

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ШКОЛСКА 2011/2012



# МАСТЕР РАД

ТЕМА:

ОРГАНИЗАЦИЈА ЧАСА МАТЕМАТИКЕ У ЈАПАНУ  
– КОМПАРАТИВНИ ПРИСТУП -

Ментор:

Проф. др Милан Божић

Студент:

Слађана Париповић, 1033/2011

Београд, Септембар, 2012. год

## Садржај

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Увод.....</b>                                                                                | <b>1</b>  |
| <b>1. Систем образовања у Јапану.....</b>                                                       | <b>4</b>  |
| <b>2. Настава математике у Јапану.....</b>                                                      | <b>7</b>  |
| <b>3. Решавање проблема по идејама George Poly-е.....</b>                                       | <b>8</b>  |
| <b>4. Организација, методе и извођење наставе математике у Јапану.....</b>                      | <b>12</b> |
| <b>4.1. Школски календар.....</b>                                                               | <b>12</b> |
| <b>4.2. Конструктивно решавање проблема.....</b>                                                | <b>13</b> |
| <b>4.2.1. Пажљиво одабрана формулација проблема и активности, и њихова повезаност.....</b>      | <b>14</b> |
| <b>4.2.2. Опширна дискусија и улога наставника на часовима.....</b>                             | <b>18</b> |
| <b>4.2.3. Нагласак на вежбању пред таблом (Bansho).....</b>                                     | <b>20</b> |
| <b>4.3. Мале групе налик на породице.....</b>                                                   | <b>21</b> |
| <b>5. Упоредни системи математичког образовања у Јапану и Америци.....</b>                      | <b>24</b> |
| <b>5.1. Процене снимљених часова математике од стране јапанских и америчких наставника.....</b> | <b>26</b> |
| <b>6. Резултати TIMSS истраживања.....</b>                                                      | <b>32</b> |
| <b>7. Пример јапанског часа математике у Србији.....</b>                                        | <b>38</b> |
| <b>7.1. Завршни коментар на изведен час математике.....</b>                                     | <b>45</b> |
| <b>8. Пример јапанског часа математике у Јапану.....</b>                                        | <b>46</b> |
| <b>8.1. Анализа снимљеног предавања.....</b>                                                    | <b>49</b> |
| <b>8.2. Завршни коментар на изведен час математике у Јапану.....</b>                            | <b>55</b> |
| <b>Закључак.....</b>                                                                            | <b>56</b> |
| <b>Литература</b>                                                                               |           |

## Увод

У савременом свету, живот и комуникација јединке са природним и друштвеним окружењем незамисливи су без познавања математике. Непотребно је наводити ситуације у којима нам је математика неопходна, нити проблематику у којој ће се напредније математички образован појединац лакше сналазити од оних са мањим математичким компетенцијама. При томе се не мисли само на конкретно нумеричко операционе могућности човека, нити на математички апарат потребан за извођење неких практичних делатности, већ и на апстрактно математичко-логичко мишљење и његову улогу у општем интелектуалном развоју и формирању идентитета. Математика је у античким цивилизацијама настала, а и касније се развијала из практичних људских потреба у његовом сазнавању и овладавању природе и међуљудским првенствено матријалним, а касније и другим односима. У њеном каснијем развоју често се дешавало и дешава се да њени апстрактни резултати претходе искуству и практичној употреби.

Не мањи је значај математике за цивилизацију уопште. Своју примену она је нашла у другим наукама, уметности и култури. Незамислив је напредак човечанства без коришћења резултата природних наука, којима математика даје метод и алате за даља истраживања и унапређивања. У уметности естетски склад се изучава математичким пропорцијама величина, звукова, боја... У језику и књижевности математика се користи у граматичким изучавањима, у метрици стиха итд. Чак и тамо, где би најокорелији критичари математизације света, на први поглед тврдили да нема учешћа математике, она се појави макар и у најелементарнијем виду. Највећи продори људског ума у суштину света, у законе живих организама; у технолошке, друштвено историјске и психичке процесе; у дефинисање естетског, немогући су без директног или бар посредног деловања математичких теорија и чињеница.

Резултати бројних истраживања указују на то да се јапански ученици издвајају на међународним тестовима математичких постигнућа. Математика је користан домен у коме треба да се постави питање шта је то што јапански наставници раде да доводи до високог нивоа успешности тако огромног броја јапанске деце.

*„Математика и њен стил учења морају постати саставни део опште културе савременог човека, тј. човека кога образују данашње школе, без обзира да ли ће он вршити посао који користи математику или не”.*

Конференција УНЕСКО 1956. год.

Будући да је математика незаменљив фактор у сваком стваралаштву, то је потребно и корисно широм отворати прозоре те чаробне математичке грађевине. Треба, дакле, стално, када је год то могуће, истицати да је математика и строга и прецизна, да је и апстрактна, али да је и применљива на појаве и кретања у нама и око нас, тј. да је занимљива и примамљива.

За ученика је важно да самостално потражи најбољи пут који ће га довести до циља. Ако у томе успе, а пронађено решење буде боље, или применљивије или ефектније од решења осталих ученика, онда ће то за њега представљати право задовољство. Наиме, такав приступ математици доприноси да математику још више ценимо и волимо, и да је изучавамо и све више изграђујемо и да се радујемо и уживамо у њеној величини и лепоти.

Успех у математици и даље је кључни фактор у успеху многих школских система широм света. Као резултат тога, ова област наставног плана и програма је предмет значајног међународног упоредног истраживања. Уз све ово, а можда и не изненађујуће, централна улога наставника и како они организују своје часове је настао као кључни фактор у учењу ученика.

Из практичног значаја математике произилази и значај математичког образовања. У нашој средини је устаљено мишљење да је математика тешка па чак и сувишна у многим делатностима. Отуда су деца, често и пре поласка у школу, заплашена таквим коментарима у својој околини. Није циљ тражити кривце том феномену, већ учествовати у активностима која демистификују таква негативна мишљења и афирмишу позитивне ставове према математици и учењу математике.

Основни циљ овог рада је да се сагледа како се организује час математике у Јапану где се у настави математике користи приступ решавања проблема (problem solving), а организација и наставни поступци тако бирају да максимално развијају мисаоне

активности и стваралачке способности ученика. У том смислу се сагледава и улога наставника као непосредног сарадника и организатора наставе у којој ће ученици самостално решавати задатке.

Непосредни циљ је вредновање какве ће резултате дати примена јапанске организације часа математике на нашем подручју конкретно у раду са ученицима шестог разреда Основне школе „Мирослав Антић” у Београду.

Коначни циљ рада је да се установе предности оваквог начина организације часа као и потенцијални недостаци у циљу унапређивања наставе математике.

# 1. Систем образовања у Јапану

Налазећи се међу технолошки најразвијенијим силама света, са израженом тенденцијом да задржи свој примат, Јапан све више привлачи пажњу истраживача који покушавају да у различитим сферама живота и рада нађу објашњење овог великог и брзог развоја и раста. Разлози се траже уз карактеристике земљишта и климе, историје, религије, традиције и у специфичном васпитању и образовању које мали Јапанци добијају током свог школовања. Сами Јапанци сматрају да свет доживљава њихов образовни систем као једну од тајни њиховог успеха. Штавише, Јапанци тврде да је образовање у целини послужило као носећа сила економског, социјалног и културног развоја јапанске нације. (Максић, 1998)

Јапан има један од највиших стандарда образовања и једну од највиших стопа писмености у свету. Око 93% деце похађа средњу школу, а скоро сви дипломирају. У 2000. години Јапан је имао једну од највиших стопа универзитетских уписа у развијеном свету (40%) и велики број државних и приватних универзитета, који су услужни сервис становништву.

Основни принципи за јапанска образовања су дефинисани у Уставу Јапана донетог 1946., а основни закон просвете донет 1947. Устав предвиђа основно право и дужност да се људи образују на следећи начин: *„Сви људи имају право да добију једнако образовање које одговара њиховим способностима, као што је предвиђено законом. Народ има обавезу да сви дечаки и девојчице под њиховом заштитом добијају редовно образовање, како је предвиђено законом. Такво обавезно образовање треба да буде бесплатно”* (Устав Јапана члан 26.).

Закон дефинише главни циљ образовања као „пун развој личности, тежњу за васпитањем људи, здравље у духу и телу, који ће волети истину и правду, поштовати вредност појединца, поштовање рада и имају дубок осећај одговорности, и да буду прожети независним духом, као ствараоци мирне државе и друштва”.

### ***Фазе образовног система:***

#### ***1) предшколске установе и вртићи***

Вртићи су необавезна школа који треба да помогну развоју деце, њихових умова и тела пружајући им одговарајуће едукативно окружење. Они се брину за предшколску децу узраста од три или више године.

#### ***2) основне школе (*shogakkou*)***

Сва деца која су напунила шест година су обавезна да похађају основну школу која траје шест година. Основна школа је намењена да обезбеди деци узраста од шест до дванаест година основно опште образовање које одговара релевантним фазама њиховог менталног и физичког развоја.

#### ***3) нижа средња школа (*chugakkou*)***

Сва деца која су завршила курс основне школе дужна су да иду у нижу средњу школу три године. Нижа средња школа има за циљ да обезбеди деци узраста од дванаест до петнаест година опште средње образовање које одговара нивоу њиховог менталног и физичког развоја, на нивоу образовања које је пружено у основној школи.

#### ***4) виша средња школа (*koukou; koutougakkou*)***

Више средње школе су необавезне школе чија је намена да дају нижим средњим школама опште и специјализованије средње образовање које одговара њиховом нивоу менталног и физичког развоја, на основу образовања пруженог у нижим средњим школама. У погледу садржаја наставе, курсеви у средњој школи могу бити широко сврстани у три категорије: општи, специјализовани и интегрисани.

Општи курсеви нуде опште образовање које ставља нагласак на академске предмете, док су специјализовани курсеви дизајнирани да пруже стручно, техничко или друго образовање за оне ученике који су изабрали одређену стручну област као своју будућу каријеру. Ови курсеви се даље класификују у неколико категорија: пољопривреда, индустрија, финансије, национална економија, медицина, природне науке, математика итд. Интегрисани курсеви пружају свеобухватно опште и специјализовано образовање.

##### 5) специјалне школе и одељења за инвалиде

Деца ометена у развоју су обезбеђена посебним образовним третманом у складу са врстом и степеном њиховог поремећаја у циљу да постигну своју максималну способност и потенцијал, и развију способност да се подрже и учествују у друштву.

##### 6) институције високог образовања

Институције високог образовања у Јапану обухватају универзитете, факултете, јуниор колеџе и специјалне обуке школе. Универзитети и институције високог образовања су центри учења, где се настава и истраживање обавља детаљно кроз специјализоване академске дисциплине. (MECSST, 2004)

##### 7) јуку школе

Јапан подржава широк спектар академских институција изван регуларног школског система. Ова густа шема се састоји из кућних татора, одговарајућих курсева, јуку, приватне школе додатне наставе и школе за припремање испита (**yobiko**). Већина ових форми образовања су колективно познате као јуку школе.

## 2. Настава математике у Јапану

Већина јапанских наставника би се сложила да је јапанска школска математика била под снажним утицајем нагласка на решавање проблема као пример практичне примене реформа у математици.

Stigler и Hiebert су описивали јапанске часове математике као „конструктивно решавање проблема” тако што су сумирали неколико карактеристика јапанских математичких часова. У Јапану, наставници имају мање активну улогу, јер омогућавају својим ученицима да изнесу своје сопствене начине за решавање проблема. Проблеми су веома захтевни, како процедурално тако и концептуално. Наставник, међутим, пажљиво осмишља и води час тако да ученици вероватно користе кораке који су последње време заступљени на часу. Јапанско конструктивно решавање проблема саграђено је на чврстим темељима наглашавајући проблеме у настави и учењу математике. Историјски гледано, у Јапану настава и учење математике су фокусирани на развој математичког размишљања и развој вештина које се користе за различите врсте проблема.

За јапанске наставнике се каже да користе веома различите методе наставе у својим учионицама. Јапан има највештије и најсмисленије методе које се користе у настави математике. Наставници помажу ученицима да реше неки проблем тако што користе различите путеве: претходне лекције, информације добијене из лекција. Ти изазовни проблеми су посебно смишљени. Наставник има за циљ да ученици почну да развијају метод за решавање. Лекција је замишљена као прича и садржаји се надовезују. Крајњи закључак се не може извести ако се лекције састоје из обимнијих сегмената који нису повезани. Предавање је схваћено као систем који ради као машина са деловима који функционишу заједно.

Систем предавања укључује физичко уређење учионице, циљеве наставника, материјале укључујући књиге, улоге које имају ученици, начин на који је школски дан организован и др. (Stiegler & Hiebert, 1999).

### 3. Решавање проблема по идејама George Poly-e

Један од главних узрока успеха јапанских ученика у настави математике је решавање проблема (problem solving).

Решавање проблема у настави математике у Јапану засновано је на идејама које је поставио Мађар George Polya.

Године 1945. је објавио књигу „Како ћу решити математички задатак“, у којој је поставио четири основна принципа за решавање проблема:

1. Разумевање проблема
2. Стварање плана
3. Извршавање плана
4. Провера добијеног решења

**Разумевање проблема** – Ученик треба да разуме задатак, али такође, треба и да тежи ка његовом решењу. Ако ученик не разуме задатак или не показује довољно интересовање, кривица није на њему. Зато је важно да задатак буде природан и занимљив, а не претежак ни прелак. Пре свега треба схватити текст задатка, односно разумети шта се у задатку тражи. (Polya, 1996)

Поља сматра да наставници треба да постављају питања ученицима попут:

- ❖ Да ли можете да објасните проблем својим речима?
- ❖ Да ли разумете све речи у тексту задатка?
- ❖ Шта се од вас тражи да пронађете или покажете?
- ❖ Можете ли да замислите слику или дијаграм који би вам могли помоћи да разумете проблем?
- ❖ Да ли постоји довољно информација које би вам омогућиле да нађете решење?

**Стварање плана** – План имамо када знамо, или бар у главним цртама знамо, које рачуне, трансформације или конструкције морамо извести да би дошли до непознатог. У решавању задатка најважније је доћи до идеје плана. Најбоље што наставник за своје ученике може учинити је да им ненаметљиво помаже да дођу до најбоље идеје. (Polya, 1996)

Да би наставник могао да схвати положај ученика, мора се осврнути на своје властито искуство, проблеме и успехе које је имао при решавању задатака.

Да би креирали добру идеју, ученици морају имати претходно стечено знање и искуство. Међутим, само сећање није довољно за добру идеју, и не може се доћи до њих ако се не користе претходне чињенице.

У овој фази решавања проблема, Поља сматра да је потребно поставити следећа питања:

- ❖ Да ли си задатак пре видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?
- ❖ Знаш ли неки слични задатак? Знаш ли која би ти теорема могла помоћи?
- ❖ Пронађи непознато! Знаш ли неки задатак који садржи исту непознату?
- ❖ Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га употребити? Можеш ли применити његов резултат? Можеш ли применити методу којом је тај задатак решен? Да ли би увео неки помоћни елемент да употребиш кроз тај задатак?
- ❖ Можеш ли задатак другачије изразити? Можеш ли га изразити још некако другачије? Врати се на дефиниције!
- ❖ Ако не можеш решити постављени задатак, покушај најпре решити неки сличан задатак. Можеш ли смислити приступачнији сличан задатак? Општији задатак? Специјалнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли решити део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; докле је тада непозната одређена, како се она може мењати? Можеш ли из задатих података извести шта корисно? Можеш ли замислити друге неке задате податке који би били погодни за одређивање непознате? Можеш ли променити непознату, или задате податке, или – ако треба обоје, тако да нова непозната и нови задати подаци буду међусобно ближи?

- ❖ Да ли си искористио све задато? Јеси ли искористио читав услов? Јеси ли узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?

**Извршавање плана** – Створити план, доћи до идеје решења није лако. Да би ученици у томе успели, потребно им је доста тога, као што су претходно стечена знања, дисциплина духа, концентрација на циљ, као и срећа. Извршити план је много лакше. За то треба углавном само стрпљења. План даје опште облике; треба се уверити да ли појединости пристају у те облике. Стога треба да стрпљиво, редом, испитују детаље док све не буде потпуно јасно, док не ишчезне и задње место у којем би се сакрила грешка. Ако је ученик стварно схватио план, наставнику ће преостати мало посла. Главна опасност је да ученик план заборави, а то се дешава у случају да га је примио споља, или га је прихватио на основу наставниковог ауторитета. У супротном, ако је ученик израдио план сам, макар и уз извесну помоћ, и ако му је синила идеја праћена унутрашњим задовољством, он онда неће идеју лако изгубити. У сваком случају, наставник треба да захтева да ученик контролише сваки корак. (Polya, 1996)

У трећој фази решавања проблема, Поља сматра да је потребно поставити следеће питање:

- ❖ Спроводиш ли свој план решавања, контролиши сваки корак! Можеш ли јасно видети да је корак исправан? Можеш ли доказати да је исправан?

**Провера добијеног решења** – Ученици који су прилично добри, када реше задатак, када уредно напишу доказ, затварају своје свеске и чекају нешто ново. На такав начин, они изостављају важну и поучну фазу рада.

Освртом на готово решење, поновним разматрањем и преиспитивањем резултата и пута који је до њега довео, ученици би учврстили своје знање и повећали своје способности у решавању задатака. Ученик је дакле извршио свој план. Написао је решење контролишући при том сваки корак. На основу тога, наставник би имао разлога веровати ученику да му је решење исправно. У сваком случају грешке су увек могуће, нарочито ако је доказивање било дуго и замршено. Зато је проверавање пожељно. Осврт на решавање задатка zgodna је прилика да се истраже везе тог задатка. Ученицима је интересантно када погледају задатак уназад, након што су га решили, ако су се при решавању максимално

трудили, па су свесни да су нешто урадили. Осим тога, они ће желети да виде шта могу још постићи својим таквим напором и како могу неки други пут поступити једнако добро.

У завршној фази решавања проблема (solving problem), Поља сматра да је потребно поставити следећа питања:

- ❖ Можеш ли контролисати резултат? Можеш ли контролисати доказ?
- ❖ Можеш ли резултат извести другачије? Можеш ли га уочити на први поглед?
- ❖ Можеш ли резултат или методу употребити за неки други задатак?

## **4. Организација, методе и извођење наставе математике у Јапану**

Организација је друштвени договор који тежи заједничким циљевима, која контролише сопствени учинак и која има границу која је дели од окружења.

Сваки рад, па тако и учење захтева прикладну организацију, одређен план и режим рада, једном речју методичност у раду.

У Јапану се часови математике, због боље концентрације, генерално изводе у току првог периода дана. У својим студијама јапанских часова, Backer-а и његових колега (1990) пронашли су да се типична математичка лекција организује на следећи начин:

- ❖ ученици устају и клањају се
- ❖ разматрање проблема од претходног дана, или увод у решавање проблема
- ❖ ученици решавају проблем; рад у паровима или малим групама
- ❖ поређење и дискутовање ученичких решења
- ❖ наставник наглашава и сумира главне тачке
- ❖ задавање домаћег задатка (само два до четири проблема)
- ❖ звук звона, што указује на крај часа
- ❖ ученици устају и клањају се

### **4.1. Школски календар**

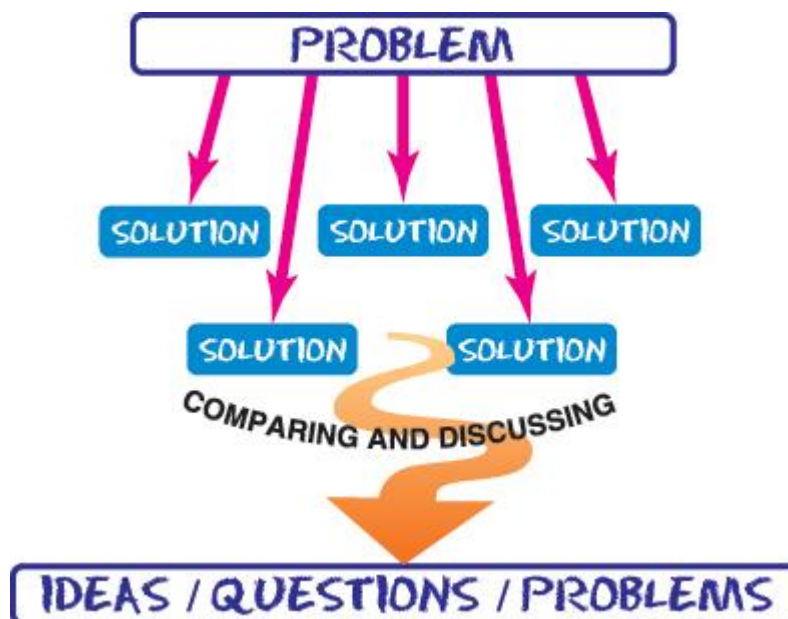
За разлику од многих других земаља, школска година у Јапану обично почиње 1. априла, а завршава се 31. марта наредне године. У основним, нижим средњим и вишим средњим школама, школска година је подељена у три периода: од априла до јула, од септембра до децембра и од јануара до марта. Неки од њих усваја систем семестра (углавном, први семестар је од априла до септембра, а други од октобра до марта). На

свим школским нивоима, одмори се одобравају у лето (од око краја јула до августа), у зимском периоду (од краја децембра до почетка јануара) и у пролеће (на крају школске године).

У принципу, образовне институције у Јапану су затворене недељом и државним празницима. Максималан број ученика у разредима основних и средњих школа је дефинисан законом. Стандардан разред се дефинише као величина 40.

## **4.2. Конструктивно решавање проблема**

Конструктивно решавање проблема је главни наставни приступ у јапанском математичком образовању, које се као што је већ споменуто одвија по Poly-ним идејама. Оно је осмишљено да постигне два изузетно важна циља који су од суштинског значаја за јапанску реформу наставног плана и програма математике: стварање заинтересованости за математику, и да стимулише креативне математичке активности у учионици током заједничког рада ученика. Овај приступ наставног процеса наглашава решавање проблема и активности које пружају ученицима прилику да поново дођу до математичке идеје и концепата до којих су сами дошли. То је разлог зашто час обично почиње тако што ученици раде појединачно на решавању проблема користећи своја математичка знања. После рада на проблему, ученици кроз дискусију у учионици износе неколико различитих приступа и решења. Наставник затим води ученике кроз целокупну дискусију на часу у циљу упоређивања појединачних приступа и решења. Овакав целокупан час обезбеђује активност ученика и могућности да развију своје математичке способности, укључујући концептуално и процедурално разумевање (слика 1).



Слика 1. Конструктивно решавање проблема

Коришћењем конструктивног решавања проблема као главног приступа у настави, јапански математички час има значајне карактеристике. Међу овим карактеристикама су три главне карактеристике:

- ❖ пажљиво одабрана формулација проблема и активности, и њихова повезаност
- ❖ опширна (детаљна) дискусија (Neriage)
- ❖ нагласак на вежбању пред таблом (Bansho)

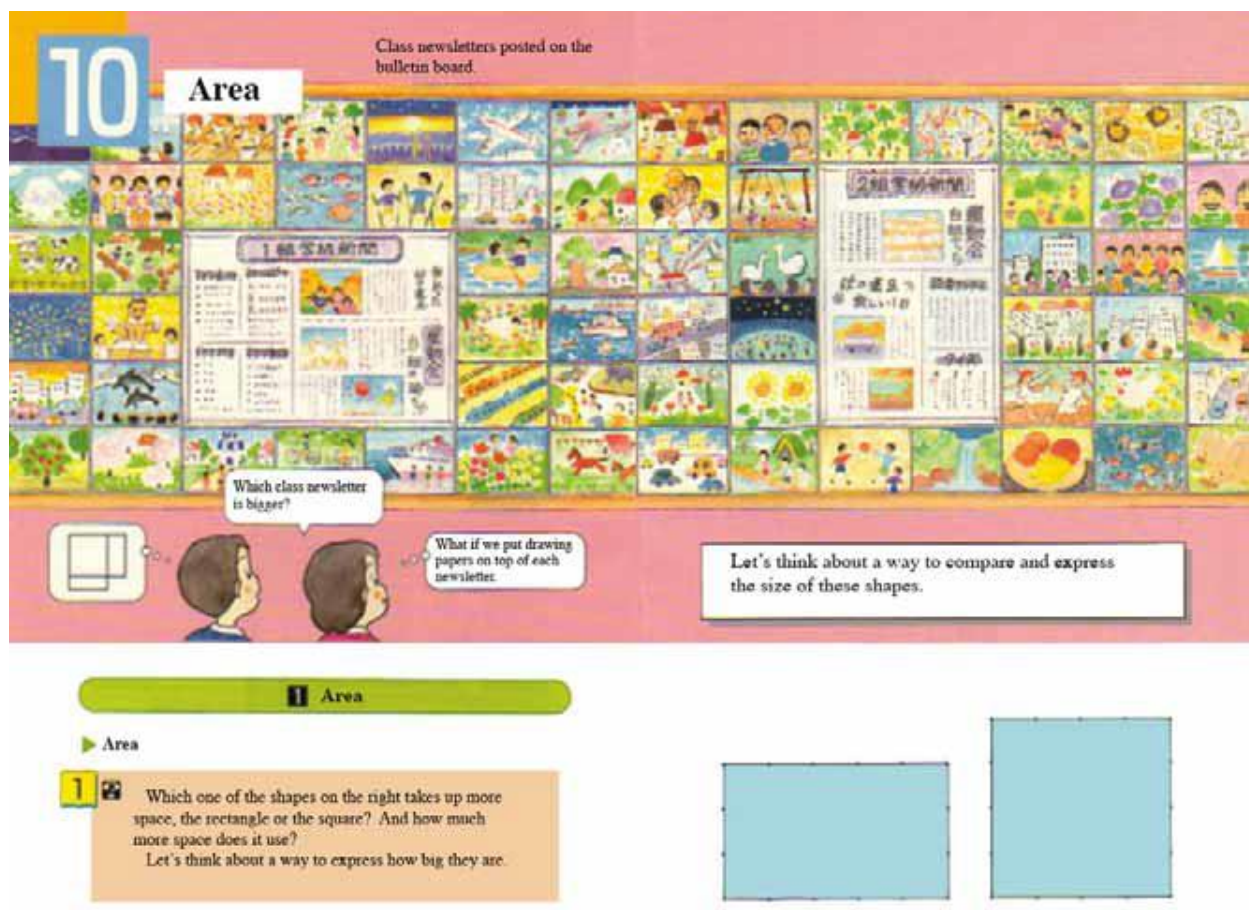
#### 4.2.1. Пажљиво одабрана формулација проблема и активности, и њихова повезаност

Мада је математика веома апстрактна наука, она има ванредно широко подручје примене у пракси. Да би је могао примењивати у пракси, ђак мора бити вешт у математичким операцијама и мора имати искуства у примењивању математичке теорије у другим наукама и у практичном животу. Оба ова циља наставе математике остварују се преко математичких задатака и проблема. Зато задаци имају изузетну важност за правилно

усвајање математике и њених метода, па их треба пажљиво одабирати и формулисати. (Смолец, 1964)

Обично, сваки математички час у Јапану је организован око решавања једног проблема, а то је да се постигне одређени циљ неке теме. Да би се постигао циљ за ученике, наставник пажљиво бира проблем активности за тај дан. Ретко је видети да час обухвата две или више активности решавања проблема, мада наставници могу дати ученицима неколико проширених проблема или вежбати после решавања главног проблема. Дакле, избор задатака за решавање проблема на сваком часу је изузетно захтевно за наставнике када организују час. (Takahashi)

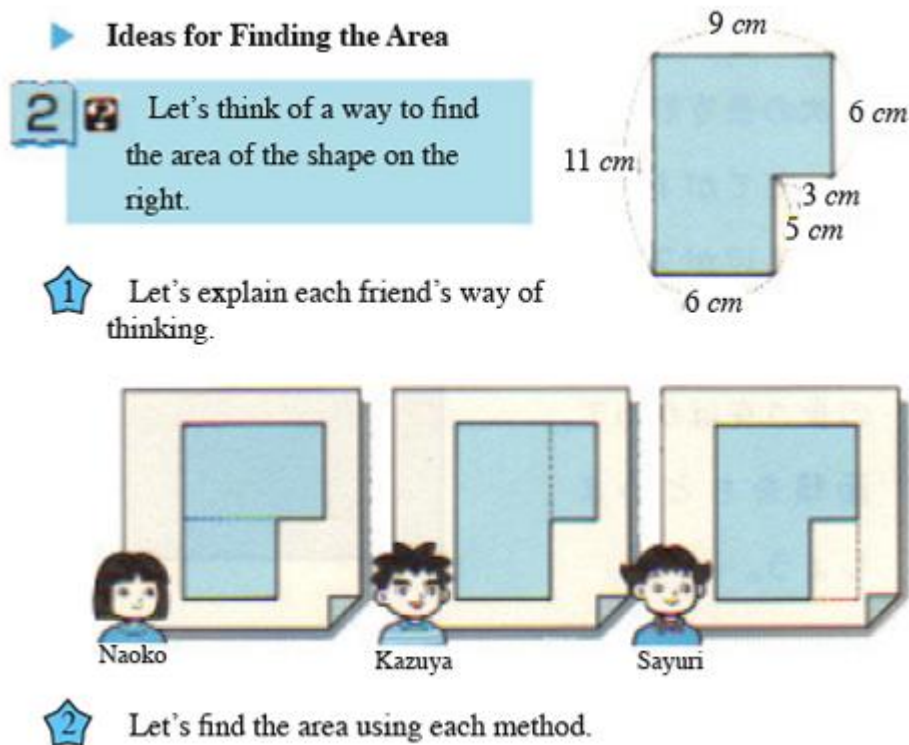
У јапанским уџбеницима из математике проблеми су пажљиво одабрани као и активности и њихова заједничка појављивања.



Слика 2. Јапански уџбеник математике за четврти разред

Следећа наставна јединица почиње са проблемом који је познат ученицима. Правоугаоник и квадрат се дају ученицима да упореде шта је веће (слика 2). Величине ове две геометријске фигуре су пажљиво одабране. Нпр. обим ове две фигуре је исти, али њихове површине су различите од површине квадрата странице 1cm. Ово се користи, јер ученици имају тенденцију да се збуне због типичног неспоразума ког су површине облика на основу свог обима. Да би ученици превазишли овај проблем, у уџбенику су намерно одабране две фигуре са истим обимом, али различитом површином.

Кроз ову активност решавања проблема, од ученика се очекује да користе своја предзнања, да упореде површине правоугаоника и квадрата помоћу површине квадрата странице 1cm као произвољне јединице. Затим је израчунавање површине правоугаоника и квадрата помоћу  $1\text{cm}^2$  представљено као мерење од стране универзалне јединице. Ова јединица такође укључује активности за решавање проблема како би проширили своје концепте за коришћење ових формула за неправилне облике (слика 3). Ова активност решавања проблема је осмишљена да пружи ученицима могућност да примене своја претходна учења, као што је формула за проналажење површине правоугаоника и квадрата, у новој ситуацији. Овакво искуство ће бити основа за развој формуле за проналажење површине других основних фигура у петом разреду. (Takahashi)



**Слика 3.** Јапански уџбеник математике за четврти разред

Надовезивање на оно што су научили у четвртном разреду, ученицима у петом разреду су дате могућности за развој формула за израчунавање површине паралелограма, троугла, трапеза, ромба, правилних многоуглова и круга. Током петог разреда од ученика се очекује да дођу до формуле за проналажење ових основних података преко практичних активности, као што су сечење и преуређивање фигура на папирним мрежама. Следећи редослед задатака и активности у свакој наставној јединици је пажљиво осмишљен како би ученици развили своје концепте и вештине. Наставна јединица у јапанским учионицама математике сматра се као низ проблема и активности, пре него скуп проблема и активности.

У уводном делу предавања, математички часови обично почињу са практичним проблемом и исписивањем проблема на табли или преузимањем из уџбеника. После представљања проблема и читања ученика о њему, наставник проверава да ли су ученици схватили о каквом проблему је реч. Ако нису разумели, наставник може да тражи од ученика да поново читају или, у неким случајевима, он или она могу питати неколико

ученика да истражују своје почетне идеје о методама за решавање проблема. Затим се око 10-15 минута додељује ученицима за самостално решавање проблема.

Док ученици раде на проблему, наставник шета по учионици и посматра рад ученика. Током овог временског периода, наставник даје предлоге или појединачно помаже онима који имају тешкоће. Наставник такође посматра ученике који имају добре идеје, са намером да прозове те ученике – по одређеном редоследу – у каснијој дискусији.

Током дискусије, ученици проводе већину свог времена слушајући предлоге решења својих другова из разреда, као и представљање сопствених идеја. Када се дискутује о решењима проблема, наставник пита ученике да представе алтернативне методе за решење истог проблема.

Представљање идеја, чак и погрешно, је снажно охрабрено и похваљено. У неким случајевима, наставник може изабрати погрешно решење у циљу указивања на њега.

Коначно, наставник сумира и анализира лекцију и задаје неколико практичних проблема у којима се примењује оно што су ученици научили током часа. Наставник шета по учионици док деца раде у групама, гледајући пажљиво на рад деце, дајући коментаре појединим ученицима о њиховим напорима и тражећи да утврди да ли су деца разумела оно о чему је управо било дискутовано. (Takahashi)

#### 4.2.2. Опширна дискусија и улога наставника на часовима

Следећи педагошки термини се користе за описивање кључних улога наставника у оквиру организације часова: Hatsumon, Kikan – shido, Neriage, и Matome.

**Hatsumon.** Hatsumon подразумева представљање кључног питања које наводи ученике да размишљају о одређеном делу лекције. На почетку часа, наставник може поставити питање да покаже или да побољша ученицима разумевање проблема. Током обимне дискусије целог разреда, с друге стране, он или она могу да затраже, на пример,

повезивање предложених приступа решавања проблема или ефикасност и применљивост сваког приступа. (Shimizu, 1999)

**Kikan – shido.** Kikan – shido подразумева давање упуства ученицима и обухвата континуирано праћење индивидуалног рада ученика, од стране наставника, при процесу решавања проблема.

Док наставник тихо шета по учионици и надгледа активности ученика, он обавља две важне активности које су уско везане за дискусију целог разреда која следи након појединачног рада.

Прво, наставник оцењује напредак ученика у решавању проблема. У неким случајевима, наставник усмерава ученике да прате или даје савете како приступити проблему.

Друго, наставник прави белешке о томе који су ученици користили очекиване приступе и који су ученици користили различите приступе у решавању проблема. Ови ученици ће касније бити прозвани да изложе своја решења. Тако, у периоду континуираног праћења, наставник размишља о питањима попут: „Које методе решења ученици прво треба да представе” или „Како могу да усмерим заједничку дискусију идеја ученика?” Неки од одговора на оваква питања могу бити састављени у фази планирања часа, али неки и не. (Shimizu, 1999)

**Neriage.** У конструктивном приступу решавања проблема, јапански наставници математике истичу да је једна од најважнијих улога наставника у току наставе да олакша дискусију након што сваки ученик дође до решења. Када наставник представља проблем ученицима без давања решења, природно је да ће ученици доћи до неколико различитих решења. Тако уџбеници приказују примере типичних ученичких приступа и идеја. Због циља конструктивног решавања проблема, идеја је да се код ученика развије разумевање математичких вештина и процедура, а од наставника се очекује да олакша математичку дискусију ученицима како би потигли овај циљ. У Јапану се често оваква дискусија назива Neriage. Термин Neriage описује динамичност и сарадњу у целокупној дискусији током часа. На јапанском, термин Neriage значи обликовање или дотеривање нечега. У контексту наставе, користи се као метафора за обликовање идеја ученика и развијање математичких

идеја кроз дискусију у целом одељењу. Да би то постигли, наставницима је потребан јасан план за дискусију, као део својих планова наставе, која ће предвидети низ решења које би њихови ученици могли исказати у дискусији. Ова предвиђења решења ће обухватити не само најефикасније методе, већ и оне које су проузроковале неспоразуме код ученика. Таква очекивана ученичка методска решења су значајан део за планирање наставе јапанских наставника. Јапански наставници сматрају Neriage као узрок за успех или неуспех часа. (Shimizu, 1999)

На основу запажања наставника током Kikan – shido, он или она пажљиво прозивају ученике одређеним редоследом да представе своје начине решења на табли. Веома је важно подстицати оне ученике који не дођу до тачних решења и охрабривати их за приказивање њихових математичких идеја. Некада се чак и нетачни приступи или грешке могу излагати ако наставник сматра да би то било корисно за разред. Један од ученика презентује своје идеје на табли, док остали пореде и праве разлике усменим путем. Улога наставника је да не укаже на најбоље решење, већ да усмерава дискусију ка постизању заједничких идеја.

**Matome.** Јапански израз Matome значи сумирати. Јапански наставници сматрају да је ова фаза неопходна за успешну лекцију. Пред крај часа, наставник често завршава лекцију тако што подвуче све другачије приступе и идеје како би се извукло нешто заједничко. Matome фаза идентификује критичне разлике између САД и јапанских активности у учионици (Fujii, Kumagi, Shimizu & Sugiyama, 1998). Према подацима америчко - јапанских компаративних анализа, у Matome фази јапански наставници теже да донесу коначан и опрезан коментар о раду ученика по питању математичке сложености. (Shimizu, 1999)

Генерално, у Matome фази наставник анализира разговоре ученика током целокупне дискусије и сумира оно што су научили током часа.

#### 4.2.3. Нагласак на вежбању пред таблом (Bansho)

Једна од значајних карактеристика јапанске математичке наставе је употреба математичких израза, фигура и дијаграма приказаних на великој табли (Jerry P. Backer, Simer, Kantowski, Travers & Wilson, 1990; J. Stigler & Hielbert, 1999). Јапанске учионице су опремљене са великим таблама. Yoshida (2005) на следећи начин сумира како јапански наставници користе таблу у току часова математике:

- воде евиденцију о часу
- помажу ученицима да се подсети шта им је потребно да ураде и о чему да размишљају
- помажу ученицима да уоче везу између различитих делова лекције и корака у лекцији
- служи им за упоређивање, разликовање и дискутовање идеја које ученици износе
- помажу ученицима на који начин да размишљају и како да открију нове идеје
- подстичу организовање ученичких бележака кроз вештину моделовања која представља добру организацију.

Дискусија која пореди и спаја неколико различитих метода решења захтева од ученика не само да се разјасни идеја која стоји иза сваке методе, већ и оправдава адекватност сваког од њих. Такође је важно испитати исправност сваке методе. Да би се олакшала таква дискусија, јапански наставници користе таблу као визуелну помоћ за ученике који учествују у дискусији пред целим разредом, с обзиром на ниво ученичког схватања математике, као и њихове комуникацијске вештине (слика 4). Оваква табла је постала важна за наставнике како би боље напредовали у самој настави. Јапански наставници користе за њу посебан термин Bansho, уз помоћ које разговарају о питањима које се односе на вештине писања на табли. Тако је, развијање плана за коришћење табле међу главним компонентама планирања наставе. У ствари, неке школе одабирају развијање способности наставника за ефикасно коришћење табле као школски циљ приликом обављања развоја професионалних школа. (Takahashi)



Слика 4. Употреба табле (Bansho)

### 4.3. Мале групе налик на породице

У својим малим групама налик породицама, ученици јапанске основне школе раде, играју се и друже свакодневно. Ове фиксне групе (хан) од око четворо деце, које се могу наћи у јапанским основним школама, се знатно разликују од група које се налазе у америчким основним школама. Сваки хан обухвата децу са различитим способностима и личним квалитетима, која заједно обављају широк спектар активности, од уметничких пројеката до научних експеримената и заједничког ручка. Јапански наставници често пореде ове групе са породицама, а исте групе се одржавају заједно у просеку два месеца у основној школи. (Jacobs & Morita, 2011)

Када свака група научи да ради заједно, цео разред почиње да глатко функционише. По речима једног учитеља, „Све је лакше када имате групе, јер свака група пружа ред.” Сматра се да је добра група она која добро ради заједно и има *matomari* (кохезивност, или осећај јединства). Са таквим групама разред може без бојазни да иде на излете у природу, ручак ван учионице или да предузима компликовани научни експеримент.

Наставници у Јапану дизајнирају групе на начин који подстиче развој детета и држе се следећег: „Трудим се да саставим несигурно дете са дететом које воли да брине о другима, великодушно дете са стидљивим дететом”. Наставници, такође напомињу да расподељују децу различитих способности по групама, тако да деца имају непосредан приступ другом детету које би могло да чита, објасни математику или је добар у спорту. Јапански наставници, знајући да ће вероватно бити са децом неколико година, су високо мотивисани да разумеју способност и проблеме сваког детета, и да развијају стратегију за одговор сваком детету. (Jacobs & Morita, 2011)

Јапански наставници у току својих предавања често мењају активности, методе и наставна средства. Честа промена активности у току предавања служе двонаменски. Нуди различите путеве учења, и одржава дењу пажњу. Нека деца могу да уче боље кроз дискусију; другој се може помоћи употребом конкретних објеката. Различити и коренити приступи могу да помогну оне који споро уче. Они који брзо уче могу да схвате велики износ прегледа али и за њих се верује да имају користи од излагања многим аспектима наставног плана основне математике.

Кохерентност лекција и различитост наставних техника које користе јапански наставници доприносе успеху цело разредног приступа. Ово помаже да се креира интегритет часа, централни концепт у јапанском наставном програму. Сваки час није посвећен просто дискусији о одређеном питању предмета него је конструисан око концепта значајне лекције. Циљ сваке лекције јесте да презентује конхерентну, интегрисану информацију о специфичном концепту или теми. Као било која добра прича, лекције су посвећене развоју серија логички међусобно повезаних тема.

Када деца почну да се баве неважним активностима изнад теме, наставник прво покушава да усмери њихову пажњу назад на лекцију започињањем другачијег типа активности пре него мењањем теме или грдњом на њих.

Школску математику могу радити успешно сви ученици, само ако то желе. Често је та жеља у уској вези са увиђењем користи од ње, са њеном практичном применом. Децу треба упућивати да воде рачуна о својим приходима и расходима, да правилно употребљавају новац, да мере површине стана, учионице, дворишта итд. Где год је то

могуће, уместо измишљених проблема треба употребљавати практичне. При формирању многих математичких правила деца не смеју остати при убеђивању да се она уче „реда ради”, већ да их уче ради примене. На тај начин деца ће се заинтересовати за њихово усвајање. (Дејић & Егерић, 2007)

## **5. Упоредни системи математичког образовања у Јапану и Америци**

Наставници математике и у Америци и Јапану стално трагају за новим методама које ће унапредити наставу.

На основу резултата неколико великих међународних студија о предавању математике, сада је познато како Американци и Јапанци предају математику и које су неке од критичних разлика између метода предавања у ове две земље (пр. Stevenson & Stigler, 1992; Stigler, Gonyales, Kawanaka, Knoll & Serrano, 1999).

Резултати указују на то да амерички наставници можда имају више образовно одобрених начина за предавање математике; међутим, јапански наставници имају детаљнију и широко подељенију теорију о томе како се учи ефикасно.

Иако је јапанско конструктивно решавање проблема под утицајем америчког истраживања о решавању проблема, то није исто што и решавање проблема и приступ настави који се користи у САД. У САД решавање проблема се често посматра као приступ да се развије решавање проблема кроз вештине и стратегије. Настава математике у Америци укључује приступ решавања проблема који је обично усмерен на процес решавања проблема, а не неопходно фокусирање на развијање математичких концепата и вештина. Овакво решавање проблема на часу често се завршава када сваки ученик дође до решења проблема. У Јапану, на другој страни, решавање проблема се често посматра као моћни приступ за развој математичких концепата и вештина. Јапански наставници користе проблем решавања не само за часове који се фокусирају на развијање вештина решавања проблема и стратегија, већ и распрострањеност наставног плана и програма у циљу развијања математичких концепата, вештина и процедура.

Јапански ученици нису паметнији него што су ученици на другим местима, мада несумњиво раде напорније. Американци иду у школу у просеку 178 дана годишње насупротив 200 дана у Јапану (Raporort, 1989). Јапански ученици иду у школу од понедељка до суботе, с тим што суботом иду пола дана. Просечан број ученика у разреду је

четрдесет, и они бораве у истој учионици по цео дан, док различити наставници долазе. Наставни план и програм и уџбеници су национално стандардизовани од стране Министарства просвете, тако да сваки ученик проучава исте материјале (Sudo, 1989).

Јапански математички програм у многome се разликује од америчког програма. Теме из основних разреда се не понављају. Алгебра и геометрија су главни фокус јуниорског високог програма. Већи део наставе математике који се у САД-у учи у деветом и десетом разреду је научено у осмом и деветом разреду у Јапану, укључујући и вероватноћу и статистику и добар део геометрије. (Mastrull, 2002)

Као што је већ речено, групе у јапанским основним школама су налик породицама: оне садрже децу различитих способности, који остану заједно дуго времена и прођу широк спектар активности, од спорта до уметности и академских часова. Насупрот томе, групе у америчким школама су чешће поларне: оне привремено удружују децу одређеног нивоа вештине да би постигли одређени задатак (нпр. читање или математика). Студија 1999. која је обухватила 24 основне школе у шест округа широм САД је утврдила да 60% од 472 наставника групишу своју децу за читање, а 72% од њих групише децу по способности (Развојни центар студије, 1992).

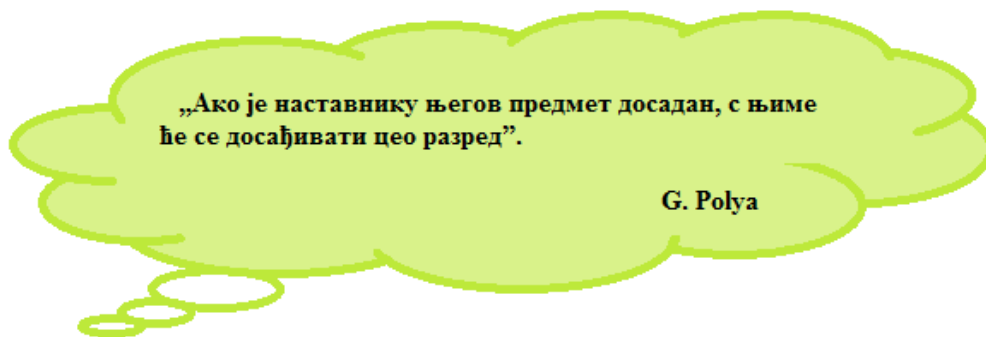
Јапанске школе су организоване, као породица тако да промовишу развој деце у свим областима (социјални, интелектуални, емоционални, итд), док су америчке школе организоване, као фабрике, пре свега да производе одређене циљане „производе” (у овом случају, академске вештине). Јапански наставници, за разлику од америчких, сматрају да су индивидуалне разлике међу ученицима битне за ефективно предавање. Они користе информације које су они и други наставници забележили о одговорима ученика о посебним проблемима и питањима.

Јапански наставници стижу у школу око осам ујутро и остају у школи 8 до 9 сати дневно. Амерички наставници обично стижу до 8:30 и одлазе након 6 и по сати. Јапански наставници проводе више времена у школи, они заправо предају између 25 и 29 сати недељно, или нешто више од 4 часа дневно у току 5 и по дана недељно, насупрот америчким наставницима, који проводе већину њиховог времена у школи сами радећи у њиховим сопственим учионицама.

Енергија и вештина коју јапански наставници уносе на њихову наставу су већим делом захваљујући могућности које имају у школи за интеракцију са другим наставницима, припрему лекција, рад са појединим ученицима, и корекцију радова.

## Пажња

Јапански ученици обраћају пажњу на наставнике или на задатке за које су задужени отприлике 80% времена. У Америци деца су пажљива само 60% времена. Можда најважније, организација јапанског часа и инструкционални приступи које користе јапански наставници вероватније ће да обузму децју пажњу и да усмере њихове активности него када су мање добро организовани приступи много америчких наставника.



Као што пише у цитату изнад, немогуће је да се одржава децја пажња ако је лекција досадна и неинтересантна. Јапански наставници знају ово и користе различите стратегије да задрже децју пажњу.

Иако се свака тема учи полако, ово не води у досадно, понављајуће подучавање.

## 5.1 Процене снимљених часова математике од стране јапанских и америчких наставника

Америчко предавање је снимљено у Чикагу, Илиносу, а јапанско предавање је снимљено у Нигану, Јапан. Оба предавања су се фокусирали на увод у проналажење формуле за површину троугла. Ова предавања била су снимљена као део посебног пројекта истраживања разлика у учioniци између америчких и јапанских предавања из математике у основној школи. Кратак преглед сваке лекције дат је испод као и у Табели 1. (Jacobs & Morita, 2011)

**Табела 1** - Преглед јапанских и америчких предавања о налажењу површине троугла

| Сегмент                   | Дужина (мин) | Опис                                                                                                         |
|---------------------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Јапанско предавање</b> |              |                                                                                                              |
| 1                         | 3.5          | Презентација проблема                                                                                        |
| 2                         | 14.5         | Покушаји ученика да реше проблем на сопствени начин                                                          |
| 3                         | 29.0         | Дискусија на нивоу разреда о решењима до којих су ученици дошли, наставник води дискусију до коначне формуле |
| 4                         | 5.0          | Рад на следећим практичним проблемима из књиге (ученици раде сами)                                           |
| Укупно                    | <b>52.0</b>  |                                                                                                              |
| <b>Америчко предавање</b> |              |                                                                                                              |
| 1                         | 1.0          | Обнављање обима                                                                                              |
| 2                         | 8.0          | Површина правоугаоника: објашњење, формула и практични проблеми                                              |
| 3                         | 25.0         | Површина троугла: објашњење, формула и практични проблеми                                                    |
| 4                         | 11.0         | Ученици су почели са домаћим задатком: наставник шета околу и помаже им                                      |
| Укупно                    | <b>45.0</b>  |                                                                                                              |

У америчком предавању, наставник почиње са кратким обнављањем обима, а онда долази до површине правоугаоника бројањем квадратних јединица. Он даје ученицима формулу за површину правоугаоника и ради неколико примера користећи формулу. Наставник завршава поделу на квадратне јединице и објашњава да је тешко израчунати број квадратних јединица код троуглова. Користећи поделе, он демонстрира формирање

правоугаоника када се два идентична троугла комбинују - прво са правоуглим троугловима, а онда са неправоуглим троугловима пресеченим на неколико делова. Ово води до формуле за површину троугла ( $\frac{1}{2}$  страница пута висина), а ученици раде неколико примера користећи формулу. Коначно, ученици почињу да раде домаћи задатак на часу, који се састоји од израчунавања површина различитих правоугаоника и троуглова користећи две формуле.



Слика 5. Америчка идеална скрипта за америчко предавање

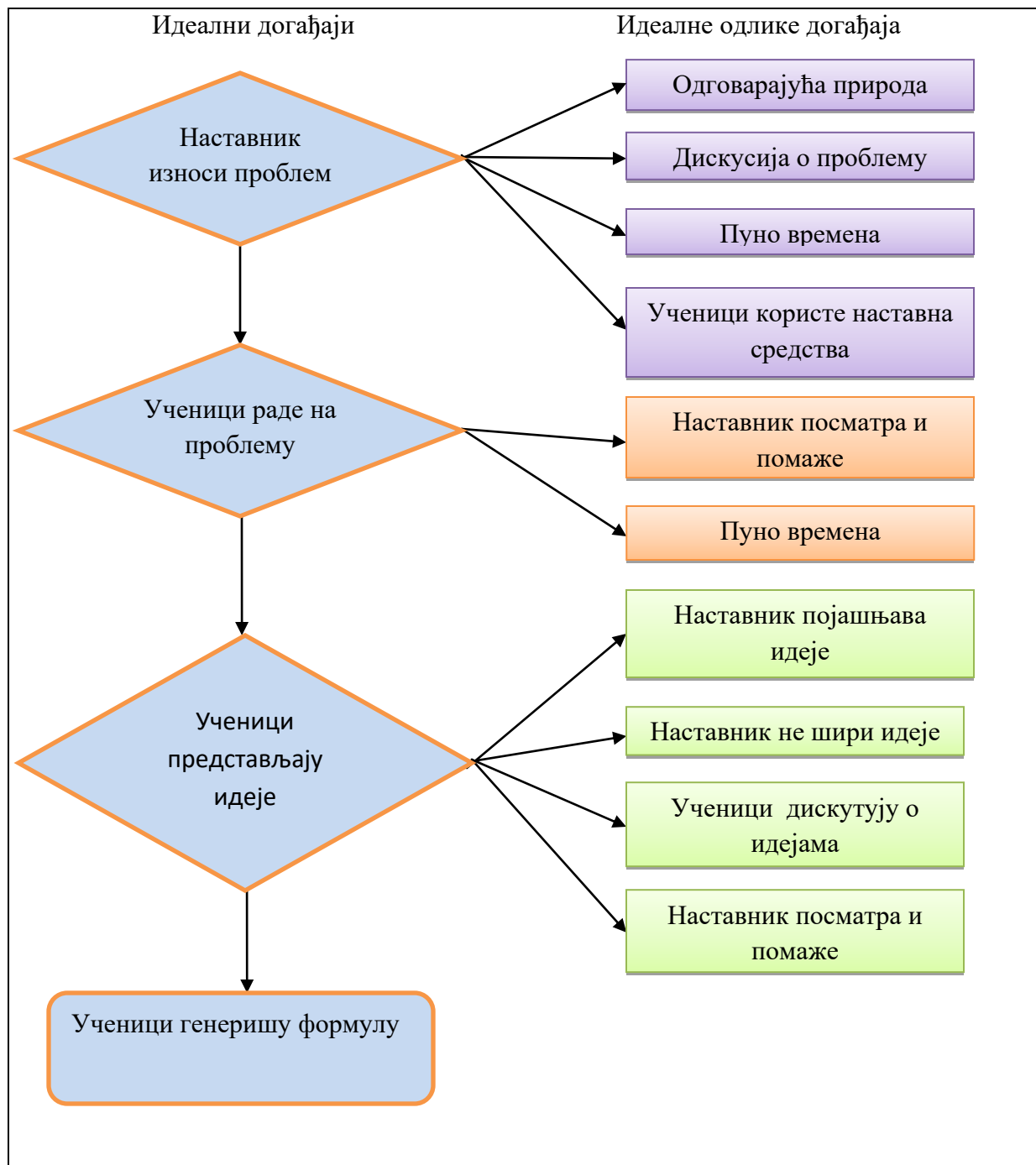
Овакав распоред активности, као у табели 1, је прототип јапанских предавања која су посматрана. Наставник скоро увек започиње час постављањем проблема, и остатак

предавања је оријентисан ка разумевању и решавању тог проблема. Посматрано јапанско предавање почиње тако што наставник пита ученике које врсте троуглова су научили до сада. Ученици набрајају једнакокране, једнакостраничне и правоугле троуглове, а наставник ставља папирну верзију сваке врсте на таблу. Он говори деци да је њихов задатак да мисле о томе како наћи површину било којег троугла, а онда дели троуглове од папира, као што су они на табли заједно са маказама и лепком. Наставник напомиње студентима да могу сећи, савијати и цртати. (Jacobs & Morita, 2011)

Ученици затим 14,5 минута раде самостално на својим местима, док наставник записује шта свако дете ради. Ученици су у овом делу часа активно укључени, и мада нису званично подељени у групе, постији дискусија и интеракција међу ученицима који седе близу једни других.

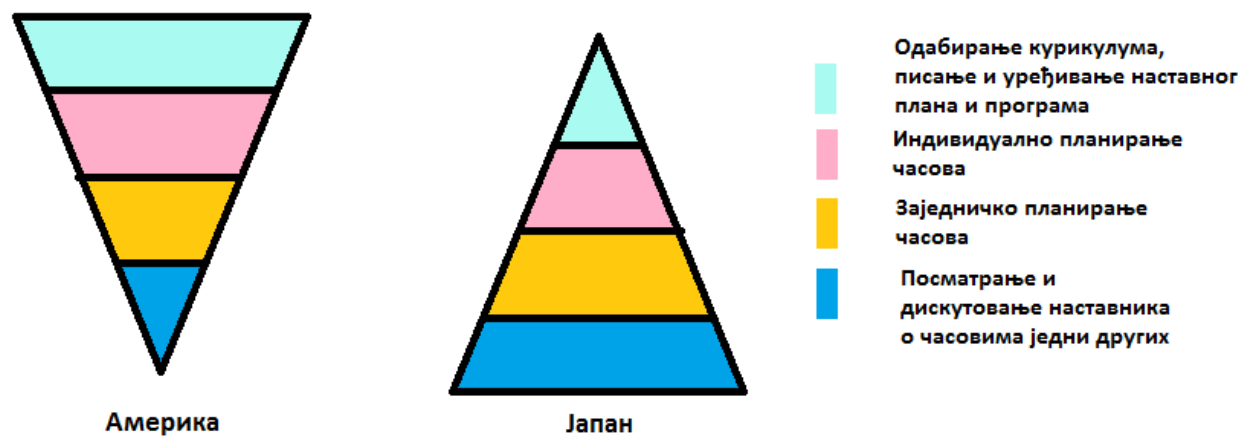
У наредних 29 минута ученици се позивају испред табле да покажу и објасне своја решења. Коначно, наставник пита децу да сумирају све њихове стратегије решења и ученици генеришу формулу „ $\frac{1}{2}$  страница пута висина“.

Ученици проводе задњи део часа (5 минута) на својим местима радећи на проблемима из уџбеника, рачунају површину различитих троуглова користећи формулу.



Слика 6. Идеална скрипта јапанских наставника за јапанско предавање

### Наставничке активности за унапређивање наставе



Слика 7. Активности америчких и јапанских наставника за унапређивање наставе

## 6. Резултати TIMSS истраживања

Истраживање TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) представља међународно истраживање образовних постигнућа ученика основних школа из области математике и природних наука.

Налази TIMSS студија јасно указују на значајне разлике у организацији наставе математике у Јапану и Америци. TIMSS студије из 1999 такође анализирају уџбенике који се користе у тридесет осам земаља. Стандардни уџбеници осмог разреда у Америци покривају више од 35 тема у поређењу са мање од десет тема у Јапану.

TIMSS истраживачи су снимили бројна предавања у САД и Јапану и добили су следеће статистичке податке:

- ✿ Амерички ученици проведу у просеку 143 школска часа учећи математику. У Јапану та цифра је 117 часова.
- ✿ У 96% америчких математичких часова ученици вежбају поступак решавања проблема, у односу на 46% у Јапану. У само 1% америчких математичких часова ученици формулишу решења проблема сами, у поређењу са 44% у Јапану.
- ✿ 0% од снимљених часова математике у осмом разреду у САД имали су случајеве дедуктивног мишљења, наспрам 61% јапанских часова. У САД настава је испрекидана 28% времена, у поређењу са само 2% у Јапану.
- ✿ Уџбеници су током часа коришћени у скоро половини америчких предавања, а само у 2% јапанских предавања (у Јапану уџбеници се користе за домаћи).
- ✿ Учење вештина, као што је решити одређени проблем, или коришћење стандардне формуле наведен је као циљ за око 60% америчких наставника математике, у поређењу са 27% јапанских наставника. (Jones, 1997; Mastrull, 2002)

Зато, од 38 испитиваних народа, Јапан је трећи, док су САД рангиране на 28. месту у резултатима осмог разреда у математичким постигнућима.

Преглед поређења приступа у настави математике између америчких и јапанских учионица математике, на основу истраживања TIMSS студија приказаних видео снимцима, на следећи начин:

**Табела 2.** *Стандардни план и програм предвиђен за курс математике за девети разред у америчким и јапанским школама*

| Стандардни план и програм предвиђен за курс математике за девети разред америчке школе | Стандардни план и програм предвиђен за курс математике за девети разред јапанске школе |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| разред са скупом сличних могућности                                                    | са мешовитим могућностима разреда                                                      |
| заснива на уџбенику                                                                    | почиње са сложеним проблемом                                                           |
| фокусира се на развој математичких вештина                                             | фокусира се на развој математичког размишљања                                          |
| највише слободног времена посвећују вежбању рутинских процедура                        | највише времена посвећују математичком расуђивању и разумевању                         |
| карактеристике посебних задатака                                                       | уочавају експлицитне везе између појмова                                               |

Претходна табела јасно указује на податке који су приказани у поглављу упоредни системи у Јапану и Америци. (Jones, 1997)

**Табела 3. – TIMSS рангирање Јапана и САД за 4. и 8. разред**

| Разред и Тема               | Јапан<br>(Ранг/Број земаља учесница) | САД<br>(Ранг/Број земаља учесница) |
|-----------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| 4.разред<br>Математика      | 3/26                                 | 12/26                              |
| 4. разред<br>Природне науке | 2/26                                 | 3/26                               |
| 8. разред<br>Математика     | 3/41                                 | 28/41                              |
| 8. разред<br>Природне науке | 3/41                                 | 17/41                              |

**Табела 4. – Просечни математички садржаји и когнитивни домени за резултате 8. разреда по земљама 2007. године**

| Држава              | Садржајни домени |         |            |                      | Когнитивни домени |         |            |
|---------------------|------------------|---------|------------|----------------------|-------------------|---------|------------|
|                     | Бројеви          | Алгебра | Геометрија | Подаци и вероватноћа | Познавање градива | Примена | Резоновање |
| TIMSS скала процене | 500              | 500     | 500        | 500                  | 500               | 500     | 500        |
| Кинески Тајпех      | 577              | 617     | 592        | 566                  | 594               | 592     | 591        |
| Кореја              | 583              | 596     | 587        | 580                  | 596               | 595     | 579        |

|            |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Сингапур   | 597 | 579 | 578 | 574 | 581 | 593 | 579 |
| Хонг Конг  | 567 | 565 | 570 | 549 | 574 | 569 | 557 |
| Јапан      | 551 | 559 | 573 | 573 | 560 | 565 | 568 |
| Мађарска   | 517 | 503 | 508 | 524 | 518 | 513 | 513 |
| Енглеска   | 510 | 492 | 510 | 547 | 503 | 514 | 518 |
| Русија     | 507 | 518 | 510 | 487 | 521 | 510 | 497 |
| Америка    | 510 | 501 | 480 | 531 | 514 | 503 | 505 |
| Литванија  | 506 | 483 | 507 | 523 | 508 | 511 | 486 |
| Чешка      | 511 | 484 | 498 | 512 | 502 | 504 | 500 |
| Словенија  | 502 | 488 | 499 | 511 | 500 | 503 | 496 |
| Јерменија  | 492 | 532 | 493 | 427 | 507 | 493 | 489 |
| Аустралија | 503 | 471 | 487 | 525 | 487 | 500 | 502 |
| Шведска    | 507 | 456 | 472 | 526 | 478 | 497 | 490 |
| Малта      | 496 | 473 | 495 | 487 | 490 | 492 | 475 |
| Шкотска    | 489 | 467 | 468 | 517 | 481 | 489 | 495 |
| Србија     | 478 | 500 | 486 | 458 | 500 | 478 | 474 |
| Италија    | 478 | 460 | 490 | 491 | 476 | 483 | 483 |
| Малезија   | 491 | 454 | 477 | 469 | 477 | 478 | 468 |
| Норвешка   | 488 | 425 | 459 | 505 | 458 | 477 | 475 |
| Кипар      | 464 | 468 | 458 | 464 | 468 | 465 | 461 |
| Бугарска   | 458 | 476 | 468 | 440 | 477 | 458 | 455 |
| Украјина   | 460 | 464 | 467 | 458 | 471 | 464 | 445 |
| Румунија   | 457 | 478 | 466 | 429 | 470 | 462 | 449 |

|                        |     |     |     |     |     |     |      |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Израел                 | 469 | 470 | 436 | 465 | 473 | 456 | 462  |
| Босна и<br>Херцеговина | 451 | 475 | 451 | 437 | 478 | 440 | 452  |
| Либан                  | 454 | 465 | 462 | 407 | 464 | 448 | 429  |
| Тајланд                | 444 | 433 | 442 | 453 | 436 | 446 | 456  |
| Турска                 | 429 | 440 | 411 | 445 | 439 | 425 | 441  |
| Јордан                 | 416 | 448 | 436 | 425 | 432 | 422 | 440  |
| Тунис                  | 425 | 423 | 437 | 411 | 421 | 423 | 425  |
| Грузија                | 421 | 421 | 409 | 373 | 427 | 401 | 389  |
| Иран                   | 395 | 408 | 423 | 415 | 403 | 402 | 427  |
| Бахреин                | 388 | 403 | 412 | 418 | 395 | 403 | 413  |
| Индонезија             | 399 | 405 | 395 | 402 | 397 | 398 | 405  |
| Сирија                 | 393 | 406 | 417 | 387 | 393 | 401 | 396  |
| Египат                 | 393 | 409 | 406 | 384 | 392 | 393 | -396 |
| Алжир                  | 403 | 349 | 432 | 371 | 371 | 412 | -    |
| Колумбија              | 369 | 390 | 371 | 405 | 364 | 384 | 416  |
| Оман                   | 363 | 391 | 387 | 389 | 372 | 368 | 397  |
| Палестина              | 366 | 382 | 388 | 371 | 365 | 371 | 381  |
| Боцвана                | 366 | 394 | 325 | 384 | 376 | 351 | -    |
| Кувајт                 | 347 | 354 | 385 | 366 | 347 | 361 | -    |
| Ел Салвадор            | 355 | 331 | 318 | 362 | 336 | 347 | -    |
| Саудијска<br>Арабија   | 309 | 344 | 359 | 348 | 308 | 335 | -    |
| Гана                   | 310 | 358 | 275 | 321 | 313 | 297 | -    |

|       |     |     |     |     |     |     |   |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| Катар | 334 | 312 | 301 | 305 | 307 | 305 | - |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|

У табели 4., приказана су укупна постигнућа земаља учесница осмог разреда, док табела 3. приказује међународна постигнућа из математике и природних наука, конкретно упоређивање јапанских и америчких ученика.

Резултати TIMSS истраживања показују да амерички четврти разреди, за разлику од математике, имају боље резултате у природним наукама. Насупрот томе, Јапан остаје доследан на врху у међународним истраживањима математике и природних наука. Упркос томе што амерички ученици проводе више времена месечно на часовима математике и поставља им се више домаћих задатака, јапански ученици раде знатно боље и ефикасније.

## 7. Пример јапанског часа математике у Србији

Описаћу „јапански“ час који сам одржала у Основној школи „Мирослав Антић“ у Београду. Час је одржан у шестом разреду. Наставна јединица коју сам обрађивала на часу била је „Унутрашњи и спољашњи углови четвороугла“. На часу је коришћен следећи наставни материјал: хамер папир, колаж папир, креде, картице са задацима, лепак, маказе, маркери, селотејп, фломастери, шестар, угломер. Час је трајао шездесет минута. На часу су присуствовали директор школе, заменик директора, психолог школе и наставница математике која предаје овом одељењу.

У уводном делу часа, који је трајао пет минута, поделила сам ученике на пет група уједначених способности. Објаснила сам им да ће на овом часу учити кроз игру и такмичење. Задатак ученика је био да уоче одређена својства о унутрашњим и спољашњим угловима четвороугла. Потребно је било урадити дате задатке, који ће се бодовати и на крају ће бити проглашена победничка група. Свакој групи сам поделила по два конвексна и два неконвексна четвороугла од колаж папира, и хамер папир на коме ће решавати задатке.

Главни део часа трајао је педесет минута. Прва етапа у такмичењу била је квиз знања. Свакој групи сам поставила по два различита питања. Питања су била везана за лекције које су обрађивали на претходним часовима са циљем да се подсети претходног градива и уведу у наставну јединицу коју сам обрађивала. За сваки тачан одговор група је добијала по један поен. Одговор је могао дати било који члан групе којој је питање било намењено. Док је једна група одговарала на питања ученици из осталих група су слушали, утврђивали да ли су одговори тачни, и ако је било потребно исправљали су нетачне одговоре. Тако је нека група могла добити додатне поене.

Квиз је садржао следећа питања:

1. Колики је збир унутрашњих углова троугла, а колики је збир спољашњих углова?
2. Колики је збир унутрашњег угла троугла и њему одговарајућег спољашњег?
3. Шта је четвороугао?
4. Набројати његове елементе.

5. Шта је угао?
6. Шта су суседни углови четвороугла?
7. Шта је дијагонала четвороугла?
8. Шта је конвексан четвороугао?
9. Шта су наспрамни углови четвороугла?
10. Да ли суседна темена четвороугла одређују дијагонали? Зашто?

Углавном су групе тачно одговориле на постављена питања, и свака група је добила поене у квизу. Једна група је погрешно одговорила на једно питање, па је друга група уместо њих дала тачан одговор и тако добила додатни поен.

Друга етапа у главном делу часа била је рад на задацима. Групе су добијале један по један задатак који су били исти за све групе. Циљ је био да група уради задатке што пре. Када су урадили дати задатак, ученици су ме обавештавали да су завршили и ја сам проверавала тачност решења и давала групи следећи задатак. Такође сам нагласила ученицима да све што раде уредно пишу на хамер папиру, јер ће на крају излагати своја решења на табли.

Списак задатака које су ученици требали урадити:

- 1) Један конвексан и један неконвексан четвороугао залепити на хамер папир и обележити њихове елементе.
- 2) Утврдити колики је збир унутрашњих углова датог четвороугла. То утврдити на бар два различита начина. И записати те начине на хамер папиру.
- 3) Наведите још неке начине помоћу којих можемо утврдити збир унутрашњих углова овог четвороугла.
- 4) Ако смо утврдили колики је збир унутрашњих углова датог четвороугла, да ли можемо тврдити да то важи за сваки четвороугао? И зашто? Одговор образложити и записати на хамер папиру.
- 5) Формулисати теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла и доказати је.  
(Упутство за доказ: нацртати произвољан четвороугао на хамер папиру, обележити његове елементе и нацртати дијагонали тог четвороугла.)
- 6) Утврдити колики је збир спољашњих углова датог четвороугла од колаж папира. И све записати на хамер папиру.

7) Формулисати теорему о збиру спољашњих углова четвороугла и доказати је.

(Упутство за доказ: сетити се како смо доказали теорему о збиру спољашњих углова троугла, и искористити дати четвороугао за проверу.)

8) Све што сте написали и нацртали на хамер папиру препишите у школске свеске.

Ученици су прво залепили два четвороугла на хамер папиру и обележили елементе четвороуглова. Затим су почели да траже начине помоћу којих би утврдили збир унутрашњих углова четвороугла. Углавном су ученици дошли до идеје да измере углове угломером па да их саберу, и да отцепе углове датог четвороугла а затим их надовежу и залепе један до другог, и тако добију круг. На основу тога су закључили да је збир унутрашњих углова четвороугла  $360^\circ$ . Неки ученици су се сетили да углове могу конструктивно пренети и сабрати и тако добити збир. Било је и идеја, које су само поменули, да од укупног збира унутрашњих и спољашњих углова одузму спољашње углове.

Код четвртог задатка ученици су имали различита мишљења. Неки ученици су сматрали да на основу једног четвороугла могу тврдити колики је збир унутрашњих углова произвољног четвороугла, док су други ученици закључили да не могу тврдити исто на основу само једног четвороугла. Наводила сам их на одговор да мора постојати неко правило или теорема на основу ког можемо тврдити да важи за све четвороуглове. Једна група је дала одговор да су утврдили збир унутрашњих углова и конвексног и неконвексног четвороугла, и добили су исти збир, па су на основу тога тврдили да важи за све.

У петом задатку ученици су требали формулисати теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла и доказати је. Дobili су упутство да нацртају дијагоналу четвороугла. Уз помоћ упутства три групе су самостално доказале теорему, одмах су се сетили да је четвороугао дијагоналом подељен на два троугла, и да је збир унутрашњих углова троугла  $180^\circ$ . Уочили су да је угао четвороугла подељен дијагоналом на два угла, који припадају различитим троугловима. И када су сабрали углове оба троугла добили су збир унутрашњих углова четвороугла. Остале две групе сам наводила да уоче на шта је подељен четвороугао дијагоналом, и шта знају за унутрашње углове троугла. Па су и они доказали теорему.

У шестом задатку ученици су имали сличне идеје као за унутрашње углове. Неки су угломером измерили углове, али су се и сетили да их могу конструктивно пренети и сабрати. Једна група се сетила да је збир унутрашњег угла четвороугла и њему одговарајућег спољашњег угла  $180^\circ$ . И тако су утврдили да је збир спољашњих углова датих четвороуглова  $360^\circ$ .

Седми задатак су две групе решиле без помоћи наставника. Одмах су се досетили да је збир унутрашњег угла четвороугла и њему одговарајућег спољашњег угла  $180^\circ$ . Па су користили чињеницу да меру спољашњег угла добијамо када од  $180^\circ$  одузмемо њему одговарајући унутрашњи угао. И када саберу све спољашње углове добијају збир  $360^\circ$ . Једној групи сам помогла да се присете правила за збир унутрашњег и спољашњег угла, као и осталим двема групама, којима је била потребна детаљнија помоћ. Требала сам их и навести како да искористе то правило.

Затим су ученици у школским свескама записали све оно што су писали на пануу. За сваки тачно урађен задатак групе су добиле по један поен. Док су ученици вредно радили задатке ја сам их обилазила, пратила њихов рад и давала упутства групама које нису могле самостално да реше сваки задатак.

Након свих урађених задатака, групе су бирале представника који је презентовао решење своје групе на табли, за одређени задатак.



Ученици су на табли презентовали различите начине на основу којих су утврдили колики је збир унутрашњих углова датих четвороуглова, затим су на табли доказивали теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла, и на крају теорему о збиру спољашњих углова. У току решавања задатака забележила сам која је група прва тачно урадила одређени задатак, па су представници тих група решавали задатке на табли. Док је једна група презентовала своје решење задатка, остале групе су слушале, и могле су допунити оно што није речено. Ученици су пажљиво слушали ученика који је решавао задатак на табли. Групе су добијале одговарајући број поена за презентације. Доказивање теорема носило је највише поена. Ученици су били веома активни на часу, добро мотивисани и заинтересовани за проналажење различитих решења задатака. Међу ученицима истих група била је успостављена добра комуникација, заједнички су правили паное и украшавали га. Код ученика је био развијен такмичарски дух, интересовали су се да ли је њихова група прва урадила дати задатак.

Начин бодовања:

- ❖ тачан одговор на питање у квизу – 1 поен
- ❖ исправност тј. урађени сви задаци – 8 поена
- ❖ иновативност тј. пронаћи нови, другачији начин којим се може утврдити збир унутрашњих углова четвороугла – 2 поена
- ❖ естетика паное – 2 поена
- ❖ презентовање различитих начина на основу којих се утврђује збир унутрашњих углова четвороугла – 4 поена
- ❖ доказ теореме о збиру унутрашњих углова – 5 поена
- ❖ доказ теореме о збиру спољашњих углова – 5 поена
- ❖ урађен задатак на табли, у коме се примењује стечено знање – 4 поена
- ❖ излагање ученика на табли – 3 поена

|     | (2)<br>КРИЗ | (2)<br>ИСТРАЖНОСТ | (2)<br>ИЗОБРАЖАВАЈУЋИ | (2)<br>ПАНО | РЕШЕНИЈИ<br>НАЧИНИ<br>ЗА<br>РЕШ (4) | ДОКАЗ<br>ЗА<br>УМЕТ. (5) | ДОКАЗ<br>ЗА<br>СПОЛ. (5) | ПРИМЕР (4) | ПОДАТАКЕ (3) | УКУПНО |
|-----|-------------|-------------------|-----------------------|-------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|------------|--------------|--------|
| I   | 2           | 7                 |                       |             |                                     | 5                        |                          |            | 3            |        |
| II  | 1           | 6                 |                       |             |                                     |                          |                          | 4          | 3            |        |
| III | 3           | 7                 |                       |             |                                     |                          |                          |            |              |        |
| IV  | 2           | 8                 |                       |             |                                     |                          |                          |            |              |        |
| V   | 2           | 7                 |                       |             | 3                                   |                          |                          |            | 3            |        |

Након презентовања решења задатака, ученици су радили примере како би утврдили оно што су научили кроз задатке са картица. Поделила сам свакој групи картице са два иста примера тј. задатка у којима је требало применити теореме о збиру унутрашњих и спољашњих углова.

Пример 1. Дата су три унутрашња угла четвороугла  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 76^\circ$ ,  $\gamma = 123^\circ$ . Одреди преостали угао тог четвороугла.

Пример 2. Дата су три спољашња угла четвороугла  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\beta_1 = 120^\circ$ ,  $\delta_1 = 80^\circ$ . Одреди преостали спољашњи угао тог четвороугла.

Све групе су тачно урадиле примере, разумели су шта се од њих тражи. Када су урадили задатке две одабране групе су радиле задатке на табли, а то су биле групе које нису презентовале своја решења задатака. Ученици из осталих група су пратили рад ученика на табли и исправљали грешке. Групе које су радиле задатке на табли добијале су одговарајући број поена. Након урађених примера на табли сабрала сам поене за сваку групу и прогласила која група је победила.

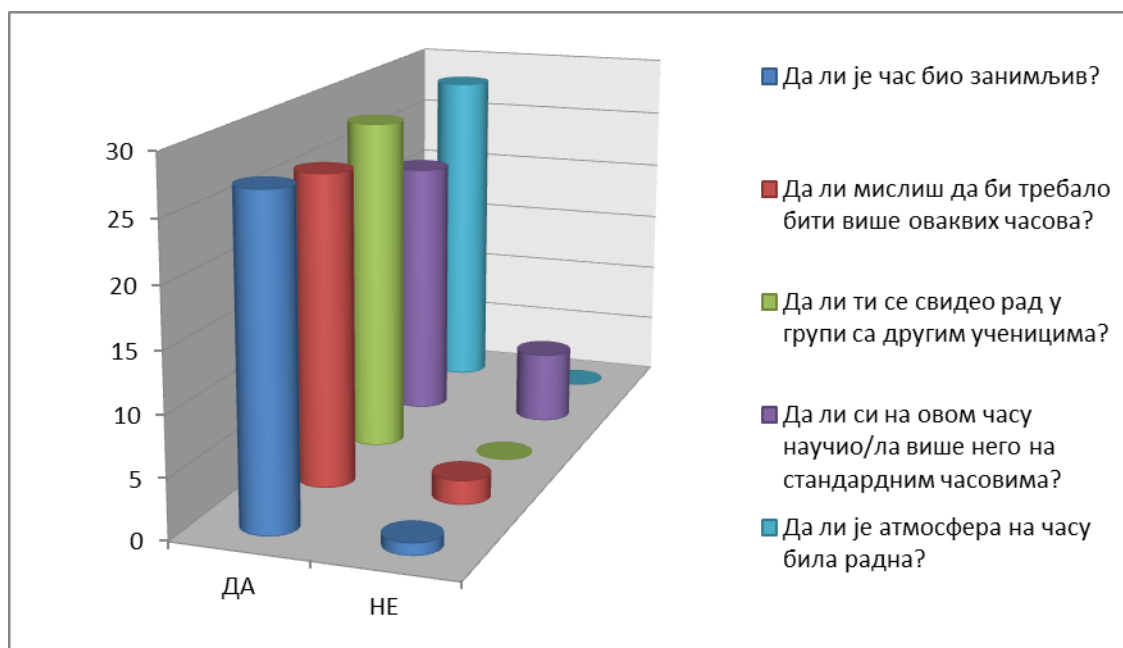
У завршном делу часа, који је трајао пет минута, питала сам групу која је имала најмање поена шта су данас радили на часу, шта су научили, које теореме. И одговорили

су да су то теореме о збиру унутрашњих и спољашњих углова четвороугла. Затим сам задала ученицима домаћи задатак, да ураде пар задатака из збирке.

На крају часа, ученицима сам поделила анкету која је била анонимна. Анкету је попуњавало двадесет осам ученика. Следећа табела и дијаграм приказују питања која је садржала анкета као и резултате ученичких одговора.

**Табела 5. – Резултати анонимне анкете која је дата ученицима шестог разреда**

| Питања                                                                | ДА | НЕ |
|-----------------------------------------------------------------------|----|----|
| 1. Да ли је час био занимљив?                                         | 27 | 1  |
| 2. Да ли мислиш да би требало бити више оваквих часова?               | 26 | 2  |
| 3. Да ли ти се свидео рад у групи са другим ученицима?                | 28 | 0  |
| 4. Да ли си на овом часу научио/ла више него на стандардним часовима? | 22 | 6  |
| 5. Да ли је атмосфера на часу била радна?                             | 28 | 0  |



На првих пет питања ученици су одговарали заокруживањем понуђених одговора: да или не. Анкету је попуњавало двадесет осам ученика. Сви ученици су одговорили позитивно на питање „Да ли ти се свидео рад у групи?” и „Да ли је атмосфера на часу

била радна?“. И на преостала три питања већина ученика је заокружила да. На питање шта су научили на часу, ученици су најчешће одговарали да су научили пуно тога о четвороуглу, да су научили нешто ново што раније нису знали, али нису конкретно написали шта је то ново што су научили. Неки ученици су тачно написали да су научили колики је збир унутрашњих и спољашњих углова четвороугла. Један ученик је одговорио да је научио да се збир унутрашњих и спољашњих углова може израчунати на више начина. Било је и одговора да су научили да раде заједно у групи, да су научили да доказују теореме. Неки ученици су и усмено прокоментарисали да им је час занимљив и да треба бити више оваквих часова.

## **7.1 Завршни коментар на изведен час математике**

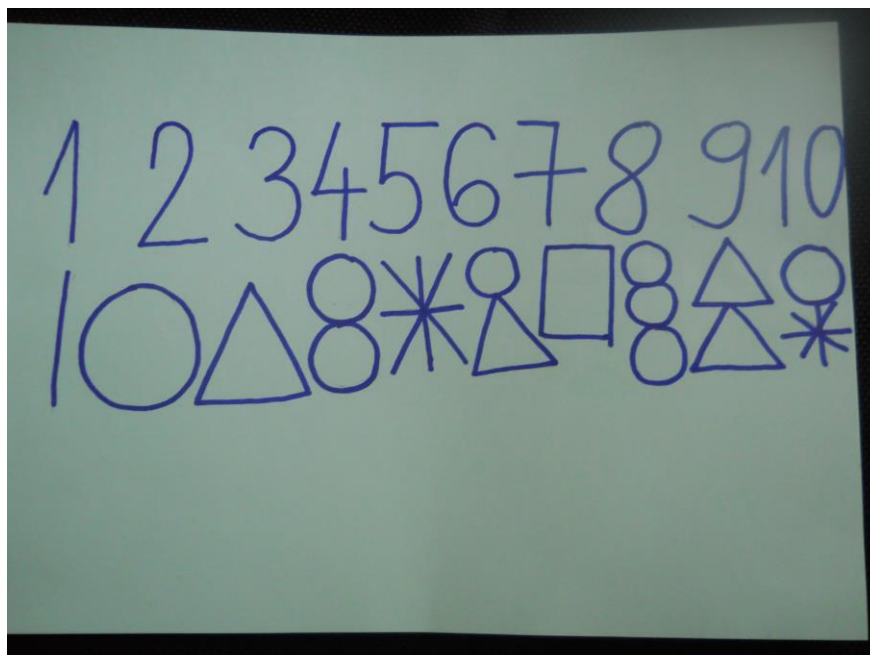
Сматрам да је ученицима час био веома занимљив, да су ученици били мотивисани задацима, и да су чланови свих група били укључени у рад и решавање задатака. Оваквим начином рада ученици развијају логичко мишљење, дедуктивно закључивање (уопштавају правила), закључивање по аналогiji (повезују претходна знања), развијају способности вербалног изражавања и презентовања својих идеја. Резултат оваквог начина организовања часа довео је до побољшања способности ученика за активно учествовање у настави, као и анализе просуђивања туђих одговора.

На крају одржаног часа сагледане су очигледне предности овакве организације часа. Оно што бих истакла као недостатак, а који се може превазићи је била усклађеност времена за решавање задатака и броја ових задатака.

## 8. Пример јапанског часа математике у Јапану

*Тема лекције: прости и сложени бројеви*

Циљ ове математичке лекције је стицање знања о простим и сложеним бројевима. Циљ предавања је да ученици буду способни да уоче број као последицу других бројева. То ће свакако укључити разумевање чињенице да неки бројеви не могу бити производ других бројева осим јединице и њих самих. На пример, број 12 можемо видети као производ бројева 3 и 4. (Miyakawa)



Свака картица има само симболе. Бројеви у горњем дијаграму нису дати. Очекивања наставника везана за решавање задатака су да ученици пронађу правило које ће им омогућити да ураде следећи задатак. Због тога они морају препознати да круг одговара броју 2, троугао броју 3, звезда броју 5, итд. и неки симболи су повезани множењем. Ако ове активности предвиђају „игру“, онда имамо две игре: проналажење јасних правила и проналажење симбола за 11 и 12.

Са тачке гледишта представљања бројева нумеричко, графичко или сликовно представљање су укључени у објашњење. У активностима је предложено смењивање

између нумеричког и графичког представљања. Бројеви који су нумерички представљени нису приказани на картицама, али су откривени у току процеса предавања. Предност графичког представљања је што визуелно приказује структуру броја и систем који се састоји из простих, другим речима, комбиновања простих бројева. Ова тачка је често прекривена нумеричким представљањем. (Miyakawa)

### *Анализа задатка 1: јасна правила*

Први задатак за ученике је само да пронађу јасна правила. У току анализирања правила, направљена је разлика, узимајући у обзир природу исказа, посебно тачност исказа, између „описних правила“ и „претпоставки“.

На пример, следећа правила су описна:

1. Неке картице имају само један симбол док друге имају многоструке симболе.
2. Ако је број велики, број симбола се повећава, са неким изузецима.
3. Јавља се најмање један круг на сваке две картице.
4. Паран број има најмање један круг.
5. Јавља се најмање један троугао на сваке три картице.
6. Бројеви који се множе са три имају најмање један троугао.
7. Прости бројеви увек имају један симбол, не више, и различит од осталих.
8. Сложени бројеви увек имају више од два симбола.

Каснија правила су уопштен исказ која су претпоставка и чија ваљаност може бити проверена у датим картицама. На пример, то су следећа правила:

9. Симбол представља број.
10. Симбол представља прост број.
11. Круг представља број „2“.
12. Троугао представља број „3“.
13. Комбиновање симбола представља множење бројева.

Горе наведена правила су „исправна“ са тачке гледишта очекивања наставника. Такође можемо разматрати „нетачна“ правила. На пример, комбиновање симбола представља сабирање бројева. Постоји и веза између правила у смислу да постоји хијерархија међу њима. Посебно у налажењу и примени правила 13, нека друга правила, као што су правила 9, 11 и 12, морају бити нађена и примењена.

### *Анализа задатка 2*

Други задатак је „игра“ у којој треба графички представити дате бројеве и састоји се од два подзадатка. Први од њих је наћи симбол за број „11“ а други је урадити исто за број „12“. Да би испунили први подзадатак, откривање описног правила броја 7 на основу горње листе натераће ученике да предвиде симбол на једанаестом папирићу и да је то један симбол. За објашњење другог подзадатка неколико правила треба бити употребљено.

Посматрамо приступ за одлучивње о другом подзадатку факторизације датих бројева. Процес одлучивања је следећи:

1. прво факторизовати дати број па „12“ представити нумерички (нпр.  $12 = 2 \times 6$ );
2. наћи симболе који одговарају нумеричким бројевима који су добијени разлагањем (нпр. „2“ за „○“, „6“ за „△○“);
3. нацртати их заједно један до другог

У првом кораку, за факторизацију, дељење и множење је дозвољено. У случају множења, ученик ће интуитивно наћи два или три броја, множећи их, и проверавајући да ли ће њихов производ бити 12. Ученици који не могу да разложе број не могу доћи до одговора. Оно што указује ученицима да требају факторизовати дати број су првенствено правила 8 и 13. У ствари, ако комбиновање симбола није препознато као множење бројева, факторизација се не може урадити. Одатле, овај корак захтева да се јасно и прецизно користи правило 13 како би се урадио задатак. Други корак састоји се од откривања сагласности између нумеричких бројева и симбола. Претпостављена правила 11 и 12 се траже. Трећи корак биће решен поновним коришћењем правила 13. (Miyakawa)

Претпостављена правила се траже како би се извршио други подзадатак. Описна правила нису довољна, и овај последњи низ правила допушта ученицима да предвиде симболе на дванаестој картици, али не и да попуне низ. Правило 3 или 4 наводи их да предвиде да ће најмање један круг бити на картици; правило 5 или 6 да очекују најмање један троугао на картици. Како год, ова описна правила не омогућавају им да предвиде два круга.

### **8.1. Анализа снимљеног предавања**

Ово предавање је снимано и анализирано користећи видео снимање и превод. Даљи развој предавања укључивао је неколико активности. Ова анализа је вођена поделом лекције на три етапе: уводне активности, активности за задатак 1 и активности за задатак 2. Сваки део је описан и у исто време анализиран.

#### *Уводне активности:*

Активности ученика у овој етапи су биле ограничене на давање одговора или попуњавање захтева који су хронолошки описани.

1. Ученици су питани шта су уочили на картицама које су употребљене у лекцији тако што су их лепили на таблу случајним избором. Међу њима две картице нису имале симбол.
2. Ученици су требали да одреде симболе који би требали бити на празним картицама.
3. Они су требали да предложе начине којим би дефинисали картице како би појаснили нека јасна правила. (не обавезно оне начине који се очекују да они знају)

У лекцији, како нема пуно критеријума на којима би се базирали одговори на друго питање, када ученик предложи груписање, наставник пита има ли или нема ниједног критеријума за класификацију картица. Ово питање јасно доводи до тога да ученици јасно групишу картице.

Методe категоризације које су предложене од стране ученика су укратко приказане у наредна два метода:

- на основу броја симбола на свакој картици
- на основу комбинације различитих симбола на свакој картици

У овој етапи се види да су ученици упознати са симболима и препознају или проналазе јасно описана правила о разлици између једног симбола и о комбиновању симбола. У следећем дијалогу се види да су ученици свесни разлика и сличности међу симболима.

Ученик: „Картица са усправном цртом треба да иде у другу групу зато што има само један симбол”.

Наставник: „Дакле имамо групе симбола, два симбола и три симбола. Ово је шаблон који свако може лако да уочи”.

Ученик: „Све картице прве групе имају круг, па картице са два троугла или без круга не требају бити ту”.

Наставник: „Ти кажеш да су ово све кругови и да троуглови требају припадати другој групи. Ово може бити један начин размишљања”.

Ученик: „Картице са два различита симбола припадају првој групи, али картице са два круга требају ићи у најнижу групу где су картице само са једном врстом симбола”.

Ова етапа је први корак развоја уназад који дозвољава ученицима да боље разумеју правила „игре” која би наставник касније изложио (наћи јасна правила у задатку 1 и наћи симболе за дате бројеве у задатку 2). Наставник не тражи од ученика директно следећу активност, али користи оно што ученик каже и наводи их (пример „дакле ти кажеш... ”). Ово је интервенција наставника у делу када наводи ученике да учествују у активностима које су изван њихове одговорности. Одлике наставника одређују њихове интелектуалне активности.

Задатак 1 је предложен ученицима. Наставник лепи картице полако једну по једну на таблу, с лева на десно. Он јасно назначава поредак картица. У том тренутку, картицама још нису дате нумеричке фигуре. Док наставник лепи картице полако, ученици предвиђају која би картица била стављена следећа. Циљ „игре” за ученике је да пронађу јасна правила и у исто време да пронађу следећу картицу. (Miyakawa)

Наставник: „Сада ћу да поређам ове картице на мој начин. Гледајући на мој начин ређања, молим вас реците који примерак сте ви нашли. Начин на који ви размишљате биће од помоћи. Ја стављам прву картицу, другу картицу, трећу...”

Одмах након лепљења свих картица на таблу, неке идеје су предложене од стране ученика. Једна од њих је „Ученик: то је множење”. Наставник записује на табли последње правило и пита одељење да нађу једноставнија описна правила: „Наставник: Наговештај не мора бити тако компликован. Можете ли да уочите интересантнија правила у овом примеру”?

Одговори које су ученици дали на наставниково питање су следећи:

- парни бројеви имају кругове на картици
- троугао се појављује после сваке две картице.

Наставник разјашњава идеје ученика. У овом моменту, откривена правила нису крајње претпоставке, али су описна која ће одиграти важну улогу у проналажењу последњег правила. Због овога, наставник наглашава ово правило ученицима у разреду:

„Наставник: Ово је интересно откриће. Свака картица која одређује паран број има круг”.

До овог тренутка, јасна правила која су предложена су фокусирана искључиво на однос између картица и описаних правила која су утврђена. Потом, један ученик помиње однос између симбола који се ређају:

Ученик: „Број „2” има један круг и „4” има два круга, па ја мислим... два и два су четири. И следећи је „6”...”

Наставник: „Круг значи два. Два и два су четири. Да ли разумете? Два и два су четири. Како то још можете рећи у математици?”

Прва тврдња ученика да „два и два су четири” је двосмислена и такође чини се да ученик није сигуран у свој одговор. Наставник наводи ученика на одговор говорећи му: „Како то још можемо рећи у математици?” Ово питање наводи ученике да размишљају о односу између састављених симбола и формулишу идеју.

Ученик: „2 плус 2 једнако је 4. 2 пута 2 једнако је 4”.

Наставник: „Оба су тачна, зар не?... Ова четири ученика желе рећи да то није тачно. Па, молим вас објасните зашто сте против”.

Ученик: „Мислим да је тачно да два круга на четвртој картици означавају збир две двојке или производ две двојке, али ако је тако када дођемо до шесте картице, троугао треба представљати број 3 и добијамо 3 плус 2, што је пет. Па, не мислим да би ово могло бити сабирање”.

Даље, наставник изражава исправност датих правила. Неки ученици објашњавају да је јасно правило које они траже множење пре него сабирање, тако што користе друге бројеве. Након објашњења ученика, наставник укратко приказује и потврђује ово правило за остале бројеве на табли:  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ,  $2 \times 5 = 10$ . Затим он наводи и записује на табли да је јасно правило које они траже „множење”.

Повратна информација разреда, када ученик очекује јасно правило, биће резултат доказа са осталим картицама. На пример, када је претпостављено правило „композиција симбола представља сабирање” очекивано, што доказује да је процена резултата за шест или осам базирана на другом претпостављеном правилу.

Ова повратна информација говори да су ученици свесни метода за доказивање правила. Уствари, ако ученик мисли да правило које ће бити нађено може бити ваљано не за све већ за само неке картице, овај метод доказивања неће бити усвојен.

Након наставниковог кратког излагања шта је нађено у скривеном правилу, он поставља први подзадатак задатка 2: „који симболи ће бити на једанаестој картици?” Док пита ученике, он такође испитује који од симбола који су малопре нацртани (три троугла „ $\Delta\Delta\Delta$ ”) могу бити коришћени за једанаесту картицу. Ученици брзо дају одговор: „27 изражен са три троугла није применљив, и нови симбол је потребан за број 11”. Наставник затим пита ученике зашто су тако одговорили. На шта ученици одговарају да је то оно што наставник очекује. Ученици цртају петоугао и X.

Наставник: „То је тачно. И то је такође тачно. Зашто мислите да су ови симболи тачни? Да ли су симболи које сте нацртали они прави? Зашто мислите да је исправно користити овакве симболе?”

Ученик: „Бројеви који имају само једну фигуру, као 2 и 3 на пример, могу бити подељени само са 1 или са самим собом. Једанаест исто тако може бити подељен само са један или са самим собом, па картица мора имати само један симбол као претходно са троуглом или правоугаоником”.

Наставник: „Говорите о супротности множења, зар не? Ако мислите о нечему користећи комбинацију множења, не можемо представити број 11 на тај начин. Он може бити представљен сабирањем, али ниједном овом картицом која представља сабирање. Је ли тако? ”

Активност за први подзадатак није трајала дуго. Битна чињеница да неки бројеви могу бити дељени са 1 је јасно наведена од стране ученика. Због тога један од циљева овог предавања, који је разумевање концепта простих бројева, је достигнут. Наставник је поновио и разјаснио нову идеју са примерима множења.

Други подзадатак је навео наставник, и требало је одредити симболе који ће бити на дванаестој картици. Овај пут рекао је ученицима да то запишу у својим свескама. Наставник је питао ученика и он је дао погрешан одговор, шест кругова „ $\circ\circ\circ\circ\circ\circ$ ”. Овај одговор су исправили други који су указали на то да су дати симболи погрешни и на

основу тога ученик је написао поново: четири троугла „ $\Delta\Delta\Delta$ ”. Проблем је што је он користио нежељено правило сабирања, уместо множења и наставник је искористио прилику да разјасни које је следеће правило. Пре наговештаја да су дати одговори погрешни, наставник говори ученицима да напишу на табли одговоре који се разликују од претходних. Девојчица је написала два круга и троугао ( $\circ\circ\Delta$ ). Наставник је њу питао за разлог. Она је објаснила да је „ $4 \times 3 = 12$ ” ( $\circ\circ$  и  $\Delta$ ).

Ученик: (ученица црта два круга и троугао) „Како је до сада, 2 пута 4 једнако 8, овде су три круга, и како је 2 пута 3 једнако 6, круг и троугао састављамо, како је 4 пута 3 једнако 12 и 6 пута 2 једнако 12, то ће бити овако” (сваки пут, она преписује симболе претходних картица, као 2 и 4 за 8, 2 и 3 за 6, 4 и 3, и 6 и 2).

Наставник: „Ови кругови чине 4, и четири пута 3 је 12. Одлично! Зашто си мислила да су ови симболи погрешни?” (мислећи на четири троугла)

Ученик: „Код броја 8, ми смо množили 2 пута 2 пута 2, због тога и у случају троугла, 3 пута 3 једнако 9, 9 пута 3 једнако 27, 27 пута 3 једнако 81”.

Након разјашњавања девојчициног објашњења разреду, наставник се вратио на претходни одговор ( $\Delta\Delta\Delta$ ) и питао цело одељење зашто то није тачно. Ученица је објаснила зашто и наставник је појаснио њен одговор. Међутим, када је наставник поново питао за друге одговоре, ученица је нацртала два шестоугла на табли. Ученица није дала објашњење, али разлог су други ученици растумачили:

Ученик: „Можда, како су два симбола за 6, ја мислим да она спаја два симбола и прави нови симбол, шестоугао. Па, она је мислила да шестоугао представља дванаест”.

Ученик: „Можда, је она направила нови симбол, шестоугао, за 6, због броја 6. И како су овде два шестоугла и како је 6 пута 2 једнако 12, па ја мислим да је она направила два шестоугла”.

Након добијања других одговора ( $\Delta\circ\circ$  и  $\circ\Delta\circ$ ) од ученика, наставник је завршио лекцију говорећи „Наставник: неки ученици можда још увек имају потешкоће у разумевању множења” и тражећи да већи бројеви буду представљени, као што је 100.

У овој етапи, да се приметити да у овом одељењу хипотетичко правило „комбиновање симбола представља множење одговарајућих бројева” које је наставник очекивао да се користи у задатку 1, неки ученици нису користили. Одговори са четири троугла или два шестоугла јавили су се из овог разлога. Некоришћење овог правила директно је повезано са недостатком потврде метода који допушта повратну информацију разреда.

## **8.2. Завршни коментар на изведен час математике у Јапану**

Сматрам да је приложени час математике у Јапану добро организован, на шта указују процедуре и решења до којих су ученици самостално дошли.

Из овог примера је видљиво да је наставник пажљиво осмислио и водио предавање корацима којим је он очекивао да ученици иду путем правила која је он поставио. На овом часу као и на сваком другом јако је битна организација одељења од стране наставника. Од великог значаја за сам час је начин укључивања наставника у лекцију када примети одсутност повратне информације код неких ученика. Наставник не даје директно ученицима повратну информацију. Он само појасни идеје ученика и пита друге ученике из разреда да ли су оне исправне или не и зашто. Наставни материјал који је припремљен за ово предавање упућивао је ученике на откривање поменутих математичких идеја (број који је представљен као производ других бројева као и они који то нису).

Овакав приступ настави има за циљ да подстакне и помогне ученицима да се укључе у математичко размишљање и да долазе до процедура и решења која су од њих захтевана.

## Закључак

Током векова математика је била покретач развоја других наука, а многе науке се не могу замислити без ње. Математички појмови као образовни садржаји веома су значајни јер много доприносе ангажовању личности у сопственом развоју, у сазнајном нивоу и у развоју логичког мишљења. Математичко образовање доприноси развоју личности много више него друге науке. Математика је везана за свакодневни живот, па је при култивисању човековог духа и интелекта незаменљива.

Успешност у настави математике условљена је методичким вођењем математичког образовања а то вођење зависи од принципа и метода који се примењују у настави. Настава математике осим доброг познавања материје, захтева и способност да се знање пренесе на ученике. Савремени трендови у настави математике стављају акценат на решавање математичких проблема преко модела из реалног живота, а такав тренд заступљен је управо у јапанском школском систему.

На основу описивања и анализирања начина организације часа математике у Јапану, као и истраживања о примени такве организације часа код нас, дошло се до закључка да је задатак наставе математике у Јапану да заинтересује ученике за математику, максимално развије њихове мисаоне активности, а посебно да подстиче ученике на самостално решавање проблема.

У уводном делу овог рада сагледана је организација јапанског школског система, али се касније пажња усмерила на организацију јапанског часа математике која је различита од класичне организације часа математике. Основне разлике су у томе што се обрада градива у јапанским школама везује за фазу решавања проблема, док се проверавање, вежбање и понављање градива уплићу у све фазе часа и не морају се смењивати одређеним редоследом.

Решавање проблема је најефикасније средство за развој стваралачког мишљења. Вежбањем и утврђивањем градива путем решавања проблема омогућава се бољи трансфер

учења и примена знања у новим ситуацијама. На тај начин математика постаје средство да се направе прорачуни и предвиде могући исходи реалних ситуација.

Овакав приступ раду олакшава чињеница да ученици поседују здраву интуицију и не устручавају се да износе своја мишљења и поседују живу машту, која често доводи до интересантних предлога за уопштења, или варијације појединих проблема.

На јапанским часовима математике знање се преноси активном комуникацијом између ученика и наставника као и између самих ученика, а математика се приказује као применљива и корисна дисциплина. Наставник има улогу непосредног сарадника, он је и организатор наставе у којој подстиче ученике да активно учествују у свим фазама часа и подстиче их пре свега да самостално дођу до решења.

Иако јапанске учионице често изгледају хаотично за западњаке, њихова улагања у међусобни однос деце, у личној преданости деце вредности учионице и лидерству деце у учионици даје импресивне дугорочне резултате.

Јапанска организација часа математике примењена је у раду са ученицима шестог разреда Основне школе „Мирослав Антић” у Београду. Резултатима је утврђено да овакав начин организације часа ефикасан и користан и да на такав начин усвојени појмови и стечена знања имају карактер солидно утемељених и трајно употребљивих активних компонената менталног склопа ученика. Слабост одржаних часова је неусклађеност времена за решавање задатака и њиховог броја.

Сопствена запажања о предностима оваког начина организације часа као и о појединим недостацима усмерена су на унапређивање наставног процеса у математици уопште.

У традиционалној школи има мало креативног рада и зато треба организовано прићи променама унутрашње организације наставе математике и створити повољну климу за методичку трансформацију садржаја, моделовање и примену нових савремених наставних система насталих из педагошко-психолошких и дидактичко-методичких теоријских и практичних сазнања. Зато постоји потреба за стварањем нових наставних

модела са применом ефикаснијих облика, метода, поступака, дидактичко-методичког материјала и упознавање наставника са тим новинама.

Надам се да ће овај рад бити од користи за информисаност о новом наставном систему као и за доношење одлука о уношењу ефикасних промена у настави математике и да ће у том смислу допринети побољшању резултата ученика из математике у нашој држави.

## Литература

1. Jacobs, K. J. & Morita, E. (2011): *Japanese and American Teachers' Evaluations of Videotaped Mathematics Lessons*, Journal for Research in Mathematics Education
2. Miyakawa, T. : *A study of "good" mathematics teaching in Japan*, University of Tsukuba
3. Polya, G. (1966): *Како ћу решити математички задатак?*, Загреб: Школска књига
4. Максић, С. (1998): *Школовање даровите деце и младих у Јапану*, Настава и васпитање бр.1, 1 - 166
5. Jones, K. (1997): *Somme Lessons in Mathematics: a comparasion of mathematics teaching in Japan and America*, The University of Southampton, UK
6. Вилотијевић, М. (2000): *Дидактика 3 – Организација наставе*, Београд, Учитељски факултет
7. Шпијуновић, К. (2005): *Стваралачко мишљење и математичко образовање*, Ужице: Учитељски факултет
8. Mastrull, S. (2002): *The Mathematics Education of Students in Japan: A Comparasion with Unated States Mathematics Programs*, Bristol Township School District
9. Shimizu, Y. (1999): *Aspects of Mathematics Teacher Education in Japan: Focusing on Teachers' Roles*, Journal of Mathematics Teacher Education
10. Takahashi, A. (1999): *Caracteristics of Japanese Mathematics Lessons*, De Paul University
11. Смолећ, И. (1964): *Како да учим математику?*, Загреб: Школска књига

12. Stigler, J. & Hiebert, J. (1999): *Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, The Free Press

13. National Report of Japan by Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Tehnology (MECSST) (2004): *The Development of Education of Japan*

14. Дејић, М. & Егерић, М. (2007): *Методика наставе математике*, Београд, Учитељски факултет