Математички факултет у Београду

Мастер рад

Развијање финансијке писмености ученика средњих економских школа

Ментор:
Проф.др.Милан Божић

Студент:
Бранко Гавриловић

Садржај:

Предговор

Како да штедим? Који кредит је најповољнији? Ово су само нека од питања са којим се сусрећемо свакодневно, а да бисмо на њих одговорили и определили се за финансијски најповољнију варијанту неопходно је разумети питање, односно знати да га прочитате на прави начин.

Последице у случају погрешног избора могу бити веома скупе. Нпр. промена каматне стопе за „само” четвртину процента може укупне трошкове повећати за пар хиљада евра [5].

Како је свест наших грађана о вредности новца на изузетно ниском нивоу, потребно је развијати финансијску писменост почев од најранијих школских дана, како би се вероватноћа грешке приликом избора финансијски најповољније варијанте свела на најмању могућу меру.

У овом раду разматрано је развијање финансијске писмености ученика са посебним освртом на ученике средњих економских школа. Рад чине следећа поглавља:

- Значај финансијске писмености
- Елементи финансијске математике
- Интерна стопа приноса
- Настава финансијске математике у школама у Србији
- Предлог за унапређење праксе

Кроз овај рад покушава се скренути пажња на значај финансијске едукације ученика. У кратким цртама објашњен је концепт на коме почива финансијски свет и дата су објашњења како га разумети. Финансијско образовање је широк појам који олакшава живот појединца. Због тога му треба посветити посебну пажњу и почети са едукацијом већ од најранијих школских дана.

Финансијска математика је грана примењене математике која се бави проблемом израчунавања интереса (простог и сложеног). Чини га доста велики апарат формула на којима се заснива цео финансијски систем. Овде се потенцирало на разумевању процеса а не на томе да ученик посматра готове формуле у које само треба да замени бројеве.

Нажалост, у великој мери се настава математике у школама своди на замену бројевних вредности, без посебног инсистирања на разумевању и примени. Због тога је дат и осврт на то како побољшати наставу математике са посебним освртом на финансијско образовање ученика.

1. Значај финансијске писмености

Савремени финансијски токови потрошачима нуде све већу лепезу производа који излазе у сусрет потребама потрошача. Овај широк избор, иако врло користан, захтева да потрошачи буду опремљени информацијама знањем и вештинама потребним за разумевање и процену могућности како би изабрали оно што најбоље одговара њиховим потребама. На финансијском тржишту јављају се различите финансијске понуде које са собом носе велики ризик по саме потрошаче. Са порастом трошкова потреба за позајмицама и другим финансијским услугама постаје све већа. На глобалном тржишту и они који нуде те услуге (на првом месту банке и осигуравајућа друштва) труде се да различитим понудама изађу у сусрет потрошачима. Да би донели праву одлуку, осим тога што све информације морају бити јавне и доступне, врло је важно и то да потрошач зна и да селектује и анализира дате информације и изабере најбољу опцију. Управо због тога је веома важно развијати финансијску писменост код грађана [7].

Развијен, сигуран и стабилан финансијски сектор који може да задовољи потребе корисника финансијских услуга је важан за сваку земљу и њен развој. Широка лепеза финансијских производа је у интересу не само професионалних инвеститора, већ и сваког клијента појединачно. У условима тржишне економије сваки појединац пре свега води рачуна о свом кућном буџету и доноси самосталне одлуке о улагањима и задуживањима преузимајући ризик на себе. Обезбеђењем информација и унапређењем разумевања финансијских услуга корисници финансијских услуга развијају свест о ризицима и стичу вештине управљања тим ризицима. Да би, међутим, били у могућности да донесу адекватну одлуку о инвестирању свог новца, неопходно је да корисници располажу потпуним и разумљивим информацијама, на основу којих могу извршити поређења производа са којима се сусрећу на тржишту. Додатна знања пружају им способност да изаберу одговарајућу услугу. Финансијски писмени потрошачи својим активним учешћем на финансијском тржишту доприносе јачању поверења у финансијски сектор. Трагањем за производима који одговарају њиховим потребама, потрошачи подстичу финансијске институције да развијају нове производе, а самим тим конкуренцију и иновације, као и подизање квалитета финансијског тржишта на виши ниво [7] [12].

Финансијска писменост може потрошачима да омогући да постану бољи купци и да производе и услуге добијају по повољнијим ценама. То ће им, заузврат, помоћи да побољшају кућни буџет и отворити нове могућности за штедњу и улагања. Финансијска писменост је вештина за читав живот. Без обзира на то чиме се бавимо, колико зарађујемо и колико имамо година, разумевање новца помоћи ће нама и нашим породицама да извучемо максимум у животу.

Финансијска писменост осим што промовише личну добробит, доприноси економском развоју и богатству нације побољшањем квалитета расположивих финансијских услуга и развојем способности појединаца да их ефикасније користе.

Елементарна финансијска писменост представља кључну компоненту за доношење рационалних одлука у области финансија. Потребно је разумевање елементарних појмова на општем нивоу: вредност новца, кредит, ануитет, значај штедње и осигурања ...

Шира дефиниција финансијске едукације обухвата способност или степен познавања и разумевања производа и услуга на финансијским тржиштима, нарочито ризика и преноса, што треба да омогући боље финансијско одлучивање.
Већ дуже време се истиче, нарочито у раsвијеним земљама, да омладина мало штеди и не разуме потребу инвестирања, а старији све више осећају последице сиромаштва. Због таквог стања све се већи приоритет даје финансијској едукацији, која може да повећа квалитет живота појединаца и интегритет и квалитет финансијских тржишта [8], [11].

Финансијско образовање треба да почне већ у најранијим школским данима .Одлука PISA комитета да се на тестирање математичке писмености дода сегмент – тестирање финансијске писмености, само је потврдила став да су финансије и финансијска писменост постале неодвојиве области математике и кључни апарат модерног друштва који се мора савладати врло рано. Зато не треба да чуде подаци да се у земљама које су лидери математичке писмености финансијски појмови активно уводе у наставу већ у нижим разредима основне школе.
Овако PISA дефинише финансијску писменост:

Финансијска писменост представља знање и разумевање финансијских концепата, као и вештине , мотивацију и самопоуздање да се оне примене у циљу креирања ефикасних одлука које позитивно утичу на финансијско стање појединаца и друштва како би активно учествовали у економији једне државе [1].

Финснсијска едукација омогућава лагоднији живот. Одлуке о начину располагања својим новцем биће разумније и лакше самим тим и битне одлуке у животу биће далеко једноставније.

2.Елементи финансијске математике

Појмови попут процента, камате, профита увелико су постали саставни део свакодневице. Не можемо замислити шетњу кроз град а да не налетимо на неки излог на коме стоји натпис снижење до одређеног процента, гледање телевизије без рекламе за повољне банкарске позајмице или понуде за штедњу са примамљивом каматном стопом. Да бисмо ушли у свет финансијске математике морамо кренути од почетка

2.1 Процентни рачун

Проценат је фундаметални појам финансијске математике. Истовремено, то је ноћна мора многих ученика. У настави математике први пут се са њим сусрећемо у шестом разреду основне школе.
Иако је већина ученика чула за тај појам, иако готово сви знају и то како се проценат означава (%), одговор на питање шта је то проценат за већину њих није лак. Следећи пример може помоћи ученицима да дођу до закључка шта је то проценат.

Пример1. У једном одељењу од укупног броја 100% ученика су дечаци. Шта то значи?

Користећи знања из свакодневног живота очекивани одговор је да су сви ученици дечаци. Треба скренути пажњу на то да из задатка није јасно колико има ученика у том одељењу. Јасно је само да су **сви** дечаци. Закључујемо да 100% означава једну целину. Тј.

$$100\% = 1 \quad (1)$$

У једном целом има 100% тако да 1% представља стоти део целине. Кроз једноставан пример долазимо до одговора на питање које мучи већину ученика.

Проценат је стоти део неке величине, тј

$$1\%\ a = \frac{1}{100} a = 0{,}01\ a \quad (2)$$

Дакле, 1% = $\frac{1}{100}$=0,01 . Слично :

$$3\%=\frac{3}{100}=0{,}03$$

$$10\%=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1$$ (дакле 10% је десети део)

$$12\%=\frac{12}{100}=0{,}12$$

$$20\%=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}=0{,}2$$ (дакле 20% је пети део)

$$50\%=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}=0{,}5$$ итд....

Сада рад са процентима постаје далеко лакши. Наиме, ако је потребно израчунати рецимо 20% од броја 150 то можемо на следећи начин $20\%\cdot 150=\frac{1}{5}\cdot 150=0{,}2\cdot 150=30$.

Како смо се упознали са процентима и научили да радимо са њима, сада можемо даље у свет економске математике.

2.2. Прост каматни рачун

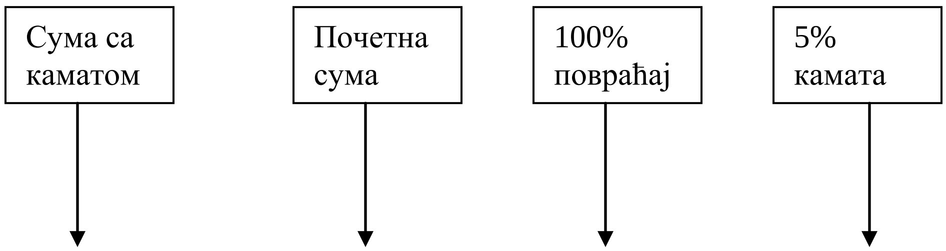
Кренимо од следеће ситуације. Нека располажемо са 100 евра које желимо да заложимо у банку која даје каматну стопу 5 % на годишњем нивоу. Ако тај износ орочимо на годину дана након истека тог временског рока располагаћемо са уложених 100 евра (главница) и још 5 евра (камата) [1]. Да се још једном подсетимо:

$$5\%\cdot 100=\frac{5}{100}\cdot 100=0{,}05\cdot 100=5.$$

Дакле, располагаћемо са **својим** улогом и са каматом .

Математички записано $105 = 100 + 0{,}05 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0{,}05)$.

Прикажимо поступак шематски (шема 1)



$$105 = 100 \cdot (1 + 0{,}05)$$

Шема 1. Прост каматни рачун

Уведимо следеће ознаке :

- ***G*** - главница
- ***I*** - камата
- ***p*** - каматна стопа (изражена у процентима)

Користећи ознаке запишимо претходну релацију симболички:

$$(G + I) = G \cdot (1 + p) \quad (3)$$

Ако после годину дана одлучимо да узмемо камату а главницу оставимо зарадили смо $G \cdot p$. Ако то исто урадимо и следеће године наша зарада биће $G \cdot p \cdot 2$, а након g година укупно $G \cdot p \cdot g$. Овај поступак илуструје **прост каматни рачун**.
Долазимо до формуле за израчунавање камате код простог каматног рачуна, ако је време дато у годинама:

$$\boxed{I = G \cdot p \cdot g} \quad (4)$$

Укупна сума (главница + камата) са којом би располагали кроз g година износила би :

$$G + I = G + G \cdot p \cdot g$$

Тј.

$$\boxed{G + I = G \cdot (1 + p \cdot g)} \quad (5)$$

Пример 2 За одличан успех у школи добили смо 50 евра, које желимо да дамо на штедњу у банку са каматном стопом 6%. Са колико новца ћемо располагати након три године ако сваке године подижемо камату а главницу остављамо?

Применом формуле (5) задатак се лако решава. Наиме,
$G + I = 50 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 3) = 59$ евра.

Ако би имали потребу да израчунамо камату на ***m*** месеци у формулу (5) за израчунавање камате уместо времена датог у годинама ставили би:

$$g = \frac{m}{12} \quad \textbf{(}\text{година има 12 месеци}\textbf{)}$$

и добили формулу за израчунавање камате за ***m*** месеци :

$$\boxed{I = G \cdot p \cdot \frac{m}{12}} \quad (6)$$

Слично, за време дато у данима:

$$g = \frac{d}{360} \quad (\text{ ако се рачуна да година има 360 дана})$$

или

$$g = \frac{d}{365} \quad (\text{ ако се рачуна да година има 365 дана})$$

добијамо формуле за израчунавање камате за ***d*** дана

$$\boxed{I = G \cdot p \cdot \frac{d}{360}} \quad (7)$$

или

$$\boxed{I = G \cdot p \cdot \frac{d}{365}} \quad (8)$$

Посматрајмо сада обрнуту ситуацију. Неко данас располаже са 105 евра на штедном рачуну на основу суме коју је уложио пре годину дана, а каматна стопа је 5% на годишњем нивоу. Можемо ли израчунати колики је био улог а колика камата?

Дакле, знамо да је вредност улога увећаног за камату 105 евра.
Математички записано

$$G + I = 105$$

Раније смо показали (3),

$$G + I = G \cdot (1 + p)$$

Заменимо p=5%=0,05 у формулу (3)

$$105 = G \cdot (1 + 0{,}05)$$

добијамо

$$G = \frac{105}{1 + 0{,}05} = 100 \text{ евра.}$$

Дакле почетни улог је 100 евра а придодата камата износи 5 евра .

У општем случају вредност почетне суме код **простог каматног рачуна** можемо добити

$$G = \frac{G + I}{(1 + pg)} \quad (9)$$

На простом примеру илустровали смо ***каматни рачун више сто****. Он се примењује када имамо увећану вредност главнице а потребно је наћи саму главницу, или камату.*

2.3. Сложен каматни рачун

Вратимо се на проблем штедње. Одлучимо се сада да не подижемо камату, већ оставимо камату заједно са главницом. Сада је главница већа па самим тим ће и пристајућа камата за наредни период бити већа. Илуструјмо то примером.

Пример 3. Нека располажемо 100 евра које желимо да уложимо у банку која даје каматну стопу 5% на годину дана. Са којом сумом ћемо располагати на крају треће године [1]**?**

Кренимо редом.
На крају прве године (на основу 3) располагали бисмо са

$$G_1 = G \cdot (1 + p) = 100 \cdot (1 + 0{,}05) = 105 \text{ евра.}$$

Како не подижемо камату ми у другу годину улазимо са новом главницом од 105 евра.

На крају друге године бисмо располагали са

$$G_2 = G_1 \cdot (1 + p) = 105 \cdot (1 + 0{,}05) = 110,\ 25 \text{ евра.}$$

Понављајући процедуру , на крају треће године би располагали са

$$G_3 = G_2 \cdot (1 + p) = 110{,}25 \cdot (1 + 0{,}05) = 115{,}7625 \approx 115{,}76 \text{ евра.}$$

Дакле , камата коју добијамо износи 15,76 евра.

Одмах уочавамо, да смо подизали камату зарадили бисмо 15 евра. Закључујемо да је сложена камата већа од просте.

Претходни пример илуструје **сложени каматни рачун**. Дакле, камата се додаје главници на крају сваког обрачунског периода и у следећи период улазимо са увећаном главницом. Овакав поступак додавања камате на главницу после сваког обрачунског периода назива се **капиталисање (укамаћивање)**, а обрачун камате на овај начин називамо **сложеним каматним рачуном.**
Напоменимо, капиталисање може бити везано за различите временске периоде: годишње, полугодишње, тромесечно, месечно. У пракси је најчешће користи годишње.

Уопштимо проблем: Нека располажемо са $\boldsymbol{G}$ евра и нека их заложимо у банку која даје каматну стопу $\boldsymbol{p}$ на годишњем нивоу на период од $\boldsymbol{n}$ година и годишње капиталисање. Са којом сумом располажемо на крају **n**-те године?

На крају прве године располагаћемо са

$$G_1 = G \cdot (1 + p) \quad (3)$$

У другу годину улазимо са новом главницом G_1.

На крају друге године располагали бисмо са

$$G_2 = G_1 \cdot (1 + p) = G \cdot (1 + p)^2$$

У трећу годину улазимо са сумом G_2.

На крају треће године наша сума износила би

$$G_3 = G_2 \cdot (1 + p) = G \cdot (1 + p)^3$$

Настављајући итеративни поступак после ***n*** година располагали би са

$$\boxed{G_n = G \cdot (1+p)^n} \quad (10)$$

Претходна формула представља **основну формулу сложеног каматног рачуна** код које користимо следеће ознаке :

- G – почетна главница
- p – каматна стопа која се односи на период капиталисања
- n – број периода капиталисања
- G_n – увећана главница

Ово је место где треба нагласити употребу геометријског низа у пракси.

Још једном напоменимо да ***n*** представља број периода капиталисања, а ***p*** каматну стопу која се односи на период укамаћивања.
Ако је рецимо дата годишња каматна стопа а капиталисање је полугодишње, тромесечно, месечно израчунава се **релативна каматна стопа** дељењем са 2, 4,12.
То илуструјемо следећим примером.

Пример 4. Колика је увећана вредност улога од 100 евра ако уложимо у банку на 3 године уз каматну стопу 5% на годишњем нивоу ако банка капиталише

a) полугодишње
b) тромесечно
c) месечно

а) Како је капиталисање полугодишње то у току једне године имамо два капиталисања, па самим тим за три године имамо шест капиталисања. Каматна стопа је дата на годишњем нивоу па ћемо релативну полугодишњу стопу добити дељењем са 2.
Дакле,

$$n = 6 \;,\; p = 2.5\%$$

Заменом у (10)

$$G_n = G \cdot (1+p)^n = 100 \cdot (1+0{,}025)^6 \approx 115{,}97 \quad \text{евра.}$$

a) Капиталисање је тромесечно што значи да у току једне године има 4 капиталисања па их је за три године укупно n=12, а каматна стопа се дели са 4 па је одговарајућа релативна каматна стопа p=1,25% .

Заменом у формули (10) добијамо:

$$G_n = G \cdot (1+p)^n = 100 \cdot (1+0{,}0125)^{12} \approx 116{,}08 \text{ евра.}$$

c) Капиталисање је месечно па је укупан број за три године $n = 36$, а каматна стопа је $p \approx 0{,}42$ па заменом у (10) добијамо :

$$G_n = G \cdot (1+p)^n = 100 \cdot (1+0{,}0042)^{36} \approx 116{,}29 \text{ евра.}$$

Примећујемо, што је **капиталисање чешће увећена главница је већа** .

Напоменимо, ако је потребно израчунати **почетни улог** на основу увећане главнице добијамо следећу формулу:

$$\boxed{G = \frac{G_n}{(1+p)^n}} \quad (11)$$

Ову формулу посебно истичемо јер ће нам бити значајна за даљу причу .

Уочавамо да је у претходним примерима број капиталисања ***n*** био цео број. Шта се дешава ако број капиталисања није цео број?

Пример 4а. Нека располажемо са 10000 евра које желимо да орочимо у банци на период од три године. Међутим после две године и три месеца ,због куповине стана , принуђени смо да разрочимо новац. Колико ћемо добити на име увећане главнице ако је каматна стопа 5% на годишњем нивоу ?

Под претпоставком да нам банка одобри разрочење (зависи од пословне политике банке) улог ће бити увећан на период од две године и три месеца. Кренимо редом:

- На крају прве године располагаћемо са

$$G_1 = 10000 \cdot (1+0{,}05) = 10500 \text{ евра.}$$

- На крају друге године располагаћемо са

$$G_2 = 10500 \cdot (1 + 0{,}05) = 11025 \text{ евра.}$$

Ова сума наставља да се камати наредна три месеца па на основу формуле (6) из претходног поглавља (када је време дато у месецима) добијамо

$$G_3 = G \cdot \left(1 + p \cdot \frac{m}{12}\right) = 11025 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{3}{12}\right) \approx 11162{,}8 \text{ евра.}$$

Претходни пример илуструје начин израчунавања увећане главнице, ако **време није цео број капиталисања.**
Нека је

време = цео број капиталисања + остатак времена

тада је процедура рада:

- Прво се израчуна сложена камата на цео број број капиталисања
- Затим на то додамо просту камату на ту суму за остатак времена.

Позабавимо се још једним проблемом: израчунавањем времена потребног да једна сума буде укамаћена да би „нарасла“ на задату увећану главницу?

Пример 4б. Колико је времена потребно да сума од 100 евра буде укамаћена у банци која даје каматну стопу 5% на годишњем нивоу, да би се увећала на износ 300 евра?

Пођимо од основне формуле сложеног каматног рачуна, где заменом добијамо

$$300 = 100 \cdot (1 + 0{,}05)^n$$

Одавде,

$$1{,}05^n = 3$$

Добијамо експоненцијалну једначину која се решава логаритмовањем леве и десне стране.
Ово је место где ћемо нагласити практичну примену знања потребног за решавање експоненцијалних једначина, као и основне особине логаритма.
Дакле,

$$1{,}05^n = 3 \quad / \quad log$$

Одавде добијамо

$$n = \frac{\log 3}{\log 1{,}05} \approx 22{,}5 \text{ година.}$$

Уопштено, ако је G почетна сума, G_n увећана главница, каматна стопа p тада време n израчунавамо

$$\boxed{n = \frac{\log \frac{G_n}{G}}{\log(1+p)}} \quad (12)$$

2.4. Садашња вредност новца

„Вредност једног динара данас није исто што и вредност динара за годину дана “. Збуњујеће али истинито. Разлог лежи у временској димензији по којој се мења вредност новца [1].

Пример 5. Пријатељ вам је за потребе куповине аута, пре годину дана позајмио 1000 евра и данас му враћате исту суму? Да ли сте испали фер према њему?

Одговор је НЕ.
Зашто? Разлог је у временској оси по којој се мења вредност новца. Да би ово разјаснили до краја поставимо још једно питање: Шта је пријатељ могао да уради са 1000 евра пре годину дана? Рецимо да је могао да оде у банку и да уложи тај новац на штедњу. Нека је каматна стопа по којој би орочио тај новац износила 5% на годишњем нивоу. На основу тога он би данас располагао са

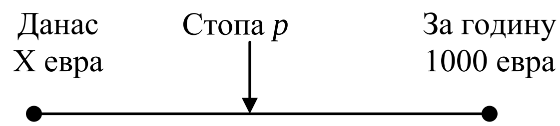
$$G_1 = G \cdot (1+p) = 1000 \cdot (1+0{,}05) = 1050 \text{ евра}$$

Видимо да би било коректно да, уз претпоставку да је каматна стопа коју би му понудила банка 5%, вратимо пријатељу 1050 евра.

У оптем случају сума коју би вратили зависи од каматне стопе на улагање без ризика.

Пример 6. Колико би данас вредело 1000 евра са којим би располагали за годину дана ако је каматна стопа 5%?

Посматрајмо шему 2.



Шема 2. Садашња вредност новца

Проблем преводимо на познати проблем из претходног поглавља. Колико је почетни улог ако је увећана главница 1000 евра?
Користећи формулу (9) из претходног поглавља добијамо

$$X = \frac{1000}{1{,}05} \approx 952{,}38 \text{ евра.}$$

Уопштимо проблем: Колико данас вреди сума (означимо са ***X***) која за ***n*** година вреди ***Y*** евра, ако је каматна стопа ***p***?

Одговор:

$$\boxed{X = \frac{Y}{(1+p)^n}} \quad (13)$$

Пример 7. Добили смо новчану награду у износу од 10000 евра (по одбитку пореза) у наградној игри коју организује Народна лутрија. Лутрија нам нуди договор да нам пола исплати одмах а остатак у две рате које износе по 2600 евра у наредне две године. Ако је стопа 5%, да ли је понуда прихватљива?

Посматрајмо шему 3.

Шема 3. Поређење на основу садашње вредности новца

Да бисмо одговорили на питање треба ли понуду прихватити потребно је све вредности довести у садашњост и упоредити.

Збир садашњих вредност рата била би:

$$X = X_1 + X_2 = \frac{2600}{1{,}05} + \frac{2600}{1{,}05^2} \approx 4834{,}47 \text{ евра.}$$

Пошто је садашња вредност улога мања од 5000 евра, понуду треба одбити.
Претходни пример је одличан увод у озбиљну финансијску причу.

2.5. Ток готовог новца Нето садашња вредност новца

Пример 8. Пошто смо одбили понуду Народне лутрије и одлучили се да подигнемо одједном 10000 евра, одлучили смо се да сав тај новац уложимо у куповину аута и започињање привременог посла таксисте. Очекивана добит (одбијени сви расходи) била би прве године 2000 евра, друге 3000, треће 3000, и на крају четврте бисмо продали ауто по цени 3000. Да ли је посао исплатив или можда треба да размислимо о другој варијанти улагања?

Ток готовог новца прати наша улагања и трошкове током времена. Ток готовог новца за наш посао био би :

$$CF = \{-10000, 2000, 3000, 3000, 3000\}$$

Скраћеница *CF* је од енглеске речи ***cash flow***.

Одговор на питање да ли је посао исплатив даће нам израчунавање **нето садашње вредности новца *NPV* (Net Present Value).**

Дакле, потребно је све новчане износе довести у садашњи тренутак. 10000 евра данас вреди исто толико, док за остале износе потребна нам је каматна стопа.
Нека је каматна стопа 5%, тада првих 2000 евра зараде данас вреде $\frac{2000}{1{,}05}$, 3000 евра које бисмо зарадили у другој години данас вреди $\frac{3000}{1{,}05^2}$ евра, док зарада из

треће године данас вреди $\frac{3000}{1,05^3}$, док потенцијална вредност аута данас износи $\frac{3000}{1,05^4}$ евра.

Нето садашња вредност овог тока новца је:

$$NPV = -10000 + \frac{2000}{1,05} + \frac{3000}{1,05^2} + \frac{3000}{1,05^3} + \frac{3000}{1,05^4} \approx -314,53 \text{ евра.}$$

Како је нето садашња вредност тока новца негативна то значи да инвестиција није исплатива тј. боље би било да уложимо новац у банку.

Сада располажемо са значајним алатом који нам може разјаснити многе нејасноће везане за процену ризика приликом инвестиционих улагања.

Пример 9. Пошто смо одлучили да одустанемо од варијанте таксирања пробаћемо са воћарском производњом и прерадом ракије. Нека уложимо 10000 евра у засад шљиве који ће нам доћи на род кроз 4 године. Након годину дана у куповину буради уложимо још додатних 3000 евра а за две године у машину за пуњење флаша 2000 евра. У четвртој години имамо потенцијални приход од 2000 евра у петој 3000 евра у шестој 6000 евра и у седмој 9000 евра. Да ли се инвестиција отплатила након седам година?

Ово представља озбиљан финансијски проблем. Међутим и овде одговор на питање да ли се инвестиција исплатила зависиће од нето садашње вредности новца. Опет узмимо да је каматна стопа на улагање без ризика 5%. И овде све вредности доводимо на садашњу вредност са том напоменом да водимо рачуна о приходној и расходној страни. Ток готовог новца био би:

$$CF = \{-10000, -3000, -2000, 2000, 3000, 6000, 9000\}$$

Израчунајмо нето садашњу вредност новца *NPV*.

$$NPV = -10000 - \frac{3000}{1,05} - \frac{2000}{1,05^2} + \frac{2000}{1,05^4} + \frac{3000}{1,05^5} + \frac{6000}{1,05^6} + \frac{9000}{1,05^7} \approx 198 \text{ евра}$$

Како је *NPV* позитиван закључујемо да се инвестиција отплатила за седам година.

На простом примеру објаснили смо основе процене временске исплативости инвестиционих улагања. То је јако значајно јер нема добити преко ноћи. Да би се у инвестирању, вратио уложени новац и да бисмо народски речено „почели да послујемо у плусу“ потребно је осим нашег труда и време као битан фактор .

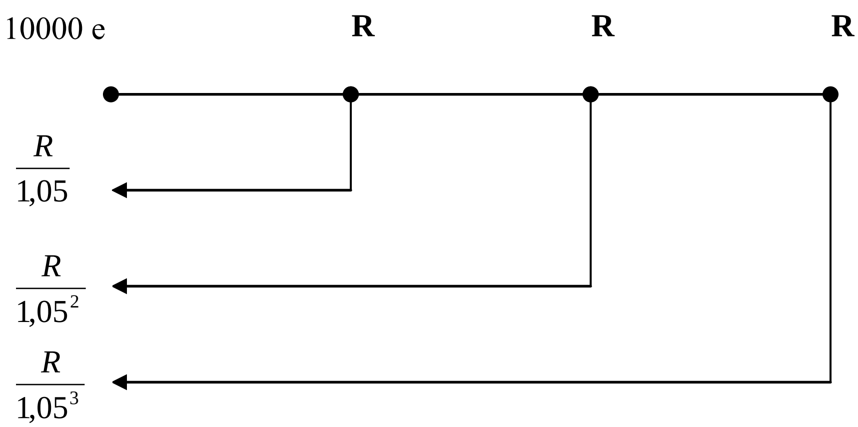
2.6. Рачун ренте

Размотримо сада један веома важан ток новца: ренту.

Пример 10. Пошто је сазнао за наш добитак пријатељ изненада долази код нас и затражи нам да му позајмимо 10000 евра за куповину плаца. Он нам обећа да ће нам враћати новац у три једнаке рате и то прву за годину дана, другу за две а трећу за три године. Притом се обавезао да ће нам дуг вратити уз каматну стопу 5%. Колико ће му износити рата?

Да бисмо одредили износ рате доведимо их у садашњи тренутак. Рата коју би нам пријатељ вратио кроз годину дана данас вреди $\frac{R}{1,05}$, рата коју би нам дао за две године данас вреди $\frac{R}{1,05^2}$, а трећа данас вреди $\frac{R}{1,05^3}$. Враћањем последње рате наш пријатељ нам измирује сав дуг, тј . на нули смо. Дакле закључујемо да је NPV овог тока новца једнака 0.

Посматрајмо шему 4.



Шема 4. Садашња вредност више једнаких рата

Дакле,

$$NPV = -10000 + \frac{R}{1,05} + \frac{R}{1,05^2} + \frac{R}{1,05^3} = 0$$

тј.

$$\frac{R}{1{,}05}+\frac{R}{1{,}05^2}+\frac{R}{1{,}05^3}=10000$$

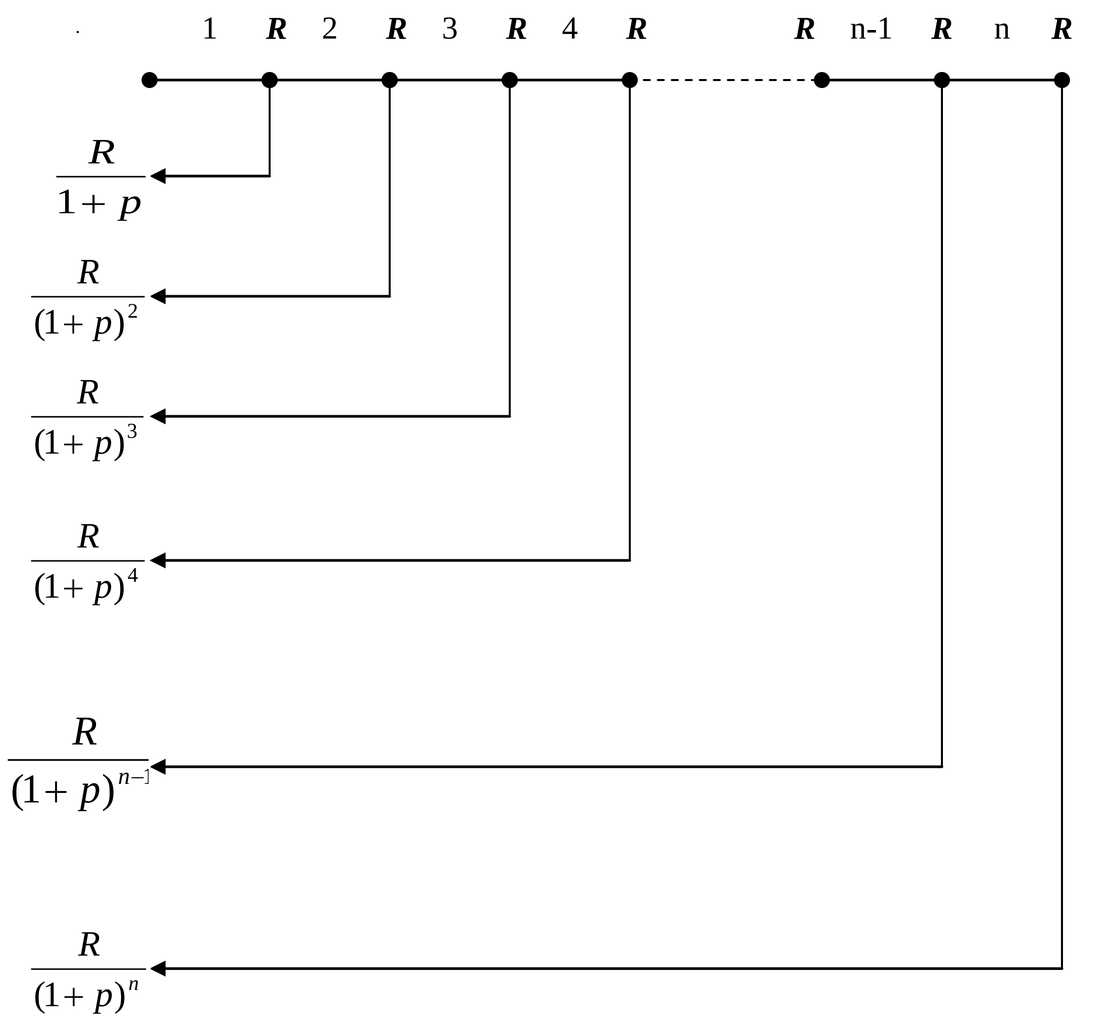
Извлачењем R ,

$$R\cdot\left(\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}05^2}+\frac{1}{1{,}05^3}\right)=10000$$

Одавде добијамо $R \approx 3676{,}5$ евра.

Сада можемо да уопштимо пример: Нека данас располажемо са ***G*** евра и на основу тога у наредних ***n*** година треба да примамо по ***R*** евра у једнаким ратама на сваких годину дана , али тако да прва рата буде тек за годину дана. Колико износи рата ако је каматна стопа ***p*** [2],[3]?

Опет морамо довести све вредности на садашњу вредност. Посматрајмо шему 5.



Шема 5. Рачун ренте када је улог крајем обрачунског периода

Са последњом ратом дуг је враћен, тј.

$$NPV = -G + \frac{R}{1+p} + \frac{R}{(1+p)^2} + \frac{R}{(1+p)^3} + \frac{R}{(1+p)^4} + ... + \frac{R}{(1+p)^n} = 0$$

Одавде добијамо,

$$\frac{R}{1+p} + \frac{R}{(1+p)^2} + \frac{R}{(1+p)^3} + \frac{R}{(1+p)^4} + ... + \frac{R}{(1+p)^n} = G$$

На левој страни се сусрећемо са збиром n чланова геометријске прогресије где је први члан $a_1 = \frac{R}{1+p}$, а количник $q = \frac{1}{1+p}$.

Применом формуле за збир n чланова геометријске прогресије и заменом добијамо,

$$G = \frac{R}{1+p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+p)^n}}{1 - \frac{1}{1+p}} \quad ,$$

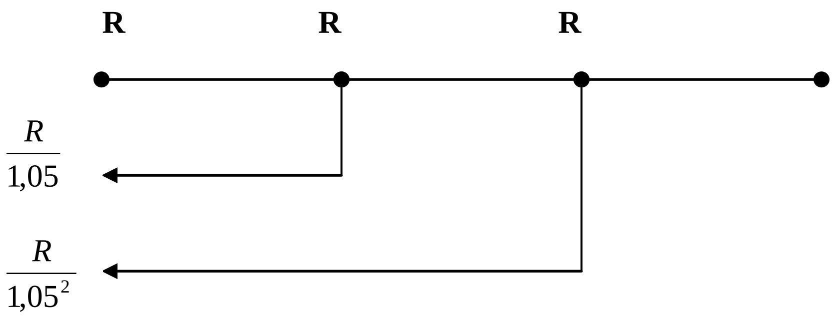
Сређивањем добијамо,

$$\boxed{R = G \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1}} \quad (14)$$

Ово је већ озбиљан финансијски модел, који представља начин израчунавња ренте, ако се **рента исплаћује крајем обрачунског периода**. Овај модел искористићемо касније када будемо обрађивали још један значајан ток новца а то је кредит.

Зашто је важно нагласити када се рента исплаћује илустроваће нам следећи пример.

Пример 11. Дуг нередовног платише према ЕЛЕКТРОДИСРИБУЦИЈИ је 20 000 динара. Како није у могућности да дуг исплати одједном обавезује се да ће дуг исплатити у три једнаке рате и то прву рату одмах а преостале у интервалима од годину дана уз стопу 5%. Колико ће износити сума коју ће да плаћа сваке године?



Шема 6. Плаћање дуга једнаким ратама

Ток готовог новца био би $CF = \{20000, -R, -R, -R\}$

Како последњом ратом дуг нередовног платише према ЕД се анулира, тј. на нули су, па према томе NPV=0.

Како одмах даје прву рату њена садашња вредност је R. Преостале две морамо довести у садашњи тренутак. Добијамо,

$$NPV = 20000 - R - \frac{R}{1{,}05} - \frac{R}{1{,}05^2} = 0$$

Тј.

$$R + \frac{R}{1{,}05} + \frac{R}{1{,}05^2} = 20000$$

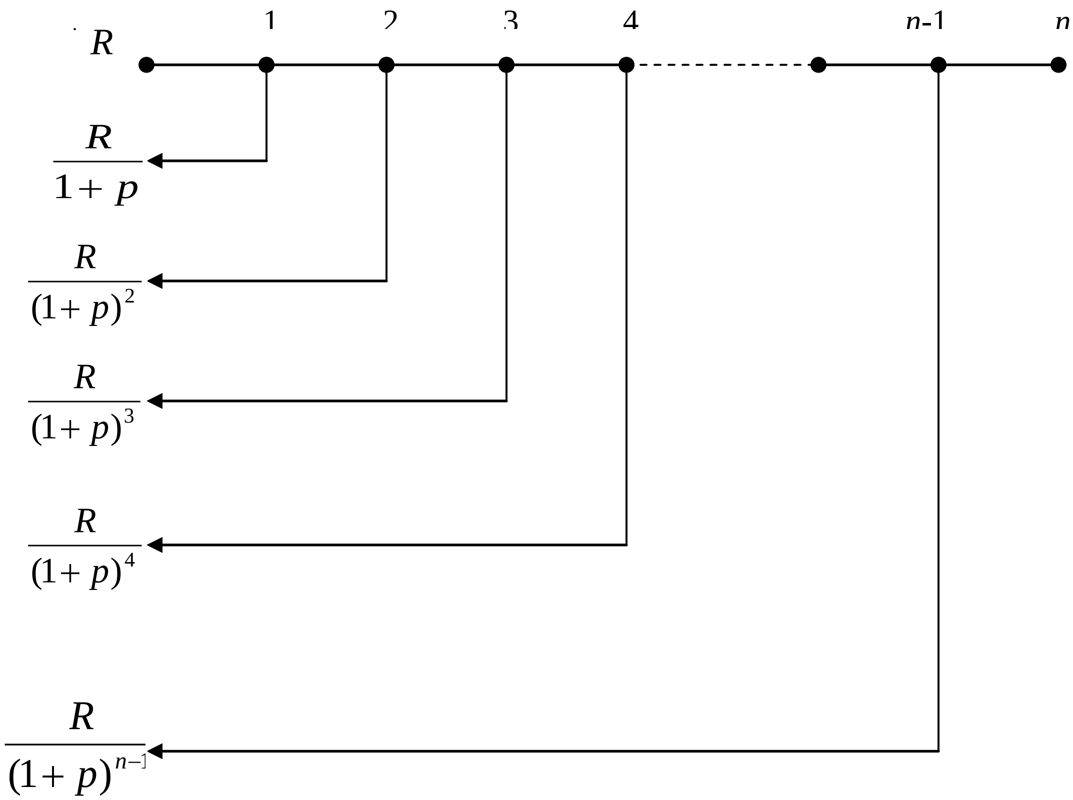
Извлачењем,

$$R \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2}\right) = 20000$$

Добијамо $R \approx 6993$ динара.

Уопштимо проблем: На основу дуга од ***G*** евра, обавезујемо се да ћемо дуг исплатити у ***n*** једнаких рата ***R*** и то прва рата одмах, а остале узастопно у интервалима од по годину дана. Све то уз стопу ***p.***

Посматрајмо шему 7.



Шема 7. Рачун ренте када је рента почетком обрачунског периода

Ток готовог новца овог дуга је $CF = \left\{ G, \underbrace{-R, -R, -R........-R}_{n} \right\}$

Како се са исплатом последње рате дуг анулира то опет NPV овог тока мора бити 0. Стога,

$$NPV = G - R - \frac{R}{1+p} - \frac{R}{(1+p)^2} - \frac{R}{(1+p)^3} - ...... - \frac{R}{(1+p)^{n-1}} = 0$$

Tj.

$$R + \frac{R}{1+p} + \frac{R}{(1+p)^2} + \frac{R}{(1+p)^3} + ... + \frac{R}{(1+p)^{n-1}} = G$$

Опет са леве стране уочавамо геометриски низ код кога је први члан $a_1 = R$ а количник $q = \frac{1}{1+p}$.

Заменом добијамо,

$$G = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+p)^n}}{1 - \frac{1}{1+p}} \quad ,$$

Након сређивања добијамо,

$$\boxed{R = G \cdot \frac{p \cdot (1+p)^{n-1}}{(1+p)^n - 1}} \quad (15)$$

Претходна формула омогућава израчунавање ренте, ако се **рента исплаћује почетком обрачунског периода.**

До сада смо имали случајеве где смо све новчане вредности доводили у садашњи тренутак. Међутим, некада ћемо имати потребу да израчунамо **будућу вредност новца**. На пример, ако у више наврата уложимо новац на исти штедни рачун а желимо да израчунамо са којом сумом располажемо после неког одређеног времена итд...

2.7. Рачун улога

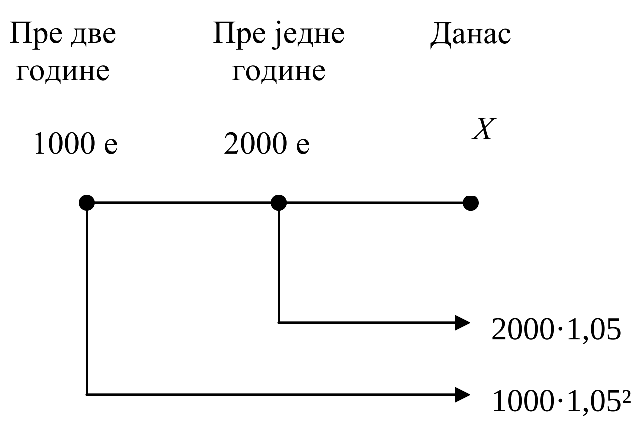
Проблем се своди на израчунавање збира будућих вредности улога, које улажемо у једнаким временским интервалима. Рецимо, код животног осигурања плаћамо премију у одређеним временским интервалима, да бисмо на основу тога на крају располагали са одређеном сумом која представља збир будућих вредности свих улога.

У ери у којој живимо врло је важно обезбедити себи финансијску сигурност стабилну и сигурну старост. Потпуна осигуравајућа заштита са гарантованом исплатом уговорене осигуране суме само су неки од разлога због чега се људи све више одлучују на склапање полиса *животног осигурања*. Животно осигурање омогућава дугорочну штедњу која се може користити за очување животног стандарда. Концепт осигурања је прост „улажем данас да би имао за сутра“. Саставни део сваке полисе представља тзв.ОСИГУРАНА СУМА са којом осигураник располаже по истеку рока осигурања која се формира на основу улога које осигураник уплаћује у једнаким временским интервалима [13].

Пример12. Пре две године оставили смо на штедњу 1000 евра, а пре годину дана на исти рачун додали још 2000 евра. Са којом сумом располажемо данас ако је каматна стопа 5%?

У овом проблему морамо све новчане вредности доводимо на данашњу вредност. 1000 евра које смо уложили пре две године данас вреди $1000 \cdot 1{,}05^2$, а 2000 евра које смо уложили прошле године данас вреди $2000 \cdot 1{,}05$.

Посматрајмо шему 8.



Шема 8. Будућа вредност новца

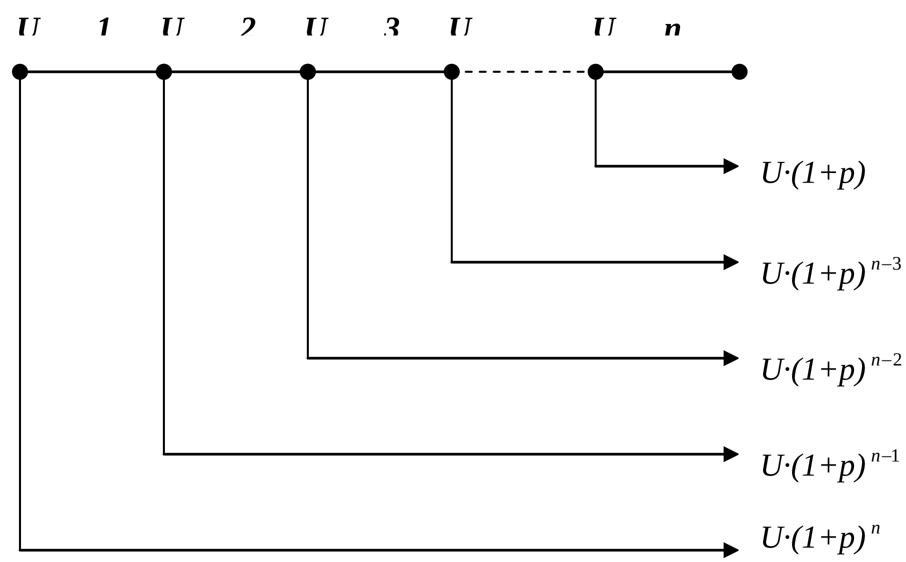
Дакле данас имамо,

$$X = 2000 \cdot 1{,}05 + 1000 \cdot 1{,}05^2 = 3202{,}5 \text{ евра.}$$

Приметимо, да је наша сума са којом располажемо данас једнака збиру увећаних појединачних улога. Сада можемо уопштити проблем. Колико је увећана сума на низ једнаких улога који се појављују у једнаким временским интервалима. Вратимо се на причу о осигурању.

Пример 13. На основу полисе животног осигурања уплаћујемо сваке године по *U* евра следећих *n* година. Прву рату уплаћујемо одмах, а остале редом у интервалима од по годину дана. Колиико износи загарантована сума S_n, са којом штедиша може да располаже на крају последње године ако је стопа *p*?

Проблем је сличан претходном проблему. Дакле, загарантована сума једнака је збиру свих вредности улога на крају последње године. Први улог ***U*** на крају ***n***-те године вреди $U \cdot (1+p)^n$, други улог на крају вреди $U \cdot (1+p)^{n-1}$.......Последњи вреди $U \cdot (1+p)$.
Погледајмо шему 8.



Шема 9. Рачун улога када је улог почетком обрачунског периода

Означимо са S_n загарантовану суму са којом располажемо на крају последње године. Загарантована сума једнака је збиру вредности свих увећаних улога. Добијамо,

$$S_n = U\cdot(1+p) + U\cdot(1+p)^2 + U\cdot(1+p)^3 + \ldots + U\cdot(1+p)^n$$

Опет уочавамо геометријски низ код кога је први члан $a_1 = U\cdot(1+p)$, а количник $q=(1+p)$. Потребно је сабрати *n* чланова низа. Добијамо,

$$\boxed{S_n = U\cdot(1+p)\cdot\frac{(1+p)^n-1}{p}} \quad (16)$$

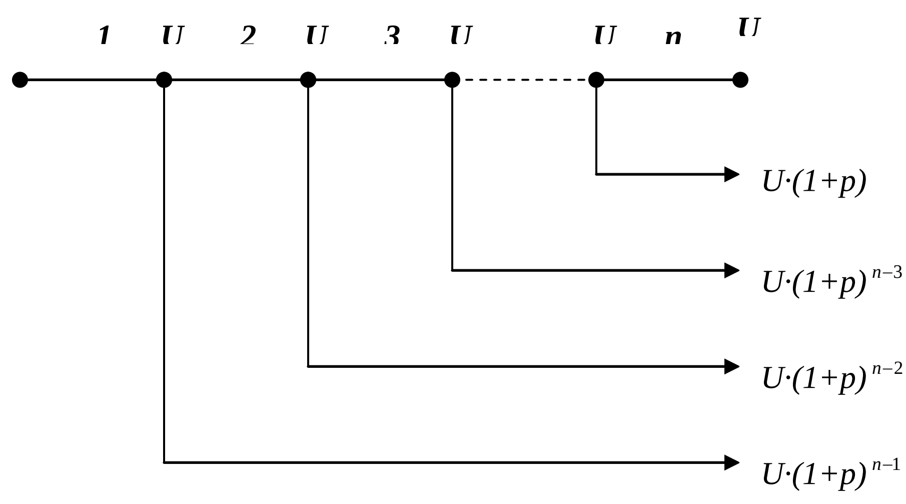
Ова формула представља формулу за збир свих ***n*** улога на крају ***n***- тог периода ако је улог уплаћиван на **почетку сваког обрачунског периода**.

Уочимо да се код рачуна улога за све улоге израчунава ***будућа*** *вредност („вредности улога иду унапред“) дао код ренте све вредности* ***дисконтујемо*** *тј. „враћамо све вредности уназад“.*

И код рачуна улога треба нагласити да је важно када се улози уплаћују почетком или крајем обрачунског периода.

Пример 14. Уплаћујемо сваке године по *U* евра следећих *n* година. Прву рату уплаћујемо на крају прве године, а остале редом у интервалима од по годину дана. Колиико износи сума свих улога S_n, са којом штедиша може да располаже на крају последње године ако је стопа *p*%?

Подматрајмо шему 10.



Шема 10. Рачун улога када је улог крајем обрачунског периода

Збир свих вредности улога на крају ***n*** – те године износи:

$$S_n = U + U \cdot (1+p) + U \cdot (1+p)^2 + U \cdot (1+p)^3 + ... + U \cdot (1+p)^{n-1}$$

Уочавамо опет геометријски низ, $a_1 = U$, $q = 1 + p$ па заменом у формулу за збир ***n*** чланова геометријског низа добијамо,

$$\boxed{S_n = U \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p}} \quad (17)$$

Ова формула представља формулу за збир свих ***n*** улога на крају ***n***- тог периода ако је улог уплаћиван на **крају сваког обрачунског периода**

2.8. Зајмови (Кредити)

Појмови попут: стамбени кредит, кеш кредит, кредит за рефинансирање, рата, отплата и сл. увелико су постали саставни део свакодневнице.
Кредити су посебни имовинско правни односи између зајмодавца (банка) и зајмопримаоца (правна или физичка лица) који се заснивају на посебним уговорима [4].

Банке дају зајмове и одређују њихову намену, док из тога произилазе и обавезе корисника. Уговором о зајму регулишу се висина зајма, намена коришћења зајма, интересна стопа, време трајања, висина отплате индексирана у валути у којој се узима кредит.

Најчешће питање онога ко намерава да узме кредит јесте колика ће бити рата. Рата се најчешће плаћа месечно, али не умањујући општост а једноставности ради у даљој причи претпоставићемо да га враћамо једнаким годишњим ратама. Рата кредита још се зове и **ануитет**. Кроз рате кредита ми истовремено отплаћујемо и кредит и камату, тд. ануитет садржи камату и отплату чије се вредности мењају.

Пример 15. За потребе куповине стана подигли смо кредит у износу од *К* евра на период од *n* година једнаким годишњим ратама са каматном стопом *p* на годишњем нивоу. Колико износи ануитет (рата) *A*?

Ток готовог новца који прати кредит је $CF = \left\{ K, \underbrace{-A, -A, -A, -A ..... -A}_{n} \right\}$. Са последњом ратом анулирали смо дуг па је NPV једнака 0.

$$NPV = K - \frac{A}{1+p} - \frac{A}{(1+p)^2} - .... - \frac{A}{(1+p)^n} = 0$$

Tj.

$$K = \frac{A}{1+p} + \frac{A}{(1+p)^2} + ... + \frac{A}{(1+p)^n}$$

Уочавамо да смо сличан проблем имали код рачуна ренте па можемо искористити формулу коју смо тамо извели. Добијамо,

$$\boxed{A = K \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1}} \quad (18)$$

Претходна формула омогућава да ако имамо вредност кредита који отплаћујемо са ***n*** ануитета уз каматну стопу ***p*** израчунамо вредност ануитета. Наиме, ако одлучимо да подигнемо кредит у износу од 10000 евра на период од 10 година уз каматну стопу 5% који бисмо отплаћивали годишњим ратама (иако то није уобичајно), рата кредита износила би

$$A = 10000 \cdot \frac{0{,}05 \cdot 1{,}05^{10}}{1{,}05^{10} - 1} \approx 1295{,}05 \text{ евра.}$$

Већина пословних банака као један од услова да би физичком лицу одобрили кредит узима и висину месечног примања, тј. месечна рата кредита може ићи само до трећине месечних примања. Зато је веома важно знати колико је максималан износ кредита који можемо узети код комерцијалних банака. Односно, на основу ануитета израчунати износ кредита. Опет ћемо ради једноставности посматрати кредит узет на ***n*** година који се отплаћује годишњим ануитетима који износе ***A*** евра.

Пример 16. За потребе куповине стана хоћемо да подигнемо кредит у максималном износу на период од *n* година једнаким годишњим ратама које износе *A* евра са каматном стопом *p* на годишњем нивоу. Колики је максималан износ кредита *K* који можемо подићи?

Из формуле (18) за ануитет

$$A = K \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

Добијамо да је износ кредита

$$\boxed{K = A \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p \cdot (1+p)^n}} \quad (19)$$

Ова формула омогућава да лако израчунамо максималан износ кредита који можемо подићи на основу наших примања.

У претходним примерима због једноставности претпоставили смо да се кредит враћа годишњим ануитетима. У пракси су најчешћи кредити који се отплаћују **месечним ануитетима**.

Пример 17. За потребе куповине стана подижемо кредит од 10000 евра на 5 година. Колико износи месечна рата ако је каматна стопа 6% на годишњем нивоу?

Износ нашег кредита је $\boldsymbol{K}$ = 10000 евра. Како кредит враћамо 5 година једнаким месечним ратама то је укупан број ануитета $\boldsymbol{n}$ = 60. Каматна стопа дата је на годишњем нивоу па је онда потребно израчунати **релативну** месечну каматну стопу дељењем годишње стопе са 12. Добијамо да је $\boldsymbol{p}$= 0,5%. Сада врло лако можемо израчунати колико износи рата кредита. Наиме,

$$A = K \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = 10000 \cdot \frac{0{,}005 \cdot 1{,}005^{60}}{1{,}005^{60} - 1} \approx 193{,}33 \text{ евра.}$$

Приликом подизања кредита уз уговор о кредиту добијамо још један важан документ, а то је план отплате кредита (**план амортизације зајма**).

2.8.1. План амортизације зајма

Планом амортизације зајма прецизно су дефинисане обавезе корисника зајма према зајмодавцу. План амортизације зајма осим вредности ануитета садржи и податке о висини камате и отплате чији збир представља износ ануитета, а чије су вредности промењиве. На примеру ћемо показати како се врши амортизација зајма.
Како је најчешћи случај да се **кредит враћа једнаким ратама** то ћемо се и овде позабавити истим.

Пример 18. За потребе опремања новог фабричког погона подигнут је банкарски кредит у износу од 200 000 евра који се амортизује једнаким

годишњим ануитетима у току 5 година уз каматну стопу 6% на годишњем нивоу. Направимо план амортизације зајма [2].

У овом примеру износ кредита ***К*** = 200 000 евра. Број ануитета је ***n*** = 5 а каматна стопа је ***p*** = 6%.

Прво израчунавамо вредност ануитета.

$$A = K \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = 200000 \cdot \frac{0{,}06 \cdot 1{,}06^5}{1{,}06^5 - 1} = 47479{,}28 \text{ евра.}$$

Дакле годишња финансијска обавеза коју фабрика има на име амортизације кредита је 47479,28 евра. Кроз сваку рату кредита отплаћујемо главницу али и припадајућу камату.

Да бисмо израчунали колико смо отплатили кроз прву рату кредита прво ћемо израчунати колико износи припадајућа камата на износ дуга за прву годину.

Применом формуле (4) добијамо,

$$I_1 = K \cdot p = 200000 \cdot 0{,}06 = 12000 \text{ евра.}$$

Како је сваки ануитет збир камате и отплате то је прва отплата у означи b_1 једнака

$$b_1 = A - I_1 = 47479{,}28 - 12000 = 35479{,}28 \text{ евра.}$$

Дакле после прве године укупан дуг се смањује за износ отплате, па остатак дуга (у означи $\boldsymbol{R}_n$ где индекс ***n*** означава остатак дуга на почетку ***n***- тог периода) на почетку друге године износи:

$$R_2 = 200000 - 35479{,}28 = 164520{,}72 \text{ евра.}$$

Интререс за други период обрачунава се на на остатак дуга па он износи,

$$I_2 = 164520{,}72 \cdot 0{,}06 = 9871{,}24 \text{ евра.}$$

Како је сваки ануитет збир камате и отплате, друга отплата износи,

$$b_2 = A - I_2 = 47479{,}28 - 9871{,}24 = 37608{,}04 \text{ евра.}$$

После другог плаћеног ануитета остатак дуга умањен је за другу отплату па је на почетку трећег обрачунског периода износи

$$R_3 = 164520{,}72 - 37608{,}04 = 126912{,}68 \text{ евра.}$$

Интерес за трећи обрачунски период обрачунава се на остатак дуга на почетку тог обрачунског периода па он износи

$$I_3 = 126912{,}68 \cdot 0{,}06 = 7614{,}76 \quad \text{евра.}$$

Трећа отплата износи

$$b_3 = A - I_3 = 47479{,}28 - 7614{,}76 = 39864{,}52 \text{ евра.}$$

Дуг на почетку четвртог обрачунског периода умањује се за трећу отплату и он износи,

$$R_4 = 126912{,}68 - 39864{,}52 = 87048{,}16 \text{ евра.}$$

На тај остатак дуга обрачунава се четврта камата и она износи,

$$I_4 = 87048{,}16 \cdot 0{,}06 = 5222{,}88 \quad \text{евра.}$$

Четврта отплата износи,

$$b_4 = A - I_4 = 47479{,}28 - 5222{,}88 = 42256{,}4 \text{ евра.}$$

Износ дуга на почетку последњег обрачунског периода износи,

$$R_5 = 87048{,}16 - 42256{,}4 = 44791{,}76 \text{ евра.}$$

Последњи интерес износи,

$$I_4 = 44791{,}76 \cdot 0{,}06 = 2687{,}52 \quad \text{евра.}$$

Последња отплата износи,

$$b_5 = A - I_5 = 47479{,}28 - 2687{,}52 = 44791{,}76 \text{ евра.}$$

На крају одузмимо од остатка дуга на почетку последњег периода последњу отплату. Добијамо,

$$R_5 - b_5 = 44791{,}76 - 44791{,}77 = 0$$

што значи да се плаћањем последњег ануитета анулира дуг према банци.

Ради прегледности можемо приказати амортизациони план табелом 1.

Табела 1. Амортизациони план

Редни број ануитета	**Остатак дуга**	**Камата**	**Отплата**	**Ануитет**
1.	**200 000,00**	**12000,00**	**35479,28**	**47479,28**
2.	**164520,72**	**9871,24**	**37608,04**	**47479,28**
3.	**126912,68**	**7614,76**	**39864,52**	**47479,28**
4.	**87048,16**	**5222,88**	**42256,40**	**47479,28**
5.	**44791,76**	**2687,52**	**44791,76**	**47479,28**
$\sum$		**37396,4**	**200000**	**237396,4**

Уочимо, временом камата опада а износ отплате расте.

Контрола ваљаности амортизационог плана може се урадити на неколико начина:

1. Збир отплата мора да буде једнак зајму

2. Последња отплата мора бити једнака остатку дуга на почетку последњег периода

3. Сума колоне камата + сума колоне отплата = сума колоне ануитет

Уочичемо неке битне односе између отплата.

2.8.2. Везе између отплата

Пођимо од ануитета представљених у амортизационом плану.

За први обрачунски период:

$$A = b_1 + I_1 = b_1 + K \cdot p$$

За други обрачунски период:

$$A = b_2 + I_2 = b_2 + (K - b_1) \cdot p \quad ,$$

јер се камата за други обрачунски период обрачунава на дуг умањен за прву отплату.

За трећи обрачунски период :

$$A = b_3 + I_3 = b_3 + (K - b_1 - b_2) \cdot p \quad ,$$

јер се камата за трећи обрачунски период обрачунава на дуг умањен за збир прве и друге отпалте отплате, итд......
Ако изједначимо прву и другу релацију добијамо,

$$b_1 + K \cdot p = b_2 + K \cdot p - b_1 p$$

Одавде добијамо,

$$\boxed{b_2 = b_1 \cdot (1 + p)} \quad (20)$$

Претходна релација представља везу између прве и друге отплате.

Изједначавањем друге и треће релације добијамо,

$$b_2 + K \cdot p - b_1 \cdot p = b_3 + K \cdot p - b_1 \cdot p - b_2 \cdot p$$

Сређивањем,

$$\boxed{b_3 = b_2 \cdot (1 + p)} \quad (21)$$

Ова релација представља везу између друге и треће отплате.

Ако другу релацију убацимо у прву добијамо следећу везу,

$$\boxed{b_3 = b_1 \cdot (1+p)^2} \quad (22)$$

Настављајући даље добијамо,

$$\boxed{b_4 = b_3 \cdot (1+p) = b_1 \cdot (1+p)^3} \quad (23)$$

....

$$\boxed{b_n = b_{n-1} \cdot (1+p) = b_1 \cdot (1+p)^{n-1}} \quad (24)$$

Ако поређамо све отплате

$$\begin{aligned}
&b_1 \\
&b_2 = b_1 \cdot (1+p) \\
&b_3 = b_1 \cdot (1+p)^2 \\
&b_4 = b_1 \cdot (1+p)^3 \\
&...................... \\
&b_n = b_1 \cdot (1+p)^{n-1}
\end{aligned}$$

уочавамо да све отплате формирају геометријску прогресију са количником $q = 1+p$.

Уверавамо се у претходном примеру,

$$b_2 = b_1 \cdot (1+p) = 35479{,}28 \cdot 1{,}06 = 37608{,}04$$

$$b_3 = b_2 \cdot (1+p) = 37608{,}04 \cdot 1{,}06 = 39864{,}52$$

итд......

Сада можемо израчунати **отплаћени дуг са *c* ануитета**. Означимо га са $\boldsymbol{O_c}$**.**

Наиме,

$$O_c = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_c$$

Заменом горе наведених релација на основу (24) добијамо

$$O_c = b_1 + b_1 \cdot (1+p) + b_1 \cdot (1+p)^2 + ... + b_1 \cdot (1+p)^{c-1}$$

Опет добијамо суму геометријског низа код кога је први члан b_1, а количник $(1+p)$.

Применом формуле за збир чланова геометријског низа добијамо:

$$\boxed{O_c = b_1 \cdot \frac{(1+p)^c - 1}{p}} \quad (25)$$

Претходна формула омогућава да без израде амортизационог плана израчунамо отплаћени дуг са ***c*** плаћених ануитета.

Када знамо да израчунамо колико смо дуга отплатили са ***c*** плаћених ануитета можемо израчунати колико нам је дуга остало после ***c*** – тог плаћеног ануитета.
Наиме, остатак дуга добијамо кад од износа кредита одузмемо отплаћени део, тј.

$$\boxed{R_{c+1} = K - O_c} \quad (26)$$

Претходна формула омогућава **израчунавање остатка дуга на почетку *c*+1 –ог периода отплаћивања (после *c* – тог плаћеног ануитета ануитета).**

Како је врло често да се у току отплате дугорочних кредита мењају кредитни услови, претходна формула ће нам бити од великог значаја.

2.8.3. Конверзија зајма

Било која промена услова отплаћивања назива се конверзија зајма. До промене може доћи на захтев корисника (рецимо рефинансирање дуга), али и банка задржава право да у току отплате промени услове отплате кредита.
Конвертовање зајма значи или промену каматне стопе или продужење времена отплаћивања, или и једно и друго [6].
Приликом конверзије зајма потребно је утврдити остатак дуга у тренутку конверзије, који у односу на нове услове представља нови дуг.

Пример 19. Подигли смо стамбени кредит на 5 година у износу 10000 евра уз каматну стопу 6% на годишњем нивоу који отплаћујемо месечним ануитетима. После плаћене 22. рате, банка врши промену услова тако што смањује каматну стопу на 4,8 % годишње а број периода отплате остаје исти. Колико ће износити нова рата кредита?

Вредност кредита је ***K***=10000 евра, укупан број рата је ***n***=60, а релативна месечна каматна стопа износи ***p***=0,5%.

Прво да израчунамо вредност ануитета,

$$A = K \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = 10000 \cdot \frac{0,005 \cdot 1,005^{60}}{1,005^{60} - 1} \approx 193,33 \text{ евра.}$$

Како после плаћене 22. рате кредита долази до промена услова отплате, неопходно је израчунати остатак дуга после 22. ануитета.

Прво је потребно израчунати колико дуга смо отплатили тј. $\boldsymbol{O}_{22}$.

Израчунајмо прву отплату,

$$b_1 = A - I_1 = A - K \cdot p = 193,33 - 10000 \cdot 0,005 = 143,33 \text{ евра.}$$

Сада можемо израчунати отплаћени део кредита са 22 ануитета (формула 25).

$$O_{22} = 143,33 \cdot \frac{(1+0,005)^{22} - 1}{0,005} = 3324,46 \text{ евра.}$$

Преостао дуг након плаћене 22. рате износи (формула 26):

$$R_{23} = 10000 - 3324,46 = 6675,54 \text{ евра}$$

Овај износ посматрамо као нови дуг. Означимо га са $\boldsymbol{K}_1$.
Како је приликом конверзије дошло до промене годишње стопе нова релативна месечна стопа износи

$$p_1 = \frac{4,8}{12}\% = 0,4\%$$

Како се период отплате није мењао преостало нам је још 38 рата, тј.

$$\boldsymbol{n}_1 = 60 - 22 = 38$$

Нови месечни ануитет износи,

$$A_1 = K_1 \cdot \frac{p_1 \cdot (1+p_1)^{n_1}}{(1+p_1)^{n_1} - 1} = 6675,54 \cdot \frac{0,004 \cdot 1,004^{38}}{1,004^{38} - 1} = 189,71 \text{ евра.}$$

Претходни пример илустује рад приликом конверзије зајма.

2.9. Релативна и конформна каматна стопа

Каматна стопа прописана законом или уговорном обавезом која се односи на одређени временски период назива се **номинална каматна стопа**.
Уколико се времански период на који се односи номинална каматна стопа не поклапа са периодом капиталисања израчунава се **релативна каматна** стопа која одговара периоду капиталисања. Она се у пракси примењује због своје једноставности, али њена примена може да изазове и неке проблеме [2].

Пример 20. Улажемо смо 1000 евра у банку која даје каматну стопу 5% на годишњем нивоу. Са којом сумом располажемо на крају године ако је капиталисање

1) **годишње**
2) **полугодишње**

1) Са оваквим примерима смо се већ сусретали

$$G_1 = G \cdot (1+p) = 1000 \cdot 1{,}05 = 1050 \text{ евра.}$$

2) Како је капиталисање полугодишње то је број капиталисања ***n***=2, док је одговарајућа полугодишња релативна каматна стопа ***p*** = 2,5%

Добијамо,

$$G_1 = G \cdot (1+p)^2 = 1000 \cdot 1{,}025^2 = 1050{,}62 \text{ евра.}$$

Одмах уочавамо разлику у износу суме са којом бисмо располагали на крају истог временског периода. Уочавамо да се при укамаћивању у исподгодишњим периодима добијају већи износи него при годишњем капиталисању.

Да бисмо отклонили проблеме овог типа користимо **конформну каматну стопу**.

Каматна стопа која нам при испогодишњем капиталисању даје исту увећану главницу на крају године као и исти улог при годишњем капиталисању назива се **конформна каматна стопа.**

Нека у току године има ***m*** капиталисања .По дефиницији конформне каматне стопе добијамо,

$$K \cdot (1+p) = K \cdot \left(1+p_{konformno}\right)^m$$

Скраћивањем добијамо,

$$(1+p)=(1+p_{konformno})^{m}$$

После трансформације

$$(1+p_{konformno})=(1+p)^{\frac{1}{m}}$$

добијамо,

$$\boxed{p_{konformno}=\sqrt[m]{1+p}-1} \quad (27)$$

У нашем претходном примеру ефективна полугодишња конформна каматна стопа била би,

$$p_{konformno}=\sqrt[m]{1+p}-1=\sqrt{1+0{,}5}-1=0{,}0247=2{,}47\%$$

Одмах уочавамо да је **конформна каматна стопа мања од одговарајуће релативне** која се односи на исти обрачунски период.

3.Интерна стопа приноса (IRR)
(Internal Rate of Return)

Интерна стопа приноса је метода за оцену економске исплативости инвестиције. **Она представља годишњу стопу приноса на капитална улагања у неки пројекат.**

Унутрашња стопа прихода је каматна стопа која изједначава садашњу вредност примања од разматраног пројекта са садашњом вредношћу капиталних издатака у тај пројекат [2].

Пре него што се позабавимо начином израчунавања интерне стопе приноса, позабавићемо се проблемом израчунавања средњег рока плаћања.

3.1 Израчунавање средњег рока плаћања

Пример 21. Нека су обавезе дужника дате табелом 2:

Табела 2. Обавезе дужника са роком доспећа и каматном стопом

Износ обавезе дужника	**Време доспећа дуга (рачунато у данима)**	**Каматна стопа по којој се дуг враћа**
K_1	d_1	p_1
K_2	d_2	p_2
K_3	d_3	p_3
....	....	....
K_n	d_n	p_n

Дужник хоће да измири цео дуг одједном после средњег рока d_s уз средњу стопу p_s .

Како приликом ове трансакције не смеју бити оштећени ни дужник ни поверилац то значи да **збир камата на појединачне улоге мора бити једнак камати на укупан збир дуговања уз средњи рок и средњу стопу p_s .**

$$K_1 \cdot p_1 \cdot \frac{d_1}{360} + K_2 \cdot p_2 \cdot \frac{d_2}{360} + ... + K_n \cdot p_n \cdot \frac{d_n}{360} = \left(K_1 + K_2 + K_3 + ...K_n\right) \cdot p_s \cdot \frac{d_s}{360}$$

После трансформације датог израза добијамо

$$\boxed{d_s = \frac{K_1 \cdot p_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot p_2 \cdot d_2 + ... + K_n \cdot p_n \cdot d_n}{\left(K_1 + K_2 + ... + K_n\right) \cdot p_s}} \quad (28)$$

Ова формула омогућава да се израчуна средњи рок плаћања дуговања који представља број дана (почев од неког рока) до када се мора вратити цео дуг.

Ако су **стопе једнаке** формула се трансформише у

$$\boxed{d_s = \frac{K_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot d_2 + ... + K_n \cdot d_n}{\left(K_1 + K_2 + ... + K_n\right)}} \quad (29)$$

.

Приметимо да ова формула важи и када је време дато у месецима или годинама.

3.2. Израчунавање интерне стопе приноса

Приликом израчунавања стопе приноса потребно је наћи ону стопу која садашњу вредност пројекта своди на нулу.

Пример 22. Нека су новчана примања P_1, P_2, P_3….. P_h, у тренуцима $t_1, t_2, t_3.....t_h$ која прате неки пројекат и нека су $C_1, C_2, C_3,....C_k$ издаци у тренуцима $t_1, t_2, t_3....t_k$ за тај пројекат. Колика је интерна стопа приноса [2]?

По дефиницији интерне стопе приноса добијамо,

$$\frac{P_1}{(1+p)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+p)^{t_2}} + ... + \frac{P_h}{(1+p)^{t_h}} = \frac{C_1}{(1+p)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+p)^{t_2}} + ... + \frac{C_k}{(1+p)^{t_k}}$$

На основу средњег рока плаћања (формула 29) , који смо обрадили у претходном делу, добијамо

$$\frac{P_1}{(1+p)^{t_1}}+\frac{P_2}{(1+p)^{t_2}}+.....+\frac{P_h}{(1+p)^{t_h}}=\frac{P_1+P_2+....+P_h}{(1+p)^{t_p}}$$

Односно,

$$\frac{C_1}{(1+p)^{t_1}}+\frac{C_2}{(1+p)^{t_2}}+.....+\frac{C_k}{(1+p)^{t_k}}=\frac{(C_1+C_2+....+C_k)}{(1+p)^{t_c}}$$

Убацивањем у почетну релацију добијамо,

$$\frac{P_1+P_2+....P_h}{(1+p)^{t_p}}=\frac{(C_1+C_2+....+C_k)}{(1+p)^{t_c}}$$

Одавде,

$$\frac{P_1+P_2+....P_h}{C_1+C_2+....C_k}=\frac{(1+p)^{t_p}}{(1+p)^{t_c}}$$

Коришћењем особина степена истих основа добијамо,

$$\frac{P_1+P_2+....P_h}{C_1+C_2+....C_k}=(1+p)^{t_p-t_c}$$

Односно,

$$\boxed{p=\sqrt[t_p-t_c]{\frac{P_1+P_2+....+P_h}{C_1+C_2+....+C_k}}-1} \quad (30)$$

Добили смо формулу за израчунавање **интерне стопе приноса** код које t_p, t_c представљају средње рокове тј.

$$t_p=\frac{P_1\cdot t_1+P_2\cdot t_2+....+P_h\cdot t_h}{P_1+P_2+........+P_h},$$

односно,

$$t_c = \frac{C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2 + ... + C_k \cdot t_k}{C_1 + C_2 + ... + C_k}$$

Пример 23. Наћи интерну стопу приноса за инвестицију представљену табелом 3.

Табела 3. Новчани ток инвестиције

Година	**Приход(у еврима)**	**Расход (у еврима)**
1.	**220**	**200**
2.	**250**	**150**
3.	**315**	**150**
4.	**200**	**150**

Потребно је прво одредити средње рокове t_p, t_c

$$t_p = \frac{P_1 \cdot t_1 + P_2 \cdot t_2 + ... + P_h \cdot t_h}{P_1 + P_2 + ... + P_h} = \frac{220 \cdot 1 + 250 \cdot 2 + 315 \cdot 3 + 200 \cdot 4}{985} = 2{,}502538$$

$$t_c = \frac{C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2 + ... + C_k \cdot t_k}{C_1 + C_2 + ... + C_k} = \frac{200 \cdot 1 + 150 \cdot 2 + 150 \cdot 3 + 150 \cdot 4}{650} = 2{,}384615$$

Заменом у формулу (30)

$$p = \sqrt[t_p - t_c]{\frac{P_1 + P_2 + ... + P_h}{C_1 + C_2 + ... + C_k}} - 1$$

добијамо,

$$p = \sqrt[0{,}1179277]{\frac{985}{650}} - 1 = 0{,}3295 = 32{,}95\%$$

Да би инвестициони пројекат могао бити прихваћен неопходно је да интерна стопа буде једнака или већа од цене капитала [2].

4. Настава финансијске математике у школама у Србији

Иако је значај финансијске писмености препознат и постао неодвојив део математичке писмености, финансијско образовање готово да не постоји, или се појављује у траговима, у редовној настави математике у школама. Као изузетак треба узети образовање у средњим економским школама где се она обрађује у задовољавајућем обиму.

Настава математике у основним школама не обрађује у довољној мери овај битан сегмент образовања иако је његова важност велика. Осим приче о процентном рачуну, где се највећи део пажње посвећује разумевању појма процента и његовом израчунавању, готово да се не дотиче сфера примене истог у реалним проблемима који су повезани са основним финансијским образовањем.
У средњим школама (осим економске) ситуација није ни мало боља. У редовној настави у првом разреду средње школе убачени су делови простог каматни рачуна, док се у трећем разреду гимназија помиње појам сложен каматни рачун. Велики недостатак је мали број часова који обрађују ову тематику. У првој години прост каматни рачун као део целине „Процентни и каматни рачун“ обрађује се са два часа, док је за обраду сложеног каматног рачуна издвојен само један час.

Наставним планом и програмом за средње економске школе настава финансијке математике се обрађује у задовољавајућем обиму. Подељена је на неколико тематских целина који се обрађују у једној или две године подељено:

- Прост каматни рачун
- Сложени каматни рачун
- Рачун улога
- Рачун ренте
- Зајмови

Крајњи циљеви наставе финансијске математике у средњим економским школама су:

- стицање основног знања и примена простог и сложеног каматног рачуна,
- примена сложеног каматног рачуна у рачуну улога и рачуну ренте,
- стицање основних знања о елементима зајма,
- овладавање поступком израде амортизационог плана,
- стицање знања о конверзији зајма.

Навешћемо компетенције које се очекују од ученика, тј. шта је оно шта се очекује да ће ученик бити у стању да уради на крају школовања:

- примени формулу за израчунавање интереса ако је врене дато у годинама, месецима или данима,
- примени каматни рачун више и ниже сто,
- препозна разлику између простог и сложеног каматног рачуна,
- израчуна увећану вредност главнице,
- израчуна време и каматну стопу,
- израчуна почетну вредност главнице,
- израчуна сложену камату,
- објасни појам конформне каматне стопе,
- одреди будућу вредност више периодичних улога при улагању почетком и крајем периода,
- објасни појам садашње вредности више периодичних сума које се исплаћују почетком или крајем периода као и да израчуна збир садашњих вредности,
- одреди вредност исплате крајем или почетком периода,
- разликује врсте зајмова,
- објасни смисао амортизационог плана,
- објасни појам ануитета, отплате, камате као и да зна да их израчуна,
- објасни појмове отпалћени дуг и остатак дуга као и да зна да их израчуна,
- сачини амортизациони план,
- изврши контролу ваљаности амортизационог плана,
- објасни појам конверзије зајма,
- препозна промену услова отплаћивања зајма,
- одреди нови ануитет након промене времена амортизације или каматне стопе.

Укупан фонд часова предвиђен за обраду свих целина финансијке математике је различит од смера до смера и креће се од 70 до 80 код огледних одељења односно 40 код класичних економских одељења. Имајући у виду прописане циљеве наставе финансијске математике и компетенције које ученик треба да има на крају број часова може се сматрати довољним за квалитетну теоријску обраду теме.

Кроз PISA тестове рађене у нашој земљи види се један велики недостатак наставе математике у основним и средњим школама а то је примена знања на решавање конкретних проблема. Тај недостатак није заобишао ни финансијску математику.

У ери када тржиште финансија из дана у дан избацује нове „производе“ врло је важно праћење поменутих трендова и модернизовање наставе финансијске математике.

Управо је важно инсистирати на разумевању и применама знања као и индетификовању и математичком моделирању нових производа који се појављују на тржишту а који постају саставни део модерног живота. Рецимо:

- Електронско банкартво
- Плаћање кредитним картицама и др.

У једној таквој динамичној сфери какво је финансијко образовање, врло је важан квалитет и редовно ажурирање (праћење новчаних токова) уџбеника и осталих припратних материјала који су у служби наставе финансијске математике. Нажалост, задаци који се налазе у постојећим уџбеницима нису прилагођени савременим токовима, па су наставници препуштени личним способнистима сналажења и импровизације.

Као највећи недостатак наставе финансијске математике у средњим економским школама јесте занемаривање математичких модела на којима се базира финансијска математика. Наиме, у настави финансијске маематике у циљу „лакшег рачунања“ уводе се **финансијске таблице** као помоћни део наставе финансијске математике.

Без обзира што омогућавају брже израчунавање неких проблема, употреба таблица са друге стране сакрива основе финансијске моделе што може да изазове несагледиве последице.

Кренемо редом од основне формуле (10) сложеног каматног рачуна која је обрађена у одељку 2.3

$$G_n = G \cdot (1+p)^n$$

Вредност $(1+p)^n$ је вредност која се налази у првим таблицама на месту I_p^n где је

па добијамо ,

$$\boxed{G_n = G \cdot I_{p_1}^{\ n}} \quad (31)$$

У истом одељку смо извели формулу за проналажење почетне главнице (8)

$$G = \frac{G_n}{(1+p)^n}$$

Вредност $\frac{1}{(1+p)^n}$ налази се у другим таблицама на месту $II_{p_1}^n$.

Па преко таблица наша формула за проналажење почетне главнице добијамо,

$$\boxed{G_n = G \cdot II_{p_1}^{\ n}} \quad (32)$$

Формула за збир будућих вредности свих улога (17)

$$S_n = U \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p}$$

записана преко таблица постаје

$$\boxed{S_n = U \cdot III_{p_1}^{\ n}} \quad (33)$$

где је

$$I_p^1 + I_p^2 + ... + I_p^n = III^n{}_p = \frac{(1+p)^n - 1}{p} \quad (34)$$

У одељку 3.6 извели смо формулу за израчунавање ренте ако је рента крајем обрачунског периода (14)

$$R = G \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

Записана преко таблица она гласи

$$\boxed{R = G \cdot IV_{p_1}^{\ n}} \quad (35)$$

где је,

$$II_p^1 + II_p^2 + ... + II_p^n = IV_p^n = \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1} \quad (36)$$

Видимо да се запис формула појендоставио употребом таблица, али тај појендостављени запис сакрива и **тера у заборав** математички модел на коме се заснива финансијска математика.
Рецимо, због лакшег памћења ученици ће врло брзо заборавити шта се крије иза четвртих таблица, већ ће запамтити да су оне збир других, итд....

Други велики проблем је ограничена могућност рада са таблицама. У таблицама се налазе само *лепе вредности* каматних стопа, па стога није могуће решавати практичне проблеме, рецимо оне где се у обрачуну употребљава конформна каматна стопа.
А ако заборавимо математички модел који се налази испод овог лепог записа , онда заиста имамо проблем.

5. Предлог за унапређење праксе

Главни проблем који настава математике има јесте како променити став ученика о математици. Математика се углавном доживљава као апстрактна тешка и досадна наука која нема неке примене у животу. Разбијање те предрасуде је дуг и напоран процес. Развијање финансијске писмености као део наставе математике може бити средство којим ову предрасуду можемо разбити и приближити матемтику младим људима .

Проблем који има настава је недостатак основног финансијског образовања потребног за живот. Финансијску писменост не представља само гомила формула које смо извели у претходним поглављима. Ти математички модели јесу важни као део финансијске писмености јер помажу младом човеку да анализира конкретне ситуације и доноси ваљане одлуке. Самим тим грешке приликом важних корака у животу (подизање стамбеног кредита, улагање у инвестиционе пројекте итд...) биће сведене на минимум.

Финансијска писменост је много шири појам и представља начин живота. Одлазак у продавницу и одлучивање о томе шта је приоритет наше куповине представља један сегмент финансијске и математичке писмености. Ако успемо наставу да сведемо на те реалне животне проблеме то је већ завидан корак ка развијању позитивних ставова о математици уопште.

Финансијско образовање треба да почне од најранијих школских дана. То је континуиран процес и није везан за одређене разреде и старосне границе. PISA потенцира на неколико крајњих исхода финансијског образовања током школовања [9]:

- Да ученик стекне свест о вредности новца
- Да зна да планира и управља финансијама
- Да на основу доступних информација препознају оне које повећавају финансијки ризик
- Да изабере приоритете приликом доношења финансијске одлуке
- Да прочита , анализира и разуме финансијску информацију
- Да разуме и примени финансијска знања

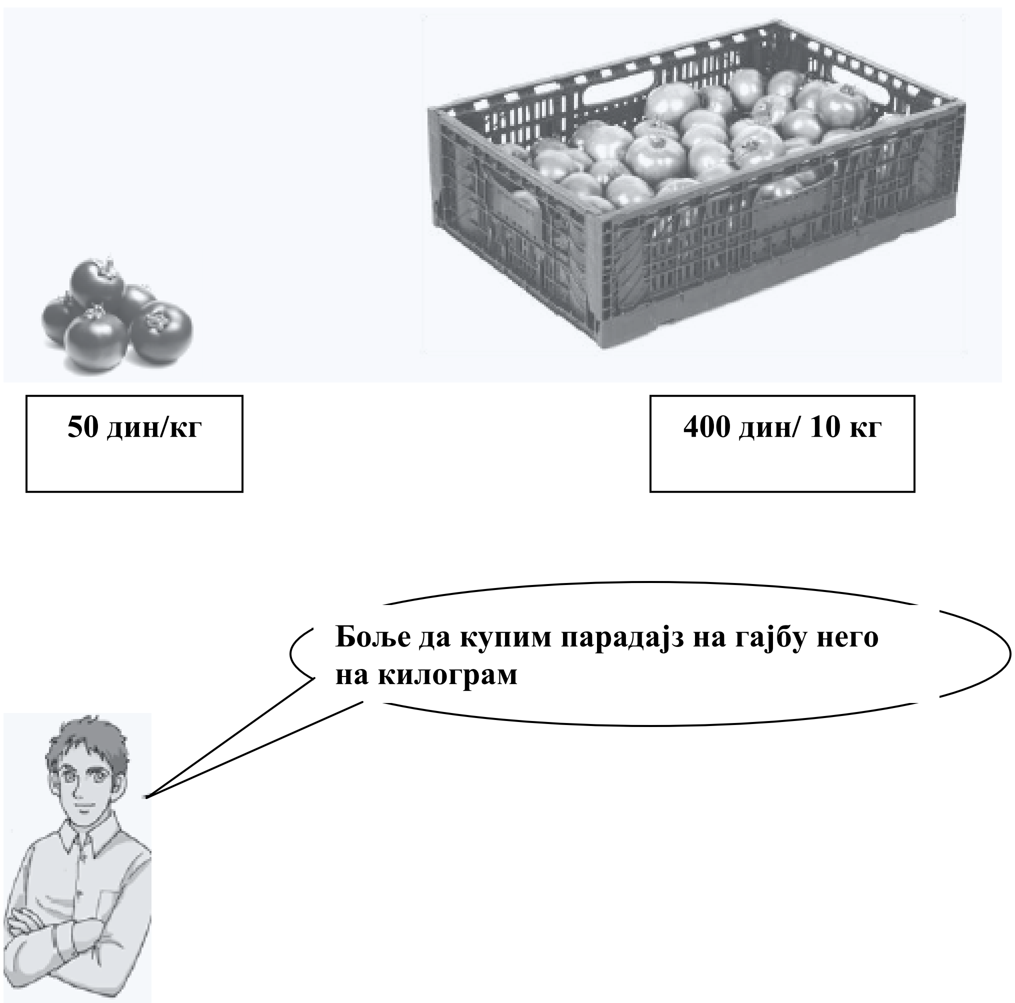
Примери који следе прављени су по угледу на задатке из PISA теста и илуструју већину исхода. Њихова употреба у настави, у великој мери приближиће финансијско образовање ученицима, а истовремено наставу математике учиниће забавном.
Ако у главама младих људи успемо да наметнемо математику као забавну науку, која је свуда око нас, онда ни разумевање свих финансијских процеса о којима смо

причали до сада, као и математичких алата који их прате неће бити тешко. А то већ значи да ћемо добити финансијски образовано друштво.

Свест о вредности новца

На примерима из свакодневног живота ученицима треба подићи свест о вредности новца и доношењу праве одлуке. Свест о вредности новца треба почети развијати од најранијих школских дана. Следећи пример може се већ радити у 4. разреду оснвне школе.

Пример : Налазимо се у самопослузи и желимо да купимо парадајз (слика 1.).



Слика 1. Куповина у самопослузи

Наведите бар две чињенице које оправдавају овај став?

Неки од очекиваних одговора су:

- Ако купујемо на килограм 10 килограма би нас коштало 500 динара што је више од вредности гајбе парадјза
- Ако купимо гајбу, килограм парадајза ће нас коштати 40 динара за килограм што је мање од малопродајне цене

Осим развоја свести о вредности новца, ми кроз овај пример обнављамо множење и дељење. Овај задатак је далеко занимњивији и интересантнији од класичног шаблонског: Шта је веће 50 · 10 или 400 : 10?

Управљање финансијама

Овај сегмент пружа одгвор на често питање: „Како за новац који поседујемо изабрати најбоље?“

Пример: Дати задатак деци да се распитају шта чини и колико кошта седмична потрошачка корпа њихове породице, а затим их пустити да сами пробају да је осмисле. Као пропратне материјале за ово вежбу дати каталоге у којима се налазе цене неких основних намерница (слике 2,3,4) .

Слика 2. Каталог основних животних намерница

Слика 3. Каталог основних животних намерница

Слика 4. Каталог основних животних намерница

Ученици раде у групама и након завршеног рада дискутује се о предложеним решењима и сугеришу евентуалне корекције.
Пошто су артикли у каталогу на снижењу, ова вежба може да се прошири захтевом да се израчуна колико смо новца уштедели куповином артикала који чине потрошачку корпу.

Препознавање и разумевање финансијске информације

Пример: Петров послодавац на крају сваког месеца уплаћује новчана примања на Петров рачун.
Овако изгледа Петров платни лист за месец јул (слика 5).

Платни листић : Петар Петровић

Позиција : Менаџер	**01.07-31.07**
Укупна плата :	**50000**
Одбици :	**5000**
Нето плата :	**45000**

Слика 5. Платни листић

Питање: Колико је послодавац уплатио на крају месеца на Петров рачун?

Тачан одговор је 45000. Овај пример захтева од ученика да препозна и анализира све податке и да на основу тога изведе закључак. Такође, кроз овај пример ученици се сусрећу и са појмовима **НЕТО И БРУТО**. Ови појмови се често мешају, па се на овом једноставном примеру разјаснити њихово значење и показати разлика.

Избор приоритета приликом доношења финансијске одлуке

Пример: Марко је са својим пријатељима изнајмио стан. Они су радили тек два месеца и немају никакву уштеђевину. Данас су примили плату и на основу листе обавеза коју су недавно направили треба да одреде шта прво треба урадити. На листи стоји да је потребно да:

- **Купе кућне потревштине**
- **Уведу кабловску телевизију**
- **Плате кирију**

Која ставка има највећи приоритет?

Кроз логичко размишљање ученици стичу свест о организацији финансија и о избору приоритета приликом плаћања издатака. Ученици се самим тим оспособљавају за рационалну потрошњу у складу са приоритетима, што је важно приликом организовања кућног буџета.

Селектовање информација које повећавају финансијски ризик

Пример: Марко има воћњак који сваке године осигурава од елементарних непогода. Осигуравајућа кућа се обавезује да ће у случају непогода надокнадити штету.
Марко жели да осигура воћњак и за ову годину али постоји низ фактора који нису исти као и прошле године.
Како ти фактори утичу на цену Марковог осигурања?

Одговори могу бити:

- **Повећаће цену осигурања**
- **Смањиће цену осигурања**
- **Не утиче на цену**

Фактори:

1. **Марко је проширио воћњак.**
2. **Марко је набавио трактор.**
3. **Марков воћњак је прошле године оштетио град.**

Кроз један пример из сфере осигурања подижемо свест ученика о постојању низа чињеница које могу да повећају финансијски ризик. Тај аспект је веома важан, како би се код великих инвестиционих улагања фактори изненађења свели на најмању могућу меру.

Разумевање и примена финансијског знања

Пример: На слици је дат део каталога једног хипермаркета. (слика 6)

Слика 6. Каталог производа

Питање: Колико у процентима износи снижење маслиновог уља са слике?

У нашим збиркама овакав задатак гласи:
Цена неке робе је снижена са 647 динара на 549,90 динара. Колико је то у процентима?

Да ли је у проценатима веће снижење пасуља ?

Пример :Дат је каталог другог хипермаркета. (слика 7)

Слика 7. Каталог производа

Колика је била цена пелена и кашица за бебе пре снижења?
Колика је уштеда?

Посматрајмо добро познати задатак из збирке који је сличан нашем:
После снижења од 10% цена неке робе је 1399 динара. Колика је била цена пре снижења?
Ако се задатак формулише на овај начин, од ученика се тражи само да примени математички шаблон решавања задатака тог типа, који је врло често научен напамет.

Одмах видимо две битне предности постављања животних ситуација у форми задатака:

- задатак је далеко занимљивији и као такав више ће ангажовати ученике да трагају за решењем,
- ученици **идентификују и примењују** математички модел у реалном животу.

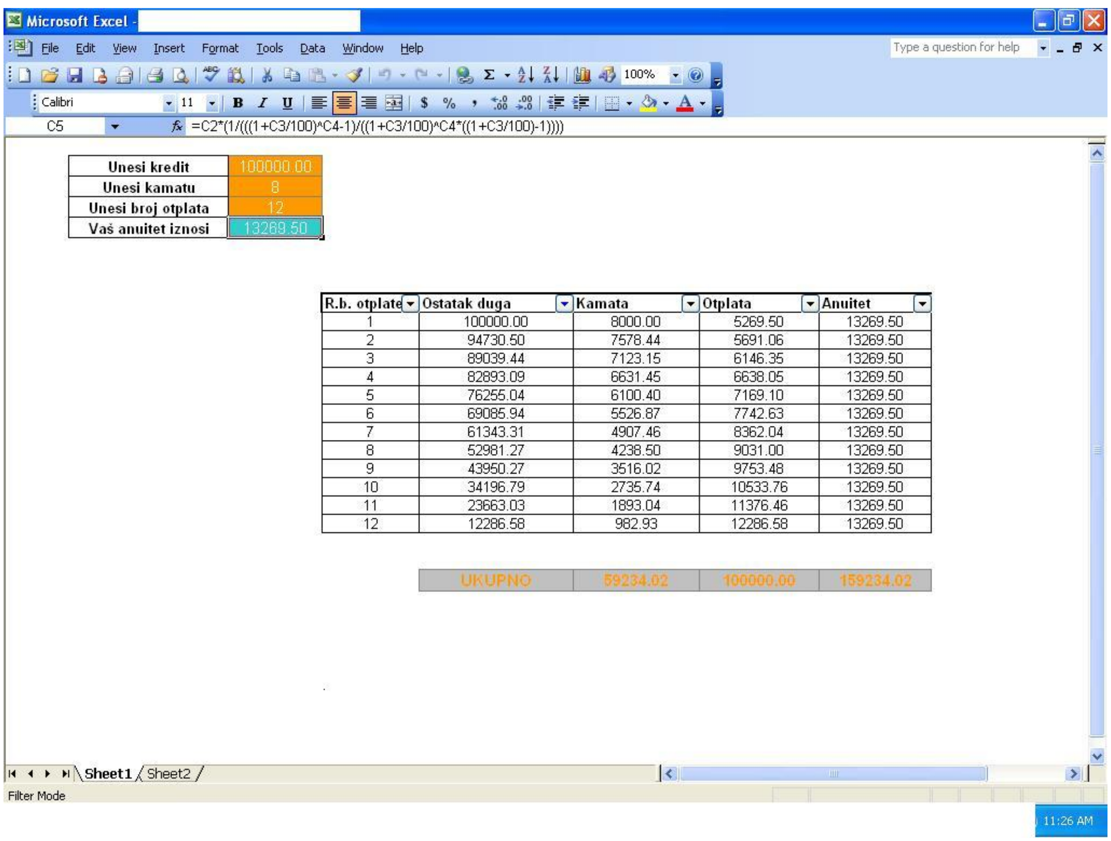
На овом примеру видимо како финансијско образовање може бити изваредно оруђе којим можемо приближити математику ученицима а онда ће је они, када сагледају њене могућности, врло брзо и заволети.

Често смо сведоци великих финансијских превара, најчешће путем интернета. Због тога је PISA комитет као један од важних циљева поставио и како се заштитити од истих. Потребно је скренути пажњу ученицима на све потенцијалне опасности које савремени финансијски систем носи са собом и обучити их како да ризик да буду преварени, сведу на минимум.

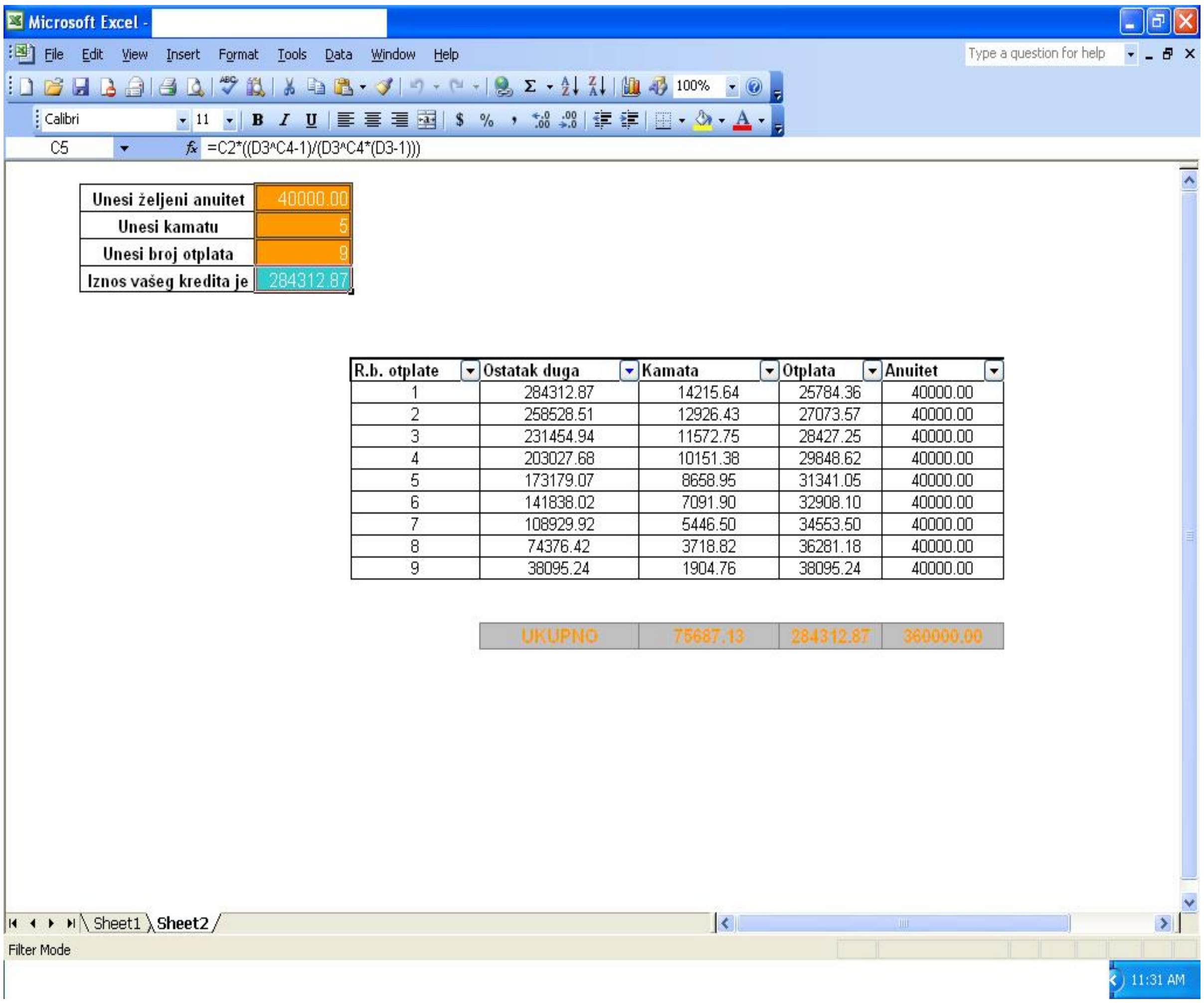
Како живимо у информатичкој ери врло је важно финансијску причу повезивати са информатичким образовањем. Корелацијом, утврђујмо математичке моделе и показујемо како они могу бити имплементирани у информатичком смислу. Наиме, у виду семинарских радова деци се могу дати многе теме из финансијске математике и захтевати од њих да покушају да имплементирају исте кроз разне програмске пакете.

Пример : Израдити у EXCEL-у амортизациони план за случај да су познати различити елементи зајма.

У пракси се показало да је овакав рад ученицима занимљив и да су резултати које они показују изваредни. На овај начин ученици поред практичне примене научених математичких модела проширују своје информатичко знање. Ево пар примера које су урадили ученици (слике 8,9):



Слика 8. Амортизациони план у Excel-у



Слика 9. Амортизациони план у Excel-у

6. Закључак

Финансијска криза која је данас присутна у целој светској економији, страх свих, почев од државе до појединца, за будућност, треба да нас освести и упозори колико мало знамо о финансијама уопште.

Појединачна је одговорност разумети принципе по којима функционишу финансије, како бисмо могли да успешно управљамо својим новцем, односно приходима и трошковима.

Основни циљ образовања треба да буде да се изгради појединац који ће се уклопити у социјалне оквире друштва, који ће разумети свет који га окружује. Ако је могуће да учимо о биљкама, физичким појавама, хемијским процесима и да нам је то сасвим нормално (што не треба порицати) исто тако, ако не и више је неопходно да научимо, колико год је то могуће, о финансијама како бисмо разумели свет у коме живимо [10].

Данас, огроман број људи не разуме принципе и правила у вези управљања својим новцем и основним елементима финансијског пословања. Колико људи зна колико ће их више коштати куповина стана на кредит у односу на то да су га купили својим новцем? Колико људи зна да ћемо ако уложимо у банку за 14 година уз каматну стопу 5% дуплирати суму? Колико људи има свест о важност и могућностима животног осигурања и начину његовог функционисања?

Због тога је важно у оквиру редовног школовања развити образовне програме чији крајњи циљ треба да буде разумевање света финансија које директно могу променити животе младих људи.

Потреба је да настава математике у школама што више интегрише делове финансијске математике. Простора за тако нешто има и у постојећим наставним плановима и програмима. Погрешна је претпоставка да је задовољење административне форме кључ квалитетног образовања. Управо ту се отвара простор за убацивање финансијске математике. Зашто не бисмо на часовима обраде геометријског низа увели причу о *садашњој и будућој вредности новца*? Ученицима разбијамо монотонију класичних шаблонских задатака и показујемо практичну примену геометријског низа. Постижемо двоструки ефекат. Мотивишемо за рад, чак и оне ученике који сматрају да је математика „досадна и бескорисна“ наука. Уједно ученике уводимо у озбиљну финансијску причу.

У ери када су ученици затрпани гомилом „блиц“ информација није лако допрети до мозга ученика. Још ако је математика коју нудимо опширна и неразумљива, тешко да ћемо успети да одржимо пажњу ученика. А заинтересованост ученика је најбољи стимуланс. Када је ученик мотивисан за рад онда он упија све информације које му сервирамо.

Како мотивисати ученика за рад? Један од начина је коришћење информација из разних медија којима су ученици свакодневно затрпани.

Математика је моћна и омогућава да те информације селектује и повеже и врло лако идентификује са неким математичким моделом. Треба подстаћи ученике да сами истражују и покушају да сами препознају одговарајући математички модел. Када то ураде онда ће лако долазити до решења самог проблема који ће омогућити њихово правилно закључивање .

Рецимо, нема дана када се на телевизијским програмима не појаве рекламе за разне врсте банкарских позајмица. Трагом тих информација можемо мотивисати ученике да прикупе понуде разних банака и да пробају сами да изврше поређење услова кредитирања.

Погрешно је схватање да је финансијска математика важна само економистима и да као наставна целина треба да се обрађује само у економским школама.Важност свеобухватног финансијског образовања препознао је и Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. У збиркама математике за малу матуру као један од постигнућа прописује и финансијски ниво образовања ученика. Увођење финансијске едукације у образовни систем је први, а можда и најважнији корак ка крајњем циљу који је свака држава поставља испред себе . То је формирање **финансијски едукованог друштва** које обезбеђује стабилан финансијски систем целе земље**.**

Разлика између финансијско образованог друштва и оног које то није је огромна. У прилог овој чињеници наводимо и резултат истраживања Института за истраживање јавне политике.Истраживање је спроведено на програму где је финансијско образовање било обавезно од 1957. године. Оно је показало да су деца која су похађала часове из личних финансија и кућног буџета могла да буду богатија и за тридесетак хиљада долара до тренутка када напуне 40 година од вршњака који нису прошли обуку [14].

Размислимо сви која су то знања потребна нашој деци да успешно живе у будућности. Ако хоћемо да им помогнемо на прави начин онда заиста финансијском образовању морамо посветити далеко већу пажњу него што је то данас случај.

Литература

[1] Анић Иван, Драгица Павловић Бабић, Владислав Радак, *Формула живота*, ИП Математископ, Београд 2011

[2] Др Јелена Кочовић, *Финансијска математика* Центар за издавачку делатност Економскког факултета у Београду, Београд 2006

[3] Владислав Милошевић, Миодраг Ивовић, Ратко Ненадовић; Крстомир Симић *Математика са збирком задатака за 3. разред средње школе, Завод за уџбенике*, Београд 2007

[4] Радич Вукићевић, Милорад Ђорђевић, Миливоје Лазић, *Математика са збирком задатака за 4. разред средње школе, Завод за уџбенике*, Београд 2003

[5] http://www.mingl.rs/rubrike/posao-i-novac/19/2011/09/21/finansijska-pismenost--kako-da-ne-izgubim-novac.html - članak, Aleksandar Štajner, *Kako da ne izgubim novac*

[6] http://www.ef.uns.ac.rs/Download/finansijska_matematika/2009-04-02_osnovni_koncepti_za_nastavu.pdf - *Finansijska i aktuarska matematika- osnovni koncept za nastavu*, Dragan Vugdelija, Otilija Sedlak

[7] http://serbia.usaid.gov/noviteti-u-programu/najnovije-vesti-i-dogadjaji/srbija.769.html - članak, *Pristupačnije finansijsko obrazovanje zahvaljujući USAID i bibliotekama u Srbiji*

[8] http://www.nbs.rs/internet/latinica/15/mediji/govori/DS-G-20110915.html- Govor guvernera Šoškića, *Finansijska pismenost i stabilnost finansijskog sistema*

[9] http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46962580.pdf - članak, PISA 2012, *Procena finansijske pismenosti*

[10] http://www.huffingtonpost.com/scott-gamm/why-we-need-financial-edu_b_843429.html - članak, Scott Gamm *Zašto je potrebna finansijska pismenost*

[11] http://www.guardian.co.uk/money/2009/mar/29/schools - članak, *Da li je lična finansijska edukacija gubljenje vremena*

[12] http://www.ubs-asb.com/Portals/0/Casopis/2006/11_12/UBS-Bankarstvo-11-12-2006-Vracaric.pdf - mr. Vladimir Vračarić, *Finansijski obrazovani gradjani-stabilniji finansijski sistem i cela ekonomija*

[13] http://zivotnoosiguranje.co.rs/ - članak, *Sigurna budućnost sa polisom životnog osiguranja*

[14] http://valentinkuleto.com/2011/08/za-obavezno-finansijsko-obrazovanje-u-skolama/ - članak, Valentin Kuleto, *Za obavezno finansijsko obrazovanje u skolama*