P* je nenegativan broj $\varepsilon(P)$, definisan jednakošću

$$\varepsilon(P)=\min_i\{\varepsilon_i(P)\} \tag{2.2.9}$$

Put nazivamo *f-nezasićen*, ako su sve direktne grane puta *f-nezasićene*, a sve obrnute grane puta *f-pozitivne*. *s-t put P* nazivamo *f*-rastući put, ako je put *P f*-nezasićen.

Za *s-t put P* nejednakost $\varepsilon(P)>0$ važi ako i samo ako je *P f*-rastući *put*. Za takav *s-t put P* u mreži *M* možemo definisati novi protok *f** tako da važi:

$$f^*(e)=\begin{cases} f(e)+\varepsilon(P), & e-direktna \quad grana; \\ f(e)-\varepsilon(P), & e-obrnuta \quad grana; \\ f(e), & u \quad protivnom. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Očigledno važi *val(f*)=val(f)+*$\varepsilon(P)$. Dakle *val(f*)>val(f)* ako i samo ako je *P f-rastući put*. Drugim rečima, protok *f* nije maksimalan ako postoji *f-rastući put*. *f** se dobija uvećanjem protoka duž svih direktnih grana puta *P* za vrednost $\varepsilon(P)$ i umanjenjem protoka duž svih obrnutih grana puta *P* za vrednost $\varepsilon(P)$. Protok duž ostalih grana ostaje neizmenjen.

Teorema 2.2.2: Protok *f* u transportnoj mreži *M* je maksimalan ako i samo ako u mreži *M* ne postoji *f-rastući put*.

Dokaz: *Neophodan uslov:* Ako u mreži *M* postoji *f-rastući put P*, jasno je da *f* nije maksimalni protok jer izmenama i dopunama na putu *P* protok *f** ima veću vrednost nego *f*.

Dovoljan uslov: Pretpostavimo da u mreži *M* ne postoji *f-rastući put P*. Neka je *S* skup svih čvorova u *M*, do kojih postoji *f-nezasićeni put* od izvora. Jasno je da $s \in S$. Tada važi $t \in T$, jer u mreži *M* ne postoji *f-rastući put*.

Pokazano je, posledica 2.2.2, da ako važi *val(f)=c(S,T)* onda je *f maksimalni protok* a *R=(S,T)* je *minimalni s-t rez*.

Posmatramo orijentisanu granu *(u,v)* za koju $u \in S$, a $v \in T$. Kako $u \in S$, tada postoji *f-nezasićen s-u-put Q*. Grana *(u,v)* mora biti *f*-zasićena, jer inače *Q* može biti proširen i dobili bi *f-nezasićen s-v-put*, što je nemoguće jer $v \in T$. Slično, možemo pokazati da svaka grana *(u,v),* orijentisana od *T* ka *S* pod ovim uslovima mora biti *f*-nula.

Dakle važi, *f(S,T)=c(S,T)* i *f(T,S)=0*. Prema tome, *val(f)= f(S,T)- f(T,S)= c(S,T)* i *f* je *maksimalni protok* a *(S,T)* je *minimalni s-t rez*.

Posledica prethodnih rezultata je sledeća teorema objavljena *1956. god*. Dokazali su je *L. R. Ford* i *D. R. Fulkerson* zbog čega je i dobila naziv *Ford-Fulkersonova teorema.*

Teorema 2.2.3: U transportnoj mreži vrednost maksimalnog protoka jednaka je kapacitetu minimalnog reza.

2.3. Ford-Fulkersonov algoritam

U ovom delu je predstavljen *Ford-Fulkersonov algoritam* pomoću kog određujemo maksimalni protok u transportnoj mreži. Algoritam se sastoji iz dve faze.

U prvoj fazi koristi se procedura kojom se proverava da li postoji *f-rastući put* u datoj mreži. Pokazano je da, ako takav put ne postoji tada je protok *f maksimalan*. U suprotnom ako u mreži postoji *f-rastući put*, prelazi se na drugu fazu.

U drugoj fazi pomoću oznaka na mreži, dobijenih u prvoj fazi, definišemo *f-rastući put P* i dobijamo na putu *P* modifikovani protok *f**. Zatim, se primenjuje prva faza za dobijeni protok *f**. Treba imati na umu da je $val(f^*)>val(f)$.

U prvoj fazi, čvoru *v* dodeljujemo oznaku (d_v, Δ_v). Prvi simbol d_v, ukazuje na čvor iz koga *v* dobija ovu oznaku, kao i na smer označavanja, napred ili nazad. Ako temena dobijaju oznaku, znači da postoji *f-nezasićeni s-t put P* i $\varepsilon(P)=\Delta_v$.

Prva faza počinje označavanjem izvora sa $(-,\infty)$, što ukazuje da se iz izvora može ispumpati neograničena količina protoka. Označavanje sledećih čvorova vrši se po sledećim pravilima:

Pretpostavimo da je čvor *u* označen a čvor *v* nije. Neka je *e* grana koja spaja *u* i *v*.

Direktno označavanje: Ako je $e=(u,v)$, direktno označavanje *v* iz *u* duž grane *e* je moguće, ako $c(e)>f(e)$. Ukoliko se takvo označavanje realizuje, čvor *v* dobija oznaku (u^+, Δ_v), gde je $\Delta_v=min\{\Delta_u, c(e)-f(e)\}$.

Obrnuto označavanje: Ako je $e=(v,u)$ tada je obrnuto označavanje od *v* ka *u* duž grane *e* moguće ako, $f(e)>0$. Ukoliko se takvo označavanje realizuje, čvor *v* dobija oznaku (u^-, Δ_v), gde je $\Delta_v=min\{\Delta_u, f(e)\}$.

U prvoj fazi čvorovi se označavaju samo jednom. Ova faza se završava kada:

1) ponor, čvor *t* dobije oznaku

2) ponor, čvor *t* nije označen i više nijedan od čvorova ne može biti označen

Ako *t* dobije oznaku u prvoj fazi, tada iz pravila označavanja sledi da postoji *f-rastući put P* i $\varepsilon(P)=\Delta_t$.

U drugoj fazi *put P* pratimo u suprotnom smeru pomoću simbola d_v i određujemo promenjeni protok na *P f**. Zatim se prva faza ponavlja u odnosu na novi protok *f**. Ako je prva faza završena bez dodeljivanja oznake čvoru *t*, znači da *f-rastući put* ne postoji, a samim tim trenutni protok je maksimalan.

Opis Ford-Fulkersonovog algoritma :

1. Izabrati proizvoljan protok f kroz grane zadate transportne mreže.
2. Obeležiti izvor, s, parom $(-, \infty)$.
3. Ako postoje neoznačeni čvorovi, koji se mogu označiti direktnim ili obrnutim označavanjem, izabrati jedan takav čvor v, obeležiti ga i preći na korak 4. U suprotnom preći na korak 7.
4. Ako je $v=t$, preći na korak 5. Sada je prva faza završena. Inače, preći na korak 3.
5. (početak druge faze) Označimo čvor v sa (d_v, Δ_v). Ukoliko je zadovoljeno sledeće:

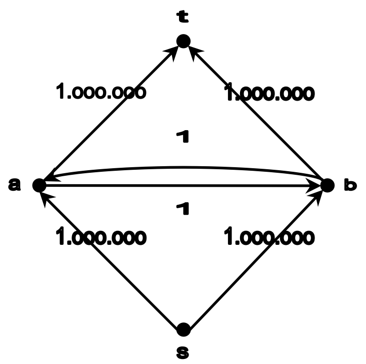
   - ako $d_v=u^+$, obeležiti, $f(u,v)= f(u,v)+ \Delta_t$

   - ako $d_v=u^-$, obeležiti, $f(v,u)= f(v,u) - \Delta_t$
6. Ako je $u=s$ ukloniti sve oznake. Druga faza je završena i preći na korak 2. U suprotnom $v=u$ i tada preći na korak 5.
7. Dobijeni protok f je maksimalan. Kraj.

2.3.1. Kratko o vremenskoj složenosti algoritma

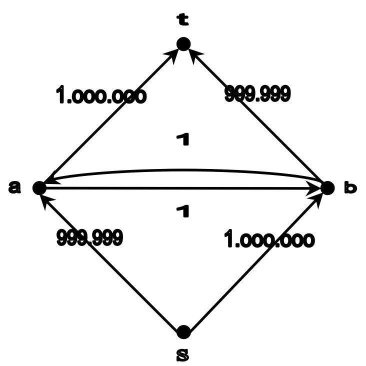
Ford-Fulkersonov algoritam nije polinomijalan. Pronalaženja rastućeg puta u Ford-Fulkersonovom algoritmu mora biti pažljivo. U slučaju kada bi kapaciteti koje tok *f* može dostići kroz neku granu bili iracionalni tada bi se moglo desiti da maksimalan protok ne bude ostvaren čak iako se postupak ponavlja u nedogled. U slučaju kada su *f* i *c* racionalni brojevi algoritam staje sa pronađenim proizvoljnim maksimalnim protokom ali i tada može doći do određenih poteškoća. Pretpostavljamo da su kapaciteti grana pozitivni celi brojevi. U Ford-Fulkersonovom algoritmu, čvorovi mogu biti obeleženi bilo kojim redosledom, tj. izbor puta za dopunu protoka, kada je to moguće, vrši se na proizvoljan način.

Postoje problemi koji nastaju ovakvim proizvoljnim izborom. U nekim slučajevima, algoritam može potrajati jako dugo. Razmatramo, na primer, sledeću mrežu.



Slika 2.3.1.1. Mreža sa zadatim kapacitetima

Pretpostavimo da u prvom koraku algoritma označavanja uzmemo da je početni protok nula-protok. Za rastući put sa slike 2.3.1.1. odaberemo $s \to a \to b \to t$ duž kog može biti poslata samo jedna jedinica protoka. Nakon prvog koraka mreža izgleda kao na slici 2.3.1.2 :



Slika 2.3.1.2. Mreža sa slike 2.3.1.1 nakon prvog koraka

Sada je moguć rastući put $s \to b \to a \to t$, duž koga opet može biti preusmerena samo jedna jedinica protoka. Dakle izborom rastućeg puta koji sadrži čvorove *a* i *b* moguće je preusmeriti samo jednu jedinicu protoka u svakom koraku. Tada, maksimalni protok od 2,000,000 jedinica može biti postignut sa 2,000,000 koraka. Problem vrlo spore konvergencije puta kao u gornjem primeru može se izbeći ako se, u svakoj iteraciji, pažljivo odabere rastući put. Najviše smisla ima odabrati rastući put duž koga najviše toka može biti preusmereno u jednom koraku. Tako bismo u primeru sa slike 2.3.1.1, našli optimalno rešenje u dva koraka. Drugi mogući način je odabrati najkraći rastući put, to jest, rastući put koji koristi najmanji broj grana. To je razumljivo jer ćemo na taj način koristiti kapacitet manjeg broja grana i zadržati više grana za kasnije ponavljanje. Upotreba ovog načina bi takođe rezultirala dvema iteracijama u gornjem primeru.

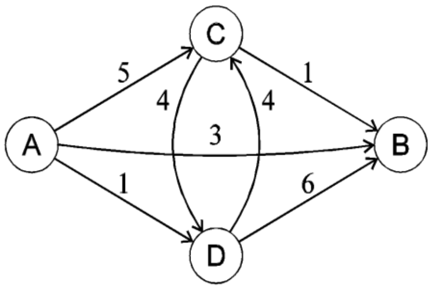
Dakle, vremenska složenost *Ford-Fulkerson-ovog algoritma* dosta zavisi od načina traženja rastućeg puta protoka. Ako se ovaj put traži primenom algoritma obilaska po širini ili dubini tada svaka iteracija petlje iznosi $O(mf)=O(m)$, gde *m* pretstavlja broj grana. Kada su kapaciteti grana celobrojne vrednosti u svakoj iteraciji u kojoj je pronađen put povećanog protoka trenutno maksimalni protok povećava se za 1. Zato petlje ima najviše f_{max} iteracija pa je gornja granica složenosti ove implementacije algoritma $O(mf_{max})$. Prema tome, ako maksimalni protok nije veliki algoritam je dobar. U suprotnom, kao što smo videli broj koraka može biti tako veliki kao i vrednost maksimalnog protoka. Vreme izvršavanja algoritma ne zavisi samo od broja čvorova i kapaciteta grana. Algoritam može biti modifikovan tako da ne zavisi od kapaciteta. U tom slučaju radiće i za iracionalne kapacitete.

Malom modifikacijom *Ford-Fulkersonovog algoritma*, tako što se put povećanog protoka traži algoritmom obilaska po širini kao najkraći put između *s* i *t* u smislu broja grana koje sačinjavaju put *J.Edmonds* i *R. Karp* su implementirali algoritam označavanja transportne mreže maksimalne složenosti $O(nm^2)$. *m* broj grana a *n* broj čvorova razmatrane transportne mreže. Ovom jednostavnom idejom *Edmonds* i *Karp* 1972. god. dobili su prvi algoritam za rešenje problema maksimalnog protoka koji radi u polinomijalnom vremenu i za realne kapacitete. *Dinic(Yefim Dinitz) 1970.god*. predlaže rešavanje problema *(Dinic's Algorithm)* složenosti $O(n^2m)$ koje u velikoj meri povećava performanse do tada razvijenih algoritama. Goldberg i Tarjan su *1986. god.* razvili metod, koji takođe ima osnovni značaj, poznat pod nazivom push-relabel algoritam (*Push-Relabel Algorithm*). *Push-relabel algoritam* je polinomijalan i kompleksnosti $O(n^2\sqrt{m})$. Jedan je od najefikasnijih i studiran je do danas. *Goldberg i Rao 1997. god* predlažu algoritam za rešenje ovog problema koji je do sada najmoderniji i složenosti je $O(\min\left\{m^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{2}{3}}\right\} m\log\left(\frac{n^2}{m}\right)\log c_{max})$, gde je c_{max} najveći celobrojni kapacitet grane. U literaturi ([1], [12], [15], [20], [22], [28], [30]) se može naći detaljan opis navedenih algoritama.

2.3.2. Primer određivanja protoka kroz mrežu

Ford-Fulkersonov algoritam koristimo za pronalaženje maksimalnog protoka u sledećem primeru.

Primer: U grad B koji je u ratnom okruženju, potrebno je dostaviti humanitarnu pomoć iz grada A koja se može dopremati samo avionima. Pored direktnih letova AB, pomoć je moguće isporučivati i preko gradova C i D. Broj i smer letova između svaka dva grada je ograničen. Uslovi za dostavljanje pomoći predstavljeni su transportnom mrežom na slici 2.2.2.1, tako da brojevi pored svake grane predstavljaju najveći broj isporuka koji je moguće dopremiti kroz tu granu.

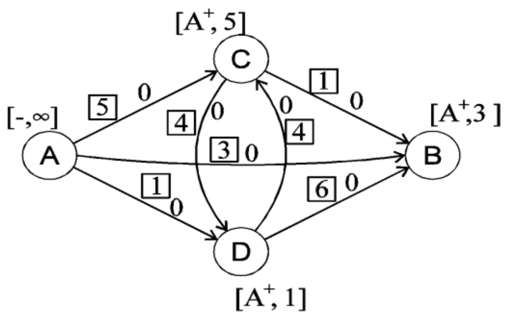


Slika 2.2.2.1. Šematski prikaz avionskih linija i dozvoljeni broj letova na svakoj liniji

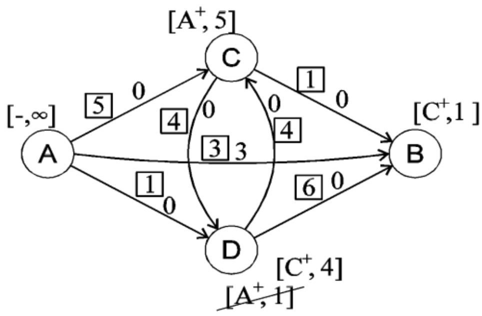
Potrebno je odrediti koliko je isporuka humanitarne pomoći najviše moguće dopremiti u grad B i na kojoj liniji je najpotrebnije uvesti nove letove, da bi se količina isporučene humanitarne pomoći najefikasnije povećala?

Za rešenje datog problema koristi se procedura označavanja

a)

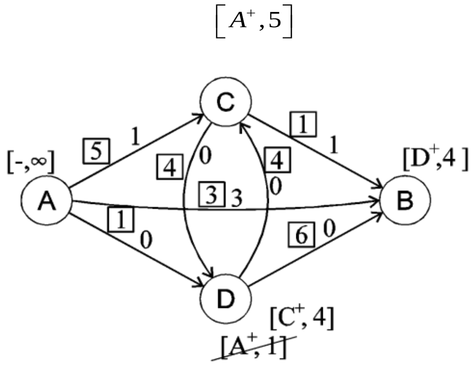


b)



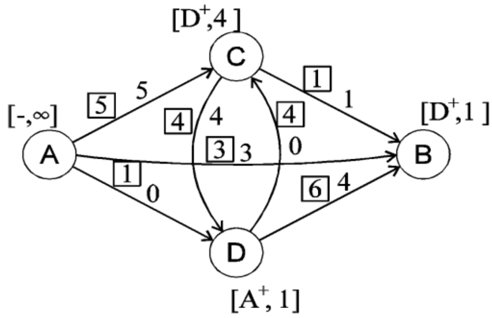
val(f)=3,f_{AB}= 3

c)



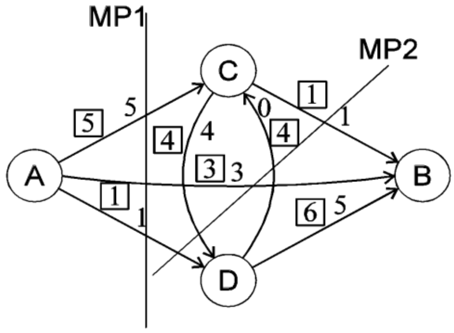
val(f)=4, f_{CB} *= 1,* f_{AC} *= 1*

d)



val(f) = 4+4 = 8, f_{DB} = 4, f_{CD} = 4, f_{AC} = 1+4 =5

e)



val(f) = 8+1 = 9, f_{DB} = 4+1 = 5, f_{AD} =1

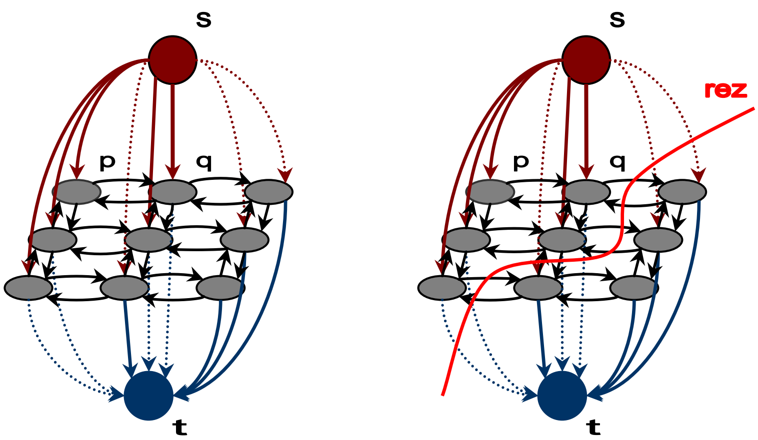
Slika 2.3.2.2. Prikaz procedure označavanja za primer 2.3.2.1

Odmah se uočava da dalje označavanje nije moguće. Minimalni preseci MP1 i MP2 i protoci kroz grane su prikazani na slici 2.3.2.2.e. Ukupan protok kroz mrežu, tj. maksimalan broj isporuka je 9 i to: 3 direktna leta, jedan preko C, 4 preko C i D, i samo jedan preko D. Da bi se povećao broj letova do grada B, potrebno je povećati broj letova na nekoj od linija koje se nalaze na minimalnom preseku. Pošto postoje dva minimalna preseka MP1=({A},$\{C,B,D\}$) i MP2=({A,C},$\{B,D\}$) potrebno je povećati broj letova na linijama koje su na oba preseka. Ovo će najefikasnije biti urađeno ako povećamo protok kroz linije koje su na oba preseka istovremeno, a to su: direktne linije AB i AD (na liniji DB ima mesta za još jedan let).

2.3.3. Primena reza u rekonstrukciji binarne slike

U narednom tekstu predstavljen je problem pomoću koga se naslućuje mogućnost upotrebe reza digrafa u računarskoj viziji i grafici. Rez digrafa se razmatra kao opšte sredstvo za minimizaciju određenih binarnih energija. *1989. god. Greig, Porteous i Seheult* prvi put koriste rez digrafa pri energetskoj minimizaciji u viziji. Oni su razmotrili problem rekonstrukcije binarne slike, odnosno crno bele slike. Recimo da je binarna slika oštećena zbog šuma. Zadatak je rekonstruisati takvu sliku da bude kao originalna. Ovaj problem se može formulisati kao jednostavna optimizacija binarnih promenljivih koje odgovaraju pikselima slike. Detaljan opis rekonstrukcije slike pomoću minimalnog reza može se naći u $[9]$.

Čvorovi $p \in V$, digrafa na slici 2.3.3.1 prikazani sivom bojom predstavljaju piksele slike koju treba rekonstruisati. Izvor *s*, i ponor *t* predstavljaju dve moguće vrednosti inteziteta piksela. Tačnije, izvor *s* predstavlja intezitet 0, koji odgovara beloj boji slike a ponor *t* intezitet 1, koji odgovara crnoj boji slike.



Slika 2.3.3.1. Digraf konstruisan za rekonstrukciju slike

Neka se sa $I(p)$ označava intezitet piksela *p*. Sa $D_p(l)$ označava se fiksna kazna, vrednost za koju je promenjen intezitet piksela u odnosu na intezitete 0 i 1. tj. $D_p(l)$ se dodeljuje pikselu *p* određenog „obnovljenog inteziteta“, $l \in \{0,1\}$ nakon rekonstrukcije. Za šifriranje ovih posmatranih podataka kreiraju se po dve *t*-grane za svaki pikselni čvor na slici 2.3.3.1. Kapacitet *t*-grana (s,p), koje su na slici 2.3.3.1. podebljane crveno postavlja se na $D_p(1)$ a kapacitet *t*-grana (p,t), koje su na slici 2.3.3.1. podebljane plavo na $D_p(0)$. Prirodno, ako $I(p)=0$ tada $D_p(0)$ treba da bude manji od $D_p(1)$ i obratno.

Na primer, ako je piksel oštećene slike ima intezitet *0,2*, a nakon rekonstrukcije dobija intezitet 0 kao na originalnoj slici. Tada je kapacitet *t*-grane *(p,t)*, $D_p(0)=0,2$, a kapacitet *t*-grane *(s,p)*, $D_p(1)=0,8$.

Prilikom rekonstrukcije slike postavljaju se i ograničenja koja uspostavljaju posebnu povezanost između susednih piksela minimizujući prekide među njima. Kreiraju se *n*-grane koje povezuju susedne piksele(kao grane obojene crno na slici 2.3.3.1). Kapaciteti *n*-grana su postavljeni na parametar izravnavanja $\lambda>0$ koji podstiče minimalni rez da prekine što je moguće manje *n*-grana.

Rez *C* (slika2.3.3.1.) je razbijanje skupa piksela na podskupove *S* i *T*. Rez se može tumačiti kao binarno označavanje *f* koje dodeljuje oznake $f_p \in \{0,1\}$ pikselima slike: ako $p \in S$ onda je $f_p=0$ a ako $p \in T$ onda je $f_p=1$. Postoji *1-1* korespodencija između rezova i binarnog označavanja piksela. Svako označavanje f daje moguć rezultat reskonstrukcije slike.

Uzima se u obzir kapacitet proizvoljnog reza *C=(S,T)*. Ovaj kapacitet uključuje kapacitete dva tipa grana: nekoliko *t*-grana i nekoliko *n*-grana. Treba imati na umu da rez prekida tačno jednu *t*-granu po pikselu: on mora prekinuti *t*-granu *(p,t)* ako piksel $p \in S$ ili *t*-granu *(s,p)* ako piksel $p \in T$. Zato, svaki piksel doprinosi ili $D_p(0)$ ili $D_p(1)$ u smeru *t*-grane koja je deo reza, u zavisnosti od oznake f_p označene na tom pikselu. Kapacitet reza takođe uključuje kapacitete nekoliko *n*-grana $(p,q) \in N$. Dakle važi:

$$c(C)= \sum_{p\in P} D_P\left(f_p\right) + \sum_{\substack{(p,\, q)\in N \\ p\in S,\, q\in T}} c\left(p,q\right) \qquad (2.3.3.1)$$

Kapacitet svakog reza *C* definiše energiju odgovarajućeg označavanja *f*:

$$E(f){:=}c(C)= \sum_{p\in P} D_P\left(f_p\right) + \lambda \sum_{(p,\, q)\in N} \mathrm{I}\left(f_p=0, f_q=1\right), \qquad (2.3.3.2)$$

gde je I funkcija identiteta koja dodeljuje 1 ako je vrednost tačno a 0 inače. Oznake piksela f_p treba uskladiti sa promatranim podacima i kažnjavati diskontinuitete između susednih piksela.

Ako je parametar λ veoma mali optimalno označavanje dodeljuje svakom pikselu *p* oznaku f_p koja minimizuje svoj kapacitet $D_p(f_p)$. U ovom slučaju svaki piksel dobija oznaku nezavisno od drugih piksela. Ako je λ veliko, tada svi pikseli moraju dobiti oznaku koja ima manji prosečan kapacitet. Za srednje vrednosti λ, optimalno označavanje f mora odgovarati uravnoteženom rešenju sa kompaktnim prostorno koherentnim skupinama piksela koji generalno imaju iste oznake. Pikseli šuma ili odstupanja moraju biti u skladu sa svojim susedima.

3. Kombinatorne posledice Ford-Fulkersonove teoreme

U daljem tekstu navodimo šest poznatih rezultata kombinatorike. U kombinatorici su sve ove teoreme zasebno izvedene. Nakon rešavanja problema maksimalnog protoka u transportnoj mreži izvedene su kao njegove direktne posledice. Detaljnije pogledati u $[6]$, $[8]$, $[10]$, $[17]$,$[22]$, $[25]$, $[29]$.

3.1. Mengerova teorema

U ovom delu rada posmatramo varijacije jednog od najpoznatijih rezultata u teoriji grafova, *Mengerove teoreme(Mengers theorem),* iz *1927. god*, koji je dokazao *Karl Menger*. Više o *Mengerovoj teoremi* videti u $[2]$, $[6]$, $[7]$, $[17]$, $[18]$. Sve ove varijacije teoreme bave se brojem disjunktnih puteva u grafu. Postoje dva načina definisanja značenja disjunktnosti u ovom slučaju.

Definicija 3.1.1: Za dva usmerena puta od *s* ka *t* u digrafu kažemo da su:

1) *čvorno-disjunktni* ako nemaju drugih zajedničkih čvorova osim s i t
2) *grana-disjunktni* ako nemaju zajedničke grane

U slučaju grafova, koji nemaju orijentisane grane, definicija prethodnih pojmova je analogna. U daljem tekstu pokazano je da se *Mengerova teorema* može izvesti koristeći *Ford-Fulkersonovu teoremu*. Sledeća lema nam pruža osnovnu vezu.

Lema 3.1.1*:* Neka je *M=G(V,E)* mreža sa izvorom *s* i ponorom *t* u kojoj svaka grana ima kapacitet 1.

Tada važi:

1) Vrednost *maksimalnog toka* u *M* jednaka je *maksimalnom broju grana-disjunktnih usmerenih (s,t)-puteva* (m)
2) Kapacitet *minimalnog reza C* u M jednaka je *minimalnom broju grana čijim uklanjanjem se presecaju svi usmereni (s,t)-putevi* u *M* (n)

Dokaz: Neka je *f** maksimalni tok u M a sa *G** označimo digraf dobijen od *G* uklanjanjem svih grana na kojima je protok *f** jednak 0. Sada u *G*, f*(e)=1* za sve $e \in E(G^*)$. Zbog toga važi:

$$val(f^*) = (f^*)^+(s) = (f^*)^-(t) \tag{3.1.1}$$

$$(f^*)^+(v) = (f^*)^-(v), \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\} \tag{3.1.2}$$

Vrednost protoka duž *grana-disjunktnih usmerenih (s,t)-puteva* u *G** isti je kao u *G* jer su uklonjene grane na kojima *f** ima vrednost 0. Svaka grana ima kapacitet 1 pa je vrednost protoka *f** manja ili jednaka maksimalnom broju *grana-disjunktnih usmerenih (s,t)-puteva,* tj. $val(f^*) \le m$.

Neka su $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *grana-disjunktni usmereni (s,t)-putevi* u M. Definišemo funkciju *f* na *E* kao:

- $f(e) = 1$, ako $e \in \bigcup_{i=1}^{m} P_i$
- $f(e) = 0$, ako $e \notin \bigcup_{i=1}^{m} P_i$

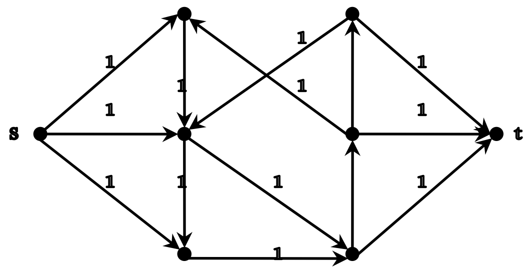
Jasno, *f* je tok u M vrednosti *m*, jer ima *m* takvih puteva. Pošto je rečeno da je *f** maksimalni protok, $v(f^*) \ge m$.

Na osnovu prethodnog $v(f^*) \le m$ i $v(f^*) \ge m$ pa zaključujemo da je $v(f^*) = m$(Slika 3.1.1. b.).

Neka je $C^* = (P, \overline{P})$ minimalni rez u M. Tada, u $M \backslash C^*$, nema čvorova iz $\overline{P}$ koji su povezana ni sa jednim čvorom u *P*, tj. t nije povezano sa s. Znači *C** je skup grana čijim uklanjanjem uništavamo sve *usmerene (s,t)-puteve.* $c(C^*) = |C^*| \ge n$, *minimalnog broja grana čijim uklanjanjem se presecaju svi usmereni (s,t)-putevi.* Ako je *L* skup *n* grana čijim se uklanjanjem presecaju svi *usmereni (s,t)-puteve* i *P* skup svih čvorova povezanih sa *v* u $M \backslash P$. Pošto $s \in P$ i $t \in \overline{P}$, $C = (P, \overline{P})$ je rez u *M*. Takođe po definiciji *P*, $M \backslash L$ ne može uključiti grane iz $(P, \overline{P})$ i $C \subseteq L$. ***C**** je minimalni rez tj. $c(C^*) \le c(C) = |C| \le |L| = n$. Iz $c(C^*) \ge n$ i $c(C^*) \le n$ imamo $c(C^*) = n$(Slika 3.1.1. (c, d)).

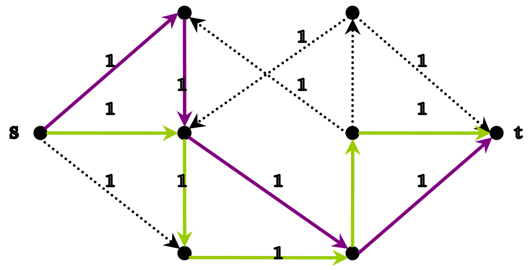
Prikaz:

a)



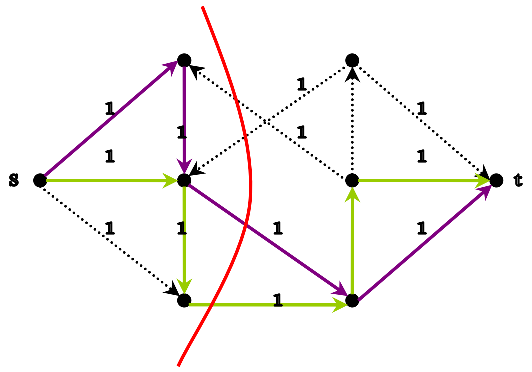
Mreža M sa kapacitetima svih grana 1

b)



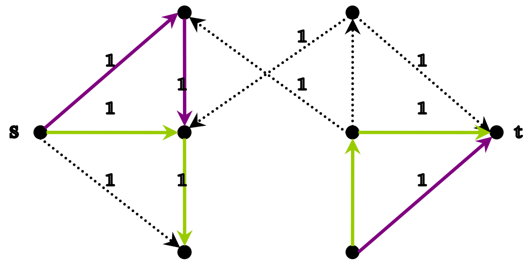
Maksimalni protok date mreže je 2 i broj grana-disjunktnih usmerenih puteva je 2

c)



Kapacitet reza mreže na slici je 2

d)



Broj grana čijim se uklanjanjem eliminišu svi s-t putevi je 2

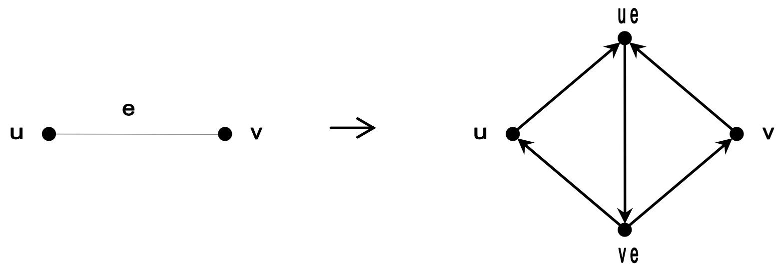
Slika 3.1.1. Prikaz Leme 3.1.1

Mengerova teorema 3.1.1: Neka su *s* i *t,* izvor i ponor u digrafu *G*. Tada je *maksimalan broj grana-disjunktnih usmerenih (s,t)-puteva* u *G* jednak *minimalnom broju grana čijim uklanjanjem se presecaju svi usmereni (s,t)-putevi* u *G*.

Dokaz: Napravimo mrežu M sa izvorom *s* i ponorom *t*, označivši kapacitete svih grana u *G* sa 1. Iz prethodne leme 3.1.1. i *teoreme Ford-Fulkerson* direktno sledi dokaz.

Teorema 3.1.2: Neka su *s* i *t* dva čvora u grafu *G*. Tada je *maksimalan broj grana-disjunktnih (s,t)-puteva* u *G* jednak *minimalnom broju grana čijim uklanjanjem se uništavaju svi (s,t)-putevi* u *G*.

Prethodnu neusmerenu verziju Mengerove teoreme 3.1.2, koja važi za graf, lako dobijamo pomoću teoreme 3.1.1. i jednostavnog trika.



Slika 3.1.2.

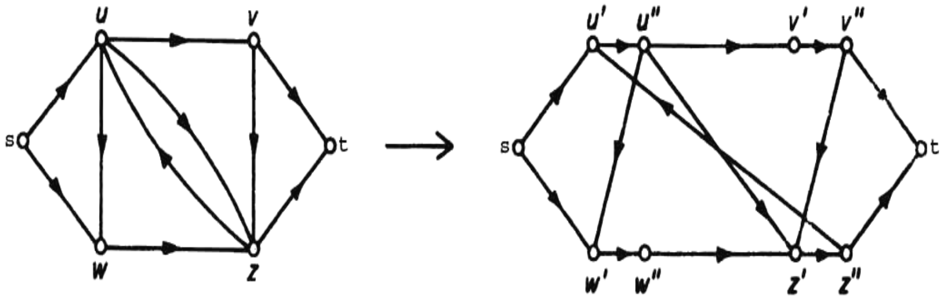
Dokaz: U grafu *G* svaku granu $e=\{u,v\} \in E(G)$ zamenimo sa pet orijentisanih grana: (u,u_e), (v,u_e), (u_e,v_e), (v_e,u), (v_e,v). u_e i v_e su dva nova čvora. Videti prethodnu sliku 3.1.2. Za ovako dobijeni digraf *G** postoji bijekcija između puteva u G i usmerenih puteva u *G**. Takođe, minimalan broj grana iz *G* čije izbacivanje prekida sve *(s,t)-puteve* u *G* jednak je minimalnom broju grana čije izbacivanje prekida sve *usmerene (s,t)-puteve* u *G**. Sada dokaz sledi neposredno iz teoreme 3.1.1.

Naredne teoreme su verzije *Mengerove teoreme* koje se odnose na broj čvor-disjunktnih puteva grafa i digrafa :

Teorema 3.1.3: Neka su *s* i *t* dva čvora digrafa *G*, tako da *s* nije pridruženo sa *t*. Tada je *maksimalan broj čvor-disjunktnih usmerenih (s,t)–puteva* u *G* jednak *minimalnom broju čvorova čije uklanjanje uništava sve usmerene (s, t)– puteve* u *G*.

Dokaz: Konstruišemo novi digraf *G** od *G* na sledeći način(slika3.1.3.):

1) razdvojimo svaki čvor $v \in V \backslash \{s,t\}$ na dva nova čvora *v'* i *v''*, i pridružimo im granu *(v',v'')*
2) zamenimo svaku granu iz *G* sa početkom u čvoru $v \in V \backslash \{s,t\}$ sa novom granom sa početkom u *v''* i svaku granu iz *G* sa krajem u čvoru $v \in V \backslash \{s,t\}$ sa novom granom sa krajem u *v'*



Slika 3.1.3. Prikaz konstrukcije digrafa G* od digrafa G, razdvajanjem čvorova

Sada svakom *usmerenom (s,t)–putu* u *G** odgovara *usmereni (s,t)-put* u *G* dobijen konstrukcijom svih grana oblika *(v',v'')* i suprotno, svakom *usmerenom (s,t)–putu* u *G*, odgovara *usmereni (s,t)–put* u *G** dobijen podelom svakog čvora puta. Čak, dva *usmerena (s,t)–puta* u *G** su *grana–disjunktni* ako i samo ako su odgovarajući putevi u *G čvor–disjunktni*. Iz toga sledi da je *maksimalan broj grana–disjunktnih usmerenih (s,t)–puteva* u *G** jednak *maksimalnom broju čvor-disjunktnih usmerenih (s,t)–puteva* u *G*. Slično, *minimalan broj grana u G* čijim uklanjanjem se uništavaju svi usmereni (s,t)– putevi* je jednak minimalnom broju čvorova u *G* čijim uklanjanjem se uništavaju svi *usmereni (s,t)–putevi*. Teorema sada direktno sledi iz prethodne teoreme.

Neusmerena verzija glasi:

Teorema 3.1.4: Neka su *s* i *t* dva čvora grafa *G*, tako da *s* nije pridruženo sa *t*. Tada je *maksimalan broj čvor-disjunktnih (s,t)–puteva* u *G* jednak *minimalnom broju čvorova čije uklanjanje uništava sve (s,t)–puteve* u *G*.

Dokaz direktno sledi primenom prethodne teoreme na digraf *G** dobijen iz grafa G pomoću trika kao u dokazu 3.1.2 .

3.2. Sparivanje u bipartitnom grafu i Hall-ova teorema

Bračni problem:

Originalnu motivaciju za takozvanu *„bračnu teoremu“* pronašao je engleski matematičar *Philip Hall 1935. god*. odgovarajući na različita pitanja pri rešavanju sledećeg problema poznatog pod nazivom *„bračni problem“*:

Postoji konačan skup devojaka, gde svaka od njih poznaje nekoliko mladića. Pitanje je pod kojim uslovima se sve devojke mogu venčati za mladiće tako da se svaka devojka venča za mladića kog poznaje. Na primer, posmatramo skup od četiri devojke $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$ i pet mladića $\{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5\}$. Poznanstva među devojkama i mladićima prikazana su tabelom:

Tabela 3.2.1. Prikaz poznanstava među devojkama i mladićima

devojka	***mladići koje devojka poznaje***
d_1	m_1 m_4 m_5
d_2	m_1
d_3	m_2 m_3 m_4
d_4	m_2 m_4

U ovom slučaju jedna od mogućnosti je da devojka d_1 bude venčana za mladića m_5, devojka d_2 za mladića m_1, devojka d_3 za mladića m_2 i devojka d_4 za mladića m_4.

Posmatramo iste devojke i mladiće kao u prethodnom primeru, samo što su ostvarena poznanstva sada prikazana sledećom tabelom:

Tabela 3.2.2. Prikaz poznanstava među devojkama i mladićima

devojka	***mladići koje devojka poznaje***
d_1	m_1
d_2	m_1
d_3	m_2 m_3 m_4
d_4	m_2 m_4 m_5

U ovom slučaju devojke d_1 i d_2 zajedno poznaju samo jednog mladića m_1, pa ih nije moguće obe venčati. Zaključak je da je nemoguće venčati sve četiri devojke pod ovim uslovima.

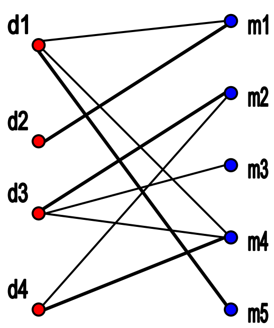
Dakle, *svakih k od* ukupnog broja *m devojaka mora poznavati najmanje k mladića*, $\forall k$ koje zadovoljava $1 \leq k \leq m$. Ovaj uslov koji je dao Hall nazivamo *„bračni uslov“*! Zaista, neophodan je uslov, da svakih *k* devojaka mora poznavati najmanje *k* mladića. Ako to ne bi bilo ispunjeno za bilo kojih *k* devojaka, tada ih ne bismo mogli venčati za *k* različitih mladića. Zanimljivo je što će *„bračni uslov“* biti i dovoljan uslov *„bračnog problema*“. Da bismo to i dokazali koristimo indukciju po *m* i dokazujemo *„bračni uslov“* ako je broj devojaka manji od *m*.

-primetimo tačnost za *m*=1

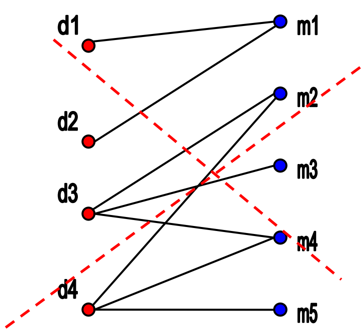
Pretpostavimo da ima *m* devojaka. Postoje dva slučaja za razmatranje:

1. *Ako svakih k od m devojaka znaju najmanje k+1 mladića*.Uslov je uvek tačan, *k+1>k*, sa jednim mladićem kog dele.Tada uzmemo bilo koju od *k* devojaka i venčamo je sa bilo kojim mladićem kog poznaje. Početni uslov nas podseća da je tačan za ostalih *m-1* devojaka, koje mogu biti venčane po indukciji upotpunjujući dokaz.
2. *Ako znamo da postoji skup od k(k<m) devojaka koje poznaju tačno k mladića.* One tada mogu biti venčane za *k* mladića. Ostaju još *m-k* devojke da budu venčane. Bilo koji skup od *p* devojaka od ovih *m-k* devojaka, $p \leq m\text{-}k$ mora poznavati najmanje *p* preostalih mladića. To je zbog toga što bi u suprotnom ovih *p* devojaka zajedno sa skupom od prethodnih *k* devojaka znalo manje od *k+p* mladića. A ovo je u kontradikcijhi sa našom pretpostavkom. Dakle početni uslov je primenljiv na *m-k* devojaka. Koristeći indukciju zaključujemo da se devojke i mladići mogu venčati na takav način da je svako zadovoljan i dokaz je potpun!

„Bračni problem“ može biti predstavljen preko teorije grafova. Skup devojaka i mladića posmatramo kao biparticiju *(X,Y),* skupa čvorova bipartitnog grafa *G=(X,Y,E)*. Skup *X* predstavlja skup devojaka, a skup *Y* skup mladića, gde svaka grana pridružuje devojci mladića koga poznaje.



Slika 3.2.1. Bipartitni graf koji odgovara tabeli 3.2.1



Slika 3.2.2. Bipartitni graf koji odgovara tabeli 3.2.2

Da bismo na ovaj način razmatrali bračni problem, definisaćemo još neke pojmove na bipartitnom grafu.

Definicija 3.2.1: Neka je $G(X,Y,E)$ bipartitni graf.

1. *Sparivanje* u G je podskup od E, skupa grana u G, takvih da nema dve grane koje imaju zajednički čvor u X i Y. Jednostavnije rečeno, *svaki čvor je povezan sa tačno jednim čvorom i granom.*
2. Za sparivanje kažemo da *zasićuje* neki čvor ako je neka grana iz sparivanja incidentna sa tim čvornom. U suprotnom kažemo da je čvor *nezasićen*. Ako je svaki čvor iz X zasićen nekim sparivanjem takvo sparivanje nazivamo *potpuno(kompletno) sparivanje*.

Definicija 3.2.2: Za $X \subseteq V(G)$, *skup suseda* od X u bipartitnom grafu G je skup svih čvorova susednih čvorovima iz X. Oznaka za *skup suseda* je $R(X)$.

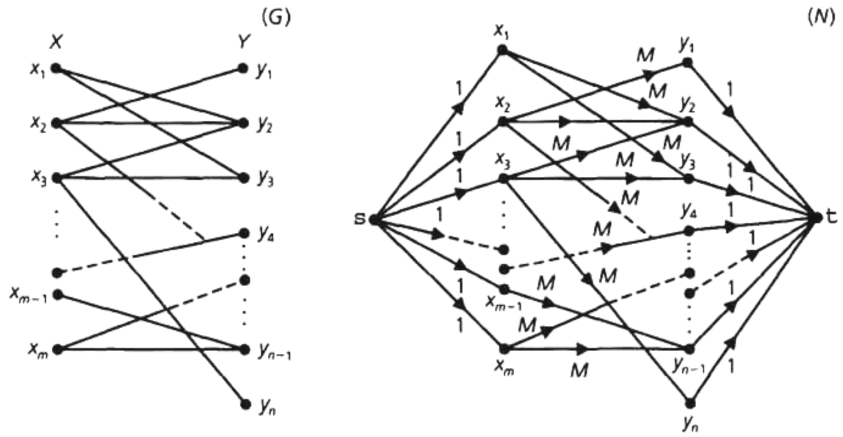
Ako je G bipartitivni graf sa biparticijom (X,Y), želimo naći sparivanje u G koje zasićuje sve čvorove iz X.

Definicija 3.2.3: Ako biparticije od $G(X,Y,E)$, X i Y imaju jednak broj čvorova, $|X|=|Y|$, onda su potpunim sparivanjem u X zasićeni i svi čvorovi iz Y, pa je reč o *savršenom sparivanju u bipartitnom grafu*.

Sledeća *Hall-ova teorema*, obezbeđuje neophodan i dovoljan uslov za postojanje potpunog sparivanja u bipartitnom grafu, što ujedno predstavlja i neophodan i dovoljan uslov za rešenje *„bračnog problema“.* Dokaz teoreme izveden je uz pomoć *teoreme Ford-Fulkerson* i predstavlja još jednu njenu važnu kombinatornu posledicu. Detaljno o sparivanju bipartitnog grafa može se pronaći u [3], [10], [14], [27], [36].

Teorema(Hall) 3.2.4: Bipartitni graf $G(X,Y,E)$, za koji je $|X|=m, |Y|=n$, ima *potpuno sparivanje* $\Leftrightarrow$ ne postoji skup $A \subseteq X$, takav da za skup $R(A)=\{v \in V : \exists u \in A, (u,v) \in E\}$ važi nejednakost $|R(A)|<|A|$.

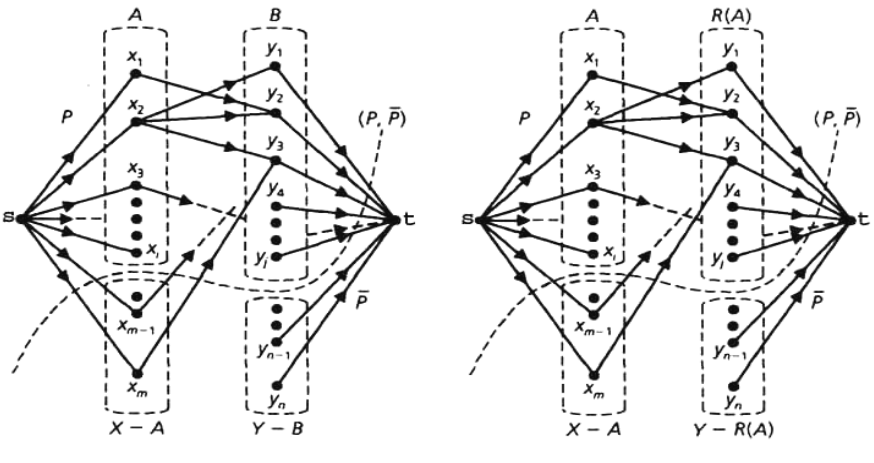
Dokaz: Neka je $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ i $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Konstruisaćemo transportnu mrežu N koja produžava graf G uvođenjem dva nova čvora s(izvor) i t(ponor). Za svaki čvor x_i, $1 \le i \le m$ dodamo granu (s,x_i), a za svako y_j, $1 \le j \le n$ dodamo granu (y_j,t). Svakoj novoj grani dodelimo kapacitet 1. Neka je M pozitivan ceo broj koji prevazilazi $|X|$. Dodelimo svakoj grani u G kapacitet M. Originalni graf G i njegova pridružena mreža N izgledaju kao na slici 3.2.3:



Slika 3.2.3.

Sledi da potpuno sparivanje postoji u *G* ako i samo ako postoji maksimalan protok u *N* koji koristi sve grane (s,x_i), $1 \le i \le m$. Vrednost takvog maksimalnog protoka je tada jednaka $m=|X|$.

Pokazaćemo da postoji potpuno sparivanje u *G* tako što ćemo pokazati da je $c(P,\overline{P}) \ge |X|$ za bilo koji rez $(P,\overline{P})$ u *N*. Dakle, ako je $(P,\overline{P})$ proizvoljan rez u *N*, definišemo $A=X \cap P$ i $B=Y \cap P$. Tada $A \subseteq X$ i napisaćemo $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_i\}$ za neke $0 \le i \le m$.(Elementi iz *X* su neoznačeni, ako je neophodno, tako da su indeksi na elementima iz *A* uzastopni.) Kada je $i=0$, $A=\emptyset$. Sada se *P* sastoji iz izvora *s* i čvorova iz skupova *A* i $B \subseteq Y$, kao na sledećoj slici 3.2.4. (Elementi iz *Y* su takođe označeni, ako je neophodno.)



Slika 3.2.4.

$\overline{P}=(X \backslash A) \cup (Y \backslash B) \cup \{t\}$.

Ako postoji skup grana (x,y) takvih da $x \in A$ i $y \in (Y \backslash B)$, tada su kapaciteti tih grana sumandi u $c(P,\overline{P})$ i $c(P,\overline{P}) \ge M > |X|$. Ako pretpostavimo da takva grana ne postoji, tada je $c(P,\overline{P})$ određeno sa kapacitetima od 1, grana koje povezuju izvor sa čvorovima iz $X\backslash A$ i grana koje povezuju čvorove iz B sa ponorom t. Dok svaka od ovih grana ima kapacitete 1 važiće, $c(P,\overline{P})=|X \backslash A|+|B|=|X|-|A|+|B|$. Kako je $R(A)\subseteq B$ važiće $|R(A)| \leq |B|$ i dok važi $|R(A)| \geq |A| \Rightarrow |B| \geq |A|$. Iz toga dalje sledi $c(P,\overline{P})=|X|+(|B|-|A|)\geq |X|$. Svaki rez u mreži N ima kapacitet najmanje $|X|$. Kako nalaže *teorema Ford-Fulkerson*, svaki maksimalni tok u N ima vrednost $|X|$. Kao što će tok proizvesti, u tačno $|X|$ grana iz X ka Y tok će biti 1. Ovaj protok proizvodi kompletno sparivanje iz X u Y.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji podskup A od X za koji važi, $|A| \geq |R(A)|$. Neka je $(P,\overline{P})$ rez na slici, gde važi $P=\{s\}\cup A\cup R(A)$ i $\overline{P}=(X\backslash A)\cup(Y\backslash R(A))\cup\{t\}$. Tada uočavamo da je $c(P,\overline{P})$ sastavljen od grana koje povezuju izvor s sa čvorovima iz $X\backslash A$ i grana koje spajaju čvorove iz $R(A)$ sa ponorom t. Otuda je $c(P,\overline{P})=|X \backslash A|+|R(A)|=|X|-(|A|-|R(A)|)<|X|$, kada je $|A|>|R(A)|$. Mreža ima rez kapaciteta manjeg od $|X|$. Dakle, po *teoremi Ford-Fulkerson* sledi da svaki maksimalni tok ima vrednost manju od $|X|$. To bi u ovom slučaju značilo da ne postoji potpuno sparivanje iz X u Y za zadati bipartitni graf.

Teorema 3.2.1.5: Bipartitni graf $G(X,Y,E)$, ima *savršeno sparivanje* $\Leftrightarrow |X|=|Y|$ i ne postoji skup $A\subseteq X$, takav da za skup $R(A)=\{v \in V : \exists u \in A,(u,v)\in E\}$ važi nejednakost $|R(A)|<|A|$.

3.2.1. Problem dodele i mađarska metoda

U kompaniji, radnik mora biti zaposlen na određenom radnom mestu. Za svakog radnika postoje jedno ili više radnih mesta na kojima on može biti zaposlen. Zadatak *problema dodele*(poznatog pod nazivom *The Assignment Problem*) je saznati da li je moguće svim radnicima kompanije dodeliti određena radna mesta, tako da svako bude na određenom radnom mestu u skladu sa onim na kojima on može biti zaposlen i ako jeste rešiti na koji način.

Ovaj problen može biti modelovan korišćenjem bipartitnog grafa $G=(X,Y,E)$, gde je X skup zaposlenih radnika, Y skup radnih mesta a E skup parova radnik-radno mesto ako i samo ako radnik može biti zaposlen na tom radnom mestu. Raspoređivanje radnika, možda ne svih, odgovara sparivanju u bipartitnom grafu G. Raspoređivanje svih zaposlenih radnika odgovara sparivanju koje zadovoljava X. Naravno poželjno je da svaki radnik dobije jedno odgovarajuće radno mesto i da sva dostupna radna mesta u kompaniji budu opslužena od strane jednog radnika. Dakle, nadalje se pretpostavlja da u kompaniji ima jednak broj radnika i radnih mesta, tj. $|X|=|Y|$. U ovom slučaju raspoređivanje svih zaposlenih dovodi do savršenog sparivanja u G, jer su svi radnici i sva radna mesta zadovoljeni. Rešenje postoji ako i samo ako je za svaki skup zaposlenih $A \subseteq X$ broj radnih mesta koja mogu biti zauzeta od strane najmanje jednog zaposlenog iz A veći ili jednak broju zaposlenih u A.

Mađarska metoda

Pored pitanja egzistencije savršenog sparivanja u bipartitnom grafu, važno je i pitanje njegove konstrukcije u slučaju da takvo sparivanje postoji. Jedna od metoda koja se bavi pitanjima egzistencije i konstrukcije savršenog sparivanja u bipartitnom grafu je tzv. mađarska metoda(*Hungarian Method*). Ovaj algoritam dao je *J. Edmonds 1965. god*, a zove se *mađarska metoda* jer je zasnovana na idejama dvojice mađara *Kőniga i Egerváryja* iz 1931. god. Detaljnije na ovu temu može se naći u $[11]$, $[23]$, $[28]$. Pomoću mađarske metode konstuiše se ako je moguće savršeno sparivanje u bipartitnom grafu $G(X,Y)$. U suprotnom se pronalazi podskup $A \subseteq X$ za koji $|R(A)|<A$. Po *Hall-ovoj* teoremi sledi da tada savršeno sparivanje u bipartitnom grafu $G=(X,Y,E)$, ne postoji.

Ideja je sledeća: Počne se sa proizvoljnim sparivanjem M u bipartitnom grafu $G=(X,Y,E)$, pri čemu za M ako ne znamo ništa bolje možemo uzeti prazan skup. Ako M zasićuje X, odnosno svaki čvor u X, pronašli smo savršeno sparivanje. Ako ne, tada postoji čvor $u \subseteq X$, koji je nezasićen sparivanjem M. Sada algoritam sistematski traži M-uvećavajući put P s početkom u čvoru u. S obzirom na graf G i odgovarajuće sparivanje M u G, *M-alternirajući put* je put za koji su sve grane naizmenično u M i $E \backslash M$. *M-alternirajući put* je uvećavajući M put ili *M-uvećavajući put* ako su krajnji čvorovi puta zadovoljeni sparivanjem M. Ako takav put postoji, tada sparivanje $M^* = M \Delta E(P)$, gde je $E(P)$ skup grana puta P, sadrži više grana i zasićuje više čvorova u X nego sparivanje M. Tako dobijamo veće sparivanje M^*, a zatim ceo postupak ponovimo tako da umesto polaznog sparivanja M uzmemo sparivanje M^*. U slučaju da takav put ne postoji, pronađemo skup N svih čvorova koji su sa čvorom u povezani *M-alternirajućim putevima*. Može se pokazati da za skup $A=N\cap X$ vredi , $|R(A)|<A$ pa po Hall-ovoj teoremi zaključujemo da ne postoji savršeno sparivanje u bipartitnom grafu $G(X,Y)$.

Algoritam mađarske metode:

Ulaz: Bipartitni graf $G=(X,Y,E)$, sa biparticijom (X,Y), $|X|=|Y|$.

Izlaz: Savršeno sparivanje M u G ili skup $A \subseteq X$ za koji je $|R(A)|<A$.

Korak1. Pronaći bilo koje sparivanje M od G. Npr. $M=\emptyset$.

Korak2. Ako je X zasićen sparivanjem M, stop.(M je savršeno sparivanje.)

U protivnom, neka je čvor $u \subseteq X$ nezasićen sparivanjem M.

Stavimo $A=\{u\}, T=\emptyset$.

Korak3. Ako je $R(A)=T$, $|R(A)|<A$, stop.(Po Hall-ovoj teoremi nema savršenog sparivanja.)

U protivnom, neka je čvor $v \subseteq R(A) \backslash T$.

Korak4. Ako je $v \subseteq Y$, čvor zasićen sparivanjem M, neka je w takav čvor da $wv \subseteq M$. Zamenimo A sa $A \cup \{w\}$, a T sa $T \cup \{v\}$ i vratimo se na Korak3.

Ako je čvor v sparivanjem M nezasićen, neka je *P, M-uvećavajući (u,v)-put*. Zamenimo M sa $M^* = M \Delta E(P)$ i vratimo se na Korak2.

3.2.2. Problem optimalne dodele i Kuhn-Munkresov algoritam

Mađarska metoda opisna u prethodnom odeljku je efikasan način za raspodelu radnika kompanije na radna mesta, ako takva raspodela postoji. Ako se uzme u obzir da svaki radnik može da radi na više radnih mesta sa različitom efikasnošću interesantan je problem maksimiziranja ukupne efikasnosti radnika. Efikasnost radnika može se meriti na različite načine. Na primer, efikasnost kojom bi kompanija ostvarila najveći mogući profit.

Pretpostavimo da je u kompaniji zaposleno n radnika i postoji n radnih mesta. Ako i-ti radnik izvršava posao na j-tom radnom mestu sa efikasnošću c_{ij} , potrebno je pronaći optimalnu podelu radnih mesta među radnicima. Problem se razmatra na bipartitnom grafu $G=(X,Y,E)$, $|X|=|Y|$, tako da svaka grana (x_i,y_j), ima kapacitet $c_{ij}=c(x_i,y_j)\geq 0$. Problem je pronaći savršeno sparivanje tako da ukupan kapacitet, kao zbir kapaciteta svih grana u sparivanju, bude maksimalan. Tada će kompanija imati najmanje rashode u isplaćivanju radnika(ili najveću dobit ako je c_{ij} profit koji ostvaruje kompanija ako i-ti radnik radi na j-tom radnom mestu).

Ovaj problem mogao bi biti rešen mađarskom metodom tako da se nađe svih $n!$ savršenih sparivanja pa se sva pronađena sparivanja uporede i pronađe se optimalno. Ali ovaj metod bi bio dosta neefikasan. *H. Kuhn i J. Munkres su 1957. god.* konstruisali dobar algoritam čija je složenost pri rešavanju ovog problema $O(n^4)$. Navedeni problem naziva se *problem optimalnog zapošljavanja* a traženo sparivanje je optimalno.

Definišemo, *dopustivo označavanje čvorova* kao realnu funkciju $f: X\cup Y \to R^+$ za koju je $f(u)+f(v)\geq c(u,v), \forall u\in X, v\in Y$. $f(u)$ se naziva oznaka čvora u, a $f(v)$ oznaka čvora v. Dakle, označavanje čvorova je takvo da je zbir brojeva kojima su označeni krajnji čvorovi grane bar toliko veliki kao kapacitet te grane. Jedno takvo dopustivo označavanje čvorova može biti zadato formulom $f(u)=max\{c(u,v)\,|\,v\in Y\}$ za $u\in$ X i $f(v)=0$ za $v\in Y$. Dopustivo označavanje postoji uvek, bez obzira šta predstavljaju kapaciteti grana. Neka je f bilo koje dopustivo označavanje od G. Definišemo skup grana $E_f=\{(u,v)\in E|\, f(u)+f(v)=c(u,v)\}$. Označimo sa G_f razapinjući podgraf grafa G, $E_f(G_f)=E_f$. Graf G_f se zove podgraf jednakosti u odnosu na f.

Osnovu za Kuhn-Munkresov algoritam daje sledeća teorema. Dokaz teoreme 3.2.2.1. videti u [6].

Teorema 3.2.2.1: Neka je f dopustivo označavanje čvorova iz G. Ako podgraf jednakosti G_f sadrži savršeno sparivanje M^*, onda je M^* optimalno sparivanje od G.

Kuhn-Munkresov algoritam

Korak1. Počinjemo s nekim dopustivim označavanjem f čvorova grafa G i odaberemo neko sparivanje M u G_f.

Korak2. Na M primenimo mađarsku metodu. Ako je X, M-zasićen, onda je M savršeno sparivanje, pa je, prema teoremi 3.2.2.1 i optimalno i tada stop. U protivnom, neka je $u \in X$ M-nezasićen čvor. Stavimo $A=\{u\}$, $T=\emptyset$.

Korak3. Ako je $R_{G_f}(A) \supset T$, preći na korak 4. U protivnom, ako je $R_{G_f}(A)=T$, izračunati $d_f := min\{f(u)+f(v)-c(u,v) \mid u \in A, v \notin T\}$ i neka je novo dopustivo označavanje čvorova f^* definisano sa

$$f^*(v)=\begin{cases} f(v)-d_f, v \in A \\ f(v)+d_f, v \in T \\ f(v), inače \end{cases}$$

$(d_f>0 \text{ i } R_{G_{f^*}}(A) \supset T)$. Zameni se f sa f^* i G_f sa G_{f^*}.

Korak 4. Odabrati čvor $v \in R_{G_f}(A) \setminus T$. Ako je v M-zasićen i $vw \in M$, zameniti A sa $A \cup \{w\}$, a T sa $T \cup \{v\}$ i preći na korak 3. U protivnom, neka je P M-uvećani (u,v)-put u G_f, zameniti M sa $M^* = M \Delta E(P)$ i preći na korak 2.

Kapaciteti c_{ij} grana (x_i,y_j), mogu se posmatrati kao elementi $n \times n$ matrice tako da vrste matrice odgovaraju čvorovima iz skupa X, a kolone matrice čvorovima iz skupa Y. Tada se na matricu primenjuje prethodni algoritam.

Opširno o mnogim aspektima i algoritmima u vezi sparivanja može se naći u [25], [27], [33], [35].

3.3. König-ova teorema

U teoriji grafova *König-ova teorema* prvi put je objavljena 1931. god. Dokazao ju je mađarski matematičar *Denes König,* po kom je i dobila naziv. *König-ova teorema* opisuje ekvivalenciju između *maksimalnog sparivanja* i *minimalnog pokrivača čvorova* u bipartitnom grafu. Videti $\left[15\right]$. U ovom odeljku se pokazuje da *König-ova teorema* može biti dokazana iz *teoreme Ford-Fulkerson*. Pre toga, neophodne su još neke definicije.

Definicija 3.3.1: Neka je $G(X,Y,E)$ bipartitni graf. Maksimalno sparivanje u G je ono koje spaja najviše koliko je moguće čvorova iz X sa čvorovima iz Y.

Definicija 3.3.2: Pokrivač čvorova grafa G, $K \in V$ je skup čvorova grafa G takvih da svaka grana od G ima bar jedan kraj u K.

Definicija 3.3.3: Pokrivač grana grafa G, $L \in E$ je skup grana grafa G takvih da je svaki čvor grafa G kraj bar jednoj grani iz L.

König-ova teorema 3.3.1: Ako je $G(V,E)$ bipartitni graf. *Veličina maksimalnog sparivanja* u G jednaka je *broju čvorova minimalnog pokrivača* čvorova grafa G.

Dokaz: Ako sa M označimo sparivanje a sa K pokrivač čvorova grafa G. Tada važi $|M| \leq |K|$. Kako smo sparivanje skupa grana bipartitnog grafa G definisali tako da nema dve grane koje imaju zajednički čvor možemo pretpostaviti da je M sparivanje koje se sastoji od k grana $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2k-1}v_{2k}$. Tada su $2k$ čvorova $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ svi odvojeni. Za svako $i=1,2,\ldots k$ pokrivač K mora uključiti najmanje jedan od čvorova v_{2k-1} i v_{2k}. Dakle K mora uključiti najmanje k čvorova jer je pokrivač čvorova grafa skup čvorova grafa G takvih da svaka grana od G ima bar jedan kraj u K. Dokazaćemo da u slučaju *maksimalnog sparivanja* važi jednakost. Dovoljno je da pronađemo sparivanje M^* i pokrivač K^*, tako da važi $|M^*| = |K^*|$. Dokaz tehnički ilustruje tipičan način korišćenja algoritma protoka kroz mrežu.

Neka su $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ i $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ biparticije od V. Konstruišemo transportnu mrežu N koja produžava graf G predstavljanjem dva nova čvora s(izvor) i t(ponor). Za svaki čvor x_i, $1 \leq i \leq m$ dodamo granu (s,x_i), a za svako y_j, $1 \leq j \leq n$ dodamo granu (y_j,t). Svakoj novoj grani dodelimo kapacitet 1. Dodelimo svakoj grani u G kapacitet ∞. Za svaki celobrojni protok u mreži, vrednost protoka svake grane je 0 ili 1. Skup grana (x_i,y_j) takvih da $x_i \in X$, $y_j \in Y$ $f(x_i,y_j)=1$ stvara sparivanje u G čija je vrednost jednaka vrednosti protoka $val(f)$. Dakle i *vrednost maksimalnog protoka* jednaka je *kardinalnosti maksimalnog sparivanja*. Neka je $(P, \overline{P})$ neki *s-t rez* konačnog kapaciteta u mreži N. Definišemo $K^*=(X \cap \overline{P}) \cup (Y \cap P)$, *pokrivač čvorova* grafa G. Za grane $(x_i,y_j)\in E$ bez krajnjih čvorova u K^* za koje važi $x_i\in P$, $y_j\in \overline{P}$ biće $c(x_i,y_j)=\infty$ a to je kontradiktorno sa konačnošću kapaciteta reza $c(P,\overline{P})$. Znači, kapacitet reza jednak je broju grana od *s* do $\overline{P}$ i od *P* do *t* a njihov broj je očigledno jednak $|K^*|$. Ne postoje druge grane od *P* do $\overline{P}$ koje bi mogle imati konačan kapacitet. Tako je i *broj čvorova minimalnog pokrivača grafa G* jednak *kapacitetu minimalnog reza.* Iz *Ford-Fulkersonove teoreme* maksimalni protok je jednak kapacitetu minimalnog reza. Na osnovu prethodnog razmatranja i *Ford-Fulkersonove teoreme* ako je $val(f)=c(P,\overline{P})$ radi se o maksimalnom protoku i minimalnom rezu mreže. Jasno je i *maksimalno sparivanje* jednako *broju čvorova minimalnog pokrivača* $|M^*|=|K^*|$.

3.4. König-Egervary teorema

König-Egervary teorema je ekvivalent *König-ove teoreme* u terminima *(0,1)- matrica*. Samim tim je i *König-Egervary teorema* posledica *Ford-Fulkersonove teoreme*. Neophodne su nam sledeće definicije.

Definicija 3.4.1: Pojam *rang (0,1)-matrice* je najveći broj jedinica koje se mogu izabrati iz matrice, tako da nema dve odabrane jedinice koje leže na istoj liniji(vrsti ili koloni).

Definicija 3.4.2: Skup vrsta i kolona *S, (0,1)-matrice* naziva se *pokrivač (0,1)-matrice* ako nakon precrtavanja svih vrsta i kolona iz *S* matrica postane nula matrica ili nestane.

König-Egervary teorema 3.4.1: *Rang (0,1)-matrice* jednak je *kardinalnosti svog najmanjeg pokrivača* tj. minimalnom broju vrsta i kolona koje sadrže sve jedinice u matrici.

Dokaz: Neka su u bipartitnom grafu $G(V,E)$, $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ i $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ biparticije od *V*. Konstruišemo $m\times n$ *(0,1)-matricu* susedstva *A* sa $a_{ij}=1$ ako i samo ako postoji grana koji sparuje čvorove x_i i y_j.

Sada je *rang od A* jednak *kardinalnosti maksimalnog sparivanja u G*. Takođe je i *veličina minimalnog pokrivača od A* ista kao veličina *minimalnog pokrivača čvorova u G*. Dok svaka *(0,1)-matrica* može biti predstavljena kao matrica susedstva nekog bipartitnog grafa iz *König-ove teoreme* direktno sledi *König-Egervary teorema.*

3.5. Bistohastičke matrice i Birkhoff-von Neumanova teorema

Kao posledica *König-Egerváry teoreme*, a samim tim i *teoreme Ford-Fulkerson* pojavljuje se i jedan od osnovnih rezultata kombinatorike poliedara, *Birkhoff-von Neumanova teorema.* Naziv je dobila po naučnicima koji su je prvobitno dokazali *Birkhof* (1949) i *von Neumann* (1953). *Birkhoff-von Neumanova teorema* govori o reprezentaciji bistohastičkih matrica, pa je data definicija još nekih pojmova. Opširnije pogledati [8], [14], [24].

Definicija 3.5.1: *Desno stohastička matrica* je kvadratna matrica u kojoj se svaka od vrsta sastoji od nenegativnih realnih brojeva, tako da je zbir elemenata u svakoj vrsti 1.

Definicija 3.5.2: *Levo stohastička matrica* je kvadratna matrica u kojoj se svaka od kolona sastoji od nenegativnih realnih brojeva, tako da je zbir elemenata u svakoj koloni 1.

Definicija 3.5.3: *Dvostruko stohastička matrica* je kvadratna matrica gde su svi elementi nenegativni realni brojevi i zbir elemenata u svakoj vrsti i koloni je 1. *Dvostruko stohastička matrica* je desno i levo stohastička i nazivamo je još i *bistohastička matrica.*

Bistohastička matrica je nužno kvadratna matrica jer, ako je zbir u svakoj vrsti jedan, tada zbir svih elemenata u matrici mora biti jednak broju vrsta, budući da isto vredi i za kolone, broj vrsta i kolona mora biti jednak. Ove matrice nastaju u vezi sa stohastičkim procesima, problemima pridruživanja u optimizaciji, kombinatorikom itd. Primer takve matrice dat je na slici3.5.1.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Slika 3.5.1. Bistohastička matrica

Definicija 3. 5. 4: *Permutaciona matrica* je (0,1)-matrica sa tačno jednom jedinicom u svakoj vrsti i svakoj koloni.

Uočljivo je i da je *svaka permutaciona matrica i bistohastička*, tj. celobrojna bistohastička matrica. *Teorema Birkhoff-von Neumann* daje elegantnu vezu između ove dve klase matrica.

Definicija 3.5.5: Matrica A je konveksna kombinacija matrica $A_1, \ldots, A_k$ ako postoje nenegativni brojevi λ_i za koje važi $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, tako da

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \,. \tag{3.5.1}$$

Teorema 3.5.1: Svaka *bistohastička matrica* može se napisati kao *konveksna kombinacija svojih permutacionih matrica*.

Dokaz: Bistohastička matrica može se tumačiti kao protok kroz usmereni graf sa jediničnim kapacitetima. Svaki takav graf ima politope tokova, nazvane politop protoka kroz mrežu. Politop protoka mreže ima ceo broj čvorova i to je potpuno unimodularan politop. Ovo bi bio komplikovan način da se pokaže da je teorema *Birkhoff-von Neumann* direktna posledica *teoreme Ford-Fulkerson*. Prikazan je dokaz preko njene direktne posledice *teoreme König-Egerváry*:

Neka je A, $n \times n$ bistohastička matrica. Mora postojati n elemenata u A sa vrednošću različitom od 0, bez dva elementa u svakoj vrsti ili koloni. Ekvivalent je reći da, *(0,1)*-matrica B sa 0 na istim pozicijama kao i 0 u A i 1 na svim ostalim mestima, ima rang n. Ako bi B bila manjeg ranga, onda po *teoremi König-Egerváry B* može biti pokrivena sa r vrsta i s kolona tako da je $r+s<n$. Ove vrste i kolone u A moraju biti vrste i kolone takve da je zbir elemenata u svakoj 1. Zbir svih elemenata u A je n, tako da važi $n \leq 1(r+s) < n$. Ovo je kontradikcija.

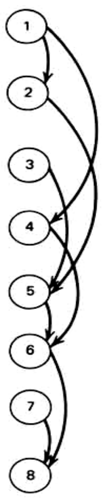
Izaberemo n pozicija u A i neka je c_1, najmanji element na ovim pozicijama. Pretpostavljamo da je $A_1 = A - c_1 P_1$, gde je P_1 permutacijska matrica sa 1 na izabranih n pozicija. Postupak se sada može ponoviti jer A_1 uvek ima konstantan zbir vrsta i kolona i (ali sada je taj zbir $1-c_1$). A_1 ima bar jednu više nulu nego A, tako da će se ovaj proces na kraju završiti i proizvesti željeni proces razgradnje. Dobijamo da je $A = c_1P_1 + c_2P_2 + \ldots + c_kP_k$, pri čemu važi $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$, gde su realni brojevi $c_i > 0$, a to je i trebalo pokazati.

Primena: U društvu je jednak broj muškaraca $m_1, m_2, \ldots m_n$ i žena $ž_1, \ldots, ž_n$ koji provode svoj život kao parovi. Za svaki par $(m_i, ž_j)$ deo života koji provode zajedno je definisan sa a_{ij} tako da $0 \leq a_{ij} \leq 1$ (pretpostavlja se da svi imaju isti životni vek). Zato moramo imati za svako i, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ i za svako j, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Kvadratna matrica $A = \left[a_{ij}\right]$ reda n je dakle *bistohastička*. Osim toga, svakom paru $(m_i, ž_j)$, dodeljujemo"koeficijent zadovoljstva", c_{ij}, njihovog zajedničkog života, koji kada se množi njihov deo života u zajednici daje "životno zadovoljstvo". Dakle, zadovoljstvo para $(m_i, ž_j)$, svojim životom u zajednici je $c_{ij}a_{ij}$. Poželjno je da ukupno zadovoljstvo svih parova bude najveće moguće. Tačnije, u potrazi smo za nekim a_{ij}, trajanjima parova, tako da $\sum_{ij} c_{ij}a_{ij}$ bude maksimalna. Maksimum se postiže u slučaju kada za svako i postoji j tako da je a_{ij} =1, odnosno kada su bračni parovi stabilni tokom celog svog života.

3.6. Dilworth-ova teorema

Problem avio rasporeda

Avio kompanija želi da *minimizuje* broj aviona potrebnih za *m* letova. Letovi se realizuju na isti način svakog dana. Problem može biti opisan mrežom sa *1,...,m* čvorova, gde svaki čvor predstavlja jedan let. Po rasporedu letova, za svaki par letova *i* i *j,* formira se grana *(i,j)* takva, da je odredište leta iz čvora *i*, polazište sledećeg leta *j* istog aviona. Nakon završetka leta *i* počinje let *j*. Ova mreža je aciklična jer se vreme ne ponavlja. Slika 3.6.1. je primer takve mreže.



Slika 3.6.1. Problem avio rasporeda sa osam destinacija

Dakle, letovi jednog aviona se nadovezuju jedan na drugi pa se i odgovarajuće grane aciklične mreže koje odgovaraju datim letovima nadovezuju jedna na drugu. Takve grane povezuju čvorove aciklične mreže tako da je čvor završni za jednu, početni za drugu granu. Tako nadovezan niz grana naziva se lanac. Svaka aciklična mreža može biti razložena u disjunktne lance. Time se skup čvorova razbija na podskupove takve da svaki sadrži čvorove posećene jednim lancem. Skup svih takvih lanaca u acikličnoj mreži naziva se *razbijanje u lance*.

Degenerisani lanci sastoje se od po jednog čvora i ne sadrže grane. Mreža uvek može biti razložena u *m* lanaca sa po jednim čvorom i tada bi svakom letu ogovarao drugi avion.

Problem avio rasporeda rešava se nalaženjem najmanjeg razbijanja u lance a svaki lanac odgovara letovima koje obavlja jedan avion. Tako se pronalazi i najmanji broj aviona koji su potrebani da opslužе sve letove. I ovaj problem možemo rešiti pomoću *Ford-Fulkersonove teoreme.*

Teorema(Dilworth) 3.6.1: Neka je L razbijanje u lance aciklične mreže koja ima m čvorova. I neka je c broj lanaca a p broj svih grana iz L. Tada je zbir broja lanaca c i broja grana p jednak broju, m, čvorova aciklične mreže.

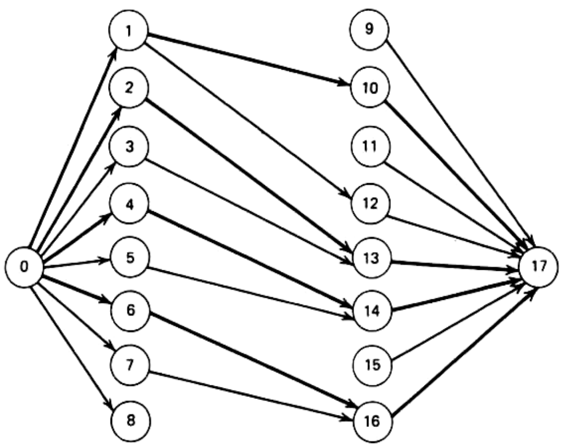
Dokaz: Lance iz L indeksiramo sa k, za $k=1,2...c$ a broj čvorova koji pripadaju lancu k označimo sa m_k. Kako svaki čvor pripada tačno jednom lancu, imamo $\sum_{k=1}^{c} m_k = m$.

Svaki lanac ima za jednu manje granu od broja čvorova koje sadrži, pa važi jednakost:

$$m=\sum_{k=1}^{c}(m_k-1) + c= p+ c. \tag{3.6.1}$$

Direktna posledica ove teoreme je da u acikličnoj mreži možemo pronaći minimalano razbijanje u lance maksimiziranjem broja grana iskorišćenih pri razbijanju u lance. Maksimiziranje broja grana postižemo konstrukcijom mreže L^* dobijene iz aciklične mreže L i rešavanjem problema maksimalnog protoka u L^*. Skup čvorova u L^* je $1,2......,2m$. Skup grana u L^* se sastoji od svih grana $(i, m+j)$ za (i,j) iz skupa grana od L. Kapacitet svake od ovih grana je ∞. Postoji, izvor, čvor 0 i ponor, čvor $2m+1$, kao i grane $(0,i)$ za $i=1,...m$, i grane $(j,2m+1)$ za $j=m+1,...2m$ sa kapacitetima jednakim 1. Vrednost protoka biće jednak broju grana $(i, m+j)$ sa protokom 1. Neka je vrednost protoka p. Tada je, po prethodnoj teoremi razbijanje u lance sastavljeno od $c=m-p$ lanaca.

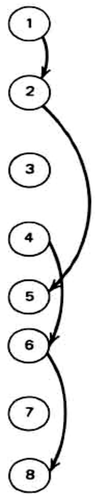
Lako je primetiti, da maksimalni protok od izvora do ponora u mreži L^* daje minimalno razbijanje u lance. Svaka grana $(i,m+j)$ u L^* sa protokom 1 je grana (i,j) u L. Ako nema protoka u čvor i iz čvorova i i $m+i$ u L^*, tada čvor i predstavlja lanac sastavljen od jednog čvora. Činjenica da je protok u L^* maksimalan na osnovu prethodne teoreme dovodi do toga da je razbijanje u lance minimalno.(Ako je vrednost p maksimalna tada je $m-p$ minimalno.)



Slika 3.6.2. Prikaz maksimalnog protoka problema avio rasporeda zadatog na slici 3.6.1

Na slici 3.6.2. data je mreža L^* sa maksimalnim protokom 4, koji je označen podebljanim linijama i rešava problem avio rasporeda sa osam destinacija.

Po *Ford-Fulkersonovoj teoremi* znamo da je kapacitet minimalnog reza u mreži jednak vrednosti maksimalnog protoka, p, pa ćemo pronaći rez kapaciteta p u L^*. Neka je $(P,\overline{P})$, rez konačnog kapaciteta p u L^*. Definišemo skup čvorova S, tako da $i \in S$, ako za granu $(i,m+j)$, $i \in P$ i $m+j \in \overline{P}$. Ako čvor $i \notin S$ tada najmanje jedna grana od $(0,i)$ ili $(m+j,2m+1)$ pripada $(P,\overline{P})$. Postoji najviše p takvih čvorova, jer je kapacitet reza p. Otuda je $|S| \geq m\text{-}p$. Kako je p minimalno $|S|$ je maksimalno. Više između čvorova iz S nema grana u L^*. Kada bi $(i,m+j)$ bila takva grana tada bi rez bio neograničenog kapaciteta. Zaključujemo da nema puta između dva čvora iz S. Ovakav skup S, između čijih elemenata nema puta naziva se antilanac. Na osnovu prethodnih razmatranja dobijamo minimalno razbijanje u lance datog avio rasporeda, sastavljeno od 4 lanca, na slici 3.6.3.



Slika 3.6.3. Minimalno razbijanje u lance problema avio rasporeda sa slike 3.6.1

Dokazali smo *Dilworth-ovu teoremu.* Više o *Dilworth-ovoj teoremi* pogledati u $[34]$, $[35]$. Postoji i sledeća verzija teoreme koja je detaljno opisana u $[35]$.

Teorema 3.6.3: Neka je P konačan, parcijalno uređen skup. *Najmanji broj disjunktnih lanaca* na koje se P može razložiti jednak je *broju elemenata maksimalnog antilanca u P.*

Zaključak

U ovom radu je obrađen problem maksimalnog protoka kroz transportnu mrežu. Pokazano je da je pri određivanju maksimalnog protoka u mreži najvažnije odrediti minimalni rez. Mogućnosti primene ovog rezultata su raznovrsne i koristi se pri rešavanju mnogih problema. Primeri navedeni u radu ukazuju na mogućnost primene dobijenog rezultata Ford-Fulkersona pri rešavanju problema u avio saobraćaju i računarskoj viziji i grafici. Primena minimalnog reza u rekonstrukciji slike je relativno novo otkriće i pokazalo se kao jedno od efikasnijih rešenja problema.

Problem maksimalnog protoka kao što je to u radu i pokazano je u bliskoj vezi sa važnim teoremama u kombinatorici. Opisan je odnos protoka i disjunktnih puteva u grafu i digrafu. Zatim je razmatrana veza sa protokom usmerenog grafa i sparivanjem u bipartitnom grafu. Prikazana je i primena na kombinatoriku matrica i razbijanje aciklične mreže na lance i antilance. Vidi se da svi ovi rezultati kombinatorike, imaju neke zajedničke karakteristike tj. postavljaju slične veze među različitim modelima.

Dalje proširenje i unapređenje date metodologije može se primeniti na neke probleme na grafovima i u različitim primenama.

Literatura

[1] **Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B.**, Network Flows-Theory, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[2] **Anderson J.A.**, Discrete Mathematics with Combinatorics, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

[3] **Asratian A.S., Denley T.M.J., Haggkvist R.**, Bipartite Graphs and their Applications, Cambridge University Press 1998.

[4] **Behzad M., Chartrand G.**, Introduction to the Theory of Graphs, Allyn and Bacon, Boston, 1971.

[5] **Berge C.**, Graphs, North-Holland Mathematical Library, vol. 6, North-Holland, 1985.

[6] **Bondy J.A.** and **Murty U.S.R.**, Graph Theory with Applications, Macmillan, London, 1976.

[7] **Bondy J.A.** and **Murty U.S.R.**, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer, 2008.

[8] **Borgersen R.D.**, Equivalence of seven major theorems in combinatorics,2004. http://www.robertborgersen.info/Presentations/GS-05R-1.pdf

[9] **Boykov Y. and Veksler O.**, Graph Cuts in Vision and Graphics: Theories and Applications, Handbook of Mathematical Models in Computer Vision, Springer, 2006.

[10] **Brualdi R.A.**, Introductory Combinatorics, Fifth Edition , Pearson Education, Inc, 2004.

[11] **Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.**, Assignment problems, Wiley, 2009.

[12] **Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C.**, Introduction to Algorithms, Second Edition, The MIT Press, 2001.

[13] **Cvetković D.**, Teorija grafova i njene primene, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[14] **Diestel R.**, Graph Theory, Electronic Edition 2005, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 2005.

[15] **Edmonds J.** and **Karp R. M.**, Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems, J. ACM, Vol. 19, 248—264 A972).

[16] **Ford L. R.** and **Fuilkerson D. R.**, Flows in Networks, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1962.

[17] **Fournier J-C.**, Graph Theory and Applications with Exercises and Problems,Wiley, 2009.

[18] **Grimaldi R. P.**, Discrete and combinatorial mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[19] **Harary F.**, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969. [Имеется перевод: Ф. Харари. Теория графов: — М.: Мир, 1973.]

[20] **Jungnickel D.**, Graphs, Networks and Algorithms, Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 5, Springer, 1999.

[21] **Konig D.**, Graphen und Matrizen, Mat. Fiz. Lapok. 38, 116-119, 1931.

[22] **Korte B., Vygen J.**, Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms-Springer, 2002.

[23] **Kuhn H. W.**, The Hungarian Method for the Assignment Problem, Naval Res. Legist. Quart., Vol. 2, 83—97 A955).

[24] **Latouche G., Ramaswami V.**, Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling, Society for Industrial Mathematics, 1987.

[25] **Lawler E.L.**, Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[26] **Leeuwen J.V.**, “Graph Algorithms”, Chapter 10 in Handbook of Theoretical Computer Science, vol. A, Algorithms and Complexity, edited by J. van Leeuwen, Elsevier, 1990.

[27] **Lovasz L.** and **Plummer M.D.**, Matching Theory, Annals of Discrete Mathematics, vol. 29, North-Holland, 1986.

[28] **Munkres J.**, Algorithms for the Assignment and Transportation Problems, J. SIAM, Vol. 5, 32—38 A957.

[29] **Ore O.**, Theory of Graphs, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1962.

[30] **Ore O.**, Graphs and their uses, The Mathematical Association of America, 1990.

[31] **Potts R.B.** and **Oliver R.M.**, Flows in transportation networks, Academic press, New York and London, 1972.

[32] **Rouhonen K.**, Graph theory, Translation by Janne Tamminen, Kung-Chung Lee and Robert Piche, 2006.

[33] **Schrijver A.**, A Course in Combinatorial Optimization, CWI, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, The Netherlands and Department of Mathematics, University of Amsterdam, 2008.

[34] **Shapiro J.**, Mathematical Programming, Structures and Algorithms, John Wiley&Sons, New York 1979.

[35] **Свами М.**, К.Тхуласираман, ГРАФЫ, СЕТИ И АЛГОРИТМЫ, М.: Мир, Москва, 1984.

[36] **Veljan D.**, Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[37] **Wayne K.**, Max Flow, Min Cut, COS521, Fall 2005, http://www.cs.princeton.edu/~wayne/teaching/maxflow-mincut.pdf

[38] **Wilson R. J.**, Introduction to Graph Theory, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.