МИЛАН ТАСИЋ

ОСНОВИ РАЦИОНАЛНЕ МЕХАНИКЕ

КИНЕМАТИКА ДИНАМИКА СТАТИКА

ТАЧКЕ СИСТЕМА И КРУТОГА ТЕЛА.

БЕОГРАД

1932.

Предговор

Књига обухвата оно градиво из Рационалне механике, које претставља основ целокупне Механике.

Градиво је излагано поступно педагошки и по најновијим методама Више анализе и Векторскога рачуна.

Поред теорије, књига садржи велики број слика и израђених примера, који знатно олакшавају разумевање и изучавање теорије Механике.

Како у нашој научној литератури не постоји ни једна књига Рационалне механике на савременом научном нивоу, то се надам да ће ова књига корисно послужити свима онима, који се баве овом науком.

Београд, 1 јул 1932. **Писац.**

Графичко Предузеће „Просвета" А. Д. - Београд - Цара Уроша ул. 8 - Телефон бр. 25-963

I

Општи део

Први одељак

Основни појмови

1. Механика и њена подела. — *Механика је наука о кретању и силама.*

Механика чија се теорија излаже помоћу Више математике, назива се *Рационална механика.*

Механика се дели уопште на *Кинематику, Динамику* и *Статику.*

Кинематика испитује кретања тачке и тела, не узимајући у обзир њихову масу, нити силу, која производи кретање.

Динамика испитује кретања тачке и тела узимајући у обзир масу тачке и тела, као и силу која производи кретање.

Статика испитује и изналази услове равнотеже тачке и тела на које дејствују извесне силе.

Извесни писци деле Механику на *Кинематику* и *Динамику;* а Динамику деле на *Кинетику* и *Статику.*

У таквој подели Механике, Кинематика и Статика имају исте дефиниције које смо казали; док Кинетика сада обухвата онај део Механике који испитује кретање тачке и тела узимајући у обзир масу тела које се креће као и силу, која производи кретање.

2. Тело. — Све оно што заузима неки део простора називамо *тело.*

Градиво из кога се састоји неко тело назива се уопште *материја.*

Свако тело сматра се у Механици као један систем материјалних тачака.

Под материјалном тачком разуме се у Механици махом један произвољно мали део некога тела и то толико мали, колико ми хоћемо. У извесним случајевима и неко цело тело сматра се у Механици као материјална тачка.

Тело, код кога је отстојање између његових материјалних тачака апсолутно непромењљиво назива се *круто тело*.

3 Кретање и мир. — Једно тело се креће када мења своје место у простору, а мирује када не мења своје место у простору.

Да ли се неко тело креће или мирује, то утврђујемо према томе да ли то тело мења или не мења свој положај према другим телима, која сматрамо да мирују.

Све оно што сматрамо да мирује и према чему утврђујемо кретање других тела називамо *систем упоређивања*. Систем упоређивања може бити једно или више других тела или неки координатни систем или само нека тачка.

Кретање и мир су релативни појмови. Апсолутан мир и апсолутно кретање уопште у природи не постоје, као што ћемо одмах видети.

Иако нам изгледа да разни предмети причвршћени за земљу, као што су телефонски и електрични стубови, зграде и други објекти, стално мирују, ипак они мењају свој положај у васиони, јер се земља окреће око своје осовине и Сунца а према томе и они с њом, те је тако њихово мировање релативно а не апсолутно.

Иако наведени предмети, телеграфски и електрични стубови и зграде мењају свој положај у васиони, они ипак не мењају свој положај један према другом, те је отуда њихово кретање релативно а не апсолутно.

Линију, коју замишљамо да неко тело опише при своме кретању називамо *путања* или *трајекторија*.

Када је трајекторија права линија кретање је *праволиниско*, а када је трајекторија крива линија, кретање је *криволиниско*.

Кретања појединих тела су нам потпуно позната, када смо у стању у сваком тренутку времена знати где се које тело налази, или другим речима кретања појединих тела су нам потпуно позната, када знамо коначне једначине* њихових кретања.

4. Мере за дужину, тежину и време. — Јединице за мерење дужине, тежине и времена, које се примењују у Механици су *сантиметар* (*cm*), *грам* (*gr*) и *секунда* (*sec*), или *метар* (*m*), *килограм* (*kg*) и *секунда* (*sec*), или још у новије доба *метар* (*m*), *тона* (*t*) и секунда.

Други одељак

Координатни системи

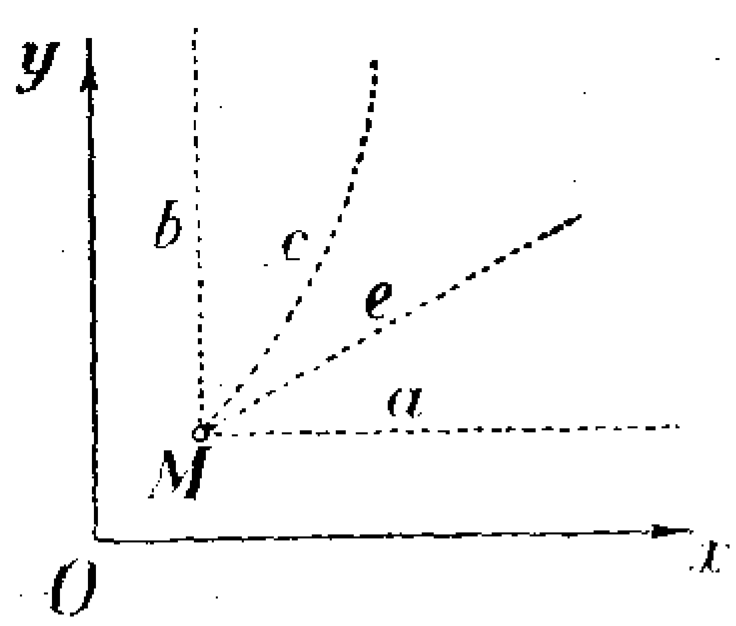
5. Координатни системи у Механици. — Координатни системи, које примењујемо у Механици при одређивању положаја неке покретне тачке су: правоугли или Декартови координатни системи у равни и простору; поларни координатни системи у равни и простору; цилиндрични координатни систем и елиптични координатни системи у равни и простору, који су нам познати из Аналитичне геометрије у равни и простору, а које ћемо овде укратко обновити.

Сем поменутих коорднинатних система, примењује се у Механици још и криволиниски координатни систем, о коме на своме месту бити речи.

6. Правоугли координатни систем у равни. — Положај неке покретне тачке M (сл. 1) у равни потпуно је одређен у правоуглом координатном систему Oxy када су нам познате координате покретне тачке M,

$$x \text{ и } y$$

као функције времена t.



Сл. 1.

Када координата y има сталну вредност, а x се мења, трајекторија тачке M је права a паралелна са x-осом; а када координата x има сталну вредност а y се мења, трајекторија тачке M је права b паралелна са y-осом.

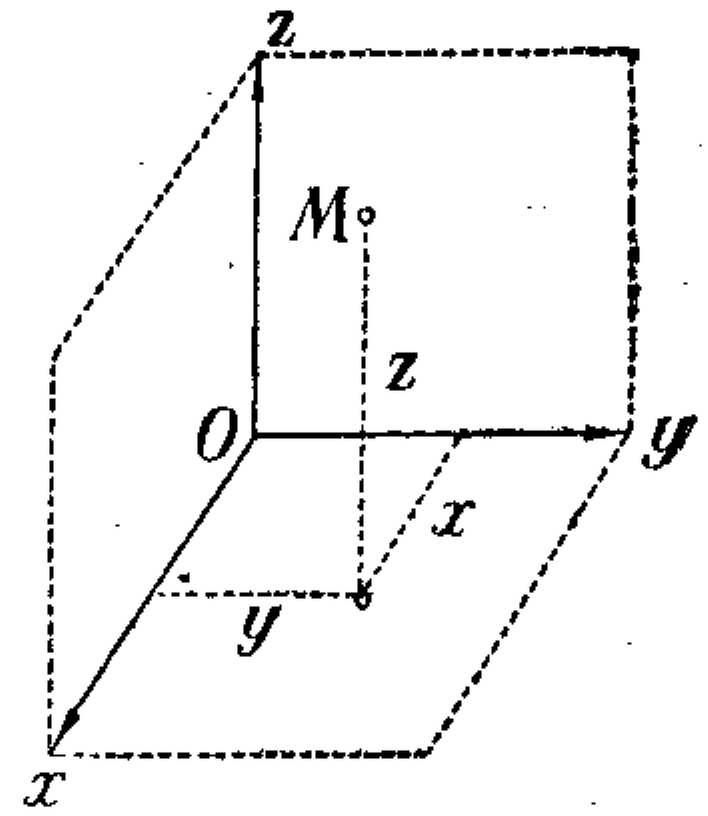
* Једначине у којима нема извода ни диференцијала промењљивих количина, називају се уопште *коначне једначине*.

Када су обе координете промењиве, трајекторија тачке M је извесна крива линија c или права e непаралелна ни са једном осом.

7. Правоугли координатни систем у простору. — Положај једне покретне тачке у простору M (сл. 2) с погледом на координатни систем $Oxyz$ потпуно је познат, када су нам познате координате тачке M,

$$x, y, z$$

као функције времена t.



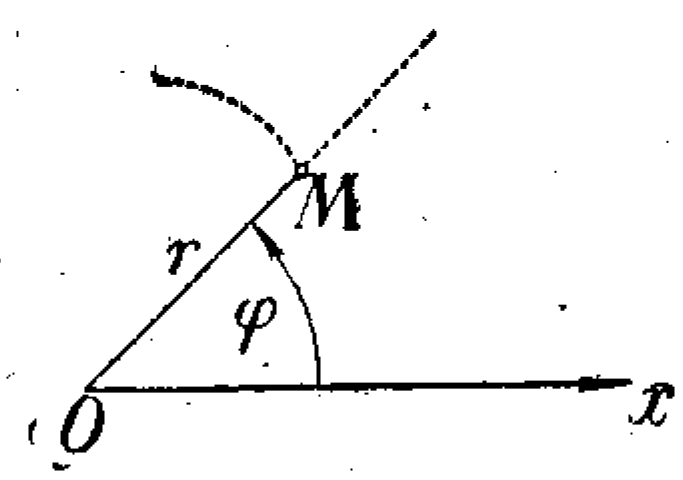
Сл. 2.

Равни xy, yz и zx називају се *координатне равни*, а пресеци координатних равни, линије Ox, Oy, Oz, називају се *координатне осе* или још и *координатне линије*.

8. Поларни координатни систем у равни. — Положај покретне тачке M уполарном координатном систему (сл. 3) потпуно је одређен када су познате поларне координате тачке M,

$$r \text{ и } \varphi$$

као функције времена t.



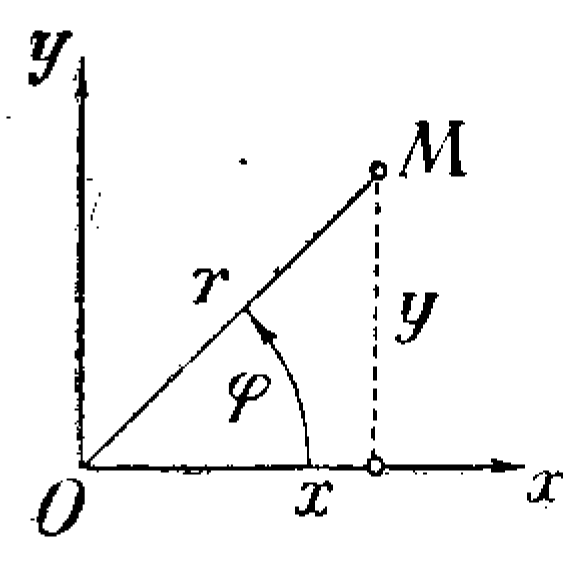
Сл. 3.

Када је координата φ стална, онда тачка M врши кретање у правцу потега $\mathbf{r}$, а када је координата r стална, тачка M врши кружно кретање.

Када су обе координате промењиве, трајекторија тачке M је извесна крива.

Обрасци за преобраћање поларних координата у правоугле координате су, као што се види (сл. 4)

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi,$$



Сл. 4.

а обрасци за преобраћање правоуглих координата у поларне су

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \varphi = arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$

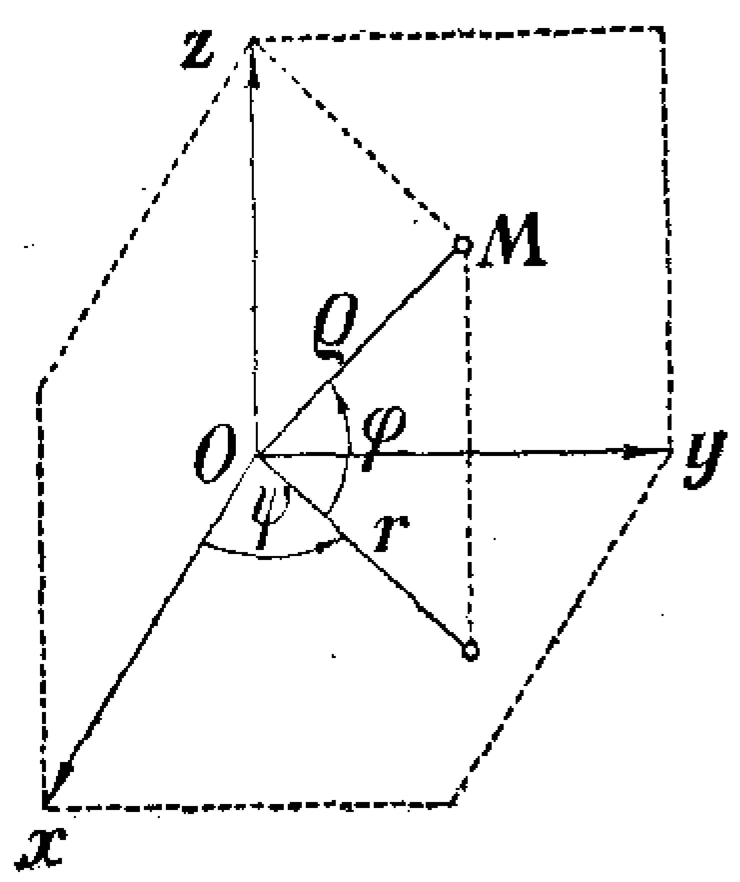
9. Поларни координатни систем у простору или сферни координатни систем. — Положај једне покретне тачке M у простору (сл. 5) потпуно је одређен када су познате њене сферне координате,

$$\varrho, \varphi \text{ и } \Psi$$

као функције времена t.

Раван xOy назива се код сферног координатног система и *екваторска раван*; а раван постављена кроз покретну тачку M и z-*осу*, назива се *меридијанска раван*.

Угао φ који заклапа потег ϱ са екваторском равни мења се од $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$; а угао ψ који заклапа меридијанска раван са x-осом мења се од 0 до 2π.*



Сл. 5.

Обрасци за преобраћање сферних координата у Декартове су, као што се види (сл. 5),

$$x = r \cos\psi = \varrho \cos\varphi \cos\psi$$
$$y = r \sin\psi = \varrho \cos\varphi \sin\psi$$
$$z = \varrho \sin\varphi,$$

а обрасци за преобраћање Декартових координата у сферне су

$$\varrho = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\varrho}$$
$$\sin\varphi = \frac{z}{\varrho};$$

одавде је

$$tg\,\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\varphi = arc\,tg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$tg\,\psi = \frac{y}{x}$$
$$\psi = arc\,tg \frac{y}{x}\ ^{**}.$$

Када се материјална тачка M креће тако у простору, да је њена координата ϱ стална, а φ и ψ променљиве, онда она описује једну лопту или сферу; а када су координате ϱ и φ сталне, онда тачка M описује известан круг.

10. Цилиндрични координатни систем. — Положај

* Угао φ претставља географску ширину, а угао ψ географску дужину у Астрономији.

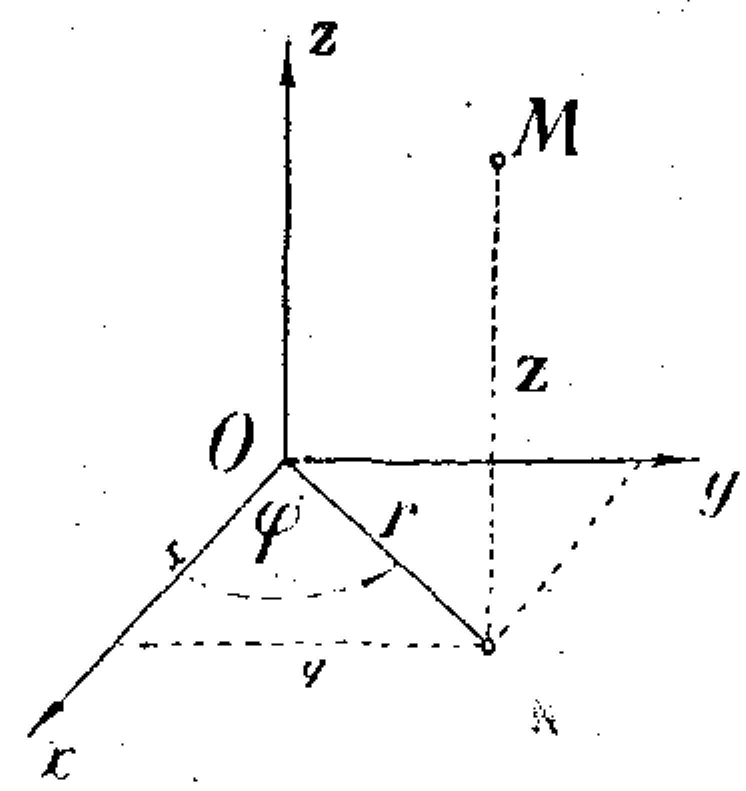
** Кад се за угао φ узима угао између потега ϱ и z осе, онда обрасци а трансформације координата имају други облик.

једне покретне тачке M, (сл. 6.) у простору, потпуно је познат када су познате цилиндричне координате тачке M,

$$r,\ \varphi,\ z,$$

као функције времена t.

Када се тачка M креће *произвољно* у простору, онда се мењају произвољно и њене координате: r, φ и z; а када се тачка M креће тако, да је њена координата r стална, а друге две произвољне, онда она описује један ваљак или цилиндар одакле долази и назив самога координатнога система.



Сл. 6.

Обрасци за преобраћање цилиндричних координата у Декартове координате су, као што се види (сл. 6)

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z;$$

а обрасци за преобраћање Декартових координата у цилиндричне су

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \varphi = arctg\,\frac{y}{x}, \qquad z = z.$$

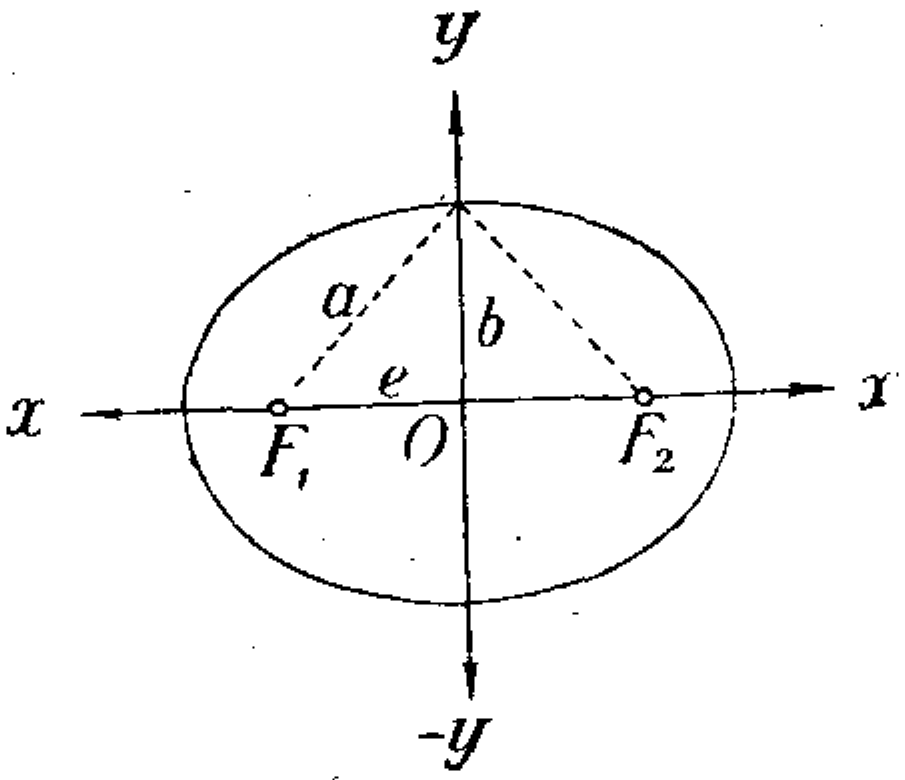
11. Елиптични кординатни систем у равни. — Једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

претставља нам, с геометриског гледишта елипсу (сл. 7.) чије је средиште у почетку координатног система, велика полуоса a и мала полуоса b.

Ако обележимо са λ један променљиви параметар и једначину (1) напишемо у облику

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1 \qquad (2)$$

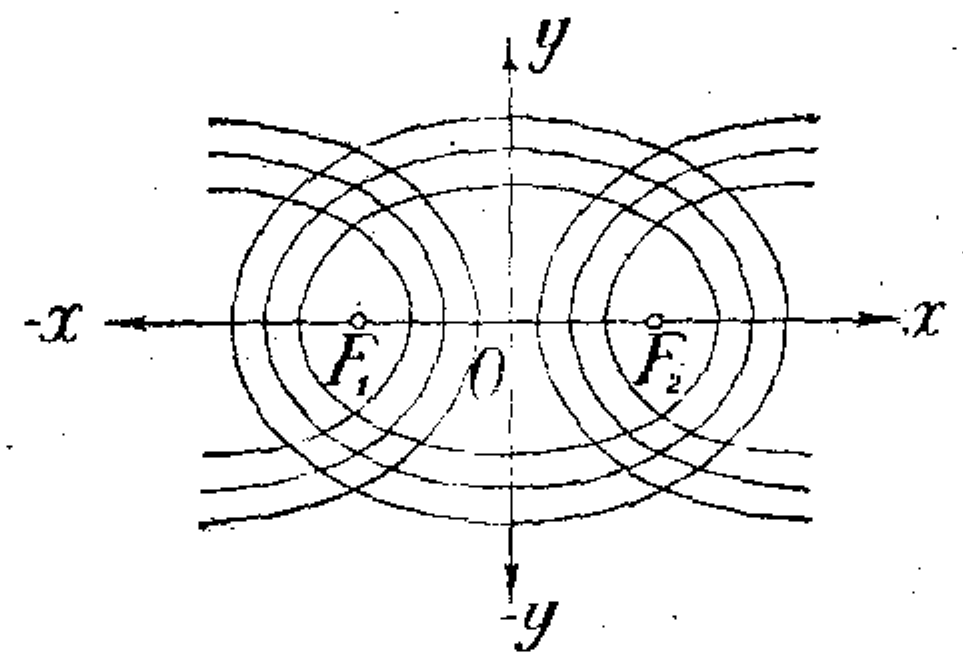


Сл. 7.

онда нам једначина (2) претставља један систем коничних пресека, који имају исте жиже и који се, као што је познато из Аналитичне геометрије у равни називају *конфокални конични пресеци.*

Када се параметар λ мења од $-\infty$ до b^2, једначина (2) нам преставља једну фамилију елипса (сл. 8); када се параметар λ мења од b^2 до a^2, онда нам једначина (2) претставља фамилију хипербола (сл. 8) и када се λ мења од a^2 до $+\infty$ једначина (2) нам преставља фамилију имагинарних елипса.

Према изложеном, а као што се и види (сл. 8), сваку тачку у равни можемо сматрати као пресек једне елипсе и једне хиперболе, као конфокалних коничних пресека, који одговарају извесним вредностима λ_1 и λ_2 промењљивога параметра λ.



Сл. 8.

Вредности λ_1 и λ_2 су у том случају елиптичне координате једне тачке у равни.

Ако су нам познате правоугле координате x_1 y_1 неке тачке у равни, па њихову вредност унесемо у једначину (2), онда је

$$\frac{x_1^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2-\lambda} = 1, \qquad (3)$$

или

$$x_1^2 (b^2 - \lambda) + y_1^2 (a^2 - \lambda) - (a^2 - \lambda) (b^2 - \lambda) = 0 \quad (4)$$

Једначина (4) је квадратна једначина по непознатом параметру λ.

Ако полином једначине (4) означимо са $F(\lambda)$ и приступимо испитивању корена полинома $F(\lambda)$, онда видимо као што показује таблица (сл. 9), да један корен једначине (4) λ_1 лежи између $-\infty$ и b^2, а

λ	$-\infty$	b^2	a^2
$F(\lambda)$	$-$	$+$	$-$

Сл. 9.

други корен λ_2 лежи између b^2 и a^2, јер у том интервалу полином $F(\lambda)$ мења свој знак.

А како корену λ_1 одговара извесна елипса, а корену λ_2 одговара извесна хипербола, то су корени λ_1 и λ_2 елиптичне координате, које одговарају правоуглим координатама x_1 и y_1 неке тачке у равни, пошто задовољавају једначину (4)

У исто време сазнајемо да помоћу једначине (3) односно (4) можемо увек одредити елиптичне координате неке тачке, када су нам познате правоугле координате.

Ако су нам познате елиптичне координате λ_1 и λ_2 неке тачке, а треба одредити правоугле координате x и y, онда је према ономе што смо казали.

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}=1, \qquad (5)$$

извесна елипса; а

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}=1 \qquad (6)$$

извесна хипербола.

Када једначине (5) и (6) доведемо на исте коефицијенте и решимо, добијамо обрасце за одређивање правоуглих координата

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda_1)\ (a^2-\lambda_2)}{a^2-b^2}$$

$$y^2=-\frac{(b^2-\lambda_1)\ (b^2-\lambda_2)}{a^2-b^2}$$

Како се елипса и хипербола, које одговарају параметрима λ_1 и λ_2 секу у четири тачке, то се при одређивању елиптичних коордиаата неке тачке, мора увек водити рачуна у ком се квадранту налази тачка.

12. Елиптични координатни систем у простору. — Једначина

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

преставља, с геометриског гледишта, један елипсоид, чије је средиште у почетку координатног система, а полуосе су му: a. b и c.

Ми ћемо претпоставити да је

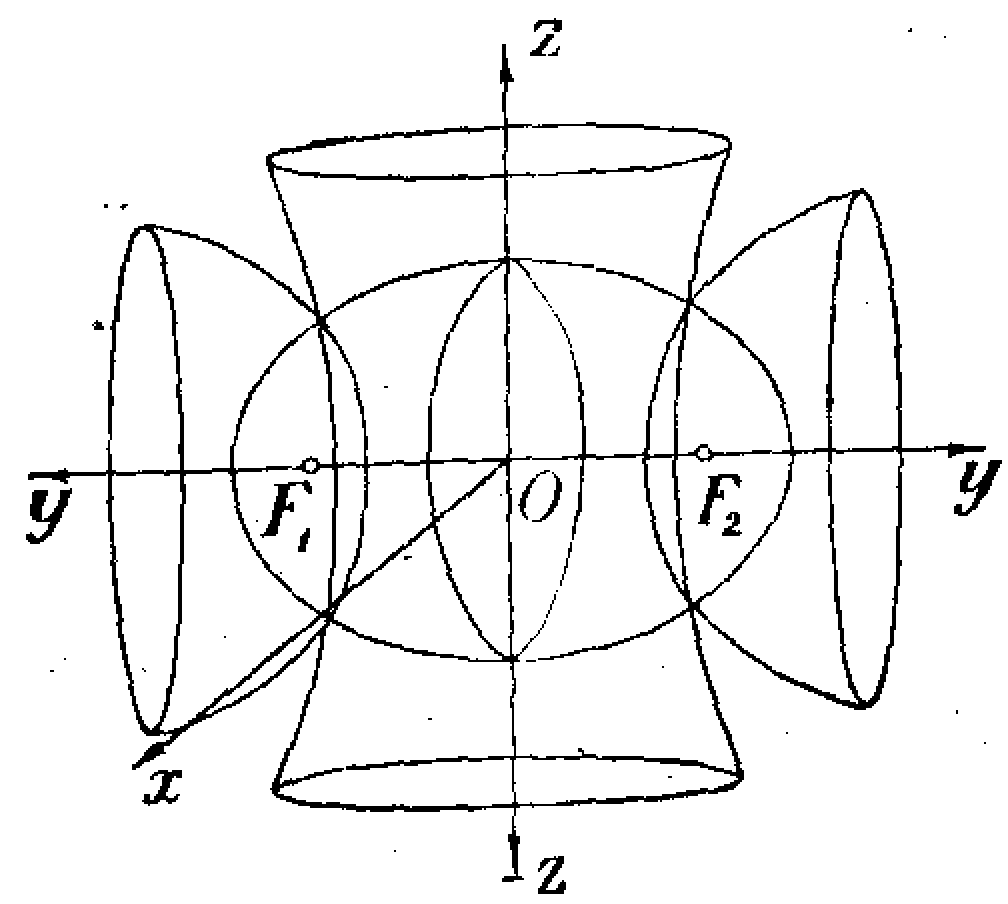
$$a > b > c.$$

Ако је λ један промењљиви параметар, онда једначина

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \qquad (2)$$

претставља један систем конфокалних површина другога реда. Свакој вредности λ_1 промењљивог параметра λ, која лежи између $-\infty$ и c^2 одговара један елипсоид (сл. 10); свакој вредност λ_2 која лежи између c^2 и b^2 одговара извесан једнограни хиперболоид (сл. 10); свакој вредности λ_3 која лежи између b^2 и a^2 одговара један двограни хиперболоид (сл. 10); и најзад свакој вредности промењљивог параметра λ већој од a^2 одговара имагинаран елипсоид.

Како параметар λ може имати произвољне вредности у наведеним интервалима, то можемо узети да се у свакој тачки у простору секу један елипсоид, један једнограни хиперболоид и један двограни хиперболоид као конфокалне површине, које одређују параметри λ_1, λ_2 и λ_3.



Сл. 10.

Параметри: λ_1, λ_2 и λ_3 су у томе случају елиптичне координате тачке у простору.

Када су нам познате правоугле координате x_1, y_1, z_1 неке тачке у простору, па њихову вредност унесемо у једначину (2), онда је

$$\frac{x_1^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2-\lambda}+\frac{z_1^2}{c^2-\lambda}=1, \quad (3)$$

или

$$x_1^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)+y_1^2(a^2-\lambda)(c^2-\lambda)+$$
$$+z_1^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)=0 \quad (4)$$

Једначина (4) је кубна једначина по непознатој λ.

Када полином једначине (4) обележимо са $F(\lambda)$ и приступимо испитивању корена полинома $F(\lambda)$, онда налазимо као што се из таблице (сл. 11) види да један корен λ_1 лежи између $-\infty$ и c^2, други корен λ_2 лежи између c^2 и b^2, и трећи корен λ_3 лежи између b^2 и a^2, јер у тим интервалима полином $F(\lambda)$ мења свој знак.

λ	$-\infty$	c^2	b^2	a^2
$F(\lambda)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Сл. 11.

Како коренима λ_1, λ_2, λ_3 чије вредности леже у нађеним интервалима, одговарају конфокалне површине: елипсоид, једнограни хиперболоид и двограни хиперболоид, то су корени λ_1, λ_2, λ_3, елиптичне координате, које одговарају правоуглим координатама: x_1, y_1, z_1 неке тачке у простору.

У исто време сазнајемо да помоћу једначине (3) односно (4) можемо увек одредити елиптичне координате неке тачке у простору, када су нам познате правоугле координате.

Када су нам познате елиптичне координате: λ_1, λ_2, λ_3

неке тачке у простору, а траже се правоугле координате тачке x, y, z, онда је према ономе, што смо нашли

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1 \quad (5)$$

известан елипсоид;

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_2}=1, \quad (6)$$

известан једнограни хиперболоид; и

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_3}=1, \quad (7)$$

известан двограни хиперболоид.

Када једначине (5), (6), (7) доведемо на исте коефицијенте и решимо добијамо обрасце за одређивање правоуглих координата

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$y^2=\frac{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)(b^2-\lambda_3)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$z^2=\frac{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)(c^2-\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Како се конфокалне површине секу у 8 тачака, то се при одређивању координата неке тачке мора водити рачуна о томе, у коме се октанту налази тачка, чије се координате одређују.

13. Криволиниске координате или генералисане координате. — Положај неке тачке M у простору, уопште, може се одредити помоћу три броја: q_1, q_2, q_3.

Бројеви q_1, q_2, q_3, називају се *криволиниске или генералисане координате.*

Кадгод је познат начин одређивања положаја неке тачке помоћу координата q_1, q_2, q_3, увек је могуће Декартове координате тачке x, y, z, претставити као функције криволиниских координата,

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y &= f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z &= f_3(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Пример. — Када положај неке тачке M одређујемо према сферном координатном систему, онда су криволиниске координате: $q_1=\varrho$, $q_2=\varphi$, $q_3=\psi$; а Декартове координате изражене помоћу криволиниских су,

$$x = q_1 \cos q_2 \cos q_3$$
$$y = q_1 \cos q_2 \sin q_3$$
$$z = q_1 \sin q_2.$$

Ако претпоставимо да кордината q_1 има сталну вредност, рецимо нулу, онда једначине (1) имају облик

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\,(q_2, q_3) \\ y &= f_2\,(q_2, q_3) \\ z &= f_3\,(q_2, q_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Геометриско место тачака у простору за које координата q_1 има сталну вредност, а q_2 и q_3 променљиву, претставља извесну површину, која се назива *координатна површина координате* q_1.

Једначине (2) претстављају нам ту координатну поовршину у параметарском облику.

Када из једначина (2) елиминишемо променљиве параметре q_2, q_3, добићемо једначину прве координатне површине изражену Декартовим координатама

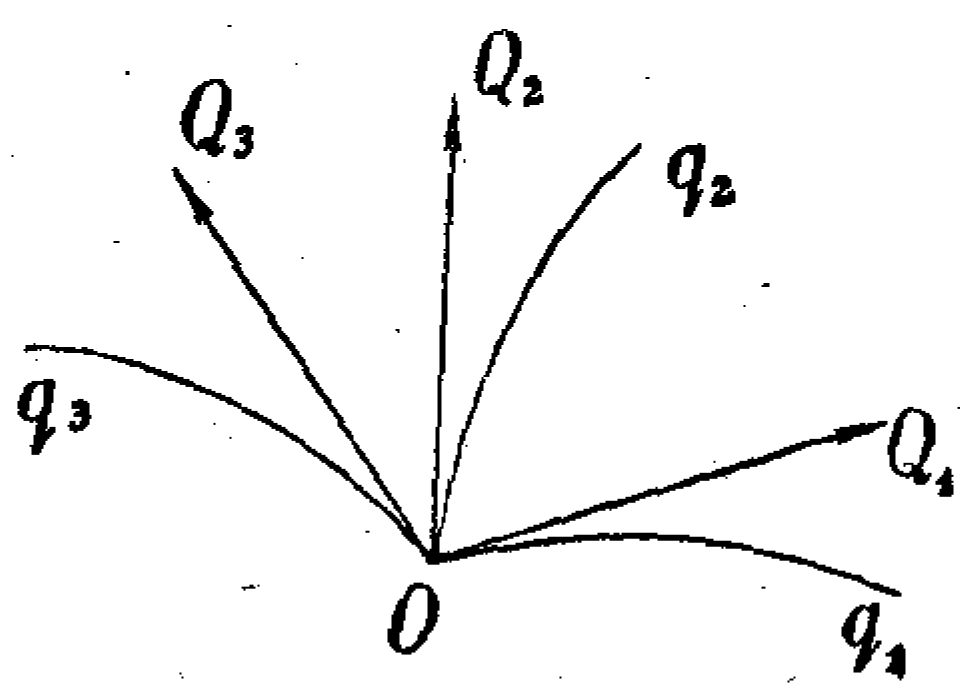
$$F_1\,(x, y, z) = 0.$$

Исто тако када узмемо да координата q_2 има сталну вредност; а q_1 и q_3 променљиве, а затим да координата q_3 има сталну вредност; а q_1 и q_2 променљиве, и извршимо одговарајуће елиминације дабићемо једначине друге и треће координатне површине

$$F_2\,(x, y, z) = 0 \text{ и } F_3\,(x, y, z) = 0.$$

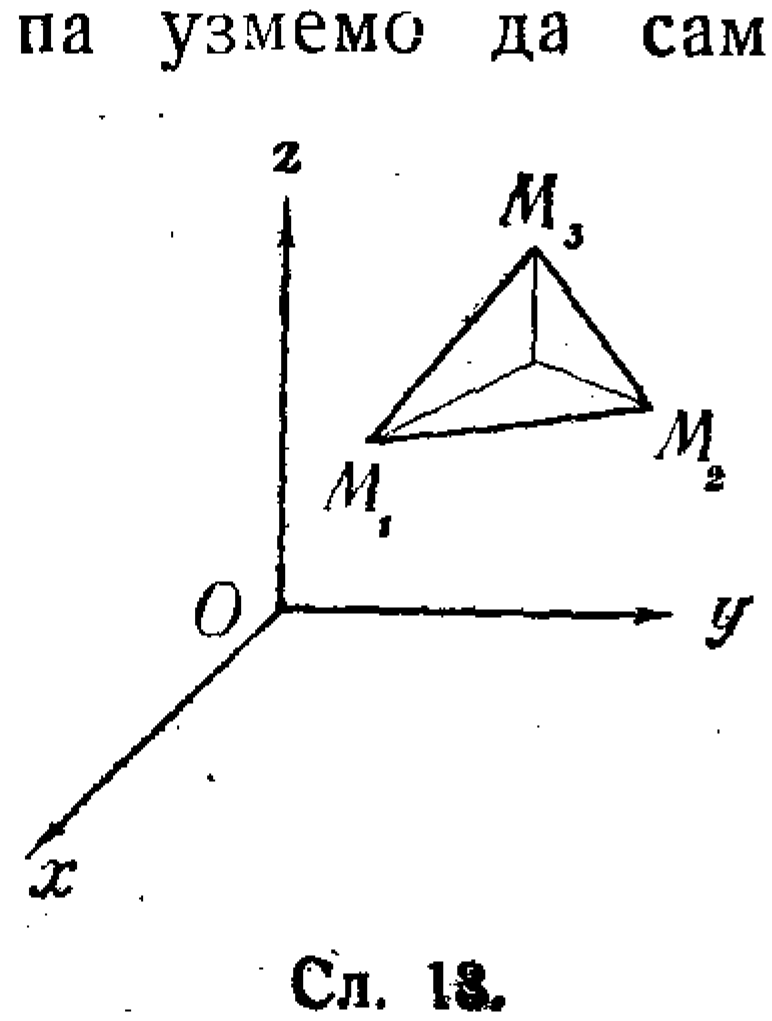
Линије дуж којих се секу координатне површине називају се *координатне линије*. Координатне линије су уопштем случају криве линије (сл. 12).

Тангенте Q_1, Q_2, Q_3 на координатним линијама у тачки њиховога пресека O граде *триедар оса криволиниских координата*.



Сл. 12.

14. Одређивање положаја крутог тела. — Ако имамо какво круто тело у простору (сл. 13), па узмемо да само једна његова тачка M_1 има сталан положај, онда се тело може произвољно окретати око тачке M_1, и према томе његов положај уопште у координатном систему $Oxyz$, није одређен. Када узмемо да су две његове тачке M_1 и M_2 утврђене, опет његов положај није одређен, јер се може обртати око праве, која би пролазила кроз тачке M_1 и M_2. А када узмемо да су три њего-



Сл. 13.

ве тачке, које не леже у једној правој, утврђене, онда је његов положај у координатном систему потпуно одређен.

Како је свака тачка у простору одређена кад су познате три њене координате x, y, z, то је за одредбу трију тачака потребно 9 координата. Али како је раздаљина тачака $d_1 = M_2M_3$, $d_2 = M_3M_1$ и $d_3 = M_1 M_2$* на крутом телу стална и позната, и како је

$$d_1 = \sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 + (z_2-z_3)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

то у трима једначинама могу бити три координате непознате, јер их можемо увек израчунати помоћу наведених трију једначина, те отуда изводимо став:

Положај некога крутога тела у простору потпуно је одређен, када је познато 6 независних координата његових трију тачака, које не леже у једној правој линији.

Трећи одељак

Вектори

15. Скалари и вектори. — Количине које изучавамо у Механици двојаке су: једне су потпуно одређене када је позната само њихова *бројна вредност*; а друге тек онда, када је поред њихове бројне вредности, познат још и њихов *правац* и *смер*.

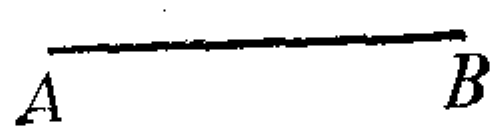
Количине, које су потпуно одређене, када је позната само њихова бројна вредност, називају се скаларне величине или само скалари.

Такве су величине: *време*, *маса*, *температура* и друге о којима ће на свом месту бити говора.

Количине, које су потпуно одређене тек онда, када је сем њихове бројне вредности познат још и њихов правац и смер називају се управљене величине или вектори.

* Раздаљине d_1, d_2, d_3, треба ради симетрије тако узимати да индекси 1,2,3, раздаљина са индексима одговарајућих тачака M_1 M_2 M_3 чине цикличку пермутацију.

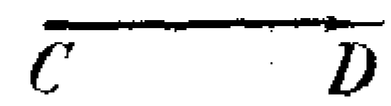
Такве су величине: *сила, брзина, убрзање* и друге с којима ћемо се упознати.



Сл. 14.

Дужи које графички престављају скаларне величине називају се такође скалари, и оне немају ни правца ни смера (сл. 14.)

Дужи, које графички претстављају управљене величине називају се вектори. Сваки вектор има свој почетак, крај, величину, правац и смер (сл. 15).

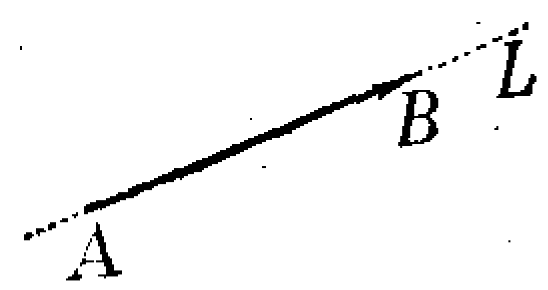


Сл. 15.

При рачунању с векторима, ако је резултат вектор, мора се увек знати његова величина, правац и смер.

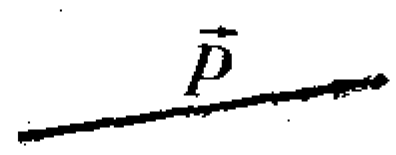
Како се вектори обележавају, каквих вектора имамо и како се с векторима рачуна, биће одмах говора.

16. Величина, правац и смер вектора. — Ако нам је дат известан вектор $\overrightarrow{AB}$ (сл. 16), онда је његова величина или *интензитет* дужина AB, његов *правац* линија L на којој лежи, а *смер* стрелица, која означава куд је вектор управљен. Тачка A је *почетак* или *нападна тачка*, а тачка B је *крај* вектора $\overrightarrow{AB}$.



Сл. 16.

Векторе обележавамо великим латинским писменима као што је означено (сл. 16); или једним великим писменом (сл. 17); или једним малим писменом (сл. 18).



Сл. 17.

При писању векторе изражавамо на тај начин, што изнад писмена којима смо их обележили, стављамо малу стрелицу, те тако вектор (сл. 16) изражавамо са $\overrightarrow{AB}$, вектор (сл. 17) са $\vec{P}$, а вектор (сл. 18) са $\vec{v}$.

Сл. 18.

Ако при рачунању с векторима узимамо у обзир само интензитет вектора, онда заграђујемо писмена којима смо их обележили двема вертикалним линијама или пишемо писмена без стрелице, те је тако

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = AB \; ; \; \left| \vec{P} \right| = P \; ; \; \left| \vec{v} \right| = v.$$

Неки писци векторе обележавају великим и малим готским писменима:

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}, \ldots, \qquad\qquad \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}, \ldots;$$

и то без стрелице, а интензитете великим и малим латинским писменима, те је тако

$$|\ \mathfrak{A}\ | = \mathrm{A}, \ldots; \qquad\qquad |\ \mathfrak{a}\ | = a, \ldots$$

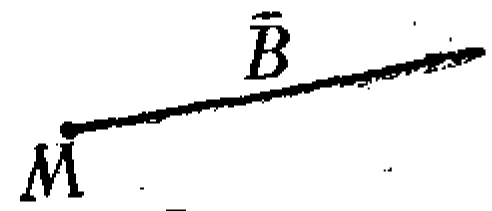
17. Везани и слободни вектори. — Вектор чији је положај везан за какву праву L или тачку M назива се *везани вектор*. Вектор $\vec{A}$ (сл. 19) и веткор $\vec{B}$ (сл. 20) су везани вектори.

Вектор $\vec{A}$ може заузимати разне положаје на правој L, и зато се вектори везани за праву називају још и *клизећи вектори*

Сл. 19.

Линија за коју је везан какав вектор назива се *нападна линија*.

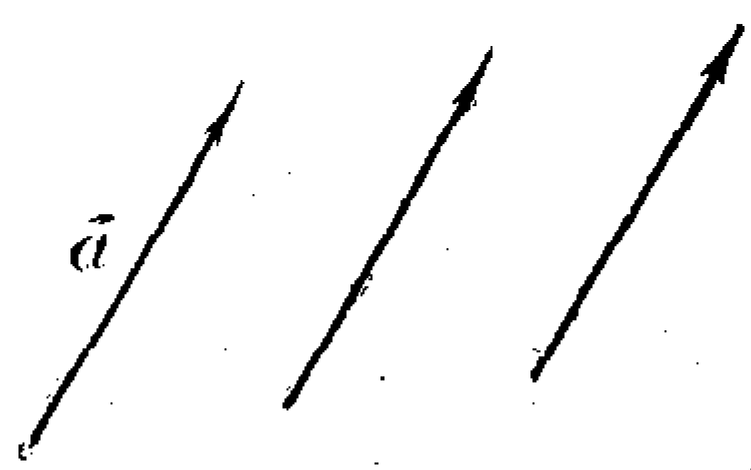
Вектор који је везан за неку тачку има увек свој почетак у тачки за коју је везан.



Сл. 20.

Вектор $\vec{a}$ (сл. 21) чији положај није везан ни за какву праву назива се *слободан вектор*, или само *вектор*.

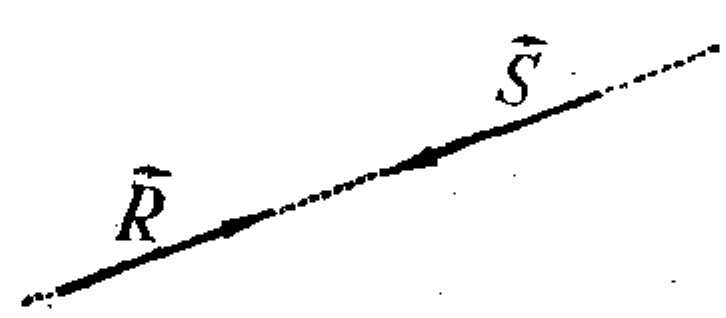
Слободан се вектор може померати паралелно своме првобитном положају, те отуда два или више слободних вектора су једнаки или *еквивалентни*, када имају једнаке интензитете и смерове, а правци су им паралелни



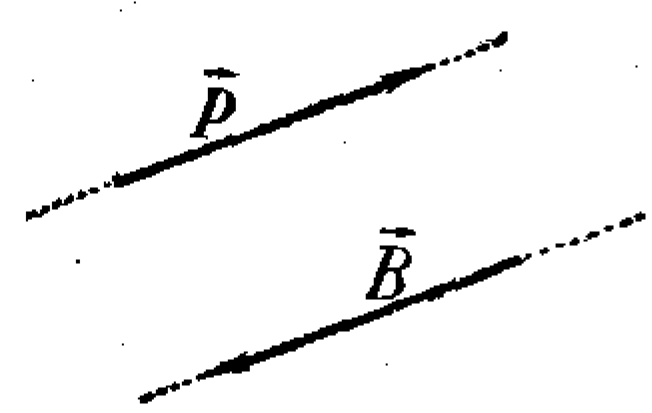
Сл. 21.

Два вектора једнаких интензитета, истог или паралелних праваца, а супротних смерова зову се *супротни вектори*. Такви, су вектори: $\vec{R}$ и $\vec{S}$ (сл. 22.) и $\vec{P}$ и $\vec{B}$ (сл. 23.)

Вектори који имају исти правац па били истог или супротног смера, називају се уопште *колинеарни вектори*.

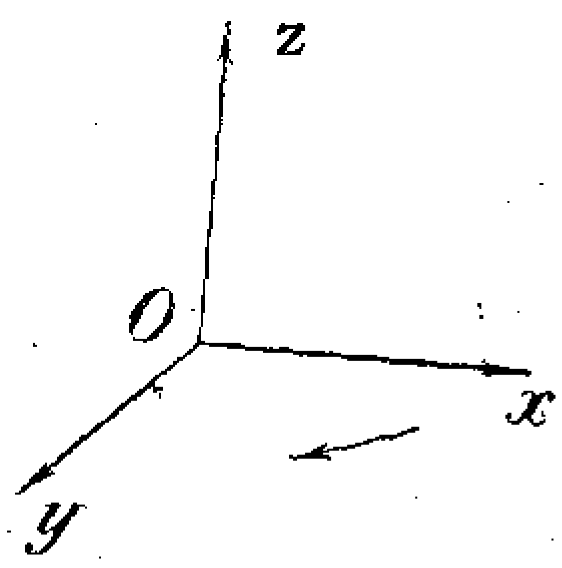


Сл. 22.



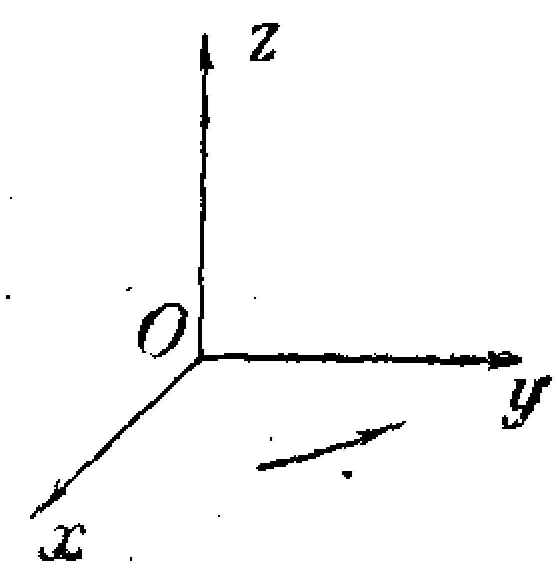
Сл: 23.

18. Леви и десни координатни систем. — Декартов правоугли координатни систем (сл. 24.) назива се *леви координатни систем*, јер кад замислимо да стојимо у почетку O и гледамо у позитиван смер x-осе, онда видимо да се x-оса, мора кретати с лева на десно да би најкраћим путем дошла у положај позитивног правца y-осе; а Декартов правоугли кординатни систем (сл. 25) назива се *десни*, јер се x-оса мора кретати с десна на лево, да би најкраћим путем дошла у положај y-осе.



Сл. 24.

Обртање x-осе у левом координатном систему је истоветно са обртањем казаљки на часовнику и такво обртање уопште с обзиром на леви координатни систем сматра се као позитивно; а супротно обртање као негативно.



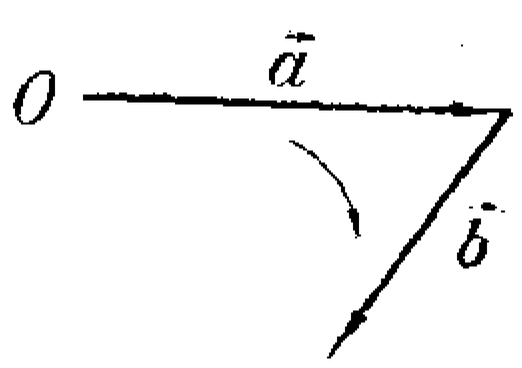
Сл. 25

Обртање x-осе у десном координатном систему је супротно обртању казаљки на часовнику, и такво обртање уопште с обзиром на десни координатни систем сматра се као позитивно, а супротно обртање као негативно.

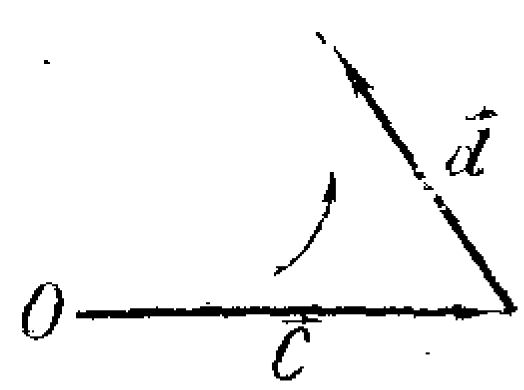
При одређивању смера обртања треба, дакле, водити увек рачуна о томе који се координатни систем узима у обзир.

Ми ћемо смер обртања одређивати, узимајући у обзир десни координатни систем.

Пример. — Ако стојимо у почетку O и посматрамо векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 26) онда видимо да вектор $\vec{b}$, надовезан на вектор $\vec{a}$, вуче вектор $\vec{a}$ у истом смеру, у коме иду казаљке на часовнику а тај је смер обртања према нашем координатном систему *негативан*.



Сл. 26.

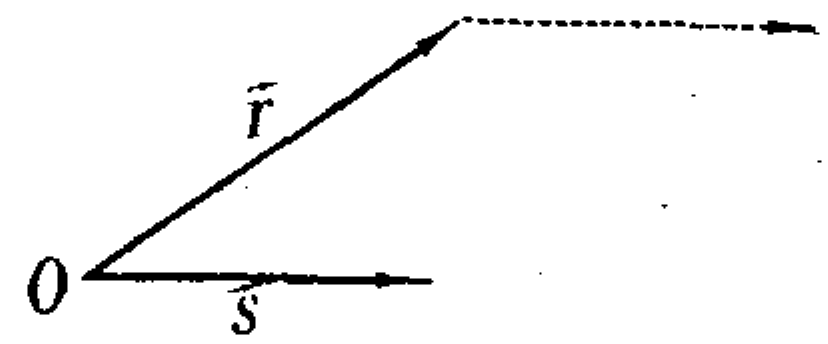


Сл. 27.

Кад на исти начин посматрамо векторе $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (сл. 27) видимо да вектор $\vec{d}$ вуче вектор $\vec{c}$

у противном смеру казаљки на часовнику, и тај је сме[
обртања *позитиван*.

Када треба одредити смер обртања двају вектора $\vec{r}$ и $\vec{s}$, који имају заједнички почетак О (сл. 28), онда сматрамо као да је други вектор $\vec{s}$ надовезан на први вектор $\vec{r}$ (сл. 28) и на претходни начин одређујемо њихов смер обртања

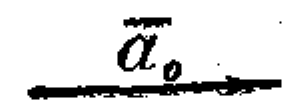


Сл. 28.

19. Јединични вектор или орт. — Вектор чији ј[
интензитет једнак јединици назива се *јединични вектор* или *орт*

Ако дуж a (сл. 29) претставља геометриски извесну јединицу* за мерење количина, онда се вектор $\vec{a}_0$ (сл. 30) чији је истензитет $a = 1$, јединични вектор или орт. Сваки вектор може се претставити као производ из његовог интензитета и орта истог правца и смера. Тако бисмо неки вектор $\vec{P}$ (сл. 31.), који има интензитет $3a$, правац и смер орта $\vec{a}_0$ могли претставити у облику

Сл 29.



Сл. 30.

Сл. 31.

$$\vec{P} = 3\,\vec{a}_0$$

Како се сваки вектор може сматрати као производ и[з]
његовога интензитета и орта и како орт одређује правац [и]
смер, то се интензитет свакога вектора сматра као позитиван

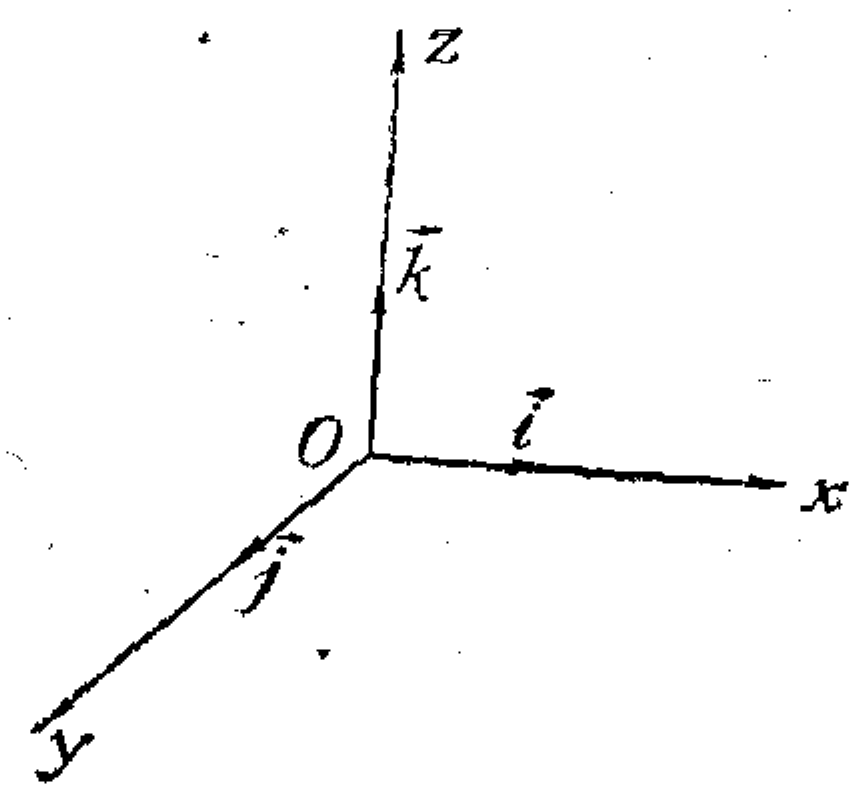
Ортови $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, који одређује правац и смер коорди[-]
натних оса у Декартовом систему (сл. 32.) називају се *основни ортови*.**

---

* Та јединица може бити, према природи вектора, dyn, cm и др.

** Основни ортови $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, се врло често пишу и без стрелица али ми ћемо их писати са стрелицом.

20. Вектор положаја. — Вектор, који одређује положај једне тачке у односу на једну утврђену тачку зове се *вектор положаја*. Вектор $\vec{r}$ (сл. 33.) који одређује положај тачке M у погледу на почетак O координатног система је вектор положаја тачке M с обзиром на почетак O.

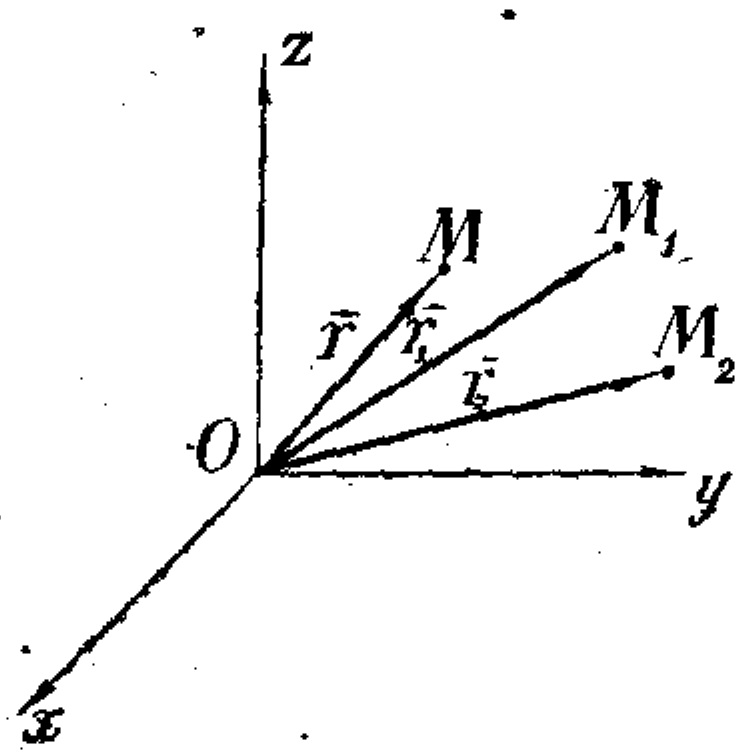


Сл. 32.

Ако би тачка M мењала свој положај, онда би се мењали: величина, правац и смер вектора положаја $\vec{r}$, и положаји M_1, M_2, тачке M би били одређени векторима положаја $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2, \ldots$

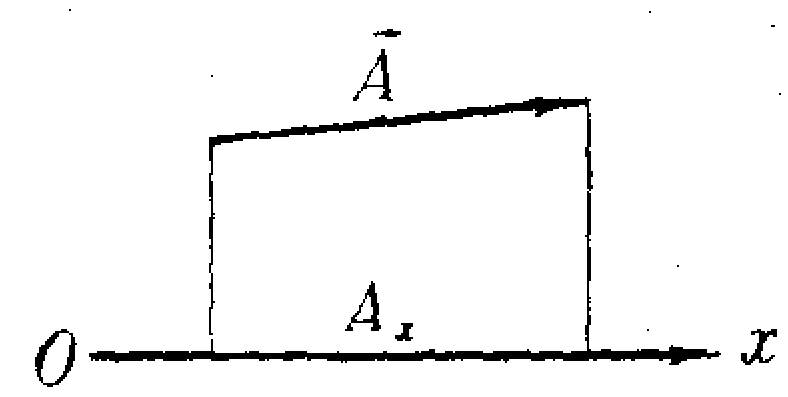
21. Пројекција вектора. — Када из почетне и крајње тачке вектора $\vec{A}$ (сл. 34.) спустимо нормале на осу Ox, добићемо његову пројекцију A_x.

Пројекција вектора на неку осу је скалар, јер је то само извесна величина.



Сл. 33.

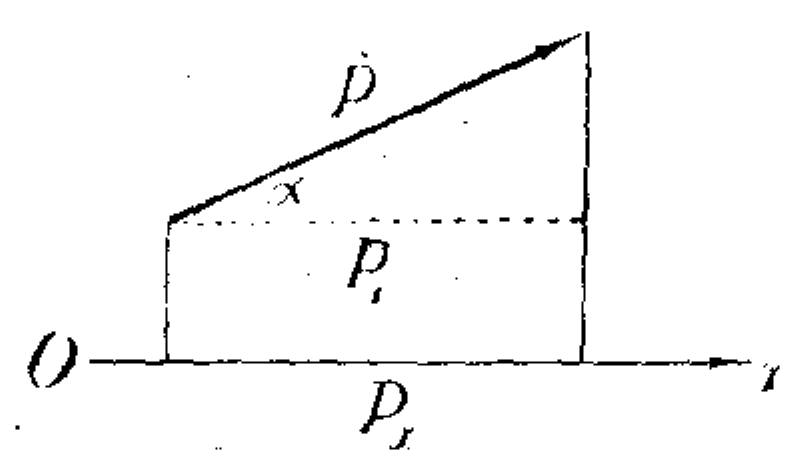
Ако пројицирамо извесан вектор $\vec{P}$ на осу Ox, добићемо његову пројекцију P_x (сл. 35). Када из почетне тачке вектора $\vec{P}$ повучемо дуж P_1 паралелну са x-осом добићемо угао α, који правац вектора $\vec{P}$, заклапа са x-осом.



Сл. 34.

Како је $P_1 = P_x$, то је $P_x = P\cos\alpha$ одакле добијамо став:

Пројекција вектора на неку осу једнака је интензитету вектора помноженим косинусом угла, кога заклапа правац вектора са том осом.



Сл. 35.

Пример. — Израчунати пројекцију вектора $\vec{K}$ (сл. 36), чији су углови са координатним осама

$$\sphericalangle(x, \vec{K}) = \frac{3}{4}\pi, \qquad \sphericalangle(y, \vec{K}) = \frac{1}{2}\pi, \qquad \sphericalangle(z, \vec{K}) = \frac{1}{4}\pi$$

а интензитет 12.

Како је

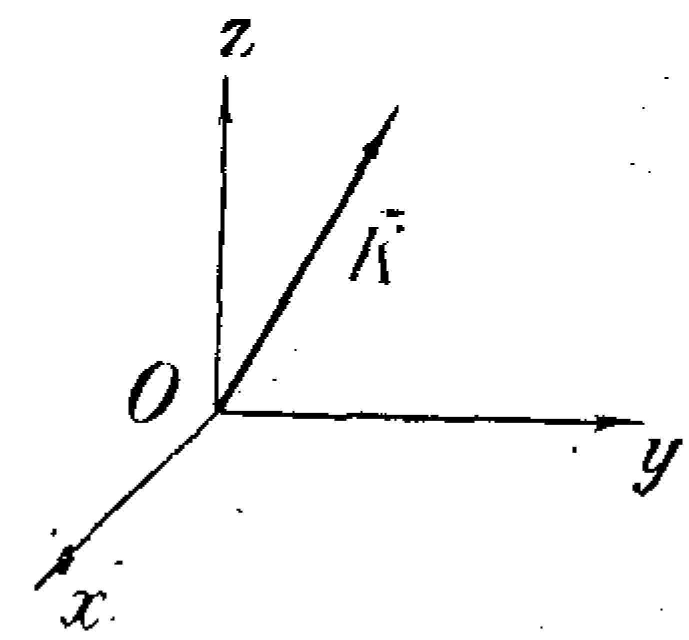
$$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{1}{2}\pi = 0, \quad \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

то су тражене пројекције

$$K_x = 12 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = -6\sqrt{2}$$

$$K_y = 12 \cdot 0 = 0$$

$$K_z = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$



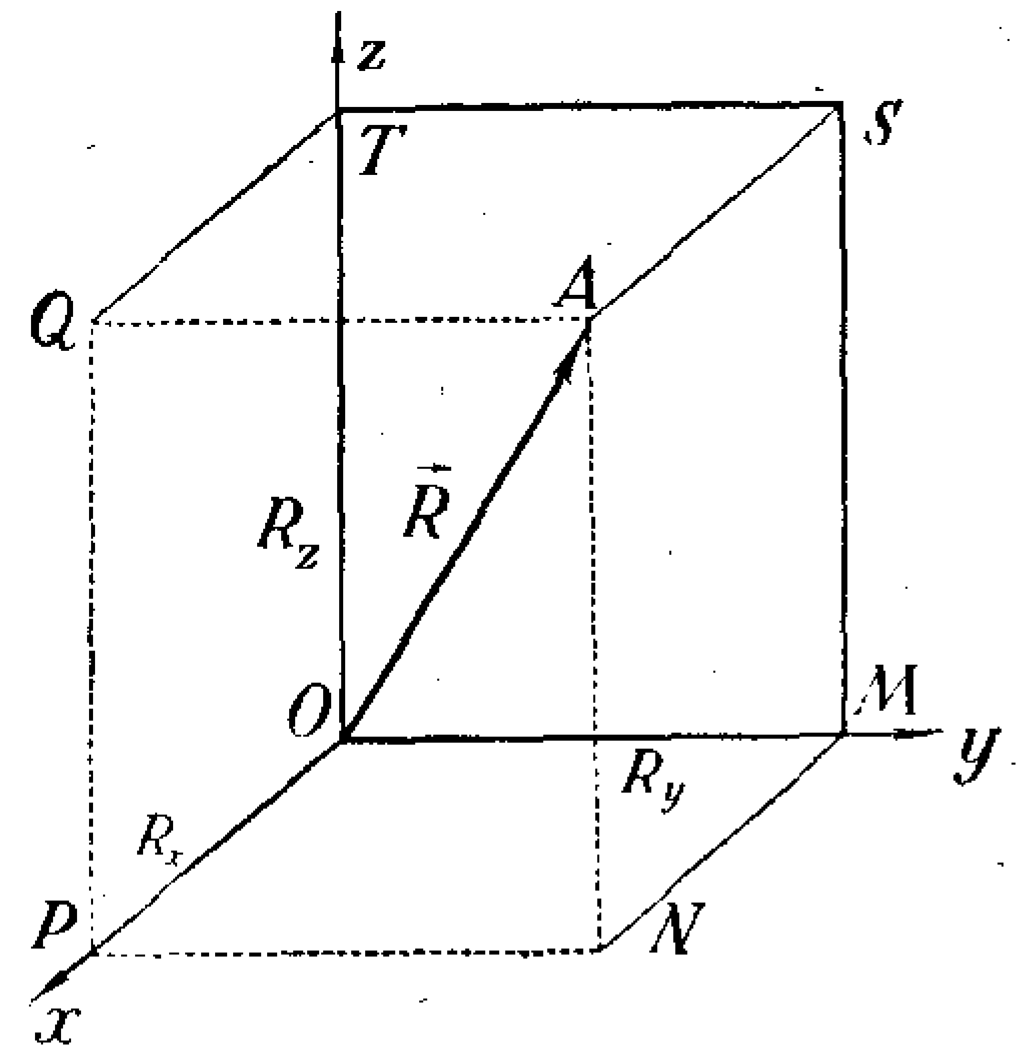
Сл. 36.

Када се неки вектор, који треба пројицирати, налази на самој оси, на коју се пројицира, онда је пројекција вектора једнака интензитету самога вектора, јер је угао између вектора и осе једнак нули, а косинус једнак јединици.

22. Координате вектора. — Када пројицирамо вектор положаја $\vec{R}$ на кординатне осе Декартовог правоуглог координатног система (сл. 37), добићемо његове пројекције R_x, R_y, R_z.

Ако су углови α, β, γ, које правац вектора $\vec{R}$ заклапа са x, y и z-осом, онда је према претходном параграфу:

$$\left.\begin{aligned} R\cos\alpha &= R_x \\ R\cos\beta &= R_y \\ R\cos\gamma &= R_z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Сл. 37.

Ако у крајњој тачки вектора $\vec{R}$ поставимо равни паралелне са координатним равнима, добићемо паралелопипед PNMOTQAS, чија је дијагонала вектор $\vec{R}$ а ивице, пројекције вектора на координатне осе. А кад је то тако, онда за углове α, β и γ важи познати образац из Аналитичке геометрије

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2)$$

Када једначине (1) дигнемо на квадрат и саберемо их добићемо:

$$R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2$$

или с обзиром на израз (2)

$$R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2$$

или

$$R = + \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2} \qquad (3)$$

Из једначине (3) можемо увек одредити интензитет вектора $\vec{R}$, када су познате његове пројекције R_x, R_y, R_z; а када знамо интензитет и пројекције, помоћу једначина (1) знамо и углове. које вектор заклапа са координатним осама, а када све то знамо, онда је и положај вектора потпуно одређен. Како су R_x, R_y, R_z у исто време и координате крајње тачке вектора $\vec{R}$, то се оне сматрају у исто време и координатама вектора положаја $\vec{R}$, јер га потпуно одређују у Декартовом правоуглом координатном систему.

Пример. — Израчунати интензитет и правац вектора положаја $\vec{K}$ у равни, чије су пројекције

$$K_x = 12, \qquad K_y = 5.$$

Тражени интензитет је

$$K = + \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Косинуси праваца су

$$\cos (x, \vec{K}) = \frac{12}{13}, \qquad \cos (y, \vec{K}) = \frac{5}{13},$$

одатле

$$\measuredangle (x, \vec{K}) = 22^0\ 37'\ 11'' \qquad \measuredangle (y, \vec{K}) = 67^0\ 22'\ 49''$$

Пример. — Израчунати интензитет и правац вектора положаја $\vec{P}$, чије су пројекције

$$P_x = 3\sqrt{2}, \qquad P_y = -3, \qquad P_z = -3.$$

Интензитет вектора $\vec{P}$ је

$$P = + \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 6.$$

Правац вектора је одређен угловима: $(x, \vec{P})$, $(y, \vec{P})$ и $(z, \vec{P})$, чији су косинуси

$$\cos (x, \vec{P}) = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos (y, \vec{P}) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos (z, \vec{P}) = -\frac{1}{2},$$

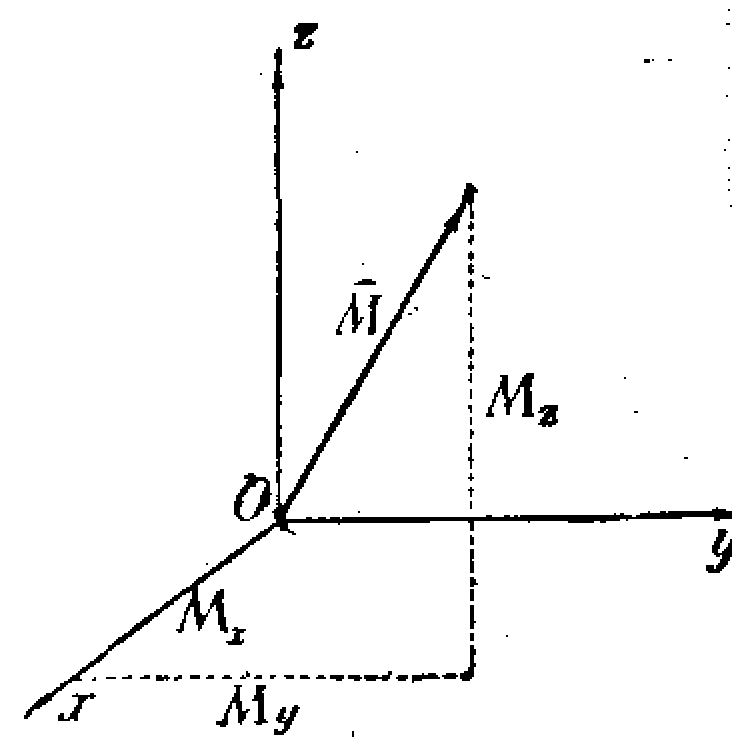
одакле је

$\sphericalangle (x, \vec{P}) = 45^0$, $\sphericalangle (y, \vec{P}) = 120^0$, $\sphericalangle (z, \vec{P}) = 120^0$

Пример. — Одредити место вектора положаја $\vec{M}$ (сл. 38), када су његове пројекције

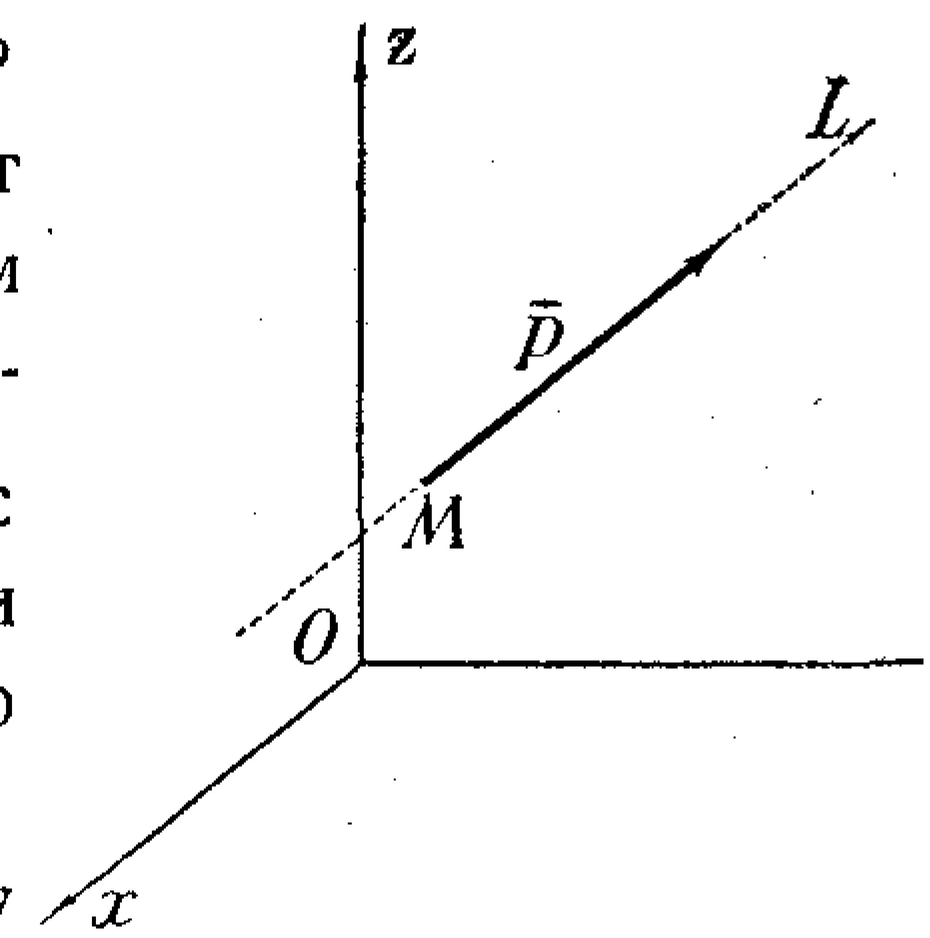
$$M_x = 6, \quad M_y = 8, \quad M_z = 10.$$

Како су дате пројекције у исто време и координате крајњих тачака вектора $\vec{M}$, то када у простору одредимо тачку чије су координате $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$ и саставимо са почетком O добићемо тражени вектор $\vec{M}$.



Сл. 38.

Када је неки вектор $\vec{P}$ везан за праву L (сл. 39) која у овоме случају има и назначени смер, који се сматра за позитиван онда је везани вектор $\vec{P}$ потпуно одређен кад је познат положај праве L у координатном систему $Oxyz$ и кад је познат његови нтензитет $|\vec{P}|$ и знак (+) плус или (—) минус, према томе да ли вектор има исти или супротан смер праве L.



Сл. 39.

Како је положај праве L у координатном систему одређен једначинама.

$$y = mx + n$$
$$z = px + q$$

где имамо четири непозната параметра m, n, p, q, то је везани вектор потпуно одређен кад су познати пет подата

$\pm\ |\vec{P}|, m, n, p, q.$

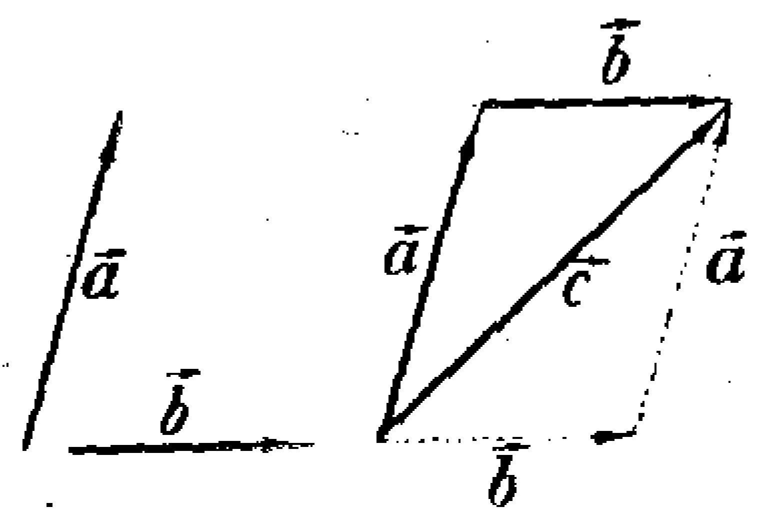
И ако су за одредбу везаног вектора потребни пет података, махом се везани вектор, ради симетрије образаца, изражава помоћу шест података, о којима ће одмах бити говора

Ако везани вектор $\vec{P}$ сматрамо за један тренутак као слободан, онда је он одређен својим пројекцијама P_x, P_y, P_z, које се у овом случају изражавају са X, Y, Z.

Положај нападне тачке M потпуно је одређен кад су познате њене координате x, y, z; а кад знамо положај на падне тачке и пројекције вектора, онда знамо и сам вектор, те је тако везани вектор $\vec{P}$ одређен податцима

$$(x, y, z, X, Y, Z).$$

23. Сабирање вектора. — Збир два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 40) је вектор $\vec{c}$, чији се почетак поклапа са почетком првог вектора, а крај са крајем другог вектора надовезаног на први вектор.



Сл. 40.

Из слике видимо не само да је

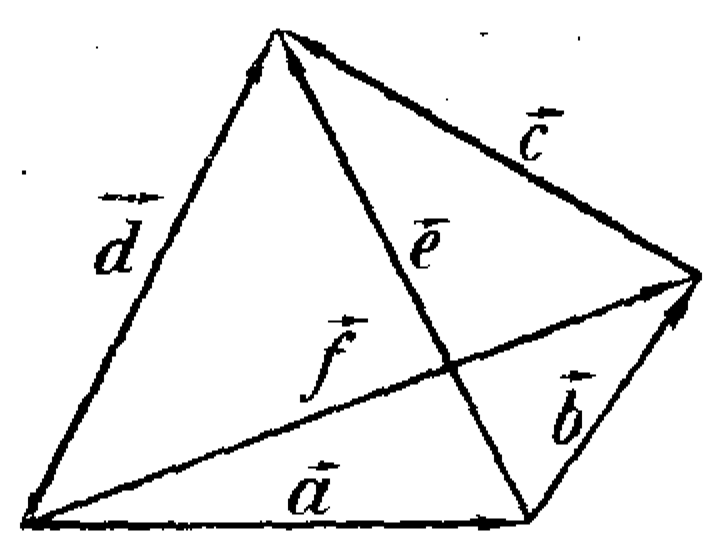
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

него да је и

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c},$$

што значи да при сабирању вектора важи *закон комутације*, као и код скалара.

Збир три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (сл. 41) је вектор $\vec{d}$, чији се почетак поклапа са почетком првог вектора, а крај с крајем трећег вектора. Из слике видимо да је



Сл. 41.

$$\vec{f} + \vec{c} = \vec{d}$$
$$\vec{a} + \vec{e} = \vec{d}$$

одакле је

$$\vec{f} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{e},$$

или како је

$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b};\ \vec{e} = \vec{b} + \vec{c},$$

то је

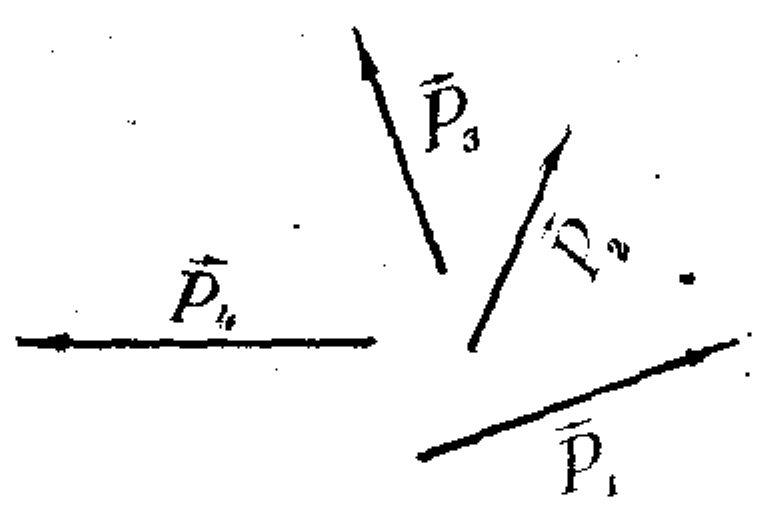
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

што показује, да при сабирању вектора важи и *закон асоцијације*.

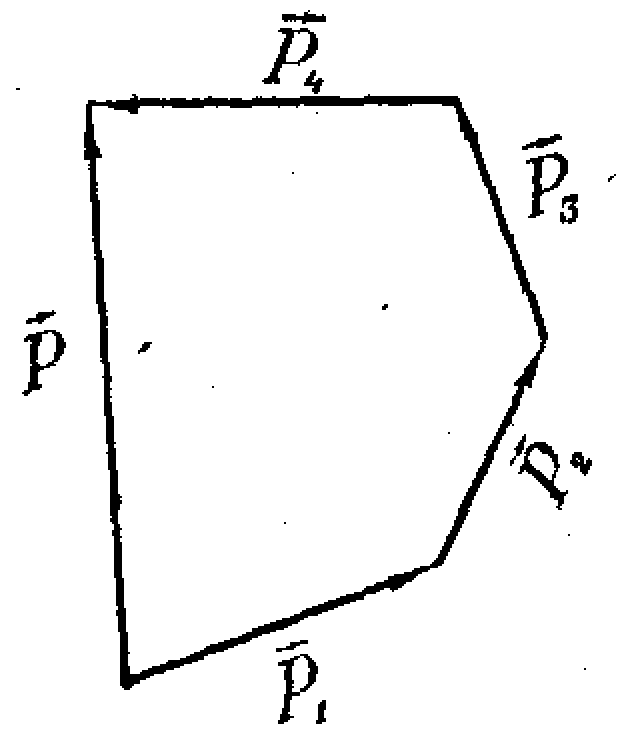
На исти начин сабирамо четири и више вектора, па било да су они у равни и у простору.

Пример. — Сабрати векторе $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, и $\vec{P}_4$ (сл. 42а) Како су дати вектори слободни, то се они могу померати паралелно сами себи, те тако кад на крај вектора $\vec{P}_1$

надовежемо почетак вектора $\vec{P}_2$ (сл. 42b), и затим на исти начин на вектор $\vec{P}_2$ надовежемо вектор $\vec{P}_3$, а на вектор $\vec{P}_3$ надовежемо вектор $\vec{P}_4$, добићемо вектор $\vec{P}$, који нам пред-стављa збир датих вектора а чији се почетак поклапа са почетком првог вектора а крај са крајем четвртог вектора.



Сл. 42а.



Сл. 42b.

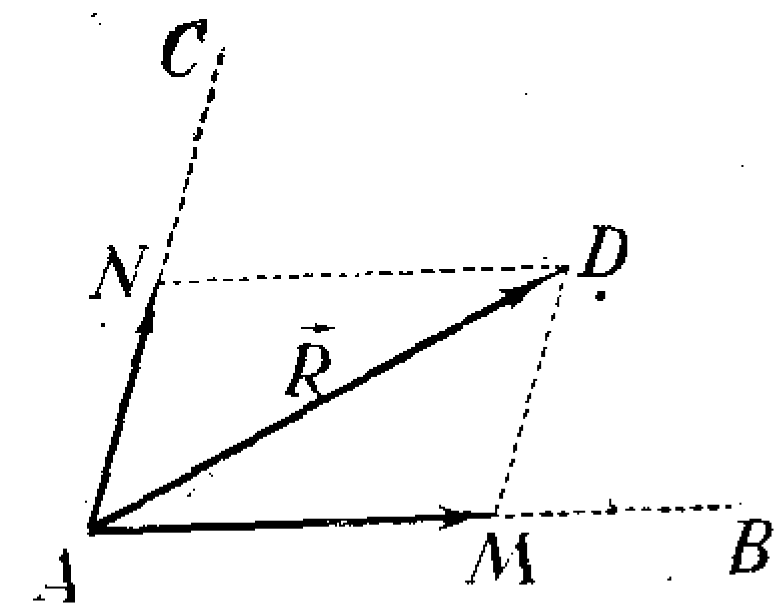
Вектор, који добијамо као збир двају или више вектора назива се *вектор резултанта*, а вектори сабирци називају се *вектори компоненте*, или само компоненте.

Сабирање вектора назива се још и слагање вектора у једну резултанту.

Више пута треба један задани вектор разложити у две или три компоненте под извесним условима.

Ако вектор $\vec{R}$ (сл. 43) треба разложити на две компоненте, чији правци падају у правце правих AB и AC, онда из крајње тачке D вектора $\vec{R}$ повлачимо паралелне DM и DN са заданим правама и добијамо векторе компоненте $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$, јер је

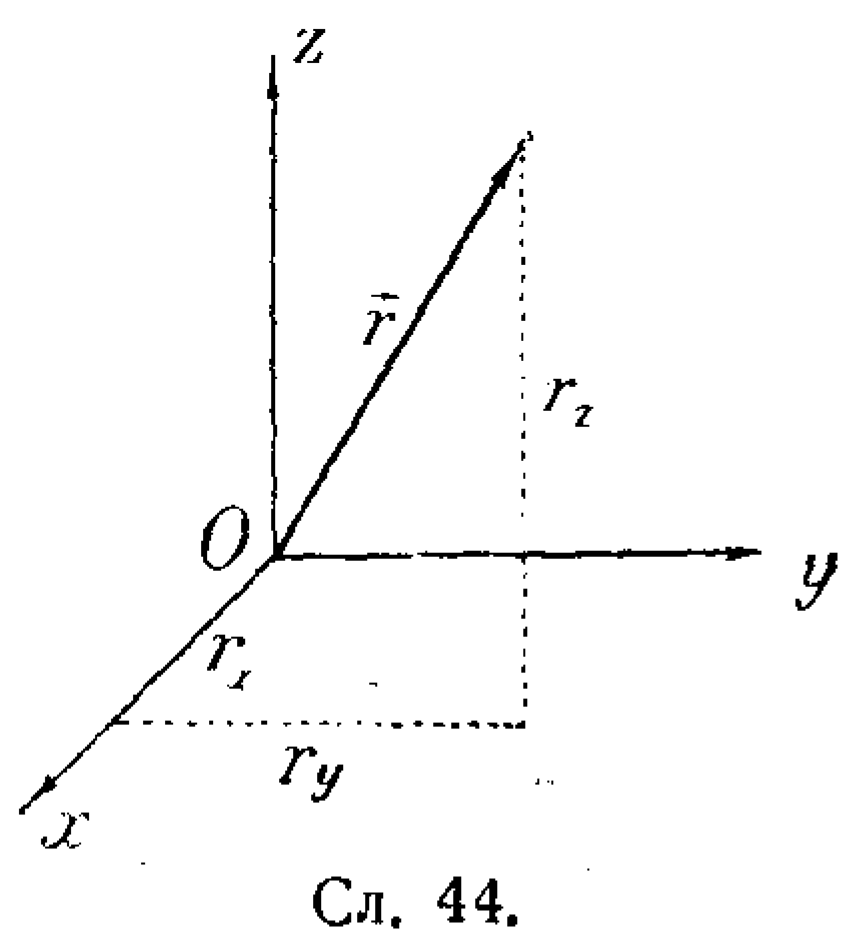
$$\vec{R} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}.$$



Сл. 43.

Најчешћи је случај разлагање вектора у компоненте, које имају правце координатних оса.

Ако узмемо један вектор $\vec{r}$ у простору (сл. 44) са нападном тачком у координатном почетку и ако из крајње тачке тога вектора спустимо нормале на координатне осе, добићемо пројекције вектора $\vec{r}$: r_x, r_y, r_z. А кад добивеним пројекцијама дамо смерове координатних оса множећи их одговарајућим ортовима $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ добијамо компоненте вектора $\vec{r}$: $r_x\vec{i}$, $r_y\vec{j}$ и $r_z\vec{k}$, те је тако,

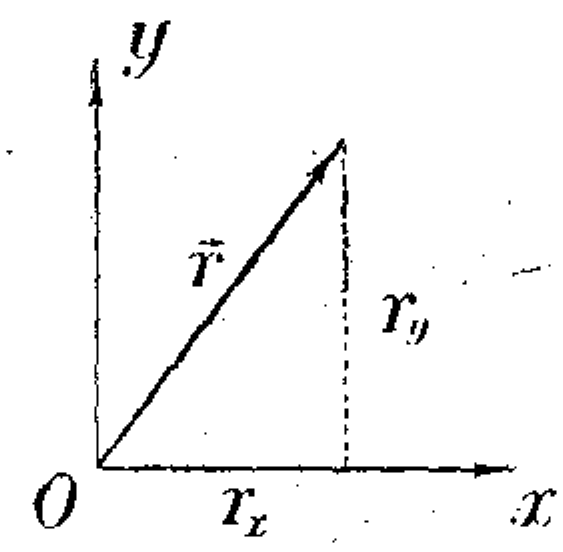


Сл. 44.

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}.$$

Ако је вектор $\vec{r}$ (сл. 45) у равни, онда је

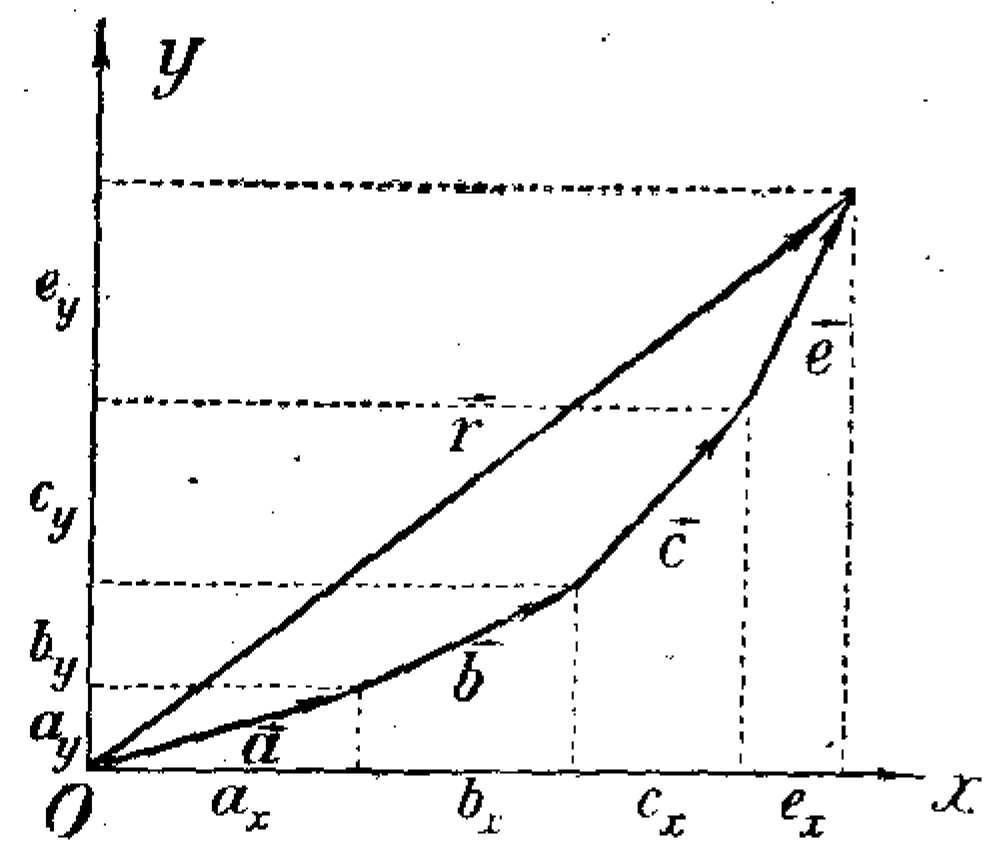
$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}$$



Сл. 45.

Збир произвољних вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ је вектор $\vec{r}$ (сл. 46). Ако пројицирамо поједине векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ на x-осу и y-осу, добићемо њихове пројекције a_x, b_x, c_x, e_x; a_y, b_y, c_y, e_y, исто тако ако пројицирамо вектор $\vec{r}$, добићемо његове пројекције r_x и r_y, па како је

$$r_x = a_x + b_x + c_x + e_x\,,$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y + e_y$$



Сл 46.

то да су наведени вектори били у простору, онда бисмо имали њихове пројекције и на z-оси, па би било

$$r_z = a_z + b_z + c_z + e_z\,,$$

те тако добијамо став:

Пројекције вектора резултанте на неку осу једнака је збиру пројекција појединих вектора компонената, или пројекција збира вектора једнака је збиру пројекција појединих вектора сабирака.

Пример. — Одредити величину и правац вектора резултанте $\vec{R}$ вектора компонената $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ када су пројекције вектора компонената.

$$a_x = 6 \qquad b_x = 3 \qquad c_x = -5$$
$$a_y = -2 \qquad b_y = 6 \qquad c_y = -1$$

Према теореми је

$$R_x = 6 + 3 - 5 = 4$$
$$R_y = -2 + 6 - 1 = 3.$$

Интензитет вектора $\vec{R}$ је

$$R = +\sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

а

$$\cos(x, \vec{R}) = \frac{4}{5} = 0{,}8, \qquad \cos(y, \vec{R}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

одакле је

$$\sphericalangle (x, \vec{R}) = 36^\circ\ 52'\ 12'', \qquad \sphericalangle (y, \vec{R}) = 53^\circ\ 7'\ 48''$$

Нађени интензитет и углови потпуно одређују тражени вектор $\vec{R}$.

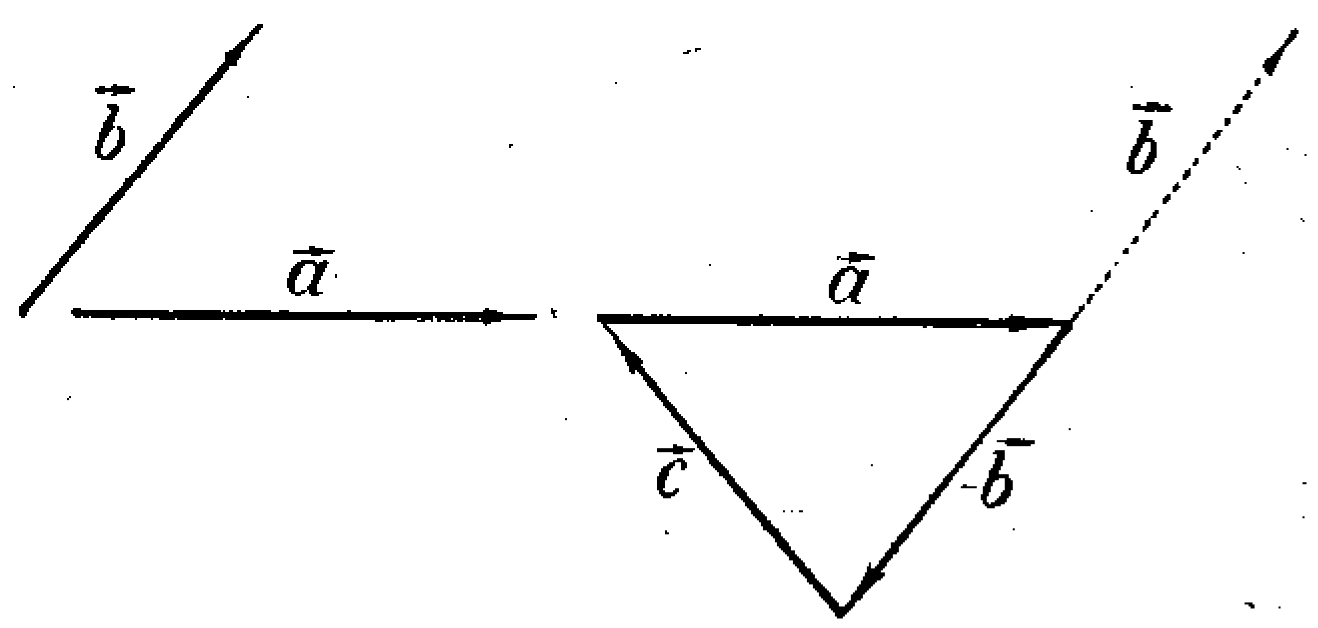
Када нису дате пројекције, већ вектори компоненте са угловима које заклапају са координатним осама, а тражи се њихова резултанта, онда прво нађемо на познати начин пројекције датих вектора а затим интензитет вектора разултанте и његове углове са x, y и z осом ако су дати вектори у простору.

24. Одузимање вектора. — Када вектор $\vec{b}$ треба одузети од вектора $\vec{a}$ онда је

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c},$$

што ће рећи:

Разлика вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c}$ (сл. 47), који добијамо, кад почетак вектора $\vec{a}$ спојимо са крајем вектора $(-\vec{b})$ надовезаног на вектор $\vec{a}$.



Сл. 47.

25. Множење вектора једним скаларом. — Производ вектора $\vec{a}$ и скалара n је вектор

$$n \cdot \vec{a}$$

Ако би n био цео позитиван број, онда би $n\vec{a}$ био вектор истог правца и смера као и вектор $\vec{a}$, само n пута већег интензитета; ако би n био неки прав разломак, онда би интензитет вектора $n\vec{a}$ био мањи од интензитета $\vec{a}$, а смер вектор $n\vec{a}$ одређује знак, који стоји уз скаларни фактор n.

Тако сваки вектор $\vec{a}$, чији је интензитет a, има a пута већи интензитет од орта $\vec{a}_0$ истог правца и смера, тако да је

$$\vec{a} = a \cdot \vec{a}_0.$$

или

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$$

Дакле став:

Орт неког вектора може се претставити као количник из самог вектора и његовог интензитета.

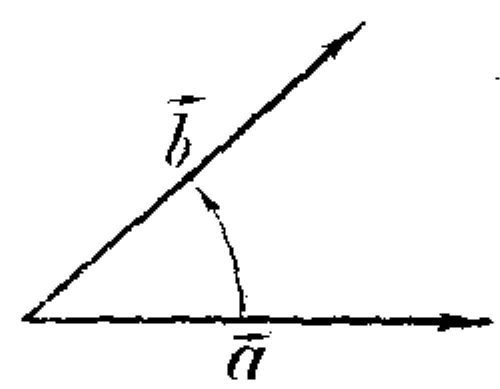
Према дефиницији множења вектора једним скаларом излази:

Кад имамо два колинеарна вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ истог смера, да је интензитет вектора $\vec{a}$ m-пута већи од интензитета вектора $\vec{b}$ онда можемо увек ставити

$$\vec{a} = m\,\vec{b}.$$

26. Скаларни или унутрашњи продукт двају вектора. — Ако угао, који заклапају вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 48) обележимо са $(\vec{a}, \vec{b})$, онда се продукт

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = ab \cos \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$



Сл. 48

назива **скаларни продукт** вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторе чији се скаларни продукт тражи заграђујемо малом заградом*; а износ продукта добијамо кад измножимо интензитете вектора и косинус угла кога вектори заклапају.

Како је:

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \cos\left(\vec{b}, \vec{a}\right),$$

то је

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\,\vec{a}\right),$$

одакле изводимо став:

Закон комутације важи и за скаларни продукт вектора.

Ако помножимо вектор $\vec{a}$ скаларно са самим собом добићемо

---

* Неки писци изражавају скаларни продукт без зграда и то: $\vec{a}\,\vec{b}$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

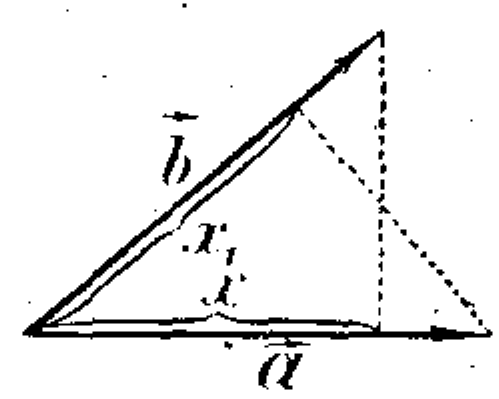
$$\left(\vec{a}\,\vec{a}\right) = a \cdot a \cos 0^0 = a^2.$$

Скаларни продукт двају вектора је једнак нули,

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = 0,$$

у три случаја: 1) или кад је $\vec{a} = 0$; 2) или кад је $\vec{b} = 0$ и 3) или кад вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ стоје један на другом нормално јер је у том случају $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

Када вектор $\vec{b}$ пројицирамо на вектор $\vec{a}$ (сл. 49), добићемо његову *пројекцију* x, а како је



Сл. 49.

$$\frac{x}{|\vec{b}|} = \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

или

$$x = \vec{b} \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

то је скаларни продукт,

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = ax,$$

или

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = a \times \text{пројекц } \vec{b}.$$

Исто тако, пројицирајући вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, добићемо пројекцију x_1, те ће бити

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = b\, x_1,$$

одакле излази став:

Скаларни продукт двају вектора, с геометриског гледишта једнак је продукту из интензитета једнога вектора помноженог пројекцијом другог вектори на први вектор као извесну осу.

Ако је неки од вектора у скаларном продукту сложен израз, онда се он у загради одваја запетом, а при образовању производа важи дистрибутивни закон. Тако је

$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a}\,\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\,\vec{c}\right),$$

што ћемо одмах доказати.

Како је, као што се види (сл. 50),

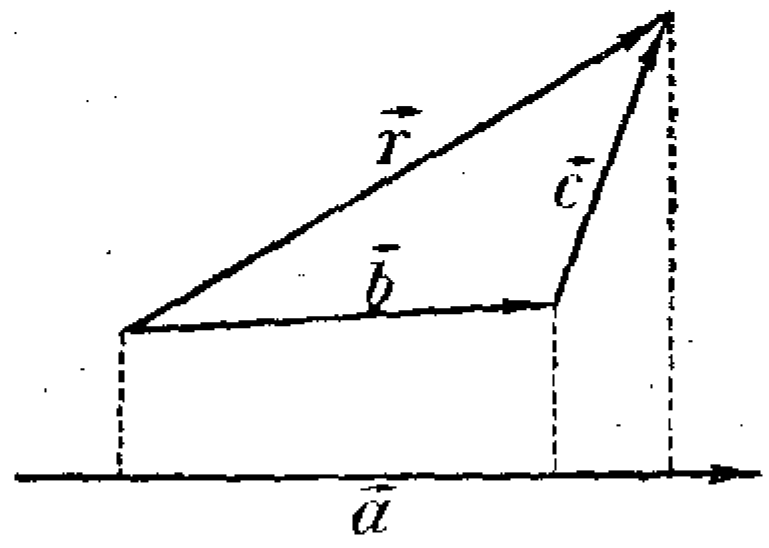
$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{r},$$

то је

$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a}\ \vec{r}\right) = a \times \text{пројекц}\ \vec{r},$$

а

$$\text{пројекц}\ \vec{r} = \text{пројекц}\ \vec{b} + \text{пројекц}\ \vec{c},$$



Сл. 50.

па је зато

$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = a \times \text{пројекц}\ \vec{b} + a \times \text{пројекц}\ \vec{c},$$

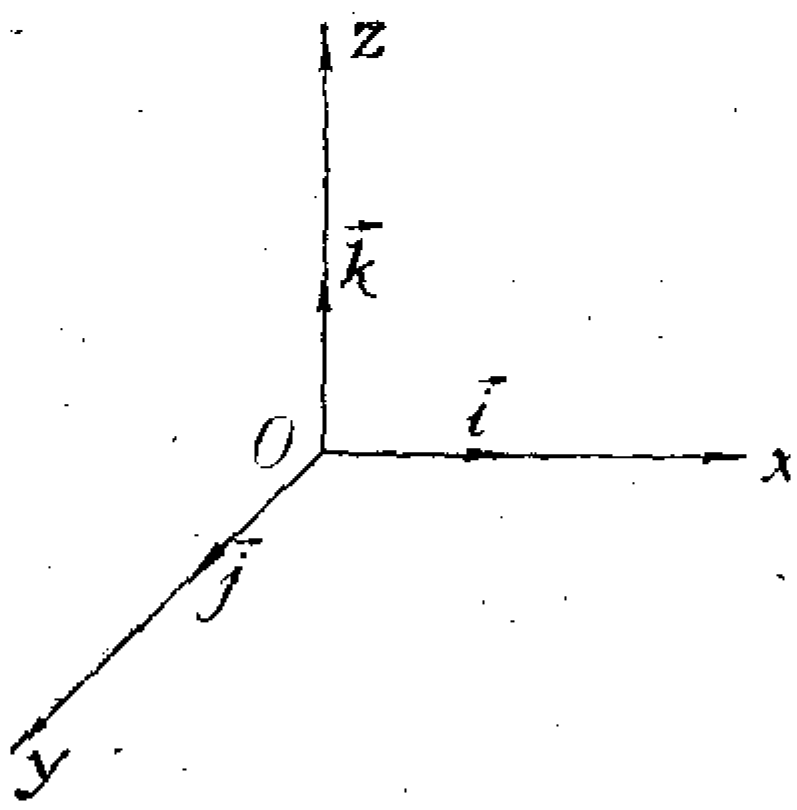
или

$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a}\ \vec{b}\right) + \left(\vec{a}\ \vec{c}\right),$$

што смо и хтели доказати.

Скаларни продукти основних ортова $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ (сл. 51.) су:

$$\left(\vec{i}\ \vec{i}\right) = 1, \left(\vec{i}\ \vec{j}\right) = 0, \left(\vec{i}\ \vec{k}\right) = 0;$$
$$\left(\vec{j}\ \vec{i}\right) = 0, \left(\vec{j}\ \vec{j}\right) = 1, \left(\vec{j}\ \vec{k}\right) = 0;$$
$$\left(\vec{k}\ \vec{i}\right) = 0, \left(\vec{k}\ \vec{j}\right) = 0, \left(\vec{k}\ \vec{k}\right) = 1.$$



Сл. 51.

Ако хоћемо за скаларни продукт

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)$$

да изведемо аналитички образац онда је

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = \left(a_x \vec{i} + a^y \vec{j} + a^z \vec{k},\ b^x \vec{i} + b_y \vec{j} + b^z \vec{k}\right),$$

одакле, узимајући у обзир да код скаларног продукта важи закон дистрибуције, добијамо аналитички образац скаларног продукта

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z$$

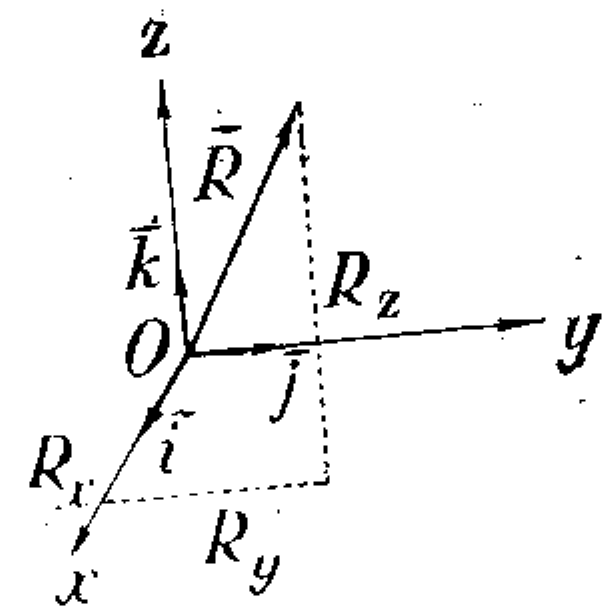
На основу обрасца (1) добијамо став:

Скаларни продукт двају вектора једнак је збиру производа истоимених пројекција тих вектора.

27. Пројицирање или скаларизирање векторских једначина. — Када вектор $\vec{R}$ (сл. 52) разложимо у компоненте биће

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \qquad (2)$$

Кад векторску једначину (2) помножимо скаларно прво са $\vec{i}$, а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добићемо



Сл. 52.

$$(\vec{R}\,\vec{i}) = R_x$$
$$(\vec{R}\,\vec{j}) = R_y$$
$$(\vec{R}\,\vec{k}) = R_z$$

одакле изводимо став:

Кад један вектор разложен у компоненте помножимо скаларно основним ортовима $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, добијамо његове пројекције на координатним осама.

Помоћу скаларног множења основним ортовима $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ можемо, на исти начин као што смо учинили са једначином (2), *векторске једначине преобраћати у скаларне;* или другим речима, помоћу скаларног множења основним ортовима, можемо векторске једначине преобраћати у једначине у којима се место вектора, налазе пројекције вектора.

Пример. — Нека нам је дата векторска једначина

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \tag{3}$$

Вектори разложени у компоненте дају једначину

$$\vec{a}_x\, i + a_y\, \vec{j} + a_z\, \vec{k} = (b_x \vec{i} + b_y\, \vec{j} + b_z\, \vec{k}) + (c_x \vec{i} + c_y\, \vec{j} + c_z \vec{k})$$

Кад добивену једначину помножимо скаларно прво са $\vec{i}$ а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добићемо дату једначину (3) у скаларном облику

$$\begin{aligned} a_x &= b_x + c_x \\ a_y &= b_y + c_y \\ a_z &= b_z + c_z\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Добивене три једначине (4) претстављају једну векторску једначину (3).

Једначине (4) показују да је збир пројекција компонената једнак пројекцијама резултанте, што је требало очекивати, јер из дате векторске једначине се види да је вектор $\vec{a}$ резултанта вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

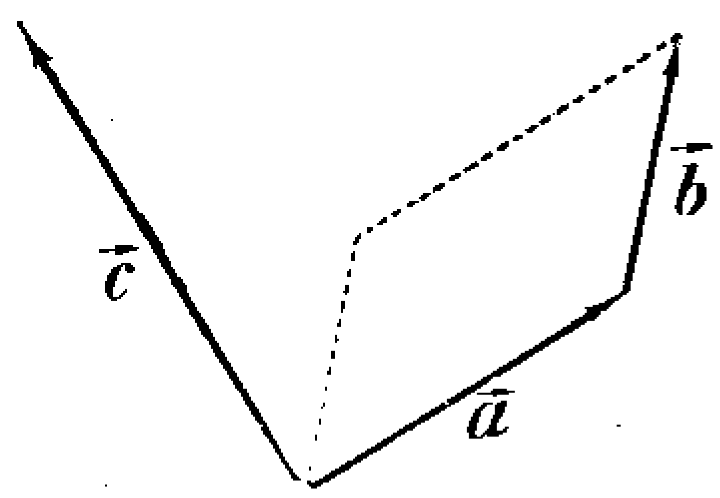
Поступак којим се векторске једначине преобраћају у скаларне, назива се пројицирање или скаларизирање векторских једначина.

Пројицирање векторских једначина на показани начин, ки само за Декартов правоугли координатни систем, којим мо се ми и искључиво служити за пројицирање векторих једначина.

28. Векторски продукт двају вектора. — Векторски одукт двају вектора уопште је вектор, који стоји нормално на раван, коју одређују та два вектора, и чији је тензитет једнак производу из интензитета тих двају вектора, помноженом синусом угла, који заклапају та два вектора, а смер — позитиван — управљен на више, ако други вектор довезан на први, вуче први вектор у противном смеру у ком иду казаљке на часовнику, а негативан — на доле — ко други вектор надовезан на први, вуче први вектор у том смеру у коме иду казаљке на часовнику.

Кад хоћемо да означимо да се тражи векторски продукт вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 53.), онда их заграђујемо средњом заградом, те је тако

$$[\vec{a}\ \vec{b}] = \vec{c} \qquad (1)$$



Сл. 53

Вектор $\vec{c}$ стоји нормално на раван, коју одређују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и има смер позитиван, а интензитет му је

$$\left|\vec{c}\right| = ab\, sin\, (\vec{a},\ \vec{b}), \qquad (2)$$

или другим речима интензитет му је једнак површини паралелограма*, чије су стране вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Према дефиницији векторски продукат

$$[\vec{a}\ \ \vec{b}] = 0 \qquad (3)$$

може бити у три случаја: 1) Кад је $\vec{a} = 0$; 2) кад је $\vec{b} = 0$ и 3) кад је $\sphericalangle\ (\vec{a},\ \vec{b}) = 0$, а $\sphericalangle\ (\vec{a},\ \vec{b})$ је једнак нули кад су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни или паралелни.

Како је

$$sin \sphericalangle\ (\vec{a},\ \vec{b}) = -\ sin \sphericalangle\ (\vec{b},\ \vec{a}) \qquad (4)$$

то *закон комутације код векторског продукта не може се*

---

* То ће рећи: вектор $\vec{c}$ има толико дужинских јединица, колико паралелограм има површинских јединица.

примењивати, јер ако променимо места векторима у векторском продукту, он према изразу (4) мења знак тако да је

$$[\vec{a}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}].$$

Што се тиче дистрибутивног закона, он се може примењивати код векторског продукта исто онако као и код продукта скаларних величина, те је тако

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}\ \vec{b}] + [\vec{a}\ \vec{c}].$$

што ћемо одмах доказати.

Како је вектор

$$\vec{a} = a\,\vec{a}_0,$$

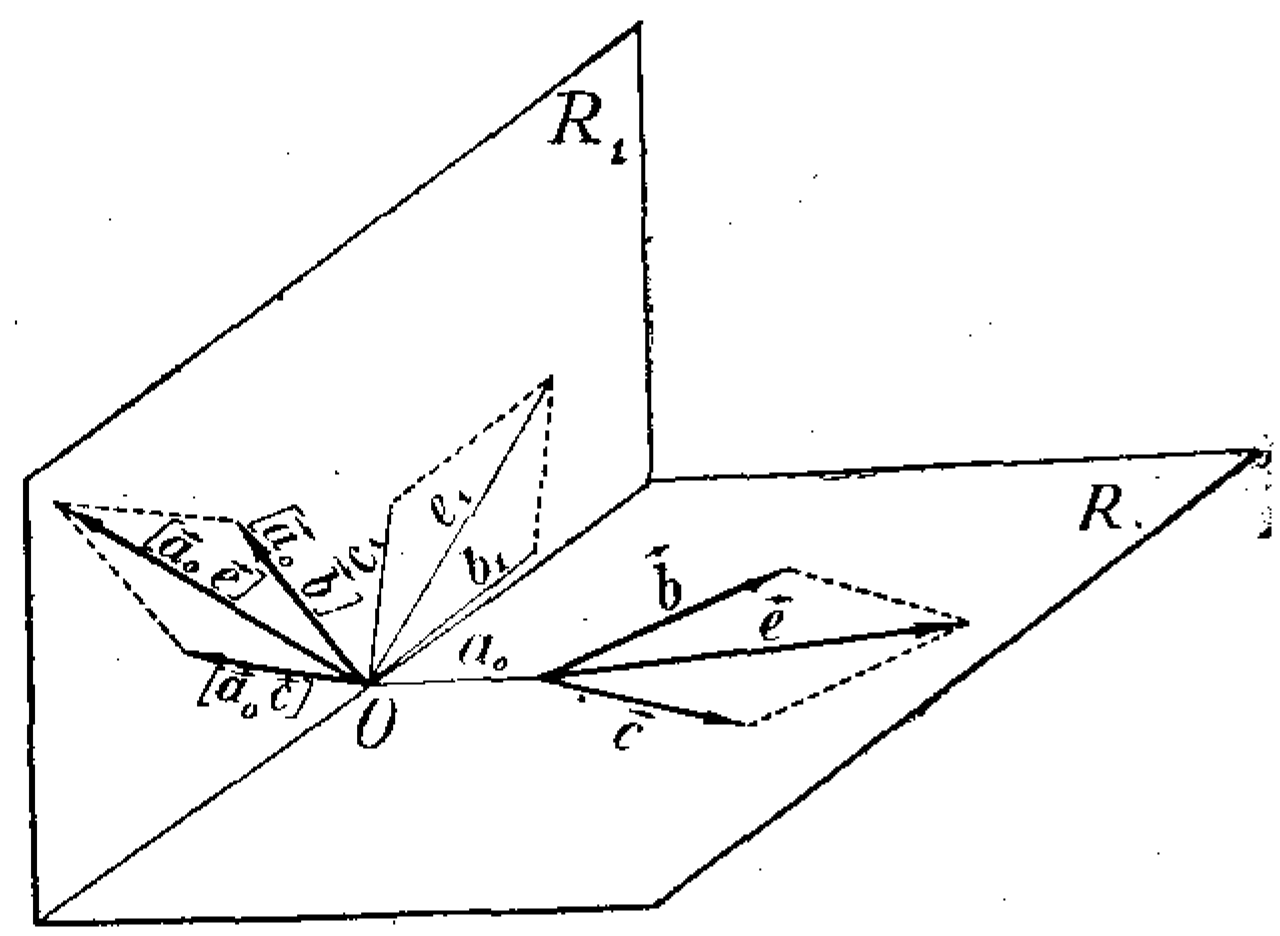
то у изразу $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}]$ место вектора $\vec{a}$ можемо ставити орт $\vec{a}_0$ и кад докажемо да закон дистрибуције важи за продукт

$$[\vec{a}_0,\ \vec{b} + \vec{c}],$$

он ће важити и за продукт $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}]$ и уопште.

Пројекције вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$ * и њихове резултанте $\vec{b} + \vec{c} = \vec{e}$ у равни R_1, која стоји нормално на орт $\vec{a}_0$ (сл. 54) су, b_1, c_1 и e_1**.

Кад поједине пројекције помножимо интезитетом орта $\vec{a}_0$, добићемо векторске продукте чији ће вектори сачињавати исти паралелограм, који су сачињавале пројекције, само ће се окренути у својој равни око пола O за $\frac{\pi}{2}$ јер вектори векторских продукта, стоје нормално на појединим равнима, које граде вектори $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c}$, са ортом $\vec{a}_0$, те је отуда



Сл. 54.

$$[\vec{a}_0, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}_0\,\vec{b}] + [\vec{a}_0\,\vec{c}],$$

што је и требало доказати.

---

* Вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су у простору.

** Њихове величине су производ из интензитета одговарајућег вектора и синуса угла кога заклапа вектор са ортом a_0.

Векторски продукти основних ортова $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (сл. 55) су:

$$[\vec{i}\,\vec{i}] = 0, \qquad [\vec{i}\,\vec{j}] = \vec{k}, \qquad [\vec{i}\,\vec{k}] = -\vec{j};$$

$$[\vec{j}\,\vec{j}] = 0, \qquad [\vec{j}\,\vec{k}] = \vec{i}, \qquad [\vec{j}\,\vec{i}] = -\vec{k};$$

$$[\vec{k}\,\vec{k}] = 0, \qquad [\vec{k}\,\vec{i}] = \vec{j}, \qquad [\vec{k}\,\vec{j}] = -\vec{i}.$$

Кад једначину векторског продукта

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{c}$$

пројицирамо, биће

$$[a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}] = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

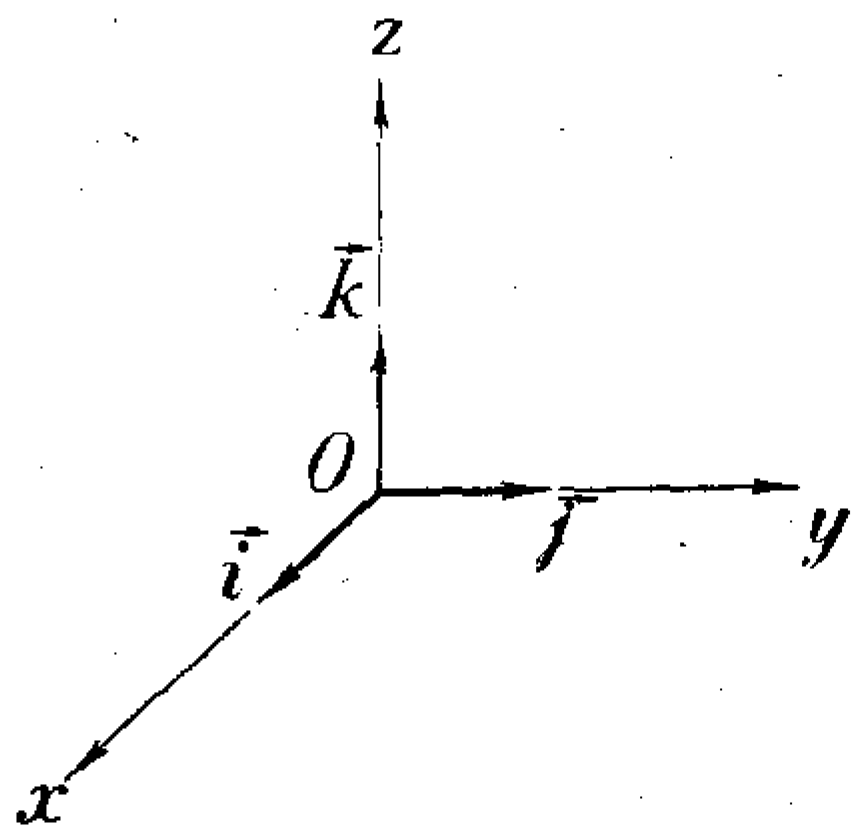
или, примењујући дистрибутивни закон и обрасце за векторске продукте основних ортова,

$$(a_y\, b_z - a_z\, b_y)\vec{i} + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\vec{j} + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\vec{k} = \\ = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}, \qquad (6)$$

одакле множећи целу једначину скаларно са $\vec{i}$, а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добијамо скаларне једначине

$$\begin{aligned} c_x &= a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ c_y &= a_z\, b_x - a_x\, b_z \qquad (7) \\ c_z &= a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{aligned}$$

које нам аналитички претстављају векторски продукт, изражен својим пројекцијама.



Сл. 55.

Како се лева страна једначине (6) може претставити детерминантом трећег реда, у чијој су првој врсти ортови, у другој — пројекције првог вектора $\vec{a}$, а у трећој — пројекције вектора $\vec{b}$, то је векторски продукт,

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

29. Скаларни продукт вектора и векторског про-дукта друга два вектора. — Израз облика

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]) \tag{1}$$

претставља нам скаларни продукт вектора $\vec{a}$ и векторског продукта $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тај продукт добијамо помоћу пројекција вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

Како је

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},\\ \vec{c} &= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},\end{aligned}$$

а

$$[\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{aligned}d_x &= b_y c_z - b_z c_y,\\ d_y &= b_z c_x - b_x c_z,\\ d_z &= b_x c_y - b_y c_x,\end{aligned}$$

то је

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]) = (\vec{a}\,\vec{d}) = a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z,$$

или

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + \\ + a_z(b_x c_y - b_y c_x),$$

што можемо скраћено написати у облику детерминанте трећег реда

$$\left(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Кад векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ доведемо на заједнички почетак O и узмемо их за ивице једног паралелопипеда, добићемо коси паралелопипед (сл. 56).

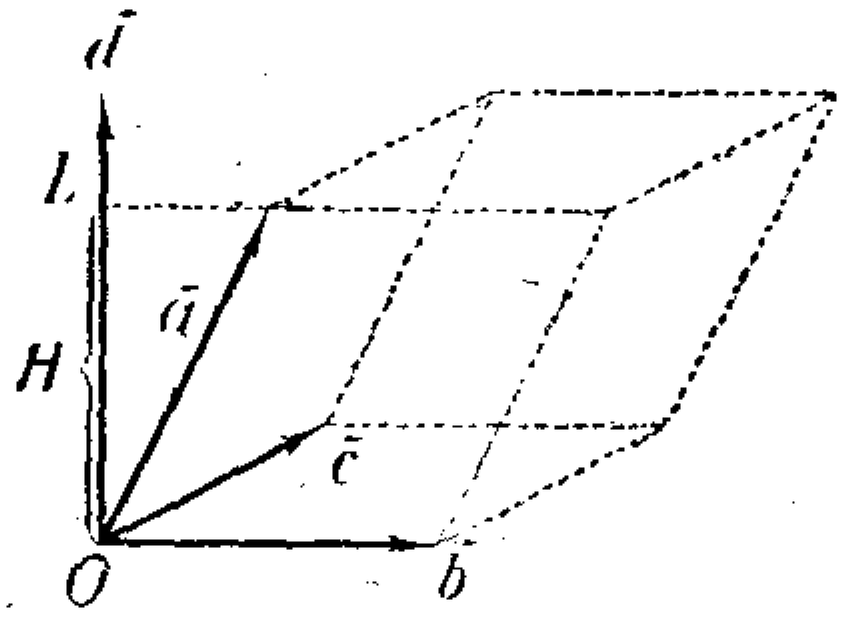
је висина добивеног паралело-
да

$H = a \cos (\vec{a}, \vec{d})$, (3)

ктор

$$\vec{d} = [\vec{b}\ \vec{c}]$$

нормално на основици доби-
паралелопипеда и има инте-
d једнак површини основице паралелопипеда, то је
емина паралелопипеда



Сл. 56.

$$V = d\,H. \qquad (4)$$

скаларни продукт вектора и векторског продукта напи-
о у облику

$$(\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]) = (\vec{a}\ \vec{d}) = d \cdot a \cos (\vec{a}, \vec{d}),$$

је с обзиром на изразе (3) и (4)

$$(\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]) = d\,H = V,$$

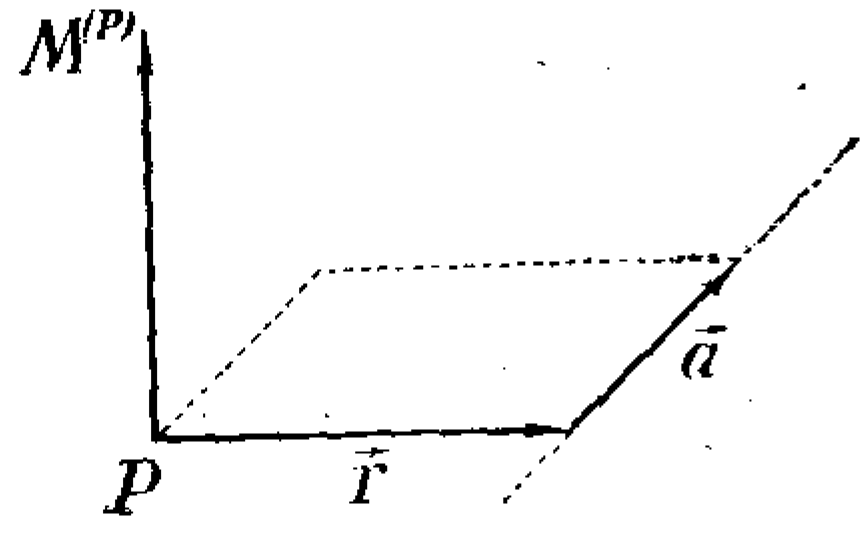
кле видимо да нам скаларни продукт вектора и вектор-
продукта друга два вектора, који не леже у истој
вни, с геометриског гледишта претставља запремину па-
елопипеда, чије су ивице дати вектори.

Када је

$$(\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]) = V = 0$$

да су дати вектори у истој равни, односно *компланарни.*

**30. Моменат везаног вектора у погледу на неку
чку.** — Ако се тражи моменат везаног вектора $\vec{a}$ (сл. 57)
погледу на тачку P, која се у,
ом случају зове још и *пол*, онда
из пола P повучемо вектор
ложаја $\vec{r}$, чији крај пада у поче-
к вектора $\vec{a}$, за моменат $\vec{M}^{(P)}$ век-
ора $\vec{a}$ сматрамо



Сл. 57.

$$\vec{M}^{(P)} = [\vec{r}\ \vec{a}]$$

и другим речима сматрамо вектор $\vec{M}^{(P)}$, који стоји нор-
лно на раван, коју одређују вектори $\vec{r}$ и $\vec{a}$, чији је смер

позитиван — на више — ако вектор $\vec{a}$ вуче вектор $\vec{r}$ у супротном смеру казаљки на часовнику; а негативан — доле — ако вектор $\vec{a}$ вуче вектор $\vec{r}$ у смеру казаљки на часовнику, а величина

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{a}), \qquad (1)$$

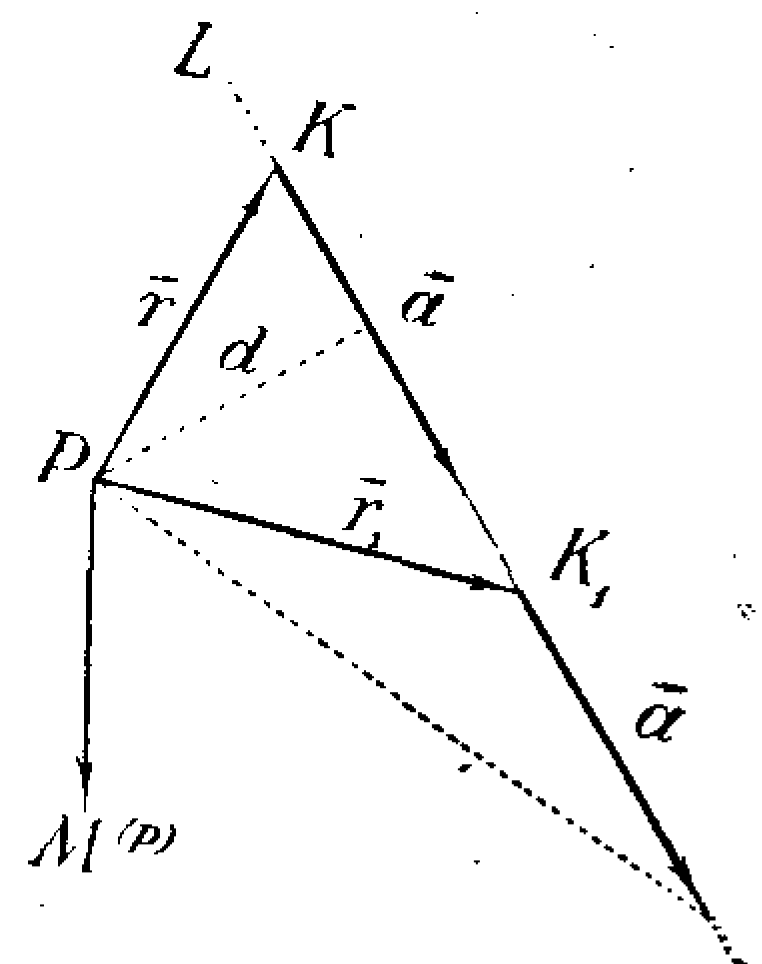
односно чија је величина једнака површини паралелограма чије су стране вектори $\vec{r}$ и $\vec{a}$.

Кад из пола P (сл. 58) повучемо нормалу d на вектор $\vec{a}$, онда је

$$d = \left|\vec{r}\right| \cdot sin\,(\vec{r}, \vec{a}).$$

Нормала d назива се обично и *крак вектора*. Како је величина момента вектора $\vec{a}$ у погледу пола P

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot sin\,(\vec{r}, \vec{a})$$



Сл. 58.

то с обзиром на претходну једначину можемо ставити

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot d,$$

одакле изводимо теорему:

Теорема. — *Величина момента неког вектора у погледу на неку тачку, једнака је производу из интензитета вектора и његовог нормолног отстојања (крака) од пола,* или још *величина момента неког вектора у погледу на неку тачку једнака је двострукој површини троугла, чија је основица вектор, а висина крак вектора.*

Теорема. — *Кад је крак неког вектора једнак нули, односно кад вектор пролази кроз пол, онда је моменат вектора једнак нули.*

Ако је нападна тачка K вектора $\vec{a}$, клизећи по правој L, дошла у положај K_1, који је одређен према полу P вектором $\vec{r}_1$ онда ћемо у овом случају за моменат вектора $\vec{a}$ добити

$$\vec{M}_1^{(P)} = [\vec{r}_1\,\vec{a}].$$

ке видимо да је

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{KK_1}$$

зато

$$\vec{M}_1^{(P)} = [\vec{r}_1\,\vec{a}] = [\vec{r} + \vec{KK_1}, \vec{a}] = [\vec{r}\,\vec{a}] + [\vec{KK_1}, \vec{a}].$$

су вектори $\vec{KK_1}$, и $\vec{a}$ колинерни, то је

$$[\vec{KK_1}, \vec{a}] = 0,$$

зато

$$\vec{M}_1^{(P)} = [\,\vec{r}\,\vec{a}\,] = \vec{M}^{(P)},$$

те добијамо теорему:

Теорема. — *Моменат везаног вектора $\vec{a}$ око неког пола не мења своју векторску вредност ако пустимо да вектор $\vec{a}$ ... дуж праве за коју је везан.*

Како је моменат везаног вектора око пола претстављен векторским продуктом, то кад хоћемо наведени моменат аналитички да претставимо односно скаларним једначинама изразимо, онда поступамо као и код векторског продукта.

Кад узмемо пол P за почетак Декартовог правоуглог триедра, онда је

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$
$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k};$$

је зато

$$\vec{M}^{(P)} = [\vec{r}\,\vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

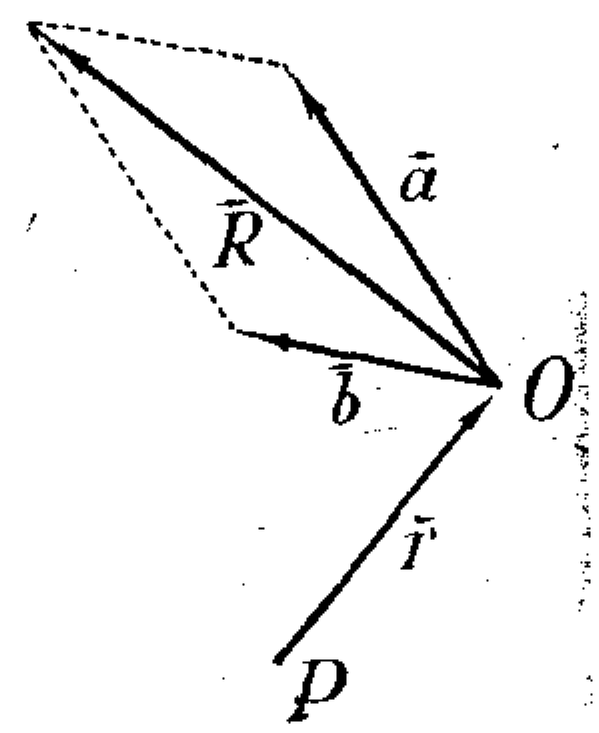
Дакле је

$$\begin{aligned} \vec{M}_x^{(P)} &= y\,Z - z\,Y, \\ \vec{M}_y^{(P)} &= z\,X - x\,Z, \qquad (3) \\ \vec{M}_z^{(P)} &= x\,Y - y\,X. \end{aligned}$$

Једначине (3) аналитички претстављају пројекције момента везаног вектора у погледу координатног почетка.

Количине x, y, z с обзиром како се до њих дошло, претстављају координате нападне тачке веазног вектора; а количине X, Y, Z пројекције везаног вектора.

Кад нам је дат везани вектор горњим



Сл. 59.

подацима, онда помоћу једначина (3) одређујемо пројекције вектора момента, а када знамо пројекције вектора, знамо и његов интензитет и остало.

Ако тачку O нападају два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 59), онда се они могу сменити њиховом резултантом, вектором $\vec{R}$.

Моменат вектора $\vec{R}$ у погледу пола P је известан вектор

$$\vec{M}_{\vec{R}}^{(P)} = [\vec{r}\vec{R}] = [\vec{r}, \vec{a} + \vec{b}] \qquad (4)$$

Моменат вектора $\vec{a}$ је известан вектор

$$\vec{M}_{\vec{a}}^{(P)} = [\vec{r}\ \vec{a}], \qquad (5)$$

а моменат вектора $\vec{b}$ је: известан вектор

$$\vec{M}_{\vec{b}}^{(P)} = [\vec{r}\ \vec{b}]. \qquad (6)$$

Кад саберемо једначине (5) и (6) добићемо

$$\vec{M}_{\vec{a}}^{(P)} + \vec{M}_{\vec{b}}^{(P)} = [\vec{r}\ \vec{a}] + [\vec{r}\ \vec{b}] = [\vec{r}, \vec{a} + \vec{b}] \qquad (7)$$

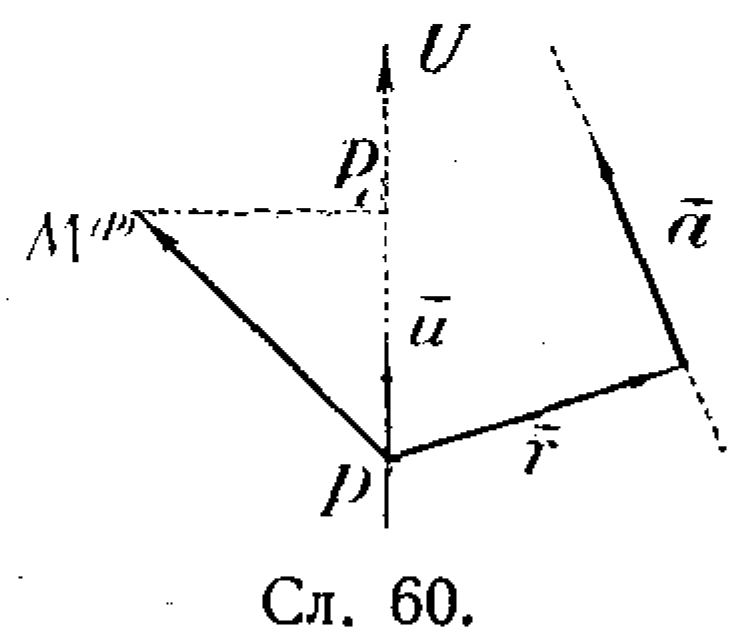
Како су десне стране једначина (4) и (7) једнаке, то су једнаке и леве, па је

$$\vec{M}_{\vec{R}}^{(P)} = \vec{M}_{\vec{a}}^{(P)} + \vec{M}_{\vec{b}}^{(P)}.$$

Узимајући у обзир да код векторског продукта важи дистрибутиван закон и за n вектора, добијамо следећу теорему:

Теорема. — *Збир момената појединих вектора који нападају исту тачку, у погледу на неки пол, једнак је моменту вектора резултанте тих вектора с погледом на исти пол.*

31. Моменат везаног вектора у погледу на неку осу. — Када се тражи моменат везаног вектора $\vec{a}$ у погледу на неку осу U (сл. 60), онда узимамо једну произвољну тачку P на датој оси и одредимо према члану 30 моменат $\vec{M}^{(P)}$ вектора $\vec{a}$ у погледу тачке P.



Сл. 60.

Тај је моменат као што смо видели

$$\vec{M}^{(P)} = [\vec{r}\ \vec{a}].$$

Пројекција $\overline{PP_1}$ *момента* $\vec{M}^{(P)}$ *на осу* U *назива се моменат везаног вектора* $\vec{a}$ *у погледу на осу* U.

Ако орт осе U означимо са $\vec{u}$, онда нам је моменат у огледу на осу U претстављен изразом

$$\overline{PP_1} = M_{\vec{u}}^{(P)} = \left| \vec{M}^{(P)} \right| \cdot \cos\ (\vec{M}^{(P)}, \vec{u}).$$

Како је

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| \cdot \cos\left(\vec{M}^{(P)}, \vec{u}\right) = 1 \cdot \left|\vec{M}^{(P)}\right| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{M}^{(P)}\right) = \left(\vec{u}\, \vec{M}^{(P)}\right) = \left(\vec{u}\ [\vec{r}\ \ \vec{a}]\right),$$

то за моменат $M_{\vec{u}}^{(P)} = \overline{PP_1}$ добијамо

$$\overline{PP_1} = M_{\vec{u}}^{(P)} = (\vec{u}\ [\vec{r}\ \vec{a}]).$$

Скаларни продукт

$$(\vec{u}\ [\vec{r}\ \vec{a}])$$

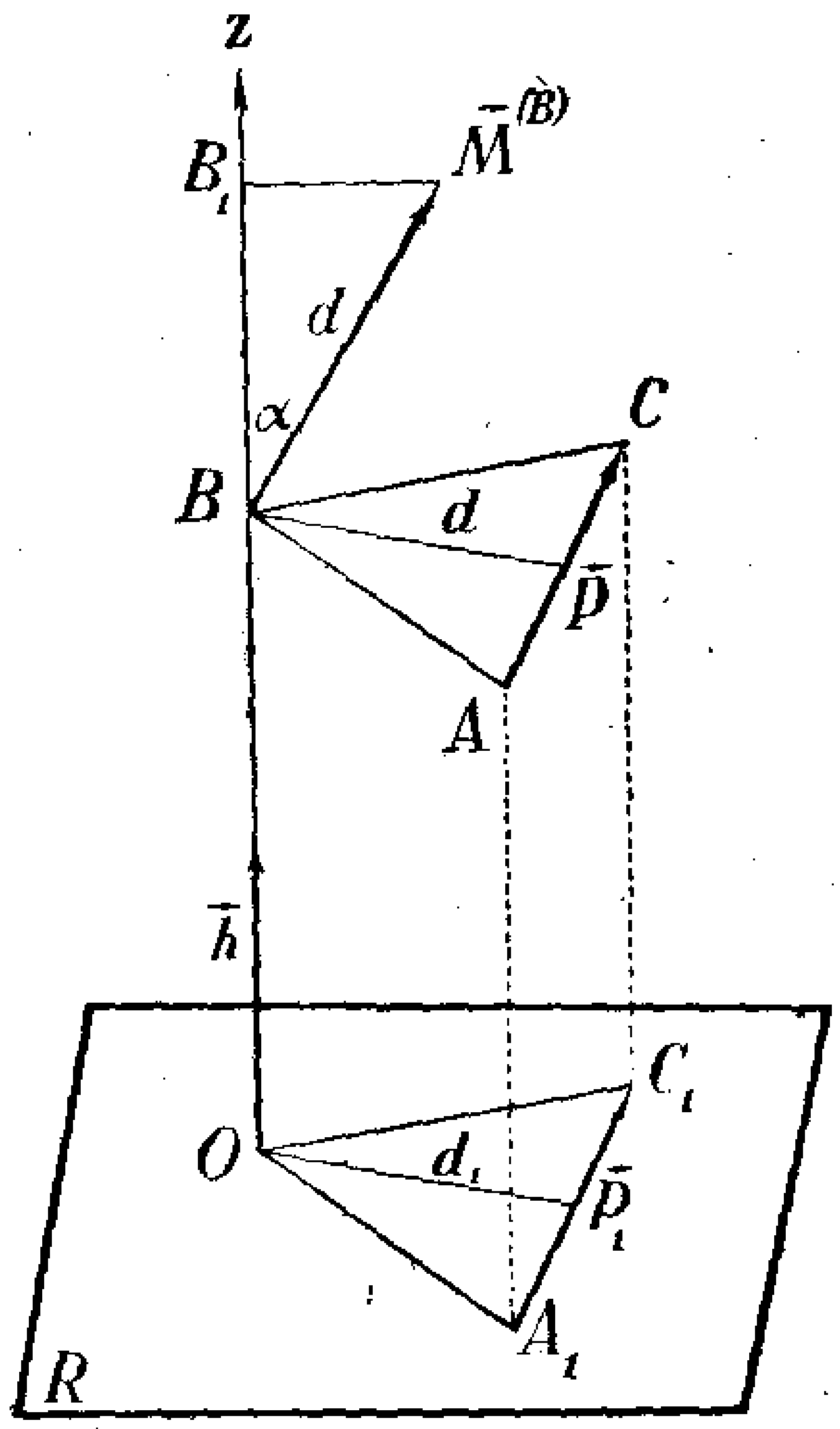
који нам даје величину момента $\overline{PP_1}$ има знак плус или минус, према томе да ли вектор $\vec{a}$ има смер обртања око осе U у супротном или у истом правцу смера обртања казаљки на часовнику.

Ако су нам познате пројекције вектора, $\vec{u}$ $\vec{r}$ и $\vec{a}$ на координатним осама, онда се вредност момента везаног вектора $\vec{a}$ може аналитички претставити помоћу нађене детерминанте у члану 29 израз (2).

Ако на z-оси (сл. 61) узмемо произвољну тачку B, онда је, према дефиницији, моменат вектора $\vec{P}$ у погледу на z-осу

$$\overline{BB_1} = \left|\vec{M}^{(B)}\right| \cos\alpha. \quad (1)$$

Када поставимо једну управну раван R на z-осу у произвољној тачки O и пројицирамо вектор $\vec{P}$, односно троугао BAC, добићемо пројекцију $\vec{P}_1$, односно троугао OA_1C_1.



Сл. 61.

Моменат вектора $\vec{P}_1$ у погледу тачке O је вектор $\vec{h}$, чији је интензитет

$$\left|\vec{h}\right| = d_1\left|\vec{P}_1\right| \cdot$$

Како је

$$\frac{d_1\left|\vec{P}_1\right|}{2} = \frac{\left|\vec{M}^{(B)}\right|}{2} \cdot \cos \alpha$$

као пројектована површина, према познатом правилу и теорије површина, то је с обзиром на (1)

$$d_1 \left|\vec{P}_1\right| = \left|\vec{M}^{(B)}\right| . \cos \alpha = \overline{BB_1}$$

Ако узмемо да раван R клизи по z-оси паралелно сама себи и сукцесивно прелази кроз све тачке z-осе, пројицирани троугао ОАС остаће непромењен, те отуда сазнајемо да моменат једног вектора $\vec{P}$ у погледу на неку z-осу добијамо, кад дати вектор пројицирамо на једну произвољну раван која стоји нормално на оси, и нађемо моменат вектора пројекције $\vec{P}_1$ у погледу тачке у којој z-оса продире раван.

Кад је пројекција $\vec{P}_1$ једнака нули и моменат вектора $\vec{P}$ је једнак нули.

Када пројекција $\vec{P}_1$ пролази кроз продор O, онда је нормално одстојање d_1 од продора на P_1 једнако нули, а према томе и моменат вектора $\vec{P}$ је једнак нули.

32. Вектор — функција. — Један вектор може бити функција једне или више независно променљивих количина; а те количине могу бити скаларне или векторске величине.

Кад је вектор $\vec{a}$ функција неког скалара t, онда то обележавамо изразом

$$\vec{a} = \vec{f}(t), \text{ или } \vec{a} = \vec{a}\ (t)$$

који читамо: вектор $\vec{a}$ функција скалара t; а кад је неки вектор $\vec{v}$ функција вектора положаје $\vec{r}$, онда то обележавамо изразом

$$\vec{v} = \vec{v}\ (\vec{r}),$$

који читамо: вектор $\vec{v}$ функција вектора положаја $\vec{r}$.

Ако је вектор $\vec{u}$ функција више независно променљивих скалара $t_1, t_2, \ldots, t_n$, онда то обележавамо изразом

$$\vec{u} = \vec{u}\ (t_1\ t_2, \ldots, t_n),$$

и читамо: вектор $\vec{u}$ функција скалара $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

ад је вектор $\vec{a}$ функција неког скалара t, онда су и пројекције на Декартовим осама x, y, z функције тог а t, па је

$$a_x = a_x(t),$$
$$a_y = a_y(t),$$
$$a_z = a_z(t).$$

ако ако је

$$\vec{u} = \vec{u}\,(t_1\ t_2, \ldots, t_n)$$

е

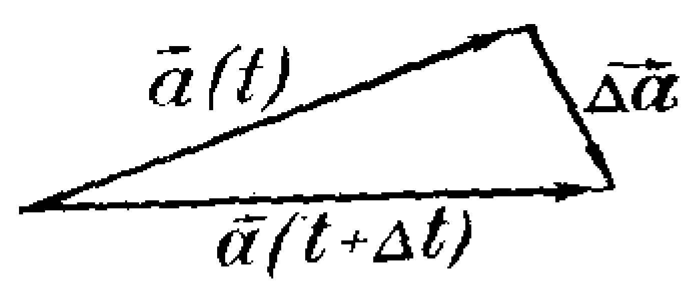
$$u_x = u_x(t_1,\ t_2, \ldots, t_n),$$
$$u_y = u_y(t_1,\ t_2, \ldots, t_n),$$
$$u_z = u_z(t_1,\ t_2, \ldots, t_n).$$

33. Извод вектор — функције. — Нека нам је дата р функција

$$\vec{a} = \vec{a}\,(t). \tag{1}$$

се скалар t промени за Δt (сл. 62) вектор функција ће роменити за $\Delta \vec{a}$, па ће бити

$$\vec{a} + \Delta \vec{a} = \vec{a}\,(t + \Delta t). \tag{2}$$



Сл. 62.

једначину (1) одузмемо од једначине обе стране тако добивене једначине поделимо са Δt,

$$\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{\vec{a}\,(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t},$$

акле за lim кад је $\Delta t = 0$, добијамо извод вектор нкције

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \left[\frac{\vec{a}\ (t + \Delta t) - \vec{a}\ (t)}{\Delta t}\right] = \dot{a}$$

и

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{a},$$

акле је

$$d\vec{a} = \dot{a}\ dt.$$

Како су пројекције вектора $\vec{a}\ (t)$ на Декартовим осама y, z

$$a_x = a_x\ (t),$$
$$a_y = a_y\ (t),$$
$$a_z = a_z\ (t),$$

а вектор $\vec{a}\,(t + \Delta\, t)$

$$a_x + \Delta\, a_x = a_x\,(t + \Delta\, t),$$
$$a_y + \Delta\, a_y = a_y\,(t + \Delta\, t),$$
$$a_z + \Delta\, a_z = a_z\,(t + \Delta\, t);$$

то ће бити

$$\frac{\Delta\, a_x}{\Delta\, t} = \frac{a_x\ (t + \Delta\, t) - a_x\ (t)}{\Delta\, t},$$

одакле за $\lim\ \Delta\, t = 0$ добијамо

$$(\dot{a}\ \vec{i}) = a'_x = \frac{da_x}{dt}.$$

На исти начин добијамо

$$(\dot{a}\ \vec{j}) = a'_y = \frac{da_y}{dt},$$

$$(\dot{a}\ \vec{k}) = a'_z = \frac{da_z}{dt},$$

или речима исказано:

Пројекције векторског извода на три сталне Декартове осе једнаке су изводима пројекција самог вектора на исте осе.

34. Извод збира и разлике вектор функције. — Ако је

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{e} + \dots, \qquad (1)$$

и ако вектори $\vec{b}, \vec{c}, \vec{e}, \dots,$ зависе од неког промењљивог скалара t, онда кад се t промени за $\Delta\, t$, $\vec{a}$ ће се променити за $\overrightarrow{\Delta a}$, вектор $\vec{b}$ за $\overrightarrow{\Delta b}$, вектор $\vec{c}$ за $\overrightarrow{\Delta c}$, па ће бити

$$\vec{a} + \overrightarrow{\Delta a} = \vec{b} + \overrightarrow{\Delta b} + \vec{c} + \overrightarrow{\Delta c} - (\vec{e} + \overrightarrow{\Delta e}) + \dots (2)$$

Кад једначину (1) одузмемо од једначине (2) и обе стране тако добивене једначине поделимо са $\Delta\, t$, биће

$$\frac{\overrightarrow{\Delta a}}{\Delta\, t} = \frac{\overrightarrow{\Delta b}}{\Delta\, t} + \frac{\overrightarrow{\Delta c}}{\Delta\, t} - \frac{\overrightarrow{\Delta e}}{\Delta\, t} + \dots,$$

одакле за $\lim\ \Delta\, t = 0$, добијамо иввод збира и разлике вектор функције

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{c}}{dt} - \frac{d\vec{e}}{dt} + \dots,$$

или

$$\dot{a} = \dot{b} + \dot{c} - \dot{e} + \ldots$$

35. Извод скаларног и векторског продукта вектора. — Ако нам је дат скаларни продукт

$$(\vec{a}\,\vec{b}) \qquad (1)$$

вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зависе од неког променљивог скалара t, се тражи извод датог скаларног продукта, који обележамо изразом

$$\frac{d\,(\vec{a}\;\vec{b})}{dt}$$

кад пустимо да се t промени за $\Delta\, t$, вектор $\vec{a}$ ће се прођити за $\overrightarrow{\Delta\, a}$, вектор $\vec{b}$ за $\overrightarrow{\Delta b}$, па ће бити

$$(\vec{a} + \overrightarrow{\Delta\, a},\ \vec{b} + \overrightarrow{\Delta\, b}). \qquad (2)$$

у изразу (2) извршимо скаларно множење, а затим од њега одузмемо израз (1) и тако добивени израз поделимо $\Delta\, t$, биће

$$\left(\frac{\overrightarrow{\Delta\, a}}{\Delta\, t}\;\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\;\frac{\overrightarrow{\Delta b}}{\Delta\, t}\right) + \left(\frac{\overrightarrow{\Delta\, a}\quad \overrightarrow{\Delta\, b}}{\Delta\, t}\right), \qquad (3)$$

одакле за $\lim \Delta\, t = 0$, добијамо извод скаларног продукта

$$\frac{d\,(\vec{a}\,\vec{b})}{dt} = \left(\frac{d\,\vec{a}}{dt}\;\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\;\frac{d\vec{b}}{dt}\right) = (\dot{\vec{a}}\;\vec{b}) + (\vec{a}\;\dot{\vec{b}})$$

ећи члан израза (3) се губи као бесконачно мала количина наспрам коначних количина.

На исти начин налазимо да је извод векторског продукта

$$\frac{d\;[\vec{a}\quad \vec{b}]}{\mathrm{dt}} = \left[\frac{d\vec{a}}{dt}\;\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\;\frac{d\vec{b}}{dt}\right] = [\dot{\vec{a}}\;\vec{b}] + [\vec{a}\;\dot{\vec{b}}].$$

Кад неки вектор $\vec{a}$ зависи од једног променљивог скалара t, онда кад се t мења, мењаће се такође и правац и смер, интензитет вектора $\vec{a}$; или мењаће се само правац и смер, интензитет вектора $\vec{a}$ биће сталан. Како вектор $\vec{a}$ можемо претставити као продукт његовог интензитета a и орта $\vec{a}_0$, у том случају при диференцијалењу вектора $\vec{a}$, узимајући да се при промени скалара t мењају и интензитет и правац и смер вектора $\vec{a}$, имаћемо

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da}{dt}\vec{a}_0 + a\,\frac{d\vec{a}_0}{dt},$$

или

$$\dot{a} = a'\,\vec{a}_0 + a\,\dot{a}_0.$$

Узимајући да је интензитет вектора $\vec{a}$ сталан, а да се мења само правац и смер имаћемо

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a\,\dot{a}_0,$$

јер је $\frac{da}{dt} = 0.$

36. Изводи вишег реда вектор функција. — Кад извод вектор функције $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{a}$$

понова диференцијалимо добићемо други извод вектор функције

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \frac{d\dot{a}}{dt} = \ddot{a}.$$

Поступајући тако даље и даље, можемо имати *n*-ти извод вектор функције.

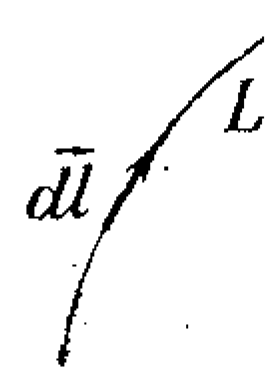
Пројекције другог извода на сталне осе биле би

$$\ddot{a}\,(a''_x,\ a''_y,\ a''_z);$$

а *n*-тог извода

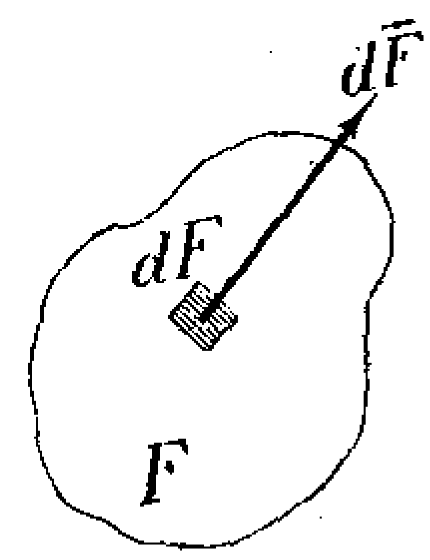
$$\overset{(n)}{a}\,(a_x{}^{(n)},\ a_y{}^{(n)},\ a_z{}^{(n)}).$$

37. Вектор интеграл. — Криву L (сл. 63) можемо сматрати као део обима неког полигона од бесконачно много малих страна. Ако један бесконачно мали део линије L сматрамо, према напред реченом, као праву, дамо јој извесан смер и обележимо са $\vec{dl}$, онда се тај део линије назива *управљени линиски елеменат*.



Сл. 63.

Ако имамо неку криву површину F (сл. 64), па на њој уочимо један бесконачно мали део dF, онда можемо у том елементу на нормали криве површине конструисати један вектор $\vec{dF}$, чији је интензитет једнак dF. Тај бесконачно мали вектор $\vec{dF}$ зове се *управљени површински елеменат*.



Сл. 64.

Ако постоји неки скалар φ, који за разне тачке криве L и површине F има разне вредности, онда су производи

$$\varphi \vec{dl} \quad \text{и} \quad \varphi \vec{dF}$$

бесконачно мали вектори. Збир свих бесконачно малих вектора за све тачке криве L назива се интеграл дуж криве L од $\varphi \vec{dl}$ и претставља се изразом

$$\int_L \varphi \vec{dl} \,.$$

Исто тако збир свих бесконачно малих вектора за све тачке површине F назива се интеграл дуж површине F од $\varphi \vec{dF}$, а изражава се са

$$\int_F \varphi \vec{dF} \,.$$

Како су и у једном и у другом интегралу сви елементи вектори то су и сами интеграли вектори.

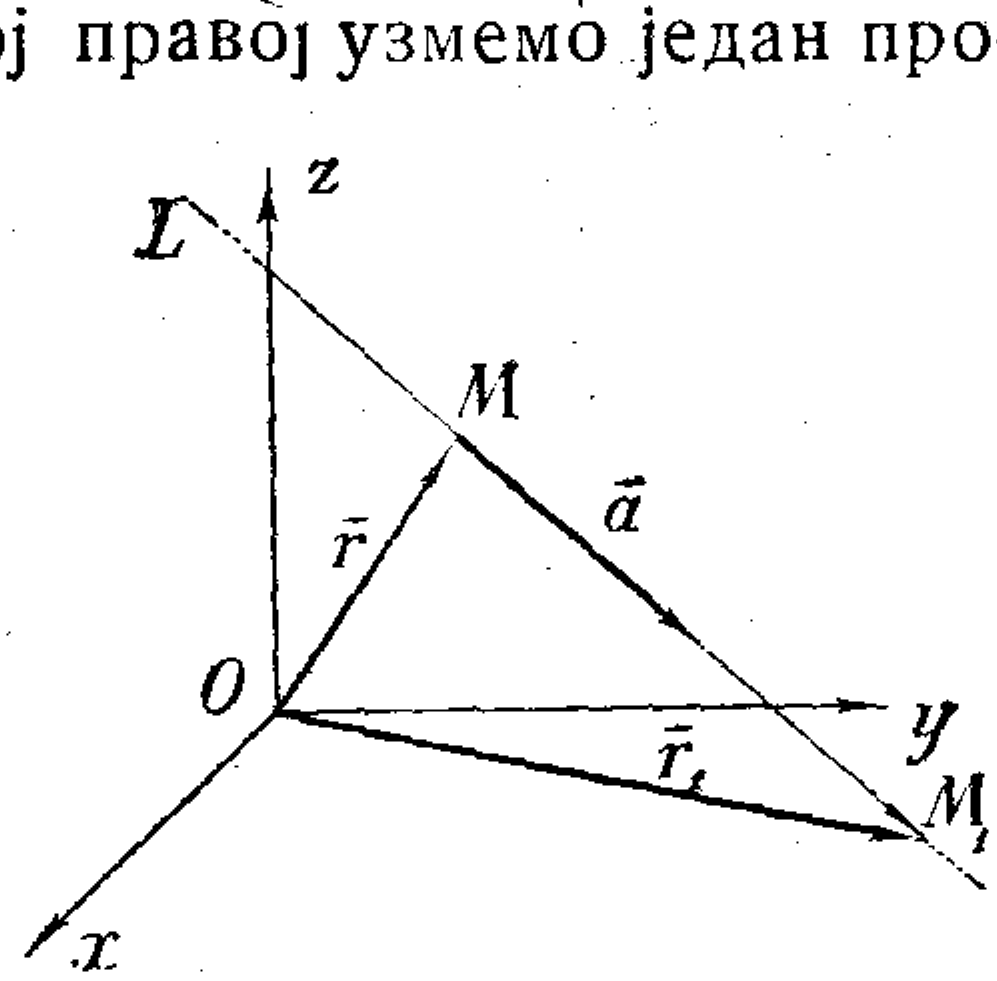
Четврти одељак

Примена вектора у Аналитичној и Диференцијалној геометрији *

---

38. Једначина праве линије. — Нека нам је дата права L у простору (сл. 65). Кад на датој правој узмемо један произвољан вектор $\vec{a}$, онда је везани вектор $\vec{a}$ одређен његовим пројекцијама X, Y, Z и координатама нападне тачке M (x, y, z).

Вектор положаја нападне тачке M је $\vec{r}$.



Сл. 65.

Кад на правој L узмемо још једну произвољну тачку M_1, чији је вектор положаја $\vec{r}_1$, онда је

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \overrightarrow{MM_1}.$$

---

*Вектори налазе велику примену у Аналитичној и Диференцијалној геометрији. Ми ћемо се овде бавити тиме само у толико, колико нам је потребно ради излагања градива ове књиге.

Како је вектор $\overrightarrow{MM_1} = m\vec{a}$,
то је

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + m\vec{a}, \tag{1}$$

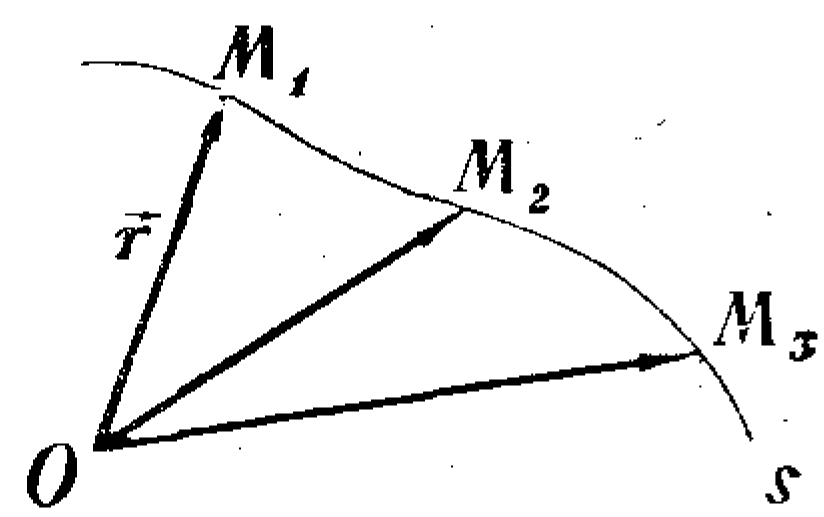
једначина праве у векторском облику.

Вектор $\vec{r}_1$ је функција скалара m. Кад се m мења мењ ће се и вектор $\vec{r}_1$. Вектори $\vec{r}$ и $\vec{a}$ су у овоме случају ка стални параметри.

39. Једначина криве у простору. — Ако нам је дат каква вектор функција

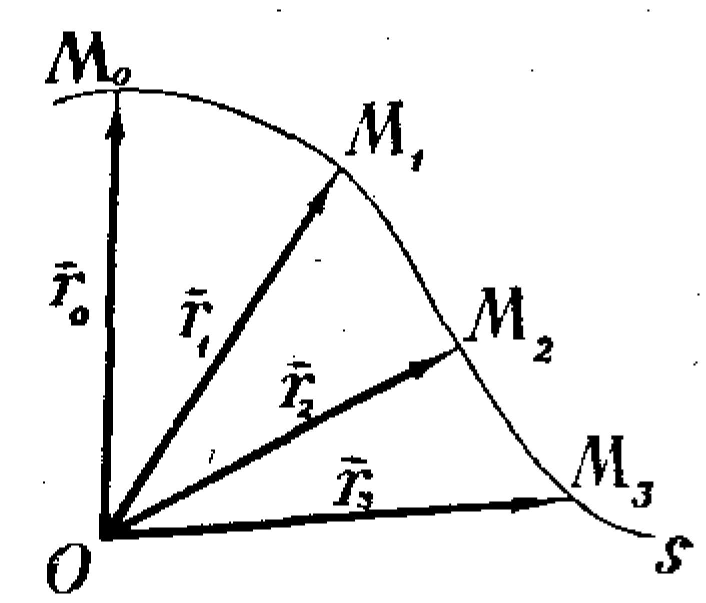
$$\vec{r} = \vec{f}\,(t), \tag{1}$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја, а t неки промењљиви параметар онда кад се t мења мењаће се и вектор положаја и по величини и по правцу и крај вектора положаја $\vec{r}$ описаће извесну криву $M_1 M_3$ (сл. 66). Векторска једначина (1), дакле, графички претставља неку криву у простору.



Сл. 66.

Кад имамо какву криву s у простору на којој смо узели тачку M_0 као почетак од које меримо лук криве s, и узмемо један произвољан пол O (сл. 67), онда свакој тачки лука криве s одговара извесан вектор положаја $\vec{r}$.



Сл. 67.

Вектор положаја $\vec{r}$ је, дакле, функција лука s

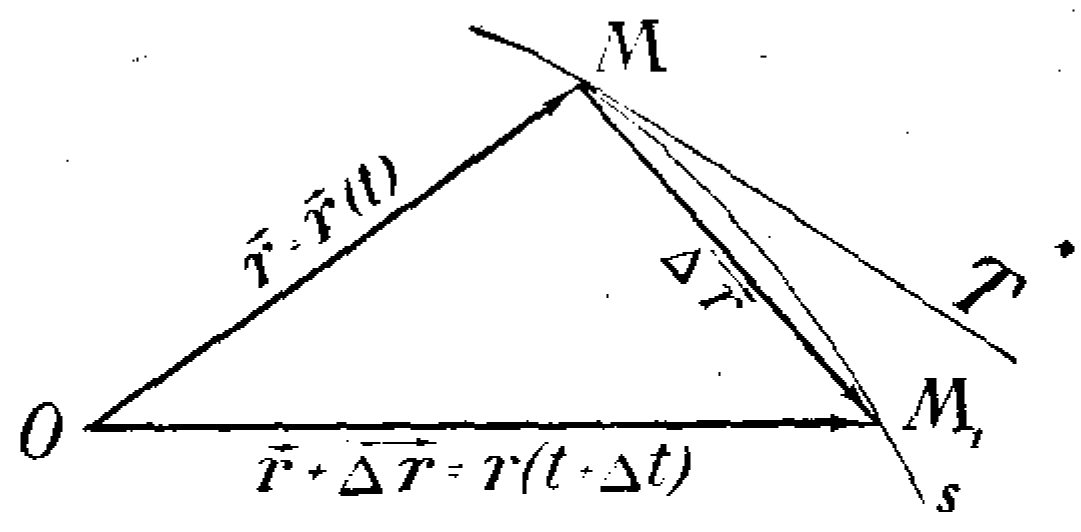
$$\vec{r} = \vec{f}\,(s) \tag{2}$$

40. Извод вектора положаја. — Ако је вектор положаја $\vec{r}$ функција параметра t

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t), \tag{1}$$

онда кад се параметар t мења, мењаће се и вектор положаја крај вектора положаја $\vec{r}$ описаће криву s (сл. 68) чији лук имамо да расте од M ка M_1.

Како за вредност t, параметра t, одговара вектор положаја $\overrightarrow{OM}$



Сл. 68.

$$\vec{r} = \vec{\mathrm{r}}\ (t), \qquad (2)$$

за вредност $t + \Delta$ t, одговара вектор положаја $\overrightarrow{OM_1}$

$$\vec{r} + \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}\ (t + \Delta\ t), \qquad (3)$$

о видимо да прираштају $\Delta\ t$ параметра t, одговара прираштај $\overrightarrow{\Delta r}$ вектора $\vec{r}$.

Кад једначину (2) одузмемо од једначине (3) и обе стране добивене једначине поделимо са $\Delta\, t$, биће

$$\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta\, t} = \frac{\vec{r}\ (t + \Delta\ t) - \vec{r}\ (t)}{\Delta\ t}. \qquad (4)$$

Ако сад узмемо да $\Delta\, t \to 0$, онда ће вектор положаја $\overrightarrow{OM_1}$ постати бесконачно близак вектору $\overrightarrow{OM}$, прираштај вектора $\overrightarrow{\Delta r}$, постаће диференцијал $d\vec{r}$ вектора положаја $\vec{r}$ и имаће правац тангенте T криве s у тачки M, а смер уперен на ону страну на коју лук криве s расте, и израз (4) постаје

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = lim\left[\frac{\vec{r}\ (t + \Delta\, t) - \vec{r}\ \ (t)}{\Delta\, t}\right]_{\Delta t \to 0} = \dot{\vec{r}} \quad ,$$

или

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (5)$$

Израз (5) нам претставља извод вектора положаја $\vec{r}$ по параметру t.

Извод вектора положаја $\vec{r}$ по параметру t, $\frac{d\vec{r}}{dt}$, односно је као што видимо вектор, који има смер тангетне у тачки М наперен на ону страну на коју лук криве s расте.

Ако сада узмемо да је вектор положаја r функција лук s поступимо као мало пре, односно свуда на место t, Δt dt ставимо s, Δs и ds, израз (5) постаће

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{r}_s .$$

Како је $d\vec{r}$ бесконачно мали вектор, који има смер тангент чији је интезитет бесконачно мала раздаљина тачака M M_1, и како је дужина лука ds иста раздаљина тачака M M_1 то можемо ставити

$$lim \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1,$$

или

$$|\dot{r}_s| = 1,$$

одакле добијамо закон:

Извод вектора положаја $\vec{r}$ по луку s, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ односно $\dot{r}_s$ је вектор, чији је интензитет једнак јединици, а смер тангент у тачки M, или другим речима извод вектора положаја $\vec{r}$ по луку s, је једнак орту тангенте у тачки M, дакле

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{r}_s = \vec{\tau}_0$$

где $\vec{\tau}_0$ претставља орт тангенте.

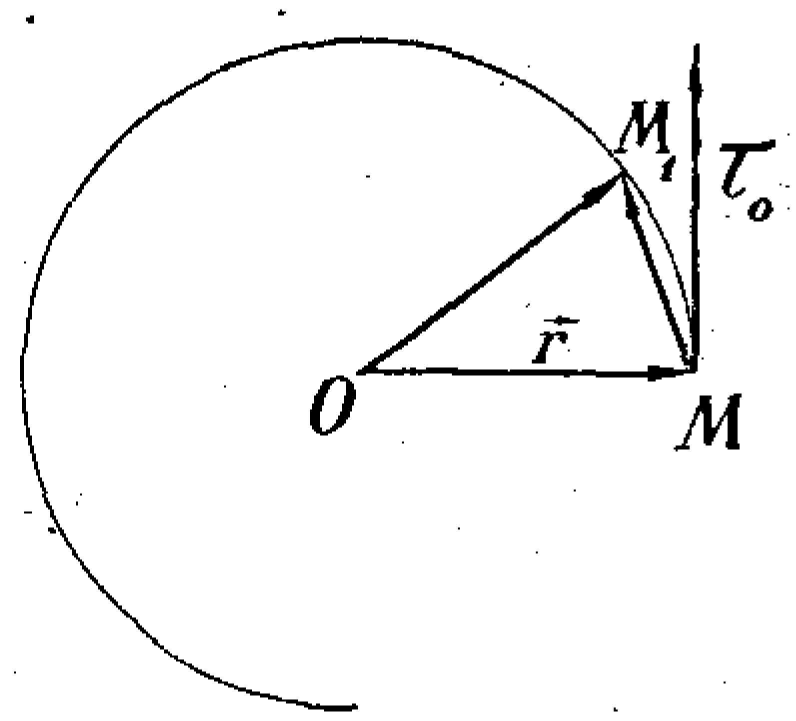
Кад је вектор положаја $\vec{r}$ орт, дакле $|\vec{r}| = 1$, функција параметра t,

$$\vec{r} = \vec{r}\ (t),$$

онда кад се t мења, мењаће се и орт, али само по правцу и смеру и крај орта описаће кружну линију (сл 69).

Извод орта за тачку M биће према претходном закону орт тангетне у тачки M

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\tau}_0.$$



Сл. 69.

А како је у овоме случају трајекторија круг, чији је полупречник орт, а тангента код круга стоји нормално на полупречник, то добијамо закон:

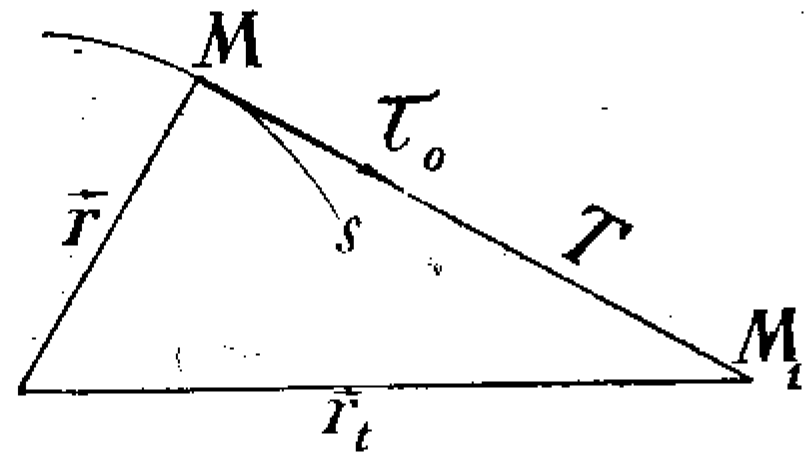
...ита $\vec{r}$ као вектора положаја, је орт $\vec{\tau}_0$, који ...но на орт $\vec{r}$.

...ента, кривина и главна нормала кривих

...ека нам крива s (сл. 70) графички претставља ...тора положаја $\vec{r}$ по луку s

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s).$$

...T у тачки M криве s ...ема претходном парагра-



Сл. 70.

...тангенти узмемо буди ...онда је увек

$$\vec{r}_t = \vec{r} + \overrightarrow{MM_1}\ ,$$

$\overrightarrow{MM_1} = m\,\tau_0$, то добијамо једначину тангенте

$$\vec{r}_t = \vec{r} + m\,\tau_0\,.$$

...праве линије за све тачке праве имају исти ...мер и леже увек у самој правој линији.

...ека линија крива, онда тангенте за разне тачке ...разне правце и смерове, те отуда промена правца ...генте изражава промену кривине кривих.

...је правац и смер тангенте дат изразом

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{r}_s = \vec{\tau}_0 \qquad (1)$$

...правца и смера тангенте изводом израза (1)

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\dot{r}}{ds} = \ddot{r}_s = \frac{d\vec{\tau}_0}{ds} = \dot{\tau}_0\,,$$

...ектор кривине $\vec{K}$ одређен изразом

$$\vec{K} = \ddot{r}_s = \dot{\tau}_0\,. \qquad (2)$$

...τ_0 помножимо скаларно самим собом биће

$$\left(\vec{\tau}_0\,\vec{\tau}_0\right) = 1. \qquad (3)$$

...чину (3) диференцијалимо имаћемо

$$\left(\vec{\tau}_0\,.\,\dot{\tau}_0\right) + \left(\dot{\tau}_0\,.\,\vec{\tau}_0\right) = 0$$

$$2\left(\vec{\tau}_o \,.\, \dot{\tau}_o\right) = 0$$

или

$$\left(\vec{\tau}_o \; \dot{\tau}_o\right) = 0 \tag{4}$$

Како je

$$\dot{\tau}_o = \vec{K}$$

то ће према изразу (4) бити

$$(\vec{\tau}_o \; \vec{K}) = 0,$$

а када je скаларни продукт два вектора једнак нули, онда ти вектори стоје један на другом нормално, те отуда сазнајемо да вектор кривине $\vec{K}$ стоји нормално на тангенти, према томе има правац и смер главне нормале криве.

Кад са $\vec{n}_o$ означимо орт вектора кривине, онда je

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}.$$

Како je

$$\frac{1}{|\vec{K}|} = \varrho,$$

то je

$$\frac{1}{\varrho}\,\vec{n}_o = \vec{K}, \tag{5}$$

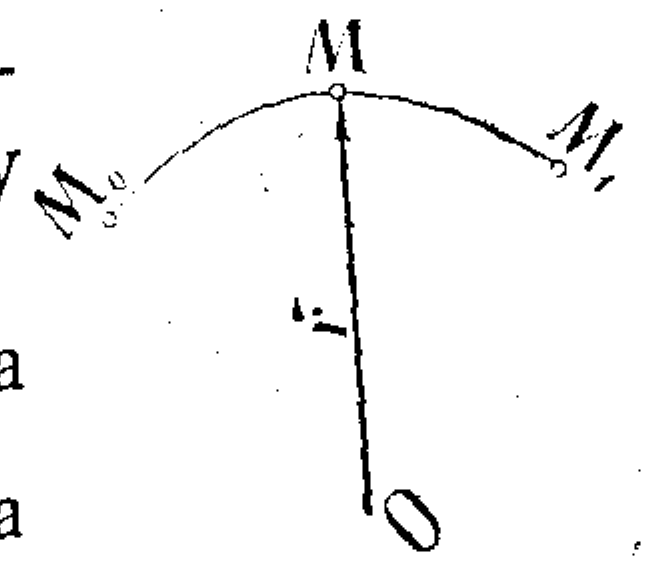
где je ϱ полупречник кривине криве.

II
Кинематика

Пети одељак

Кинематика тачке

42. Кретање тачке. — Ако се нека тачка креће у простору, и њено кретање одређујемо према полу O (сл. 71), а у времену t_0 тачка се налази у M_0, у времену t_1, тачка се налази у M_1 онда та покретна тачка описује путању или трајекорију криву M_0 M_1.



Сл. 71.

Свакој тачки M криве M_0M_1 одговара известан вектор положаја $\vec{r}$, који је функција времена t,

$$\vec{r} = \vec{f}\,(t).$$

Пројекције x, y, z вектора положаја на Декартов правоугли триедар су такође функције времена, те отуда кретање неке тачке нам је потпуно познато кад су нам познате пројекције њеног вектора положаја као функције времена

$$\begin{aligned} x &= f_1\ (t) \\ y &= f_2\ (t) \\ z &= f_3\ (t). \end{aligned} \tag{1}$$

Када су нам познате једначине (*1*), па из њих елиминишемо време t, добијамо једначине

$$\begin{aligned} y &= \varphi\ (x) \\ z &= \Psi\ (x), \end{aligned} \tag{2}$$

које одређују *геометриски облик* трајекторије у простору.

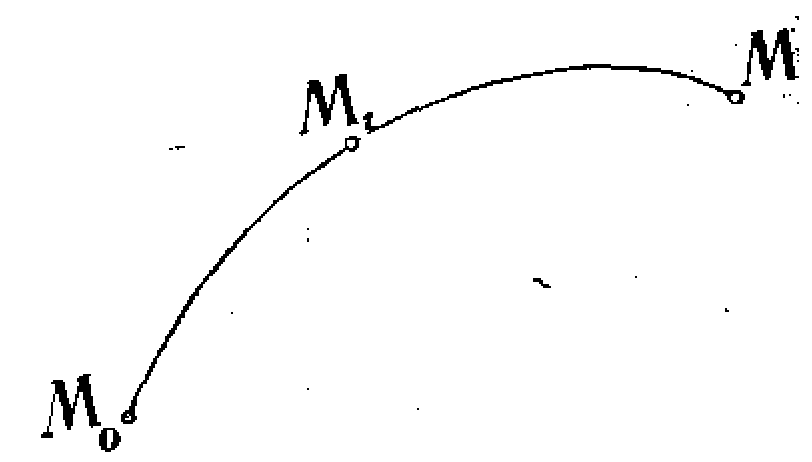
Ако се нека покретна тачка у времену t_0 налази у M_0, у времену t_1 у M_1, у времену t_2 у $M_2, \ldots$, (сл. 72) онда је пут који се мери од једне изабране тачке, а који покретна тачка пређе у току извесног времена, функција времена

$$s = f(t).$$

Функција $s = f(t)$ назива се још и *закон пута.*

Према изложеном кретање неке тачке може бити дато или вектором положаја или законом пута.

Помоћу закона пута можемо за свако време t одредити пређени пут.



Сл. 72.

Време t_0 од кога почињемо посматрати пређени пут назива се *почетно време.* Положај у коме се покретна тачка налази у времену t_0 назива се *почетни положај* или *иницијални положај* покретне тачке.

Пример. — Наћи једначину трајекторије и закон пута неке покретне тачке, чије су пројекције вектора положаја дате једачинама

$$x = 3t, \qquad y = 4t. \qquad (3)$$

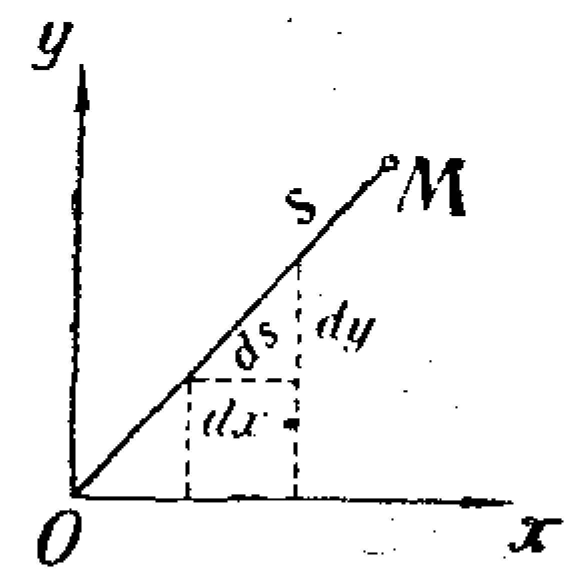
Када из једначина (3) елиминишемо време, добићемо једначину трајекторије

$$y = \frac{4}{3} x.$$

Трајекторија је права (сл. 73).

Пређени пут OM је функција времена t,

$$s = OM = f(t).$$



Сл. 73.

Како је елеменат пута,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

то је у датом случају, с обзиром на једначине (3),

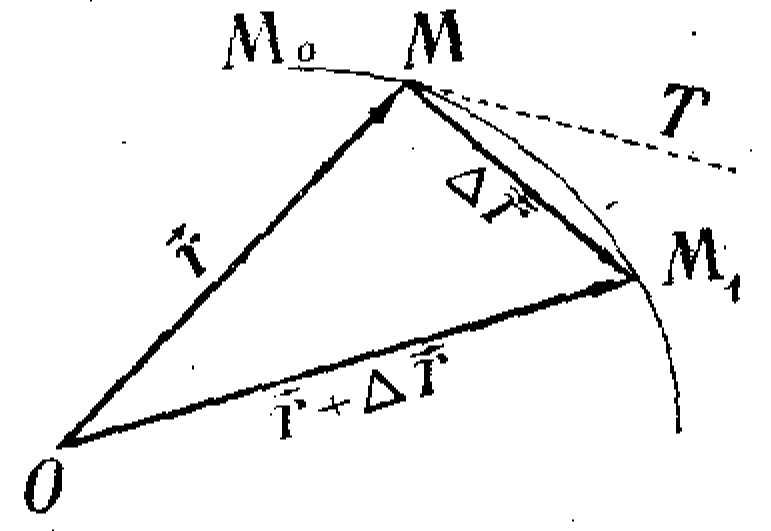
$$ds = \sqrt{9dt^2 + 16dt^2} = 5dt,$$

а закон пута

$$s = 5 \int_0^t dt = 5t.$$

43. — Брзина покретне тачке. Када се нека тачка у простору, и у времену t_0 налази у M_0, а у времену M_1 (сл. 74), онда ће та тачка у току на заузимати разне положаје према O. Сваки положај покретне тачке пуно одређен вектором положаја ји је функција времена t

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t). \qquad (1)$$



Сл. 74.

ако пројекције вектора положаја Декартов правоугли триједар су ције времена t

$$x = f_1\,(t)$$
$$y = f_2\,(t)$$
$$z = f_3\,(t).$$

Ако се покретна тачка у времену t налази у M, а у ену $t + \Delta\, t$ у M_1 онда су њени вектори положаја $\vec{r}$ и $\Delta \vec{r}$. Прираштају времена $\Delta\, t$ одговара прираштај вектора положаја $\Delta \vec{r}$.

Прираштај вектора положаја $\Delta \vec{r}$ има пројекције

$$\Delta\, x,\ \Delta\, y,\ \Delta\, z,$$

су такође функције времена.

Када прираштај вектора положаја и његове пројекције имо са $\Delta\, t$, биће

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (2)$$

$$\frac{\Delta\, x}{\Delta\, t}, \quad \frac{\Delta\, y}{\Delta\, t}, \quad \frac{\Delta\, z}{\Delta\, t}. \qquad (3)$$

Ако сада узмемо да се вектор положаја $\overrightarrow{OM_1}$ приближи начно блиско вектору положаја $\overrightarrow{OM}$, или другим речима кад пустимо да $\Delta\, t \rightarrow 0$, онда количници (2) и (3) изводи

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}$$

$$\frac{dx}{dt} = x'_t, \qquad \frac{dy}{dt} = y'_t, \qquad \frac{dz}{dt} = z'_t.$$

Прираштај вектора положаја $\overrightarrow{\Delta r}$, постаје дакле дифе-ренцијал $\overrightarrow{dr}$ и заузима правац тангенте T у тачки M, и има смер управљен на ону страну на коју лук трајекторије расте.

Извод $\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$, односно $\dot{r}$, а који се још обележава и са претставља брзину покретне тачке у тачки M, те тако добијамо следећу дефиницију брзине:

Брзина неке покретне тачке у некој тачки М њене трајекторије је извод вектора положаја тачке М по времену, има правац и смер тангенте на трајекторију уперен на ону страну на коју се тачка креће.

Изводи

$$\frac{dx}{dt} = x'_t, \qquad \frac{dy}{dt} = y'_t, \qquad \frac{dz}{dt} = z'_t,$$

који се обележавају још и са

$$v_x, \qquad v_y, \qquad v_z,$$

претстављају пројекције брзине $\dot{r}$ односно $\vec{v}$.

Кад су нам познате пројекције брзине v_x, v_y, v_z, онда је интензитет вектора брзине

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Ако пројекцијама брзине x', y', z' односно v_x, v_y, v_z дамо смерове координатних оса множећи их одговарајућим ортовима, онда је

$$\dot{r} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k},$$

односно

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Ако сада узмемо да нам је познат закон пута

$$s = f(t)$$

по коме се покретна тачка креће по својој трајекторији $M_0 M_1$, (сл. 74) онда ако један произвољан део пута $M M_1$ означимо са

$$\Delta s$$

и пустимо да се тачка M_1 приближи бесконачно тачки M, произвољан мали део пута Δs постаће

$$ds = |\overrightarrow{dr}|,$$

а

$$\frac{|\overrightarrow{dr}|}{dt} = \frac{ds}{dt},$$

[К]ако је $\frac{|\overrightarrow{dr}|}{dt}$ интензитет брзине покретне тачке у тачки [...]то је

$$\frac{ds}{dt} = f'(t)$$

[инт]ензитет брзине покретне тачке у тачки M.

Примедба — Како је брзина вектор који има правац и смер [тан]генте на трајекторију, уперен на ону страну на коју лук тра[јек]торије расте, то кадгод је кретање праволиниско вектор [брз]ине има правац и смер самог кретања јер тангента праве [лин]ије лежи у правој линији.

Пример. — Наћи једначину трајекторије и брзину по[кре]тне тачке у времену $t = 1$, чије су пројекције вектора [пол]ожаја дате једначинама

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 16 \\ y &= 2t + 4 \\ z &= t - 3. \end{aligned} \tag{4}$$

Кад из једначина пројекција вектора положаја елимини[ше]мо време t, добијамо једначину трајекторије

$$y = 2\sqrt{x + 16} + 4, \qquad z = \sqrt{x + 16} - 3,$$

[ко]је нам претстављају извесну криву у простору. Када ди[фе]ренцијалимо дате једначине (4) биће

$$\frac{dx}{dt} = v_x = 2t$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y = 2$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z = 1,$$

[Да]кле је интензитет брзине покретне тачке уопште

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2t)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4t^2 + 5},$$

[з]а $t = 1$, брзина је

$$v = 3.$$

Пример. — Наћи трајекторију и брзину покретне тачке за $t = 5$, када су пројекције вектора положаја дате једначинама

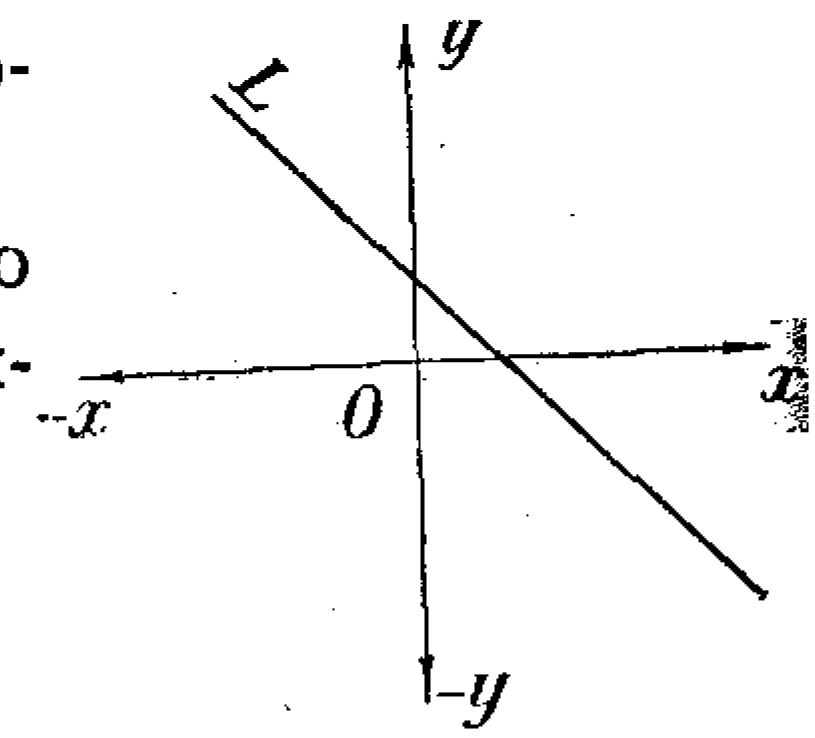
$$x = 1 - t^2 \qquad (5)$$
$$y = t^2.$$

Из пројекција вектора положаја видимо да је кретање у равни, јер вектор положаја нема пројекције на z-оси.

Када из једначина (5) елиминишемо параметар t добијамо једначину трајекторије

$$y = 1 - x.$$

Трајекторија је права L (сл. 75).



Сл. 75.

Када једначине (5) диференцијалимо биће

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -2t$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y = 2t$$

одакле је:

$$v = \sqrt{8t^2} = 2t\sqrt{2}.$$

За $t = 5$ тражена брзина је $10\sqrt{2}$.

Пример. — Наћи брзину покретне тачке чији је закон пута

$$s = 2t^2 - 1.$$

Кад диференцијалимо закон пута по времену добијамо брзину

$$\frac{ds}{dt} = v = 4t.$$

Кад дајемо времену t разне вредности добићемо одговарајуће брзине покретне тачке за те вредности.

Кад је брзина неког кретања стална количина и од нуле различита онда се то кретање назива *једнолико кретање* или *равномерно кретање*; а када је брзина промењљива кретање се назива *промењљиво кретање*.

Пример. — Нека нам је дато кретање

$$s = 5t - 1.$$

Брзина датог кретања је

$$\frac{ds}{dt} = v = 5.$$

Дато кретање је једнолико кретање јер му је брзина стална.

Пример. — Нека нам је дато кретање

$$s = 3t^2 + 1$$

Брзина датог кретања је

$$\frac{ds}{dt} = v = 6t.$$

Брзина датог кретања је променљива као што се види из таблице (сл. 76.)

t	0	1	2	3	4	...
v	0	6	12	18	24	...

Сл. 76.

Када се нека тачка креће променљивом брзином, па у току времена t пређе пут s, онда се брзина

$$v = \frac{s}{t}$$

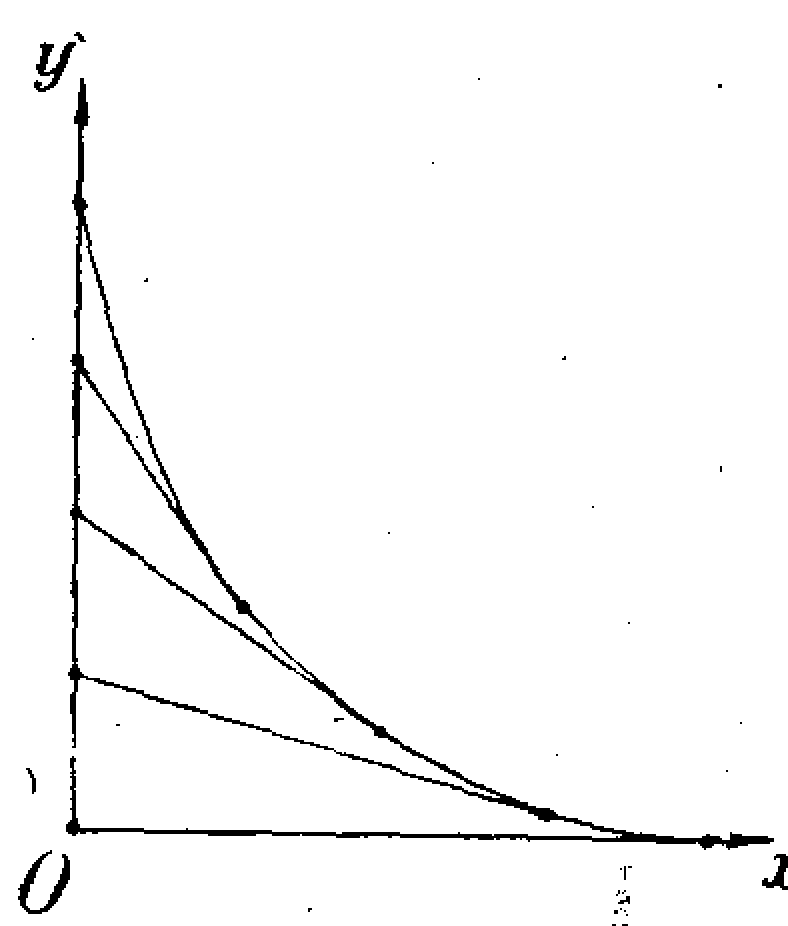
називи *средња брзина.*

Пример. — Колика је средња брзина неке покретне тачке. која се креће променљивом брзином и за 15 минута пређе пут од 1800 m.

Тражена средња брзина је

$$v = \frac{1800}{900} = 2\ m/sec.$$

Проблем потере — Одредити једначину трајекторије кера, који гони зеца, узимајући да се у почетку кретања зец налази у координатном почетку O (сл. 77), а кер на апсцисној оси на извесном отстојању од зеца и да се зец креће константном брзином a дуж y-осе, а кер у потеру за њим константном брзином b.



Сл. 77.

Како кер у своме кретању има стално у очима зеца, то тангента у макојој тачки трајекторије сече y-осу у тачки где се налази зец.

Ако једначину трајекторије претставимо са $y = f(x)$, а један део лука трајекторије са s, онда је једначина тангенте на трајекторију

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\Big(X - x\Big)$$

а како тангента сече y-осу стално у тачкама 0, at, то жемо ставити

$$at - y = - x \frac{dy}{dx} \cdot \tag{1}$$

Пређени пут кера је

$$s = bt,$$

а одатле је

$$ds = bdt \cdot \tag{2}$$

Када сменимо t у једначини (1) његовом вредношћу и једначине (2) добићемо диференцијалну једначину трајектори кера

$$\frac{as}{b} - y = - x \frac{dy}{dx} \cdot \tag{3}$$

Како се диференцијалне једначине у којима се налаз лук интеграле, када се претходно диференцијале, то ћем једначину (3) диференцијалити па ћемо имати

$$\frac{a}{b}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = - x \frac{dy'}{dx}, \tag{4}$$

где је ds смењено са $\sqrt{1 + y'^2}\, dx \cdot$

Када ставимо

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

и извршимо смену у једначини (4) имаћемо

$$- \frac{a}{b} \frac{dx}{x} = \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

одакле интеграљењем добијамо

$$- \frac{a}{b} L x + L C_1 = L \left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right), \tag{5}$$

где је C_1 интеграциона константа.

Ако ставимо — $\frac{a}{b} = k$, дигнемо логаритам и ослободимо се корена у једначини (5), имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1\ x^k - C_1^{-1}\ x^{-k}}{2},$$

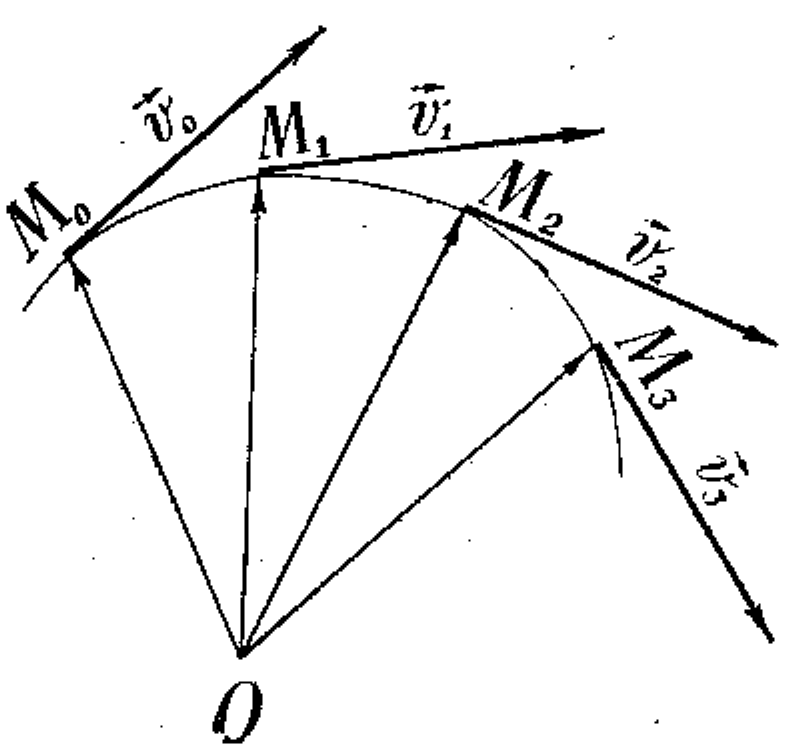
одакле интеграљењем добијамо тражену једначину трајекторије кера

$$y = \frac{C_1\ x^{k+1}}{2\ (k+1)} - \frac{C_1^{-1}\ x^{-k+1}}{2(-k+1)} + C_2.$$

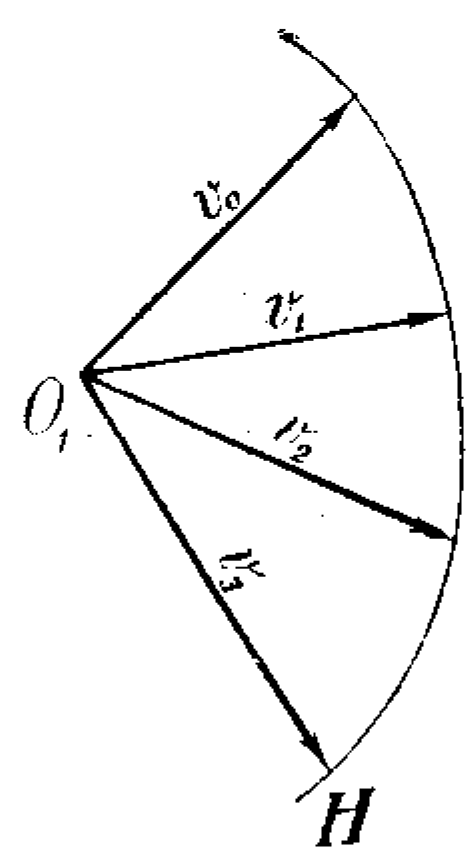
Интеграционе константе C_1 и C_2 одређују се из почетних услова кретања.

44. Ходограф. — Ако нам је дато кретање тачке M_0 која описује трајекторију M_0M_3, (сл. 78а), онда за сваку тачку трајекторије можемо одредити, на познати начин, векторе брзине по величини, правцу и смеру.

Када смо одредили векторе брзине за тачке M_0, M_1, M_2, $M_3, \ldots$, па узмемо један произвољан пол O_1 (сл. 78b) и векторе брзине $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ сматрамо као слободне и пренесемо их у пол O_1, онда нам крајеви вектора брзине одређују извесну криву H, која се назива *ходограф*.



Сл. 78а



Сл. 78b

Ходограф је, дакле, геометриско место крајњих тачака вектора брзине, повучених из једног пола.

Како су вектори брзина функције својих пројекција, а ове су функције времена t

$$\begin{aligned} v_x &= \varphi_1\ (t) \\ v_y &= \varphi_2\ (t) \\ v_z &= \varphi_3\ (t), \end{aligned}$$

то када из последњих једначина, на познати начин, елиминишемо време t, добићемо једначину ходографа.

Пример. — Наћи ходограф брзине кретања тачке, чије је кретање дато једначинама

$$x = 3t^2$$
$$y = 3\ (1-t)^2.$$

Кад дате једначине диференцијалимо добићемо пројекције брзине

$$\frac{dx}{dt} = v_x = 6\ t$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = -\ 6\ (1-t)\ .$$

Ако узмемо један координатни систем $O\ \xi\ \eta$ (сл. 79) и пројекцију v_x пренесемо на ξ-осу, пројекцију v_y на η-осу, онда је:

$$\begin{aligned} \xi &= 6\ t \\ \eta &= 6\ (t-1). \end{aligned} \qquad (1)$$

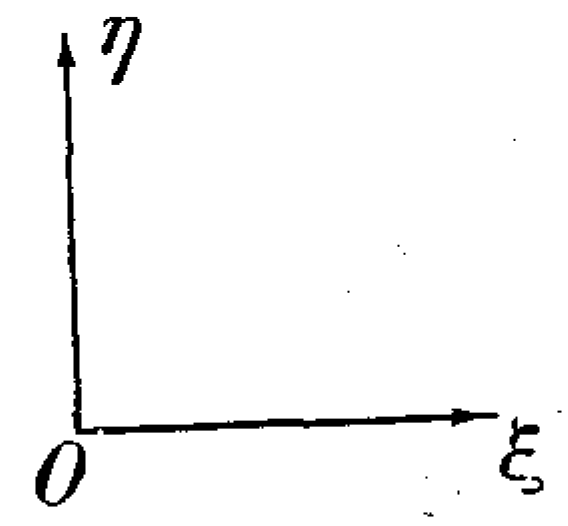
Када из једначина (1) елиминишемо t, биће

$$\eta = \xi - 6.$$

Ако се вратимо на координатни систем Oxy, онда је једначина ходографа

$$y = x - 6.$$

Ходограф датог кретања је права линија, коју можемо према нађеној једначини конструисати.



Сл. 79.

Кад је кретање у равни, па је нека од пројекција брзине стална количина, онда можемо одмах конструисати ходограф.

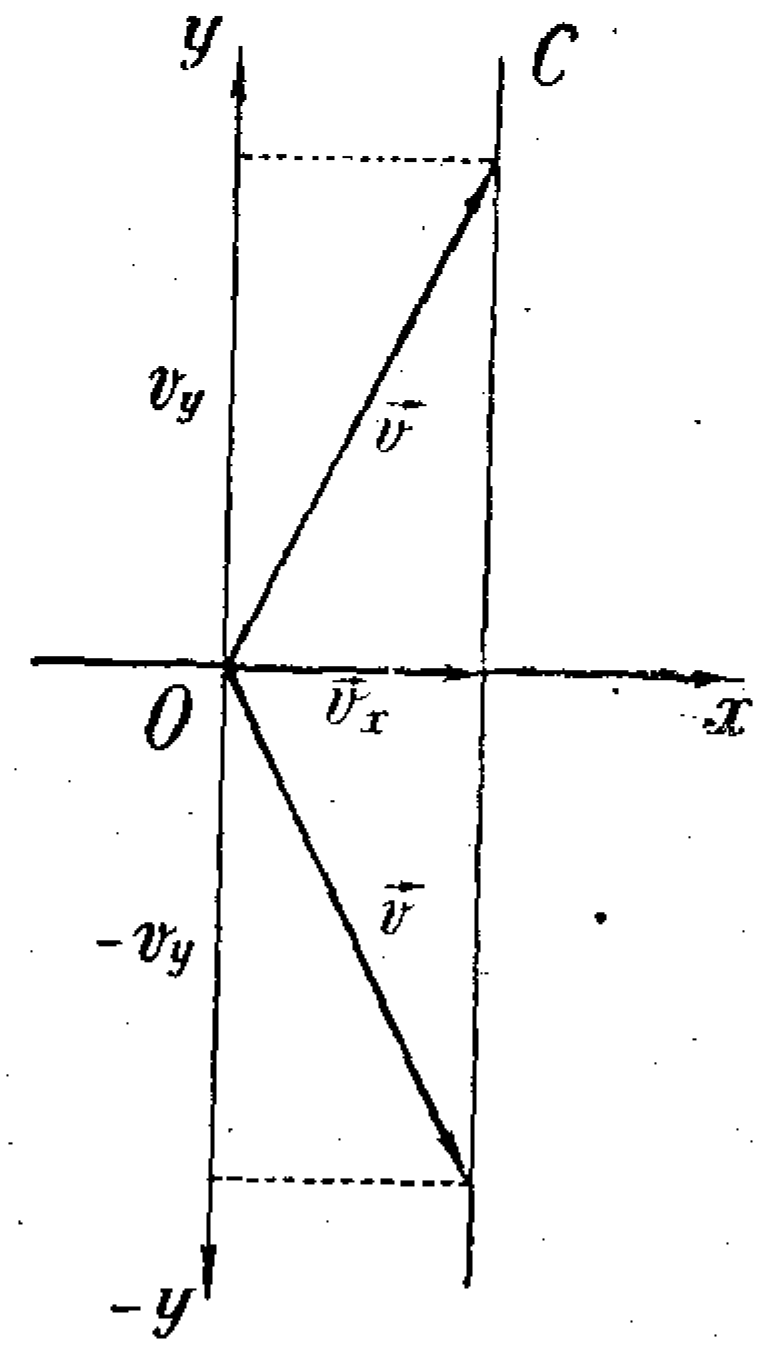
Пример. — Једначине кретања су

$$x = t$$
$$y = \cos 2t.$$

Пројекције брзине су

$$\frac{dx}{dt} = v_x = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = -2\sin 2t$$



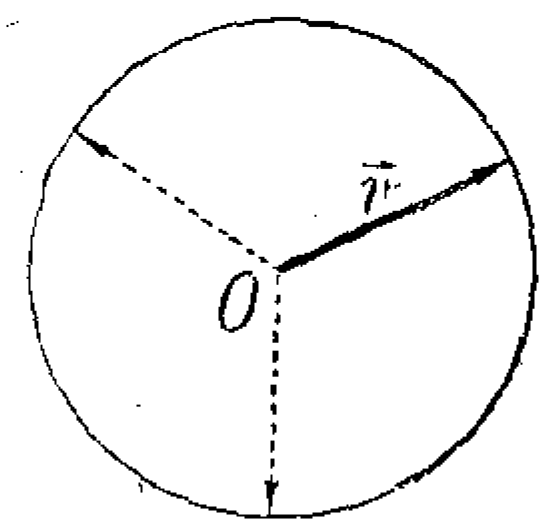
Сл. 80.

Пројекција брзине на x-оси је стална количина 1, а пројекције на y-оси су промењиве али највећу вредност могу имати $+2$ или најмању -2.

Ходограф брзине датог кретања је права C (сл. 80).

Из ходографа видимо да је брзина $\vec{v}$ променљива, и да јој је пројекција v_x стална а v_y променљива, као и то да је $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$.

Ако се нека тачка креће у равни криволиниски и једноликом брзином, онда је ходограф кружна линија (сл. 81), јер брзине имају исту величину а разне правце и смерове.

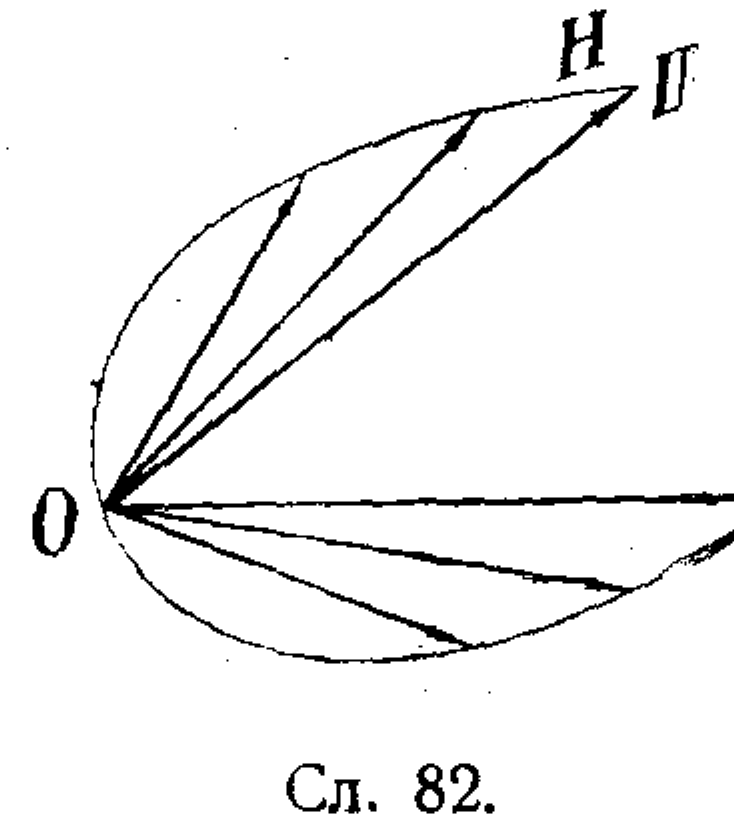


Сл. 81.

Када се тачка креће у простору једноликом брзином, онда је ходограф извесна крива на лопти, чији је полупречник интензитет брзине тачке.

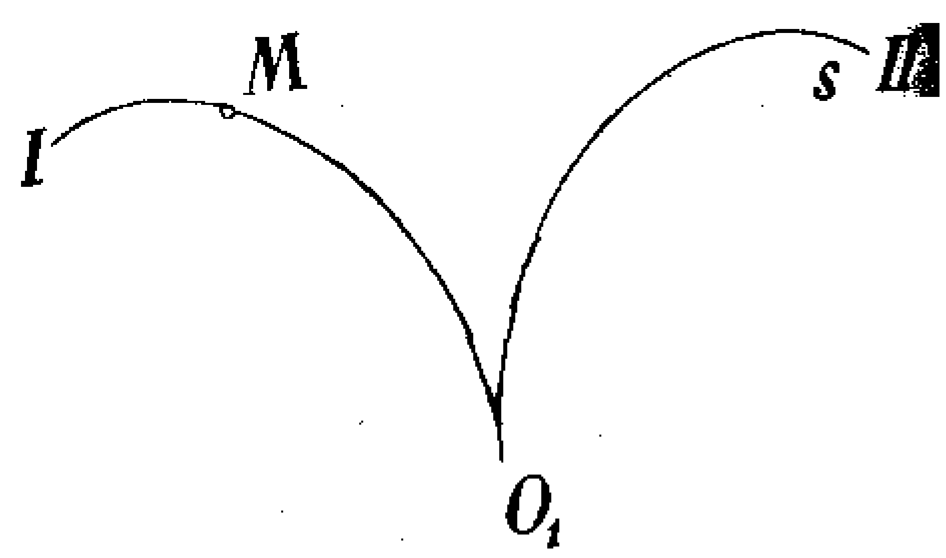
Када нам је познат ходограф брзине неке покретне тачке, онда на основу дефиниције ходографа, можемо знати извесне особине кретања тачке.

Пример. — Ако нам крива H (сл. 82) претставља ходограф неке покретне тачке M, онда из ходографа видимо, да почетна тачка у извесном моменту, за време свог кретања, има брзину једнаку нули, јер се пол O ходографа налази на самом ходографу.



Сл. 82.

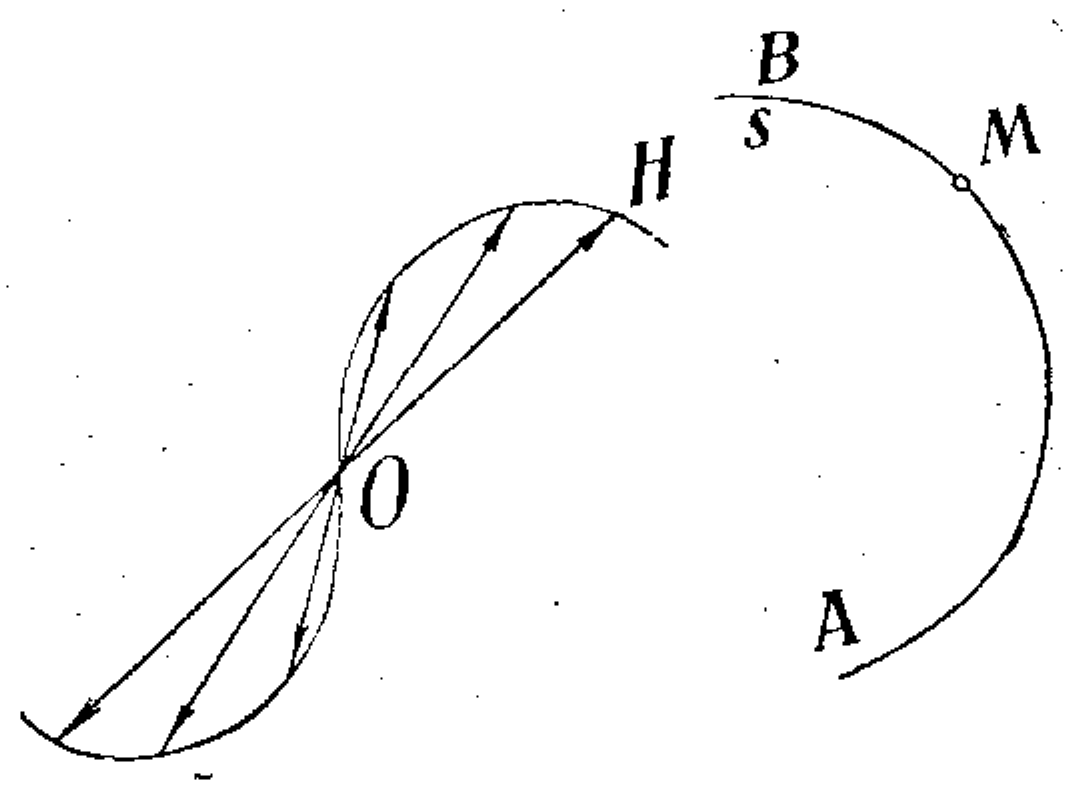
Трајекторија која одговара ходографу (сл. 82), је крива s (сл. 83). Покретна тачка M, се креће извесном брзином и описује I грану своје путање. Брзина тачке стално опада и кад тачка дође у O_1, брзина јој је једнака нули; затим тачка описује II грану своје путање, где јој брзина стално расте.



Сл. 83.

Трајекторија је дакле крива која има сингуларну тачку O_1 која се назива повратна тачка.

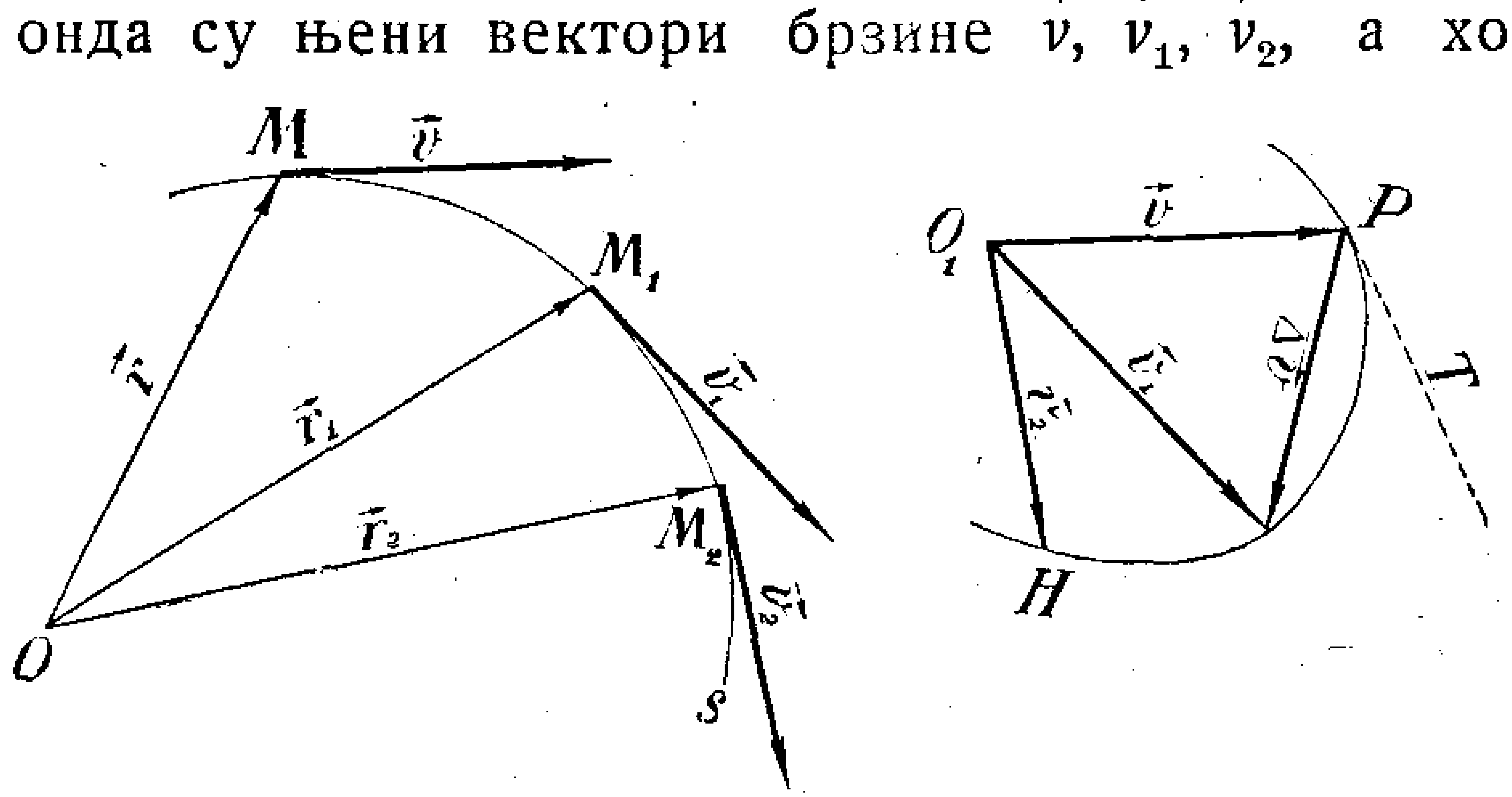
Пример. — Ако је пол O ходографа у исто време и превојна тачка ходографа H (сл. 84a), онда значи да је покретна тачка ишла извесном брзином, која је опадала, и прешла извесан пут; а затим стала, и вратила се истим путем пошавши извесном брзином, која је у путу стално расла тако да је покретна тачка имала исту брзину када је поново прошла кроз свој иницијални положај.



Сл. 84a. Сл. 84b.

Трајекторија која одговара ходографу (сл. 84a) је крива s (сл. 84b). Тачка M се кретала од A до B и вратила од B и поново прошла кроз A.

45. Убрзање тачке. — Када се нека тачка креће, чије су нам једначине кретања познате, и у времену t налази се у тачки M, у времену t_1 у тачки M_1, у времену t_2 у тачки M_2 (сл. 85a), онда су њени вектори брзине $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, а ходограф брзине крива H (сл. 85b.)



Сл. 85a Сл. 85b.

У времену t покретна тачка налази се у M и има брзину $\vec{v}$, у времену $t+\Delta t$ покретна тачка става прираштај брзине $\overrightarrow{\Delta v}$, као што се из ходографа види.

Пројекције прираштаја вектора брзине $\overrightarrow{\Delta v}$ су

$$\Delta x', \Delta y', \Delta z'.$$

Ако прираштај брзине $\overrightarrow{\Delta v}$ као и његове пројекције поделимо прираштајем времена, биће

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\\[2ex] \dfrac{\Delta x'}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y'}{\Delta t}, \dfrac{\Delta z'}{\Delta t}.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Када сад узмемо да се вектор $\vec{v}_1$ приближи бесконачно блиско вектору $\vec{v}$, или другим речима кад пустимо да $\Delta t \to 0$, онда количници (1) постају

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}$$

$$\frac{dx'}{dt} = x'', \frac{dy'}{dt} = y'', \frac{dz'}{dt} = z''$$

или

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}. \qquad (2)$$

Прираштај вектора брзине $\overrightarrow{\Delta v}$ прелази у диференцијал $d\vec{v}$ и узима правац тангенте у тачки P, и има смер уперен на ону страну на коју лук ходографа расте.

Извод под (2) претставља промену брзине кретања или убрзање кретања, те тако добијамо следећу дефиницију вектора убрзања:

Вектор убрзања је једнак изводу вектора брзине или другом изводу вектора положаја по времену.

Убрзање $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}$ обележавамо још и са $\vec{u}$.

Кад нам је познат закон пута

$$s = f(t)$$

онда је

$$v = \frac{ds}{dt}$$

па је зато и

$$\frac{d(v)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = u$$

па добијамо и ову дефиницију:

Убрзање је једнако другом изводу пута по времену.

Како је убрзање $\ddot{r}$ односно $\vec{u}$ вектор, то су његове пројекције на координатним осама

$$x'', y'', z'',$$

односно

$$u_x, u_y, u_z,$$

па је зато

$$\ddot{r} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k},$$

односно

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k},$$

као и:

$$|\ddot{r}| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

односно

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z^2}.$$

Пример. — Наћи убрзање покретне тачке у времену $t = 1$, чији је вектор положаја дат једначинама

$$\begin{aligned} x &= 3t^2 + 1 \\ y &= t^3 - 2 \\ z &= t^4 + 3. \end{aligned}$$

Кад последње једначине диференцијалимо два пута, добићемо

$$\frac{dx}{dt} = v_x = 6t; \qquad \frac{dv_x}{dt} = u_x = 6$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = 3t^2; \qquad \frac{dv_y}{dt} = u_y = 6t$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = 4t^3; \qquad \frac{dv_z}{dt} = u_z = 12t^2,$$

а према томе убрзање је

$$|\vec{u}| = \sqrt{36 + 36t^2 + 144t^4}$$

одакле за $t = 1$

$$u = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

Пример — Наћи убрзање покртне тачке, чији је закон пута дат једначином

$$s = t^2 + t - 5$$

Кад дату једначину диференцијалимо добићемо

$$\frac{ds}{dt} = v = 2t + 1\,; \qquad \frac{dv}{dt} = u = 2.$$

Убрзање дате покретне тачке је стална величина.

Када је убрзање неке покретне тачке стална, величина онда је кретање тачке једнако убрзано.

Ако је убрзање променљива величина, онда је кретање неједнако убрзано.

Пример. — Тачка се креће по закону

$$s = t^3 - t + 1.$$

У датом случају је

$$\frac{ds}{dt} = v = 3t^2 - 1\,; \qquad \frac{dv}{dt} = u = 6t.$$

Убрзање

$$u = 6t$$

је променљива величина, јер зависи од времена t.

Када је убрзање

$$\frac{d^2s}{dt^2} = u,$$

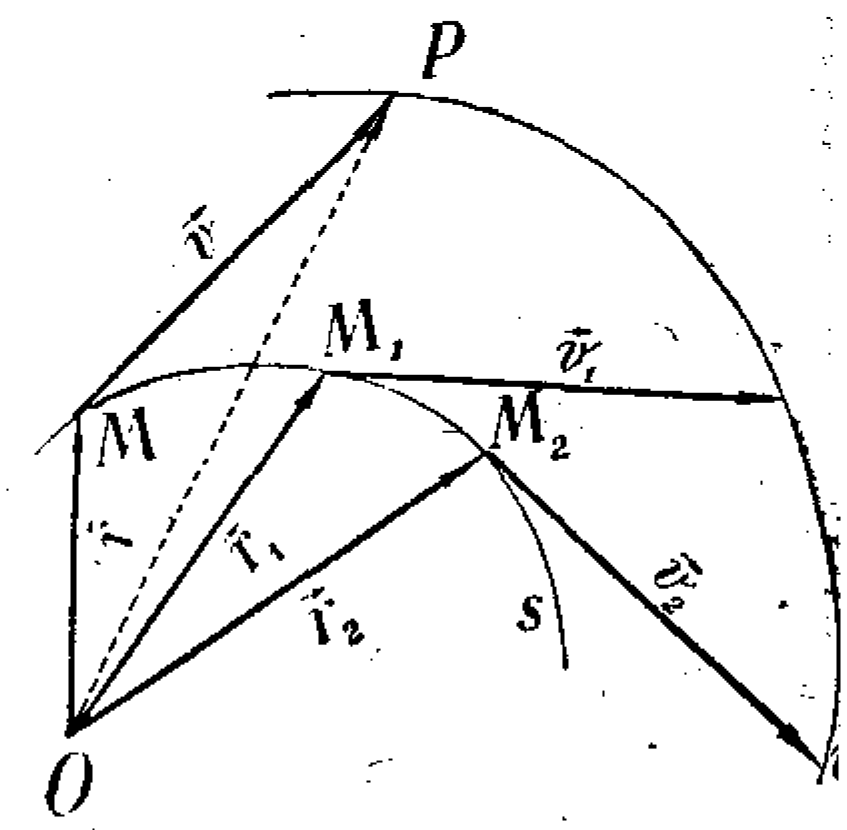
негативна величина, онда је кретање *успорено*.

46. Велоцида. — Када су нам познате једначине кретања неке тачке

$$\begin{aligned} x &= f_1\,(t) \\ y &= f_2\,(t) \\ z &= f_3\,(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

онда нам је позната и трајекторија s (сл. 86) и вектори брзине покретне тачке.

Ако покретна тачка у времену t има брзину $\vec{v}$, у вр
мену t_1 има брзину $\vec{v}_1$, у времену t_2 има брзину $\vec{v}_2$ и тако даље, онда крајеви вектора брзина повучених на трајекторију одређују криву линију w која се зове *велоцида*.



Сл. 86.

Када вектор положаја ма које тачке P на велоциди означимо са $\overrightarrow{OP}$, онда једначина велоциде у векторском облику гласи

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} + \vec{v}. \tag{2}$$

Вектор положаја $\overrightarrow{OP}$ велоциде је функција вектора п
лажаја $\vec{r}$ и брзине $\vec{v}$ покретне тачке.

Ако пројекције вектора положаја велоциде $\overrightarrow{OP}$ обел
жимо са p, q, r, пројекције вектора $\vec{r}$ са x, y, z, и пр
јекције вектора $\vec{v}$ са x', y', z', и једначину (2) пројицир
мо биће

$$\begin{aligned} p &= x + x' \\ q &= y + y' \\ r &= z + z'. \end{aligned} \tag{3}$$

Како су x, y, z; x', y', z' функције времена, то је

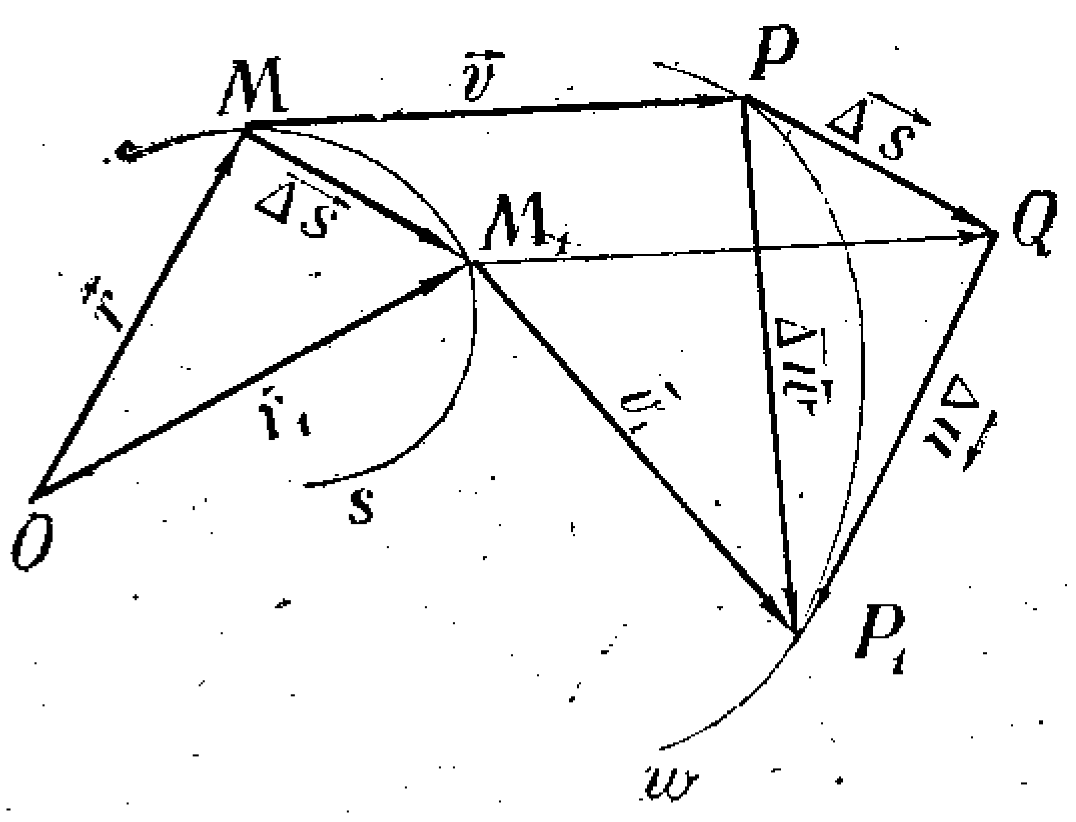
$$\begin{aligned} p &= f_1(t) \\ q &= f_2(t) \\ r &= f_3(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Када из једначине (4) елиминишемо параметар t, имаћемо

$$\begin{aligned} q &= \varphi(p) \\ r &= \Psi(p) \end{aligned}$$

ако су p, q, r пројекције вектора положаја велоциде, то ад их обележимо са x, y, z, обићемо једначине велоциде скаларном облику

$$y = \varphi(x) \qquad (5)$$
$$z = \psi(x).$$



Сл. 87.

Када су нам познате траекторија s и велоцида w (сл. 7) неке покретне тачке, онда омоћу велоциде можемо за ваки положај M покретне ачке одредити величину вектора убрзања $\vec{u}$.

Ако у тачкама M и M_1 конструишемо векторе брзина и $\vec{v}_1$, затим конструишемо векторе $\Delta\vec{s}$ и $\Delta\vec{w}$, потом у тачки M_1 пренесемо вектор $\vec{v}$ и спојимо тачку P са Q и тачку Q са P_1, онда је

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{u} \qquad (6)$$

де је $\Delta\vec{u}$ прираштај брзине $\vec{v}$ јер су вектори $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ повуени из исте тачке M_1. У исто време је

$$\Delta\vec{w} = \Delta\vec{s} + \Delta\vec{u}. \qquad (7)$$

ада једначину (7) поделимо са Δt, биће

$$\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}. \qquad (8)$$

Када узмемо да се тачка M_1 приближи тачки M, односно ад пустимо да $\Delta t \to 0$, онда једначина (8) постаје

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

или

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{v} + \vec{u} \qquad (9)$$

ер вектор $\Delta\vec{w}$ постаје дифсренцијал $d\vec{w}$ и заузима положај ангенте на велоциди у тачки M и има смер смера, у коме ук велоциде расте, $\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$ постаје $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$, а $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ постаје $\vec{u}$.

Како нам је $\frac{d\vec{w}}{dt}$ познато из једначине велоциде, $\vec{v}$ из једначине кретања, а према једначини (9) $\frac{d\vec{w}}{dt}$ је резултанта ве-

тора $\vec{v}$ и $\vec{u}$, то када знамо $\frac{d\vec{w}}{dt}$ и $\vec{v}$ можемо увек одреди-

убрзање $\vec{u}$ по величини, правцу и смеру као трећу стра-

векторског троугла, чије су две стране вектори $\frac{d\vec{w}}{dt}$ и $\vec{v}$, в-

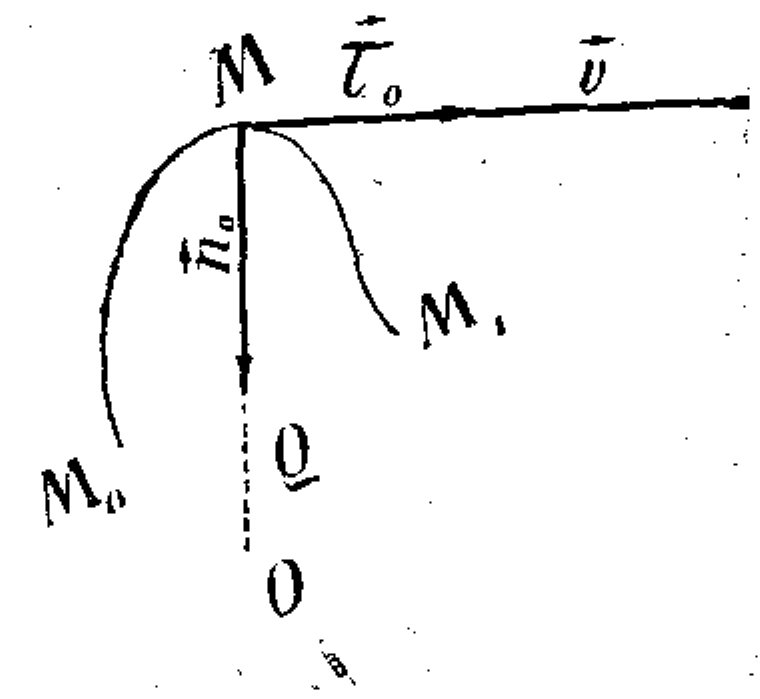
дећи рачуна само да је страна $\frac{d\vec{w}}{dt}$ резултанта брзине $\vec{v}$

убрзања $\vec{u}$.

47. Тангенцијално и нормално убрзање. — Када нека тачка креће, чије је кретање дато једначинама

$$x = f_1\ (t)$$
$$y = f_2\ (t) \qquad (1)$$
$$z = f_3\ (t)$$

и у времену t_0 налази се у M_0, у времену t_1 у M_1, онда она опише путању — криву $M_0\ M_1$ (сл. 88).



Сл. 88.

Брзина тачке у ма коме положају M је

$$\vec{v} = f(\text{t}). \qquad (2)$$

Вектор брзине можемо претставити и изразом

$$\vec{v} = v\ \vec{\tau}_0 \qquad (3)$$

где је $\vec{\tau}_0$ орт тангенте, а v интензитет вектора брзине $\vec{v}$.

Како је убрзање $\vec{u}$ извод вектора брзине по времену, то када диференцијалимо израз (3) по времену биће

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\ \vec{\tau}_0 + v\ \frac{d\vec{\tau}_0}{dt}. \qquad (4)$$

Израз $v\frac{d\tau_0}{dt}$ можемо написати у облику $v\ \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}\ \frac{ds}{dt}$ или $v^2\ \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}$.

Израз $v^2\ \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}$ према члану 41, израз (2) можемо написати и у облику $v^2\ \vec{K}$, или према члану 41, израз (5)

$$v^2\ \frac{1}{\varrho}\ \vec{n}_0 \qquad (5)$$

Ако израз (5) ставимо у једначину (4) место израза $v\,\frac{d\tau_0}{dt}$, добићемо

$$\vec{u} = \frac{dv}{dt}\,\vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\varrho}\,\vec{n}_0 \tag{6}$$

Дакле видимо да се убрзање $\vec{u}$ састоји из две природне компоненте убрзања од којих једна има правац тангенте, друга правац главне нормале трајекторије, а убрзање у правцу бинормале не постоји.

Убрзање $\frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0$ које пада у правац тангенте, и има смер уперен на ону страну на коју трајекторија расте, назива се тангенцијално, а убрзање $\frac{v^2}{\varrho}\vec{n}_0$ које пада у правац главне нормале и има смер уперен к центру кривине трајекторије назива се нормално или центрипетелно убрзање.

Како тангента и главна нормала код просторних кривих, односно кривих линија двојне кривине, леже у оскулаторној равни, то и тангенцијално и нормално убрзање леже такође у оскулаторној равни.

Код кривих у равни, оскулаторна раван се поклапа са равни у којој лежи крива, те отуда тангенцијално и нормално убрзање леже у истој равни са кривом а имају правац и смер тангенте и нормале криве.

Како су $\vec{\tau}_0$ и $\vec{n}_0$ ортови, то њихови коефицијенти у једначини (6) претстављају пројекције убрзања $\vec{u}$, те ако ставимо ради краткоће

$$\frac{dv}{dt} = u_t \tag{7}$$

$$\frac{v^2}{\varrho} = u_c \tag{8}$$

онда је интензитет убрзања

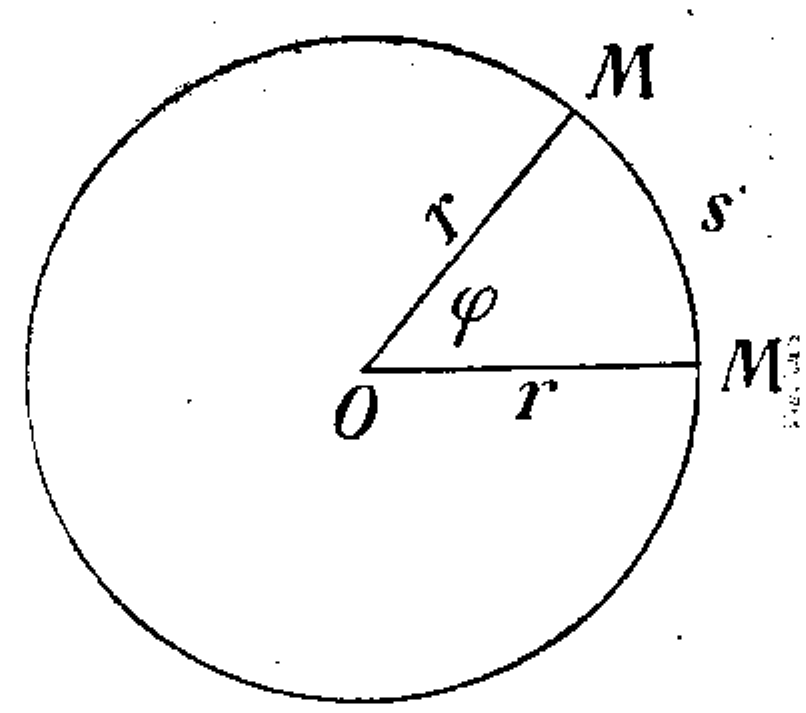
$$u = \sqrt{u_t^2 + u_c^2}. \tag{9}$$

Ако се нека тачка креће криволиниски, а једноликом брзином, онда из образаца (6), сазнајемо да је у том случају тангенцијално убрзање једнако нули а нормално различито од нуле, или другим речима сазнајемо да код криволиниског кретања постоји убрзање ма да се тачка крећеједнаком брзином.

48. Кружно кретање. — Ако се тачка M креће по периферији круга, чији је полупречник r (сл. 89) и за почетак кретања узмемо тачку M_0, онда је пређени пут покретне тачке:

$$s = r\varphi \qquad (1)$$

где је $\sphericalangle \varphi$ функција времена.



Сл. 89.

Када једначину (1) диференцијалимо по времену t добићемо брзину

$$\frac{ds}{dt} = v = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} = r\omega. \qquad (2)$$

Диференцијални количник

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

назива се *угловна брзина*.

Према једначини (2) а с обзиром на обрасце (7), (8) (9) у претходном члану, код кружног кретања је

$$u_t = r\dot{\omega}, \qquad u_c = r\omega^2 \qquad (3)$$
$$u = \sqrt{r^2(\dot{\omega}^2 + \omega^4)}.$$

Када покретна тачка M врши кружно кретање са константном брзнном k, онда је

$$k = r\omega,$$

а према томе мора и ω бити стална количина.

Тангенцијално убрзање је у том случају

$$u_t = 0,$$

а центрипетално

$$u_c = \frac{k^2}{r}.$$

Пример. — Колико је убрзање једне локомотиве која иде једноликом брзином 54 km на сат и описује лук круга, чији је полупречник 100 m.

Како је кретање локомотиве кружно и једнолико, то постоји само центрипетално убрзање.

Пређени пут локомотиве уопште је

$$s = r\varphi,$$

а отуда брзина

$$\frac{ds}{dt} = r\omega = v = \frac{54000}{3600} = 15\ m/sec,$$

је пак

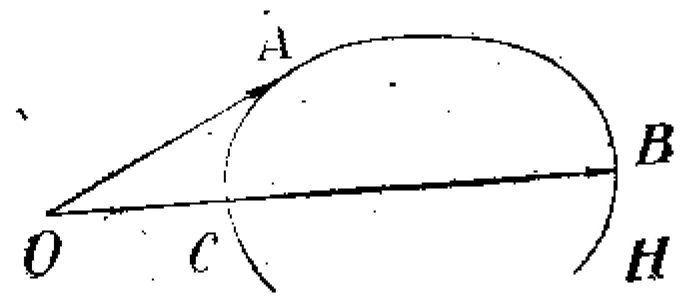
$$\omega = \frac{15}{100} = 0{,}15\ m/sec,$$

жено убрзање

$$u_c = r \cdot \omega^2 = 2{,}25\ m/sec^2.$$

Када нам је познат ходограф једне покретне тачке, у извесним случајевима, можемо знати и тангецијално мално убрзање покретне тачке за неке њене положаје.

Пример. — Ако нам крива H (сл. 90) претставља ходо неке покретне тачке, онда за тачку A брзина и убрзање тне тачке имају исти правац, јер је брзине $\overrightarrow{OA}$, у исто време и тан на ходографу.



Сл. 90.

Како се правац убрзавања за тачку клапа са правцем брзине, односно тангенте на траректорији, то је нормално или центри лно убрзање покретне тачке у извесном положају, коме вара тачка A на ходографу, једнако нули,

$$\frac{v^2}{\varrho} = 0.$$

ко је

$$v^2 \gtrless 0,$$

ора бити

$$\varrho = \infty,$$

ле излази да тачки A ходографа одговара превојна тачка рајекторији.

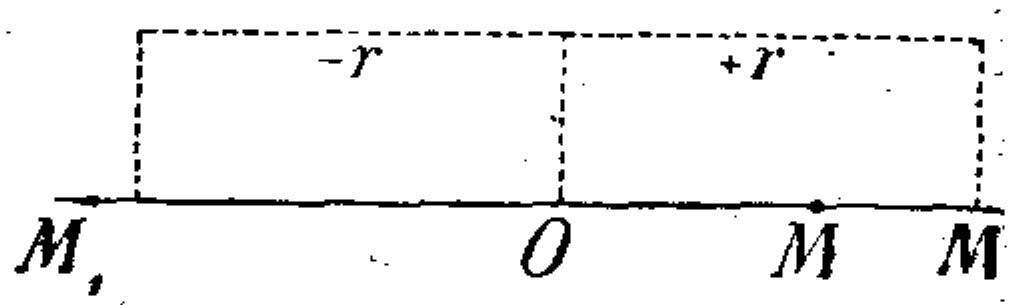
У тачкама B и C брзине имају екстремне вредности. А кад функција има екстремне вредности, онда је за њих први од функције једнак нули

$$\frac{dv}{dt} = u_t = 0,$$

отуда сазнајемо да је тагенцијално убрзање покретне ке у извесним положајима, којима одговарају тачке B и C одографу, једнако нули.

49. Осцилаторно или хармониско кретање. — Ако нека тачка M (сл. 91), креће праволиниски по закону

$$s = r \sin \kappa t, \qquad (1)$$



(сл. 91.)

онда је

$$\frac{ds}{dt} = v = rk \cos kt,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = u = - rk^2 \sin kt \cdot$$

Када времену t дајемо произвољне вредности добићемо одговарајуће вредности пута s, брзине v и убрзања u, као што се и види из таблице (сл. 92).

t	s	v	u
0	0	rk	0
$\frac{\pi}{2k}$	r	0	$-rk^2$
$\frac{\pi}{k}$	0	$-rk$	0
$\frac{3\pi}{2k}$	$-r$	0	rk^2
$\frac{2\pi}{k}$	0	rk	0

Сл. 92.

У времену $t = 0$, тачка M се налази у O, отпочиње своје кретање брзином rk и креће се успорено у позитивном смеру. У времену $t = \frac{\pi}{2k}$ тачка M се налази у M_0, где јој је брзина једнака нули и отпочиње да се креће натраг убрзано.

У времену $t = \frac{\pi}{k}$ тачка M се поново налази у O, где јој брзина $-rk$, и пролази кроз O, брзина почиње да јој опада по апсолутној вредности и у времену $t = \frac{3\pi}{2k}$ налази се у M_1 где јој је брзина једнака нули, а затим се поново враћа у O, и на исти начин врши непрестано своје кретање.

Кретање тачке M је дакле, *осцилаторно или хармониско кретање.*

Пут $(+ r)$ или $(- r)$ назива се *амплитуда кретања.* Пут $M_0 M_1$ назива се *једна осцилација,* а пут $M_0 M_1$ и натраг $M_1 M_0$ назива се једна *периода кретања.*

Време T потребно за једну периоду кретања назива се *периода.*

Периода тачке M је

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Када тачка M изврши n периода кретања, онда је протекло време

$$n\ T,$$

ако се све то збило у једној секунди, онда је

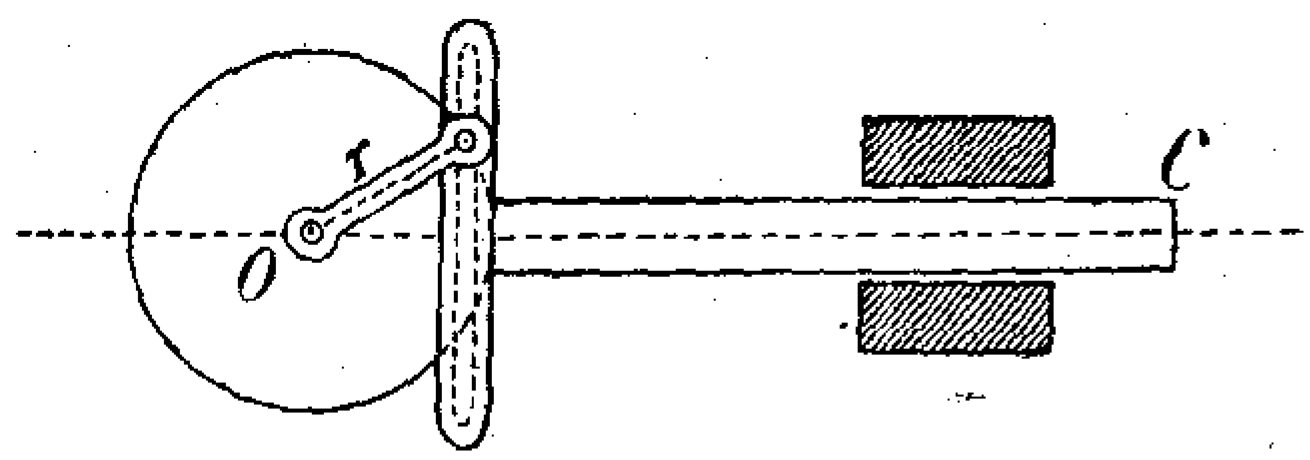
$$n\ T = 1,$$

одатле

$$n = \frac{1}{T}.$$

Израз $\frac{1}{T}$ назива се *фреквенција*, он нам претставља број периоди кретања у једној секунди.

Осцилаторно или хармониско кретање налази врло велику примену у Машинској техници, а изводи се махом помоћу кружног кретања, као што ћемо одмах видети.



Сл. 93.

Ако се полупречник (сл. 93.) окреће око центра O, клип C вршиће осцилаторно кретање*.

50. Дијаграм пута, брзине и убрзања. — Ако нам је дат закон пута неке тачке.

$$s = f\ (t) \qquad (1)$$

онда је брзина покретне тачке

$$\frac{ds}{dt} = v = f'\ (t), \qquad (2)$$

а убрзање

$$\frac{dv}{dt} = u = f''\ (t). \qquad (3)$$

Ако функције

$$s = f\ (t),\ v = f'\ (t),\ u = f''\ (t)$$

графички претставимо у правоуглом координатном систему узимајући време t за апсцису, а поједине функције s, v, u за ординате, добићемо извесне линије, које се називају *дијаграм пута, дијаграм брзине* и *дијаграм убрзања.*

Пример. — Наћи дијаграм пута, брзине и убрзања, када је закон пута

---

* У члану 88 видећемо каква сила треба да дејствује на неку материјалну тачку, па да тачка врши осцилаторно кретање.

$$s = t^3 + t^2 - 1. \tag{4}$$

Код датог пута брзина је

$$v = 3t^2 + 2t \tag{5}$$

а убрзање

$$u = 6t + 2 \tag{6}$$

Ако времену t дајемо вредности 0, 1, 2, . . . , добићемо одговарајуће вредности функција s, v, u, као што показују таблице (сл. 94), (сл. 95), и (сл. 96).

t	0	1	2 . . .
s	-1	1	11 . . .

Сл. 94

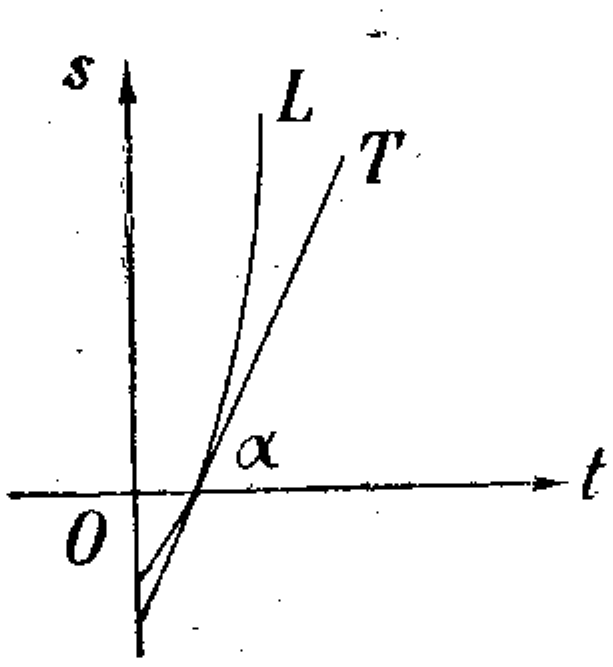
t	0	1	2 . . .
v	0	5	16 . . .

Сл. 95.

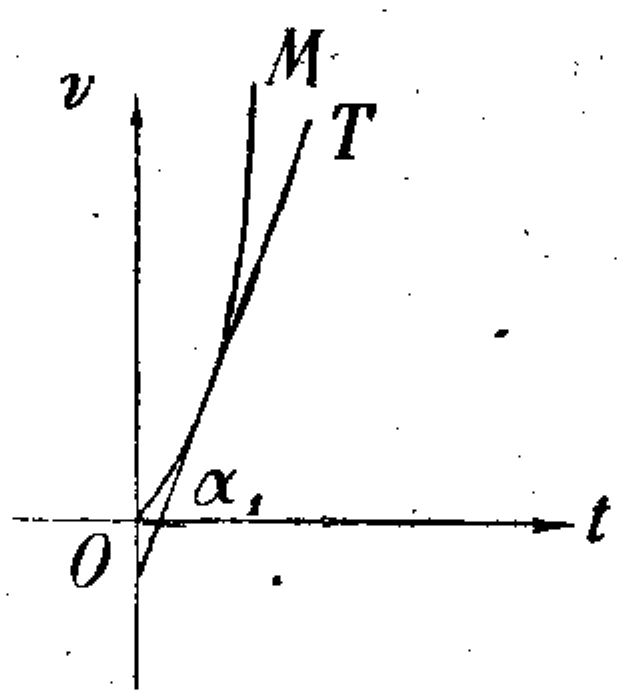
t	0	1	2 .
u	2	8	14 .

Сл. 96.

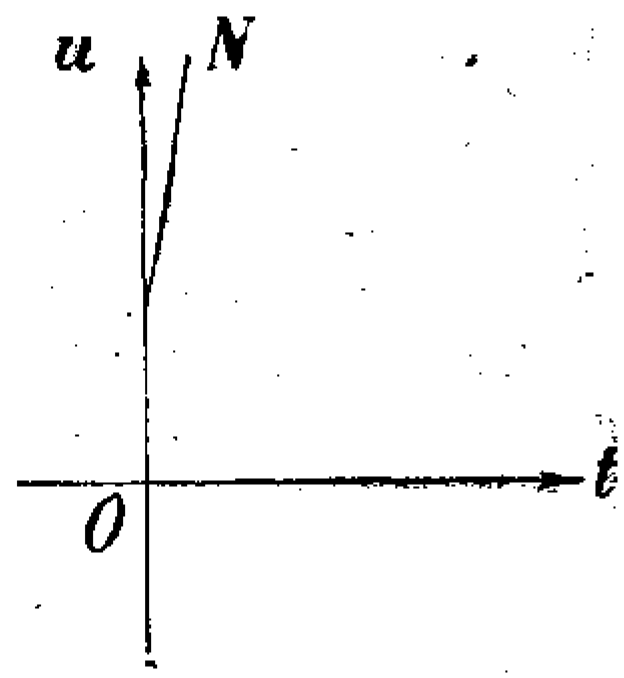
Кад сваки спрег добивених вредности сматрамо као координате једне тачке у равни правоуглог координатног система добићемо линију L (сл. 97), која нам претставља дијаграм



Сл. 97.



Сл. 98.



Сл. 99.

пута линију M (сл. 98) која нам претставља дијаграм брзине и линију N (сл. 99) која нам претставља дијаграм убрзања.

Ако на дијаграм пута L (сл. 97) у извесној тачки и на дијаграм брзине M (сл. 98) у извесној тачки повучемо тангенте, онда је

$$tg\, \alpha = \frac{ds}{dt}, \qquad tg\, \alpha_1 = \frac{dv}{dt},$$

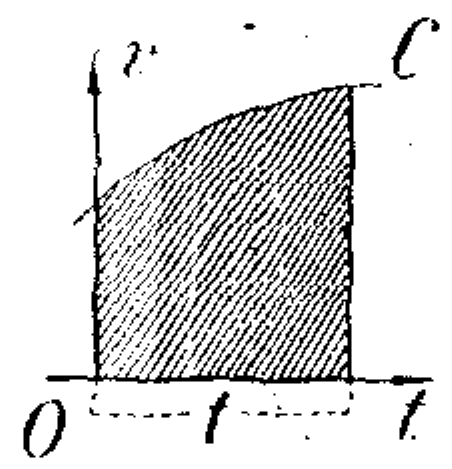
а како је

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = u,$$

то излази да је брзина v уопште једнака тангенсу угла кога заклапа тангента на дијаграму пута са апсцисом позитивног правца, а убрзање u да је у опште једнако тангенсу угла кога заклапа тангента на дијаграму брзине са апцисом позитивног правца.

51. Интеграљење брзине. — Нека нам је дата брзина покретне тачке

$$v = f(t) \qquad (1)$$



Сл. 100.

ека нам крива C (сл. 100) претставља рам брзине.

Површина коју заклапа крива C са сом је у опште, као што нам је по- о из Интегралног рачуна,

$$P = \int v\,d\,t = \int f(t)\,dt, \qquad (2)$$

у овом случају v је функција а t *независно променљива*. Ако се тражи *површина у извесним границама* за 0 и $t = t$, *онда* је та површина одређена инте- ом:

$$P = \int_0^t v\,dt = \int_0^t f(t)\,dt. \qquad (3)$$

ко је

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

$$ds = v\,dt,$$

е и

$$\int ds = \int_0^t v\,dt = \int_0^t f(t)\,dt \qquad (4)$$

$$s = \int_0^t v\,dt. \qquad (5)$$

ко су десне стране једначина (3) и (5) истоветне, то ви- о да је *пређени пут у извесном интегралу једнак повр-* и *коју дијаграм брзине затвара са координатним осама* том *интервалу времена*.

Пример. — Израчунати пут који је нека покретна тачка валила у интервалу времена $t = 1$ и $t = 5$, када је ишла ном

$$v = (2t + 1)\ m/sec.$$

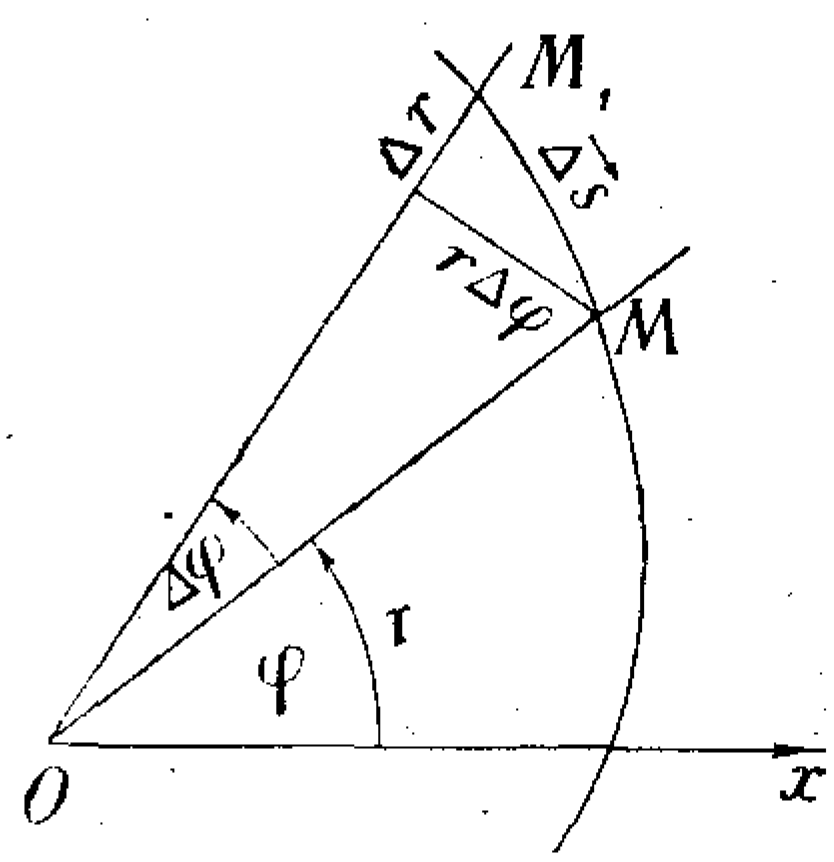
а обрасцу (5) тражени пут је

$$s = \int_5^1 (2t + 1)\,dt = \Big[t^2 + t \Big]_1^5 = 28m.$$

52. Брзина и убрзање у поларним координатама. Положај неке покретне тачке M с обзиром на поларни координатни систем (r, φ) (сл. 101) потпуно је одређен, кад су дати потег r и аргуменат φ као функције времена

$$r = f_1\,(t) \text{ и } \varphi = f_2\,(t). \qquad (1)$$

Ако тачка M за једно произвољно мало време Δt, дође у положај M_1, односно превали пут $\overrightarrow{\Delta s}$, онда је потег добио прираштај Δr, а аргуменат φ прираштај $\Delta\varphi$.



Сл. 101

Пројекције пута $\overrightarrow{\Delta s}$ су Δr и $r\Delta\varphi$, јер $r\Delta\varphi$ стоји нормално на Δr, те је отуда

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\,\Delta\varphi^2. \qquad (2)$$

Кад пројекцију Δr помножимо ортом $\vec{e}$, чији правац и смер пада у правац OM_1; а пројекцију $r\Delta\varphi$ помножимо ортом $\vec{k}$, чији правац и смер пада у правац и смер рашћења аргумента φ, онда је

$$\overrightarrow{\Delta s} = \vec{e}\Delta r + \vec{k}\,r\,\Delta\varphi. \qquad (3)$$

Ако једначину (3) поделимо са Δt и узмемо да је тачка M_1 бесконачно блиска тачки M, односно да $\Delta t \to 0$, онда добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ds}}{dt} = \vec{v} = \vec{e}\,\frac{dr}{dt} + \vec{k}r\,\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$\vec{v} = \vec{e}\,r' + \vec{k}\,r\varphi'. \qquad (4)$$

Како r' претставља извод потега, а φ', које се обележава у овом случају још и са ω, извод аргумента по времену то се $\vec{e}\,r'$ назива *радијална*, а $\vec{k}\,\omega$ *угловна брзина или још* и *циркуларна брзина.*

Брзина $\vec{v}$ има, дакле, две компоненте: радијалну и циркуларну, која стоји на њој нормално.

ако су $\vec{e}$ и $\vec{k}$ ортови, то је радијална брзина

$$v_r = r' \tag{5}$$

уларна

$$v_c = r\varphi' , \tag{6}$$

$$v = \sqrt{v_r^{\,2} + v_c^{\,2}} \tag{7}$$

ад једначину (4) диференцијалимо по времену, имајући да је и r функција времена, добићемо убрзање

$$\vec{u} = \vec{e}\, r'' + \dot{e} r' + \vec{k} r \varphi'' + \vec{k} r' \varphi' + \dot{k} r \varphi'. \tag{8}$$

ако је $\dot{e}$ извод орта, опет орт, који стоји нормално акле $\vec{k}\,\varphi'$; а извод $\dot{k}$ орт $-\vec{e}\,\varphi'$, то једначину (8) мо-аписати у облику

$$= \vec{e} r'' + \vec{k}\, \varphi' r' + \vec{k} r \varphi'' + \vec{k} r' \varphi' - \vec{e}\, \varphi' r \varphi',$$

зад

$$= \vec{e}\left[r'' - r\varphi'^2\right] + \vec{k}\left[2 r' \varphi' + r \varphi''\right] \tag{9}$$

ако су $\vec{e}$ и $\vec{k}$ ортови, а прва заграда радијално убрзање, града циркуларно убрзање то можемо ставити

$$u_r = r'' - r\varphi'^2 \tag{10}$$

$$u_c = 2r'\varphi' + r\varphi'' \tag{11}$$

је убрзање

$$u = \sqrt{u_r^{\,2} + u_c^{\,2}}. \tag{12}$$

ример. — Наћи трајекторију и брзину неке покретне чије су једначине кретања

$$r = at \qquad \varphi = bt. \tag{13}$$

иминишемо из једначина (13) параметар t добићемо ну трајекторије

$$r = \frac{a}{b}\,\varphi \tag{14}$$

рија је, дакле, Архимедова спирала.

диференцијалимо једначине (13) биће

$$\frac{dr}{dt} = r' = a, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi' = \omega = b,$$

а тражена брзина

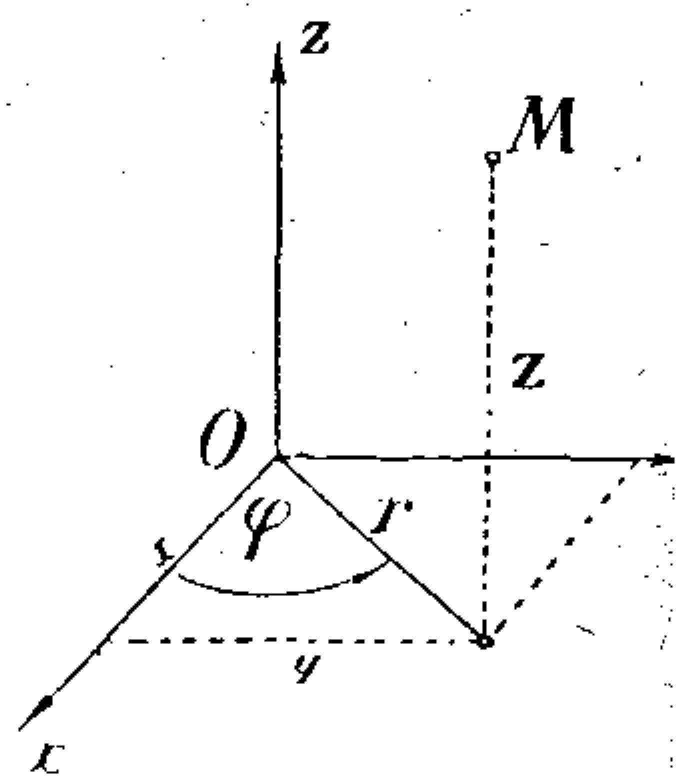
$$v = \sqrt{r'^2 + r^2\,\omega^2} = \sqrt{a^2 + r^2\,b^2},$$

или сменивши r из једначине (13)

$$v = a\sqrt{1 + b^2\,t^2} \quad .$$

53. Брзина и убрзање у цилиндричном координатном систему.— Кретање неке тачке M (сл. 102) у простору, потпуно је одређено када су нам познате њене цилиндричне координате, као функције времена

$$r = f_1\,(t)\;,\; \varphi = f_2\,(t)\;\; z = f_3\,(t). \quad (1).$$



Сл. 102

Брзина и убрзање тачке M имају сада поред радијалних и циркуларних компонената још *аксијалне компоненте,* које иду дуж z-осе па је зато

$$v = \sqrt{v^2{}_r + v^2{}_c + v^2{}_z} \quad (2)$$

$$u = \sqrt{u^2{}_r + u^2{}_c + u^2{}_z}. \quad (3)$$

Радијалну и циркуларну брзину и убрзање налазимо према обрасцима (5), (6) и (10), (11) из претходног члана, а аксијалну брзину и убрзање када функцију

$$z = f_3\,(t)$$

диференцијалимо једанпут за брзину а двапут за убрзање.

Пример. — Израчунати брзину и убрзање покретне тачке, чије су једначине кретања

$$r = r_o + \alpha\,t, \quad \varphi = \varphi_o + \beta\,L\,(1 + k\,t), \quad z = z_o + \gamma t$$

где су: r_o, φ_o, z_o и k извесне константе, и још $k = \dfrac{\alpha}{r_o}$

Кад дате једначине диференцијалимо, биће

$$\frac{dr}{dt} = r' = \alpha, \qquad \frac{d^2r}{d^2t} = r'' = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi' = \frac{\beta k}{1+kt}, \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi'' = -\frac{\beta k^2}{(1+kt)^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = v = \gamma, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = u_z = 0$$

Према обрасцу (2) и обрасцима (5) и (6) из претходног члана, тражена брзина, сменивши у изводима константу k са $\dfrac{\alpha}{r_0}$, је

$$v = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + \gamma^2},$$

убрзање према обрасцу (3) и обрасцима (10) и (11) из претходног члана, је

$$u = \sqrt{\frac{\alpha^4\beta^4}{r^2} + \frac{\alpha^4\beta^2}{r^2} + 0^2} = \frac{\alpha^2\,\beta}{r}\sqrt{1+\beta^2}$$

54. Квадрат брзине. — Ако вектор брзине неке покретне тачке означимо са $\vec{v}$, а његове пројекције, на Декартове осе, са v_x, v_y, v_z, онда је квадрат брзине,

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2, \tag{1}$$

или када пројекције означимо са x', y', z',

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{2}$$

Квадрат брзине

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{3}$$

изражен је помоћу пута и времена. Количина ds претставља, као што нам је познато, елеменат пута тачке, чија је брзина $\vec{v}$.

Квадрат брзине

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{4}$$

изражен је помоћу пројекција вектора брзине $\vec{v}$ односно његових координата.

Ако Декартове координате вектора брзине $\vec{v}$, сматрамо као функције криволиниских координата, онда је

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\,(q_1, q_2, q_3)\\ y &= f_2\,(q_1, q_2, q_3)\\ z &= f_3\,(q_1, q_2, q_3)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\,q_1' + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\,q_2' + \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\,q_3'\\ y' &= \frac{\partial f_2}{\partial q_1}\,q_1' + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}\,q_2' + \frac{\partial f_2}{\partial q_3}\,q_3'\\ z' &= \frac{\partial f_3}{\partial q_1}\,q_1' + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}\,q_2' + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\,q_3'\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Када једначине (6) дигнемо на квадрат и ставимо

$$A_1^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}\right)^2$$

$$A_2^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_2}\right)^2$$

$$A_3^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)^2$$

$$B_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial q_3}$$

$$B_2 = \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial q_1}$$

$$B_3 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial q_2}$$

онда можемо написати образац квадрата вектора брзине изражен криволиниским или генералним координатама,

$$v^2 = A^2{}_1 q'{}_1{}^2 + A_2{}^2 q'{}_2{}^2 + A_3{}^2 q'{}_3{}^2 + 2\,B_1 q'{}_2 q'{}_3 + 2\,B_2 q'{}_3 q'{}_1 + 2\,B_3{}' q'{}_1 q'{}_2$$

или

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = A_1{}^2 q_1{}'^2 + A^2{}_2 q'{}_2{}^2 + A_3{}^2 q'^2{}_3 + 2\,B_1 q'{}_2{}^2 q'{}_3 + 2\;B_2 q_3{}' q_1 + 2\,B_3 q'{}_1 q'{}_2,$$

одакле је пак

$$ds^2 = A_1{}^2 dq_1{}^2 + A_2{}^2 dq_2{}^2 + A_3{}^2 dq_3{}^2 + 2\,B_1 dq_2 dq_3 + 2\,B_2 dq_3 dq_1 + 2\,B_3 dq_1 dq_2.$$

Пример. — Наћи квадрат брзине и квадрат елемент пута ds^2 покретне тачке, чије је кретање изражено сферни координатама.

У датом случају је преме члану 9,

$$x = \varrho \cos\varphi \cos\psi$$
$$y = \varrho \cos\varphi \sin\psi$$
$$z = \varrho \sin\varphi,$$

а

$$x' = \varrho' \cos\varphi \cos\psi - \varrho \sin\varphi\, \varphi' \cos\psi - \varrho \cos\varphi \sin\psi\, \psi'$$
$$y' = \varrho' \cos\varphi \sin\psi - \varrho \sin\varphi\, \varphi' \sin\psi + \varrho \cos\varphi \cos\psi\, \psi'$$
$$z' = \varrho' \sin\varphi + \varrho \cos\varphi\, \varphi',$$

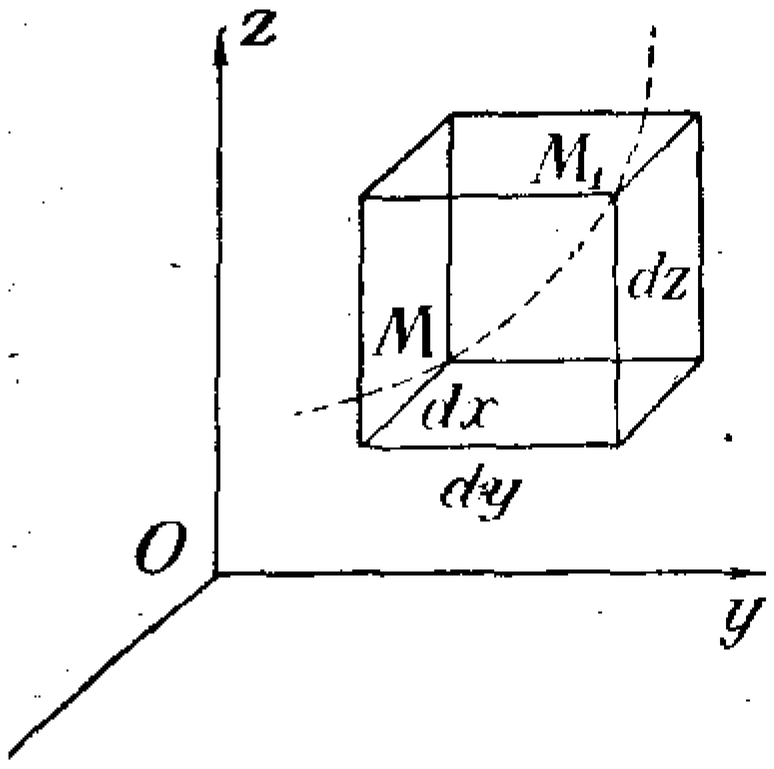
те је отуда

$$v = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \varrho'^2 + \varrho^2 \cos^2\varphi\, \psi'^2 + \varrho^2 \varphi'^2,$$

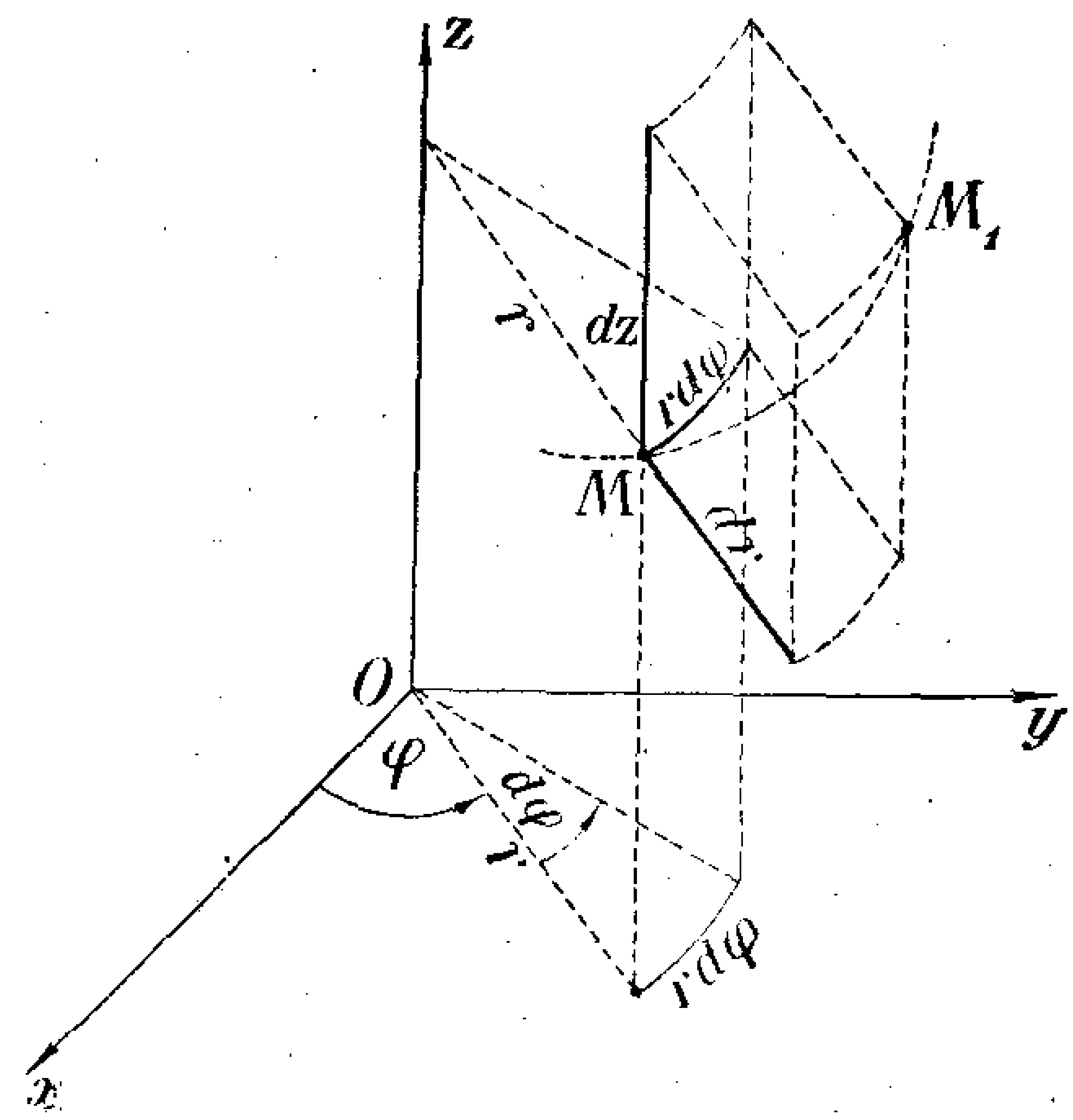
а

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cos^2\varphi\, d\psi^2 + \varrho^2\, d\varphi^2.$$

55. Одређивање квадрата брзине геометриским ем. — Квадрат елемента пута ds^2, а према томе и ква-



Сл. 103.



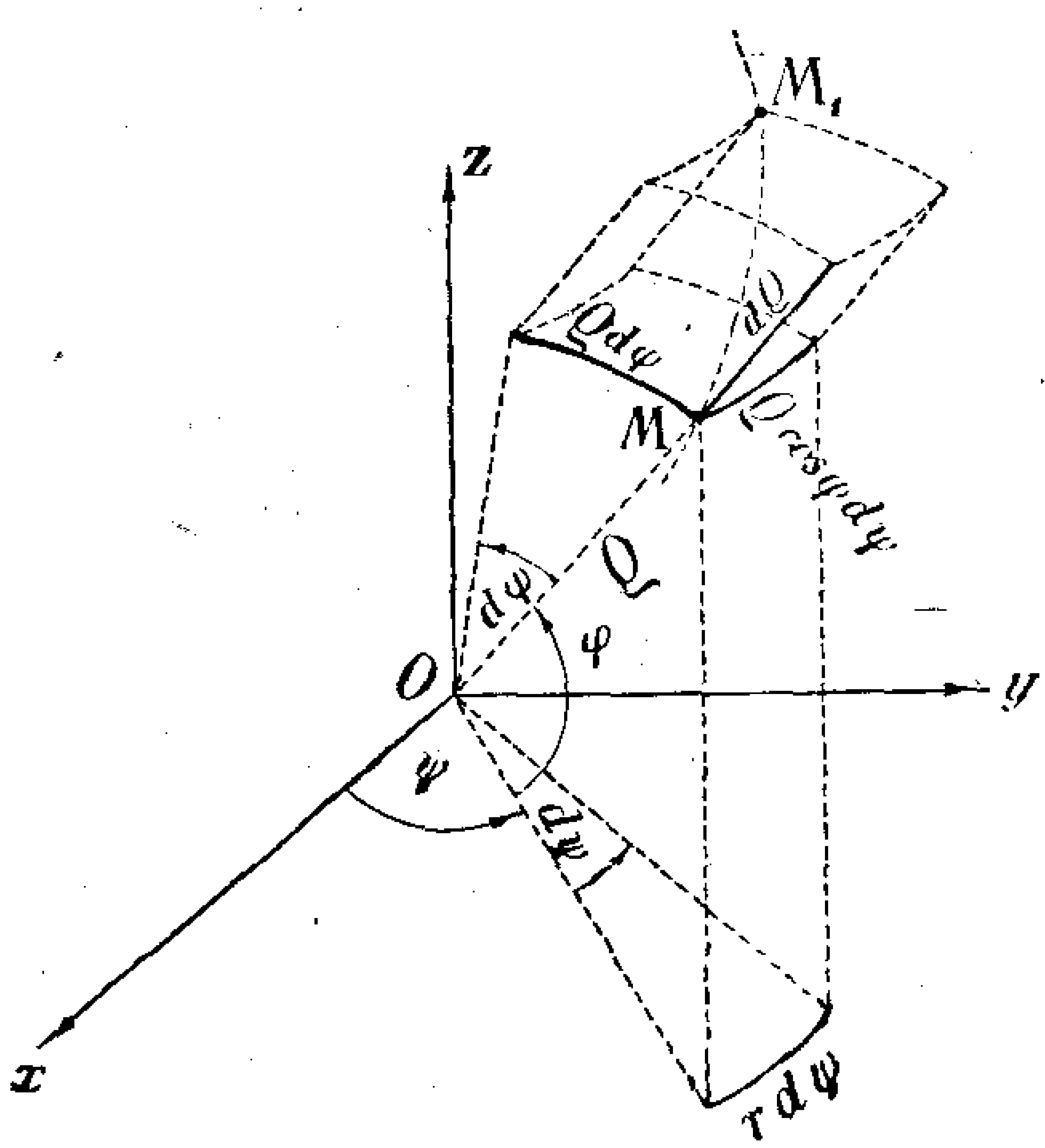
Сл. 104.

брзине v^2, може се одредити и геометриским путем. Када је кретање стору и израже- картовим коор- тама, онда еле- т пута, неке по- не тачке M,

$$ds = \overline{MM_1}$$

мо сматрати као оналу паралело- да чије су ивице y, dz, (сл. 103) стога

$$= dx^2 + dy^2 + \\ + dz^2,$$



Сл. 105.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Ако је кретање тачке M, изражено цилиндричним коор- ама, онда је (сл. 104)

$$ds = \overline{MM_1}$$

а

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Када је кретање изражено сферним координатама, он је (сл. 105)

$$ds = \overline{MM_1}$$

а

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cos^2 \varphi \; d\psi^2 + \varrho^2 d\varphi^2.$$

56. Димензије. — Величине са којима смо се бави у Кинематици су пут (longitudo $= l$), време (tempus $=$ брзину (velocitas $= v$) и убрзање (acceleratio $= u$).

Брзину и убрзање изводимо помоћу пута и времена, за се пут и време у Кинематици сматрају као *основне в личине,* а брзина и убрзање као *изведене величине.*

Образац, који нам показује из којих је основних вел чина образована нека изведена величина назива се *димензи они образац.*

Општи облик димензионог обрасца у Кинематици,

$$[l^r t^p],$$

где су r и p цели позитивни или негативни бројеви.

Димензију неке изведене величине уопште одређујем на тај начин што напишемо аналитички израз изведене в личине и у њему сменимо пут са l, време са t, онако как се те величине у аналитичком изразу јављају.

Тако је димензија за брзину

$$[v] = \left[\frac{l}{t}\right] = l\,t^{-1},$$

јер је

$$v = \frac{ds}{dt},$$

па смо пут сменили са l, а време dt са t.

А димензија за убрзање је

$$[u] = \left[\frac{l}{t^2}\right] = l\,t^{-2},$$

јер је

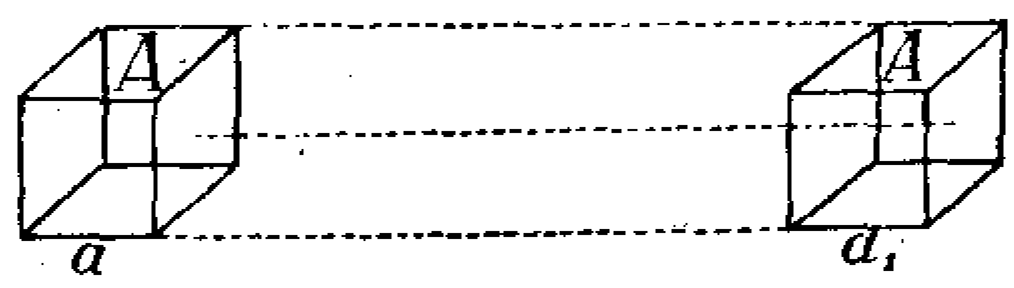
$$u = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Шести одељак

Кинематика крутог тела

---

57. Транслаторно кретање. — Када се неко круто тело креће тако, да све његове материјалне тачке описују једнаке и паралелне путање, онда кажемо да се тело креће *транслаторно*.



Сл. 106.

. **Пример.** — Тело A (сл. 106) креће се транслаторно, јер све његове тачке описују једнаке и паралелне путање за време кретања док тело дође из положаја a у положај a_1.

Из дефиниције транслаторног кретања излази да је транслаторно кретање неког тела исто што и кретање ма које његове тачке, те отуда транслаторно кретање неког тела сматрамо као кретање једне тачке. И при одређивању брзине и убрзања транслаторног кретања неког тела, примењујемо исте обрасце, као и при испитивању кретања тачке.

Ако је закон пута неког тела које се креће транслаторно

$$s = f\,(t),$$

онда је

$$v = f'(t)$$

и

$$u = f''\,(t).$$

Пример. — Израчунати убрзање жељезничког воза, који се крене из мира једнако убрзано и после 10 минути достигне брзину 12 m/sec.

Ако стално убрзање u означимо са k, онда је

$$\frac{dv}{dt} = k$$

$$v = \int_0^{600} k\ dt$$

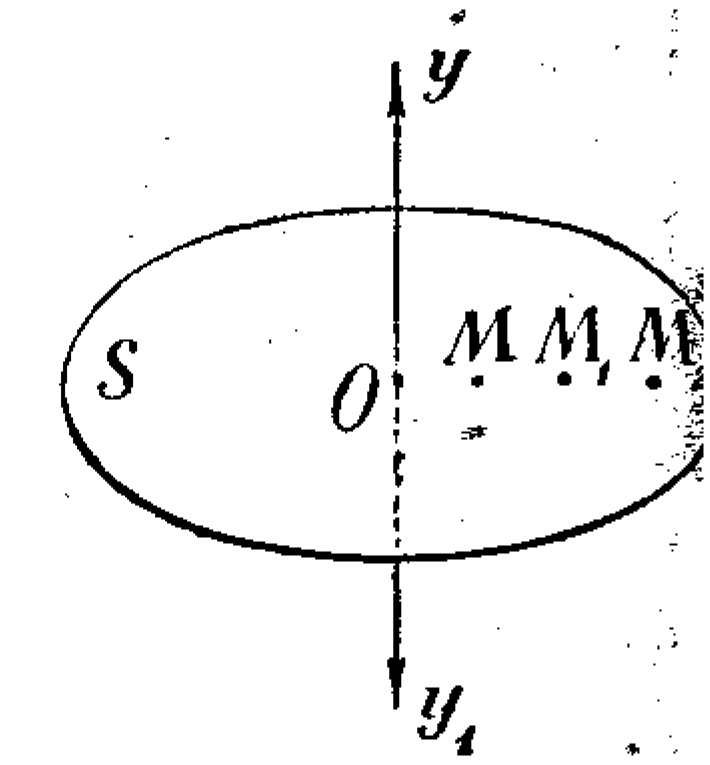
или

$$12m = 600\,k$$

одакле је транслаторно убрзање

$$k = u = 0{,}02\ m/sec^2.$$

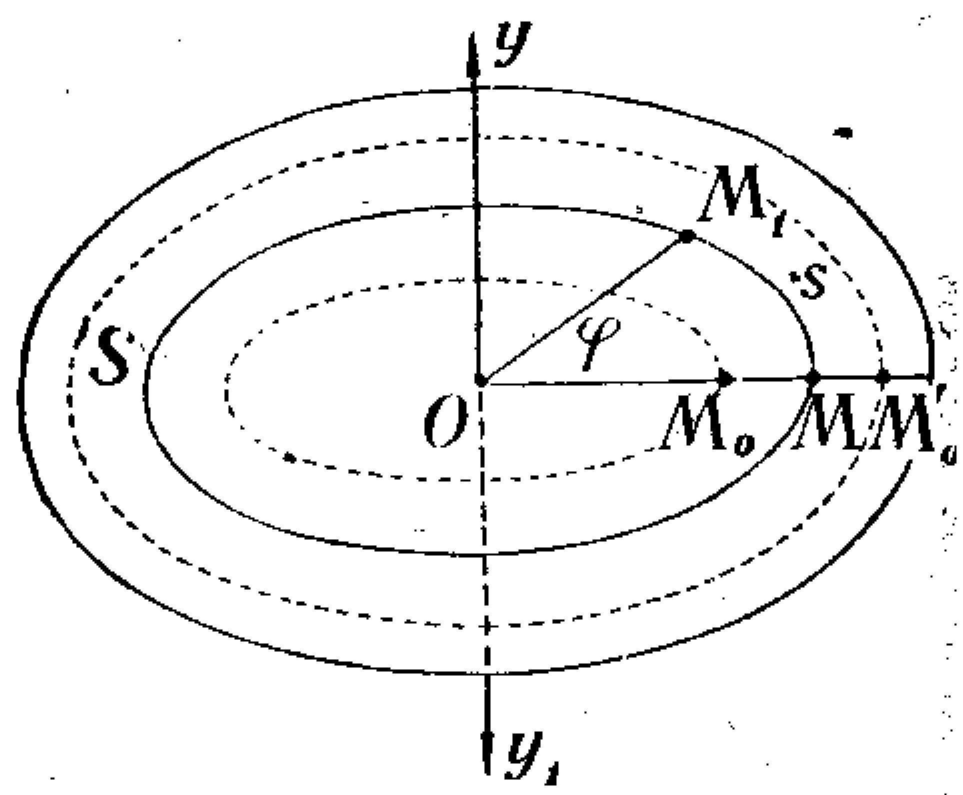
58. Ротационо кретање. — Кад се једно круто те S (сл. 107) обрће око непомичне осе yy_1, тако да свака његова тачка M, M_1, M_2, описује по известан круг, онда тело S врши *ротационо кретање.*



Сл. 107.

Поједине тачке тела S у колико су ближе средишту O у толико се спорије крећу, а у колико су даље од средишта у толико се брже крећу, јер за исто време не описују једнаке кружне путање.

Ако је $OM = 1$ (сл. 108) и тело S у времену t обрне око осе yy_1 тако да тачка M дође у положај M_1, онда је тачка M извршила пут $s = \sphericalangle \varphi$, те отуда као закон пута ротационог кретања добијамо



Сл. 108.

$$\varphi = f(t). \qquad (1)$$

Када функцију (1) диференцијалимо по времену добићемо брзину

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = f'(t) \ . \qquad (2)$$

Брзина ω назива се угловна брзина ротационог кретања.

Кад узмемо да тело у времену t изврши само један обртај онда је тачка M, чије је отстојање од средишта $OM = 1$ прешла пут 2π, а свака друга тачка M^o, чије је отстојање од средишта r, прешла је пут $2r\pi$.

Брзина тачке $\dot{M}$ је

$$\omega = \frac{2\pi}{t},$$

а брзина тачке M_0

$$v = \frac{2r\pi}{t}.$$

Како је време кретања исто, то је

$$\omega : v = \frac{2\pi}{t} : \frac{2r\pi}{t}$$

$$\omega : v = 1 : r$$

$$v = r\omega \qquad (3)$$

[от]kле добијамо теорему:

Теорема. — *Брзина ма које тачке једног ротационог тела [не]помичне осе једнака је производу из полупречника тачке и [уга]оне брзине.*

Како поједине тачке ротационог тела описују кружне [путa]ње, то је тангенцијално убрзање с обзиром на једна[чин]у (3)

$$u_t = r\dot{\omega} \quad , \qquad (4)$$

[а ц]ентрипетално

$$u_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad . \qquad (5)$$

Пример. — Израчунати константно угловно убрзање [точ]ка једног мотора, који се крене из стања мира и у току [1] минута обрне се 5000 пута.

У датом случају почетни услови кретања су $t_0 = 0$, [ω_0] $= 0$, $s_0 = 0$.

Кад константно угловно уррзање обележимо са k, онда је

$$\frac{d\omega}{dt} = k \quad ,$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \int_0^t k\, dt = kt,$$

[у]зимајући у обзир да је пређени пут једне тачке точка [на] отстојању 1,

$$\varphi = 5000 \cdot 2\pi = \int_0^{100} kt\, dt = \left| \frac{kt^2}{2} \right|_0^{100} = \frac{10000\,k}{2},$$

$$10000\,\pi = \frac{10000\,k}{2}$$

[от]kле

$$k = 2\pi.$$

Тачке точка на отстојању 1 од средишта имају угловн убрзање

$$k_1 = 2\pi,$$

а свака друга тачка на отстојању r има угловно убрзање

$$k = 2r\pi.$$

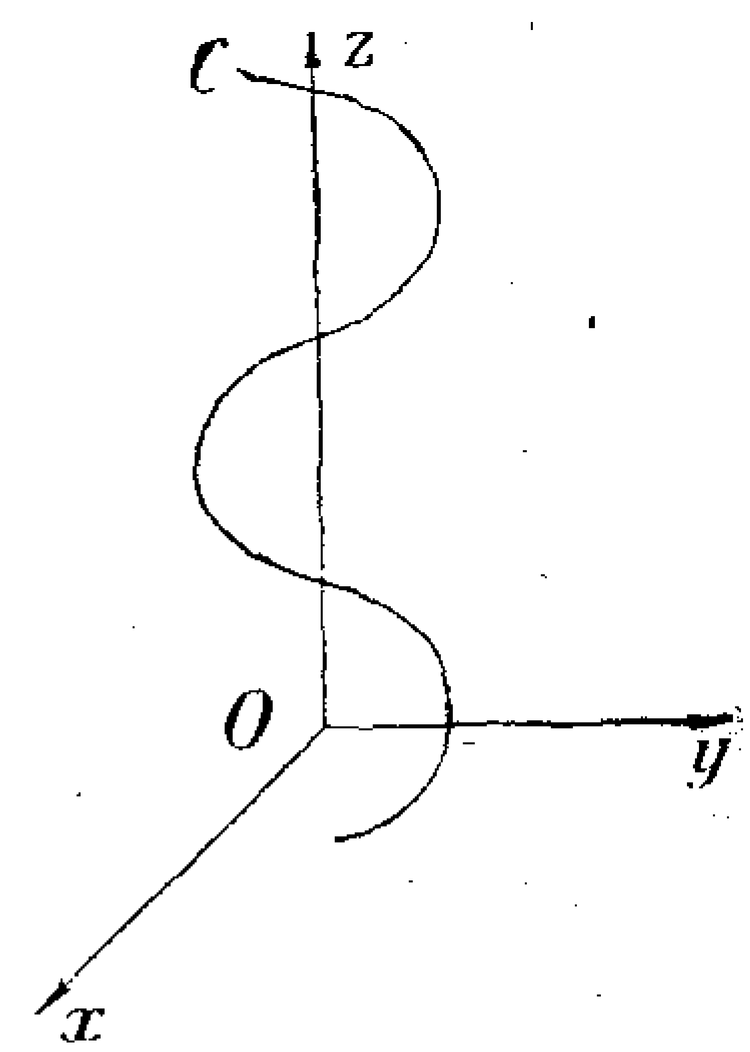
Точак се, дакле креће са убрзањем једног пуног угла или другим речима, точак се у току прве секунде окрене једанпут, у току друге секунде двапут, итд.

59. Хеликоидално кретање. — Када се неко круто тело креће тако, да у исто време врши транслацију и ротацију око извесне осе, онда се то тело креће *хеликоидално.*

Хеликоидално кретање је, дакле, сложено кретање из једног транслаторног и једног ротационог кретања.

Кад се тело креће хеликоидално, онда свака његова материјална тачка описује по једну криву линију *двојне кривине.*

Ако је размера угловне брзине према транслаториој стална, онда су криве *завртањ линије* или *елисе* (сл. 109).



Сл. 109

Када се тело K (сл. 110) креће једнако и хеликоидално дуж z-осе, па координате ма које тачке P обележимо са x, y, z, а раздаљину CP са r, онда је транслаторно кретање тачке P дуж z-осе

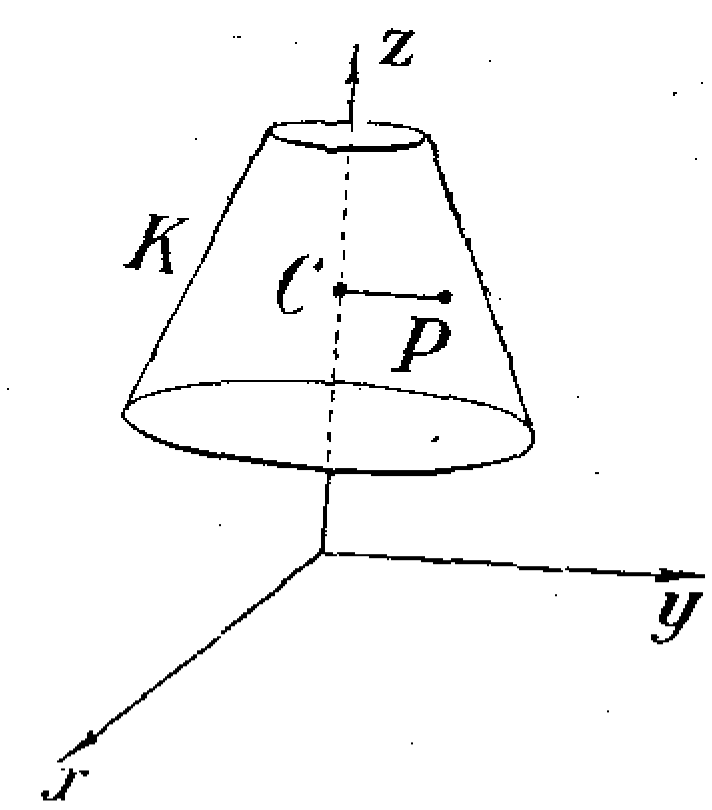
$$z = a + bt, \qquad (1)$$

а ротационо кретање око z-осе

$$x = r \cos kt$$
$$y = r \sin kt \qquad (2)$$

те отуда једначине хеликоиделног кретања ма које тачке P тела K, су

$$x = r \cos kt$$
$$y = r \sin kt$$
$$z = a + bt. \qquad (3)$$



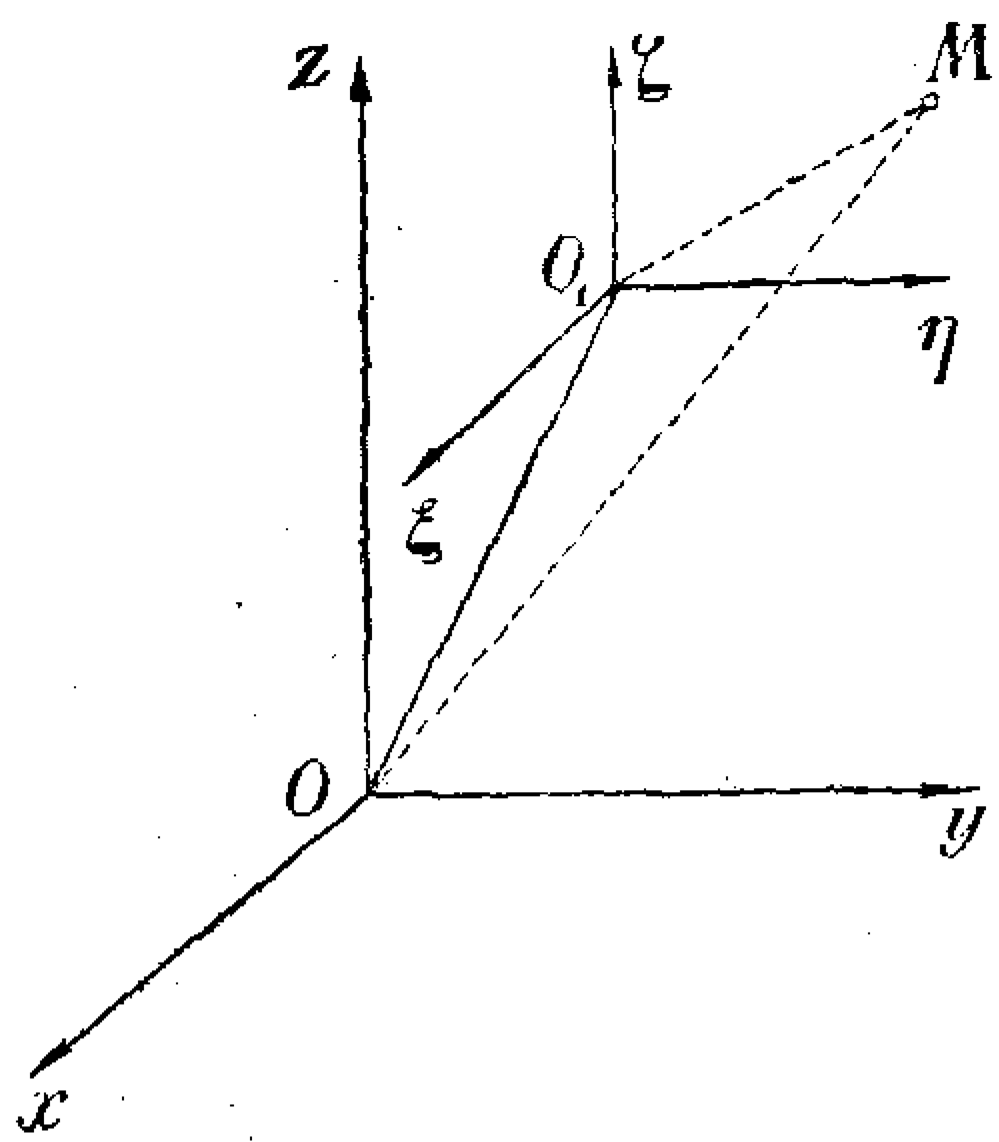
Сл. 110

Како су једначине (2), једначине елисе, то је и трајекторија тачке P извесна елиса.

СЕДМИ ОДЕЉАК

Релативно кретање

60. Релативно кретање тачке. — Ако имамо један непокретан координатни систем $Oxyz$ (сл. 111) и један покретан координатни систем $O_1\ \xi\ \eta\ \zeta$, и у покретном систему $O_1\ \xi\ \eta\ \zeta$ једну покретну тачку M која се креће праволиниски па узмемо да се у времену t координатни систем $O_1\ \xi\ \eta\ \zeta$ потпуно поклопио са координатним системом $Oxyz$, и да се покретна тачка M налази у њиховом заједничком почетку, а у времену t_1 да се покретни координатни систем и покретна тачка M налазе у положају као што слика показује, онда кретање O_1M које је извршила тачка M у покретној средини покретног координатног система $O_1\ \xi\ \eta\ \zeta$ називамо *релативно кретање*. Кретање OO_1 које је извршио почетак O_1 покретнога координатнога система. $O_1\ \xi\ \eta\ \zeta$ називамо *преносно кретање*; а кретање OM које је извршила тачка M у погледу сталног координатног система $Oxyz$ називамо *апсолутно кретање* тачке M.



Сл. 111.

Из слике видимо да је **пут**

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1},$$

или

$$\vec{s}\ \textit{рел} = \vec{s}\ \textit{апс} - \vec{s}\ \textit{пренос}.$$

Ако покретна тачка M и покретни координатни систем изврше, на исти начин, као што смо мало пре казали једно елементарно померење у току времена Δt, онда је

$$\Delta \vec{s}\ \textit{рел} = \Delta \vec{s}\ \textit{апс} - \Delta \vec{s}\ \textit{пренос},$$

или,

$$\frac{\Delta \vec{s}\ \textit{рел}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{s}\ \textit{апс}}{\Delta t} - \frac{\Delta \vec{s}\ \textit{пренос}}{\Delta t},$$

или, кад узмемо да $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{v}\ \textit{рел} = \vec{v}\ \textit{апс} - \vec{v}\ \textit{пренос}$$

одакле добијамо теорему:

Теорема. — *Релативна брзина једнака је геометриск[оj] разлици између апсолутне брзине и преносне брзине.*

Пример. Кров једне океанске лађе дугачак је 500m. [Н]а задњем крају лађе који је уз обалу, налази се један путни[к] који отпочне да се шета на крову лађе праволиниски и [у] смеру кретања лађе, чим лађа заплови. Ако лађа иде једн[о]ликом брзином 36 *km*, а путник 1,8 *km* на сат, израчунат[и] апсолутну брзину путника, као и пређени пут после пут[о]вања од 10 минута.

Према условима проблема је

$$v\ рел. = \frac{1800}{3600} = 0{,}5\ m/sec \qquad v\ пренн. = \frac{36000}{3600} = 10\ m/sec$$

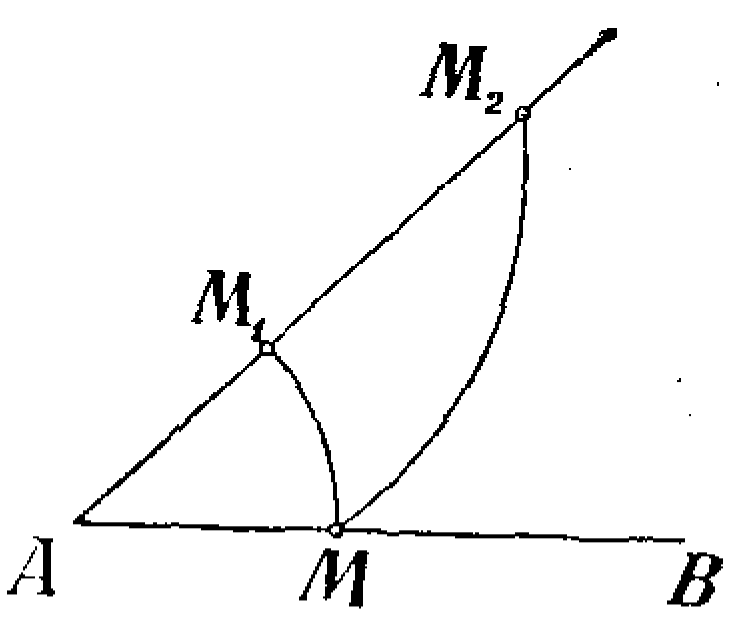
а према једначини (4) је тражена апсолутна брзина

$$v\ апс. = 10\,m/sec + 0{,}5\,m/sec = 10{,}5\,m/sec^{*}$$

а отуда пут, који је путник прешао у времену $t_0 = 0$ $t = 10$ минута, биће

$$s\ \ апс. = 10{,}5 \int_0^{600} dt = 10{,}5 \Big[\, t \,\Big]_0^{600} = 6300\, m.$$

Пример. — Права $A\,B$ (сл. 112), окреће се око своје утврђене тачке A сталном угловном брзином ω. У исто време тачка M креће се дуж праве $A\,B$, равномерном брзином v. Почетни услови кретања су $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ и тачка M се налази у раздаљини $1m$ од сталне тачке A. Тражи се једначина трајекторије покретне тачке M.



Сл. 112.

У датом проблему, после времена t права $A\,B$ се окрене за угао φ,

$$\varphi = \omega\, t,$$

а тачка M пређе пут r дуж праве $A\ B$,

$$r = v\, t.$$

Када се тачка M не би кретала дуж праве $A\,B$, а права $A\,B$ се окретала око A, онда би трајекторија тачке M била после времена t крива $M\,M_1$, а када се права не би окретала око своје тачке A, а тачка M кретала, онда би њена трајек-

* Геометриски збир брзина, у овом случају, је једнак алгебарском збиру јер брзине имају исти правац и смер.

ја била тамо дуж $M_1 M_2$; а када се и права и тачка крећу, је и трајекторија тачке M крива $M\ M_2$.

Када из једначина елиминишемо време t, добићемо једну трајекторије тачке M,

$$r = \frac{v}{\omega}\ \varphi.$$

Трајекторија је Архимедова спирала.

Пут $M\ M_1$ тачке M је *преносни пут*, пут $M_1\ M_2$ је *релативни пут*; а пут $M\ M_2$ је *апсолутни пут*.

III

Динамика

Осми одељак

Силе

Сила. — *Сваки узрок који може произвести, про-или спречити неко кретање назива се сила*.*

вачна сила земљина, услед које свако тело пу-ободно са извесне висине пада, занемаривши отпор са убрзањем g, назива се, као што нам је познато ериментални физике, *тежа* или *гравитација*.

д је једно тело спречено неком подлогом да падне у, онда оно врши известан притисак на подлогу. Тај к називамо *апсолутна тежина* тела, обележавамо , а изражавамо у килограмима.

ко је величина убрзања земљине теже g на разним земљине ширине различита, то ће и тежина једног ела на разним местима земљине ширине бити разли-

ко је апсолутна тежина Q неког тела у месту A где

* Постоји и следећа дефиниција силе: *Сваки узрок који може про-стање некога тела назива се сила.*

Разлика између земљине теже g разних места земљине ширине је и у обичним рачунима се занемарује, те према томе земљина тежа а и за велики део европских земаља је у округлој цифри 9.81 m/sec²

је тежа g, а Q_1 у месту B, где је тежа g_1, онда је, као ш
је утврђено у Експерименталној физици.

$$\frac{Q}{g} = m \tag{1}$$

и

$$\frac{Q_1}{g_1} = m; \tag{2}$$

одакле је

$$Q = mg, \qquad Q_1 = mg_1. \tag{3}$$

Стални количник m назива се *маса тела.*

Како притисак Q на подлози, који изражавамо килогра-мима, претставља величину извесне силе, која се састоји из производа масе m и убрзања g, то ми и величину сваке друге силе P, била она вештачка или природна, изражавамо у килограмима; а аналитички претстављамо, по Њутну,* про-изводом масе m и убрзања $\vec{u}$, те је тако уопште

$$\vec{P} = m\vec{u}. \tag{4}$$

Једначина (4) назива се још и основна динамичка диферен-цијална једначина, која игра врло велику улогу у Динамици.

У обрасцу (4) имамо две нове величине: силу и масу. Ако масу сматрамо као основну величину, онда је сила из-ведена величина и њена димензија је

$$[P] = [m\,l\,t^{-2}];$$

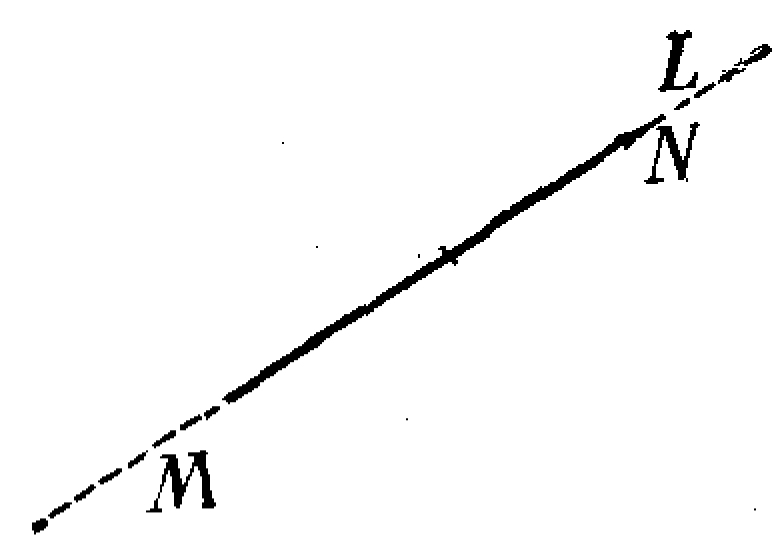
а ако силу сматрамо као основну величину, онда је маса изведена величина и њена днмензија је

$$[m] = [Pl^{-1}\,t^2].$$

Сл. 113

Свака сила има своју *нападну тачку*, своју *величину* или *интензитет*, као и свој *правац* и *смер.*

Ако нам дуж a (сл. 113) графички претставља величину једне тоне, онда је M нападна тачка силе $\overrightarrow{MN}$ (сл. 114), дужина MN је интензитет силе (2000 kg), линија L је правац силе $\overrightarrow{MN}$, а смер је стрелица која показује куда је сила управљена.



Сл. 114.

Сила је дакле, према реченим особинама вектор, и све оно што смо казали за векторе уопште важи и за силе.

---

* Isaac Newton (1642 — 1727) генијални енглески математичар, физичар, астроном и филозоф.

Силе чије дејство бива тренутно, називају се *тре-не силе.*

Такве се силе јављају при судару двају тела, при експло-барута и других гасова.

Силе чије дејство није тренутно већ траје краће или же време називају се *трајне силе.*

Такве су силе гравитација, привлачна снага магнета и ге природне и вештачке силе.

62. Слободно и неслободно тело. — Када при кре-у некога тела, његова брзина и убрзање не зависе ни каквих других услова већ само од силе која производи тање, онда се то тело назива *слободно тело.**

Пример. — Тело, које у безваздушном простору пада ед теже, је слободно тело.

Ако брзина и убрзање некога тела не зависе само од ле која произаоди кретање, већ и од другах услова, онда то тело назива, *неслободно тело.***

Пример. — Брзина једнога аутомобила не зависи само силе која производи кретање — мотора — него и од ађености пута, отпора ваздуха и других сила које успо-ају кретање и тиме умањују брзину.

63. Њутнови закони. — Ако на неку слободну мате-јалну тачку, чија је маса m, дејствује каква сила $\vec{P}$, онда према обрасцу (4) члана 61,

$$m\vec{u} = \vec{P}. \tag{1}$$

Кад узмемо да је $\vec{P} = 0$, онда је

$$m\vec{u} = 0,$$

ли

$$m\ddot{r} = 0,$$

ли

$$\ddot{r} = 0. \tag{2}$$

Ако једначину (2) интегралимо, биће

$$\dot{r} = \vec{a}, \tag{3}$$

* Кад је то случај са материјалном тачком, онда се она назива *сло-дна материјална тачка.*

** Исто важи и за материјалну тачку.

или

$$\vec{v} = \vec{a}.$$

Када једначину (3) интегралимо, добијамо

$$\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}. \qquad (4)$$

Из једначина (3) и (4) следује закључак: ако на не тело не дејствује никаква сила, тело остаје у стању ми или се креће једноликом брзином.*

Ако пројицирамо векторску једначину (4), узимајући су координате вектора

$$\vec{r}\,(x,\ y,\ z), \qquad \vec{a}\,(a_x,\ a_y,\ a_z), \qquad \vec{c}\,(c_x,\ c_y,\ c_z),$$

добићемо скаларне једначине кретања

$$\left.\begin{aligned} x &= a_x\, t + c_x \\ y &= a_y\, t + c_y \\ z &= a_z\, t + c_z. \end{aligned}\right\} \qquad 5$$

Када из једначина (5) елиминишемо време t, добијамо једначине трајекторије

$$\frac{x - c_x}{a_x} = \frac{y - c_y}{a_y} = \frac{z - c_z}{a_z},$$

које нам показују да је кретање праволиниско. Из свега напред изложенога изводи се први Њутнов закон:

Закон I. — *Свако тело остаје у стању мира или једноликог праволиниског кретања све дотле, док није утицајем сила принуђено да своје стање промени.*

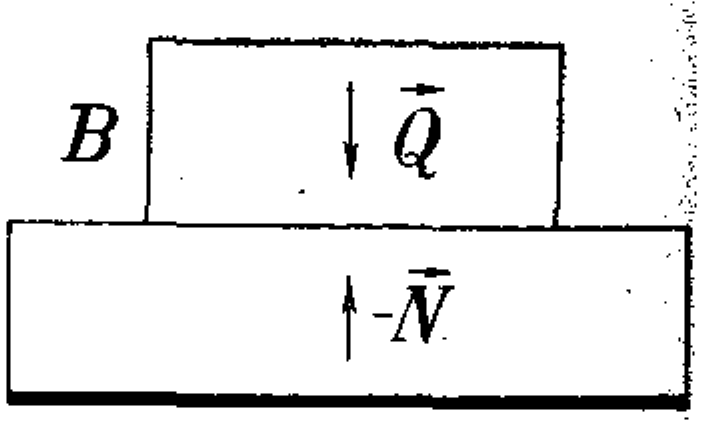
Када једначину (1) напишемо у облику

$$\vec{u} = \frac{1}{m}\vec{P},$$

онда из ње изводимо други Њутнов закон:

Закон II. — *Убрзање је пропорционално нападној сили и има правац и смер силе.***

Када на учвршћено тело A (сл. 115) ставимо тело B чија је апсолутна тежина Q, онда тело B притискује тело A силом $\vec{Q}$, а и тело A притискује у исто време тело B силом $\vec{N}$, која је исте величине и правца



Сл. 115

* У стању мира остаје кад узмемо да је у једначини (3) вектор $\vec{a} = 0$; а креће се једноликом брзином, кад узмемо да је $\vec{a} = const.$

** Коефициенат пропорционалности је $\frac{1}{m}$.

супротног смера силе $\vec{Q}$, те је

$$\vec{Q} + (-\vec{N}) = 0$$

стања оба тела остају неизмењена.

Ако тело А не би давало отпора у величини силе $\vec{Q}$ оно би се скрхало.

Сила $\vec{Q}$ назива се у овом случају *сила акције*, а сила $-\vec{N}$ *сила реакције* или *сила нормалнога отпора*.

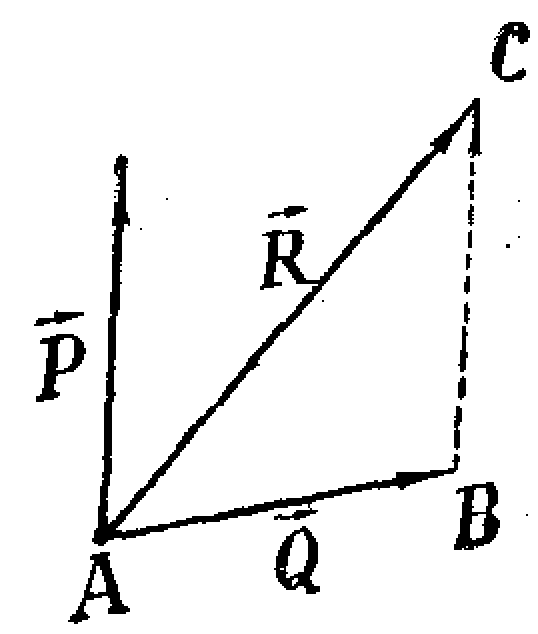
Њутнов трећи закон, закон о акцији и реакцији гласи:

Закон III. — *Дејство или акција је противно управљена и једнака реакцији, или, међусобна дејства двају тела су једнака а супротно управљена.*

Сем наведених трију закона, Њутн је дао још један закон, као додатак првоме закону, тако звани: *принцип независности дејства сила*, који гласи:

Ако на неко тело, дејствују две или више сила, саопштавајући свака телу по извесно убрзање, онда је њихово дејство исто, па било да силе дејствују наизменично једна по једна, било да све силе дејствују истовремено.

Пример. — Ако на тело А дејствују силе $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ (сл. 116) онда је према члану 23, њихова резултанта $\vec{R}$.



Сл. 116.

Када пустимо да на тело A дејствује само сила $\vec{Q}$, тело A ће се после времена t_n налазити у B, ако онда пустимо да дејствује сила $\vec{P}$, тело A ће се после времена t_n налазити у C.

Ако узмемо да истовремено дејствују обе силе $\vec{P}$. или $\vec{Q}$ онда ће се тело кретати дејством резултанте $\vec{R}$ и после времена t_n бити такође у C.

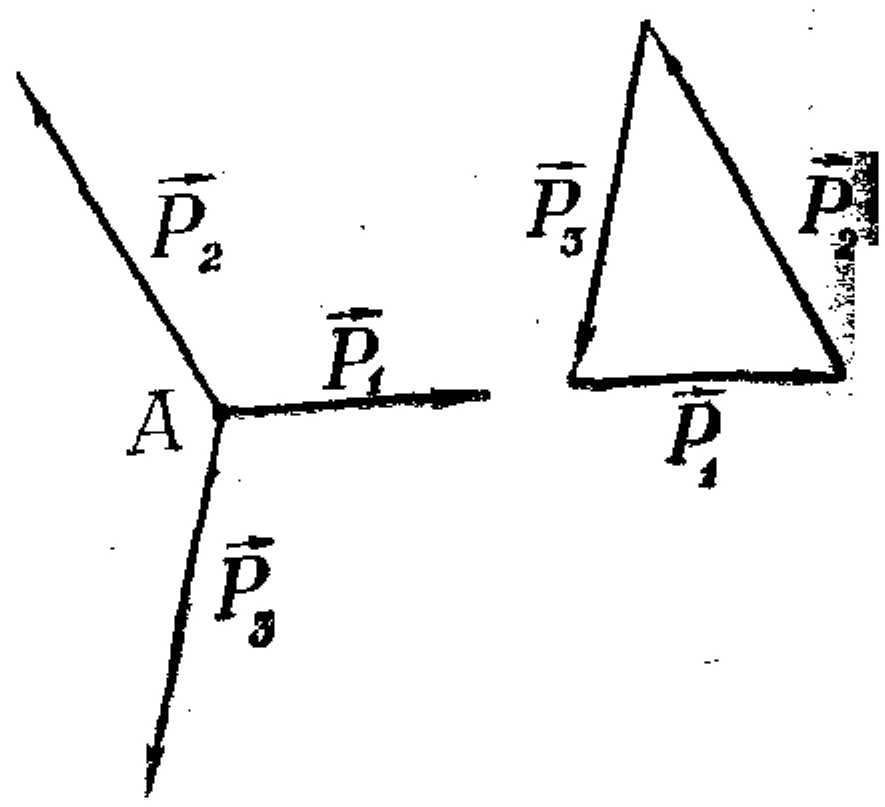
64. Чврста или еластична тела. — Кад на једно тело дејствују две или више сила, онда кажемо да на то тело дијствује систем сила.

Кад на неко круто тело, које је у миру дејствује један систем сила па тело и даље остане у миру, или кад на једно круто тело, које је у кретању дејствује систем сила па се то тело и даље креће истом брзином којом се кретало и пре дејства сила, онда кажемо да је систем сила у *равнотежи*, или да се силе узајамно *потиру* односно *поништавају*.

Сила која може заменити дејство двеју или више сила назива се *резултанта* двеју или више сила.

Из дефиниције равнотеже и резултанте добијамо закон:

Кад су две или више сила у равнотежи њихова је резултанта једнака нули.

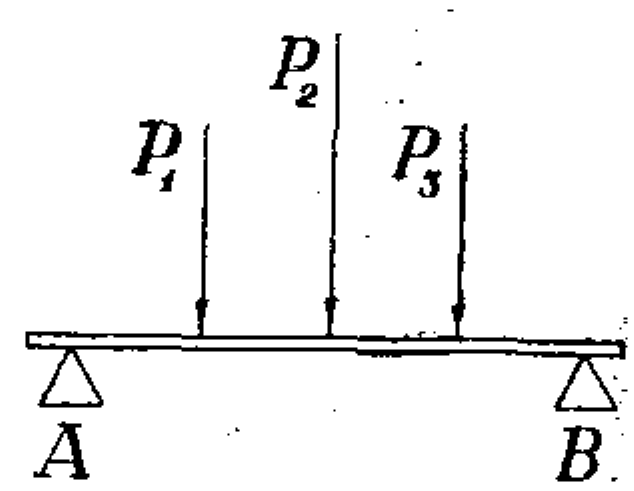


Сл. 117.

Пример. — Силе $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, (сл. 117) које нападају материјалну тачку A су у равнотежи јер је њихова резултанта једнака нули, односно њихов троугао сила је затворен.

Силе које владају између појединих материјалних тачака каквог тела и не дозвољавају њихово распадање називају се *унутарње силе, напони* или *отпори*; а све друге силе што нападају неко тело зову се *спољне силе*.

Кад имамо једну греду на два ослонца A и B (сл. 118) од неког грађевинског материјала, па пустимо извесне силе P_1, P_2, P_3, да дејствују, онда све дотле док је јачина спољних сила једнака или мања од унутарњих сила греде, облик греде неће се променити јер су спољне силе мање или у равнотежи са унутарњим. Али чим су спољне силе веће од унутарњих, греда ће почети да се савија.



Сл. 118.

Опитом је утврђено да се силе P_1, P_2, P_3 могу тако одмерити, да кад престану да дејствују греда опет заузме свој првобитни облик.

Тело које има особину да под дејством извесних сила промени свој облик, а чим силе престану оно опет дође у свој првобитни положај, назива се *еластично тело*.

Граница, до које се неко тело може оптеретити, па када се терети уклоне, да опет заузме свој пређашњи облик назива се граница еластичности.

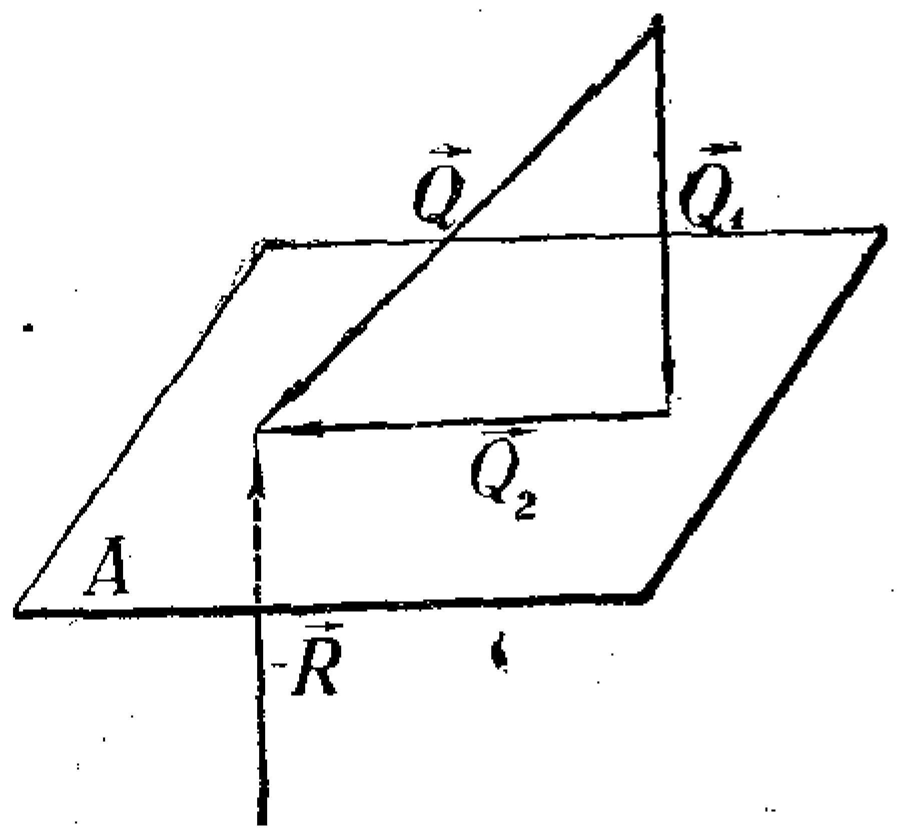
Еластична су тела дрво, камен, гвожђе, челик, бетон и други грађевински материјал.

Границе њихове еластичности су потпуно опитима испитане и у таблице сложене.

Круто тело онако како смо га дефинисали у члану у природи не постоји, али се велики део теорије у механици изводи узимајући у обзир такво идеално круто тело. А после се та теорија примењује у границама еластичности на еластична или чврста тела.

Кад сила акције дејствује управно на неко тело, као што смо мало пре узели (сл. 115) онда и сила реакције дејствује такође управно на раван на коју дејствује сила акције.

Ако сила $\vec{Q}$ дејствује косо на неко тело A (сл. 119) па силу $\vec{Q}$ разложимо на две компоненте; $\vec{Q}_1$ нормалну на раван тела A и $\vec{Q}_2$ која пада у раван тела А, онда видимо да је само сила $\vec{Q}_1$ сила акција, јер она само дејствује да се облик тела A измени, а сила $\vec{Q}_2$ тежи да тело A стави у кретање, те отуда и реакција $-\vec{R}$ тела A мора бити по правцу и величини једнака а супротног смера само сили $\vec{Q}_1$.



Сл. 119.

Кад сила дејствује на какву криву линију или криву површину, онда за раван на коју сила дејствује, узимамо оскулаторну односно тангенцијалну раван у нападној тачки и одређујемо реакције према томе да ли сила дејствује косо или управно на поменуте равни.

65. Трење. — Како је свако тело уопште више или мање шупљикаво односно рапаво, то при кретању једног тела преко другог јавља са известан отпор, који спречава кретање. Тај отпор назива се трење или *сила трења.*

Како сила трења успорава кретање, то она има исти правац а супротан смер силе, која производи кретање.

Величина трења T двају тела уопште не зависи, као што је то опитом утврђено, од величина површина којима се тела додирују, већ од рапавости додирних површина и нормалног отпора N.

Француски научник Кулон* испитивао је експериментаним путем трења разних тела, па је нашао да је трење приближно пропорционално нормалном отпору N, односно нашао је да је количник

$$\frac{T}{N} = f \tag{1}$$

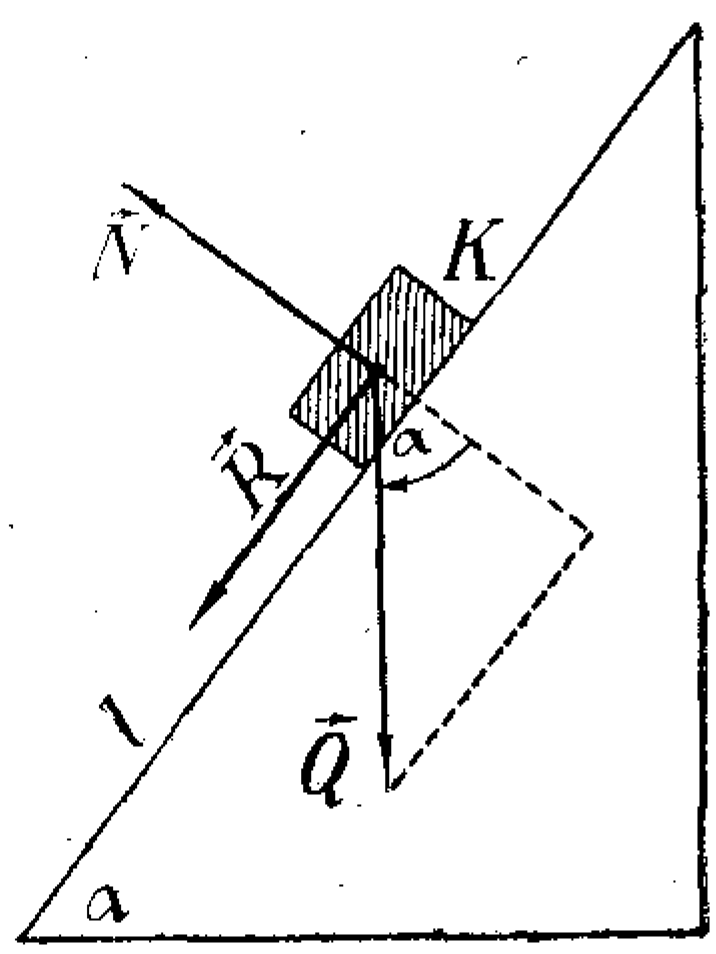
скоро сталан, тј. у малим границама променљив.

Количник f назива се *коефицијенат трења*.

Коефицијенти трења за разна тела и разна кретања различити су.

Ми ћемо сада видети како се одређује коефицијенат трења при кретању клизања.

Ако раван l неког тела (сл. 120) нагнемо према хоризонталној равни за изветан угао α онда ће тело K клизити низ раван l. Како је у том случају резултанта сила $\vec{Q}$ и $\vec{N}$ сила $\vec{R}$ услед чијег дејства тело K клизи, то излази да је сила $\vec{R}$ по интензитету и правцу једнака сили трења $\vec{T}$ а супротног смера, те је отуда



Сл. 120.

$$T = R = Q \sin\alpha. \tag{2}$$

А како је

$$N = Q \cos\alpha \tag{3}$$

то је коефицијенат трења

$$f = \frac{T}{N} = \frac{Q \sin\alpha}{Q \cos\alpha} = tg\,\alpha \tag{4}$$

а трење

$$T = f\,N. \tag{5}$$

Угао α у овом случају назива се угао трења. Коефицијенат трења једнак је, дакле, тангенсу угла трења.

Таблица (сл. 121.) даје нам коефициенте трења при клизању наведених тела.

* Coulomb Charles (1736 — 1806) велики француски научник.

НАЗИВ ТЕЛА	коефициенат трења f
Челик преко гвожђа	0,1
Дрво преко древета	0,4 — 0,2
Дрво преко камена	0,3
Челик преко леда	0,014
Ливено гвожђе преко бронзе	0,16

Сл. 121.

Пример. — Колики је отпор трења, који се јавља при вучи по леду челичних санки, чија тежина са теретом износи 100 kg.

У датом случају је

$$N = 100\ kg.$$

а према таблици

$$f = 0{,}014$$

те је отуда тражено трење

$$T = f\,N = 0{,}014 \cdot 100 = 1{,}4\ kg.$$

66. Отпор ваздуха. — Сем отпора трења, који се јавља кад се једно тело креће преко другог услед рапавости тела, имамо још отпор ваздуха.

Величина отпора ваздуха зависи од брзине којом се тело креће, од густине самог ваздуха и од површине тела на коју ваздух делује кад се тело креће.

Како отпор ваздуха успорава кретање, то сила отпора ваздуха има исти правац а супротан смер брзине кретања. Површина на коју делује ваздух при кретању сматра се она површина тела на коју правац брзине стоји нормално.

Величина отпора ваздуха W одређује се експерименталним путем; а општи образац до кога се долази експерименталним путем је

$$W = \psi\ \mu\ F\ v^2$$

где је ψ извесна константа, μ густина ваздуха, F површина тела на коју делује ваздух при кретању, а v^2 брзина тела којом се креће.

67. Апсолутни и терестрични систем мера. — Маса једнога кубнога сантиметара чисте дестиловане воде на температури + 4° *C*, на морској површини, као што нам је познато из Експерименталне физике претставља *грам-масу*, а маса једнога кубнога десиметра претставља *килограм-масу*.

Сила која би грам-маси давала убрзање 1 cm/sec^2, *назива се дин (dyne).*

Сила која грам-маси даје убрзање 981 cm/sec^2 *назива се сила грам-тежине.*

Како сила једнога дина даје убрзање грам-маси 1 cm/sec^2, а сила грам - тежине 981cm/sec^2, то између силе грам-тежине и силе једнога дина, постоји однос

$$\text{Сила } 1\, gr = 981 \text{ дин.} \qquad (1)$$

Сила која би килаграм-маси дивала убрзање 10m/sec^2 *мегадин (megadyne).*

Сила која килограм-маси даје убрзање 9,81m/sec^2 *је сила килограм-тежине.*

Према дефиницији, између силе мегадина и силе килограм-тежине, постоји пропорција.

$$1 \text{ мегадин} : 1\, kg = 10 : 9{,}81,$$

те отуда добијамо образац

$$1 \text{ мегадин} = 1{,}02\, kg. \qquad (2)$$

Како сила једнога дина даје 1 грам-маси убрзање 1cm/sec^2; а сила мегадина даје 10^3 грам-маси убрзање 10^3 cm/sec^2, то је

$$10^6 \cdot \text{дин.} = \text{мегадин.} \qquad (3)$$

Помоћу образаца (1), (2) и (3) можемо једну дату силу изражавати другом силом

Пример. — Изразити у динове силу $P = 1\, kg$.

Према обрасцу (1)

$$P = 981000 \text{ дина},$$

или

$$P = 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ дина}.$$

Како сила једног дина има сталну вредност, јер су сантиметар, грам-миса и секунда потпуно утврђене величине то је дин јединица силе *апсолутног система мера,* који се скраћено обележава са (*C. G. S*).*

* Када узмемо за јединицу дужине метар, за масу килограм-масе, а за време секунду, онда апсолутни систем мера скраћено обележавамо са (M. K. S), а кад узимамо метар, тону и секунду онда са (M. T. S).

Сила грам-тежине има вредност само за земљину ...шину, па и ту зависи од земљине теже, зато је сила ...тежине јединица силе *терестричног** *система мера*. Апсолутни систем мера назива се још и *физикални си...мера*, а терестрични систем мера назива се и *технички ...ем мера*.

Технички систем мера скраћено се обележава са ($M.\vec{F}.S$) ...су јединице метар, килограм-тежине и секунда. $\vec{F}$ ...ставља силу изражену килограмима.

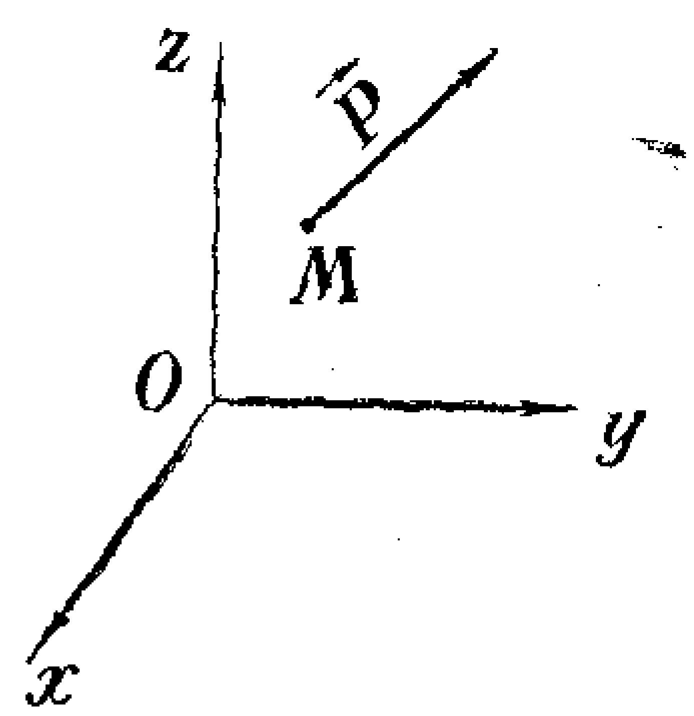
Осми одељак

...инамика слободне материјалне тачке.

68. Диференцијалне и коначне једначине кретања ...бодне материјалне тачке. — Како је сваком кретању, ...што смо видели у члану 61, узрок извесна сила, то се ...инамици јављају два важна проблема.

Први је проблем, да се нађе коначна једначина кретања ...е материјалне тачке када је позната сила која на њу дејствује; а други је да се нађе сила кад ...познато кретање материјалне тачке.

Када се нека материјална тачка M ...122) чија је маса m, креће у про...ору дејством силе $\vec{P}$, онда је једначина ...етања материјалне тачке M у вектор...ом облику



Сл. 122.

$$\vec{P} = m\vec{u} \qquad (1)$$

...да једначину (1) пројицирамо, обеле...авајући пројекције силе са P_x, P_y, P_z; а пројекције убрзања $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, добићемо диференцијалне једначине кретања ...чке M у скаларном облику

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= P^x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= P_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= P_z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

* Називи терестрични долази од француске речи terrestre, који значи ...емаљски. У наведеном случају значи: систем мера који важи само за земљи-

Пројекције силе: P_x, P_y, P_z у најопштијем случају су фу[нк]ције од: $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ и t.

Како су једначине (2) систем симултаних диференцијал[них] једначина другог реда, то кад их интегралимо, њихо[ви] интеграли садржаваће 6 произвољних констаната $C_1, C_2, \ldots C_6$.

Када произвољне константе одредимо помоћу почетн[их] услова кретања: $x_0, y_0, z_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ што одговара[ју] почетном времену $t = t_0$, онда добијамо коначне једначи[не] кретања материјалне тачке M у облику

$$\begin{aligned} x &= f_1\,(t) \\ y &= f_2\,(t) \\ z &= f_3\,(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

Ако је кретање материјалне тачке у равни, онда су пр[о]јекције силе и убрзања на z-осу једнаке нули, па систем си[]мултаних диференцијалних једначина (2) гласи:

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= P_x \\ m\,\frac{d^2y}{dt^2} &= P_y, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

а коначне једначине кретања

$$\begin{aligned} x &= f_1\,(t) \\ y &= f_2\,(t). \end{aligned}$$

Кад је кретање материјалне тачке у равни и праволи[]ниско, онда обична диференцијална једначина кретања је

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = P_x; \qquad (5)$$

а коначна једначина кретања

$$x = f\,(t).$$

Пример. — Наћи коначне једначине праволиниског кретања материјалне тачке, када је сила која производи кретање

$$P_x = mt, \qquad (6)$$

а почетни услови кретања $t_0 = 1$, $v_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Диференцијална једначина кретања материјалне тачке је према једначинама (5) и (6)

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = mt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t$$

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = t$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = t\, dt,$$

$$\frac{dx}{dt} = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C_1, \tag{7}$$

$$\int dx = \int \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right) dt,$$

одакле је

$$x = \frac{t^3}{6} + C_1\, t + C_2 \tag{8}$$

Када у једначини (7) сменимо $\frac{dx}{dt} = v$ и t датим почетним условима кретања, биће:

$$0 = \frac{1}{2} + C_1,$$

одакле је

$$C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Ако у једначини (8) сменимо C_1 нађеном вредношћу, и x и t датим почетним вредностима кретања, добићемо

$$1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + C_2,$$

одакле је

$$C_2 = \frac{4}{3}.$$

Када у једначини (8) сменимо интеграционе константе C_1 и C_2 нађеним вредностима, добићемо коначну једначину кретања материјалне тачке, односно закон пута

$$x = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} + \frac{4}{3}. \tag{9}$$

При одређивању коначних једначина кретања мат[е]ријалне тачке, кад је дата сила која производи кретање у рав[ни] имамо четири главна случаја.

Случај I. — Интензитет силе која производи крета[ње] је стална величина

$$P = mk, \tag{10}$$

односно

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mk,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k. \tag{11}$$

Када једначину (11) сукцесивно двапут интегралимо биће

$$\frac{dx}{dt} = \int k \, dt = kt + C_1,$$

$$x = \int (kt + C_1) \, dt = \frac{k}{2} t^2 + C_1 t + C_2, \tag{12}$$

или

$$x = \frac{k}{2} t^2 + C_1 t + C_2 \tag{13}$$

Добивена једначина (13) претставља општи тип коначне једначине кретања материјалне тачке, које производи сила чији је интензитет стална количина. Интеграционе константе C_1 и C_2 се одређују из почетних услова кретања.

Случај II. — Интезитет силе је функција положаја (пута),

$$P = m \varphi(x), \tag{14}$$

односно

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \varphi(x)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x) \tag{15}$$

Једначину (15) можемо написати и у облику

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \varphi(x) \cdot \frac{dx}{dt},$$

или

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \varphi(x) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \varphi(x)\,dx$$

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = \int\varphi\,(x)\,dx = \psi\,(x) + C_1,$$

$$v^2 = \psi\,(x) + C_1$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\psi\,(x) + C_1},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\psi(x) + C_1}} = dt \qquad (16)$$

најзад кад интегралимо једначину (16) добићемо

$$t = \int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\psi\,(x) + C_1}} + C_2. \qquad (17)$$

Интеграционе константе C_1 и C_2 одређују се из почетних услова кретања.

Случај III. — Сила је функција времена

$$P = m\,f\,(t) \qquad (18)$$

односно

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\,f(t),$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\,(t). \qquad (19)$$

Кад једначину (19) напишемо у облику

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = f\,(t)$$

онда је

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f\,(t)\,dt$$

а

$$\frac{dx}{dt} = \int f\,(t)\,dt = \varphi\,(t) + C_1$$

или најзад

$$x = \int\left\{\varphi\,(t) + C_1\right\}dt = \psi\,(t) + C_1 t + C_2.$$

Константе C_1 и C_2 одређују се из почетних услова кретања.

Случај IV. — Сила зависи од брзине

$$P = m f(v) \tag{20}$$

односно

$$m \frac{dv}{dt} = m f(v)$$

или

$$\frac{dv}{dt} = f(v). \tag{21}$$

Кад једначину (21) напишемо у облику

$$dt = \frac{dv}{f(v)} \tag{22}$$

а затим интегралимо биће

$$t = \int \frac{dv}{f(v)} + C. \tag{23}$$

Како је

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad dx = vdt,$$

то једначину (22) можемо написати у облику

$$dx = \frac{vdy}{f(v)}$$

одакле је

$$x = \int \frac{vdv}{f(v)} + C_1. \tag{24}$$

Интеграционе константе C и C_1 се одређују из почетних услова.

Како је одређивање коначних једначина кретања неке материјакне тачке, кад је дата сила која производи кретање скопчано са интеграљењем диференцијалних једначина, то је оно могуће само у извесним случајевима, док напротив одређивање силе кад је познато кретање је врло лако и увек могуће.

Кад нам је дато кретање неке материјалне тачке једначинама

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t)$$
$$z = f_3(t)$$

где су x, y z пројекције вектора положаја покретне тачке, онда су пројекције силе која производи кретање

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\,f_1''(t) = P_x$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = m\,f_2''(t) = P_y$$

$$m\,\frac{d^2z}{dt^2} = m\,f_3''(t) = P_z$$

ама сила је

$$P = \sqrt{P_x{}^2 + P_y{}^2 + P_z{}^2}.$$

равац силе P је

$$\frac{P_x}{P} = \cos\alpha, \qquad \frac{P_y}{P} = \cos\beta, \qquad \frac{P_z}{P} = \cos\gamma,$$

е су: α, β, γ, углови које сила P заклапа са координатним ама: x, y, z.

Ако је кретање криволиниско у равни, онда сила има ве компоненте, а ако је кретање праволиниско и у равни нда само једну.

Пример. — Израчунати силу, која дејствује на матери- лну тачку масе m, када се тачка креће праволиниски по акону

$$s = kt^2 + t.$$

ад дату једначину диференцијалимо двапут биће

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2k;$$

ко добивену диференцијалну једначину помножимо са ма- ом имаћемо

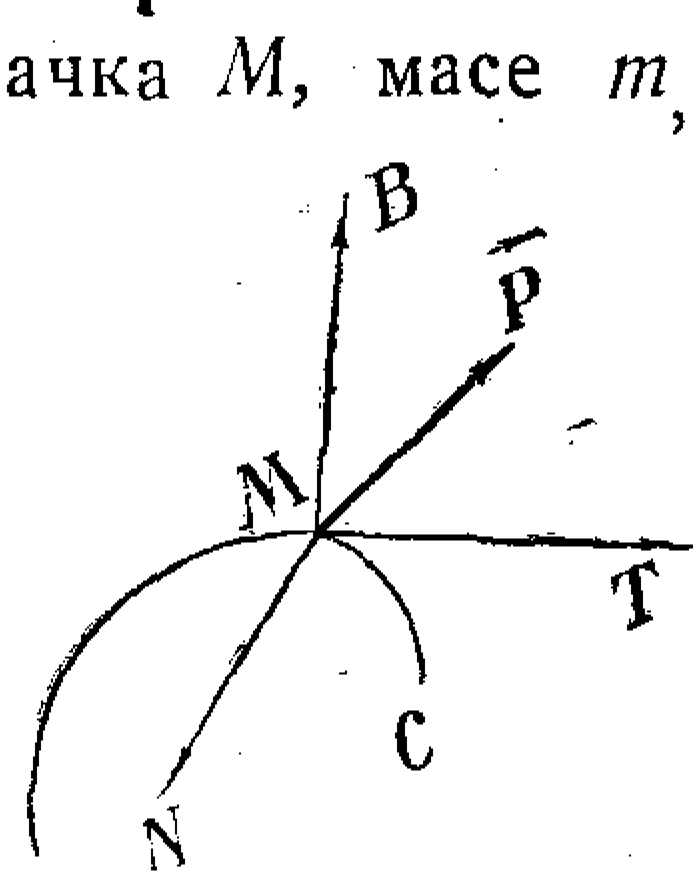
$$m\,\frac{d^2s}{dt^2} = 2\,m\,k$$

дакле је тражена сила

$$P = 2\,m\,k$$

69. Природне или Ајлерове једначине кретања мате- ријалне тачке.* — Када се материјална тачка M, масе m, креће под дејством силе $\vec{P}$ и описује тра- екторију криву C (сл. 123), диференци- цијална једначина кретања материјалне тачке је као што смо у претходном члану видели

$$\vec{P} = m\,\vec{u}. \qquad (1)$$



Сл. 123.

Ако за сваки положај покретне тачке M, конструишемо правоугли координатни систем, чије су осе тангента, нормала и бино… трајекторије, онда су пројекције једначине (1) на наве… координате.

$$P_T = m\frac{dv}{dt} = P\cos(\vec{P},T) \qquad (2)$$

$$P_N = m\frac{v^2}{\varrho} = P\cos(\vec{P},N) \qquad (3)$$

$$P_B = 0. \qquad (4)$$

Пројекција на бинормалу је једнака нули, јер убр… као што смо видели у члану 47, лежи у оскулаторној ра… и не даје компонту у правцу бинормале.

Једначине (2), (3), и (4) називају се природне или А… рове једначине кретања материјалне тачке.

Природне једначине називају се зато што смо их доб… када смо једначину (1) пројицирали на триедар оса, к… није произвољно узет, већ чији почетак одређује тачка к… се креће; а Ајлерове једначине називају се зато што их… Ајлер први увео у Механику.

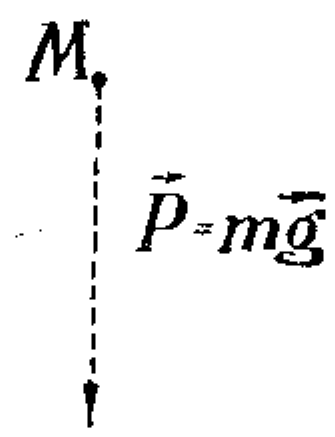
Триедар оса, који граде тангента нормала и бинорм… назива се *природни триедар оса, или природни координат… систем.*

70. Степени слободе кретања. — Када се нека ма… теријална тачка може кретати произвољно у простору, прем… дејству силе, онда нам је положај тачке познат, када знам… три њене координате x, y z као функције времена t, и м… кажемо у томе случају тачка има *три степена слободе кре… тања.*

Ако се тачка може кретати само по извесној површин… у равни, онда нам је њен положај познат када знамо две… њене координате; а ако се тачка може кретати само по пра… вој линији у равни, онда нам је њен положај потпуно познат… кад знамо једну њену координату као функцију времена t… У првом случају кажемо тачка има *два степена слободе кре… тања*, а у другом случају *један степен слободе кретања.*

Како је положај једног крутог тела у простору, према… члану 14, одређен са шест независних кордината, то круто… тело може имати *шест степена слободе кретања.*

71. Слободан пад материјалне тачке. — Када сло-
на материјална тачка M (сл. 124.) масе m, пада са из-
не висине h у безваздушном простору, онда
која производи кретање је земљина тежа.
Правац и смер силе је сталан и управљен к
тру земље. Кретање је дакле праволиниско.
Векторска једначина, једначине слободнога



Сл. 124.

а узимајући обзир убрзање земљине теже $\vec{g}$, је

$$\vec{P} = m\vec{g}. \qquad (1)$$

Како је кретање праволиниско и вертикално то су про-
ције силе $\vec{P}$ на коорднинате осе x и y једнаке нули, а про-
ција на z-оси је

$$Z = m\, g,$$

акле добијамо диференцијалну једначину слободног пада

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg,$$

и, скративши обе стране једначине са m, и обележевајући
т са s место са z,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g$$

ли

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = g$$

ли

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right) = g\,dt, \qquad (2)$$

дакле интеграљењем добијамо

$$\frac{ds}{dt} = gt + v_0 \qquad (3)$$

или

$$v = v_0 + g\,t \qquad (4)$$

де је v_0 интеграциона константа.

Кад једначину (3) интегралимо биће

$$s = \frac{g}{2}t^2 + v_0\,t + s_0\,. \qquad (5)$$

Кад узмемо да су почетни услови кретања $t_0 = 0$,
$v_0 = 0$, $s_0 = 0$ и одредимо произвољне константе v_0 и s_0
добићемо коначну једначину слободног пада материјалне
тачке.

$$s = \frac{g}{2}\, t^2 \qquad (6)$$

Како је код слободног пада висина h исто што и пр
ђени пут s, то једначину (6) можемо написати и у обли

$$s = h = \frac{g}{2}\, t^2. \qquad (7)$$

Кад једначину (7) помножимо са $2\,g$, биће

$$2\,g\,h = g^2\,t^2; \qquad (8)$$

а кад једначину (7) диференцијалимо по времену t, имаће

$$v = g\,t \qquad (9)$$

или

$$v^2 = g^2\,t^2, \qquad (10)$$

или с обзиром на једначину (8)

$$v^2 = 2\,gh, \qquad (11)$$

одакле добијамо најзад

$$h = \frac{v^2}{2g} \qquad (12)$$

Пример. — Израчунати време за које ће пасти једно тешко тело пуштено из аероплана са висине од 245,25 *m* као и брзину коју ће имати тело при паду на земљу, не водећи рачуна о отпору ваздуха.

Према обрасцу (8) тражено време је

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 245{,}25}{9{,}81}} = 5\sqrt{2}\ sec.$$

а према једначини (11)

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 245{,}25} = 69{,}38\ m/sec.$$

Пример. — Израчунати пут који је неко тешко тело прешло при слободном паду, занемаривши отпор ваздуха, кад је при паду на земљу имало брзину 117,72 m/*sec.*

Према обрасцу (12) тражени пут је

$$s = \frac{(117{,}72)^2}{2 \cdot 9{,}81} = 706{,}32\ m.$$

72. Хитац на доле и хитац на горе. — Када неко тело бацимо вертикално на доле са извесне висине и са почетном брзином v_0, онда је то *хитац на доле*; а кад неко тело бацимо вертикално у вис са извесном почетном брзином, онда је то *хитац на горе*.

Према обрасцу (4) из претходног члана брзина хитца на доле је

$$v = v_0 + gt \qquad (1)$$

или

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + gt,$$

одакле је, имајући у виду, да је пут s за $t = 0$ такође једнак нули

$$\int ds = \int (v_0 + gt)\, dt,$$

или

$$s = v_0 t + \frac{g}{2} t^2. \qquad (2)$$

Код слободног пада и хитца на доле, земљина тежа убрзава кретање, а код хитца на горе земљина тежа успорава кретање, јер тада сила теже има исти правац али супротан смер кретања, те је отуда брзина хитца на горе с обзиром на обрасце (1) и (2)

$$v = v_0 - gt \qquad (3)$$

а пређени пут

$$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2. \qquad (4)$$

Пример. — Израчунати време када ће се сударити два тешка тела од којих је једно бачено са земљине површине вертикално у вис са брзином v_0, а друго истовремено пада њему у сусрет са висине h, без почетне брзине.

Према условима проблема, путеви који оба тела пређу до судара морају бити скупа једнаки висини h, а како је пут тела баченог у вис

$$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

а пут тела које слободно пада

$$s_1 = \frac{g}{2} t^2$$

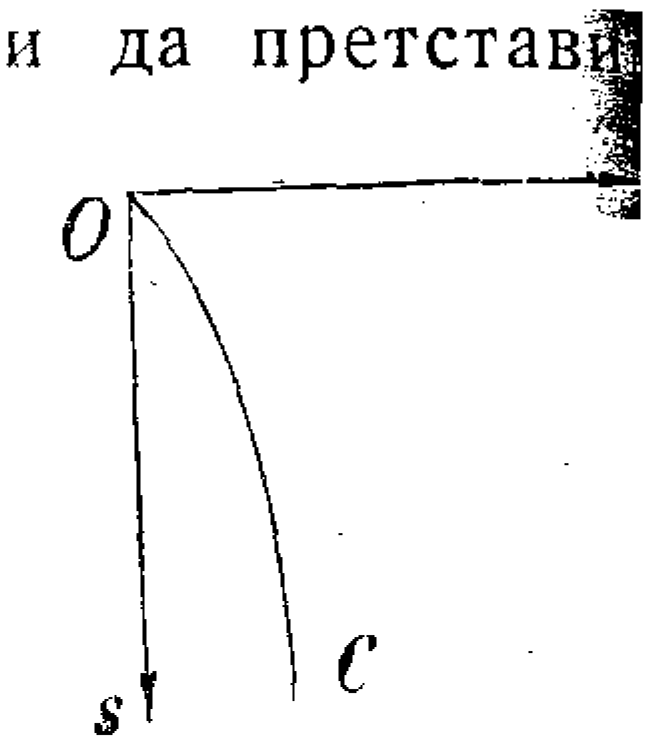
то је

$$h = s + s_1 = v_0 t,$$

одакле добијамо тражено време

$$t = \frac{h}{v_0}.$$

Примедба. — Кад хоћемо графички да претстави функције пута, брзине и убрзања слободнога пада и хитца на доле, онда обично узимамо координатни систем тако, да је позитиван смер функције уперен на доле; те отуда дијаграм пута слободнога пада



Сл. 125

$$s = \frac{g}{2} t^2,$$

је парабола C (сл. 125).

73. Једнако убрзано и једнако успорено кретање уопште. — Слободан пад и хитац на доле су као што смо видели једнако убрзано кретање; а хитац на горе једнако успорено кретање. Хитац на доле је још и једнако убрзано кретање са почетном брзином; а хитац на горе једнако успорено кретање са почетном брзином.

Сви обрасци, које смо извели за слободан пад, хитац на доле и хитац на горе важе као основни обрасци уопште за сва једнако убрзана и једнако успорена кретања.

Пример. — Израчунати убрзање, пређени пут и време путовања жељезничког воза, који пође из стања мира и после 30 *sec* достигне брзину 54 *km* на сат и том брзином иде 3 минута, затим буде бремзован и отпочне се кретати са успоравањем 0,4 *m/sec*.

У датом случају је брзина на крају тридесете секунде

$$v = \frac{54000}{3600} = 15 \; m/sec.$$

Према члану 71, образац (9) означавајући убрзање са u, убрзање је

$$u = \frac{v}{t} = \frac{15}{30} = 0{,}5 \; m/sec.^2$$

Пређени пут у току 30 секунди, према члану 71, образац (6), је

$$s_1 = \frac{0{,}5}{2} \, 30^2 = 225m.$$

Пређени пут у току 3 минута једноликог кретања је

$$s_2 = 15 \cdot 180 = 2700m.$$

Када је воз бремзован брзина је почела опадати за 0,4*m sec* и после времена t била је нула, те је отуда

$$15 - 0{,}4\ t = 0$$

дакле је

$$t = \frac{15}{0{,}4} = 37{,}5\ sec,$$

пређени пут према услову проблема је збир аритметичког, да у коме је разлика 0,4 m, те је стога пређени пут

$$s_3 = \frac{37{,}5}{2}\ 15 = 281{,}25\ m.$$

Тражено убрзање је, дакле

$$u = 0{,}5\ m/sec$$

упан пређени пут је

$$s_1 + s_2 + s_3 = 225\ m + 2700\ m + 281{,}25\ m = 3206{,}25\ m;$$

време путовања је

$$t = 30 + 180 + 37{,}5 = 247{,}5\ сес.$$

Пример. — Израчунати после кога времена ће се зауставити локомотива која иде брзином 25 m/sec од тренутка да машинист заустави пару и брзина отпочне падати за 5 m/sec.

По заустављању паре после времена t брзина ће бити днака нули, те је отуда

$$25 - 0{,}5t = 0,$$

тражено време је

$$t = \frac{250}{5} = 50\ sec.$$

Пример. — Израчунати убрзање топовског зрна, којим оно креће кроз топовску цев, када је цев топа дуга 2 m, зрно изађе са брзином 700 m/sec, као и време кретања зрна роз топовску цев.

Према обрасцу (11) у члану 71, тражено убрзање је

$$u = \frac{700^2}{2 \cdot 2} = 122500\ m/sec^2;$$

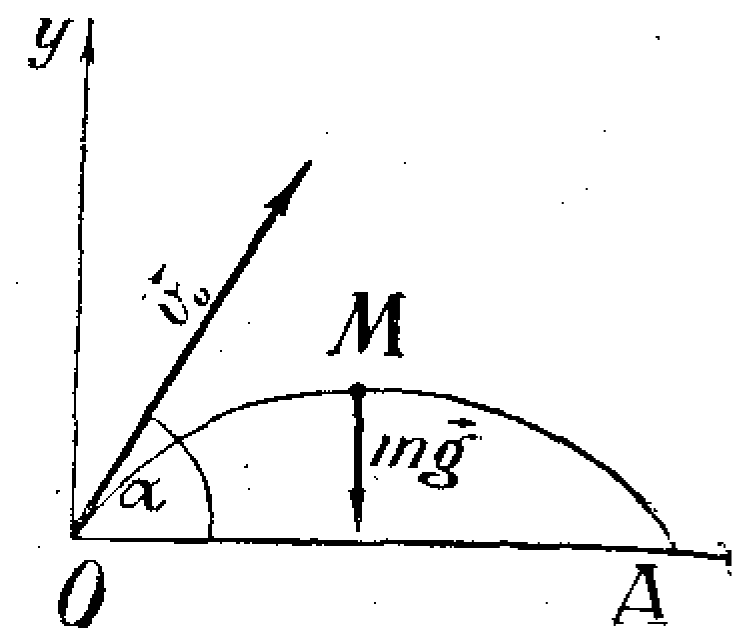
према обрасцу (9) наведеног члана, тражено време је

$$t = \frac{700}{122500} = \frac{1}{175}\ sec.$$

Трајекторије слободног пада и хитца на доле, као и хитца на горе су вертикалне праве линије.

74. Кос хитац. — Кретање материјалне тачке под дејством неке силе косог правца назива се *кос хитац*.

Ако је за почетак кретања материјалне тачке M масе узет координатни почетак O (сл, 126), за угао према хоризонту угао α, који се назива уопште *елевациони угао,* за почетну брзину, брзину v_0, а за почетно време кретања $t = t_0 = 0$, $x_0 = 0_0$ $y_0 = 0$,
онда су пројекције вектора почетне брзине $\vec{v}_0$



Сл. 126

$$\begin{aligned} x_0' &= v_0 \cos\alpha \\ y_0' &= v_0 \sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

На покретну тачку М дејствује само сила теже*

$$\vec{P} = m\vec{u} = -m\vec{g}$$

те је отуда диференцијална једначина кретања косог хитца

$$m\vec{u} = -m\vec{g}$$

или

$$\vec{u} = -\vec{g}. \tag{2}$$

Када пројицирамо једначину (2) биће

$$\begin{aligned} x'' &= 0 \\ y'' &= -g, \end{aligned}$$

одакле интеграљењем добијамо

$$x' = C_1,\ y' = -gt + C_2 \tag{3}$$

или с обзиром на једначине (1), као једначине почетних услова кретања

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \qquad C_2 = v_0 \sin\alpha + gt$$

Када узмемо да је $t = t_0 = 0$, онда је

$$C_2 = v_0 \sin\alpha.$$

Ако извршимо елиминацију произвољних констаната C_1 и C_2 из једначина (3), биће

$$x' = v_0 \cos\alpha, \qquad y' = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

одакле интеграељњем добијамо

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t + C_1' \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t + C_2'$$

Према почетним условима интеграционе константе C_1' и C_2' су једнаке нули и ми добијамо коначне једначине кретања косог хитца

$$x = v_0\, t \cos\alpha \tag{4}$$

* Сматра се да се кретање врши у безваздушном простору.

$$y = v_0 \ t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \qquad (5)$$

где нам x и y претстављају пројекције вектора положаја тачке M.

Ако из једначина (4) и (5) избацимо време t, добићемо једначину трајекторије косог хитца

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

која је извесна парабола.

Дужина $OA = W$ назива се домет хитца.

Како је у тачки A пројекција вектора положаја на y-оси једнака нули, то с обзиром на једначину (5) биће

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

или

$$gt = 2 \, v_0 \sin \alpha$$

одакле добијамо вредност времена

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g},$$

за коју трајекторија сече x-осу.

Ако у једначини (4) ставимо време једнако $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ добићемо дужину домета

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \qquad (6)$$

Како синус има највећу вредност за угао од $\frac{\pi}{2} = 90^0$, то ће домет W као функција елевационог угла α имати максимум за $\sphericalangle \ 2\alpha = 90^0$ односно за $\frac{\pi}{4} = 45^0$.

Пример. — Колики је домет W пушчаног зрна, које излети из пушке под углом од 15^0 брзином $327 m/sec$, не водећи рачуна о отпору ваздуха.

Према обрасцу (6) тражени домет је

$$W = \frac{327^2}{9{,}81} \cdot \frac{1}{2} = 5450 \ m.$$

Пример. — Израчунати највећу висину h до које доспе топовско зрно избачено под углом од 30^0 са почетном брзином $490{,}5 \ m/sec$, не водећи рачуна о отпору ваздуха.

У датом случају тражи се максимум функције (5)

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Како је

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \; v_0 = 490{,}5 m/sec$$

то је функција чији се максимум тражи

$$y = 490{,}5 \cdot \frac{1}{2} t - \frac{9{,}81}{2} t^2 \tag{7}$$

одакле је

$$\frac{dy}{dt} = 245{,}25 - 9{,}81 \, t; \tag{8}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - 9{,}81.$$

Кад први извод ставимо једнак нули и решимо једначину, добићемо корен једначине

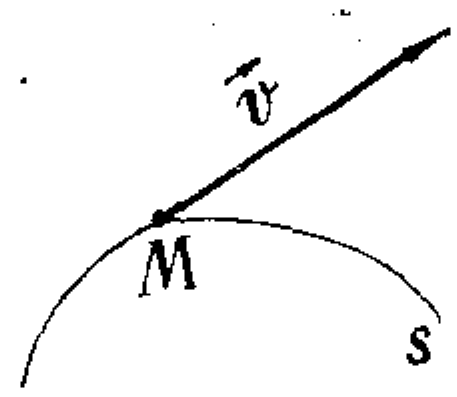
$$t = 25.$$

Како је други извод функције (7) негативан, то функција (7) има тражени максимум за $t = 25$,

$$y_{max} = h = 3065{,}625 \; m.$$

75. Количина кретања. — Производ из масе m и бр брзине $\vec{v}$, једне покретне материјалне тачке M (сл. 127), извесном датом времену, назива се *количина кретања.* Ако тај производ означимо са μ, онда је количина кретања претстављена изразом

$$\vec{\mu} = m \vec{v}. \tag{1}$$



Сл. 127.

Кад израз (1) диференцијалимо по времену, биће

$$\dot{\mu} = m \dot{v} = m \vec{u},$$

а како је

$$m \vec{u} = \vec{P}$$

то је и

$$\dot{\mu} = \vec{P},$$

те отуда добијамо закон количине кретања:

Геометриски извод количине кретања, по времену једне материјалне тачке, једнак је сили, која производи кретање материјалне тачке.

76. Импулс.— Кад основну динамичку диференцијалну [ј]едначину

$$\vec{P} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{1}$$

[ин]тегралимо, биће

$$\int_{t_0}^{t} \vec{P}\, dt = m \int_{t_0}^{t} d\vec{v},$$

[д]акле је

$$\int_{t_0}^{t} \vec{P}\, dt = m\,(\vec{v} - \vec{v}_0). \tag{2}$$

Лева страна једначине (2) назива се импулс, а десна, [к]ао што смо у претходном члану казали, *количина кретања*.

У исто време из једначине (2) видимо да је импулс јед[н]ак прираштају количине кретања.

Када бисмо векторску једначину (2) пројицирали, до[б]или бисмо скаларне једначине импулса.

$$\int_{t_0}^{t} P_x\, dt = m\,(v_x - v_{0x}),$$

$$\int_{t_0}^{t} P_y\, dt = m\,(v_y - v_{0y}),$$

$$\int_{t_0}^{t} P_z\, dt = m\,(v_z - v_{0z}).$$

Када је кретање материјалне тачке праволиниско, онда је импулс

$$\int_{t_0}^{t} P\, dt = m\,(v - v_0). \tag{3}$$

Ако је интензинтет P константан, а $t_0 = o$ онда једначина (3) постаје

$$Pt = m\,v,$$

или импулс

$$\mathcal{J} = m\,v \tag{4}.$$

Образац (4) налази примену при рачунању са тренутним силама.

Пример. — Колики је интензитет, односно импулс експлозије барута пушчаног метка који саопшти куршуму, чија је тежина 0,01962 *kg.*, брзину 200 *m*/*sec*, не узимајући у обзир отпор ваздуха.

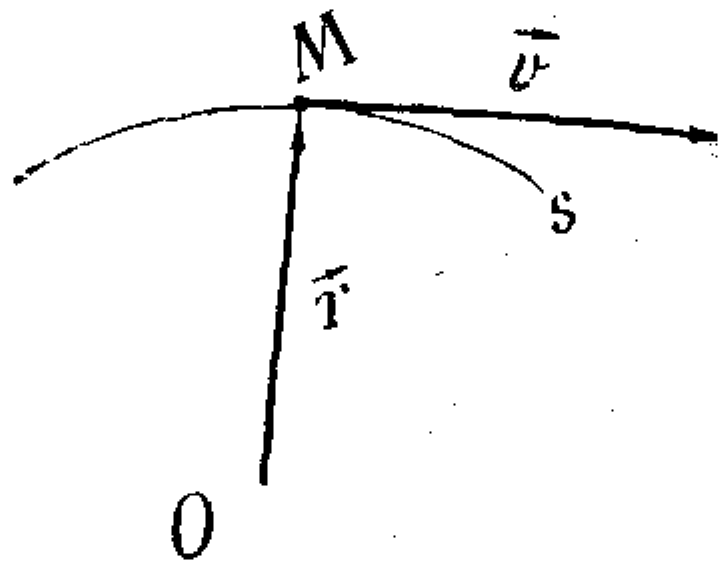
Тражени импулс је

$$\mathcal{J} = \frac{19{,}62}{9{,}81} \cdot 200 = 0{,}4\ kg.$$

Димензија импулса је

$$[\mathcal{J}] = [\, m\ l\ t^{-1} \,].$$

77. Моменат количине кретања. — Ако се нека материјална тачка M, чија је маса m, креће услед дејства извесне силе $\vec{F}$, брзином $\vec{v}$, и њено кретање одређујемо према пол O (сл. 128.), онда је количина кретања тачке M



Сл. 128

$$\vec{\mu} = m\,\vec{v},$$

а моменат количине кретања $\vec{l}$ у погледу на пол O је

$$\vec{l} = [\vec{r}\ \vec{\mu}],$$

или

$$\vec{l} = [\,\vec{r},\ m\,\vec{v}\,].$$

Кад моменат количине кретања $\vec{l}$ диференцијалимо

$$\dot{l} = [\,\dot{r},\ m\,\vec{v}\,] + [\,\vec{r}\,, m\,\dot{v}].$$

Како је векторски продукт

$$[\,\dot{r},\ m\,\vec{v}] = 0,$$

јер је $\dot{r} = \vec{v}$, то је моменат количине кретања

$$\dot{l} = [\,\vec{r},\ m\,\dot{v}\,],$$

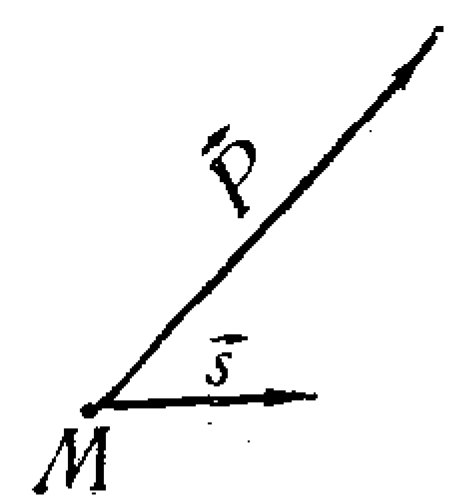
или

$$\dot{l} = [\,\vec{r}\ \vec{F}],$$

одакле изводимо закон момента количине кретања:

Геометриски извод момента количине кретања, једнак је моменту силе, која производи кретање.

78. Рад. — Кад се тачка M (сл. 129.) чија је маса m, креће под дејством силе $\vec{P}$ и пређе пут s, онда кажемо да је сила $\vec{P}$ извршила известан *механички рад.*



Сл. 129

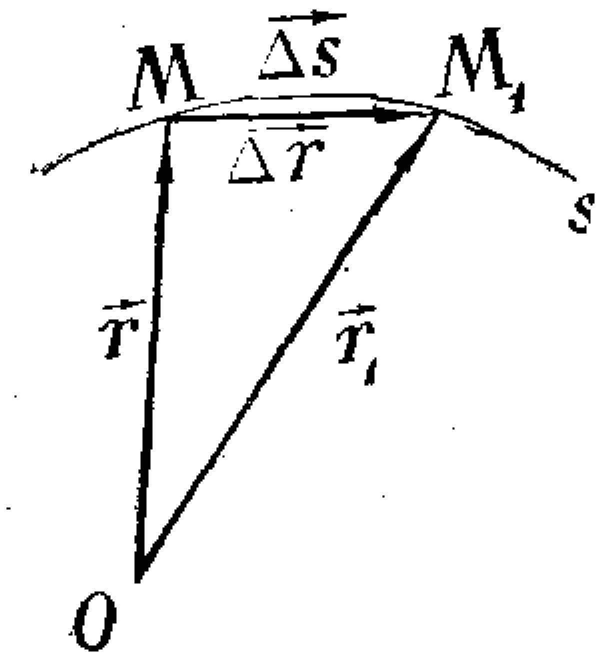
Рад једне силе једнак је производу из интензитета силе, пређеног пута и косинуса угла кога заклапа правац силе са путом, или

...им речима: *рад једне силе једнак је скаларном производу* ...*ле и пређеног пута.*

Ако је пут крива линија онда за косинус угла између ...ца силе и пута, за неку тачку C пута, узимамо косинус ...кога заклапа правац силе са тангентом пута у тачки C.

Када је сила изражена у килограме тежине, а пут у ...има, онда је рад изражен у килограм-метре (kgm); а ...а је сила изражена у дин-ове, онда се рад изражава једи...ама апсолутног система мера, о чему ће бити речи у ...ну 80.

Ако на слободну материјалну тачку M чија је маса m ...ложај одређен вектором положаја r ...130), дејствује нека сила $\vec{P}$ и тачка ...врши криволиниски пут s, онда за ...ан произвољно моли пут $\overrightarrow{MM_1} = \vec{\Delta s}$ ... ће извршити известан рад ΔA. Кад ...емо да се тачка M_1 бесконачно при...ижи тачки M, онда



Сл. 130

$$\vec{\Delta s} \to \vec{ds}$$

...у исто време је

$$\vec{ds} = \vec{dr},$$
$$\Delta \mathrm{A} = d\mathrm{A}$$

...према дефиницији рада је и

$$d\mathrm{A} = (\vec{P}\,\vec{dr}) = (\vec{P}\,\vec{ds}). \qquad (1)$$

Када се тражи рад који сила $\vec{P}$ изврши уопште док ...чка M пређе из неког положаја коме одговара вектор поло...аја r, у неки положај коме одговара вектор положаја r_1, онда ...ад силе $\vec{P}$ биће

$$\mathrm{A} = \int_{r}^{r_1} (\vec{P}\,\vec{dr}) = \int_{t}^{t_1} (\vec{P}\,\vec{ds}), \qquad (2)$$

...ли у скаларном облику с обзиром на члан 26,

$$\mathrm{A} = \int_{(x,\,y,\,z)}^{(x_1,\,y_1,\,z_1)} (Xdx + Ydy + Zdz), \qquad (3)$$

где су: X, Y, Z пројекције силе $\vec{P}$, а: dx, dy, dz пројек[ције] пута $\vec{ds}$.

Кад је кретање тачке M криволиниско, у равни, [о]сила и пут не дају пројекције на z-осу, па и интеграл постаје

$$A = \int_{(x,\, y)}^{(x_1,\, y_1)} (X\,dx + Y\,dy), \tag{4}$$

а када је кретање у равни а праволиниско, онда је проје[к]ција силе X једнака интензитету саме силе, а пројекција пу[та] dx самом путу ds, па је

$$A = \int_{x}^{x_1} X\,dx = \int_{s}^{s_1} P\,ds. \tag{5}$$

Ако је сила $\vec{P}$ константне величине, онда је

$$A = P \int_{s}^{s_1} ds = Ps. \tag{6}$$

Пример. — Колики је рад потребан да се један железнички воз чија тежина износи 300 t, одвуче праволиниски 10 km даљине, када се рачуна просечно да железнички воз при своме кретању савлађује отпор $\frac{1}{200}$ своје тежине.

У датом случају интензитет силе која има да савлада отпор је

$$P = \frac{300000}{200} = 1500\, kg,$$

а пут 10000 m, те је отуда тражени рад

$$A = 1\,500 \cdot 10\,000 = 15\,000\,000\, kgm.$$

Кад је смер силе исти као и смер пута, онда је рад позитиван и кажемо сила врши рад; а када је смер силе супротан онда је рад негативан и кажемо сила троши рад.

Димензија рада у апсолутном систему мера је

$$[\mathrm{A}]=[\mathrm{P}]\cdot[s]=[m\,l^2\,t^{-2}]$$

техничком систему мера је

$$[\mathrm{A}]=[Pl].$$

79. Жива сила. — Када се нека материјална тачка M, чија је маса m, креће онда половина производа из масе и квадрата брзине тачке M

$$\frac{m\,v^2}{2}=\mathrm{T}, \tag{1}$$

назива се *жива сила* или *кинетичка енергија.*

Лајбниц* је називао израз mv^2 жива сила, те отуда неки писци израз $\frac{mv^2}{2}$ називају *полужива сила или моћ.*

Како је рад неке силе $\vec{P}$, која дејствује на извесну материјалну тачку M, чија је маса m, у границама од r_0 до r

$$\mathrm{A}=\int_{r_0}^{r}(\vec{P}\,d\vec{r}), \tag{2}$$

то можемо ставити

$$\mathrm{A}=\int_{r_0}^{r}(\vec{P}\,d\vec{r})=m\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\;dt\right)=\frac{m}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\,(v^2)\,dt,$$

или

$$\mathrm{A}=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^{\,2}}{2}=\mathrm{T}-\mathrm{T}_0 \tag{3}$$

одакле добијамо закон живе силе:

Рад који нека сила изврши док једну материјалну тачку доведе из њеног положаја r_0 у положај r једнак је прира-

---

* Leibnitz Gottfried Vilhelm (1646 — 1716) славни филозоф и научник немачки.

штају живе силе или кинетичке енергије коју тачка доби у своме кретању од положаја r_0 *до* r.

Кад узмемо да је $v_0 = 0$, или другим речима да покретна тачка M покренула из стања мира онда образ (3) добија облик

$$\mathsf{A} = \frac{mv^2}{2} = \mathsf{T}. \qquad (4)$$

Димензија кинетичке енергије је иста као и димензија рад

$$[\mathsf{T}] = [ml^2\ t^{-2}].$$

Помоћу образаца (1) и (4) можемо одређивати кинетичк енергију, односно рад као и брзину покретне материјалне тачке.

Пример — Коју брзину има при паду на земљу, метална лопта тежине 5 kg, која слободно пада без почетне брзине са висине од 100 m, не узимајући у обзир отпор ваздуха.

У датом случају почетна брзина је $v_0 = 0$, а рад силе од 5 kg на путу од 100 m, је $(5 \cdot 100)$ kgm, те према обрасцу (5) добијамо једначину

$$5 \cdot 100 = \frac{5}{9{,}81}\,\frac{v^2}{2},$$

одакле је тражена брзина

$$v = \sqrt{2 \cdot 981} = 44{,}3\ m/sec.$$

Ако једначину (2) напишемо у скаларном облику

$$\mathsf{A} = \int_{r_0}^{r} (\overrightarrow{P}\,\overrightarrow{dr}) = \int_{(x_0,\,y_0,\,z_0)}^{(x,\,y,\,z)} (Xdx + Ydy + Zdz),$$

онда живу силу можемо претставити и изразом

$$\mathsf{T} - \mathsf{T}_0 = \int_{x_0,\,y_0,\,z_0}^{(x,\,y,\,z)} (Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (5)$$

80. Ефекат. — Рад који нека сила врши у јединици времена назива се *ефекат силе.*

...кат E уопште претстављамо као диференцијални ...к рада по времену

$$\mathsf{E} = \frac{d\mathsf{A}}{dt},$$

...обзиром на кинетичку енергију

$$\mathsf{E} = \frac{d\mathsf{T}}{dt}.$$

...имензија ефекта је

$$[\mathsf{E}] = [ml^2t^{-3}]$$

...е за dt у Машинској механици узима једна секунда ...ефекат неке силе једнак раду, који сила може вршити ...ој секунди.

...ад силе од 1 kg на путу од 1 m је *килограм-метар* ...Када сила врши рад *килограм-метар* у току једне се... ...онда је ефекат силе *килограм-метар у секунди* (kgm/sec).

...ко сила од 75 kg врши рад на путу од 1 m у току ...секунде, онда је ефекат силе једна *коњска снига*

...ад силе једнога дина на путу од 1 cm назива се *ерг*. ...ада сила врши рад једнога ерга у секунди, онда је ефе... ...иле *ерг у секунди*.

...ад силе једног мегадина на путу од 10 cm назива се ... (Joule).

...ко сила може вршити рад једнога џаула у секунди, ...а је ефекат силе *ват* (Watt, W.).

...У електротехници употребљавају се и веће јединице за ...ење ефекта

$$100\ Watt = 1\ Hectowatt\ (h\ W)$$

$$1000\ Watt = 1\ Kilowatt\ (k\ W).$$

...Из дефиниције рада и ефекта; и с обзиром на обрасце ...(2) и (3) у члану 67, изводе се обрасци у којима је изражен ...ос између рада и ефекта сила терестричнога и апсолут... ...га система мера, и то:

Рад 1 $kgm = 9{,}81 \cdot 10^7$ ерг $= 9{,}81$ џаул (4)

Ефекат $kgm/sec = 9{,}81\ W\cdot$ (5)

Пример. — Колики је ефекат дизалице која за 1 минут ...же 7200 kg на 5 m. висине.

Тражени ефекат је, у терестричном или техничком сис... ...му мера

$$E = \frac{7200 \cdot 5}{60} = 600 \; kgm/sec = 8 \; P.S,$$

или узимајући у обзир да је 1 $P.S = 75$ kgm/sec; а 1 kg $/sec$ 9,81 W тражени ефекат је у апсолутном систему мер

$$E = 5886 \; W.$$

Десети одељак

Поља

81. Скаларна и векторска поља. — Простору ком је неки скалар тако распоређен да у свакој тачки простор има само једну одређену вредност назива се *скаларно поље*

Пример. — Када у простору поставимо један правоугли координатни систем $Oxyz$ и отпочнемо мерити температуру онда ћемо видети да свакој тачки простора, чије су координате x, y, z, одговара извесна вредност температуре. Цео посматрани простор претставља нам тада једно скаларно поље поље температуре.

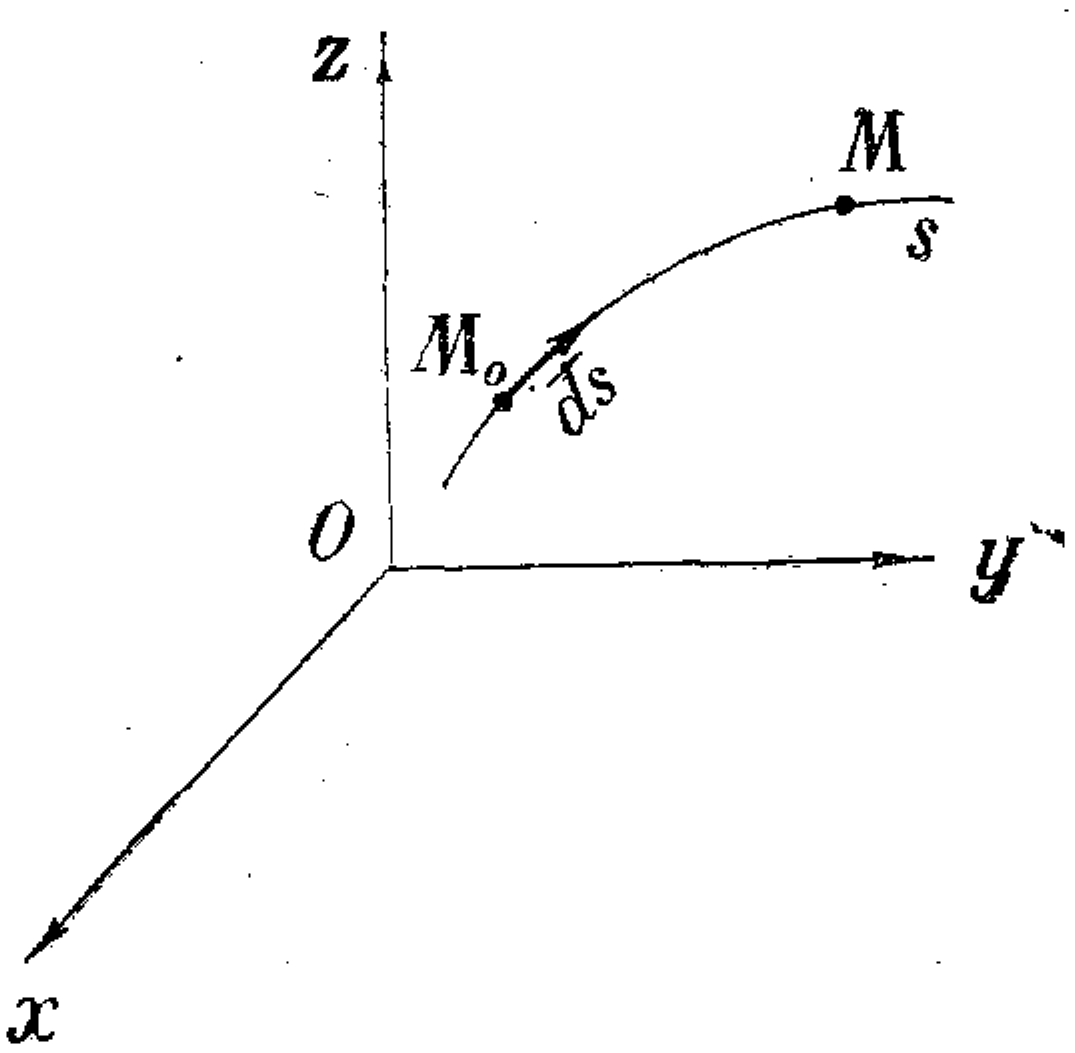
Простор у коме је неки вектор тако распоређен да у свакој тачки простора има само једну одређену вредност назива се *векторско поље.*

Пример. — Ако имамо један магнет, онда је цео простор у коме влада привлачна моћ могнета једно векторско поље.

Векторско поље у коме је распоређена нека сила назива се још *поље силе.*

82. Функција силе. Потенцијал. Градијент. — Ако се слободна материјална тачка M_0, чија је маса m, налази у пољу силе $\vec{P}$, и под дејством силе $\vec{P}$ пређе пут $\vec{ds}$ (сл. 131) онда је рад dA силе $\vec{P}$, обележавајући пројекције силе $\vec{P}$ са X Y, Z, а пројекције пута са dx, dy, dz.

$$dA = (\vec{P}\,\vec{ds}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \qquad (1)$$



Сл. 131

Укупан рад, који сила $\vec{P}$ изврши док тачка M_0 $(x_0, y_0,$ дође у положај М (x, y, z) је

$$A = \int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{2}$$

ко израз

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

етсавља тоталан диференцијал извесне функције

$$U\,(x, y, z), \tag{3}$$

екога скалара, или другим речима ако је

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x}\,dz = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

то значи ако су парцијални изводи функције U једнаки про-кцијама силе $\vec{P}$ на координатним осама онда се функција

$$U\,(x, y, z)$$

азива *функција силе*, и ми кажемо сила $\vec{P}$ има функцију силе.

Интегеграл (2) у том случају је

$$A = \int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} d\,U = U - U_0 \tag{4}$$

или с обзиром па члан 79, израз (5),

$$T - T_0 = U - U_0. \tag{5}$$

Негативна вредност функије U назива се потенцијал П, или потенцијална енергија силе $\vec{P}$, дакле

$$-\mathrm{U} = \Pi^{*} \tag{6}$$

Када место одређеног интеграла (4) узмемо општи интеграл, онда изрази T_0 и U_0 у једначини (5) претстављају интеграционе константе, и тако добијамо општи образац за живу силу, с обзиром на функцију силе

$$T = U + h, \tag{7}$$

где је

$$h = T_0 - U_0 \tag{8}$$

интеграциона константа.

Израз (7) назива се интеграл живе силе.

Ако место функције U у обрасцу (7) ставимо потенцијал П, онда с обзиром на једначину (7), и (8) биће

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 \tag{9}$$

Израз $T + \Pi$ претставља тоталну енергију, а израз $T_0 + \Pi_0$ извесну константу, што се све скраћено претставља и изразом.

$$E = E_0. \tag{10}$$

Израз (10) изражава принцип консервације енергије, који гласи:

Збир кинетичке и потенцијалне енергије једне покретне материјалне тачке на коју дејствује каква конзервативна сила је стална количина за све време кретања тачке.

Силе које имају функцију силе, називају се *конзервативне силе.* Поље једне конзервативне силе назива се *конзервативно поље.*

Из обрасца (9) види се: кад кинетичка енергија расте,

---

* Израз

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

је тоталан диференцијал неке функције U, кад је

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z};$$

а израз

$$Xdx + Ydy$$

кад је

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

као што је познато из Инфинитезималног рачуна.

[по]тенцијална опада и обратно, кад потенцијална енергија [ра]сте, кинетичка опада.

Ако узмемо да функција (3) има једну одређену вред[н]ост C_1, C_2, C_3,..., онда ћемо имати функције

$$U(x, y, z) = C_1, \quad U(x, y, z) = C_2, \quad U(x, y, z) = C_3, \ldots,$$

[к]оје нам претстављију извесне површине у пољу сила, а [к]оје се називају *нивоске* или *еквипотенцијалне површине.*

Према дефиницији нивоских површина, имајући у виду [д]а је $U = -\Pi$, *видимо да потенцијал за ма коју тачку [ј]едне нивоске површине има исту вредност.*

Ако се материјална тачка M, на коју дејствује у пољу [с]ила, сила $\vec{P}$ налази на једној нивоској површини и изврши [ј]едан пут $\vec{ds}$ (на самој површини), онда је

$$d\,A = (\vec{P}\,\vec{ds}) = P\,ds\,cos\,(\vec{P}, \vec{ds}) = d\,U.$$

Како је

$$d\,U = 0$$

јер функција U има константну вредност за све тачке једне површине, то је и

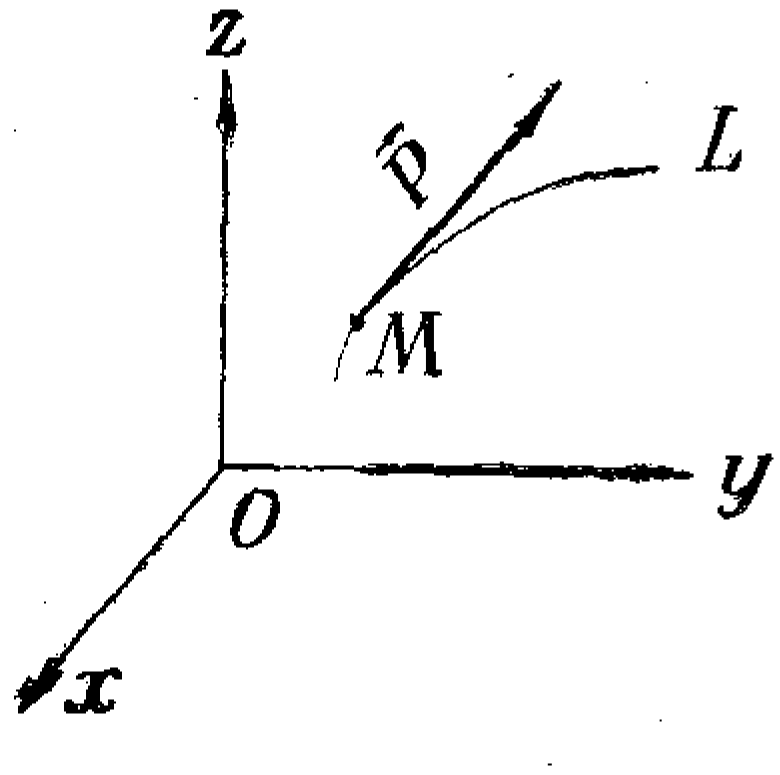
$$(\vec{P}\,\vec{ds}) = P\,ds\,cos\,(\vec{P}, \vec{ds}) = 0,$$

а када је скаларни продукт два вектора једнак нули, онда они стоје нормално један на други, те отуда излази: да правци сила у једном пољу сила стоје нормално на нивоске површине.

Када узмемо да су нивоске површине бесконачно блиске онда правци сила праве изломљене линије које прелазе у континуиране криве, које се називзју *линије сила.*

Линије сила су дакле, ортогоналне трајекторије нивоских површина; а правци сила су тангенте тих трајекторија.

Ако нам крива L (сл. 132), у пољу силе $\vec{P}$, претставља линију силе, онда у ма којој тачки M линије силе, сила $\vec{P}$ је тангентна лилиније L.



Сл. 132.

Пројекције X, Y, Z, силе $\vec{P}$ су функције додирне тачке M,

$$X = f(x, y, z),\ Y = \varphi(x, y, z),\ Z = \psi(x, y, z).$$

У исто време пројекције бесконачно малог дела линије L од тачке M до бесконачно блиске тачке кроз које пролази тангента - сила $\vec{P}$, су

$$dx, dy, dz.$$

Како су, бесконачно мали део линије L и тангента-ла $\vec{P}$, пропорционални и имају исти правац, то можемо писати једначину

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{9}$$

или

$$\frac{dx}{f(x, y, z)} = \frac{dy}{\varphi(x, y, z)} = \frac{dz}{\psi(x, y, z)} \tag{10}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\varphi(x, y, z)}{f(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\psi(x, y, z)}{f(x, y, z)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Једначине (9), (10), (11) претстављају систем симултаних једначина, које важе за ма коју тачку M линије силе, а кад важе за макоју тачку, оне важе и за саму линију силе L, те отуда једначине (9), (10), (11) претставвљају и уопште тип једначине линије сила, које можемо увек написати, кад год су нам познате пројекције силе.

Пример. — Испитати поље силе, када је фунцкија силе

$$U = - a^2 x.$$

У датом случају је

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - a^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

одакле видимо да конзервативна сила дејствује у равни паралелно x-оси, јер има пројекцију само на x-оси.

Потенцијал силе је

$$\Pi = a^2 x.$$

Када ставимо

$$U = 0, \quad U = C_1, \quad U = 2C_1, \ldots,$$

добићемо еквипотенцијалне линије*

* Када сила дејствује у равни, онда имамо еквипотенцијалне линије место еквипотенцијалних или нивоских површина.

$$-a^2x = 0, \quad -a^2x = C_1, \quad -a^2x = 2C_1, \ldots,$$

је су вертикалне праве сл. 133.

Диференцијална једначина линија силе је

$$\frac{dx}{-a^2} = \frac{dy}{0},$$

или

$$0 = -a^2dy,$$

или

$$a^2dy = 0.$$

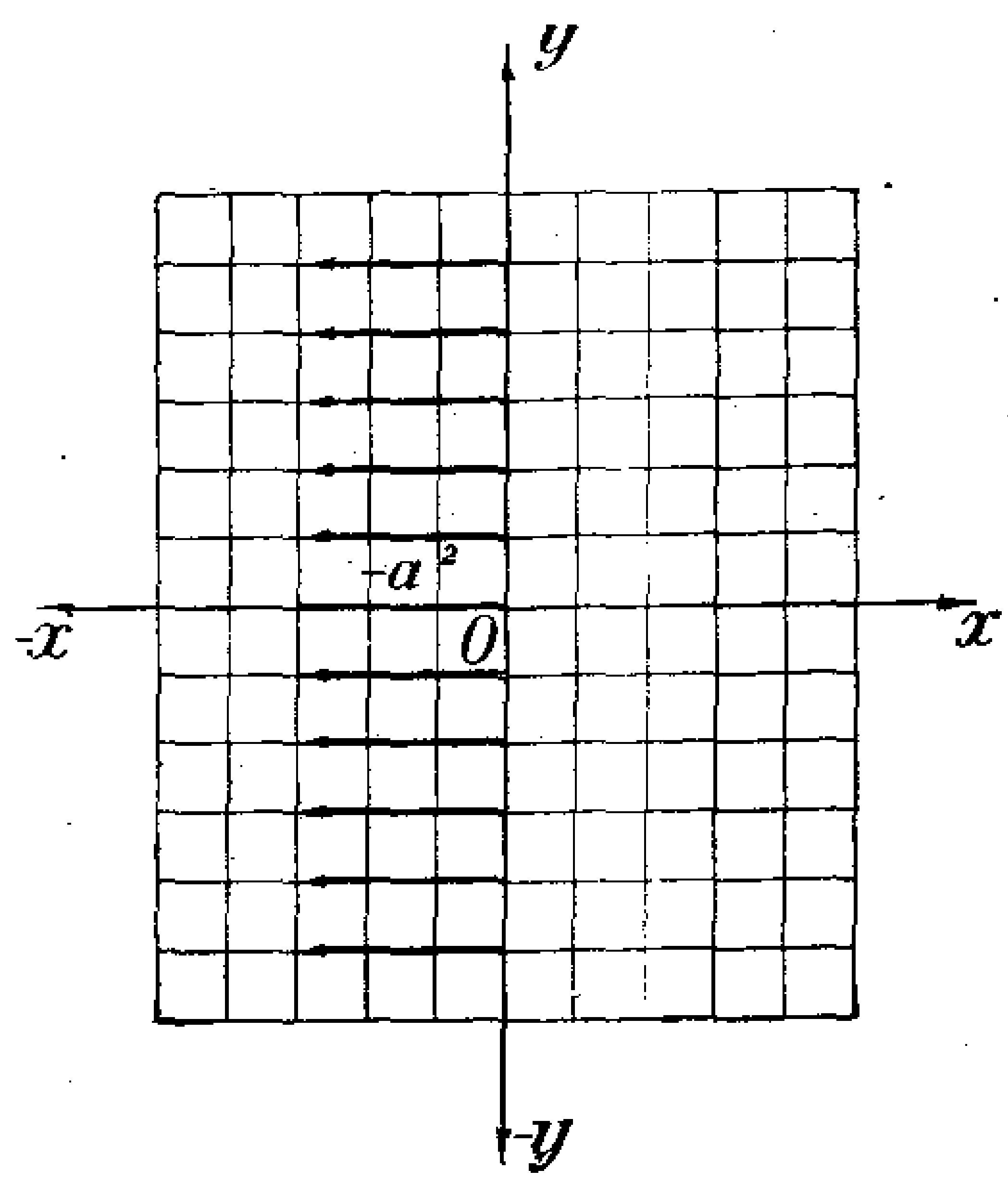
Ако извршимо интеграљење добићемо општу једначину линија силе

$$a^2y = C,$$

или

$$y = \frac{C}{a^2}.$$

Линије силе су хоризонталне праве, односно праве паралелне x-оси.



Сл. 133.

Пример. — Пројекције силе $\vec{P}$, која дејствује у равни су

$$X = 2xy, \; Y = x^2.$$

Испитати да ли сила $\vec{P}$, има функцију силе и потенцијал, а ако има наћи једначину еквипотенцијалних линија и једначину линија силе.

Како је

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

сила $\vec{P}$ има функцију силе,

$$U = x^2y.$$

Потенцијал силе је

$$\Pi = -x^2y.$$

Једначина еквипотенцијалних линија је

$$x^2y = C.$$

Еквипотенцијалне линије су хиперболе. Диференцијална једначина линија силе је

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2}$$

или

$$x\,dx = 2y\,dy,$$

или

$$2y\,dy = x\,dx,$$

одакле интеграљењем добијамо једначину линија силе

$$x^2 - 2y^2 = C.$$

Линије силе су хиперболе.

Пример. — Испитати да ли је сила $\vec{P}$, чије су пројекц

$$X = x^2 + y^2 \qquad Y = xy,$$

конзервативна сила.

Како је

$$\frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial x};$$

сила $\vec{P}$, није конзервативна сила.

Када имамо неку конзервативну силу $\vec{P}$, чије су пројекције

$$X, \quad Y, \ Z,$$

и функција силе

$$\mathrm{U}\ (x,\ y,\ z),$$

онда је

$$\vec{P} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

а

$$X = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z},$$

те је отуда и

$$\vec{P} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\vec{k}.$$

Израз

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\vec{k}.$$

назива се *градијенш* скалара U, и скраћено се обележава изразом

$$grad\,\mathrm{U},$$

те тако можемо ставити

$$\vec{P} = grad\ \mathrm{U},$$

и извести теорему.

Теорема. — *Свака конзервативна сила може се претставити као градијент једнога скалара.*

Сваки вектор уопште, чије су пројекције на координатне осе једнаке парцијалним изводима некога скалара, назива се *градијент* тога скалара.

Једна од најважнијих конзервативних сила у Механици је сила земљине теже. Њене пројекције на координатне осе су

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -mg.$$

Функција силе је, према томе

$$\mathrm{U} = -mgz.$$

Потенцијал силе је

$$\Pi = mgz.$$

Једначина еквипотенцијалних линија је

$$-mgz = C.$$

Еквипотенцијалне линије су хоризонталне праве.

Једначина линија силе је

$$mgx = C.$$

Линије сила су праве паралелне са z-осом.

83. Рад конзервативних сила. — Ако материјална тачка M_0, чија је маса m, услед дејства конзервативне силе доспе из једне нивоске површине N_0 у другу N (сл. 134.) прешавши пут $M_0\,M$, онда је рад силе

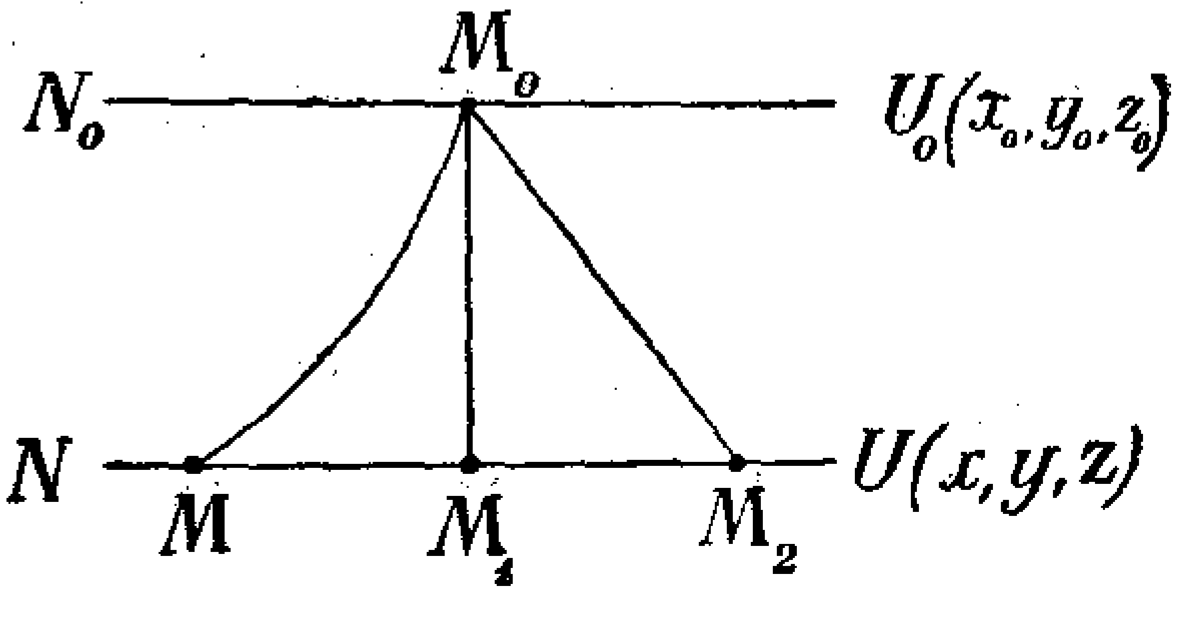
$$\mathrm{A} = \int_{x_0,\, y_0,\, z_0}^{x,\, y,\, z} (Xdx + Ydy + Zdz) = \mathrm{U} - \mathrm{U}_0$$

или

$$\mathrm{A} = \mathrm{U} - \mathrm{U}_0,$$

што ће рећи: извршени рад је једнак разлици функције $\mathrm{U} - \mathrm{U}_0$ без обзира на облик пређеног пута тачке M_0, те отуда добијамо теорему:

Теорема. — *Рад једне конзервативне силе не зависи од облика пута, којим материјална тачка услед дејства силе пређе из једне нивоске површине у другу, већ од вредности почетнога и завршнога положаја покретне тачке.*



Сл. 134.

Рад силе био би, дакле, исти и да је тачка M_0 ус... дејства силе прешла пут $M_0 M_1$ или $M_0 M_2$.

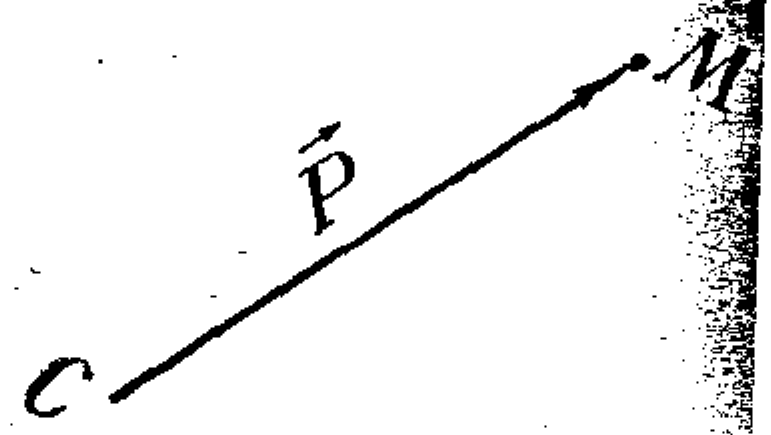
Како је према члану 78 образац (3) рад једнак ки... тичкој енергији, то код конзервативних сила кинетичка ен... гија једне материјалне тачке, која из једне нивоске површи... из стања мира пређе у другу нивоску површину је иста... ма којим путем материјална тачка прешла из једне нивос... површине у другу.

Једанаести одељак

Централне силе

84. Централне силе уопште. — Сила чији правац про... лази стално кроз једну одређену тачку у простору, назив... се *централна сила.*

Ако централна сила $\vec{P}$ (сл. 135) привлачи материјал... тачку M к центру C, онда се сила $\vec{P}$ назива *привлачна или атрактивна* сила; а ако сила $\vec{P}$ дејствује на удаљавање тачке M од центра C, онда се сила $\vec{P}$ назива *одбојна или репулсивна сила.*



Сл. 135.

Када је сила $\vec{P}$ атрактивна, онда је њен смер супрота... смеру радујуса вектора $\overrightarrow{CM} = \vec{r}$, тј. негативан; а када је сила репулсивна, онда је њен смер и смер радијуса вектора истоветан тј. позитиван, или другим речима: атрактивне си... ле имају негативан, репулсивне позитиван смер.

Међу централним силама велику улогу играју силе чији је интензитет функција отстојања тачке M од центра

$$\vec{P} = f(\vec{r}), \qquad (1)$$

којима ћемо се ми само и бавити.

Ако обележимо са a, b, c координате центра C, а са x, y, z координате радијуса вектора $\vec{r}$, онда су косинуси угло... ва које заклапа радијус вектор $\vec{r}$ са координатним осама x, y, z

$$(r, x) = \frac{x-a}{r}, \quad \cos\ (r, y) = \frac{y-b}{r}, \quad \cos\ (r, z) = \frac{z-c}{r}$$

пројекције силе $\vec{P}$

$$X = f(r) \cdot \frac{x-a}{r},$$

$$Y = f(r) \,.\, \frac{y-b}{r},$$

$$Z = f(r) \,.\, \frac{z-c}{r},$$

када је сила репулсивна; а

$$X = -f(r) \,.\, \frac{x-a}{r}$$

$$Y = -f(r) \,.\, \frac{y-b}{r}$$

$$Z = -f(r) \,.\, \frac{z-c}{r}$$

када је сила атрактивна.

Када обележимо са

$$\psi (\vec{r}) \tag{2}$$

једну функцију, која може имати знак плус (+) или минус (—), онда су пројекције једне централне силе уопште

$$\left.\begin{aligned} X &= \psi (r) \,.\, \frac{x-a}{r} \\ Y &= \psi (r) \,.\, \frac{y-b}{r} \\ Z &= \psi (r) \,.\, \frac{z-c}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а сила

$$\vec{P} = \psi (r).$$

Величина радијус вектора $\vec{r}$ је према познатом обрасцу из Аналитичне геометрије

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, \tag{4}$$

или

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{5}$$

Када функцију (5) диференцијалимо добићемо

$$2r\,dr = 2\,(x-a)\,dx + 2\,(y-b)\,dy + 2\,(z-c)\,dz$$

или

$$r\,dr = (x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz. \tag{6}$$

Ако прву једначину из групе једначина (3) помножим са dx, другу са dy, трећу са dz, па их саберемо добићемо

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\psi(r)}{r}[(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz]$$

или с обзиром на једначину (6)

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\psi(r)}{r} r\,dr = \psi(r)\,dr. \qquad (7)$$

Како је десна страна једначине (7) диференцијал извесне функције, то је и лева страна тоталан диференцијал неке функције

$$U\,(x, y, z),$$

па како су X, Y, Z пројекције централне силе $\vec{P}$, то је функција

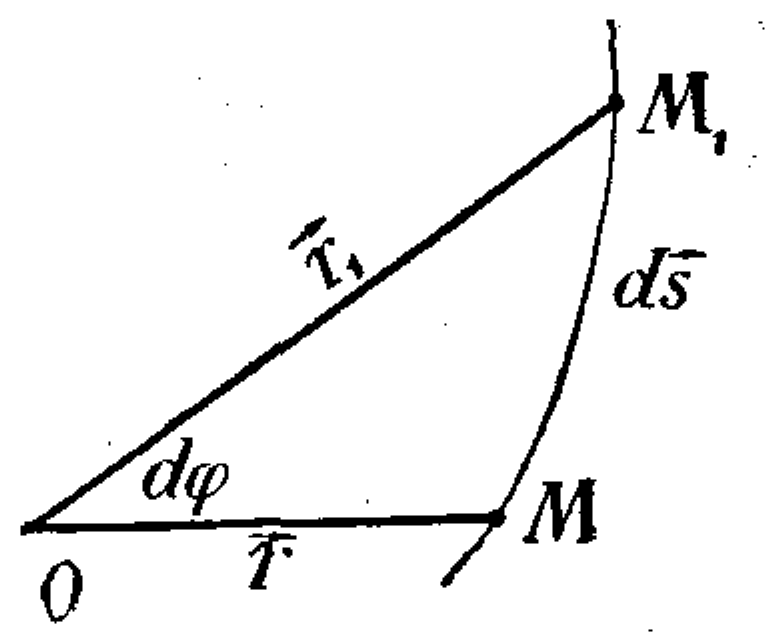
$$U\,(x, y, z),$$

према члану 82, функција силе централне силе $\vec{P}$, и отуда добијамо следећу теорему:

Теорема. — *Централне силе су и конзервативне силе.*

85. Секторна брзина. — Ако је положај покретне тачке M (сл. 136.) одређен поларним координатама r и φ, као функцијама времена t, онда је, према члану 48, угловна брзина тачке M

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi' = \omega.$$



Сл. 136.

Када покретна тачка M учини један бесконачно мали пут $\vec{ds}$, онда је прираштај аргумента $d\varphi$, а радијус вектори r и r_1 су у лимесу једнаки, па је стога бесконачно мала површина OMM_1, коју радиус вектор r опише док дође у положај радијуса вектора r_1,

$$dF = \frac{1}{2} r^2\,d\varphi.$$

Количник

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \varphi' = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

назива се *секторна брзина.*

86. Кеплерови закони*. — Централне силе, које играју

* Kepler Iohann (1571 — 1630) славни немачки астроном.

важну улогу у Механици су оне услед којих се врши кретање небеских тела.

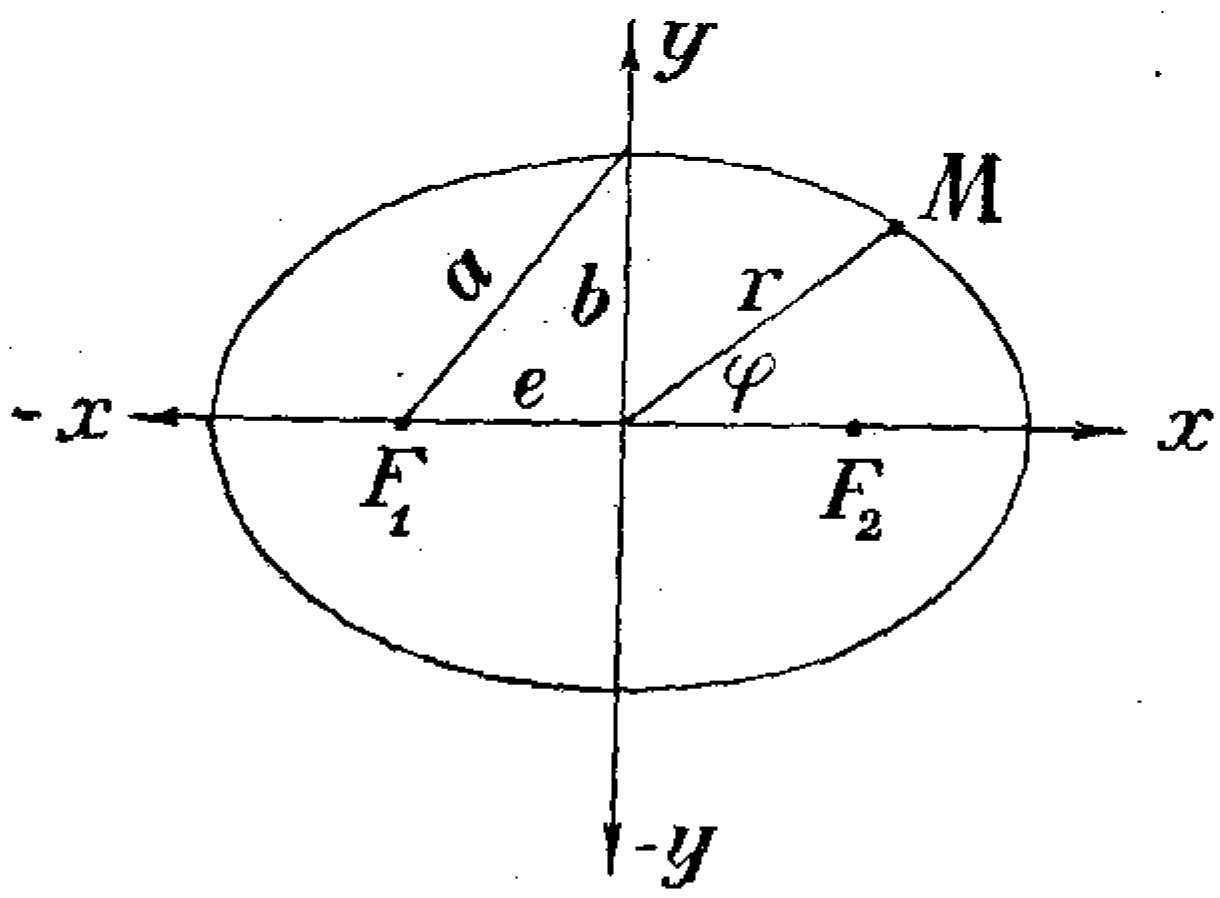
Велики астроном Кеплер, на основу својих посматрања и посматрања својих претходника поставио је следеће законе о кретању небеских тела, односно планета:

1°. Планете се крећу око Сунца по елиптичним путањама, а Сунце се налази у једној жижи путање.

2°. Површине које описују радијус вектори за иста времена једнаке су.

3°. Квадрати времена обилажења око Сунца појединих планета сразмерни су трећим степенима полу великих оса њиховик елиптичних путања.

Према првом закону путања једне планете је извесна елипса (сл. 137), чија једначина у поларном облику, као што нам је познато из Аналитичне геометрије, гласи



Сл. 137.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\ cos\varphi} \qquad (1)$$

где је r радијус вектор φ аргуменат, p параметар, a велика полуоса, b мала полуоса и ε бројна ексцентричност, $\frac{e}{a}$.

Сунце се налази у жижи F_1 и сматра се као извор централне силе, која дејствује на поједине планете.

На основу другог закона, секторна брзина планета је стална количина, коју обележавамо са $\frac{C}{2}$, па је стога

$$\frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{C}{2}, \qquad (2)$$

или

$$r^2 \omega = C. \qquad (3)$$

Према трећем закону је, обележавајући време обилажења са T,

$$\frac{a^3}{T^2} = \delta. \qquad (4)$$

87. Израчунавање интензитета централних сила трајекторије планета. — Интензитет једне силе $\vec{P}$ уопште

$$P = m \vec{u}, \tag{1}$$

а убрзање у поларним координатама је

$$u_r = r'' - r\,\omega^2 \tag{2}$$

$$u_c = 2r'\omega + r\omega' = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(r^2\omega\right). \tag{3}$$

Једначина (3), према другом Кеплеровом закону је једнака нули, и за израчунавање интензитета централне сил код планета, служи нам само једначина (2).

Како је

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\omega,$$

или смењујући ω са $\frac{C}{r^2}$

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2} = -C\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi},$$

и

$$r'' = -C\,\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}\,\omega = -\frac{C^2}{r^2}\,\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$$

то када сменимо r'' и ω у једначини (2) добијамо образац за убрзање

$$u_r = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right], \tag{4}$$

који се назива Бине-ов* образац, а који нам служи за одређивање централне силе, када је позната једначина трајекторије планете, као и за одређивање трајекторије планете кад је позната централна сила.

Ако једначину трајекторије планете

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \tag{5}$$

напишемо у облику

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi, \tag{6}$$

---

* Binet Jacques (1786 — 1856) велики математичар и астроном француски.

онда је

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} = -\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi \tag{7}$$

или с обзиром на једначину (6)

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{8}$$

Када извршимо смену у Бине-овом обрасцу, добијамо убрзање планете

$$u_r = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{9}$$

када знамо убрзање и масу m планете онда знамо и силу којом Сунце дејствује на планету

$$P = -m\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{10}$$

Ако у обрасцу (10) сменимо параметар p са $\frac{b^2}{a}$, онда је

$$P = -\frac{maC^2}{b^2 r^2}. \tag{11}$$

Како је површина елипсе

$$a\,b\,\pi,$$

то је секторна брзина планете

$$\frac{ab\pi}{T} = \frac{C}{2},$$

одакле је

$$C = \frac{2ab\pi}{T}.$$

Када сменимо C у једначину (11) биће

$$P = -\frac{4\,m\,a^3\,\pi^2}{T^2 r^2},$$

или смењујући $\frac{a^3}{T^2}$ са δ,

$$P = -\frac{4\,m\,\delta\,\pi^2}{r^2}. \tag{12}$$

Када ставимо

$$4\,\delta\,\pi^2 = \lambda,$$

и извршимо смену у једначини (12) добијамо као сведени образац интензитета силе којом Сунце привлачи једну планету,

$$P = -\frac{\lambda\,m}{r^2}. \tag{13}$$

По трећем Њутновом закону, свакој акцији одговара реакција, те отуда ако масу Сунца обележимо са M, онда сила којом планета дејствује на Сунце је иста као и сила (13) само супротног смера

$$P = \frac{\lambda_1 \, M}{r^2}. \tag{13}$$

Како је

$$\lambda \, m = \lambda_1 \, M,$$

то можемо ставити

$$\frac{\lambda}{M} = \frac{\lambda_1}{m} = k$$

или

$$\lambda \, m = \lambda_1 \, M = M \, m \, k.$$

Када извршимо смену у обрасцу (13) добијамо Њутнов закон

$$P = -k \, \frac{Mm}{r^2}, \tag{14}$$

који гласи:

Узајамно привлачење двеју маса је право пропорционално њиховим величинама, а обрнуто пропорционално квадрату њихових отстојања.

Коефициенат k назива се гравитациона константа.

Када нам је позната централна сила

$$P = -\frac{\lambda \, m}{r^2}, \tag{15}$$

па се тражи једначина трајекторије планете, онда је с обзиром на једначину (10)

$$\lambda = \frac{C^2}{p}$$

па је интензитет дате силе

$$P = -m \, \frac{C^2}{p} \, \frac{1}{r^2},$$

а како је интезитет силе једнак производу из масе m и убрзања u_r, то према Бине-овом обрасцу диференцијална једначина трајекторије гласи

$$\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right] = \frac{C^2}{p}\,\frac{1}{r^2}$$

или кад извршимо скраћивање и ставимо $\left(\frac{1}{r}\right) = u$,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}. \tag{16}$$

Једначина (16) је нехомогена диференцијална једначина другога реда, један њен партикуларан интеграл је $\frac{1}{p}$, а општи интеграл је

$$u = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

где су ε и φ_0 интеграционе константе,

Када сменимо u са $\frac{1}{r}$ добићемо тражену једначину трајекторије планете

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{17}$$

Добивена једначина (17) претставља

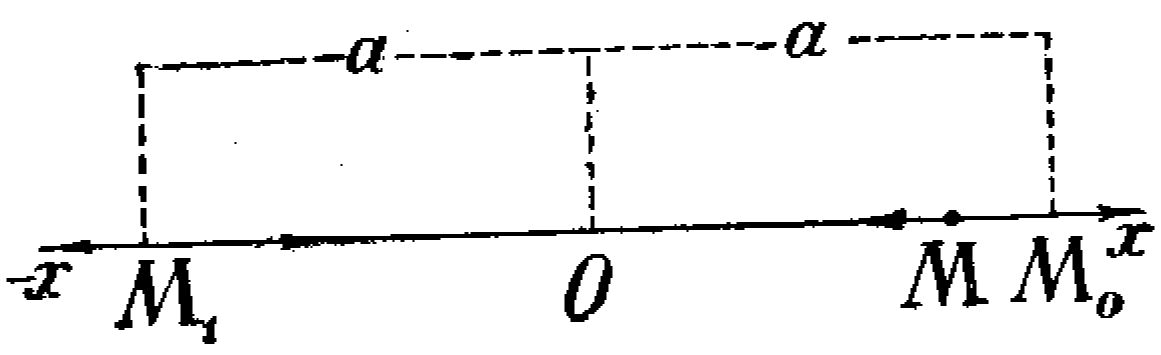
елипсу за $\varepsilon < 1$

хиперболу за $\varepsilon > 1$

и параболу за $\varepsilon = 1$.

Када је путања хипербола или парабола, онда је небеско тело извесна комета.

88. Осцилаторно или периодично кретање. — Ако је O сталан центар (сл. 138.)



Сл 138

какве атрактивне силе $\vec{P}$, која дејствује на слободну материјалну тачку M и чији је интензитет право пропорционалан са отстојањем тачке M од центра O, онда диференцијална једначина кретања тачке M, чија је маса m, гласи

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x, \tag{1}$$

где је λ коефициенат пропорционалности.

Када ставимо

$$\frac{\lambda}{m} = k^2,$$

једначина (1) добија облик

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x. \tag{2}$$

Када за почетне услове кретања узмемо

$$t_0 = 0, \quad x_0 = a$$

и једначину (2) помножимо идентитетом

$$x'\,dt = dx$$

онда она добије облик

$$x'\,dx' = -k^2 x\,dx$$

или

$$d\left(\frac{x'^2}{2}\right) = -k^2 x\,dx,$$

одакле је

$$x'^2 = -2k^2 \int_a^x x dx = k^2 (a^2 - x^2),$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \pm k \sqrt{a^2 - x^2},$$

или

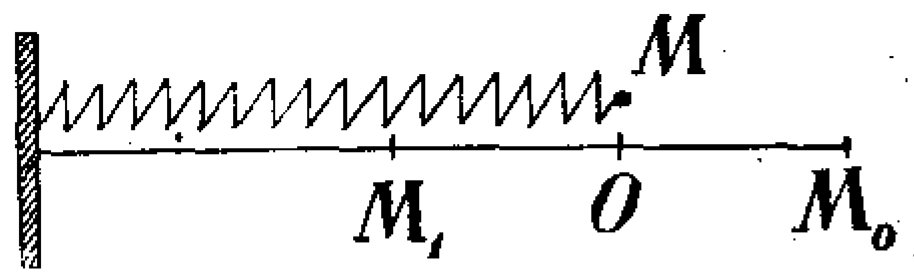
$$t = -\frac{1}{k} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{k} arc\cos\frac{x}{a}. \qquad (3)$$

Кад извршимо инверзију интеграла (3) добићемо коначну једначину кретања тачке M,

$$x = a\cos kt.\ * \qquad (4)$$

Како је косинус периодична функција, то је кретање тачке M *осцилаторно или хармониско* кретање.

Један случај атрактивних сила о каквим је овде говор имамо код потпуно еластичних федера.



Сл. 139

Ако је потпуно еластичан федер (сл. 139) једним крајем причвршћен за своју подлогу, по којој се може истезати и кре- без трења, а на другом слободном крају федера ако се налази једна материјална тачка M, онда кад федер изведемо из његовог равнотежног положаја O до M_0 и пустимо, тачка M ће се кретати осцилаторно од M_0 до M_1.

---

* Да смо узели знак плус пред интегралним знаком добили бисмо једначину кретања тачке M у којој би место косинуса био синус, а која би такође претстављала, као што смо видели у члану 49 осцилаторно кретање.

Дванаести одељак

ка неслободне материјалне тачке

еслободна материјална тачка. — Ако је нека
тачка принуђена да се креће по извесној по-
линији, онда се она према члану 62, назива *несло-*
ријална тачка.

ина или линија по којој се креће материјална
се *веза*. Када је површина или линија по којој
материјална тачка апсолутно глатка, онда се она
и *идеална веза.*

је једна материјална тачка креће по извесној повр-
линији, услед дејства једног система спољних сила
$\vec{P}_n$, онда сем спољњих сила, на материјалну тач-
још и друге две силе, а то су: нормални отпор
ија $\vec{N}$ и трење или тангенцијални отпор $\vec{T}$.

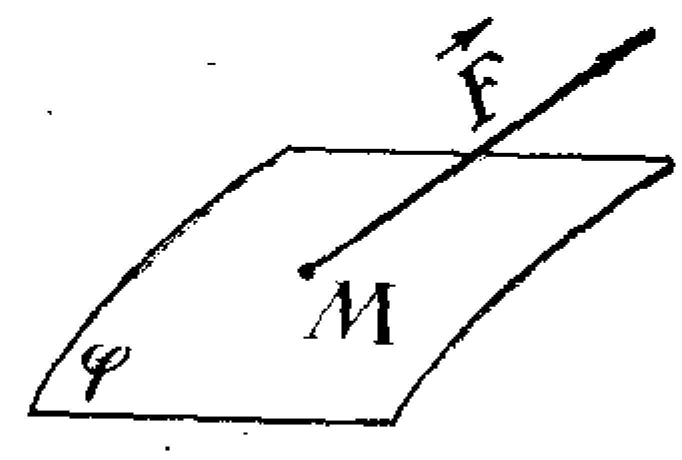
$\vec{N}$ и $\vec{T}$ називају се заједничким именом *силе везе.*

је веза идеална онда је $\vec{T} = 0$.

ретање неслободне материјалне тачке. — Ако је
тачка M (сл. 140) чија је
принуђена да се креће по из-
солутно глаткој површини

$\varphi(x, y, z) = 0;$ (1)

ства спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots,$



Сл. 140.

резултанта $\vec{F}$ онда на материјалну тачку M дејст-
сила реакције $\vec{N}$, те је отуда једначина кретања
не тачке M у векторском облику

$$m\vec{u} = \vec{F} + \vec{N}. \qquad (2)$$

кција $\vec{N}$ има увек правац нормале на површину, то
ције N_x, N_y, N_z, силе реакције пропорционалне
ма правца нормале на површини, дакле

$$N_x = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$N_y = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$N_z = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

где је λ фактор пропорционалности, који се назива још *множитељ везе.*

На основу једначина (3) је

$$\vec{N} = \lambda \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

или $$\vec{N} = \lambda \; grad \; \varphi,$$

те тако једначину (2) можемо написати и у другом векторском облику

$$m\vec{u} = \vec{F} + \lambda \; grad \; \varphi, \tag{4}$$

или у скаларном облику

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ my'' &= Y + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из једначина (1) и (5) одређују се x, y, z као функције времена t, као и множитељ λ и реакција $\vec{N}$.

Када површина

$$\varphi\,(x, y, z) = 0,$$

није апсолутно глатка, онда долази у обзир и сила трења чији је смер супротан брзини

$$\vec{T} = -f \frac{\vec{v}}{v} \lambda \,|\, grad \; \varphi \,|,$$

коју треба додати силама $\vec{F}$ и $\vec{N}$ у једначини (2).

Када је тачка M принуђена да се креће по извесној кривој линији L, која је пресек двеју кривих апсолутно глатких површина,

$$\varphi_1\,(x, y, z) = 0 \text{ и } \varphi_2\,(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

онда је једначина тачке M у векторском облику

$$m\vec{u} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \tag{7}$$

где је $\vec{F}$ резултанта свију спољних сила које дејствују на тачку M, а $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ силе реакције површина.

Једначина (7) у скаларном облику је

$$
\left.
\begin{aligned}
mx'' &= X + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\
my'' &= Y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\
mz'' &= Z + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

омоћу једначина (6) и (8) одређују се x, y, z као функ-
ремена, као и множитељи везе λ_1 и λ_2 и реакције
N_2.

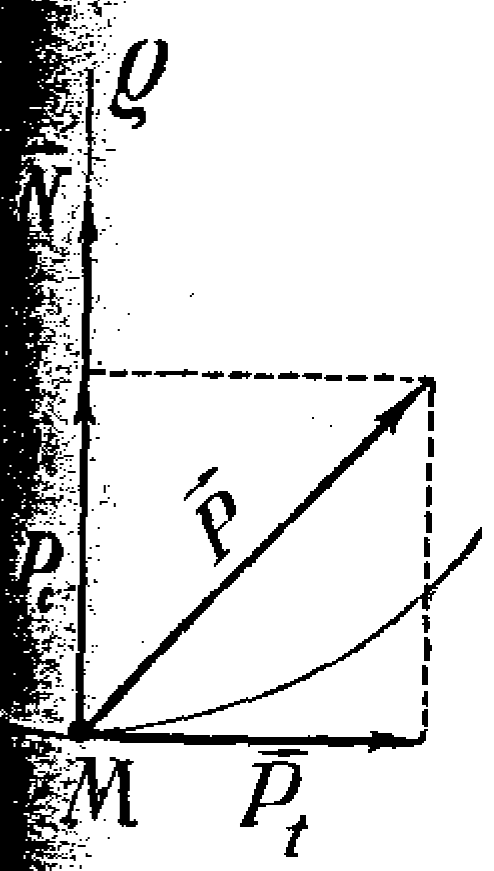
Природне једначине кретања неслободне мате- не тачке. — Када се једна слободна материјална тачка M, маса m креће криволиниски услед дејства спољних сила .., $\vec{P}_n$, чија је резултанта $\vec{P}$, онда је тангенцијална оја на тачку M дејствује

$$\vec{P}_t = m \frac{dv}{dt};$$

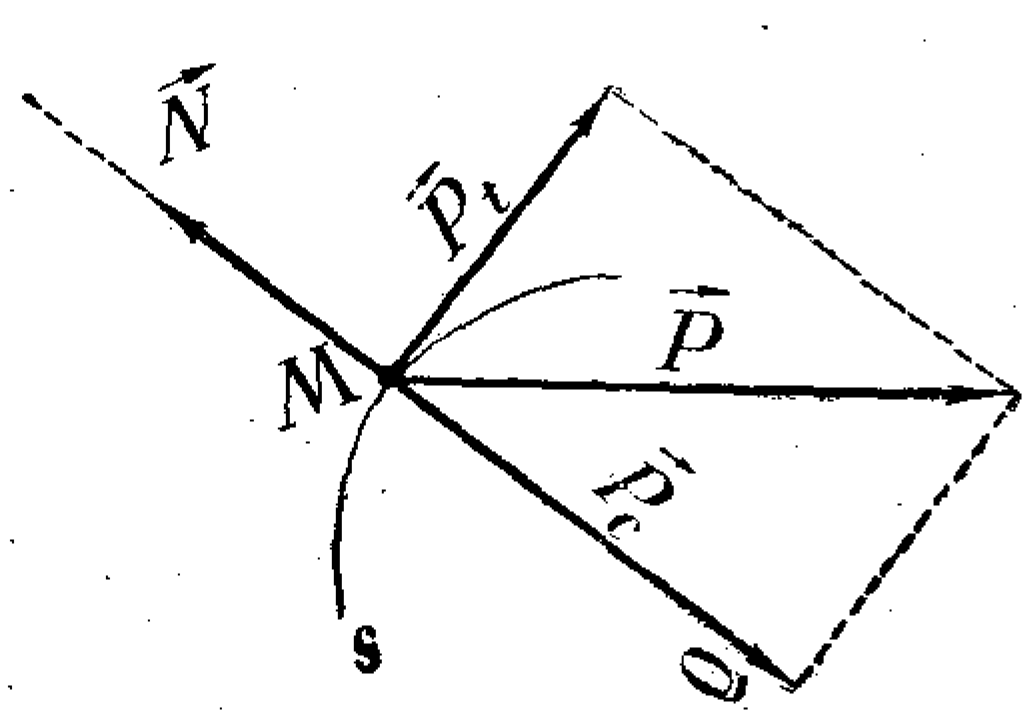
рипетална

$$\vec{P}_c = m \frac{v^2}{\varrho}.$$

ко је материјална тачка M принуђена да се креће вој кривој линији или површини, онда на материјалну M, сем спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$, чија је резултан- дејствује још и сила реакције $\vec{N}$ и сила трења $\vec{T}$. ада се тачка M креће по конкавној страни своје пу- (сл. 141), онда сила реакције $\vec{N}$ и центрипетална сила



Сл. 141.



Сл. 142.

исти правац и смер; а када се тачка M креће по кон- ој страни своје путање s (сл. 142) онда сила реакције

$\vec{N}$ и центрипетална сила имају исти правац а супротан сме[р].

Када бисмо сада узели да се тачка M (сл. 142) и (с[л]. 143) креће слободно онда би интензитет тангенцијалне си[ле] био

$$P_t = m\frac{dv}{dt} = P\ sin(\vec{P}, \varrho) \qquad (5)$$

а центрипеталне

$$P_c = m\frac{v^2}{\varrho} = P\ cos(\vec{P}, \varrho); \qquad (6)$$

али како тачка M није слободна, то на тангенцијалну силу дејствује сила трења $T = fN$ истог правца а супротног сме-ра, па је зато

$$P_t = m\frac{dv}{dt} = P\,sin(\vec{P}, \varrho) - fN \qquad (7)$$

а на центрипеталну силу (сл. 142) дејствује сила реакције N, истог правца и смера, те је отуда

$$P_c = m\frac{v^2}{\varrho} = P\ cos\ (\vec{P}, \varrho) + N \qquad (8)$$

и најзад на центрипеталну силу (сл. 142) дејствује сила ре-акције N, истог правца а супротног смера, те је тако у том[е] случају

$$P_c = m\frac{v^2}{\varrho} = P\ cos\ (\vec{P}, \varrho) - N. \qquad (9)$$

Када при кретању материјалне тачке занемарујемо тре-ње односно када узимамо да је крива површина или крива линија по којој се тачка креће апсолутно глатка, онда обра-зац (7) губи други члан с десне стране.

Из обрасца (8) и (9) можемо увек одредити силу нор-малног отпора $\vec{N}$, када су нам познате остале количине.

А како свакој акцији одговара реакција према трећем Њутновом закону, то и тачка M дејствује истом силом [а] супротног правца — $\vec{N}$ на своју путању.

Притисак — $\vec{N}$ тачке M на путању, назива се *нормал-ни притисак или динамички притисак.*

Исто тако центрипеталној сили, из образаца (8) и (9) одговара супротна сила која се назива *центрифугална сила*. Центрифугална сила иде дакле од центра ка путањи.

да силу нормалног отпора и трења сложимо у резул-
$\vec{W}$, онда је

$$\vec{P} + \vec{W} = \vec{R}, \tag{10}$$

сила $\vec{R}$ резултанта спољних сила и отпора.
ко је

$$\vec{R} = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0 + m \frac{v^2}{\varrho} \vec{n}_0,$$

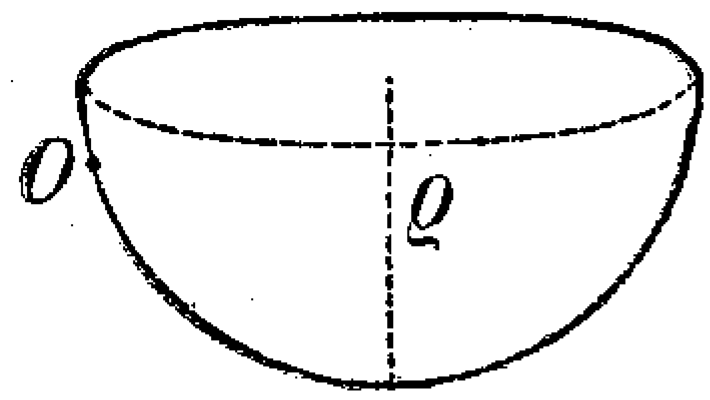
обзиром на једначину (10)

$$\vec{P} + \vec{W} = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0 + m \frac{v^2}{\varrho} \vec{n}_0. \tag{11}$$

је тоталан притисак

$$-\vec{W} = \vec{P} - m \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0 - m \frac{v^2}{\varrho} \vec{n}_0. \tag{12}$$

ример. — Израчунати интензитет силе нормалног при-
$\vec{N}$, једне металне лоптице, чија је тежина Q а која
на из тачке O (сл. 143) без почетне брзине, креће се
теже по унутрашњој површини металне лопте, чији је полупреч-



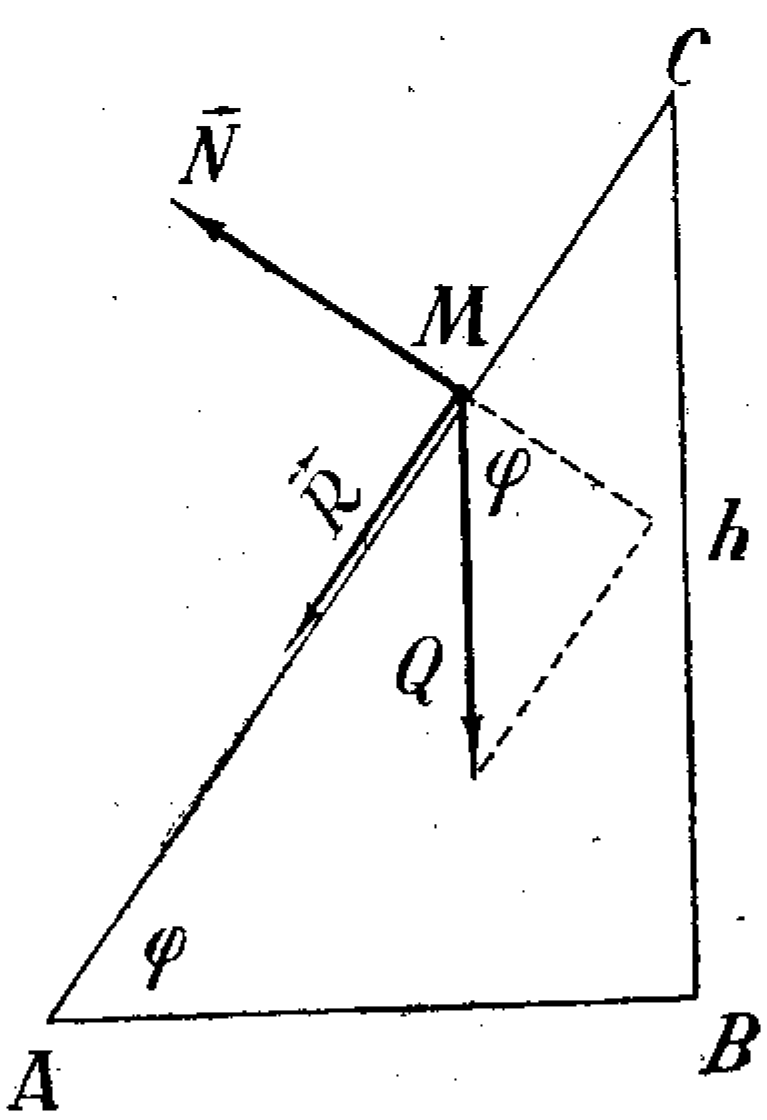
Сл. 143.

рема обрасцу (8) тражени интен-
притиска је

$$-N = Q \cos(Q,\varrho) - \frac{Q}{g} \varrho\, \omega^2.$$

92. **Кретање на стрмој равни.** — Када материјалну
M (сл. 144), чија је маса m, ста-
на апсолутно глатку раван AC,
заклапа са хоризонталном равни
угао φ, тачка M услед теже от-
не да се креће.

На тачку M дејствују две силе
апсолутна тежина $\vec{Q} = m\vec{g}$ и
лни отпор равни $\vec{N}$. Тачка M ће,
акле, кретати под дејством резул-
$\vec{R}$ сила $\vec{Q}$ и $\vec{N}$.



Сл. 144.

Како је резултанта $\vec{R} = m\vec{g}\ sin\ \varphi$, то ће диференцијална једначина кретања тачке M бити

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\,sin\,\varphi, \tag{1}$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\ sin\ \varphi.$$

или

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = g\,sin\,\varphi,$$

или

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right) = g\ sin\ \varphi\,dt,$$

одакле интеграљењем добијамо

$$\frac{ds}{dt} = (g\ sin\ \varphi)\,t + C_1$$

или

$$ds = [(g\ sin\ \varphi)\ t + C_1]\ dt$$

или извршивши интеграљење

$$s = (g\ sin\ \varphi)\ \frac{t^2}{2} + C_1t + C_2. \tag{2}$$

Када узмемо да су почетни услови кретања $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, и одредимо произвољне константе C_1 и C_2 добијамо коначну једначину кретања слободне материјалне тачке низ стрму раван

$$s = g\ \frac{t^2}{2}\,sin\ \varphi. \tag{3}$$

Пример. — Наћи једначину кретања материјалне тачке која се креће низ апсолутно глатку раван, која је нагнута према хоризонталној равни, под углом од 45^0, као и пут који тачка пређе за 2 секунде.

Како је $sin\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то је тражена једначина кретања материјалне тачке

$$s = 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Пут који тачка пређе за 2 секунде је $9{,}81 \cdot \sqrt{2}\ m$.

Како у природи не постоје апсолутно глатке стрме равни, то се при рачунању са стрмим равнима узима у обзир и трење T.

Како је трење

$$T = f N,$$

$$N = m g \cos \varphi,$$

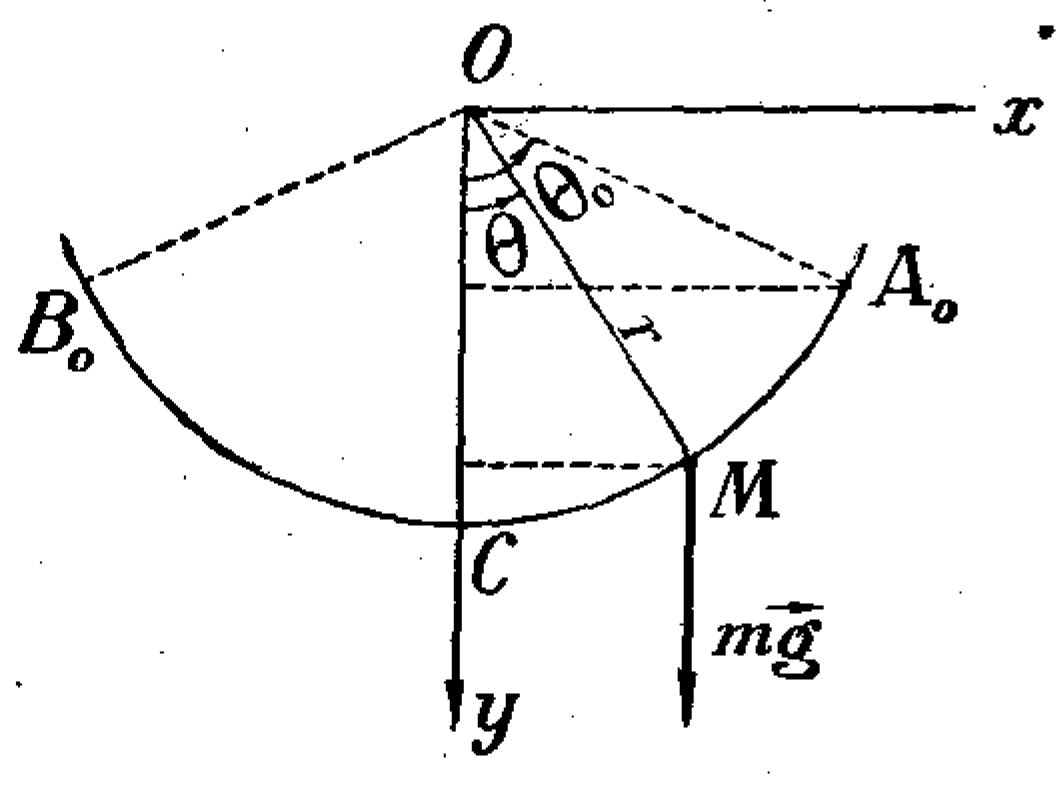
то кад у диференцијалну једначину (1) унесемо силу трења, биће

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = m g (\sin \varphi - f \cos \varphi),$$

одакле интеграљењем као у претходном случају добијамо коначну једначину кретања материјалне тачке, низ стрму раван, с обзиром на трење

$$s = \frac{g}{2} (\sin \varphi - f \cos \varphi)\, t^2.$$

93. Математичко клатно. — Материјална тачка M, чија је маса m, обешена, у безваздушном простору, о конац без тежине и истезања, и која се може клатити без трења у тачки вешања O (сл. 145) назива се *математичко клатно*, или *кружно клатно*. *



Сл. 145

$OM = r$ назива се *дужина клатна*. Положај клатна OC назива се *равнотежни положај клатна*. Угао θ_0 за који се клатно највише удаљава од свог равнотежног положаја назива се *амплитуда клатна*; а сваки други угао који клатно заклапа са својим равнотежним положајем назива се *елонгација*. Кретање клатна од A_0 до B_0 назива се *осцилација клатна*; а кретање клатна од A_0 до B_0 и од B_0 до A_0 назива се *периода клаћења клатна*.

Када клатно изведемо за угао θ_0 из његовог равнотежног положаја и пустимо (без почетне брзине), клатно ће услед теже отпочети да се креће.

---

* Постоји и оваква дефиниција математичкога клатна: Материјална тачка M, чија је маса m, а која се услед теже креће у безваздушном простору по обиму једнога вертикалнога круга, без трења, назива се *Математичко клатно или кружно клатно.*

Како је тежа конзервативна сила, то за кретање клатна важи интеграл живе силе

$$T = U + h, \tag{1}$$

а почетни услови кретања су $t_0 = 0, \theta = \theta_0, v_0 = 0$.

Када у једначини (1) сменимо поједине количине њиховим одговарајућим вредностима *, добићемо диференцијалну једначину кретања математичког клатна,

$$m \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mrg\ (\cos\theta - \cos\theta_0), \tag{2}$$

или
$$dt = \pm \frac{r\ d\theta}{\sqrt{2\,rg\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}},$$

или

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\ dt = \pm \frac{d\,\theta}{\sqrt{2\ (\cos\theta - \cos\theta_0)}},$$

или, ставивши

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta_0}{2},$$

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\ dt = \pm \frac{d\,\theta}{\sqrt{4\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}. \tag{3}$$

Једначину (3) у општем случају не можемо интегралити у коначном облику, јер се своди на елиптични интеграл прве врсте. Али кад је угао амплитуде клатна θ_0 тако мали да се може ставити

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2}, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}, \tag{4}$$

што је махом и у употреби, онда се једначина (3) може решити и у коначном облику.**

---

* Одговарајуће вредности су: $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(r\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2$,

$U = mgy = mrg\cos\theta,\ h = \left(\frac{mv_0^2}{2} - U_0\right) = mgy_0 = mrg\cos\theta_0$, што се види из (сл. 146).

** Под малим угловима, чији се синус може заменити самим углом, сматрају се углови до 5^0.

Када у једначини (3) у том случају, извршимо наведену под (4) биће

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\,dt = \pm\frac{d\,\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}},$$

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\int dt = -\int\frac{d\,\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}},$$

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\,t + C = arc\ \ cos\,\frac{\theta}{\theta_0},$$

кад извршимо инверзију добивеног интеграла,

$$\theta = \theta_0\,cos\left[\sqrt{\frac{g}{r}}\,t + C\right].$$

Како је интеграциона константа C, услед почетних ова кретања $t_0 = 0$, $\theta = \theta_0$, једнака нули, то је коначна начина кретања математичког клатна, за мале амплитуде,

$$\theta = \theta_0\,cos\sqrt{\frac{g}{r}}\,t. \qquad (5)$$

Како је косинус периодична функција, то је кретање атна *периодично или осцилаторно.*

да једначину (5) напишемо у облику

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\,arc\ cos\,\frac{\theta}{\theta_0},$$

ставимо $\theta = 0$, добићемо време трајање једне амплитуде атна,

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

ао и време једне осцилације клатна

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \qquad (6)$$

Пошто су све количине у једначини (6) сталне, то је реме трајања осцилација исто за сва клатна, чији угао амлитуде не прелази напред речене услове, и зато се сва аква клатна називају *изохрона.*

Ако узмемо да једна осцилација клатна траје једну секунду, онда једначину (6) можемо написати у облику

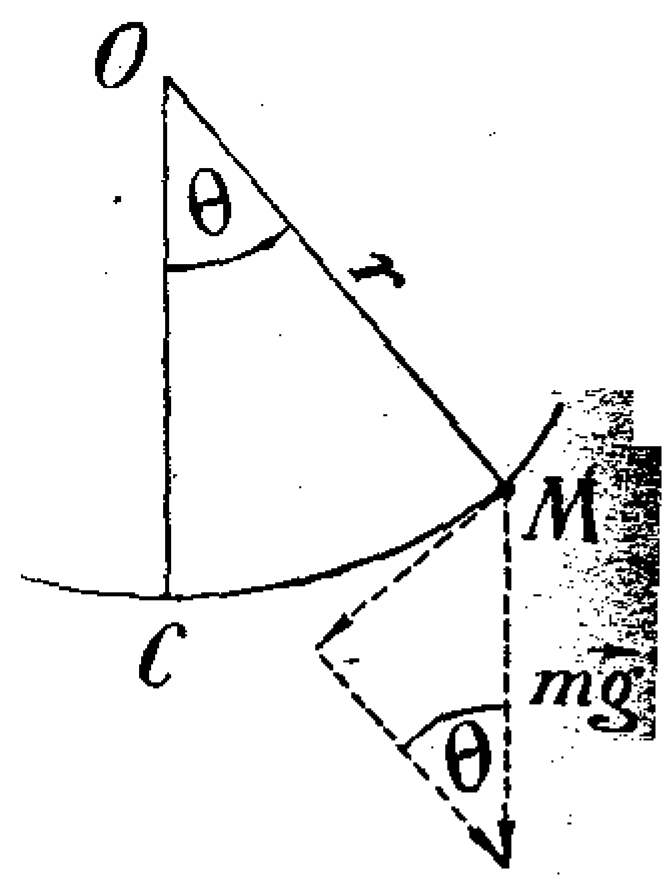
$$1 = \pi^2\,\frac{r}{g}. \qquad (7)$$

Помоћу једначине (7) можемо одредити дужину r секундног клатна за свако место када нам је познато убрзање земљине теже g места. А исто тако можемо одредити убрзање g, кад нам је позната дужина r секундног клатна места.

Како је кретање математичког клатна кружно кретање, то је центрипетална сила клатна (сл. 146)

$$m\, r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\, m g \cos \theta + N, \qquad (8)$$

где је N интензитет реакције конца*



Сл. 146

Када леву страну једначине (8) сменимо одговарајућом вредношћу, десне стране једначине (2) и уредимо, добијамо једначину

$$N = m\, g\, (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0),$$

која нам служи за одређивање реакције конца N.

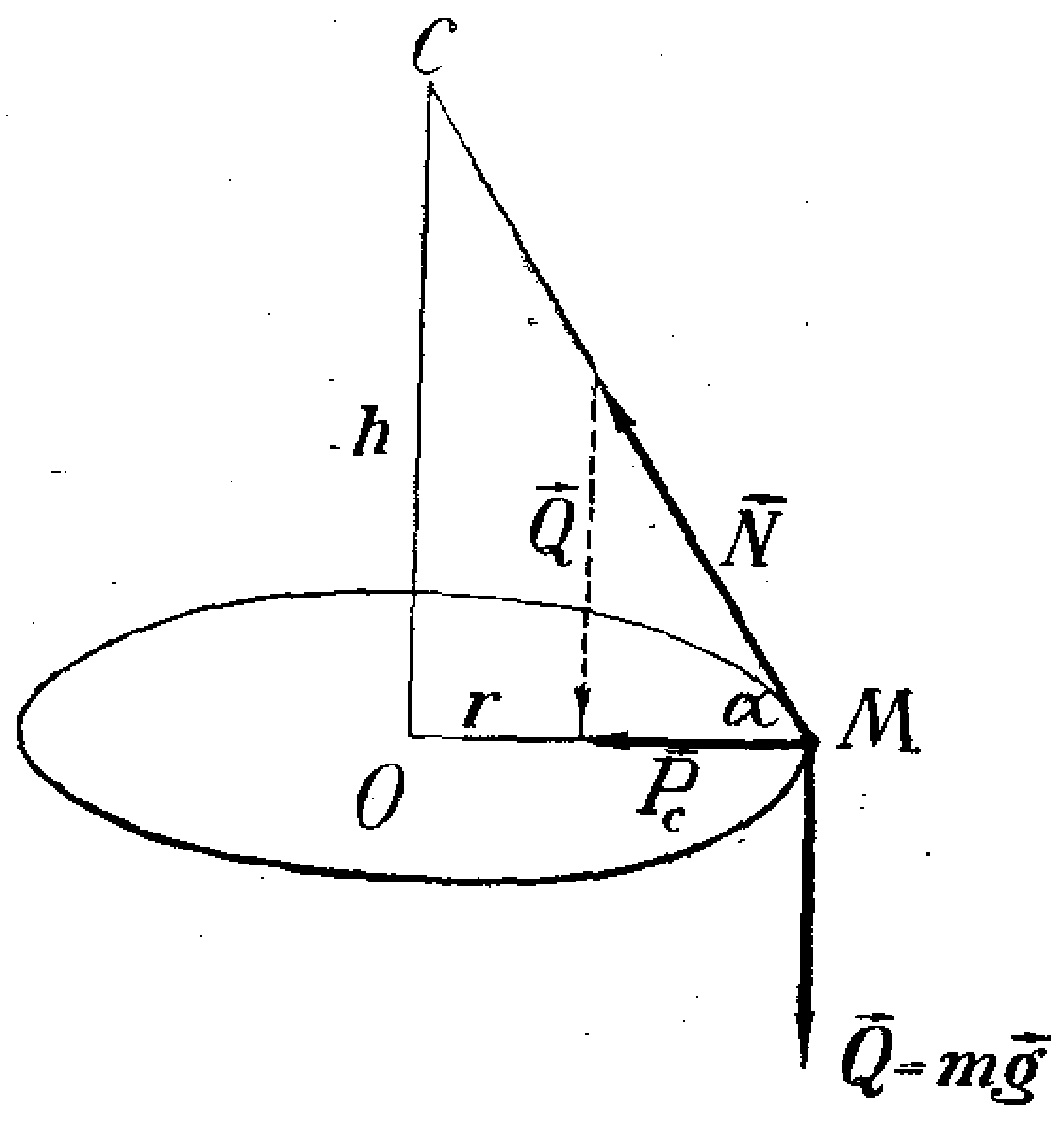
Како је θ_0 стална количина то реакција има највећу вредност за $\theta = 0$,

$$N = m g\, (3 - 2 \cos \theta_0),$$

а најмању за $\theta = \theta_0$,

$$N = m g \cos \theta_0.$$

94. Конично клатно. — Кад имамо клатно као у претходном члану, али које се може окретати око своје тачке вешања, па га изведемо из његовог равнотежног положаја и дамо му извесну почетну тангенцијалну брзину v, клатно ће услед дате му брзине v и теже вршити непрестано кружно кретање (сл. 147).



Сл. 147.

Такво клатно, које врши кружно кретање називамо *конично клатно*.

На тачку M, чија је маса m, дејствује сила теже $\vec{Q} = m\vec{g}$, сила отпора кон-

* Када се клатно дефинише као кретање материјалне тачке по обиму вертикалног круга, онда је N интензитет силе притиска на круг.

а $\vec{N}$, и њихова резултанта центрипетална сила $\vec{P}_c$, услед које се врши кретање клатна.

Из троугла сила $\vec{P}_c$ $\vec{N}$ $\vec{Q}$ је

$$\frac{Q}{P_c} = tg\ \alpha = \frac{h}{r} \tag{1}$$

дакле центрипетална сила

$$P_c = \frac{Q}{tg\alpha} = Q\ \frac{r}{h}, \tag{2}$$

како је центрипетална сила

$$P_c = \frac{Q}{g}\ \frac{v^2}{r},$$

то је

$$\frac{Q}{g}\ \frac{v^2}{r} = Q\ \frac{r}{h} \tag{3}$$

или

$$v = r\ \sqrt{\frac{g}{h}}. \tag{4}$$

Помоћу једначине (4) можемо увек одредити почетну брзину v коничног клатна, када нам је позната висина h и полупречник r.

Како је

$$v = \frac{s}{t},$$

$$s = 2r\pi,$$

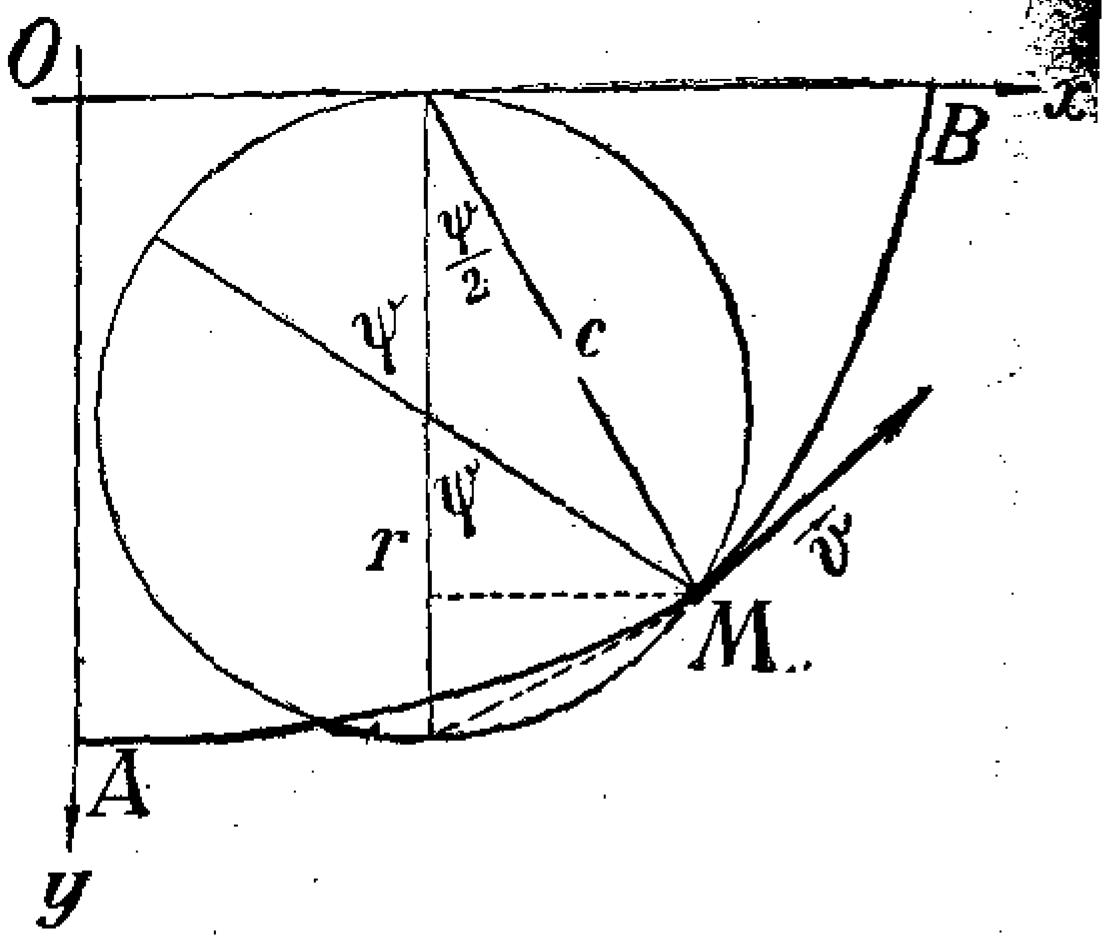
то је потребно време за једно кружење клатна

$$T = \frac{2r\ \pi}{v} = 2\pi\ \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Изведена теорија коничног клатна примењује се код центрифугалних клатна, која служе за регулисање паре код парних машина.

95. Циклоидално клатно. — Када се материјална тачка M, чија је маса m, услед теже, у безваздушном простору креће по обиму једне непокретне и вертикалне циклоиде, без трења, онда нам материјална тачка M, претставља *циклоидално клатно.*

Ако нам крива AB (сл. 148) претставља извесну циклоиду, по којој се материјална тачка M креће као што смо казали, онда је амплитуда клатна AB.



Сл. 148.

Једначина циклоиде је, као што нам је познато из Аналитичне геометрије, и с обзиром што смо координатни систем узели тако да је позитиван смер y-осе управљен на доле,

$$\left. \begin{aligned} x &= r\,(\psi + \sin \psi) \\ y &= r\,(1 + \cos \psi), \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

где је r полупречник круга генератрисе циклоиде.

Елементаран пут Δs које тачка M пређе у току времена Δt је

$$\Delta s = c \, \Delta \psi,$$

одакле је за $\lim \Delta t = 0$,

$$\frac{ds}{dt} = v = c \frac{d\psi}{dt},$$

или, с обзиром што је $c = 2r \cos \frac{\psi}{2}$,

$$\frac{ds}{dt} = 2r \cos \frac{\psi}{2} \frac{d\psi}{dt},$$

или

$$\frac{ds}{dt} = 4\,r \cos \frac{\psi}{2} \frac{d \frac{\psi}{2}}{dt}. \tag{2}$$

Када извршимо интеграљење једначине (2) узимајући да су почетни услови кретања $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, добићемо

$$s = 4r \sin \frac{\psi}{2}. \tag{3}$$

Ако узмемо ради краткоће да је маса тачке M,

$$m = 1,$$

и пођемо од интеграла живе силе

$$T = U + h,$$

где је

$$U = gy,$$

онда је с обзиром на једначине (1),

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gr \cos \psi + h_1, \tag{4}$$

где је $h_1 = 2h + 2gr$.

Када ставимо

$$\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

и извршимо смену у једначини (4) и групишемо сталне количине у константу A, имаћемо

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = A - 4\, gr \sin^2 \frac{\psi}{2},$$

или с погледом на једначину (3),

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = A - \frac{g}{4r} s^2,$$

или уводећи нову константу

$$\alpha^2 = A \cdot \frac{4r}{g},$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{g}{4r} (\alpha^2 - s^2). \tag{5}$$

Када једначину (5) интегралимо, биће

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\alpha^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{4r}}\, t + C,$$

или

$$\operatorname{arc} \sin \frac{s}{\alpha} = \sqrt{\frac{g}{4r}}\, t + C,$$

или

$$s = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4r}}\, t + C\right).$$

Интеграциона константа C је, услед почетних услова $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, једнака нули, те отуда коначна једначина кретања циклоидалнога клатна је

$$s = \alpha \sin \sqrt{\frac{g}{4r}}\, t. \tag{6}$$

Како је синус периодична функција, то је кретање циклоидалнога клатна хармониско или периодично.

Када периоду времена означимо са T, и имамо на уму да је синус периодична функција чија је периода 2π, онда је

$$\sin \left[\sqrt{\frac{g}{4r}} (t + T)\right] = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{4r}}\, t + 2\pi\right)$$

одакле је

$$\sqrt{\frac{g}{4r}}\,T = 2\pi,$$

или

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \qquad (7)$$

Како време T не зависи ни од угла ψ ни од величине амплитуде, односно лука циклоиде као што се види из обрасца (7), то излази да време трајања појединих осцилација код циклоидалних клатна је исто па ма колике биле амплитуде клатна, и зато су сва циклоидална клатна уопште *изохрона.*

Тринаести Одељак

Динамика система материјалних тачака и крутог тела

96. Систем материјалних тачака. — Један скуп материјалних тачака, чије је међусобно отстојање стално, назива се у Механици *систем материјалних тачака,* или краће само *систем.*

Када су материјалне тачке одвојене, онда оне чине један *дискретан систем материјалних тачака;* а када су материјалне тачке континуирано распоређене, онда оне чине извесно *тело.*

Пример. — Земља, Сунце и Месец узети као планете, чине један систем дискретних материјалних тачака; а свако тело уопште: Земља, камен, дрво итд., је један систем континуираних материјалних тачака.

Између материјалних тачака једнога система постоји увек извесна веза, односно сила којом оне једна другу узајамно привлаче, и одржавају у заједници.

97. Специфична тежина и густина тела. — Апсолутна тежина једног кубног сантиметра неког тела, назива се *специфична тежина* тога тела.

Како једно тело има V кубних сантиметара запремине, то ако његову специфичну тежину обележимо са s, а апсолутну тежину са Q, добијамо образац

$$Q = Vs \qquad (1)$$

одакле је

$$V = \frac{Q}{s} \tag{2}$$

$$s = \frac{Q}{V}. \tag{3}$$

Како је маса m неког тела, чија је апсолутна тежина Q

$$m = \frac{Q}{g}, \tag{4}$$

то с обзиром на образац (1) биће

$$m = V\frac{s}{g} = \sigma V \tag{5}$$

одакле је

$$\sigma = \frac{m}{V}. \tag{6}$$

Количина σ назива се *густина тела.*

Када је маса m распоређена само по извесној површини F онда је густина

$$\sigma = \frac{m}{F}, \tag{7}$$

а када је маса m распоређена по некој линији l, онда је

$$\sigma = \frac{m}{l} \tag{8}$$

те отуда према обрасцима (6), (7) и (8) добијамо дефиницију густине:

Густина је маса на јединици запремине, на јединици површине и на јединици линије, према томе да ли се одређује густина неког тела, неке површине или неке линије.

Када је линија, површина или тело хомогено, онда је густина иста, како у њиховим коначним деловима, тако и у њиховим бесконачно малим деловима, па је с тога

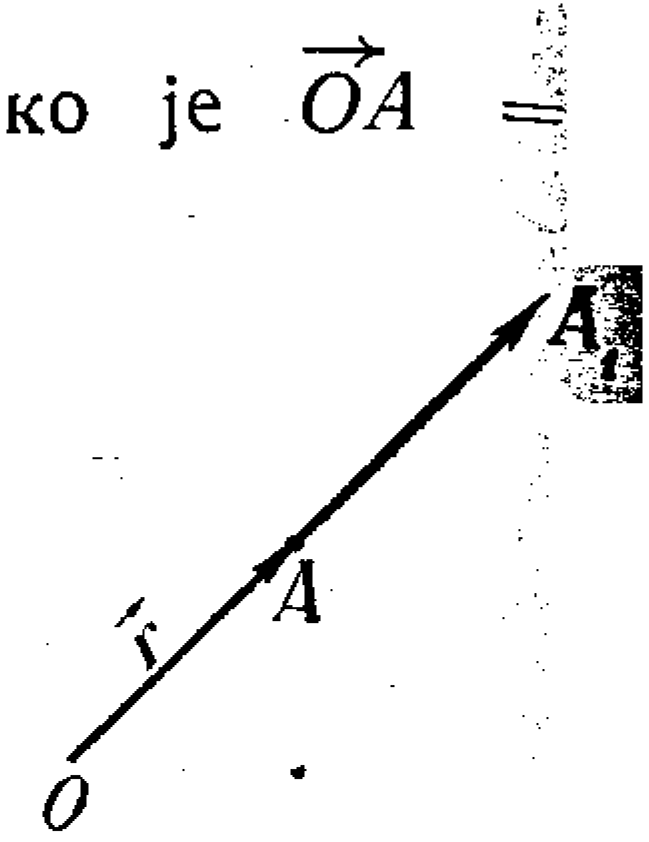
$$\sigma = \frac{dm}{dl}, \tag{9}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dF}, \tag{10}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dV}. \tag{11}$$

Код нехомогених тела густина није иста у свима деловима тела, већ је извесна функција координата поједини материјалних тачака тела.

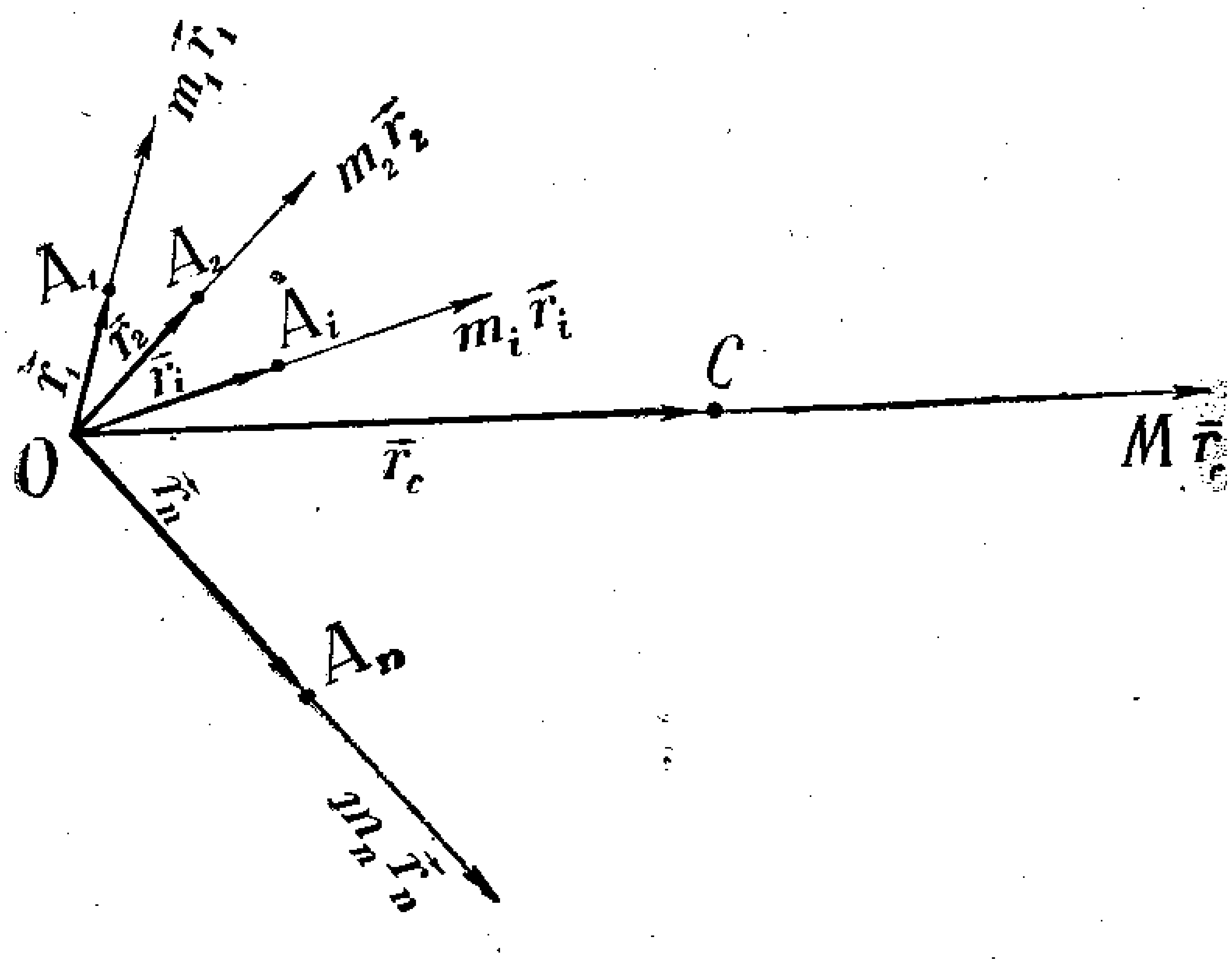
98. Вектор оптерећен масом. — Ако је $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ (сл. 149) вектор положаја материјалне тачке A, чија је маса m, па вектор положаја $\vec{r}$ помножимо скаларно масом m, добићемо вектор $\overrightarrow{OA_1}$.



Сл. 149

Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ назива се *вектор оптерећен масом*. Његов је интензитет $m|\vec{r}|$, а правац и смер исти као и вектора положаја $\vec{r}$.

99. Центар маса. — Када имамо у простору један систем материјалних тачака $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$, чије су масе $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ (сл. 150), па узмемо један произвољан пол O и конструишемо векторе положаја $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_i, \ldots, \vec{r}_n$ материјалних тачака, а затим сваки вектор положаја помножимо масом одговарајуће тачке, онда ћемо добити један систем вектора оптерећених масама



Сл. 150

$$m_1 \vec{r}_1, m_2 \vec{r}_2, \ldots, m_i \vec{r}_i, \ldots, m_n \vec{r}_n .$$

Ако векторе оптерећене масом саберемо добићемо један вектор, који је оптерећен масом свију тачака.

Када целокупну масу тачака означимо са M

$$\mathsf{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (1)$$

а вектор који је оптерећен целокупном масом са $\mathsf{M}\,\vec{r}_c$, онда је збир вектора оптерећених масама

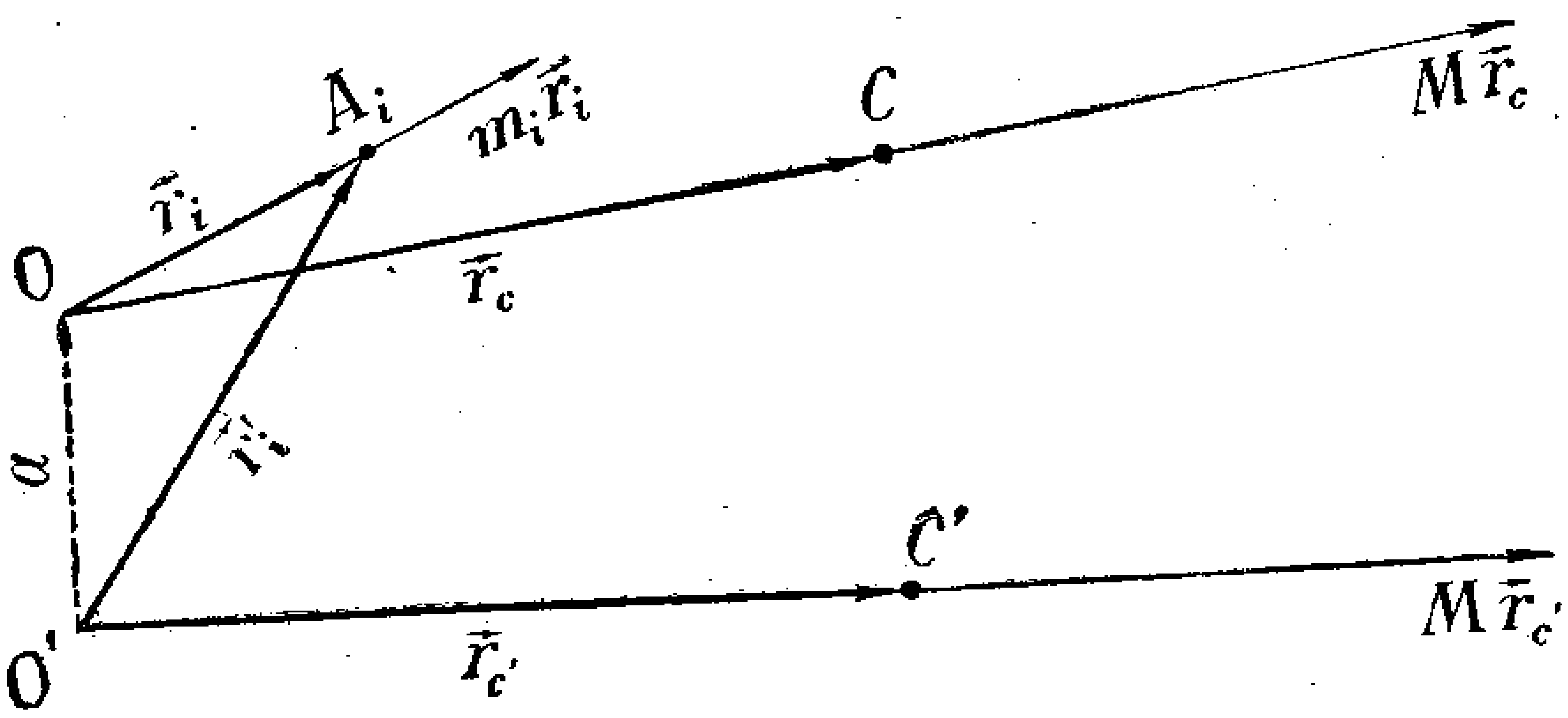
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \mathrm{M}\,\vec{r}_c . \tag{2}$$

вектор резултанту $\mathrm{M}\,\vec{r}_c$, растеретимо масом M, када га помножимо са $\frac{1}{\mathrm{M}}$, добићемо вектор $\vec{r}_c$ чи- тачка C, у којој је према дефиницији оптерећених сконцентрисана целокупна маса M. Тачка C назива ...ар *маса* или још и *тежиште маса*.

...ктор $\vec{r}_c$ можемо с погледом на обрасце (1) и (2) ...вити и изразом

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{3}$$

...ко смо ми за пол узели произвољну тачку у про- ...то ће- ...а до- ...да од- ...ње по- ...цен- ...аса C, ...иси од ...пола. ...ко ме- ...ола O ...о пол O' (сл. 151), онда је



Сл. 151.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} ; \qquad \vec{r}_{c'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r'}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} , \tag{4}$$

...о је, као што се из слике види

$$\vec{r'}_i = \vec{a} + \vec{r}_i \tag{5}$$

...с погледом на једначине (4) и (5)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \; (\vec{a} + \vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a} + \sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \vec{a} + \vec{r}_c .$$

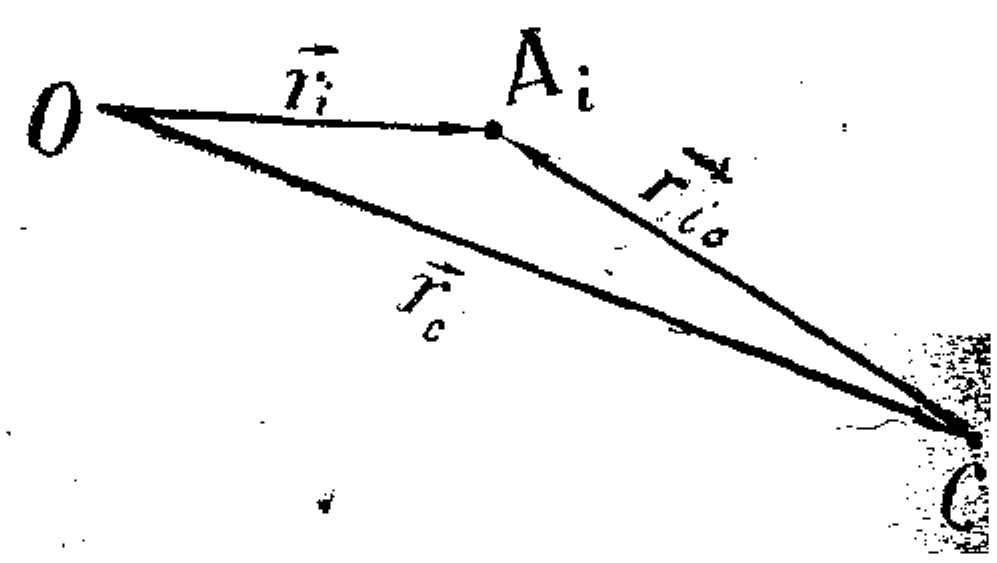
...да је .

$$\vec{r}_c{}' = \vec{a} + \vec{r}_c ,$$

онда троугао који затварају та три вектора мора бити з- творен, а да би тај троугао био затворен, као што се с слике види, мора се центар C' поклапати са центром C; отуда добијамо теорему:

Теорема. — *Одређивање положаја центра извесних м- са не зависи од избора пола вектора положаја појединих маса.*

Када узмемо сада за пол O', сам центар масе C, онда тачка A_i има вектор положаја $\vec{r}_i$, а вектор $\vec{r}_i$ је, као што се види (сл. 152) резултанта вектора $\vec{r}_c$ и $\vec{r}_{ic}$,



Сл. 152.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

те је отуда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_c + \vec{r}_{ic})$$

или с обзиром на једначину (2)

$$\mathrm{M}\vec{r}_c = \vec{r}_c \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{ic},$$

или

$$\mathrm{M}\vec{r}_c = \mathrm{M}\vec{r}_c + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{ic},$$

одакле видимо да је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{ic} = 0$$

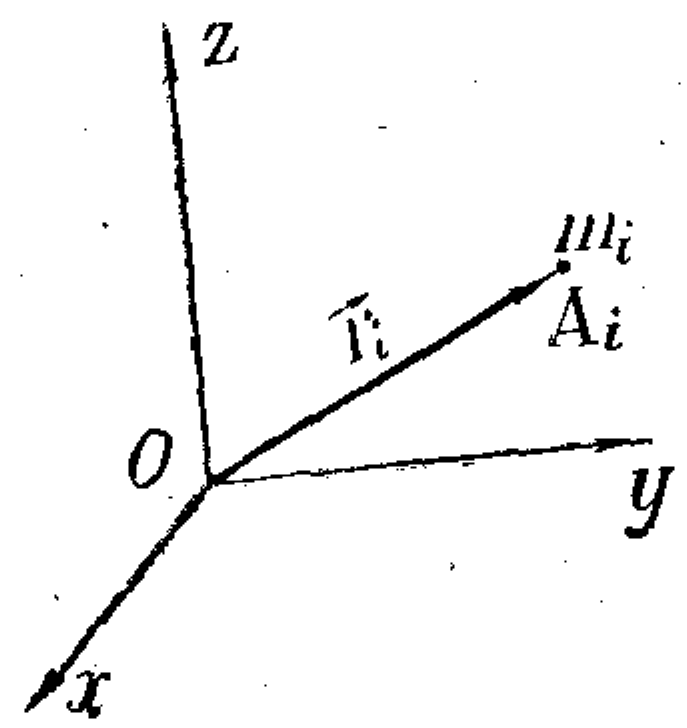
и изводимо седећу теорему:

Теорема. — *Збир вектора положаја једног система материјалних тачака, чији је пол центар маса материјалних тачака је једнак нули.*

100. Скаларне једначине центра или тежишта маса. — Када имамо један систем материјалних тачака A_1, A_2, . . . A_i, . . . , A_n, онда је као што смо видели вектор $\mathrm{M}r_c$ који је оптерећен целокупном масом дат обрасцем

$$M\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \,. \qquad (1)$$

Ако пол O вектора положаја материјалних тачака узмемо за почетак правоуглог координатног система (сл. 153) онда ма која материјална тачка; чија је маса m_i, има координате (x_i, y_i, z_i), које су у исто време и координате односно пројекције вектора положаја материјалне тачке A_i, па отуда, када једначину (1) пројицирамо, биће



Сл. 153.

$$\left.\begin{aligned} Mx_c &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,, \\ My_c &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,, \\ Mz_c &= \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \,, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

дакле су координате центра или тежишта маса C

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Производ из величине једног скалара и његовог отстојања од извесне дате равни, са одговарајућим знаком, назива се *линеарни моменат*, тога скалара у погледу дате равни. Како нам $m_i x_i$ претставља производ из скалара m_i и његовог отстојања x_i од координатне равни yOz, то је $m_i x_i$ линеарни моменат масе m_i у погледу координатне равни yOz, те отуда из израза

$$Mx_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \; x_i \;,$$

$$My_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \, y_i \, ,$$

$$Mz_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \, z_i \, ,$$

изводимо став:

Збир линеарних момената свих маса једнога система једнак је линеарном моменту целокупне масе сконцентрисане у центру маса.

Ако раван у погледу које узимамо линеарни моменат маса, пролази кроз центар маса, онда је отстојање $x_c = 0$, а према томе и збир свих линеарних момената масе је једнак нули

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i = M \cdot 0 = 0.$$

Ако су материјалне тачке $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$, континуирано распоређене тачке каквог хомогеног тела, површине или линије, онда њихове масе сматрамо као бесконачно мале масе и обележавамо их са $dm_1, dm_2, \ldots, dm_i, \ldots, dm_n$, као диференцијале масе, и збирови под (3) постају интеграли и то:

1°. Када одређујемо тежиште каквог тела, имајући у виду да се збирови његових материјалних тачака протежу у три правца,

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\iiint\limits_V x\,dm}{\iiint\limits_V dm}, \\ y_c &= \frac{\iiint\limits_V y\,dm}{\iiint\limits_V dm}, \\ z_c &= \frac{\iiint\limits_V z\,dm}{\iiint\limits_V dm}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

2°. Када одређујемо тежиште неке површине, водећи ...уна да се њене материјалне тачке протежу у два правца

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\displaystyle\int\!\!\int_F x\,dm}{\displaystyle\int\!\!\int_F dm}, \\ y_c &= \frac{\displaystyle\int\!\!\int_F y\,dm}{\displaystyle\int\!\!\int_F dm} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

3°. Када одређујемо тежиште какве линије,

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_l x\,dm}{\displaystyle\int_l dm}, \qquad (6)$$

...е материјалне тачке линија протежу само у једном правцу. Ако у обрасцима под (4), (5) и (6), место диференци... ...масе dm, уведемо његову вредност из образаца (9), (10) ...члану 97, добићемо обрасце за одређивање тежишта тела

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_V \sigma x\,dV}{\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_V \sigma\,dV}, \\ y_c &= \frac{\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_V \sigma y\,dV}{\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_V \sigma\,dV}, \\ z_c &= \frac{\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_V \sigma z\,dV}{\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \sigma\,dV}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

површина

$$
\left.\begin{aligned}
x_c &= \frac{\iint\limits_F \sigma x dF}{\iint\limits_F \sigma dF}, \\
y_c &= \frac{\iint\limits_F \sigma y dF}{\iint\limits_F \sigma dF};
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

и линија

$$
x_c = \frac{\int\limits_l \sigma x dl^*}{\int\limits_l \sigma dl} . \tag{9}
$$

Када су нам потребне само координате тежишта тела, површина и линија, онда коефицијенат густине σ у обрасцима (7), (8) и (9) извлачимо пред интегрални знак у бројиоцу и имениоцу и скраћујемо, и тако добивени обрасци служе нам за одређивање координата тежишта чисто геометриских тела, површина и линија.

Пример. — Израчунати координате тежишта линије l (сл. 154).

$$
y = 3x \tag{1}
$$

у границама $x = 0$ и $x = 6$.

---

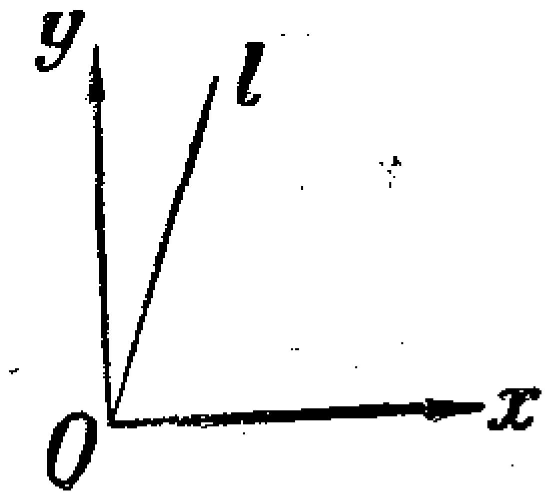
* Кад су линија, површина и тело, чије се тежиште тражи изражени помоћу Декартових координата, онда је,

$$
\begin{aligned}
dl &= \sqrt{1 + y'^2}\; dx, \\
dF &= dx\, dy \\
dV &= dx\, dy\, dz,
\end{aligned}
$$

а границе дуж l, F и V су једнаке одговарајућим границама од x, y, z.

Кад једначину (1) диференцијалимо, биће

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3,$$



Сл. 154

па је

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{10}\, dx, \qquad (2)$$

те је

$$\int_0^6 dl = \sqrt{10} \int_0^6 dx = \sqrt{10}\, |x|_0^6 = 6 \sqrt{10}.$$

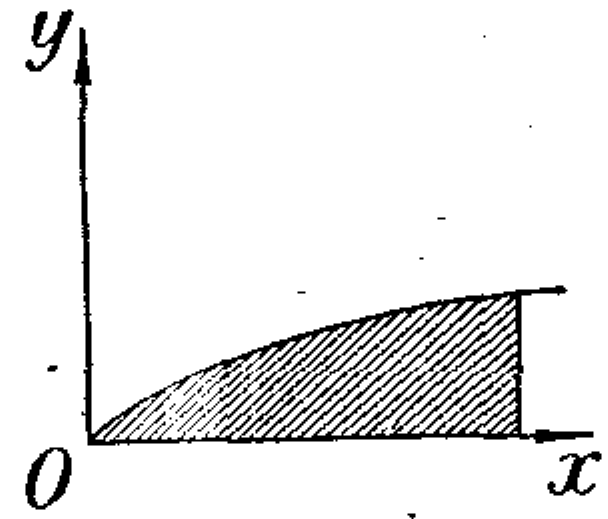
По обрасцу (9) тражене координате тежишта су,

$$x_c = \frac{\int_0^6 x\, dl}{\int_0^6 dl} = \frac{\sqrt{10} \int_0^6 x\, dx}{6 \sqrt{10}} = \frac{\int_0^6 x\, dx}{6} = 3,$$

$$y_c = 9.$$

Пример. — Наћи кординате тежишта површине коју ограничава лук параболе.

$$y^2 = \frac{4}{5} x \qquad (1)$$



Сл. 155

апсцисом у границама од $x = 0$ до $x = 5$ (сл. 155).

Према обрасцима (8) и условима проблема је

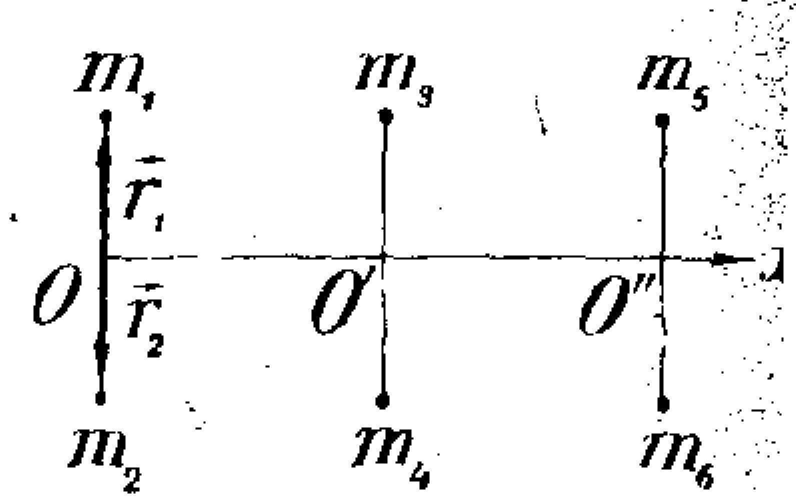
$$x_c = \frac{\int_0^5 \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x}} x\, dx\, dy}{\int_0^5 \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x}} dx\, dy} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^5 x \sqrt{x}\, dx}{\frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^5 \sqrt{x}\, dx} = 3,^*$$

---

* Границе од y одређују се из једначине криве, на исти начин као и при израчунавању равне површине помоћу двојног интеграла.

$$y_c = \frac{\int\limits_0^5 \int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x}} y\, dx\, dy}{\int\limits_0^5 \int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x}} dx\, dy} = \frac{\frac{2}{5}\int\limits_0^5 x\, dx}{\frac{2}{\sqrt{5}}\int\limits_0^5 \sqrt{x}\, dx} = \frac{3}{4}.$$

Када имамо две једнаке масе m_1 и m_2 које стоје на извесном отстојању (сл. 156) па их вежемо једном правом линијом и на средини те праве линије узмемо пол O, и повучемо векторе положаја $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, онда је збир вектора положаја



Сл. 156

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 0$$

што значи, као што смо видели да је пол O центар маса m_1 и m_2.

Ако сада узмемо један низ једнаких маса m_3 и m_4, m_5 и $m_6, \ldots$, на једнаком и паралелном отстојању са масама m_1 и m_2, онда су њихови центри маса O' и O''. Права Ox је тада симетриска осовина маса $m_1, m_2, m_3, \ldots$, јер оне леже симетрично према њој.

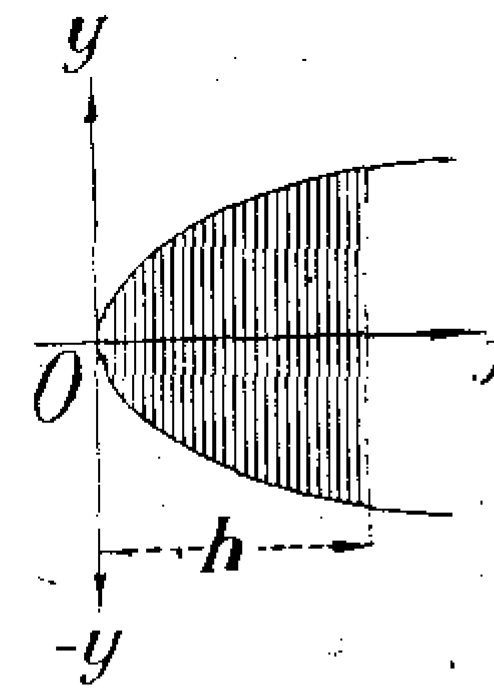
Ако на масе $m_1, m_2, m_3, \ldots$, ставимо одозго једнаке масе $m_1', m_2', m_3', \ldots$, онда ће њихови центри маса лежати на извесној правој O_1x_1 изнад и паралелно са правом Ox. Када кроз праве Ox и O_1x_1 поставимо једну раван, онда ће све масе лежати симетрично и према тој равни и њихови центри биће у самој равни, и ми на основу свега тога изводимо теорему:

Теорема. — *Када један систем једнаких маса лежи симетрично према извесној оси или равни, онда је центар маса система на самој оси, односно равни.*

Пример. — Наћи координате тежишта површине ограничене параболом

$$y^2 = 2px$$

у границама $x = 0$ и $x = h$.



Сл. 157

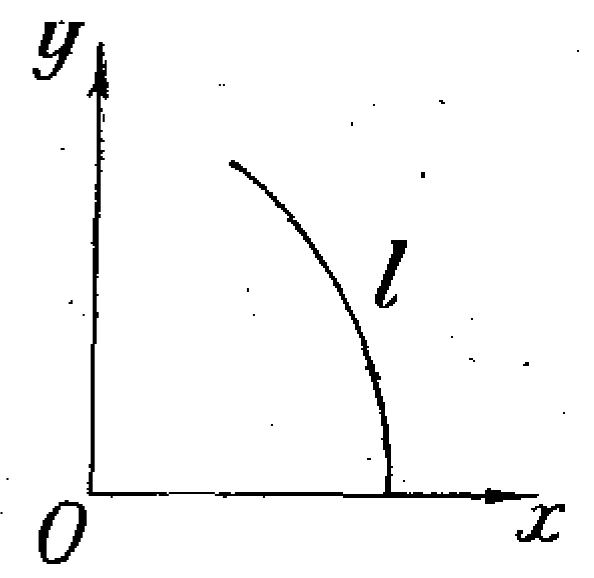
Како дата површина (сл. 157) лежи симетрично према x-оси, то ће тежиште бити на x-оси, а када је тежиште на x-оси, онда је

$$y_c = 0$$

а

$$x_c = \frac{\iint\limits_F x\, dF}{\iint\limits_F dF} = \frac{\int\limits_0^h x\, dx \int\limits_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy}{\int\limits_0^h dx \int\limits_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{2p}\; h^{\frac{5}{2}}}{\frac{4}{3}\sqrt{2p}\; h^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\, h$$

101. Папис-Гилденове теореме.* — Ако се крива l (сл. 158) која лежи у истој равни са координатним системом обрне око y-осе за 360^0, она ће описати извесну криву површину. Та описана крива површина F, као што нам је познато из Интегралног рачуна је



Сл. 158

$$F = 2\pi \int\limits_l x\, dl. \qquad (1)$$

Отстојање тежишта криве l, од y-осе је

$$x_c = \frac{\int\limits_l x\, dl}{\int\limits_l dl},$$

или

$$l\, x_c = \int\limits_l x\, dl. \qquad (2)$$

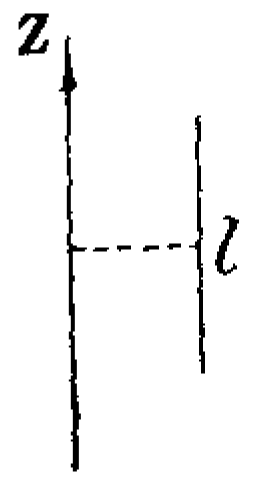
Када у једначини (1) сменимо интеграл његовом вредношћу из једначине (2), добићемо образац описане површине

* Pappus (крај IV века) александриски математичар.
Guldin (1577 — 1643) француски математичар (језуита).

$$F = 2\pi\, l\, x_c \qquad (3)$$

одакле изводимо прву Папис-Гилденову теорему:

Теорема. — *Површина коју опише извесна линија l обрнувши се за 360^0 око једне осе, једнака је производу из дужине линије l и дужине линије коју опише тежиште линије l.*



Сл. 159

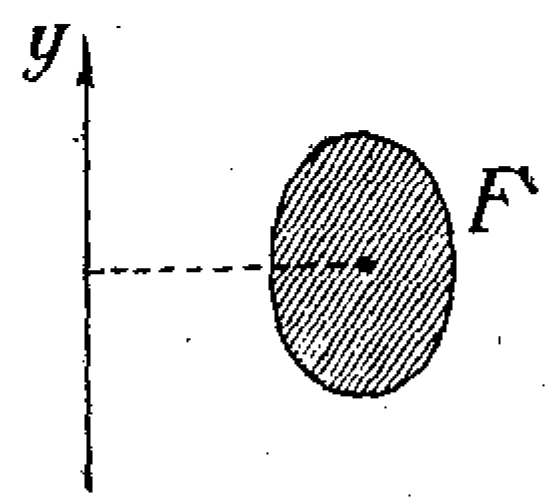
Пример. — Израчунати површину обртног тела, које опише права l (сл. 159) обрнувши се за 360^0 око z-осе, кад је дужина праве $l = 1m$, а отстојање њеног тежишта од осе $r_c = 0{,}5m$.

Према обрасцу (3) тражена површина је

$$F = \pi = 3{,}1416\, m^2.$$

Када се крива површина F (сл. 160), која се не сече са y-осом обрне око y-осе за 360^0 она ће описати извесно тело. Запремина тако описаног тела, као што нам је познато из Интегралног рачуна, је

$$V = 2\pi \iint_F x dF. \qquad (4)$$



Сл. 160.

Отстојање тежишта површине F од y-осе је

$$x_c = \frac{\iint_F x dF}{\iint_F dF},$$

$$F x_c = \iint_F x dF. \qquad (5)$$

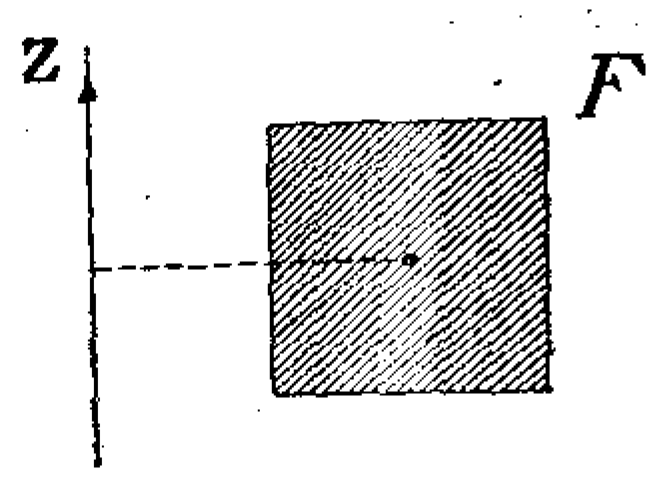
Ако у једначини (4) сменимо интеграл његовом вредношћу из једначине (5) добићемо образац запремине описаног тела

$$V = 2\pi\, F\, x_c, \qquad (6)$$

одакле изводимо другу Папис-Гилденову теорему:

Теорема. — *Запремина тела које опише извесна површина F, обрнувши се за 360^0 око једне осе, једнака је производу из обртне површине F и дужине линије коју опише тежиште површине F.*

Пример. — Израчунати запремину обртног тела које опише површина F (сл. 161), обрнувши се за 360^0 око z-осе, када је површина $F = 25 m^2$, а отстојање њеног тежишта од осе $x_c = 20$ m.

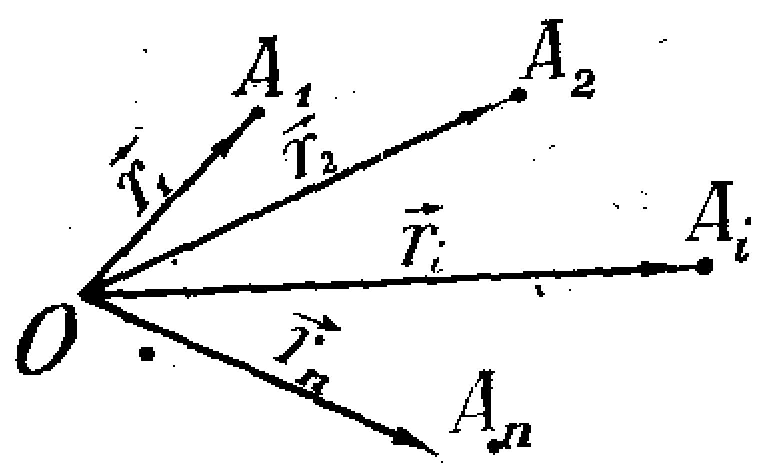


Сл. 161.

Према обрасцу (6) тражена запремина је

$$V = 1000\pi = 3141{,}6 m^3.$$

102. Моменат лењивости маса у погледу једне тачке или поларни моменат лењивости. — Ако имамо један систем материјалних тачака $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ чије су масе $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ (сл. 162) па узмемо један произвољан пол O и конструишемо векторе положаја $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_i, \ldots, \vec{r}_n$, онда скаларни збир квадрата појединих вектора положаја помножених одговарајућом масом тачака



Сл. 162.

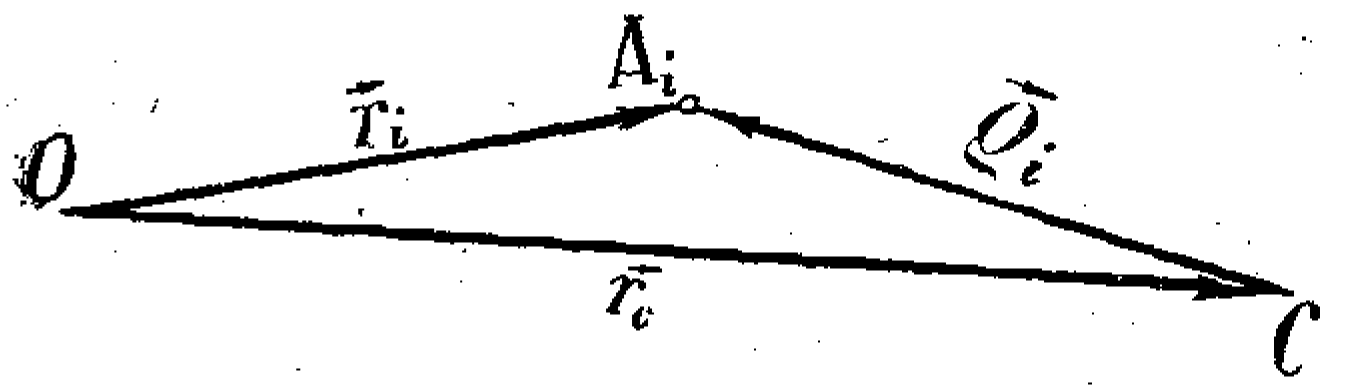
$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots . + m_i\, r_i^2 + \ldots + m_n\, r_n^2,$$

који ради краткоће обележавамо изразом

$$\mathscr{J}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2, \qquad (1)$$

називамо *поларни моменат лењивости целокупне масе тачака у погледу тачке O.*

Ако је C центар маса $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots, m_n$, па се тражи моменат инерције целокупне масе у погледу њеног центра онда је (сл. 163). вектор



Сл. 163

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\varrho}_i$$

$$\vec{r}_i^{\,2} = (\vec{r}_c + \vec{\varrho}_i)^2 = \vec{r}_c^{\,2} + 2\,(\vec{r}_c\,\vec{\varrho}_i) + \vec{\varrho}_i^{\,2}$$

а

$$\mathscr{J}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_c^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\vec{r}_c\,\vec{\varrho}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\varrho}_i^{\,2}$$

или

$$\mathscr{J}_O = \vec{r}_c^{\,2} \sum_{i=1}^{n} m_i + 2\,(\vec{r}_c \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\varrho}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\varrho}_i^{\,2},$$

одакле, имајући у виду да је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \mathsf{M}, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \varrho_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \varrho_i^2 = \mathcal{J}_c$$

добијамо образац

$$\mathcal{J}_O = \mathcal{J}_c + \mathsf{M}\,\vec{r}_c^{\,2},$$

и видимо да је поларни моменат лењивости једне масе у погледу произвољног пола једнак моменту лењивости масе у погледу центра масе плус један позитиван сабирак $\mathsf{M}\vec{r}_c^{\,2}$, те отуда изводимо теорему:

Теорема. — *Поларни моменат једне масе има најмању вредност у погледу центра масе.*

Када је систем материјалних тачака $A_1, A_2, \ldots, A^i, \ldots, A_n$ континуирано распоређен у каквом хомогеном телу, површини или линији, онда збир под (1) прелази у интеграл и за моменат целокупне масе у погледу тачке O, добијамо обрасце

$$\mathcal{J}_O = \iiint_V r^2 dm = \iiint_V \sigma r^2 dV \qquad (2)$$

за хомогено тело;

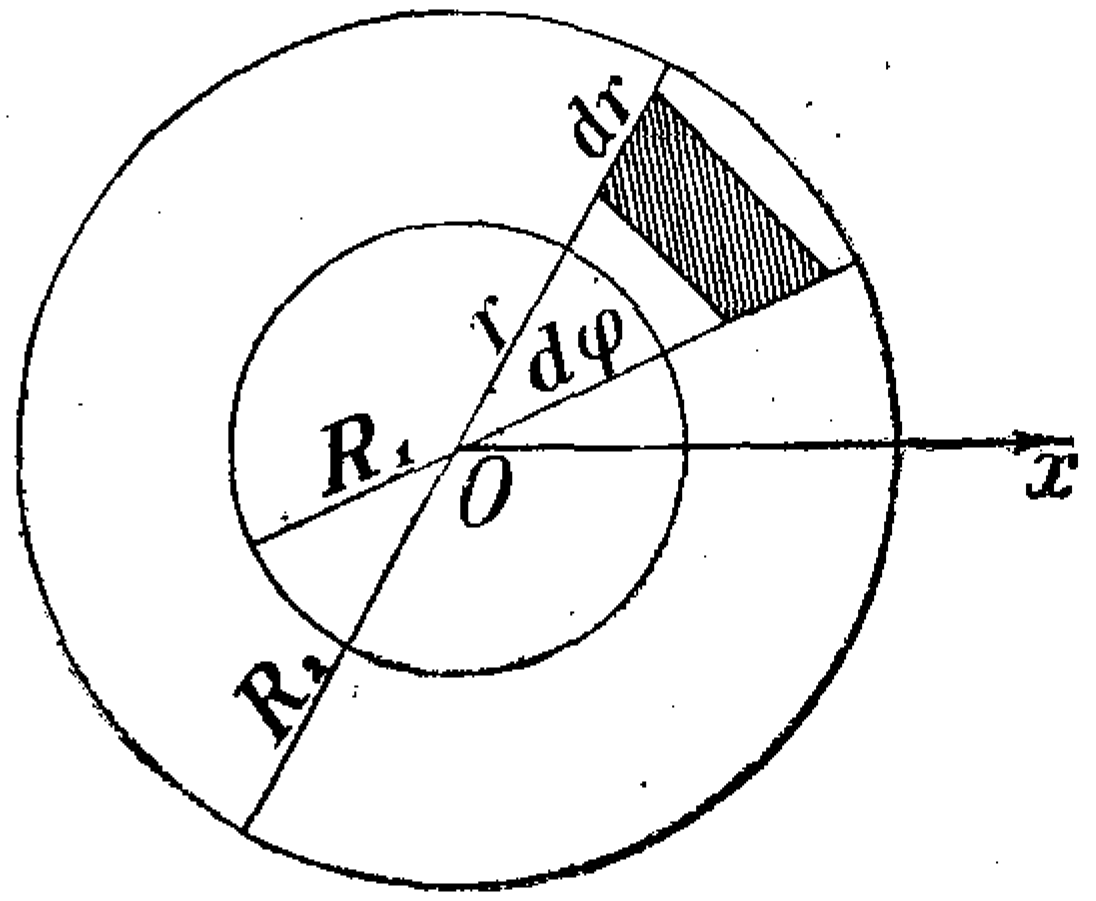
$$\mathcal{J}_O = \iint_F r^2 dm = \iint_F \sigma r^2 dF \qquad (3)$$

за хомогену површину; и

$$\mathcal{J}_O = \int_l r^2 dl = \int_l \sigma r^2 dl \qquad (4)$$

за хомогену линију.

Пример. — Израчунати моменат лењивости кружног прстена кругова, чији су полупречници R_1 и R_2 (сл. 164), у погледу центра O.



Сл. 164.

Како је један површински елеменат круга уопште

$$dF = r dr d\varphi,$$

те с обзиром на образац (3) тражени моменат лењивост је

$$\mathcal{J}_O = \sigma \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r^3 \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \sigma \pi (R_2^4 - R_1^4) \qquad (5)$$

Када у изразу (5) ставимо $R_1 = 0$, добићемо моменат лењивости круга R_2

$$\mathcal{J}_O = \frac{1}{2} \sigma \pi R^4 \qquad (6)$$

где је сада полупречник R_2 обележен са R

Како је маса целег круга

$$M = \sigma R^2 \pi$$

то моменат под (6) можемо претставити и са

$$\mathcal{J}_O = \frac{1}{2} M R^2,$$

одакле видимо да је моменат инерције целокупне масе једнога круга у погледу центра, једнак моменту једне половине целокупне масе круга сконцентрисане у једној тачки на периферији круга.

Када пол O узмемо за почетак правоуглог координатног система, онда обрасце (2), (3), (4) можемо написати у облику

$$\mathcal{J}_O = \int\int\int_V \sigma (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

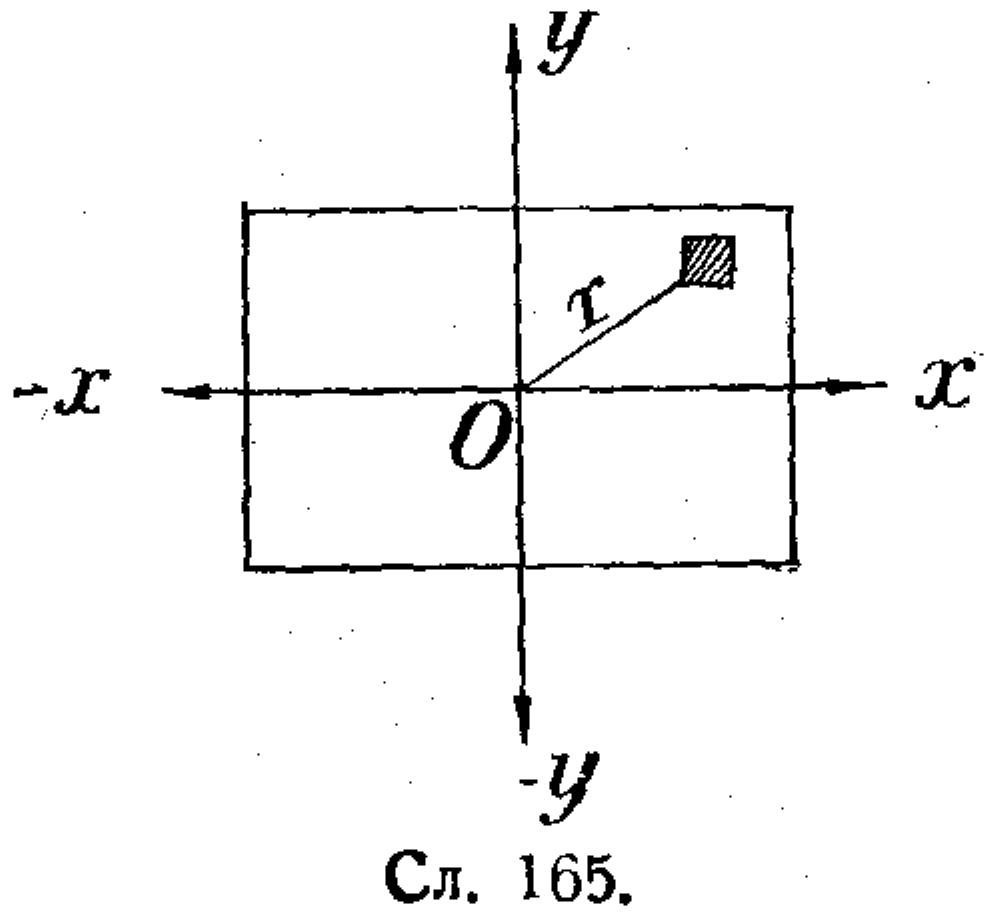
$$\mathcal{J}_O = \int\int_F \sigma (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

и

$$\mathcal{J}_O = \int_l \sigma x^2 \, dx,$$

кад је правац линије l и апсцисе исти,

Пример. — Израчунати моменат лењивости правоугаоника (сл. 165) у погледу његовог центра. Када поставимо координатни систем у центру правоугаоника, онда је



Сл. 165.

$$r^2 = (x^2 + y^2);$$

$$dF = dx \, dy$$

а тражени моменат инерције је

$$\mathcal{J}_O = 4\sigma \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{6}\, \sigma\, ab\, (a^2+b^2)$$

или имајући у виду да је

$$\mathsf{M} = \sigma\, ab$$

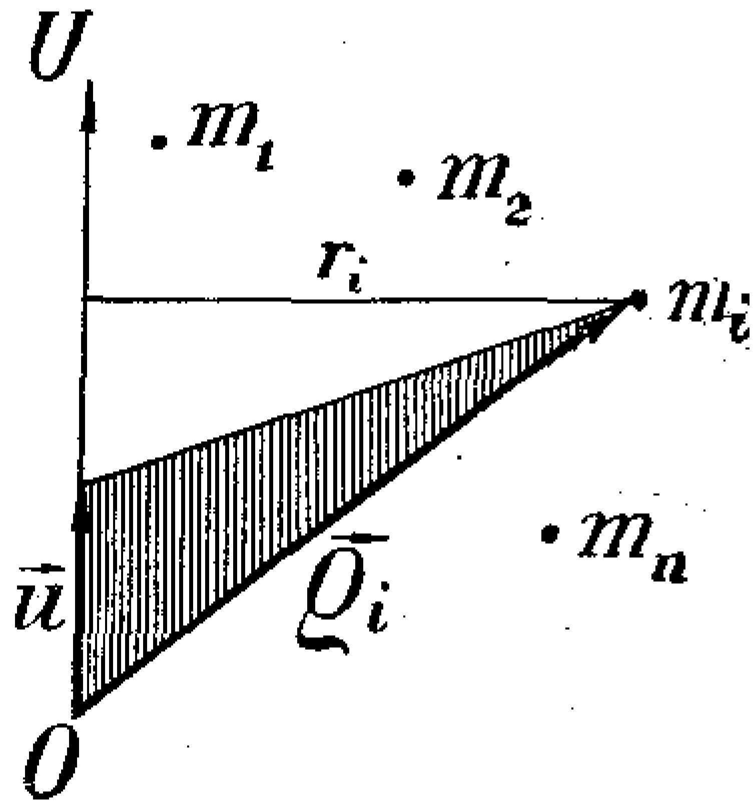
$$\mathcal{J}_O = \frac{\mathsf{M}}{6}\,(a^2 + b^2).$$

103. Моменат лењивости маса у погледу једне осе

Ако имамо један систем материјалних тачака у простору $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ чије су масе: $m_1, m_2, \ldots, m_i, m_n$ (сл. 166) и једну U-осу, која пролази кроз тачку O, а чији је правац одређен ортом $\vec{u}$, онда моменат лењивости масе m_i у погледу U-осе је

$$m_i\, r_i^{\,2},$$

где је r_i нормално отстојање масе m_i од U-осе, а моменат лењивости свих маса у погледу U-осе уопште је



Сл. 166

$$\mathcal{J}_{\vec{u}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^{\,2} \qquad (1)$$

где $\sum_{i=1}^{n}$ претставља скаларни збир.

Када су масе: $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ континуирано распоређене у простору, онда збир под (1) прелази у троструки интеграл

$$\mathcal{J}_{\vec{u}} = \int\!\!\int\!\!\int_V \sigma\, r^2\, d\, V \qquad (2)$$

Ако конструишемо вектор положаја $\vec{\varrho}_i$ масе m_i, онда векторски продукат

$$[\vec{u}\ \vec{\varrho}_i\,]$$

претставља двоструку површину исенченог троугла, а исто тако и скаларни производ

$$u\, r_i = 1 \cdot r_i = r_i$$

претставља двоструку површину исенченог троугла, те је тако

$$\left| [\vec{u}\ \vec{\varrho}_i\ ] \right| = r_i$$

или

$$([\vec{u}\ \vec{\varrho}_i\ ]\ [\vec{u}\ \vec{\varrho}_i\ ]) = r_i^2.$$

Када сменимо r_i^2 у изразу (1) добићемо општи образац за моменат лењивости у векторском облику у погледу једне осе

$$\mathcal{J}_{\vec{u}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ ([\vec{u}\ \vec{\varrho}_i\ ][\vec{u}\ \vec{\varrho}_i\ ]). \tag{3}$$

Ако се тражи моменат лењивости у погледу координатних оса x, y, z, онда ако орт x-осе обележимо са $\vec{x}$, орт y-осе са $\vec{y}$ и z-осе са $\vec{z}$, и развијемо означене векторске продукте у рбрасцу (3) водећи рачуна о пројекцијама ортова и обележавајући пројекције вектора положаја $\vec{\varrho}_i$ са x, y, z добићемо обрасце момента лењивости у погледу координатних оса

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ (y_i^2 + z_i^2) \tag{4}$$

$$\mathcal{J}_{\vec{y}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ (x_i^2 + z_i^2) \tag{5}$$

$$\mathcal{J}_{\vec{z}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ (x_i^2 + y_i^2). \tag{6}$$

Ако су материјалне тачке; A_1, A_2, . . . , A_i , . . . , A_n континуирано распоређене у простору, онда збирови (4), (5) и (6) прелазе у интеграле

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \iiint_V (y^2 + z^2)\, dm = \iiint_V \sigma\, (y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz \tag{7}$$

$$\mathcal{J}_{\vec{y}} = \iiint_V (x^2 + z^2)\, dm = \iiint_V \sigma\, (x^2+z^2)\, dx\, dy\, dz \tag{8}$$

и

$$\mathcal{J}_{\vec{z}} = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dm = \iiint_V \sigma\, (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz \ (9).$$

Када су материјалне тачке континуирано распоређене у равни, онда имамо моменат лењивости само у погледу x и y-осе и обрасци (7) и (8) постају

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \iint_F y^2 \, dm = \iint_F \sigma \, y^2 \, dx \, dy \qquad (10)$$

$$\mathcal{J}_{\vec{y}} = \iint_F x^2 \, dm = \iint_F \sigma \, x^2 \, dx \, dy; \qquad (11)$$

а када су материјалне тачке распоређене само дуж x-осе онда образац (8) постаје

$$\mathcal{J}_{\vec{y}} = \int_x x^2 \, dm = \int_x \sigma \, x^2 \, dx \qquad (12)$$

Како је код хомогеног тела густина σ стална количина, то се она у интегралима (7), (8), (9), (10), (11) и (12) сматра као сталан коефицијенат. Моменти леживости са коефицијентом σ називају се још динамички моменти леживости; моменти леживости код којих изостављамо коефицијенат σ, називају се геометриски моменти леживости.

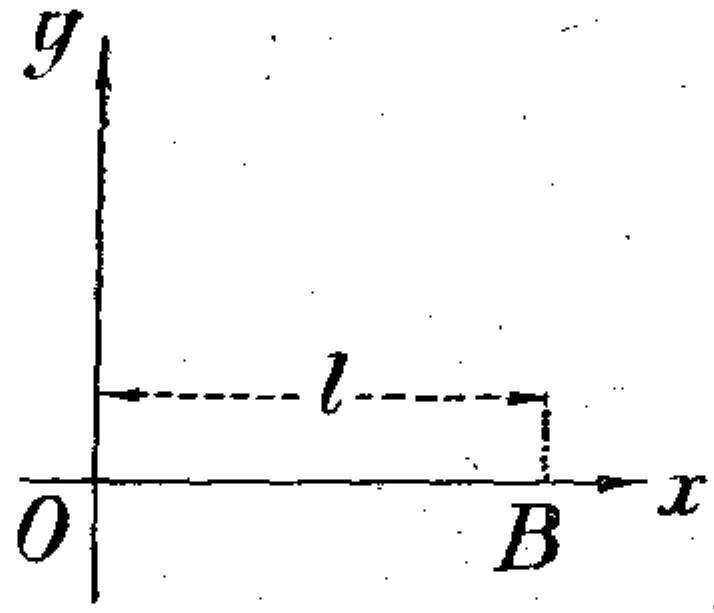
Ако геометриски моменат лењивости уопште обележимо са $\mathcal{J}'$ а динамички са $\mathcal{J}$, онда је

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{J}' \qquad (13)$$

Пример. — Израчунати динамички и геометриски моменат лењивости хомогене материјалне линије $OB = l$ (сл. 167) у погледу y-осе.

Према обрасцима (12) и (13) тражени моменти лењивости су

$$\mathcal{J}_{\vec{y}} = \sigma \int_0^l x^2 \, dx = \sigma \frac{l^3}{3},$$



Сл. 167

а

$$\mathcal{J}'_{\vec{y}} = \frac{l^3}{3}$$

Пример. — Израчунати $\underset{\vec{y}}{\mathcal{J}}$ и $\underset{\vec{y}}{\mathcal{J}'}$ површине коју ограничава крива

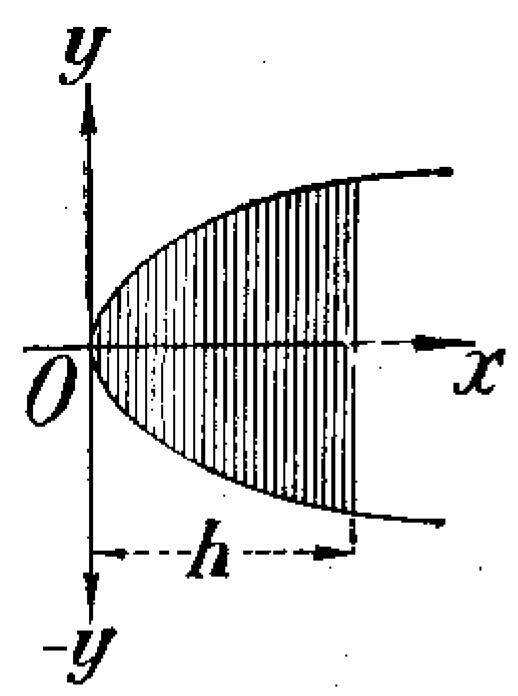
$$y^2 = 2px$$

(сл. 168) у у границама $x = 0$ и $x = h$.

Тражени моменти лењивости су

$$\underset{\vec{y}}{\mathcal{J}} = \int_0^h \int_{-y}^{y} \sigma\, x^2\, dx\, dy = \int_0^h \sigma\, x^2\, dx \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy =$$

$$= 2\,\sigma \sqrt{2p} \int_0^h x^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{4\,\sigma\sqrt{2p}}{7}\, h^{\frac{7}{2}},$$



Сл. 168

или имајући у виду да је

$$F = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\quad h^{\frac{3}{2}}$$

биће

$$\underset{\vec{y}}{\mathcal{J}} = \frac{3}{7}\,\mathrm{M}\, h^2$$

а

$$\underset{\vec{y}}{\mathcal{J}'} = \frac{3}{7} F h^2$$

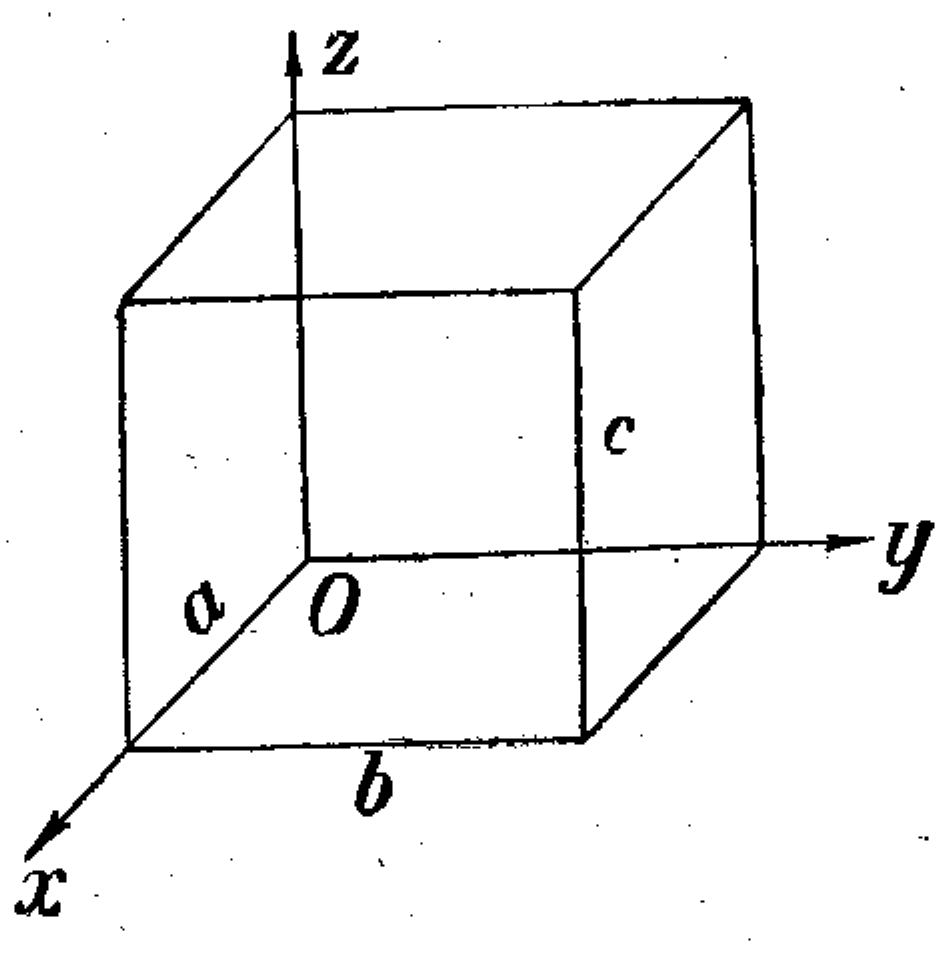
Пример. — Израчунати $\underset{x}{\mathcal{J}}$ паралелопипеда (сл. 169)

Према обрасцу (7) тражени моменат лењивости је

$$\underset{\vec{x}}{\mathcal{J}} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sigma\, (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

или

$$\underset{\vec{x}}{\mathcal{J}} = \sigma \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (y^2 + z^2)\, dz$$



Сл. 169

или

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \sigma \int_0^a dx \int_0^b dy \left(y^2 c + \frac{c^3}{3} \right),$$

или

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \sigma \int_0^a dx \left(\frac{b^3}{3} c + b \frac{c^3}{3} \right),$$

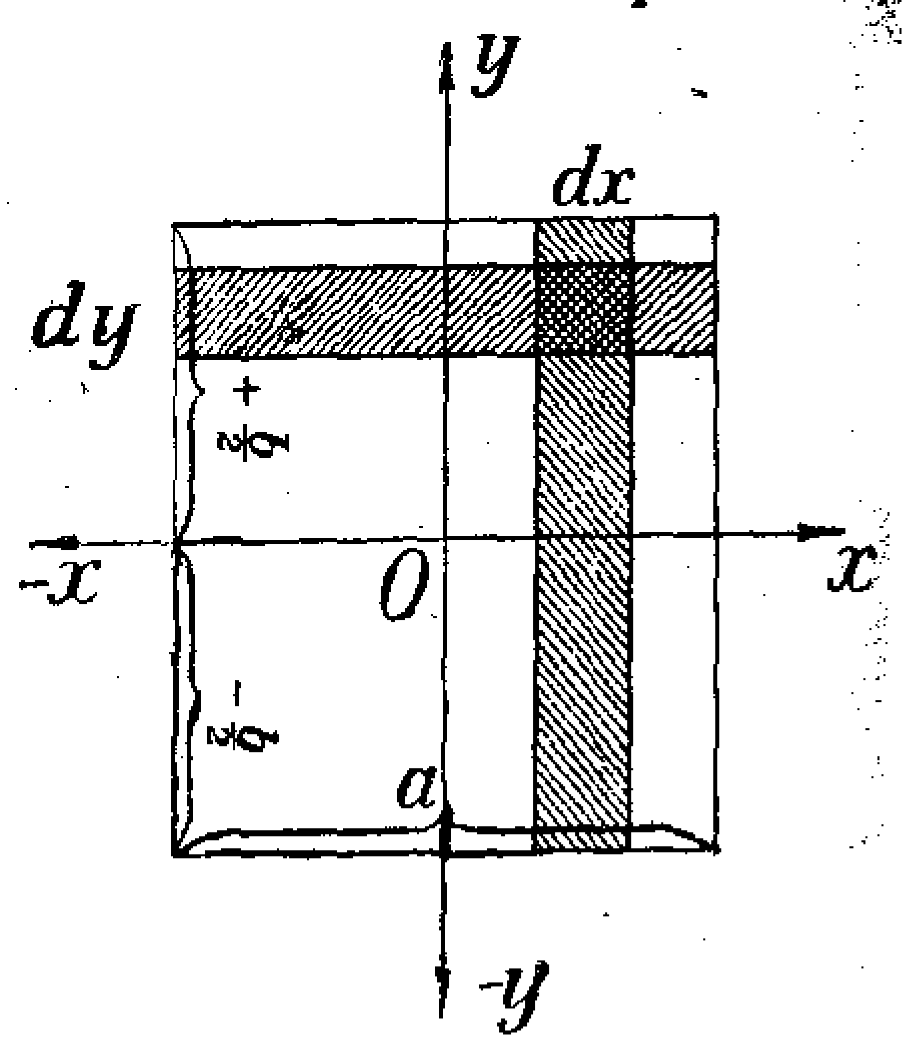
или

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \sigma \left(\frac{b^3}{3} ca + \frac{bc^3}{3} a \right) = \sigma abc \left[\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} \right]$$

или узимајући у обзир да је $abc = V$

$$\mathcal{J}_{\vec{x}} = \sigma V \left(\frac{b^2 + c^2}{3} \right).$$

Када се тражи моменат лењивости какве површине, која је позната геометриска слика, онда је његово израчунавање врло лако и врши се помоћу једноструког интеграла.



Сл. 170

Пример. — Израчунати $\mathcal{J}'_{\vec{x}}$ и $\mathcal{J}'_{\vec{y}}$ правоугаоника (сл. 170).

Када дати правоугаоник поделимо на бесконачно много бесконачно малих површина

$$a\ dy$$

чија је раздаљина од x-осе y, онда је

$$\mathcal{J}'_{\vec{x}} = a \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\ dy = \frac{a\ b^3}{12},$$

или с обзиром што је $ab = F$,

$$\mathcal{J}_{\vec{x}}' = \frac{b^2F}{12}.$$

Када дати правоугаоник поделимо на бесконачно много бесконачно малих површина

$$dF = hdx$$

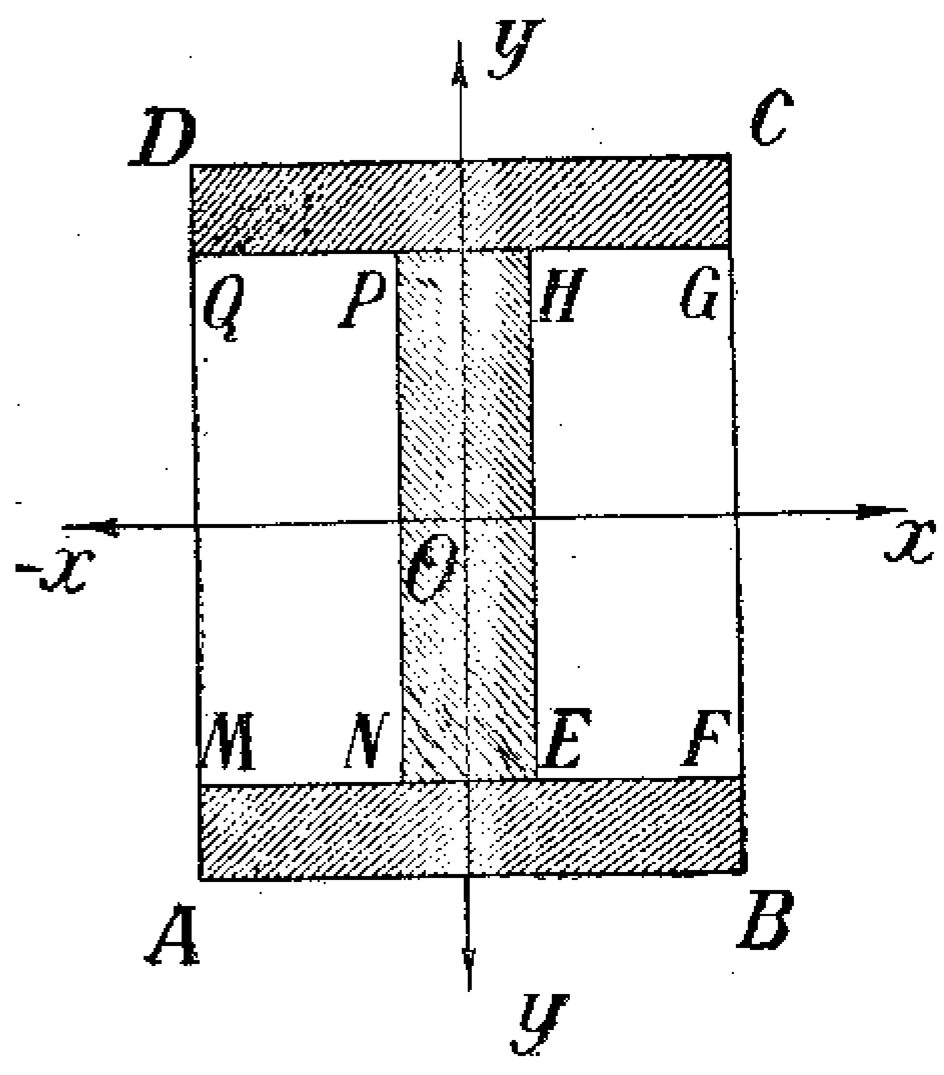
онда је моменат лењивости

$$\mathcal{J}_{\vec{y}}' = b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{ba^3}{12}$$

или узимајући у обзир да је $ab = F$

$$\mathcal{J}_{\vec{y}}' = \frac{a^2F}{12}.$$

Ако се тражи моменаг лењивости исенчене површине (сл. 171) која има облик двојног T у погледу x-осе, онда прво нађемо на познати начин моменат лењивости површине $ABCD$, а затим моменат површина $EFGH$ и $MNPQ$, чији збир момената одузмемо од момента површине $ABCD$.



Сл. 171

104. Једначине кретања система материјалних тачака. — Када се један слободан систем материјалних тачака $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, M_n$, чије су масе $m_1, m_2, \ldots, m_i$, m_n, креће услед дејства система сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, P_i, \ldots P_n$; па кординате тачака система означимо са $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_i \ldots y_n$; $z_1, z_2, \ldots z_i \ldots, z_n$; а пројекције сила са $X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots, X_n$; $Y_1, Y_2, Y_i \ldots, Y_n$; $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i, \ldots Z_n$, онда је једначина кретања буди које тачке система M_i,

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Z_i \,; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

а једначине кретања система тачака,

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Када целокупну масу система означимо са M, а координате центра или тежишта масе са x_c, y_c, z_c, онда је према члану 100, израз (2),

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M} x_c &= \sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i \\ \mathsf{M} y_c &= \sum_{i=1}^{n} m_i \, y_i \\ \mathsf{M} z_c &= \sum_{i=1}^{n} m_i \, z_i \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ако једначине (3) диференцијалимо двапут по времену добићемо

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M} \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \\ \mathsf{M} \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \\ \mathsf{M} \frac{d^2 z_c}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

одакле видимо да изразе с леве стране у једначинама (2), можемо сменити изразима с леве стране једначине (4), те отуда изводимо теорему о кретању тежишта система материјалних тачака:

Теорема. — *Тежиште једног система материјалних тачака, на који дејствује извесна сила, креће се тако, као да је у њему сконцентрисана целокупна маса система и да на њега дејствује сила која је паралелна и једнака сили која дејствује на систем тачака.*

105. Жива сила система материјалних тачака и крутога тела. — Ако имамо један систем материјалних тачака $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, M_n$, чије су масе $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots m_n$; а брзине $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n$, онда је жива сила ма које тачке система M_i,

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2; \qquad (1)$$

а система тачака

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2. \qquad (2)$$

Када су тачке система континуирано распоређене те тако чине извесно тело, онда збир под (2) прелази у одговарајући интеграл,

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V v^2 dm. \qquad (3)$$

Ако се неко тело креће транслаторно, онда је брзина тела иста, као и брзина ма које његове тачке, те отуда кад нам је позната брзина $\vec{v}$, ма које тачке, жива сила тела је

$$T = \frac{1}{2} v^2 \iiint_V dm = \frac{Mv^2}{2}.$$

Када тело врши ротационо кретање, око извесне осе, онда је брзина буди које његове тачке

$$v = r\omega,$$

а жива сила

$$T = \frac{\omega^2}{2} \iiint_V r^2 dm = \mathcal{J} \frac{\omega^2}{2},$$

где је $\mathcal{J}$ моменат лењивости тела у погледу осе ротације.

СТАТИКА

Четрнаести одељак

Статика материјалне тачке

106. Равнотежа слободне материјалне тачке. — Ако на једну слободну материјалну тачку, која је у стању мира дејствује један систем спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_i, \ldots, P_n$ па тачка и даље остане у стању мира, онда према првом Њутновом закону, мора бити резултанта свих спољних сила једнака нули, те отуда услов равнотеже једне слободне материјалне тачке на коју дејствује један систем спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_i, \ldots \vec{P}_n$ је у векторском облику

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = 0;$$

а у скаларном облику, обележавајући пројекције сила на Декартове правоугле осе, са X, Y, Z,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0,$$

или, обележавајући углове са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_n$, које силе $\vec{P}_1 \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_i, \ldots, \vec{P}_n$ заклапају са x, y и z-осом,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cos \beta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cos \gamma_i = 0.$$

Када силе $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_i, \ldots, \vec{P}_n$, које дејствују на материјалну тачку нису у равнотежи, онда оне имају извесну резултанту $\vec{R}$.

Ако пројекције резултанте на координатним осама обележимо са R_x, R_y, R_z, а углове које заклапа резултанта са координатним осама, са λ, μ, ν, онда је сходно члану 22,

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \beta_i$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \gamma_i.$$

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}};$$

$$\lambda = \frac{\left|\vec{R}\right|}{R_x}, \quad \mu = \frac{\left|\vec{R}\right|}{R_y}, \quad \nu = \frac{\left|\vec{R}\right|}{R_z}.$$

Када на слободну материјалну тачку M дејствују само две силе $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ (сл. 172), онда је тачка M у равнотежи, када је

Сл. 172.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0.$$

А резултанта двеју сила је једнака нули, када су силе истог правца и интензитета а супротних смерова, те тако изводимо теорему:

Теорема. — *Ако једну слободну материјалну тачку нападају две силе истог правца и интензитета а супротних смерова, тачка се налази у равнотежи.*

Пример. — Слободну материјалну тачку, чија је маса m, привлаче по Њутновом закону две сталне тачке чије су масе M_1 и M_2; а раздаљина d.

Тражи се раздаљина од масе M_1, на којој слободна тачка масе m, стоји у равнотежи, претпостављајући да су све три масе на једној правој линији.

Ако тражену раздаљину обележимо са x, онда је

$$\frac{M_1 m}{x^2} = \frac{M_2 m}{(d-x)^2}$$

а одатле је

$$x = \frac{d\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1}+\sqrt{M_2}}.$$

Пример. — О један вертикално-висећи федер обеси се један терет од Q kg. Привлачна снага федера је пропорционална отстојању од равнотежног положаја.

Тражи се за колико ће федер изаћи из свог равнотежног положаја, кад се узме да је коефициенат пропорционалности q kg на метар.

Према условима проблема и равнотеже је

$$q\,x = Q,$$

а одатле, тражена дужина за коју федер изађе из своје равнотеже је

$$x = \frac{Q}{q}\,m.$$

Пример. — На слободну материјалну тачку M, чија је маса m, дејствују две атрактивне силе $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Интензитет атракције силе $\vec{F}_1$, је k_1^2, а интензитет силе $\vec{F}_2$ је k^2_2, на јединицу дужине и јединицу масе. Раздаљина сила $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ је d.

Тражи се отстојање равнотежног положаја тачке M од силе $\vec{F}_1$.

Када тражено отстојање обележимо са x, онда је

$$k_1^2\,m\,x = k^2_2 m\,(d-x),$$

а одатле је

$$x = \frac{dk_2^2}{k_1^2+k_2^2}.$$

107. — Равнотежа неслободне материјалне тачке на апсолутно глаткој површини. — Када је једна материјална тачка M (сл. 173) принуђена да се креће по извесној апсолутно глаткој површини φ, чија је једначина

$$\varphi\,(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

услед дејства једног система спољних сила, чија је резултанта $\vec{F}$, онда је једначина крета-

Сл. 173.

ња материјалне тачке у векторском облику, према члану 90,

$$m\vec{u} = \vec{F} + \vec{N}$$

или у скаларном

$$mx'' = X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$my'' = Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$mz'' = Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Тачка M ће бити у равнотежи на површини φ, када је њено убрзање $\vec{u}$ једнако нули, или другим речима када је

$$\vec{F} + \vec{N} = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

а да би резултанта сила $\vec{F}$ и $\vec{N}$ била једнака нули, мора сила $\vec{F}$ имати исти правац и интензитет а супротан смер силе $\vec{N}$, па како сила $\vec{N}$ има нормалан правац на површину, то изводимо теорему:

Теорема. — *Једна материјална тачка, која се налази на једној апсолутно глаткој површини, а на коју дејствује један систем сила, је у равнотежи у сваком оном положају у коме резултанта сила има нормалан правац на површину.*

Из једначина (1) и (2) можемо увек одредити координате x, y, z, положаја на површини у коме тачка има равнотежу, као и множитељ везе λ.

Пример. — Наћи координате тачака апсолутно глатке лопте

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

(сл. 174), у којима ће материјална тачка M бити у равнотежи кад на тачку M дејствује само земљина тежа.

У датом проблему је,

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -mg,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$

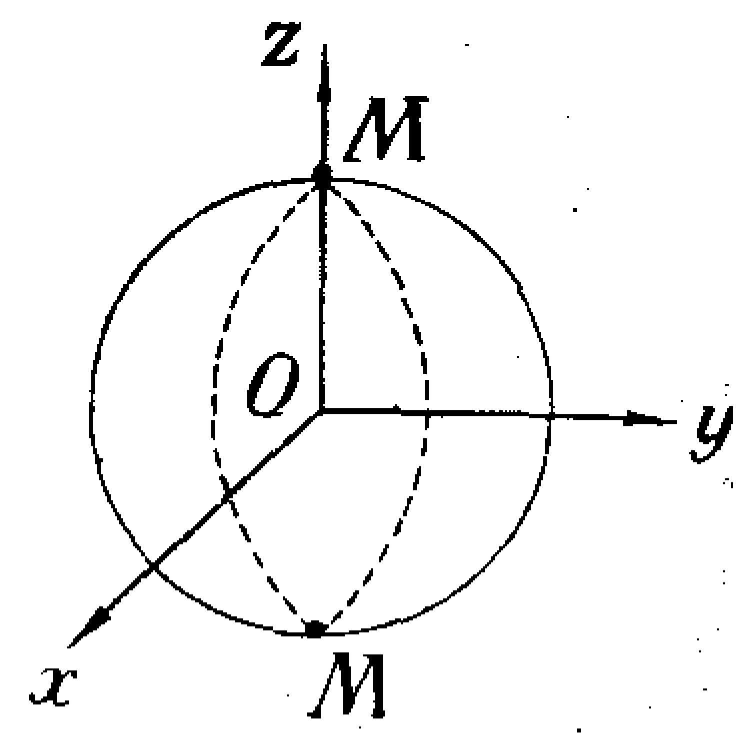
$$0 + 2\lambda x = 0, \qquad 0 + 2\lambda y = 0,$$

$$-mg + 2\lambda z = 0,$$

одакле је

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad 2\lambda z = mg;$$

а кад је $x = 0$, $y = 0$, онда је $z = \pm r$.



Сл. 174.

Тражене координате лопте у којима тачка M има равнотежу су дакле

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \pm r\,*.$$

Множитељ λ добијамо из једначине

$$2\lambda z = mg,$$

$$\lambda = \frac{mg}{\pm 2r}.$$

Једначина кретања неке материјалне тачке M, по извесној кривој линији L, као пресека двеју апсолутно глатких површина

$$\varphi_1 (x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_2 (x, y, z) = 0, \qquad (3)$$

је у векторском облику, према члану 90,

$$m\vec{u} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Тачка M биће у равнотежи када је њено убрзање једнако нули, односно када је

$$\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0 \qquad (4)$$

или други речима када је троугао сила реакција и резултанте спољних сила затворен.

И према једначини (4) услов равнотеже тачке на извесној кривој линији у скаларном облику је

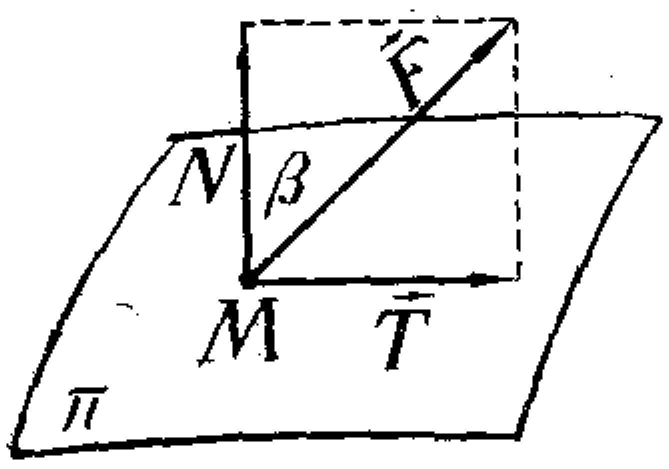
---

* У тачки лопте чије су координате $x = 0$, $y = 0$, $z = r$, тачка M има лабилну равнотежу, јер ако тачку M померимо врло мало из њенога равнотежнога положаја и пустимо, она се неће више вратити у свој равнотежни положај, те је отуда то, као што нам је познато из Експерименталне физике лабилна равнотежа.

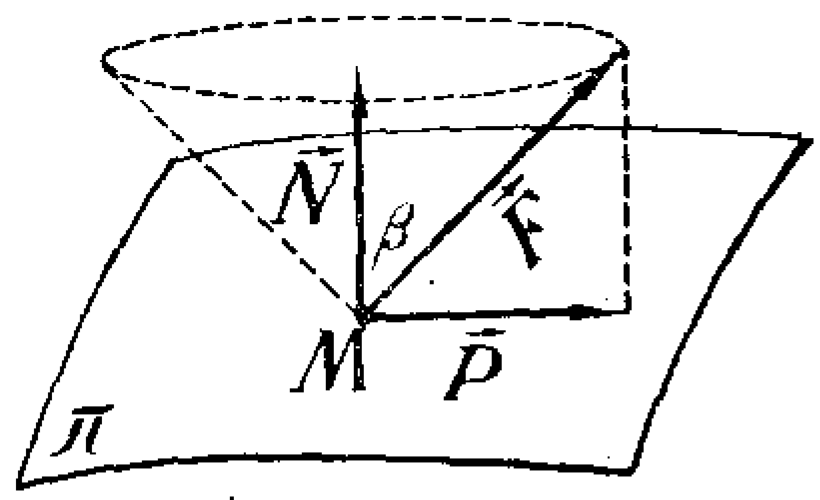
У тачки $x = 0$, $y = 0$, $z = -r$ тачка M има стабилну равнотежу, јер ако тачку M, која се сад налази у унутрашњости лопте, изведемо врло мало из њенога равнотежнога положаја и пустимо, она ће поново заузети свој равнотежни положај.

$$\left.\begin{array}{l} X + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Ако се материјална тачка M (сл. 175) налази на површини π, и ако је угао трења површине и материјалне тачке α, па на материјалну тачку M дејствује један систем спољ-



Сл. 175



Сл. 176

них сила, чија је резултанта $\vec{F}$, онда ако силу $\vec{F}$ разложимо у нормалну компомeнту $\vec{N}$ и тангенцијалну $\vec{T}$, биће

$$|\vec{T}| = |\vec{F}| \sin \beta$$

$$|\vec{N}| = |\vec{F}| \cos \beta$$

$$\frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} = tg\, \beta$$

или

$$|\vec{T}| = |\vec{N}|\, tg\, \beta.$$

Како је сила трења за дату површину

$$|\vec{T}| = |\vec{N}|\, tg\, \alpha,$$

то за сваки угао β, под којим сила $\vec{F}$ дејствује, а који је мањи од α, тангенцијална сила $\vec{T}$ силе $\vec{F}$, неће моћи да савлада трење и тачка M остаће у равнотежи.

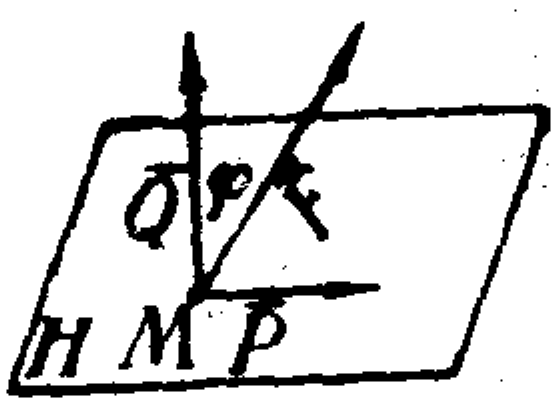
Када узмемо да је

$$\beta = \alpha$$

и сила $\vec{F}$ се обрне око нормалне компоненте $\vec{N}$ за 360^0, али тако да је угао β сталан, онда ће она описати један конус (сл. 176.), који се назива *конус трења* и с обзиром на њега можемо извести теорему:

Теорема. — *Једна материјална тачка, која се налази на извесној површини, а на коју дејствује један систем спољних сила, чија је резултанта $\vec{F}$, остаје у равнотежи на површини све дотле док се правац силе $\vec{F}$ налази у конусу трења површине.*

Пример. — Наћи границе равнотеже, с обзиром на трење, материјалне тачке M, чија је тежина Q, а која се налази на једној хоризонталној равни H (сл. 177.), и на коју дејствује хоризонтална сила $\vec{P}$.



Сл. 177.

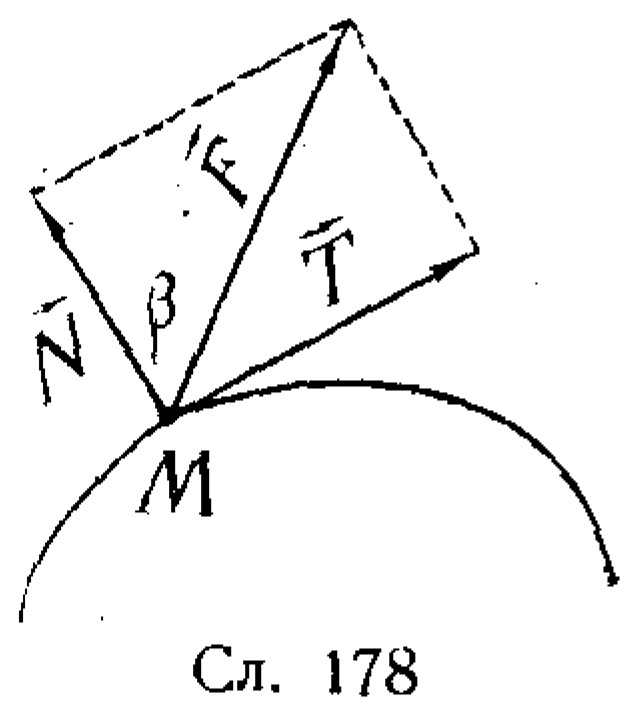
Када сложимо силу нормалног отпора $\vec{Q}$ и хоризонталну силу $\vec{P}$, добићемо резултанту $\vec{F}$. Тачка M биће у равнотежи све дотле док је $\sphericalangle\ \varphi$ мањи или раван углу трења α, или аналитички претстављено, тачка M остаје у равнотежи све дотле док је

$$\frac{P}{Q} \leqq tg\ \alpha, \quad \text{односно} \quad P \leqq f\ Q,$$

где је f коефициенат трења.

Када се материјална тачка M, на коју дејствује сила $\vec{F}$, налази на кривој L, чији је угао трења α, па силу $\vec{F}$ разложимо у нормалну компоненту $\vec{N}$ и тангенцијалну $\vec{T}$ (сл. 178), онда је као и мало пре код површине,

$$\vec{T} = |\vec{N}|\ tg\ \beta,$$



Сл. 178

а како је сила трења линије L

$$\vec{T} = N\ tg\ \alpha$$

то ће тачка M бити у равнотежи на кривој L, за сваки угао β нормалне компоненте $\vec{N}$ и силе $\vec{F}$, који је мањи од угла трења α.

108. Д' Аламберов принцип.* — Ако на слободну ма-

* D' Alembert Jean (1717 — 1783) велики француски филозоф и математичар.

теријалну тачку M, чија је маса m, дејствује један систем спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$, чија је резултанта $\vec{F}$, онда ће се тачка M, услед дејства сила кретати са извесним убрзањем $\vec{u}$, и биће увек

$$\vec{F} = m\vec{u}, \tag{1}$$

или

$$\vec{F} - m\vec{u} = 0. \tag{2}$$

Из обрасца (2) излази да израз $m\vec{u}$, можемо сматрати као извесну фиктивну силу, чији је интензитет и правац једнак интензитету и правцу силе $\vec{F}$, а смер супротан смеру силе $\vec{F}$. Ту фиктивну силу називамо *инерцијална сила или сила инерције*; а силу $\vec{F}$ у том случају називамо *ефективна сила.*

Ако на једну неслободну материјалну тачку M, чија је маса m, дејствује један систем датих спољних сила, чија је резултанта $\vec{P}$, онда на материјалну тачку дејствују још, сем датих спољних сила и силе везе чију ћемо резултанту обележити са $\vec{R}$.

Када сложимо силе $\vec{P}$ и $\vec{R}$ биће

$$\vec{P} + (-\vec{R})^* = \vec{F}, \tag{3}$$

и тачка M кретаће се услед дејства силе $\vec{F}$ као слободна тачка па ће бити

$$\vec{F} = m\vec{u}, \tag{4}$$

или

$$\vec{F} - m\vec{u} = 0, \tag{5}$$

одакле изводимо Д' Аламберов принцип који гласи:

Кад се једна неслободна материјална тачка креће, онда су спољне силе, силе везе и инерцијална сила за све време кретања у равнотежи; или другим *речима, кад се једна неслободна материјална тачка креће онда је збир спољних сила, силе везе и инерцијалне силе једнак нули.*

Из образаца (3) и (4) видимо да је ефективна сила $\vec{F}$

* Негативан знак долази зато, што силе везе имају супротан смер

мања од датих спољних сила, што долази отуда што се један део датих спољних сила губи на савлађивање отпора или реакције.

Образац (3) с обзиром на израз (4) можемо написати и у облику

$$\vec{P} = m\vec{u} + \vec{R} \qquad (6)$$

Образац (6) налази велику примену у Машинској техници, јер се помоћу њега може увек наћи једна непозната количина, од количина које се у њему јављају.

Пример. — Један жељезнички воз, чија тежина без локомотиве износи 98100 kg, крене се из стања мира и на крају 60 секунде достигне брзину 15 m/sec*.

Трење воза и други отпори при кретању износе $5^0/_{00}$ од тежине воза.

Израчунати силу којом је локомотива дејствовала на воз.

Како је

$$v = v_0 + u\ t,$$

то је према датом проблему

$$15 = 60\ u,$$

одакле убрзање воза

$$u = \frac{1}{4} m/sec^2.$$

Трење и други отпори воза су

$$R = 98100 \cdot 0{,}005 = 490{,}5\text{kg}.$$

Тражена сила је, према обрасцу (6),

$$P = \frac{98100}{9{,}81} \cdot \frac{1}{4} + 490{,}5 = 2990{,}5 \text{ kg}.$$

На основу Д'Аламберовог принципа, а као што из претходног примера видимо, извесни проблеми из Динамике своде се на проблеме Статике.

Када векторску једначину (5) пројицирамо, добићемо образац Д' Аламберовог принципа у скаларном облику.

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

где су X, Y, Z, пројекције ефективне силе $\vec{F}$, а

* Кретање воза сматра се као транслаторно.

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\ m\frac{d^2y}{dt^2},\ m\frac{d^2z}{dt^2},$$

пројекције инерцијалне силе.

Петнаести одељак

Моменат силе. Спрег сила.

109. Моменат силе. — Све оно што смо казали за моменат једног вектора у погледу на једну тачку, члан 30, и моменат једног вектора у погледу на једну осу, члан 31, важи и за моменат једне силе у погледу на једну тачку и у погледу на једну осу.

Пример. — Моменат силе $\vec{P}$ у погледу на тачку O (сл. 179) је

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{P}d.$$

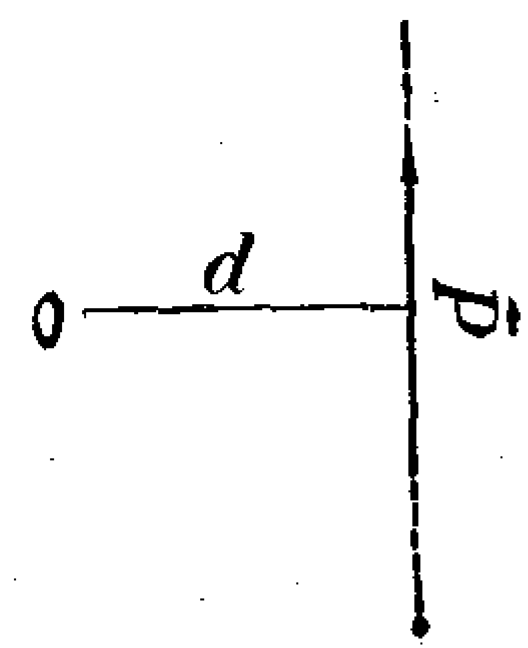
Ако је нормално отстојање

$$d = 2\ m,$$

а интензитет силе

$$|\vec{P}| = 500\ kg,$$

онда је интензитет момента



Сл. 179

$$|\vec{M}^{(O)}| = 1000\ kgm,$$

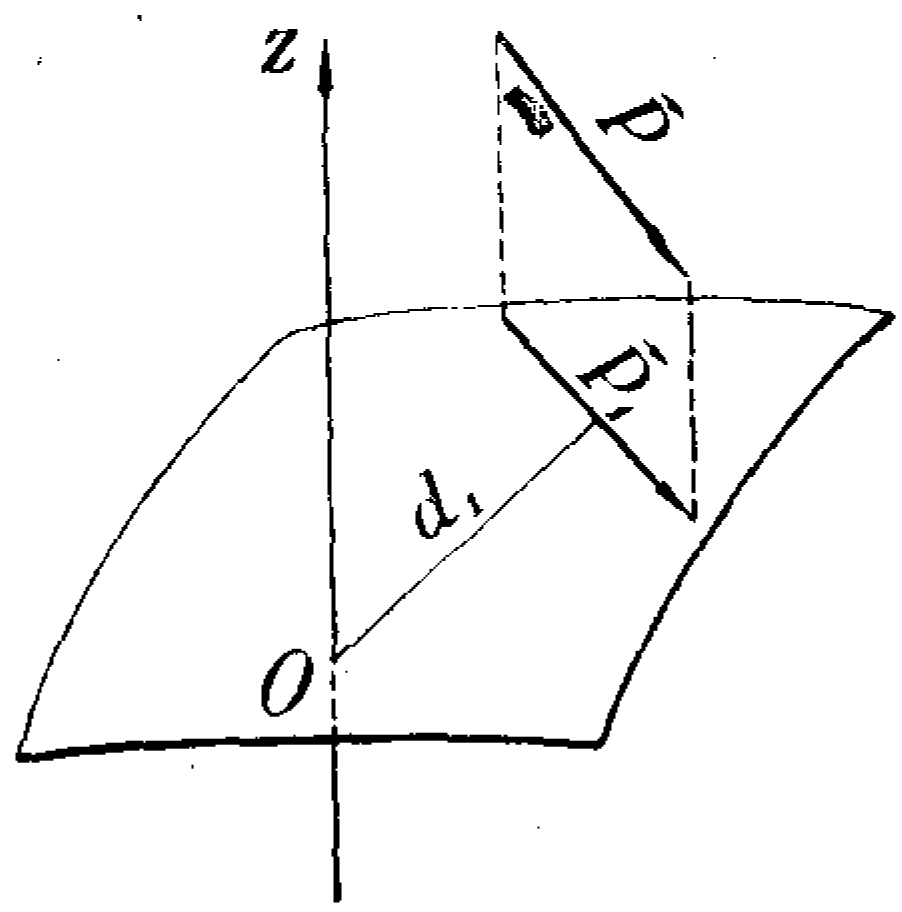
а смер позитиван.

Пример. — Моменат силе $\vec{P}$ у погледу на z-осу (сл. 180) је

$$\vec{M}_{\vec{z}} = \vec{P}_1\ d_1$$

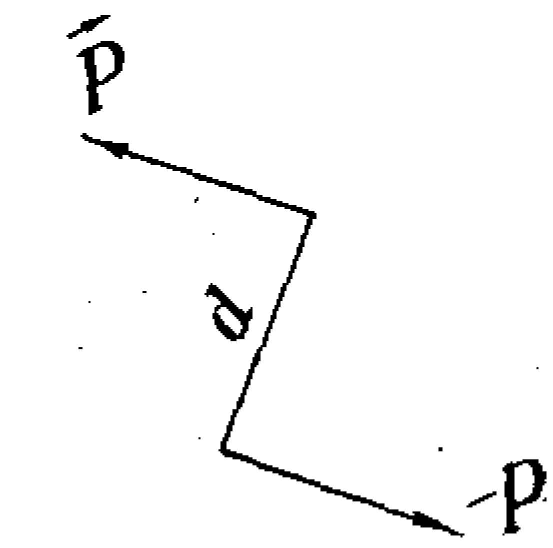
где је $\vec{P}_1$ пројекција силе $\vec{P}$, а d_1 нормално отстојање пројекције силе од тачке продора O.

Смер момента је негативан.



Сл. 180

110. Спрег сила уопште. — Две паралелне и по величини једнаке силе, а супротних смерова, са разним нападним тачкама (сл. 181.) зовемо *спрег сила*.

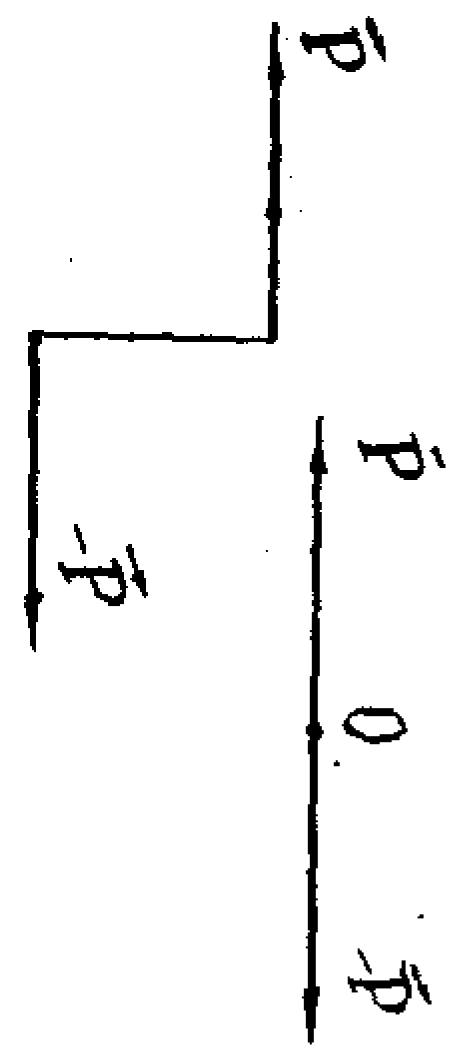


Сл. 181

Најкраће отстојање d између спрегнутих сила $\vec{P}$, $-\vec{P}$, назива се *крак спрега.*

Производ једне спрегнуте силе и крака спрега назива се *моменат спрега.*

Када станемо у нападну тачку ма које спрегнуте силе и гледамо у смер друге силе и ако смер те друге силе иде у супротном смеру казаљки на часовнику, онда је моменат спрега *позитиван*, а ако смер те друге силе иде у истом смеру казаљки на часовнику онда је моменат спрега *негативан.*



Сл. 182

Моменат спрега (сл. 181) је позитиван: а његов интензитет је

$$M = Pd.$$

Када узмемо ма где у равни спрега пол O (сл. 182) и пренесемо спрегнуте силе, онда је њихова резултанта

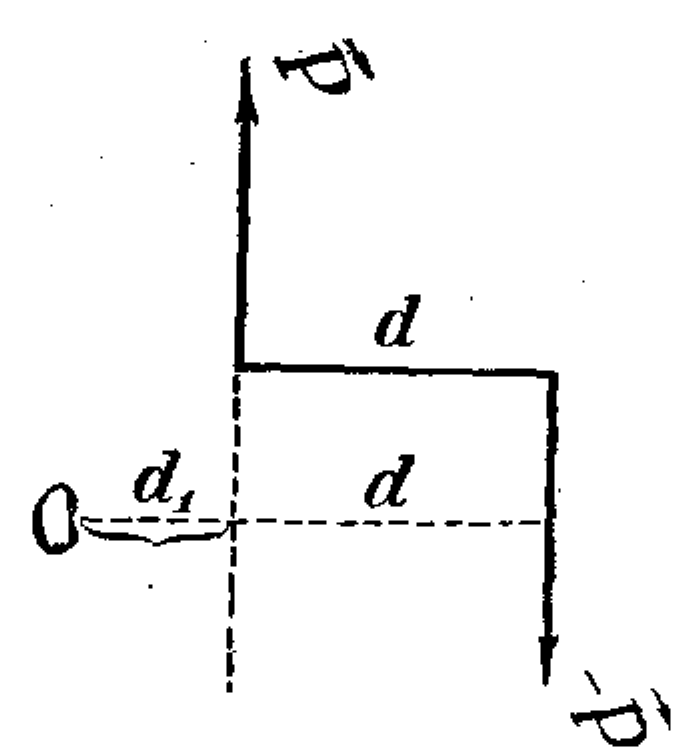
$$\vec{R} = \vec{P} + (-\vec{P}) = 0.$$

и можемо написати теорему:

Теорема. — *Резултанта спрегнутих сила је једнака нули.*

Интензитет момента силе $-\vec{P}$ у погледу пола O (сл. 183), је

$$\underset{(-P)}{\overset{(O)}{M}} = -P\,(d + d_1),$$



Сл. 183

а интензитет момента силе $\vec{P}$ је

$$\underset{(P)}{\overset{(O)}{M}} = P\,d_1,$$

те отуда интензитет момента спрега у погледу пола O је

$$\overset{(O)}{M} = \underset{(-P)}{\overset{(O)}{M}} + \underset{(P)}{\overset{(O)}{M}} = -Pd,$$

одакле изводимо теорему:

Теорема. — *Збир момената спрегнутих сила, у погледу ма које тачке у равни спрега, једнак је моменту самога спрега.*

И ако је резултанта спрегнутих сила једнака нули ипак *тело на које би дејствовао спрег сила не би било у равнотежи, јер је моменат спрегнутих сила различит од нуле.*

Спрегнуте силе теже да окрену тело на које дејствују.

Како је резултанта спрегнутих сила једнака нули, а моменат различит од нуле, то се за интензитет једнога спрега сматра моменат спрега.

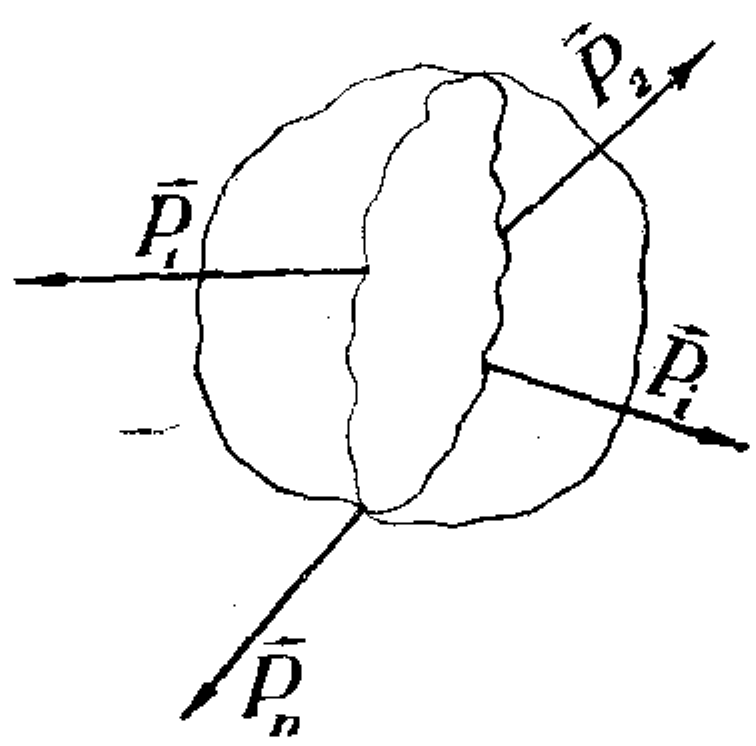
Спрег сила је прост статички појам исто онако као и сила.

Шеснаести Одељак

Статика крутог тела

---

111. Равнотежа крутог тела. — Ако једно слободно круто тело K (сл. 184) напада један систем спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_i$ $\vec{P}_n$, у разним нападним тачкама, онда, имајући у виду да извесне силе могу сачињавати спрегове, тело ће бити у равнотежи, према првом Њутновом закону, ако је



Сл. 184.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0 \qquad (1)$$

одакле изводимо теорему:

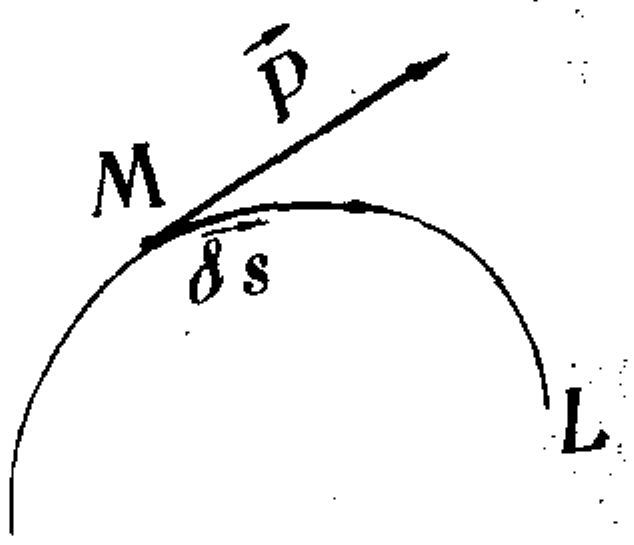
Теорема. — *Једно круто слободно тело, на које дејствује један систем спољних сила, остаје уопште у равнотежи када је векторски збир свих спољних сила и векторски збир свих момената спољних сила у погледу једне тачке, једнак нули.*

Векторским једначинама (1) одговарају шест скаларних једначина, као услови равнотеже крутог тела

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0.$$

112. Виртуелан рад. — Ако на материјалну тачку M, која се налази на апсолутно глаткој површини или линији L (сл. 185) дејствује један систем сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots P_n$, чија је резултанта $\vec{P}$, па замислимо да тачка M учини известан произвољан и мали пут $\vec{\delta s}$ на линији L*, онда тај замишљени мали пут $\vec{\delta s}$ називамо *виртуелан пут*, а рад



Сл. 185.

$$\delta A = (\vec{P}\ \vec{\delta s}) = P\ ds\ cos\ (\vec{P}, \vec{\delta s}), \qquad (1)$$

називамо *виртуелан рад***.

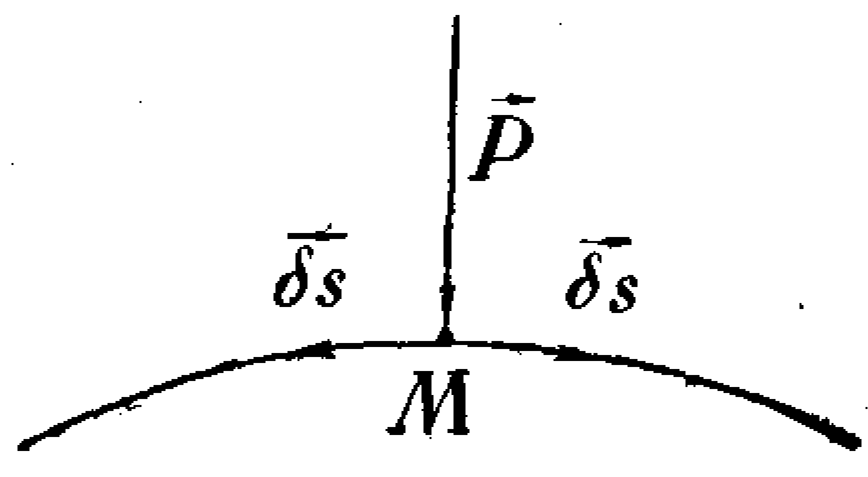
Када се деси да тачка M има такав положај, да је виртуелан рад

$$\delta A = P\ \delta s\ cos\ (\vec{P}, \vec{\delta s}) = 0, \qquad (2)$$

онда мора бити или $\vec{P} = 0$, или $cos\ (\vec{P}, \vec{\delta s}) = 0$.

Ако је $cos\ (\vec{P}, \vec{\delta s}) = 0$, онда је

$$\sphericalangle\ (\vec{P}, \vec{\delta s}) = \frac{\pi}{2},$$



Сл. 186.

(сл. 186), те отуда у оба случаја, било да је $\vec{P} = 0$, било да је $cos\ (\vec{P}, \vec{\delta s}) = 0$, тачка биће у равнотежи, и ми изводимо теорему:

Теорема. — *Кадгод је виртуелан рад једне тачке на коју дејствује извесна сила, једнак нули тачка је у равнотежи, и обрнуто, кад је једна тачка у равнотежи, онда је виртуелан рад силе која дејствује на тачку, једнак нули.*

Кад на неко круто тело дејствује један систем датих спољних сила $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$, онда на сваку материјалну тачку M_i дејствује извесна спољна сила $\vec{P}_i$ и унутрашња сила $\vec{p}_i$.

Ако се тело налази у равнотежи, онда је и свака његова тачка у равнотежи, а кад је свака његова тачка у равнотежи, онда је виртуелан рад свих спољних сила,

$$\Sigma\ \delta A_{\vec{P}_i},$$

и свих унутрашњих сила

---

* Исто важи и за површину, кад се тачка налази на површини.

** Назив виртуелан пут и рад значи пут и рад, који је увек теориски могућан, а долази од латинске речи virtus, што значи моћ.

$$\Sigma\ \delta A_{\vec{p}_i},$$

једнак нули, дакле

$$\Sigma\ \delta A_{\vec{P}_i} + \Sigma\ \delta A_{\vec{p}_i} = 0. \qquad (3)$$

Како је код крутог тела, када је у равнотежи, виртуелан рад унутрашњих сила

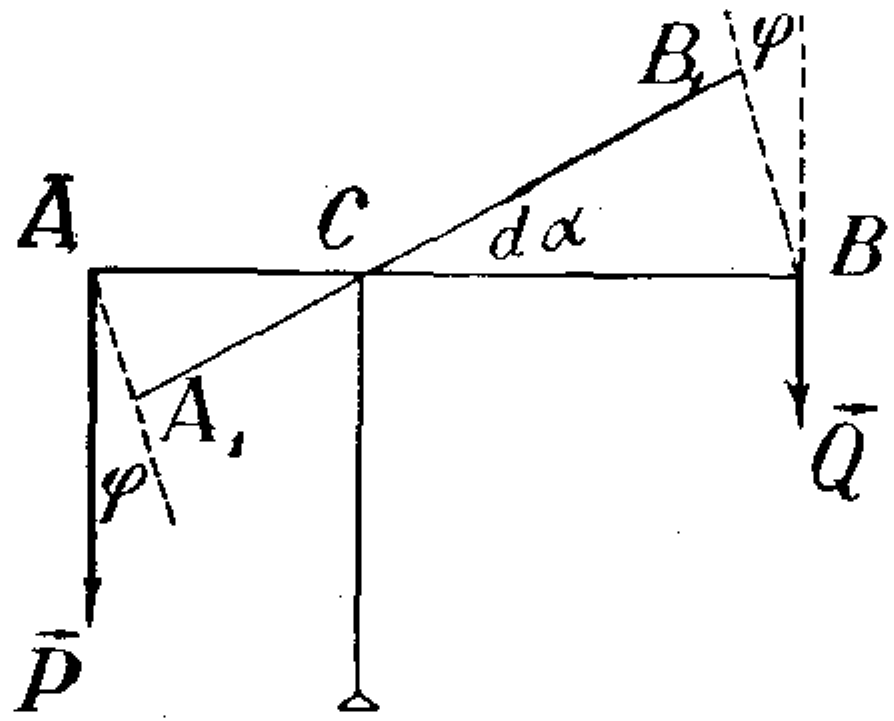
$$\Sigma\ \delta\ A_{\vec{p}_i}$$

увек једнак нули, то је према обрасцу (3) потребно и довољно да само виртуелан рад, за сва могућа померања, датих спољних сила буде једнак нули, па да тело буде у равнотежи. А кад је то тако, онда изводимо теорему:

Теорема. — *Кад на једно круто тело дејствује систем спољних сила, па је збир виртуелних радова свих спољних сила једнак нули онда је тело у равнотежи, и обрнуто, кад је неко тело у равнотежи онда је збир свих виртуелних радова спољних сила једнак нули.*

Помоћу виртуелних радова можемо испитивати равнотежу тачке и тела.

Пример. — Наћи помоћу виртуелних радова интензитет силе $\vec{P}$, па да полуга $A\ B$ (сл. 187) буде у равнотежи кад интензитет силе $\vec{Q}$ износи 10 kg, а крак $CB = 2\ AC$.



Сл. 187.

Када замислимо да полуга изврши један виртуелан пут и нападна тачка B дође у B_1, тачка A у A_1, онда су виртуелни путеви нападних тачака A и B,

$$-\widehat{A\,A_1} \text{ и } \widehat{B\,B_1}.$$

Како је виртуелан пут

$$-AA_1 = ACd\alpha,$$

а

$$BB_1 = 2ACd\alpha,$$

то је виртуелан рад, обележавајући непознату силу са x,

$$-x \cdot ACd\alpha \cdot \cos\varphi + 10 \cdot 2ACd\alpha \cdot \cos\varphi = 0,$$

одакле је после скраћивања

$$x = \left|\vec{P}\right| = 20\ kg.$$

Када пројекције виртуелног пута $\vec{\delta s}$, на Декартов правоугли триедар, означимо са dx, dy, dz*, а пројекције силе $\vec{P}$, са X, Y, Z, онда виртуелан рад, као скаларни продукт из силе и пута, према обрасцу (1), можемо претставити и изразом

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz;$$

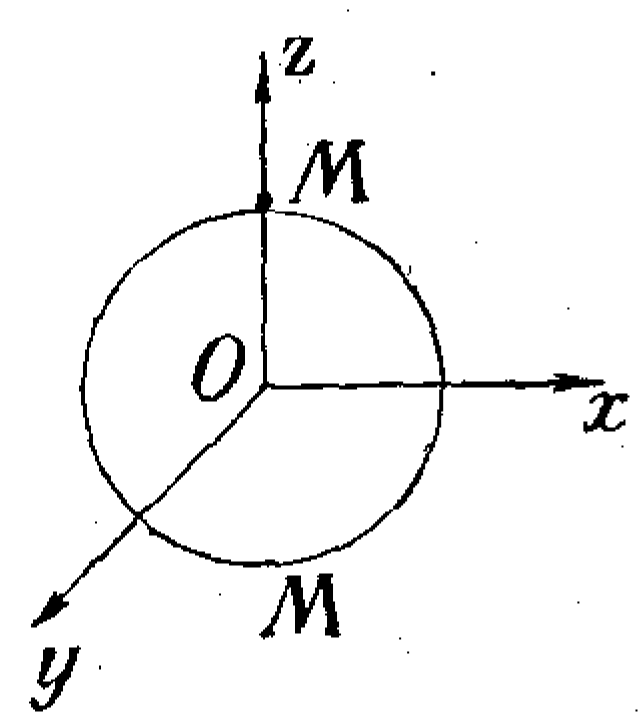
а као услов равнотеже изразом

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Пример. — Одредити помоћу виртуелног рада равнотежу материјалне тачке M, масе m, на обиму вертикалнога круга (сл. 188), чија је једначина

$$x^2 + z^2 = r^2, \qquad (1)$$

када на тачку M дејствује само сила земљина тежа.



Сл. 188.

У датом проблему пројекције силе су

$$X = 0, \qquad У = 0 \qquad Z = - mg.$$

Услов равнотеже је

$$X\, dx + У\, dy + Z\, dz = 0,$$

или

$$X + У \frac{dy}{dx} + Z \frac{dz}{dx} = 0.$$

Како су у датом случају пројекције силе X и $У$ једнаке нули то као услов равнотеже остаје

$$Z \frac{dz}{dx} = 0,$$

или

$$- m\, g \frac{dz}{dx} = 0,$$

или, с обзиром на једначину круга

$$mg \frac{x}{z} = 0,$$

или

$$mgx = 0. \qquad (2)$$

Из једначине (2) је

$$x = 0,$$

а за $x = 0$,

* При излагању теорије виртуелнога рада пројекције виртуелнога пут δs, обележавају се и са δx, δy δz.

$$z = \pm r.$$

Тачка M има дакле равнотежу у тачкама круга

$$x = 0, \qquad z = r$$

$$x = 0, \qquad z = -r.$$

Равнотежа у тачки

$$x = 0, \qquad z = r,$$

је лабилна, а у тачки

$$x = 0, \qquad z = -r,$$

је стабилна.

ЛИТЕРАТУРА

L. Silberstein Ph. D

Vectorial Mechanics

London

1926

P. Appell et S. Dautheville

Precis de Mecanique Rationnelle

Paris

1918

T. Pöschl

Lehrbuch der Technischen Mechanik

Berlin

1930

K. Wolf

Lehrbuch der Technischen Mechanik

Wien

1931

ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ

Страна	Ред	Стоји	Треба
6	23	земља	Земља
39	6	колинерни	колинеарни
116	31	интеграељњем	интеграљењем
118	18	озничаимо	означимо
125	15	*снига*	*снага*
142	23	кре-	кретати
146	2	(сл. 142)	(сл. 141)
146	3	(сл. 143)	(сл. 142)
150	25	(сл. 146)	(сл. 145)

На страни 28 вектор $\vec{c}$ има супротан смер, него ли што слика показује.

На страни 69 стоји на слици $\Delta \vec{u}$; а треба $\Delta \vec{v}$, Исто тако у реду 17, 18, 20, 22, 25 и 30 у изразима стоји $\Delta \vec{u}$, а треба $\Delta \vec{v}$

САДРЖАЈ

I

Општи део

Први одељак

Основни појмови

Други одељак

Координатни системи

Трећи одељак

Вектори

Страна

Четврти одељак

Примена вектора у Аналитичној и Диференцијалној геометрији

II

Кинематика

Пети одељак

Кинематика тачке

Девети одељак

Динамика слободне материјалне мачке

Страна

Десети одељак

Поља

Једанаести одељак

Централне силе

Дванаести одељак

Динамика неслободне материјалне тачке

Тринаести одељак

Динамика система материјалних тачака и крутог тела

III

Статика

Четрнаести одељак

Статика материјалне тачке

Петнаести одељак

Моменат силе. Спрег сила

Шеснаести одељак

Статика крутог тела

Страна