Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Хипотеза о флексибилним полиедрима

Аутор:
Филип Јевтић

Ментори:
др Синиша Врећица
др Раде Живаљевић

23. август 2012

Садржај

Предговор

Овај рад има облик прегледног чланка у коме су изложени резултати и отворени проблеми у вези флексибилних полиедара. Посебна пажња посвећена тзв. *Bellows conjecture* тј. хипотези да запремина флексибилних полиедара остаје фиксна при савијању. Рад је у великој мери самосадржан и може да служи као увод у ову актуелну област.

Искрено се захваљујем Синиши Врећици и Радету Живаљевићу чији труд и залагање далеко превазилазе дужности ментора, као и Браниславу Првуловићу на корисним сугестијама.

1 Увод

Представљамо класичан резултат, Кошијеву[1] теорему ригидности, као увод и мотивацију за проблеме које разматрамо у раду.

1.1 Кошијева теорема о ригидности

Граф називамо планарним ако се може утопити у $\mathbb{R}^2$. Другачије речено, граф је планаран ако се може нацртати у равни тако да се ивице секу само у теменима. Планарни граф дели раван на компоненте повезаности (чији број не зависи од утапања) које називамо пљоснима графа. Такође, број ивица који окружују сваку пљосан је добро дефинисан (инваријантан у односу на утапање) и називамо га степеном пљосни. Подсетимо се Ојлерове[2] формуле.

Теорема 1.1 (Ојлерова формула)**.** *Нека је G повезан планаран граф са n темена, e ивица и f пљосни. Тада је*

$$n - e + f = 2$$

Од многобројних последица овог дивног тврђења потребно нам је следеће.

Последица 1.1. *Нека је G прост планаран граф са $n > 2$ темена, e ивица и f пљосни и нека су његове ивице обојене двема бојама. Тада постоји теме такво да се у цикличном поретку његових ивица њихова боја мења највише два пута.*

Доказ. Нека је n_i, $i \geqslant 0$, број темена степена i. Аналогно дефинишемо и f_i, $i \geqslant 1$. Приметимо да важи

$$\sum_{i \geqslant 1} i n_i = 2e = \sum_{i \geqslant 1} i f_i$$

Посматрајмо углове где долази до промене боје. Нека је c број таквих углова. Предпоставимо да је тврђење нетачно. Тада је $c \geqslant 4n$ јер се око сваког темена промена боје дешава паран број пута. Даље, свака пљосан степена $2k$ или $2k+1$ има највише $2k$ таквих углова те важи

$$\begin{aligned}
4n &\leqslant c \\
&\leqslant 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + ... \\
&\leqslant 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + ... \\
&= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + ...) - 4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + ...) \\
&= 4e - 4f
\end{aligned}$$

што је у контрадикцији са Ојлеровом формулом. □

Подсетимо се дефиниције комбинаторне еквивалентности полиедра.

Дефиниција 1.1. Полиедри P и P' су комбинаторно еквивалентни ако постоји бијекција $f : P \to P'$ која слика темена у темена и пљосни у пљосни тако да за сваку пљосан p важи $deg(p) = deg(f(p))$.

Спремни смо да докажемо жељено тврђење.

---

[1] *Baron Augustin-Louis Cauchy* (1789 – 1857) - Француски математичар.

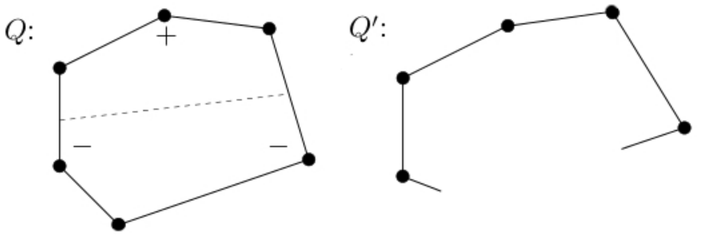
[2] *Leonhard Euler* (1707 – 1783) - Швајцарски математичар и физичар.

Теорема 1.2 (Кошијева теорема ригидности, 1813). *Нека су конвексни полиедри* $P, P' \subseteq \mathbb{R}^3$ *комбинаторно еквивалентни и нека су им одговарајуће пљосни подударне. Тада је* $P \cong P'$.

Доказ. Довољно је показати да су сви углови међу одговарајућим паровима суседних пљосни подударни. Обојимо ивице полиедра P црно или бело ако је угао међу одговарајућим суседним пљоснима већи односно мањи у P' него у P. Уколико су одговарајући углови подударни, не бојимо ивицу ни једном бојом. Обојене ивице полиедра P чине двобојан планаран граф G.

Предпоставимо да $P \ncong P'$. Тада је $G \neq \emptyset$. Одаберимо теме v које је крајња тачка бар једне обојене ивице и код кога се (посматрано у G) промена боје у цикличном поредку суседних ивица дешава највише два пута. Такво теме постоји на основу Последице 1.1.

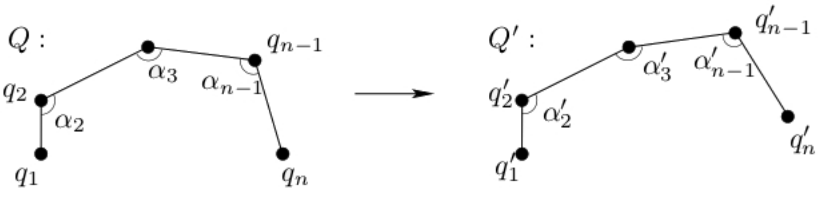
Пресецимо P сфером S_ϵ поизвољно малог полупречника ϵ са центром у v и P' сфером S'_ϵ са центром у v'. Добијамо конвексне сферне полигоне Q и Q' чији су одговарајући лукови подударни (јер су пљосни P и P' подударне и полупречник сфера S_ϵ и S'_ϵ је исти).



Слика 1: Доказ Теореме 1.2.

Означимо углове у Q са + или − ако је одговарајући угао у Q' већи односно мањи у Q' него у Q. На основу одабира темена v, бар један од углова полигона Q мора бити означен и у цикличном поредку углова промена знака се дешава највише два пута. Ако су сви означени углови у Q истог знака долазимо у контрадикцију са наредном помоћном Лемом 1.1. У супротном, постоји линија која спаја средишта неке две странице и која раздваја углове означене са + од оних означених са −. И у овом случају долазимо до контрадикције јер би у супротном, на основу исте леме, линија раздвајања истовремено била дужа и краћа од одговарајуће линије раздвајања у Q'. □

Лема 1.1 (Кошијева лема). *Нека су* Q *и* Q' *конвексни (равански или сферни) n-тоуглови означени као на слици*



Слика 2: Кошијева лема.

такви да $(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\})\, \overline{q_i q_{i+1}} = \overline{q_i' q_{i+1}'} \wedge \alpha_i \leqslant \alpha_i'$. *Тада је*

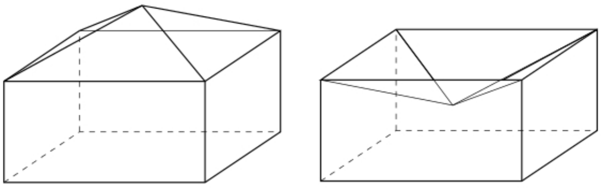
$$\overline{q_1 q_n} \leqslant \overline{q_1' q_n'}$$

при чему једнакост важи акко $(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\})\, \alpha_i = \alpha_i'$.

Интересантно је напоменути да је Кошијев оригинални рад[2] садржао грешку у помоћној леми која је примећена тек после више од 50 година. Највероватније објашњење за оволико дуг период до примећивања грешке је то што је помоћна лема толико интуитивно очигледна да готово никога није занимао њен доказ (што је један од разлога зашто га не наводимо).

1.2 После Кошија

Приметимо да је у Кошијевој теореми неопходно да оба полиедра буду конвексна.



Слика 3: Неподударни комбинаторно еквивалентни полиедри са подударним пљоснима.

Дефиниција 1.2. Савијање полиедра P је непрекидна фамилија комбинаторно еквивалентних полиедара P_t, $t \in [0,1]$ таква да је $P_0 = P$ и $(t_1, t_2 \in [0,1])\, t_1 \neq t_2 \Rightarrow P_{t_1} \ncong P_{t_2}$. Полиедар називамо флексибилним (савитљивим) ако постоји његово савијање. Полиедар који није флексибилан називамо ригидним.

Кошијева теорема тврди да је сваки конвексан полиедар ригидан. Природно се поставља следеће питање. Да ли постоји флексибилан полиедар?

Предпостављало се да су сви полиедри, конвексни или не, ригидни. На велико изненађење, Роберт Конели[3] је 1977. год., ослањајући се на предходне резултате Раола Брикарда[4], 164 године после Кошија, оборио ту хипотезу пронашавши контрапримере [4]. Уследило је још изненађења. Конели је поставио следећу хипотезу.

Хипотеза 1 (*Bellows conjecture*)**.** *Запремина флексибилног полиедра је константна при савијању.*

Енглеска реч *bellows*[5] су у овом контексту односи на механичку дувалицу или мех. Хармоника би била најпогоднија за сликовито појашњење хипотезе. Наиме, како се хармоника савија њена запремина се мења. Ако замислимо хармонику као

---

[3] *Robert Connelly* - Амерички математичар

[4] *Raoul Bricard* (1870 – 1944) - Француски математичар и инжењер.

[5] Етимолошки корен речи *bellow* потиче од неколицине XII вековних средње енглеских речи за стомак и изнутрицу као нпр. *belly* (стомак) што је и логично јер се разни мехови, гајде и сл. традиционално праве од изнутрица разних животиња.

полиедар, хипотеза тврди да у том случају пљосни хармонике не могу бити подударне у свим моментима савијања (јер би у супротном хармоника имала константну запремину што није случај). Другим речима, не постоји „математички савршена” хармоника. Уместо сликовитог назива „Хипотеза о хармоници”, у даљем раду користимо формалнији термин: ФЗП[6] хипотеза.

И. Х. Сабитов[7] је доказао ФЗП хипотезу 1995. год. за све полиедре хомеоморфне сфери [14, 15]. Две године касније, Сабитов, Конели и Валц[8] су доказали [5] хипотезу за све полиедре (у $\mathbb{R}^3$).

Ови резултати отворили су очекивана питања. Да ли аналоган ФЗП хипотезе важи у вишим димензијама и да ли вишедимензиони флексибилни полиедри уопште постоје?

Ова питања су позитивно решена за димензију 4. Валц је 1998. год. доказала да постоје флексибилни полиедри у $\mathbb{R}^4$ а А. А. Гајфулин[9] је 2010. год. доказао [12] да и они задовољавају ФЗП хипотезу.

У овом раду представљамо предходно поменута тврђења.

Тема флексибилних полиедара је и даље веома актуелна и још увек је отворено питање да ли аналогони предходних тврђења важе за димензије веће од 4.

---

[6] Скраћеница од „фиксна запремина полиедра”.

[7] Иджад Хакович Сабитов (1937–) - Руски математичар.

[8] *Anke Walz*

[9] Александар Александрович Гайфуллин - Руски математичар.

2 Флексибилни полиедри у $\mathbb{R}^3$

У овом поглављу доказујемо следећу теорему.

Теорема 2.1 (*Conelly*, 1978)**.** *Постоји флексибилан полиедар у* $\mathbb{R}^3$.

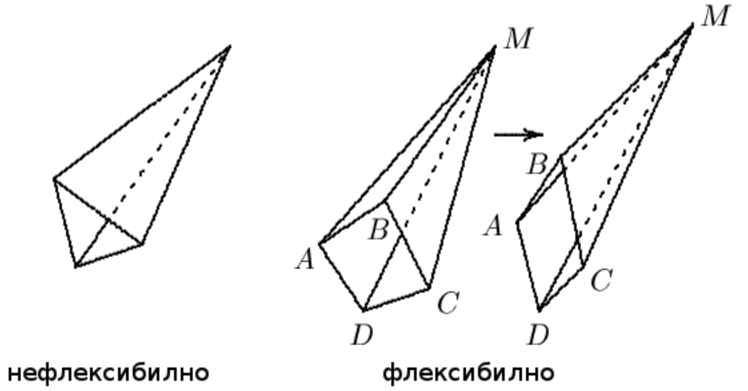
Теорему доказујемо експлицитно конструишући тражени полиедар.

Конелијева конструкција флексибилног полиедра базира се на предходним резултатима Брикарда [1]. Брикард је 1890-их конструисао флексибилни полиедар са самопресецима. Конелијев резултат се базира на отклањању самопресека Брикардовог октаедра. Интересантно је напоменути да је и сама техника коју је Конели користио суштински Брикардова.

2.1 Брикардов октаедар

За конструкцију Брикардовог октаедра потребне су нам две једноставне чињенице.

Лема 2.1. *Пирамида без базе је флексибилна акко је број њених страна већи од* 3.

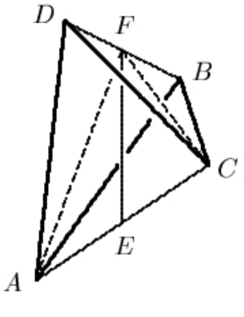


нефлексибилно

флексибилно

Слика 4: Лема 2.1.

Лема 2.2. *Нека је* $ABCD$ *тетраедар такав да је* $AB = CD$ *и* $BC = AD$*. Нека су* E *и* F *средишта* AC *и* BD*. Тада је* $EF \perp AC$ *и* $EF \perp BD$*.*



Слика 5: Лема 2.2.

Доказ. Како је $ABC \cong CBD$ (три подударне странице) то је $\angle ADB \cong \angle CBD$. Дакле, $ADF \cong CBF$ (подударни пар страница и угао међу њима). Закључујемо да је $AF = CF$ те је ACF једнакокраки и EF је његова висина. Дакле, $EF \perp AC$. Аналогно закључујемо и $EF \perp BD$. □

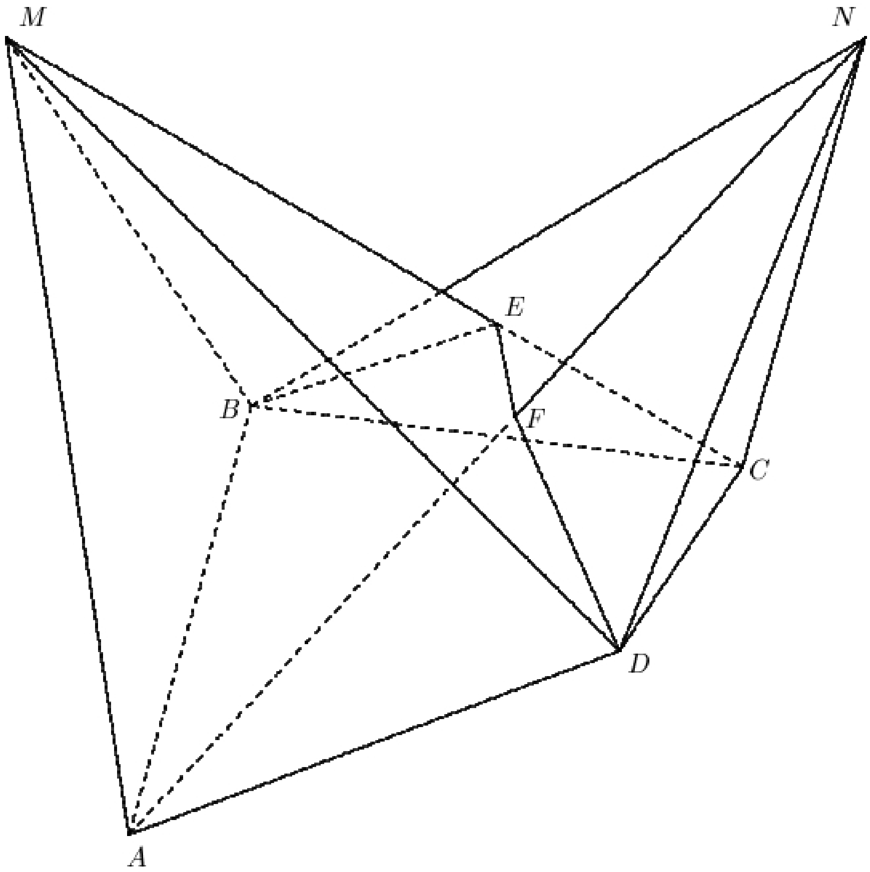
На основу предходне леме закључујемо да је тетраедар са подударним паровима насправних ивица симетричан у односу на праву која спаја средишта наспрамних ивица.

Терен је припремљен за конструкцију Брикардовог октаедра. Нека је $ABCD$ тетраедар такав да је $AB = CD$ и $BC = AD$. На основу предходне леме постоји права l симетрије тетраедра $ABCD$. Нека су M и N две различите тачке симетричне у односу на праву l.

Дефиниција 2.1. Брикардов октаедар је унија 8 троуглова:

$$ABM, BCM, CDM, DAM, ABN, BCN, CDN, DAN$$

Поменули смо да Брикардов октаедар има самопресеке. Пљосни ABN и CDM се секу по EF, ABN и BCM по BE и CDM и ADN по FD (погледати слику испод).

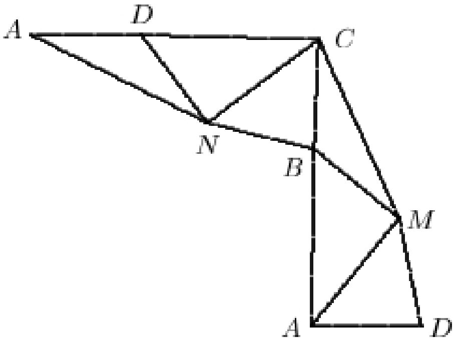


Слика 6: Брикардов октаедар.

Теорема 2.2 (*Bricard*, 1897). *Брикардов октаедар је флексибилан.*

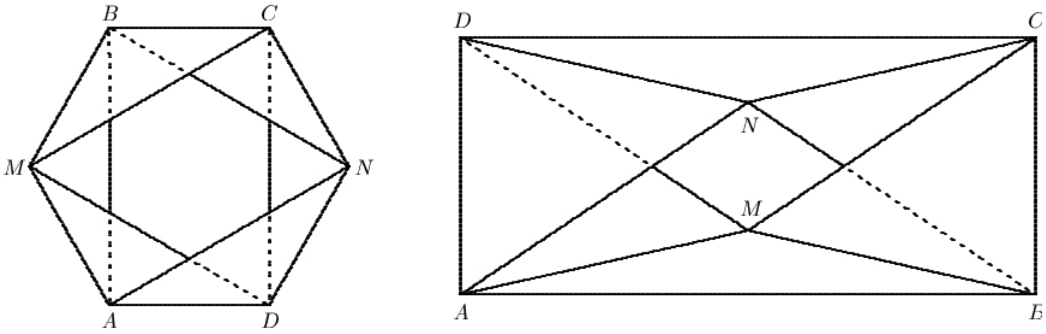
Доказ. Посматрамо Брикардов октаедар као унију две пирамиде без базе: $ABCDM$ и $ABCDN$. На основу предходног опажања, отворена пирамида $ABCDM$ је флексибилна. Њено савијање чува једнакости $AB = CD$ и $BC = AD$ те база $ABCD$ има осу симетрије у сваком моменту савијања. Рефлексијом $ABCDM$ у односу на осу симетрије базе добијамо савијање пирамиде $ABCDN$ која заједно са првобитним савијањем чини савијање Брикардовог октаедра. □

Како Брикардов октаедар има самопресеке за њега не постоји добар модел. Ипак, добар модел је могуће направити ако се елиминишу две пљосни.



Слика 7: Модел Брикардовог октаедра без две пљосни.

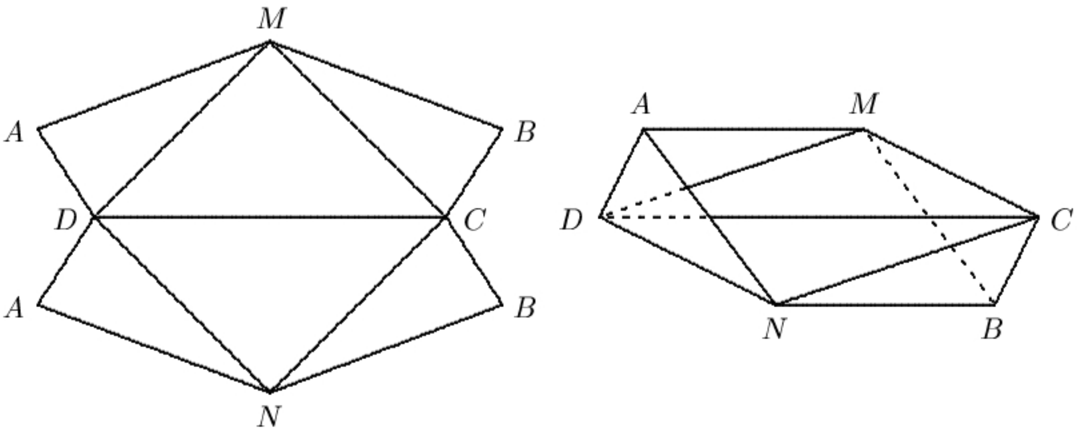
Овај модел је веома савитљив. Следећа слика показује његове две екстремне позиције.



Слика 8: Две позиције редукованог Брикардовог октаедра.

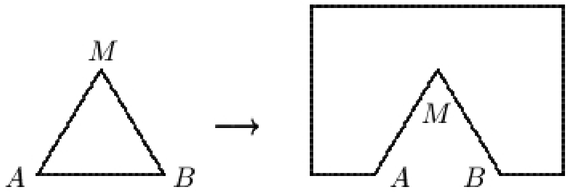
Интересантно је приметити да је симетрија неопходна да би Брикардов октаедар био флексибилан. Свако нарушавање његове симетрије чини га ригидним.

Други начин конструисања модела Брикардовог октаедра, битан за Конелијеву конструкцију, је следећи. Уклонимо две пљосни који деле заједничку ивицу, нпр. AMB и ANB. Полазећи од раванског модела спојимо AD изнад и BC испод равни $CMDN$.



Слика 9: Модел Брикардовог октаедра са границом.

Овако конструисан флексибилан полиедар има границу $AMBN$. Ни једна од недостајућих пљосни AMB и ANB му се не може додати јер би то довело до самопресека. Ипак, овај модел се може допунити до комплетног али бесконачног полиедра заменом недостајућих пљосни AMB и ANB њиховим полураванским комплементима.

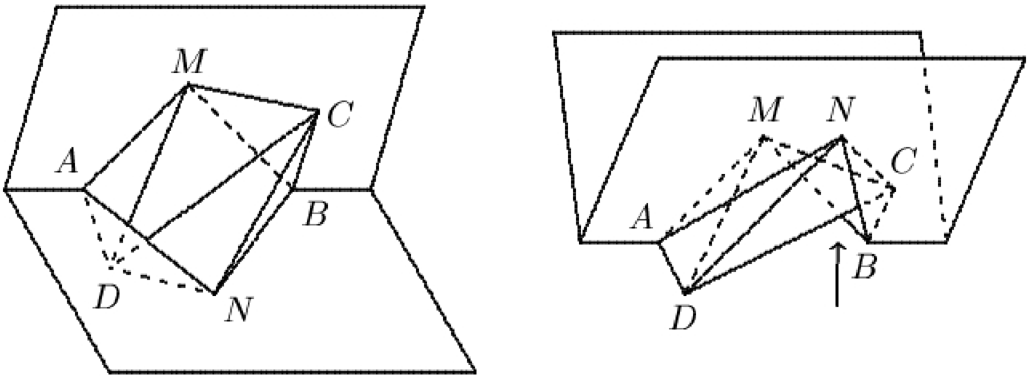


Слика 10: Полуравански комплемент троугла.

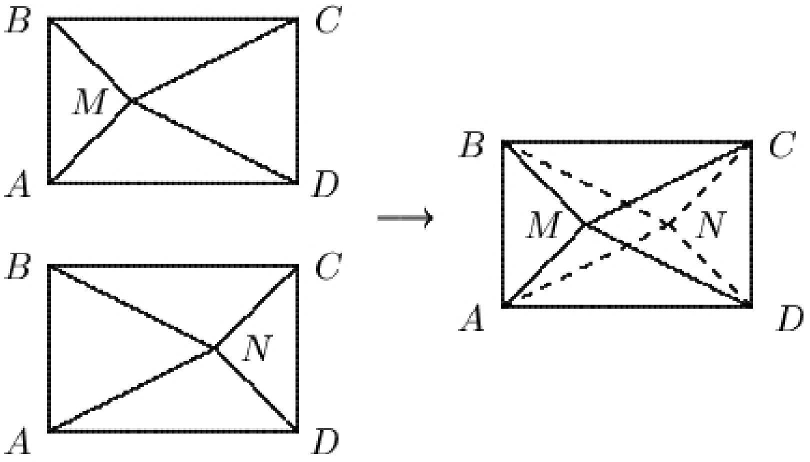
Додавањем две бесконачне пљосни добијамо комплетан флексибилан полиедар који личи на отворену књигу.

2.2 Конелијева конструкција

Конелијева конструкција почиње од дегенерисаног Брикардовог октаедра. Нека је $ABCD$ правоугаоник такав да је $AB < AD$ и нека је M тачка из унутрашњости правоугаоника таква да је $MA = MB < MC = MD$. Поделимо правоугаоник на четри троугла: AMB, BMC, CMD, DMA. Одаберимо још једну копију правоугаоника и на њему тачку N симетричну тачки M у односу на центар правоугаоника. Поделимо и други правоугаоник на четри троугла, ANB, BNC, CND, DNA и спојимо их.

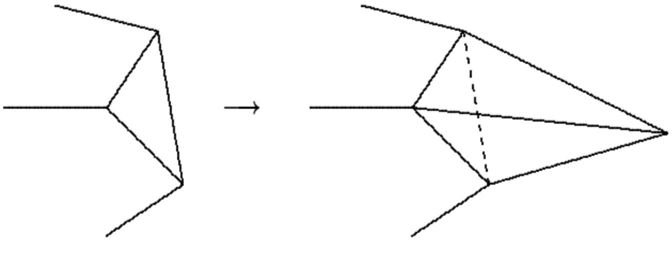


Слика 11: Модификован Брикардов октаедар.



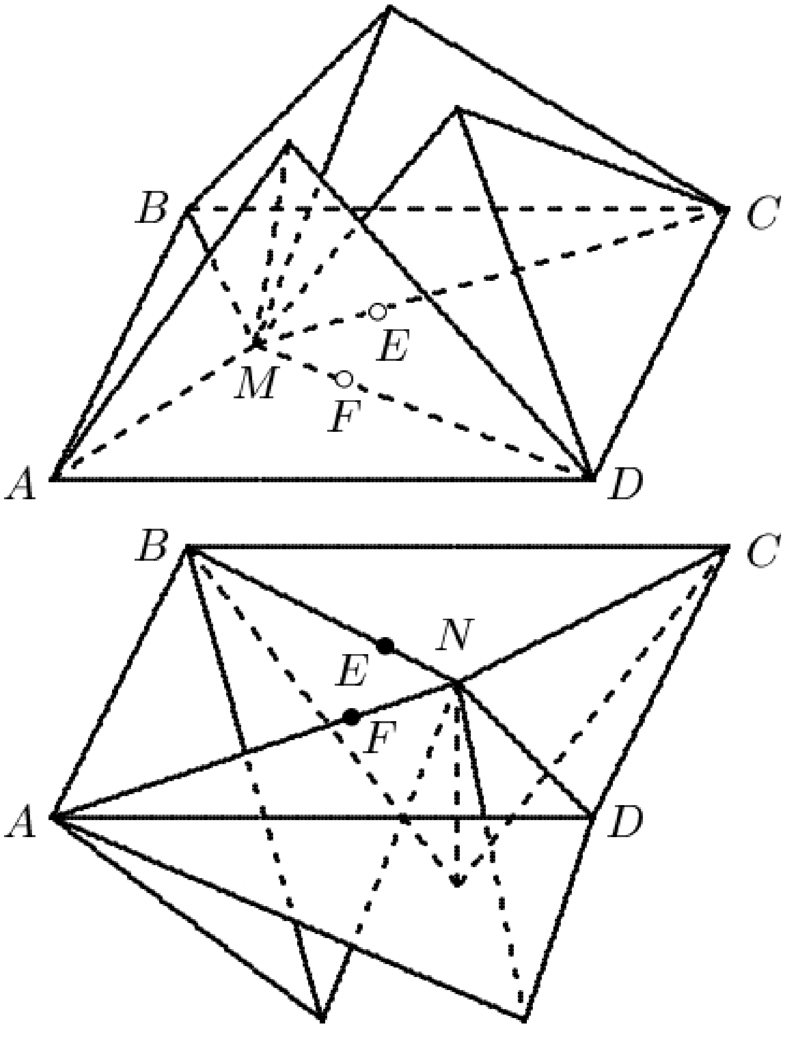
Слика 12: Почетак Конелијеве конструкције.

Добијених 8 троуглова формирају Брикардов октаедар који цео лежи у једној равни. Број његових самопресека можемо смањити тако што пљосни заменимо (отвореним) пирамидама чије су оне недостајућа база. Приметимо да додавање пирамида на пљосни не нарушава флексибилност и да ће додате пирамиде бити ригидне при савијању.



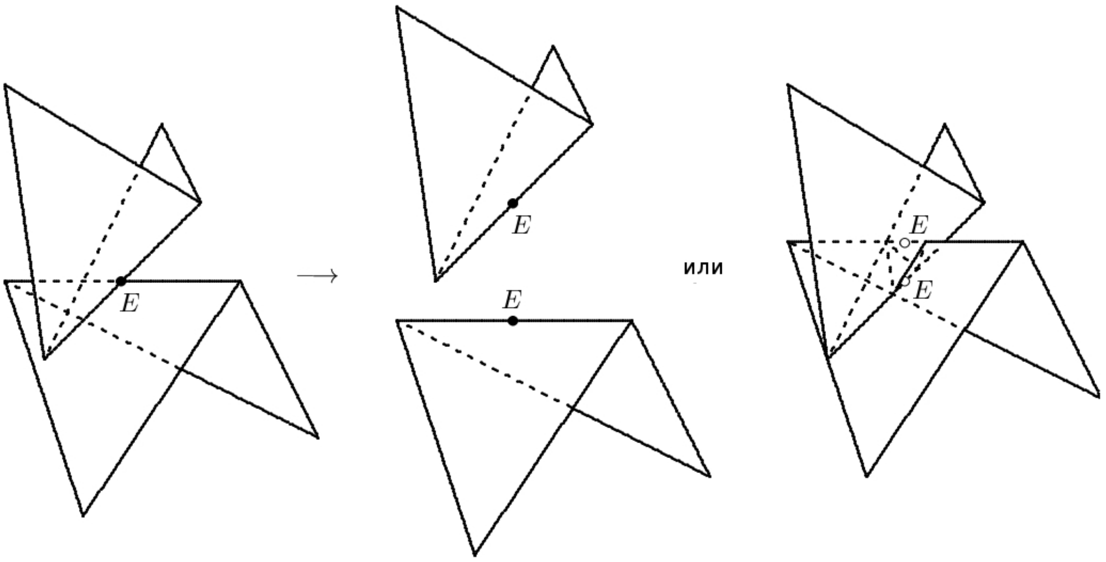
Слика 13: Замена пљосни отвореном пирамидом.

Додајмо пирамиде на предходно описан начин на свим пљоснима сем AMB и CND (јер додавање пирамида над њима не умањује број самопресека). Овако добијен полиедар има само два самопресека, E и F који су пресеци одговарајућих парова ивица. Следећа слика приказује добијен полиедар разложен на два дела ради боље прегледности.



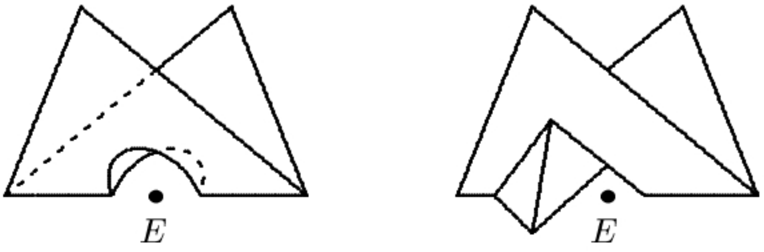
Слика 14: Скоро завршена Конелијева конструкција.

Приметимо да диедарски углови код пресечних тачака немају других заједничких тачака и да се приликом савијања полиедра диедарски углови или удаљавају или продиру један кроз други.



Слика 15: Брикардов октаедар у околини тачке самопресека.

Остало је још да уклонимо малу околину пресечних тачака на „полиедарски” начин како би смо елиминисали све самопресеке. Али већ знамо како то да урадимо! Довољно је да заменимо околине пресечних тачака модификацијом Брикардовог октаедра који личи на отворену књигу (погледати последњу слику предходног одељка).

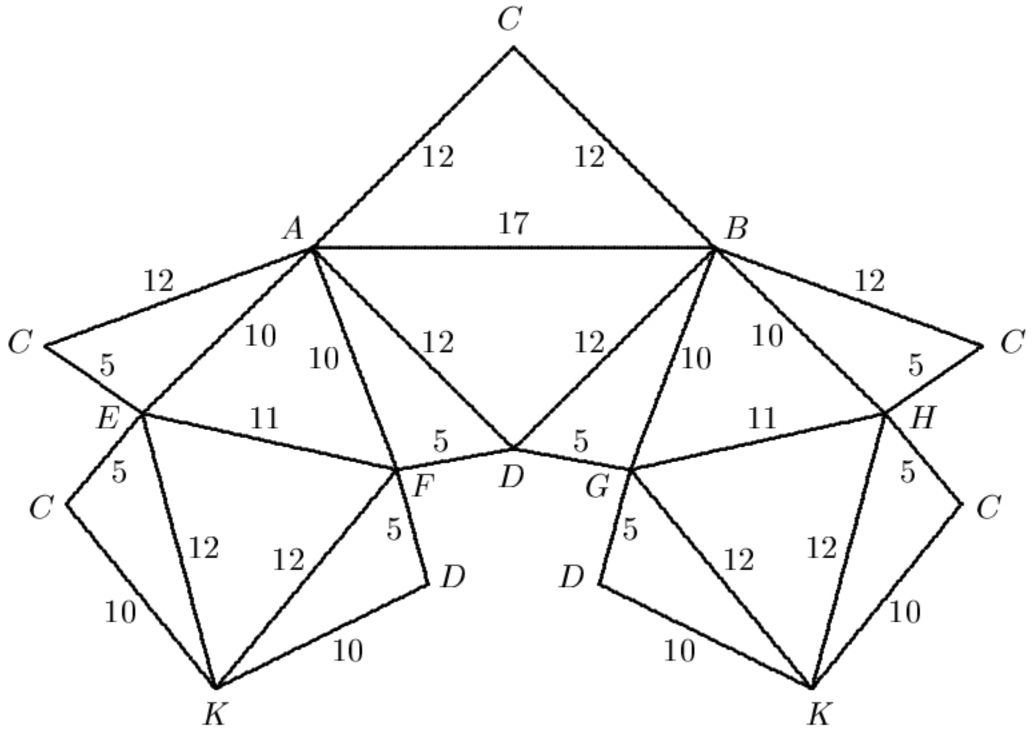


Слика 16: Уклањање тачке самопресека.

Конструисали смо флексибилан полиедар са 26 пљосни, 24 троугла и 2 неконвексна шестоугла, чиме је Конелијева теорема доказана.

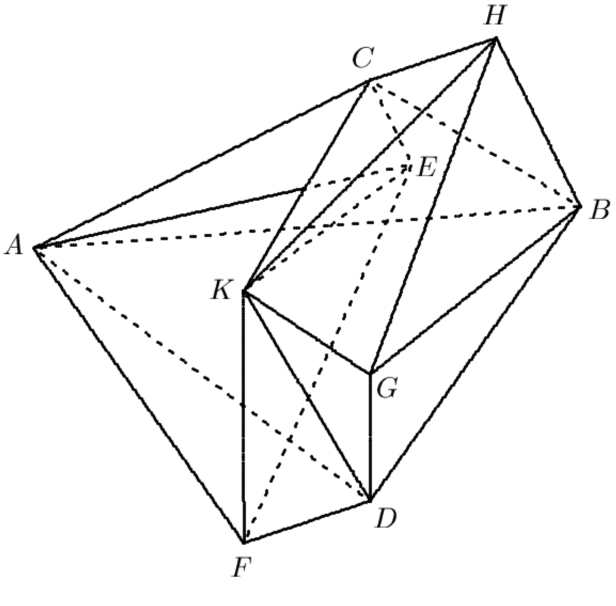
2.3 Стефенов полиедар

После Конелијеве оригиналне конструкције уследило је доста модификација. Приметимо прво да се орегинална конструкција може побољшати. Ако приликом последњег корака Конелијеве конструкције уметнуте делове учинимо довољно великим они ће „појести” диедарске углове и смањити број пљосни на 24 које ће све бити троугаоне. Даље, може се приметити да нису све додате пирамиде неопходне. Ова опажања доводе нас до модела са 18 троугаоних пљосни.



Слика 17: Разложен Стефенов полиедар.

До сада најбољу конструкцију фликсабилног полиедра пронашао је Клаус Стефен[10]. Његов полиедар се састоји од 14 троугаоних пљосни и само 9 темена.



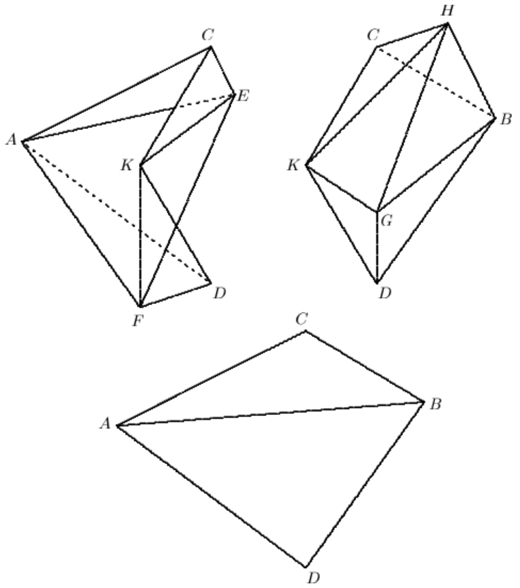
Слика 18: Стефенов полиедар.

Стефенов полиедар се састоји од два идентична шестострана Брикардова октае-

---

[10] *Klaus Steffen* - Немачки математичар.

дра, слична „крилима” предходног редукованог модела Конелијевог полиедра, и још два засебна троугла.



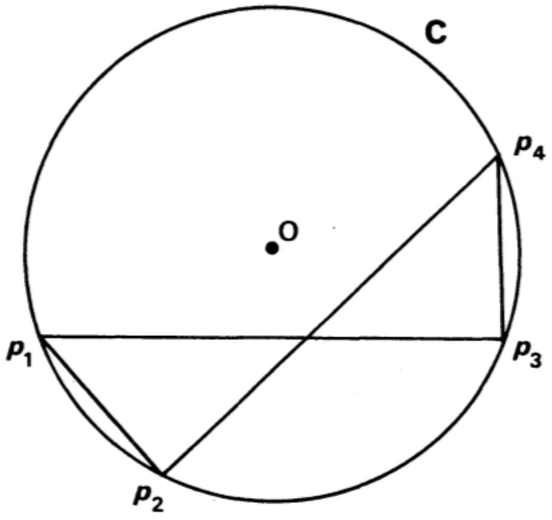
Слика 19: Стефенов полиедар разложен на делове.

На основу овог опажања лако се можемо уверити да је Стефенов полиедар флексибилан. Наиме, већ знамо да су два октаедра флексибилна те је Стефенов полиедар без пљосни ABC и ABD флексибилан. Није тешко показати да савијање чува растојање међу тачкама C и D те ће полиедар бити флексибилан и када се додају две недостајуће пљосни.

2.4 Конелијева сфера

Представимо још једну конструкцију флексибилног полиедра коју је Конели базирао на предходном раду Брикарда.

Нека је C кружница у равни π са центром у O и $p_1, p_3 \in C$. Нека су $p_2, p_4 \in C$ такве да су усмерени лукови p_1p_2 и p_3p_4 подударни. Четвороугао $P = p_1p_3p_4p_2$ је антипаралелограм са центром у O.



Слика 20: Конструкција Конелијеве сфере

Нека су N и M тачке такве да је $NM \perp \pi$, $NM \cap \pi = \{O\}$ и $MO = ON$. Унија конуса од P над N и над M је флексибилан симетричан полиедар са самопресецима [6]. Користећи предходно описану Конелијеву елиминацију тачака самопресека добијамо још један тип флексибилног полиедра, Конелијеву сферу.

Конелијева сфера је од посебног значаја јер су сви до сада познати примери флексибилних полиедара у $\mathbb{R}^4$ конструисани помоћу антипаралелограма по узору на њу.

3 Теорија места и валуациони прстени

3.1 Теорија места

Један од основних алата коришћен у Конели-Сабитов-Валцовом доказу ФЗП хипотезе је тзв. теорија места[11] тако именована у [16]. Гајфулинов доказ ФЗП хипотезе у $\mathbb{R}^4$ такође користи исти алат.

Нека је F поље. За $a \in F$ и $b \in F \setminus \{0\}$ дефинишемо:

$$\begin{aligned} a + \infty = \infty + a &= \infty \\ b \cdot \infty = \infty \cdot b &= \infty \end{aligned}$$

Изрази $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$ и $\infty \cdot 0$ су недефинисани.

Дефиниција 3.1. Нека су K и L поља. Пресликавање $\phi : K \to L \cup \{\infty\}$ се назива место од K ако за све $x, y \in K$ важи:

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
3. $\phi(1) = 1$

кад год су изрази добро дефинисани. Елементе $\phi^{-1}(L)$ називамо коначним а $\phi^{-1}(\infty)$ бесконачним (у односу на место ϕ).

Подсетимо се да за елемент x поља K кажемо да је интегралан над прстеном $R \subset K$ ако је корен неког моничног полинома са коефицијентима у R. Од значаја за доказ ФЗП хипотезе је следећа карактеризација интегралности.

Пропозиција 3.1. *Нека је K поље и R његов подпрстен. Елемент $x \in K$ је интегралан над R акко је свако место од K које је коначно на R коначно и на x.*

Појам места се природно појављује при пручавању теорије валуација. У овом раду представљамо модификоване доказе ФЗП хипотезе који избегавају коришћене појма места уместо кога користимо појам валуационих прстена. Разлози за такву одлуку су следећи. Прво, валуациони прстени су централни објекти добро утемељене и важне теорије, теорије валуација. Друго, појам места је архаичан и његова дефиниција је непотребно сложена у смислу да дефиниција места неког поља зависи од додатног поља. Са друге стране, дефиниција валуационог прстена је много ефектнија и елегантнија и не зависи од других објеката сем посматраног поља. Штавише, јединa референца где се помиње теорија места као засебна област је [16]. Модерније монографије, као нпр. [7], помињу места само у пролазу и то у вежбама остављеним за читаоца. У наредном одељку излажемо теорију валуационих прстена у оној мери која нам је потребна за доказ ФЗП хипотезе и изводимо еквивалент Пропозиције 3.1. За жељене резултате није нам неопходно да проучавамо теорију валуација те се њоме овде не бавимо. Од интереса нам је једино следећа лема чијом применом модификујемо Конели-Сабитов-Валцов и Гајфулинов доказ на жељени облик.

---

[11] Енглески: *theory of places*.

Лема 3.1. *Нек је $\phi : K \to L \cup \{\infty\}$ место од K. Тада је $O = \phi^{-1}(L)$ валуациони прстен од K са максималним идеалом $\mathfrak{m} = \phi^{-1}(0)$ и пољем остатака $\overline{K} \cong \phi(K)$. Обратно, сваки валуациони прстен O од K са максималним иделом $\mathfrak{m}$ дефинише место ϕ од K са*

$$\phi(x) = \begin{cases} x + \mathfrak{m} & x \in O \\ \infty & x \notin O \end{cases}$$

где је $L = O/\mathfrak{m}$.

3.2 Валуациони прстени

Под прстеном ћемо подразумевати комутативан прстен са јединицом. Подсетимо се неких дефиниција и особина које ћемо користити у разматрању валуационих прстена.

Дефиниција 3.2. Прстен је локални ако има јединствен максимални идеал.

Дефиниција 3.3. Нека је S непразан подскуп прстена R затворен у односу на множење. Локализација прстена R у односу на S је прстен

$$S^{-1}R = \{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\}$$

Ако $0 \in S$ дефинишемо $S^{-1}R = \{0\}$. У специјалном случају када је $S = R \setminus P$ где је P прост идеал прстена R уместо $S^{-1}R$ користимо ознаку R_P.

У даљем раду потребна нам је следећа лема.

Лема 3.2. *R_P локални прстен.*

Пређимо сада на валуационе прстене.

Дефиниција 3.4. Нека је B интегрални домен и K његово поље разломака. Кажемо да је B валуациони прстен од K ако

$$(\forall x \in K \setminus \{0\})\, x \in B \vee x^{-1} \in B$$

Пропозиција 3.2. *Нека је B валуациони прстен од K. Важе седећа тврђења.*

1. *B је локални прстен.*
2. *Ако је B' прстен такав да $B \subseteq B' \subseteq K$ тада је B' валуациони прстен од K.*
3. *B је интегрално затворен (у K).*

Доказ. 1. Нека је $\mathfrak{m} = B \setminus B^{\times}$. Ако $b \in B$ и $x \in \mathfrak{m}$ тада $bx \in \mathfrak{m}$ јер у супротном $(bx)^{-1} \in B$ те $x^{-1} = b(bx)^{-}1 \in B$. Дакле, $B\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Ако су $x, y \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ тада $xy^{-1} \in B \vee x^{-1}y \in B$. У оба случаја, $x + y = (1 + xy^{-1})y = (1 + x^{-1}y)x \in B$ те $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Дакле, $\mathfrak{m}$ је идеал те је B локални прстен на основу Леме 3.2.

2. Очигледно из дефиниције.

3. Нека је $x \in K$ цео над B. Тада

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

за неко $n \in \mathbb{N}$ и неке $b_i \in B$. Ако $x \notin B$ тада $x^{-1} \in B$ те

$$x = -b_1 - b_2 x^{-1} - \ldots - b_n x^{1-n} \in B$$

што је контрадикција. Дакле, B је интегрално затворен.

$\square$

Нека је K поље и Ω алгебарски затворено поље. Нека је Σ скуп свих уређених парова (A, f) где је A подпрстен од K и $f : A \to \Omega$ хомеоморфизам. На Σ уводимо природно парцијално уређење са

$$(A, f) \leqslant (A', f') \Leftrightarrow A \subseteq A' \wedge f'|_A = f$$

На основу Цорнове[12] леме Σ има максимални елемент. Нека је надаље (B, g) максималан елемент од Σ.

Лема 3.3. *B је локални прстен и $\mathfrak{m} = \ker(g)$ је његов максимални идеал.*

Доказ. $g(B)$ је интегрални домен као подпрстен поља те је $\mathfrak{m} = \ker(g)$ прост идеал. Нека је $\overline{g} : B_{\mathfrak{m}} \to \Omega$ проширење од g дефинисано са $\overline{g}(\frac{b}{s}) = \frac{g(b)}{g(s)}$. Приметимо да је $\overline{g}$ добро дефинисано јер $(\forall s \notin \mathfrak{m})\, g(s) \neq 0$. (B, g) је максималан у Σ те је $B = B_{\mathfrak{m}}$. На основу Леме 3.2, B је локални прстен и $\mathfrak{m}$ је његов максимални идеал. $\square$

Лема 3.4.

$$(\forall x \in K \setminus \{0\})\, \mathfrak{m}\,[x] \neq B[x] \vee \mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$$

Доказ. Предпоставимо супротно.

$$(\exists x \in K \setminus \{0\})\, \mathfrak{m}\,[x] = B[x] \wedge \mathfrak{m}[x^{-1}] = B[x^{-1}]$$

Тада за неке $m, n \in \mathbb{N}$ и неке $u_i, v_i \in \mathfrak{m}$ важи

$$u_0 + u_1 x + \ldots + u_m x^m = 1 \tag{3.1}$$

$$v_0 + v_1 x^{-1} + \ldots + v_n x^{-n} = 1 \tag{3.2}$$

Нека су m и n минимални могући и $m \geqslant n$. Из (3.1) и (3.2) закључујемо

$$(1 - v_0) x^n = v_1 x^{n-1} + \ldots + v_n \tag{3.3}$$

Како $v_0 \in \mathfrak{m}$ то, на основу предходне Леме 3.3, $1 - v_0 \in B^{\times}$ те из (3.3) следи

$$x^n = w_1 x^{n-1} + \ldots + w_n$$

те у (3.1) можемо заменити x^m са $w_1 x^{m-1} + \ldots + w_n x^{m-n}$ што је контрадикција са минималношћу m. $\square$

Теорема 3.1. *B је валуациони прстен од K.*

---

[12] *Max August Zorn* (1906 – 1993) - Немачки математичар.

Доказ. Нека је $x \in K \smallsetminus \{0\}$. Покажимо да $x \in B \vee x^{-1} \in B$. На основу претходне Леме 3.4 можемо предпоставити, без умањења општости, да $\mathfrak{m}[x] \neq B[x] = B'$. Покажимо да $x \in B$. Нека је $\mathfrak{m}'$ максимални идеал од B'. Приметимо да $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$ и $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{m}$. Закључујемо да утапање B у B' индукује утапање поља $k = B/\mathfrak{m}$ у $k' = B'/\mathfrak{m}'$ и да је $k' = k[\overline{x}]$ где је $\overline{x} \in B'$ слика од x при индукованом утапању поља. Дакле, $\overline{x}$ је алгебарски над k те је k' коначно алгебарско раширење од k.

На основу Леме 3.3, g индукује утапање $\overline{g} : k \to \Omega$. Како је Ω алгебарски затворено, $\overline{g}$ се може проширити до утапања $\overline{g}' : k' \to \Omega$. Композиција $\overline{g}'$ и природног хомоморфизма B' у k' је хомоморфизам $g' : B' \to \Omega$ који проширује g. Како је (B, g) максималан у Σ следи $B' = B$ те је $x \in B$. □

Последица 3.1. *Нека је A подпрстен поља K. Интегрално затворење $\overline{A}$ од A је пресек свих валуационих прстена од K који садрже A.*

Доказ. Нека је B валуациони прстен од B и $A \subseteq B$. Како је B интегрално затворен то $\overline{A} \subseteq B$.

Докажимо и обратну инклузију. Нека $x \notin \overline{A}$. Тада $x \notin A' = A[x^{-1}]$ те $x^{-1} \notin A'^{\times}$. Дакле, x^{-1} припада неком максималном идеалу $\mathfrak{m}'$ од A'. Нека је Ω алгебарско затворење поља $k' = A'/\mathfrak{m}'$. Рестрикција природног хомоморфизма из A' у k' на A дефинише утапање A у Ω које се проширује до утапање неког валуационог прстена $B \supseteq A$. Како се x^{-1} слика у 0 то x^{-1} припада максималном идеалу од B те $x \notin B$. Дакле, валуациони прстени који садрже A не садрже елементе који нису интегрални над A. □

4 Кејли-Менгерова детерминанта

Подсетимо се Тартаљине[13] формуле.

Лема 4.1. *Нека је* $S \subset \mathbb{R}^3$ *тетраедар са теменима* $p_1, \ldots, p_4$ *и нека је* $l_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$. *Запремина тетраедра* S *задовољава следећу једначину.*

$$\mathrm{vol}^2(S) = \frac{1}{288} \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 1 & l_{12} & 0 & l_{23} & l_{24} \\ 1 & l_{13} & l_{23} & 0 & l_{34} \\ 1 & l_{14} & l_{24} & l_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

Тартаљина формула је тродимензиони аналоган Херонове[14] формуле за површину троугла у функцији од дужина његових страница. Уопштење ових тврђења за произвољну димензију у вези је са следећим појмом.

Дефиниција 4.1. Нека су $p_0, \ldots, p_n$ тачке неког еуклидског простора и $l_{ij} = (p_i - p_j)^2$. Кејли[15]-Менгерова[16] детерминанта тачака $p_0, \ldots, p_n$ је

$$CM(p_0, \ldots, p_n) = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & l_{01} & l_{02} & \ldots & l_{0n} \\ 1 & l_{01} & 0 & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ 1 & l_{02} & l_{12} & 0 & \ldots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{0n} & l_{1n} & l_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Кејли ([9]) је дефинисао ову детерминанту за $n = 4$ а Менгер ([10]) је допунио дефиницију за произвољну димензију. Аналоган Херонове и Тартаљине формуле за простор произвољне димензије је следећи.

Теорема 4.1. *Нека су* $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ *и* $V = V(p_0, \ldots, p_n)$ *запремина (не нужно недегенерисаног) симплекса одређеног тачкама* p_i. *Нека је* $l_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$. V *задовољава следећу једначину:*

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(p_0, \ldots, p_n)$$

Доказ. Нека је $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$. Из основне аналитичке геометрије знамо да важи

$$V = \frac{1}{n!} \det \begin{vmatrix} p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ p_{n1} & p_{02} & \cdots & p_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

Приметимо да се вредност детерминанте не мења ако је проширимо за још један ред и колону чији су сви елементи 0 сем последњег (оног у доњем десном углу) који

---

[13] *Niccolo Fontana Tartaglia* (1500 – 1557) - Италијански математичар и инжењер.

[14] Херон из Александрије (10 – 70) - Грчки математичар и инжењер. Познат као први изумитељ машине на парни погон.

[15] *Arthur Cayley* (1821 – 1895) - Британски математичар.

[16] *Karl Menger* (1902 – 1985) - Аустријски математичар.

је 1. Множећи ову детерминанту са транспонованом детерминантом детерминанте добијене од ње заменом последња два реда и последње две колене добијамо

$$V^2 = \frac{-1}{(n!)^2} \det \begin{vmatrix} \langle p_0, p_0\rangle & \langle p_0, p_1\rangle & \dots & \langle p_0, p_n\rangle & \\ \langle p_1, p_0\rangle & \langle p_1, p_1\rangle & \dots & \langle p_1, p_n\rangle & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \langle p_0, p_n\rangle & \langle p_n, p_1\rangle & \dots & \langle p_n, p_n\rangle & \end{vmatrix}$$

Користећи смену

$$\langle p_i, p_j\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle p_i, p_i\rangle + \langle p_j, p_j\rangle - l_{ij}\right)$$

после неколико лаких редукција добијамо жељени резултат. □

Иако су нам у даљем раду потребна само основна својства Кејли-Менгерове детерминанте она се природно јавља у оквиру теорије геометрије растојања[17] те користимо преостали део овог поглавља да представимо њен природан контекст.

Дефиниција 4.2. Семиметички простор је уређени пар (X, d) непразног скупа X и функције растојања $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ такве да за све $x, y \in X$ важи $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ и $d(x, y) = d(y, x)$

Једноставно речено, семиметрички простор је метрички простор коме недостаје неједнакост троугла. Ако је семиметрички простор коначан можемо га поистоветити са симетричном ненегативном матрицом (са главном дијагоналом 0) растојања парова његових тачака. Геометрија растојања проучава семиметричке просторе. Две битне области ове теорије су (метричка) карактеризација семиметричких простора и питања везана за њихова изометријска утапања у ком контексту се појављује Кејли-Менгерова детерминанта.

Дефиниција 4.3. Нека је X семиметрички простор и $\mathcal{A}$ нека класа семиметричких простора. Кажемо да X има индекс конгуенције (n, k), $n, k \in \mathbb{N}_0$, у односу на $\mathcal{A}$ ако се сваки $A \in \mathcal{A}$, $|A| \geqslant n + k$, изометички утапа у X кад год се произвољних (не нужно различитих) n његових тачка изометријски утапа у X.

Менгер је 1928. год. доказао да се сваки семиметрички простор може изометрички утопити у $\mathbb{R}^n$ акко то важи за сваки његов $(n + 3)$-точлани подскуп (уједно и подпростор). Другим речима, $\mathbb{R}^n$ има индекс конгруенције $(n + 3, 0)$ у односу на класу свих семиметричких простора. Важи и више.

Теорема 4.2. *$X \Subset \mathbb{R}^n$ акко постоји $n + 1$ независних тачака $x_0, \dots, x_n \in X$ које се изометријски утапају у $\mathbb{R}^n$ и сваке $n + 3$ тачке из X међу којима су $x_0, \dots, x_n$ се такође изометријски утапају у $\mathbb{R}^n$.*

Ово битно тврђење редукује проблем утапања произвољног семиметричког простора у $\mathbb{R}^n$ на „коначан” проблем утапања његових $(n + 3)$-точланих (и то не свих) подскупова. Од интереса нам је да обезбедимо и неопходан услов за изометричко утапање у $\mathbb{R}^n$ (поготову када покушавамо да докажемо да оно не постоји) и управо у контексту решавања тог проблема Менгер увео Кејли-Менгерову дерминанту. Наиме, важи следећа теорема.

---

[17] Енглески: *distance geometry.*

Теорема 4.3. *Неопходан услов да се семиметрички* $(k+1)$*-точлани простор* $X = \{x_0, \ldots, x_k\}$ *изометријски утапа у* $\mathbb{R}^n$ *је да*

$$(\forall r \in \{1, \ldots, n\})\, CM(x_0, \ldots, x_n) = 0 \vee sgn(CM(x_0, \ldots, x_n)) = (-1)^{r+1}$$

Специјално, за $r > n$ *је* $CM(x_0, \ldots, x_r) = 0$.

У доказима ФЗП хипотезе користимо специјалне инстанце овог тврђења.

5 ФЗП хипотеза у $\mathbb{R}^3$

У овом поглављу доказујемо ФЗП хипотезу у $\mathbb{R}^3$. Доказ се састоји из неколико корака.

5.1 Алгебарска реформулација проблема

Нека је $P \subset \mathbb{R}^3$ (сингуларни) коначни полиедар са теменима $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ и нека је $K = \mathbb{Q}(x_1, y_1, z_1, \ldots)$. Предпоставимо, без умањења општости, да су сви x_i, y_i, z_i алгебарски назависни. Свака тачка p_i припада K^3. Подразумеваћемо да су сви полиедри оријентисани. Подсетимо се да је генерализована запремина полиедра P дефиниса са

$$\operatorname{vol}(P) = \frac{1}{6} \sum_{[i,j,k] \in P_+} \det[p_i, p_j, p_k]$$

где је P_+ скуп симплекса чија оријентација коинцидира са оријентацијом полиедра P. Нека је $l_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$ и $R = \mathbb{Q}[l_{ij}]$. Главни резултат у овом поглављу је следећа теорема.

Теорема 5.1. $12\operatorname{vol}(P)$ *интегралан над* R.

ФЗП хипотеза је директна последица ове теореме.

Последица 5.1. *ФЗП хипотеза важи за (ориентабилне) полиедре у* $\mathbb{R}^3$.

Доказ. Нека је P_t савијање полиедра P. На основу Теореме 5.1, $12\operatorname{vol}(P_t)$ је интегралан над R тј. је корен неког моничног полинома $f \in R[X]$ Приметимо да је због особина савијања тај полином исти исти за све P_t. Будући да се при савијању запремина полиедра мења непрекидно и да $12\operatorname{vol}(P)$ може узети само коначно много вредности (нуле полинома f) она мора бити константна. □

Доказ Теореме 5.1 делимо у више корака.

5.2 Кључне леме

Уочимо две последице Кејли-Менгерове формуле 4.1.

Последица 5.2. *Нека* $p_1, \ldots, p_5 \in K^3$. *Тада*

$$CM[p_1, \ldots, p_5] = 0$$

Последица 5.3. *Нека* $p_1, \ldots, p_4 \in K^3$. *Тада*

$$CM[p_1, \ldots, p_4] = 2(12\operatorname{vol}[p_1, \ldots, p_4])^2$$

и $(12\operatorname{vol}[p_1, \ldots, p_4])^2 \in \mathbb{Z}[l_{ij}]$.

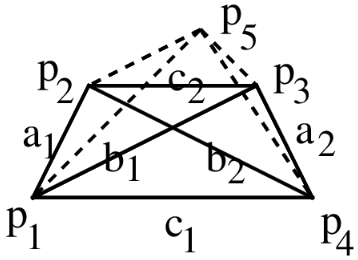
Лема 5.1. *Нека* $p_1, \ldots, p_5 \in K^3$ *и*

$$\begin{array}{ll} a_1 = l_{12} & a_2 = l_{34} \\ b_1 = l_{13} & b_2 = l_{24} \\ c_1 = l_{14} & c_2 = l_{23} \end{array}$$

Нека је O валуациони прстен од K такав да

$$b_1, b_2, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \notin O$$
$$(\forall i \in \{1, \dots, 5\})\, l_{i5} \in O$$

Тада $\frac{c_1}{b_1}, \frac{c_1}{b_2} \notin O$.



Слика 21: Лема 5.1.

Доказ. На основу Леме 5.1 важи

$$0 = CM[p_1, \dots, p_5] = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & l_{15} \\ 1 & a_1 & 0 & c_2 & b_2 & l_{25} \\ 1 & b_1 & c_2 & 0 & a_2 & l_{35} \\ 1 & c_1 & b_2 & a_2 & 0 & l_{45} \\ 1 & l_{15} & l_{25} & l_{35} & l_{45} & 0 \end{vmatrix}$$

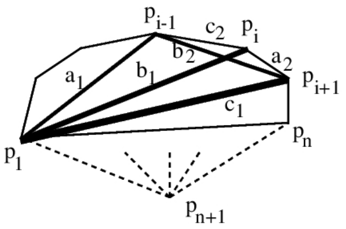
Поделимо други и четврти ред и колону са b_1 и четврти ред и колону са b_2.

$$\det \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{b_1} & 1 & 1 & \frac{1}{b_2} & 1 \\ \frac{1}{b_1} & 0 & \frac{a_1}{b_1} & 1 & \frac{c_1}{b_1 b_2} & \frac{l_{15}}{b_1} \\ 1 & \frac{a_1}{b_1} & 0 & c_2 & b_2 & l_{25} \\ 1 & 1 & c_2 & 0 & \frac{a_2}{b_2} & l_{35} \\ \frac{1}{b_2} & \frac{c_1}{b_1 b_2} & 1 & \frac{a_2}{b_2} & 0 & \frac{l_{45}}{b_2} \\ 1 & \frac{l_{15}}{b_1} & l_{25} & l_{35} & \frac{l_{45}}{b_2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Нека је $\mathfrak{m}$ максимални идеал од O. Приметимо да елементи $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}$ припадају $\mathfrak{m}$ јер њихови инверзи не припадају O по предпоставци леме. Ако $\frac{c_1}{b_1 b_2} \in \mathfrak{m}$ тада, редукцијом предходне једначине по $\mathfrak{m}$, добијамо

$$-1 = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & [c_2] & 1 & [l_{25}] \\ 1 & 1 & [c_2] & 0 & 0 & [l_{35}] \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & [l_{25}] & [l_{35}] & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

што је немогуће јер је $O/\mathfrak{m}$ поље. Дакле, $\frac{c_1}{b_1 b_2} \notin \mathfrak{m}$ те $\frac{c_1}{b_1}, \frac{c_1}{b_2} \notin O$. $\square$



Слика 22: Лема 5.2.

Лема 5.2. *Нека* $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1} \in K^3$, $n \geqslant 3$. *Нека је* O *валуацион прстен од* K *такав да*

$$\begin{aligned} (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\, l_{i,n+1} &\in O \\ l_{1,2}, l_{2,3}, \ldots, l_{n,1} &\in O \end{aligned}$$

Тада $(\exists i \in \{1, \ldots, n-2\})\, l_{i,i+2} \in O$.

Доказ. Предпоставимо да ниједан од $l_{i,i+2}$ не припада O. Посматрајмо пирамиде одређене теменима p_1, $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{n+1}$, $i \in \{2, \ldots, n-2\}$. Нека је

$$\begin{aligned} a_1 &= l_{1,i-1} & a_2 &= l_{i,i+1} \\ b_1 &= l_{1,i} & b_2 &= l_{i-1,i+1} \\ c_1 &= l_{1,i+1} & c_2 &= l_{i-1,i} \end{aligned}$$

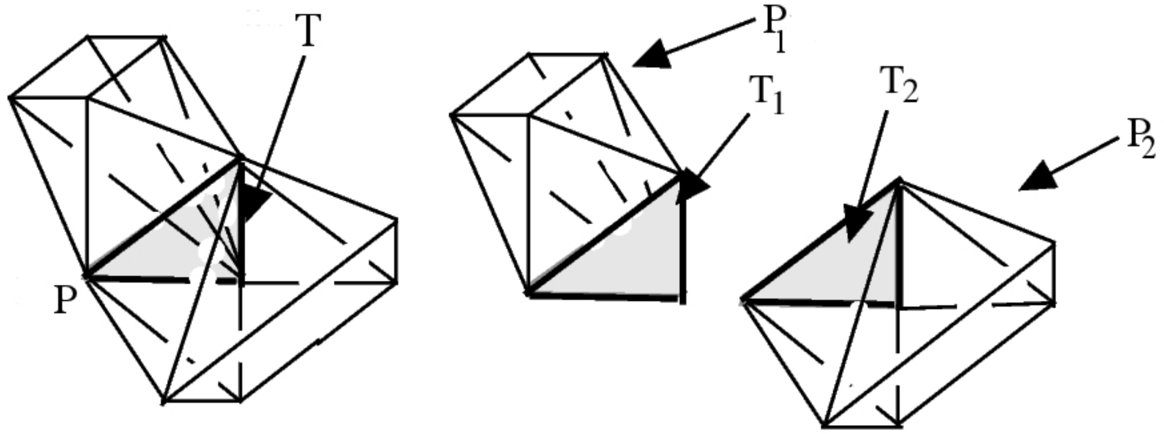
Применом Леме 5.1 на прву пирамиду закључујемо да $l_{1,3} \notin O$. Применом исте леме на наредне пирамиде закључујемо да $(\forall i \in \{3, \ldots, n\})\, l_{1,i} \notin O$. Специјално, $l_{1,n} \notin O$ што је у кнотрадикцији са условом леме. Дакле, $(\exists i \in \{1, \ldots, n-2\})\, l_{i,i+2} \in O$. □

5.3 Комплексност и хирургија полиедра

Дефинишемо линеарни поредак над полиедрима; њихову сложеност. Доказ Теореме 5.1 ћемо извршити индукцијом у односу на тако дефинисану сложеност полиедра.

Нека су P и Q два полиедра. Ако је род од P мањи од рода од Q тада P има мању сложеност од Q. Ако су истог рода и P има мање темена од Q тада P има мању сложеност од Q. Ако су истог рода и имају исти број темена и ако максимални степен темена у P мању од максималног степена темена у Q тада P има мању сложеност од Q. На овај начин смо дефинисали сложеност полиедра.

Дефинишемо начин смањена сложености полиедра. Нека су i, j, k темена од P таква да су $[i, j]$, $[j, k]$ и $[k, i]$ његове странице. Ако $[i, j, k]$ на припада P, називамо га раздвајајућим троуглом. Ако P поседује раздвајајући троугао T дефинишемо полиедар P', за кога кажемо да је добијен хирургијом у односу на раздвајајући троугао T полиедра P, као полиедар добијен од P заменом темена торугла T са два дисјунктна одговарајућа дисјунктна троугла.



Слика 23: Хирургија полиедра у односу на раздвајајући троугао.

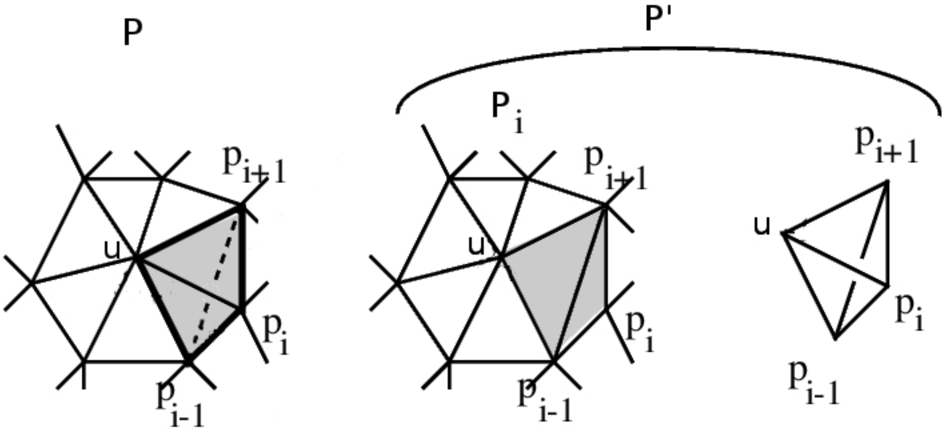
Лема 5.3. *Сложеност сваке компоненте полиедра P' добијеног хирургијом од полиедра P је мања од сложености од P.*

Доказ. Нека је T раздравјајући троугао у односту на кога је извршена хирургија. Ако T дели P на (бар) две компоненте повезаности тада је род сваке компоненте полиедра P' не већи од рода од P и свака од његових његових конпоненти има мање темена од P, самим тим и мању сложеност. Ако T не дели P на компоненте повезаности тада је род од P' за један мањи од рода од P те P' има мању сложеност. □

Тривијално се доказује и следећа лема.

Лема 5.4. *Ако је P' полиедар добијен хирургиој полиедра P тада је* $\mathrm{vol}(P') = \mathrm{vol}(P)$.

5.4 Доказ Теореме 5.1



Слика 24: Доказ главне теореме.

На основу Последице 5.3 тврђње важи да тетраедар који је уједно и полиедар најмање сложености. Доказ вршимо индкукцијом по сложености полиедра P. Предходно запажање чини базу индукције. Предпоставимо сада да тврђење важи са све полиедра сложености мање од сложености од P.

Ако P има раздвајајући троугао тада полиедар P' добијен његовом хирургијом има строго мању сложеност те је на основу индуктивне хипотезе $12\,\mathrm{vol}(P') = 12\,\mathrm{vol}(P)$ је интегралан над R.

Ако P нема раздвајајући троугао посматрамо теме најмањег степена. Нека је n најмањи степен темена од P, u једно теме тог степена и $p_1, \ldots, p_n$ његова суседна темена. Како P нема ни један раздвајајући троугао то ниједна од ивица $[p_1, p_3], [p_2, p_4], \ldots, [p_{n-1}, p_1]$ не припада P. Дакле, можемо заменити сваку од ивица $[p_{i-1}, p_{i+1}]$ са $[p_i, u]$ и $[p_{i-1}, p_i, u]$ и $[p_i, p_{i+1}, u]$ са $[p_{i-1}, p_{i+1}, u]$ и $[p_{i-1}, p_i, p_{i+1}]$. На тај начин добијамо нови полиедар P_i мање сложености него P. По индуктивној хипотези $12vol(P_i)$ је интегралан над $R[l_{i-1,i+1}]$. Нека је O валуациони прстен од K који садржи R. На основу Леме 5.2 $(\exists i_0 \in \{1, \ldots, n\})\, l_{i_0-1,i_0+1} \in O$. Тада је интегрално затворење од $R[l_{i_0-1,i_0+1}]$ уједно и интегрално затворење од R. Дакле, $12\,\mathrm{vol}(P_{i_0})$ је интегрално над R одакле следи да је и $12\,\mathrm{vol}(P)$ интегрално над R као збир $12\,\mathrm{vol}(P_{i_0})$ и $12\,\mathrm{vol}[p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, u]$ (који је интегралан над R на основу Последице 5.3).

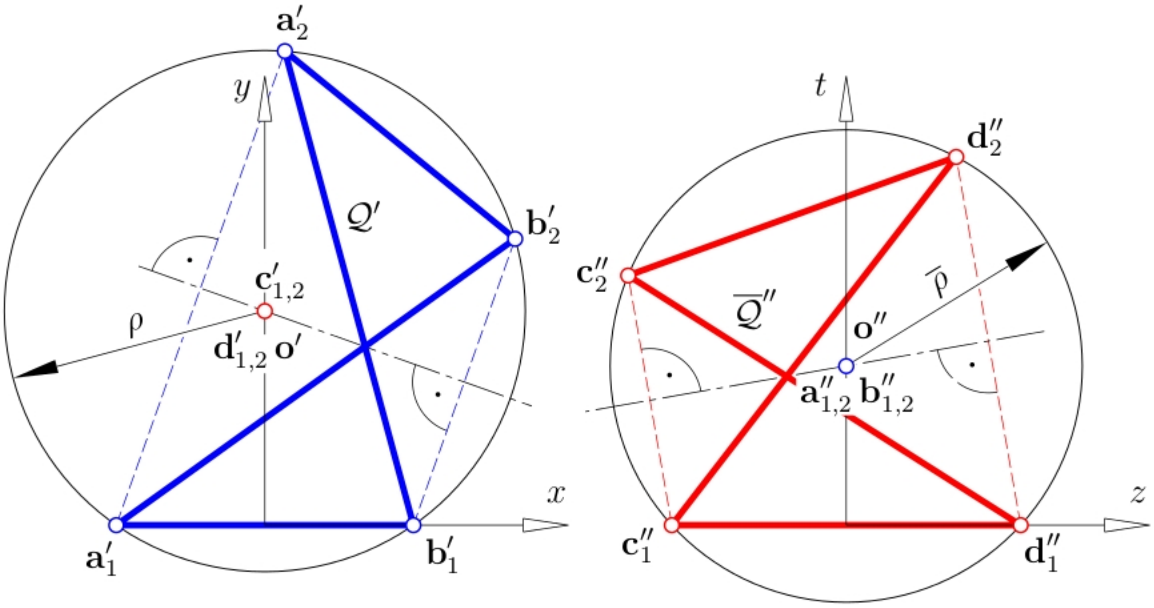
6 Флексибилни полиедри у $\mathbb{R}^4$

Валц је 1998. год. конструисала флексибилан полиедар у $\mathbb{R}^4$ експлицитно доказујући њихово постојање. Валцова конструкција је инспирисана Брикард-Конелијевим конструкцијама флексибилних полиедара у $\mathbb{R}^3$ и по узору на њих као полазни објекат користи хипероктаедар. Специфично, Валцова конструкција доста наликује на конструкцију Конелијеве сфере.

Подсетимо да се тememена хипероктаедра природно групишу у парове централносиметричних темена. Нека су $a_1, a_2, \ldots, d_1, d_2$ темена хипероктаедра у $\mathbb{R}^4$ и нека је

$$\begin{aligned} Q &= a_1b_1a_2b_2 \\ \overline{Q} &= c_1d_1c_2d_2 \\ F &= \{p\overline{p} | p \in Q, \overline{p} \in \overline{Q}\} \end{aligned}$$

Дужине свих ивица из F су исте и једнаке неком $r > 0$. Даље, Q и $\overline{Q}$ су антипаралелограми који леже у међусобно ортогоналим равнима те, ако су ρ и $\overline{\rho}$ полупречници њихових описаних кружница, важи $r^2 = \rho^2 + \overline{\rho}^2$. Ако оба антипаралелограма могу да се савијају у својим равнима тако да њихов заједнички центар остаје фиксан и да за њихове полупречнике важи $r^2 = \rho^2 + \overline{\rho}^2$, тада композиција та два савијања даје савијање целог хипероктаедра. Проблем се дакле своди на налажење одговарајућих савијања описаних антипаралелограма.



Слика 25: Пројекција Валцовог флексибилног хипероктаедра на две међусобно ортогоналне равни.

Одаберимо координатни систем такав да важи

$$a_1 = (-\alpha, 0, 0, \tau), b_1 = (\alpha, 0, 0, \tau), c_1 = (0, \eta, -\gamma, 0), d_1 = (0, \eta, \gamma, 0)$$

при чему је $\alpha, \gamma > 0$. Ортогоналне равни пројекције ћемо увек бирати тако да су тачке a_1 и b_1 односно c_1 и d_1 фиксне тј. тако да су α и γ константе. Овакав одабир равни пројекција индукује транслације равни од Q и $\overline{Q}$. Нека је

$$\begin{aligned} 2\beta = \|b_2 - a_1\| = \|b_1 - a_2\| &\;>\; 2\alpha = \|b_1 - a_1\| = \|b_2 - a_2\| \\ 2\delta = \|d_2 - c_1\| = \|d_1 - c_2\| &\;>\; 2\gamma = \|d_1 - c_1\| = \|d_2 - c_2\| \end{aligned}$$

Може се показати да је за сваку позицију антипаралелограма Q' ивица $a_2'b_2'$ слика ивице $a_1'b_1'$ при рефлексији у односу на неку тангенту l елипсе e са чије су жиже a_1' и b_1' и полуосе β и $\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$.

Нека је l тангента предходно описане елипсе у тачки

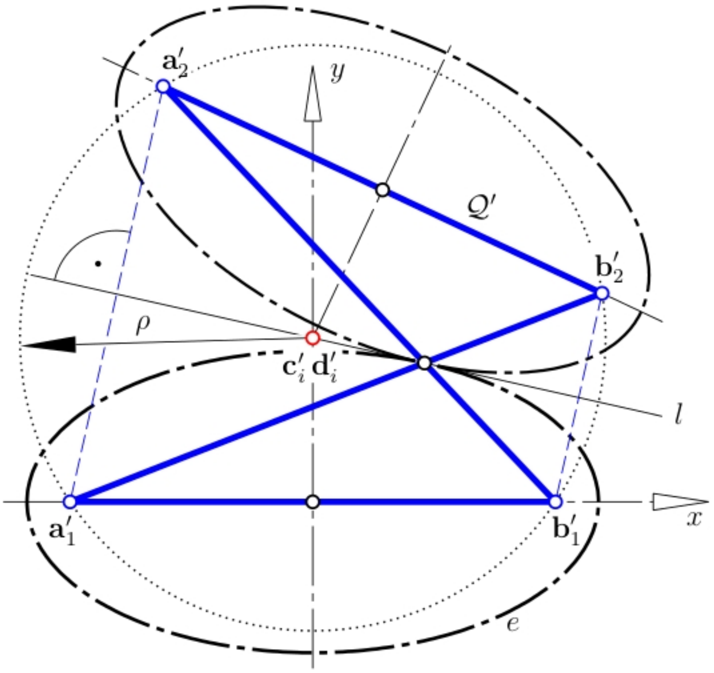
$$\left(\beta \sin\varphi, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\cos\varphi\right)$$

при чему $\cos\varphi \neq 0$. Тада l сече вертикалну осу (Слика 6) у тачки $(0, \eta)$ где је

$$\eta = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\cos\varphi}$$

Тачка $(0, \eta)$ је центар описане кружнице антипаралелограма Q' те важи

$$\rho^2 = \alpha^2 + \eta^2 = \beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2)\operatorname{tg}^2\varphi \geqslant \beta^2$$



Слика 26: Савијање антипаралелограма индуковано ”ваљањем” две елипсе.

Дефинишемо савијање другог антипаралелограма на исти начин. Одговарајућа тангента је у тачки

$$\left(\delta \sin\psi, \sqrt{\delta^2 - \gamma^2}\cos\psi\right)$$

Пресек са одговарајућом координатном линијом је центар антипаралелограма $(0, \tau)$ где је

$$\tau = \frac{\sqrt{\delta^2 - \gamma^2}}{\cos\psi}$$

и полипречник описане кружнице задовољава

$$\overline{\rho}^2 = \gamma^2 + \tau^2 = \delta^2 + (\delta^2 - \gamma^2)\operatorname{tg}^2\psi \geqslant \delta^2$$

Из услова $r^2 = \rho^2 + \overline{\rho}$ следи

$$r^2 - \beta^2 - \delta^2 = (\beta^2 - \alpha^2)\operatorname{tg}^2\varphi + (\delta^2 - \gamma^2)\operatorname{tg}\psi \geqslant 0$$

тј.

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{r^2 - \beta^2 - \delta^2}\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{\delta^2 - \gamma^2}{r^2 - \beta^2 - \delta^2}\operatorname{tg}^2\psi = 1$$

Овај услов повезује φ и ψ и омогућује нам да дефинишемо савијање хипероктаедра индуковано савијањем антипаралелограма чији се параметри φ и ψ мењају у зависности од $0 < t < 2\pi$ на следећи начин

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{r^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \alpha^2}}\cos t\right)\\ \psi &= \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{r^2 - \beta^2 - \delta^2}{\delta^2 - \gamma^2}}\sin t\right)\end{aligned}$$

Приметимо да хипероктаедар задржава симетрију у односу на раван дефинисану правама симетрије антипаралелограма.

Својим примером Валц је доказала следећу теорему.

Теорема 6.1 (*Waltz*, 1998)**.** *Постоје флексибилни полиедри у* $\mathbb{R}^4$*.*

Х. Стачел[18] је проширио класу флексибилних хипероктаедара у $\mathbb{R}^4$ доказавши следеће тврђење [11].

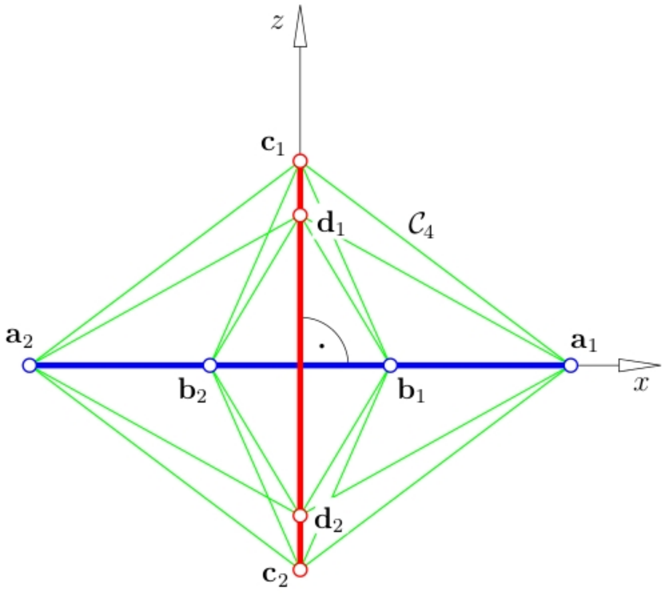
Теорема 6.2 (*Stachel*, 2000)**.** *Нека је* C_4 *хипероктаедар са теменима*

$$a_{1,2} = (\pm\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4), b_{1,2} = (\pm\beta_1, \beta_2, 0, \beta_4), c_{1,2} = (0, \gamma_2, \pm\gamma_3, \gamma_4), d_{1,2} = (0, \delta_2, \pm\delta_3, \delta_4)$$

таквим да је $\alpha_1, \beta_1, \gamma_3, \delta_3 > 0$*,* $|\beta_2 - \alpha_2| + |\beta_4 - \alpha_4| \neq 0$ *и* $|\gamma_2 - \delta_2| + |\gamma_4 - \delta_4| \neq 0$*. Тада постоји савијање хипероктаедра* C_4 *при коме антипаралелограми* $Q = a_1b_1a_2b_2$ *и* $\overline{Q} = c_1d_1c_2d_2$ *остају у својим почетним равнима и чувају симетрију почетну симетрију.*

---

[18] *Hellmuth Stachel* - Аустријски математичар.



Слика 27: Пројекција хипероктаедра из теореме 6.2

Предпоставља се да је фасцинантно својство флексибилности хипероктаедра специфично за димензију 4. Занимљиво је и то да до сада није познат ни један флексибили полиедар у $\mathbb{R}^4$ који није октаедар.

7 Основни појмови алгебарске геометрије

Алгебарска геометрија је једна од централних области модерене математике. Упштено говорећи, она се састоји из изучавања геометрије методама абстрактне алгебре, нарочито комутативне алгебре. Део ове теорије нам је неопходан за доказ ФЗП хипотезе у $\mathbb{R}^4$ те у овом поглављу наводимо дефиниције релевантних појмова и неке њихове особине.

Нека је k фиксирано алгебарски затворено поље. Афини n-простор над k је $\mathrm{A}^n = k^n$. Нека је $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. За $f \in A$ дефинишемо

$$V(f) = \{p \in \mathrm{A}^n \mid f(p) = 0\}$$

Општије, за $T \subset A$ дефинижемо

$$V(T) = \bigcap_{f \in T} V(f)$$

Приметимо да ако је $\mathfrak{a}$ идеал од A генерисан са T тада је $V(\mathfrak{a}) = V(T)$. Штавише, како је A нетерин[19] сваки његов идеал је коначно генерисан те се свако $V(T)$ може изразити као пресек скупа нула коначно много полинома.

Дефиниција 7.1. $B \subset \mathrm{A}^n$ је алгебарски скуп ако постоји $T \subset A$такво да је $B = V(T)$.

Алгебарски скупови задовољавају аксиоме фамилије затворених скупова топологије. Прецизније, важи следећа лема.

Лема 7.1. *Нека је $\mathcal{F}$ фамилија алгебарских скупова. Тада важи*

1. $\emptyset, \mathrm{A}^n \in \mathcal{F}$.
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$.
3. $\{B_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \mathcal{F}$.

Дефиниција 7.2. Топологија генерисана фамилијом комплемената алгебарских скупова у A^n назива се топологија Зариског[20].

У наставку овог поглаваља подразумевана топологија је топологија Зариског. Приметимо да се она разликује од стандардне хаусдорфове топологије.

За $\emptyset \neq B \subset \mathrm{A}^n$ кажемо да је иредуцибилан[21] ако није једанк унији двају правих непразних затворених подскупова.

Дефиниција 7.3. Иредуцибилан затворени подскуп од A^n назива се афини (алгебарски) варијетет. Отворени подскуп афиног варијатета назива се квази-афини варијетет.

Афини и квази-афини варијатети су централни објекти проучавања алгебарске геометрије.

За $B \subset \mathrm{A}^n$ дефинишемо идеал од B у A

$$I(B) = \{f \in A \mid (\forall p \in B)\, f(p) = 0\}$$

---

[19] Прстен се назива нетерин ако сваки непразан скуп његових идеала има максимални елемент.

[20] *Oscar Zariski* (1899 – 1986) - Руски математичар.

[21] У топлогији се чешће користи термин повезан.

Теорема 7.1 (*Hilbert*[22] *Nullstellensatz*). *Нека је* $\mathfrak{a}$ *идеал од* A *и* $f \in A$ *такав да* $V(\mathfrak{a}) \subset V(f)$. *Тада постоји* $r > 0$ *такво да је* $f^r \in \mathfrak{a}$.

Од посебног значаја је следећа последица која повезује фукције V и I.

Последица 7.1. *Коресподенција међу алгебарским скуповима од* A^n *и радикалним*[23] *идеалима од* A *дата са*

$$\begin{array}{rcl} B & \mapsto & I(B) \\ \mathfrak{a} & \mapsto & V(\mathfrak{a}) \end{array}$$

је инјективна и поштује инклузију. Специјално, алгебарски скуп је иредуцибилан акко је његов одговарајући идеал прост.

Дефиниција 7.4. Нека је $B \subset \mathrm{A}^n$ алгебарски скуп. Афини координатни прстен од B је $A(B) = A/I(B)$.

Приметимо да је $A(B)$ интегрални домен ако је B афини варијетет.

Дефиниција 7.5. Димензија алгебарског скупа $B \subset \mathrm{A}^n$, у ознаци $\dim(B)$, је супремум свих $k \in \mathbb{N}$ таквих да постоји ланац $B_0 \subsetneq \ldots \subsetneq B_k$ различитих иредуцибилних затворених подскупова од B (у односу на топологију Зариског).

Овако дефинисана димензија алгебарског скупа у вези је са одговарајуће дефинисаном димензијом његовог афиног координатног прстена.

Дефиниција 7.6. Висина простог идеала $\mathfrak{p}$ прстена R, у ознаци $h(\mathfrak{p})$, је супремум свих $k \in \mathbb{N}$ таквих да постоји ланац $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}$ различитих простих идеала. Крулова[24] димензија прстена R, у ознаци $\dim(R)$, је супремум висина свих његових простих идеала.

Теорема 7.2. *За алгебарски скуп* $B \subset \mathrm{A}^n$ *важи* $\dim(B) = \dim(A(B))$.

Показује се да је $\dim(\mathrm{A}^n) = n$ и у складу са тиме дефинишемо кодимензију алгебарског скупа $B \subset \mathrm{A}^n$ са $\mathrm{codim}(B) = n - \dim(B)$.

Дефиниција 7.7. Нека је $B \subset \mathrm{A}^n$ и $p \in B$. Функција $f : B \to k$ је регуларна у p ако постоји њена околина U и $g, h \in A$ такве да h није нула на U и $f|_U = \frac{g}{h}$. Функција је регуларна ако је регуларна у свакој тачки домена.

Дефиниција 7.8. За афини варијетет $B \subset \mathrm{A}^n$ са $O(B)$ означимо прстен регуларних функција на B. За $p \in B$ дефинишемо локални прстен од p у B, у ознаци O_p, као прстен клица регуларних функција на B у околини p. Другим речима, елементи од O_p су парови (U, f) где је U отворена околина од p у B и f регуларна функција на U.

Уочимо да је O_p заиста локални прстен. Његов максималан идеал $\mathfrak{m}$ се састоји од клица регуларних функција које су нула у p и $O_p/\mathfrak{m} \cong k$.

---

[22] *David Hilbert* (1862 – 1943) - Немачки математичар.

[23] Радикал идеала $\mathfrak{a}$ прстена R је $Rad(\mathfrak{a}) = \{r \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})\, r^n \in \mathfrak{a}\}$. Идеал је радикалан ако је једнак свом радикалу.

[24] *Wolfgang Krull* (1899 – 1971) - Немачки математичар.

Теорема 7.3. *Нека је* $B \subset \mathrm{A}^n$*. Тада*

1. $O(B) \cong A(B)$.
2. *Нека је* $\mathfrak{m}_p \subset A(B)$ *идеал функција која су нула у* p*. Тада је* $p \mapsto \mathfrak{m}_P$ *инјективна кореcподенција између тачака од* B *и максималних идеала од* $A(B)$.
3. *За свако* $p \in B$ $O_p \cong A(B)_{\mathfrak{m}_p}$ *и* $dim(O_p) = dim(B)$.

Дефиниција 7.9. Варијетет $B \subset \mathrm{A}^n$ је нормалан у тачки $p \in B$ ако је O_p интегрално затворен. Варијетет је нормалан ако је нормалан у свакој тачки.

Из предходне дефиниције директно следи да је варијетет B нормалан акко је $A(B)$ интегрално затворен.

Теорема 7.4. *За сваки варијетет* $B \subset \mathrm{A}^n$ *постоји нормалан варијетет* $\tilde{B}$ *и морфизам* $\pi : \tilde{B} \to B$ *такав да за сваки нормални варијетет* $C \subset \mathrm{A}^n$ *и сваки морфизам* $\varphi : C \to B$ *постоји јединствени морфизам* $\theta : C \to \tilde{B}$ *такав да је* $\varphi = \pi \circ \theta$*. Варијетет* $\tilde{B}$ *називамо нормализацијом варијатета* B.

8 ФЗП хипотеза у $\mathbb{R}^4$

У овом поглављу доказујемо ФЗП хипотезу у $\mathbb{R}^4$. Пратимо Гајфулинов доказ [12] базиран на уопштењу Конели-Сабитов-Валцовог доказа ФЗП хипотезе у $\mathbb{R}^3$.

У складу са нотацијом коришћеном у случају $\mathbb{R}^3$ нека је P полиедар са теменима $p_i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ и нека су $l_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$ квадрати дужина његових ивица. За квадрат дужине ивице $[uv]$ користимо и ознаку l_{uv} када не нумеришемо сва темена која посматрамо. Посматрамо поље

$$K = K_P = \mathbb{Q}[x_1, y_1, z_1, w_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, w_n]$$

и његов подпрстен $R = R_P = \mathbb{Q}[l_{ij}]$.

Главни резултат који доказујемо у овом поглављу је следећа теорема.

Теорема 8.1 (Гайфуллин, 2011)**.** *V_Z је интегралан над R_Z.*

Аналогно као у случају $\mathbb{R}^3$, *Bellows* хипотеза у $\mathbb{R}^4$ је директна последица ове теореме.

Последица 8.1. *ФЗП хипотеза важи у $\mathbb{R}^4$.*

8.1 z-полиедри

Нека је Δ^m стандардни m-димензиони симплекс. Подсетимо се да је k-та симплицијална група од Δ^M, $C_k(\Delta^M)$, слободна абелова група ранга $\binom{M+1}{k+1}$ генерисана оријентисаним k-подсимплексима симплекса Δ^m. Елементи од $C_k(\Delta^M)$ називају се k-ланци. k-ланац Z за који важи $\partial Z = 0$, где је $\partial : C_k(\Delta^m) \to C_{k-1}(\Delta^m)$ је стандардни гранични оператор, назива се k-цикл. Носач k-ланца L, у ознаци $supp(L)$ је подкомплекс симплекса Δ^M који садржи све k-симплексе $\sigma \in \Delta^m$ који припадају L и њихове подсимплексе. У даљем раду игноришемо број m и, не умањујући општост, предпостављамо да се сви ланци налазе у неком симплексу довољно велике димензије.

Дефиниција 8.1. Оријентисани z-полиедар у $\mathbb{R}^n$ је уређени пар (P, Z) где је $Z = \sum_{i=1}^{k} q_i[v_{i_1} \ldots v_{i(n)}]$ $(n-1)$-димензиони цикл и $P : supp(Z) \to \mathbb{R}^n$ пресликавање линеарно на сваком подсимплексу од $supp(Z)$. Кажемо да је P z-полиедар и пишемо $P : Z \to \mathbb{R}^n$. Темена и ивице од P су слике темена и ивица од $supp(Z)$. Генерализована оријентисана запремина z-полиедра P, у ознаци $V_Z(P)$, је

$$V_Z(P) = \sum_{i=1}^{k} q_i V([OP(v_{i_1}) \ldots P(v_{i_n})])$$

где је $O \in \mathbb{R}^n$ произвољна тачка и V стандардна запремина симплекса у $\mathbb{R}^n$.

Овако дефинисан z-полиедар и његова запремина су уопштења регуларног полиедра и његове оријентисане запремине. Како се информације о z-полиедру које су нам потребне у даљем раду садрже у његовом циклу уместо R_P и V_P пишемо R_Z и V_Z и генерално поистовећујемо P и Z у случајевима чији контекст допушта такву манипулацију ознакама без умањивања јасноће излагања.

Разлог за разматрање z-полиедара уместо регуларних полиедара је у циљу конструкције индуктивног доказа Теореме 8.1. Наиме, у димензијама већим од 3 немамо погодну инваријанту као што је род коју можемо на погодан начин смањивати одговарајућом хирургијом те не можемо директно уопштити индуктивни доказ аналогног тврђења у $\mathbb{R}^3$. Посматрање z-полиедара нам омогућује да занемаримо тополошку структуру и конструишемо индукцију базирану на двема чисто комбинаторним инваријантама: броју темена и њихоим степенима.

8.2 План доказа Теореме 8.1

Нека су P_1 и P_2 z-полиедри са m_1 и m_2 темена респективно и нека су d_1 и d_2 минимални степени темена одговарајућих z-полиедара. Дефинишемо поредак на z-полиедрима са

$$P_1 < P_2 \Leftrightarrow (m_1, d_1) <_{lex} (m_2, d_2)$$

За z-полиедар са m темена и минималним степеном темена d кажемо да има сигнатуру (m, d). Теорему 8.1 доказујемо индукцијом у односу на предходно дефинисани поредак. Базу индукције је дегенерисани случај $Z = 0$. Тада је и сам z-полиедаар тривијалан и запремина му је 0 те Теорема 8.1 тривијално важи. Индуктивни корак делимо на следеће две леме.

Лема 8.1. *Предпоставимо да Теорема 8.1 важи за све z-полиедре сигнатуре не веће од (m, d). Нека је Z 3-цикл чији носач има сигнатуру (m, k). Нека је и теме $supp(Z)$ степена d. Тада за сваку ивицу $[uv] \in supp(Z)$ постоји $s \geqslant 0$ такво да је $l_{uv}^s V_Z$ интегралан над R.*

Лема 8.2. *Нека је Z 3-цикл, и теме од $supp(Z)$ и $v_1, \dots, v_k$ темена од $supp(Z)$ таква да $[uv_i] \in supp(Z)$. Ако за свако $i \in \{1, \dots, k\}$ постоји $s_i \geqslant 0$ такво да је $l_{uv_i}^{s_i} V_Z$ интегралан над R тада је V_Z интегралан над R.*

8.3 Доказ Леме 8.1

Лема 8.3. *Нека $u, v, p_1, \dots, p_4 \in K^4$. Нека је O валуациони прстен од K са максималним идеалом $\mathfrak{m}$ такав да*

$$\begin{aligned} l_{uv} &\in O \setminus \mathfrak{m} \\ (\forall i \in \{1, \dots, 4\})\, l_{up_i}, l_{vp_i} &\in O \\ l_{p_2p_3} &\in O \\ l_{p_1p_3}, l_{p_2p_4}, \frac{l_{p_1p_3}}{l_{p_1p_2}}, \frac{l_{p_2p_4}}{l_{p_3p_4}} &\notin O \end{aligned}$$

Тада $\frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_1p_3}}, \frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_2p_4}} \notin O$.

Доказ. Како је $CM(u, v, p_1, \dots, p_4) = 0$ то је

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{uv} & l_{up_1} & l_{up_2} & l_{up_3} & l_{up_4} \\ 1 & l_{uv} & 0 & l_{vp_1} & l_{vp_2} & l_{vp_3} & l_{vp_4} \\ 1 & l_{up_1} & l_{vp_1} & 0 & l_{p_1p_2} & l_{p_1p_3} & l_{p_1p_4} \\ 1 & l_{up_2} & l_{vp_2} & l_{p_1p_2} & 0 & l_{p_2p_3} & l_{p_2p_4} \\ 1 & l_{up_3} & l_{vp_3} & l_{p_1p_3} & l_{p_2p_3} & 0 & l_{p_3p_4} \\ 1 & l_{up_4} & l_{vp_4} & l_{p_1p_4} & l_{p_2p_4} & l_{p_3p_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Поделимо четврти ред и колону са $l_{p_1p_3}$ и седми ред и колону са $l_{p_2p_4}$.

$$\det\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{l_{p_1p_3}} & 1 & 1 & \frac{1}{l_{p_2p_4}} \\ 1 & 0 & l_{uv} & \frac{l_{up_1}}{l_{p_1p_3}} & l_{up_2} & l_{up_3} & \frac{l_{up_4}}{l_{p_2p_4}} \\ 1 & l_{uv} & 0 & \frac{l_{vp_1}}{l_{p_1p_3}} & l_{vp_2} & l_{vp_3} & \frac{l_{vp_4}}{l_{p_2p_4}} \\ \frac{1}{l_{p_1p_3}} & \frac{l_{up_1}}{l_{p_1p_3}} & \frac{l_{vp_1}}{l_{p_1p_3}} & 0 & \frac{l_{p_1p_2}}{l_{p_1p_3}} & 1 & \frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_1p_3}l_{p_2p_4}} \\ 1 & l_{up_2} & l_{vp_2} & \frac{l_{p_1p_2}}{l_{p_1p_3}} & 0 & l_{p_2p_3} & 1 \\ 1 & l_{up_3} & l_{vp_3} & 1 & l_{p_2p_3} & 0 & \frac{l_{p_3p_4}}{l_{p_2p_4}} \\ \frac{1}{l_{p_2p_4}} & \frac{l_{up_4}}{l_{p_2p_4}} & \frac{l_{vp_4}}{l_{p_2p_4}} & \frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_1p_3}l_{p_2p_4}} & 1 & \frac{l_{p_3p_4}}{l_{p_2p_4}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ако $\frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_1p_3}l_{p_2p_4}} \in \mathfrak{m}$ тада редукцијом предходне једначине по $\mathfrak{m}$ добијамо

$$2l_{uv} = 0$$

што је контрадикција са условом леме. Дакле, $\frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_1p_3}l_{p_2p_4}} \notin \mathfrak{m}$ те како $l_{p_1p_3}, l_{p_2p_4} \notin O$ закључујемо $\frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_1p_3}}, \frac{l_{p_1p_4}}{l_{p_2p_4}} \notin O$. □

Лема 8.4. *Нека $u, v, p_1, \ldots, p_n \in K^4$, $n \geqslant 4$. Нека је O валуациони прстен од K са максималним идеалом $\mathfrak{m}$ такав да*

$$\begin{aligned} l_{uv} &\in O \setminus \mathfrak{m} \\ (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\, l_{up_i}, l_{vp_i} &\in O \\ l_{p_1p_2}, l_{p_2p_3}, \ldots, l_{p_{n-1}p_n}, l_{p_np_1} &\in O \end{aligned}$$

Тада постоји $i_0 \in \{1, \ldots, n-2\}$ такво да $l_{p_{i_0}p_{i_0+2}} \in O$.

Доказ. Предпоставимо да $(\forall i \in \{1, \ldots, n-2\})\, l_{p_ip_{i+2}} \notin O$. Посматрамо скупове тачака $u, v, p_1, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$. На основу Леме 8.3 закључујемо да $l_{p_1p_i} \notin O$. Специјално, из последње шеторке тачака закључујемо да $l_{p_1p_n} \notin O$ што је у контрадикцији са условом леме. Дакле, постоји тражено i_0 такво да $l_{p_{i_0}p_{i_0+2}} \in O$. □

Приметимо да су предходне две леме директна уопшења кључних лема Конели-Сабитов-Валцовог доказа.

Нека је надаље Z 3-цикл. Подсетимо се да оријентисана ивица $[uv] \in supp(Z)$ дефинише 1-цикл $Z_{[uv]}$, који називамо линк од $[uv]$ у Z, на следећи начин. Нека је

$$Z = \sum_{i=1}^{k} q_i[uvw_it_i] + A$$

где је A 3-цикл чији симплекси не садрже $[uv]$. Линк од $[uv]$ у Z је

$$Z_{[uv]} = \sum_{i=1}^{k} q_i[w_it_i]$$

Очиглено, $Z_{[uv]}$ је нетривијалан 1-цикл. Не умањујући општост, можемо предпоставити да су сви симплекси $[uvw_it_i]$ јединствени. Дефинишемо

$$q(Z_{[uv]}) = \sum_{i=1}^{k} |q_i|$$

Како је $Z_{[uv]}$ нетривијалан 1-цикл то је $q(Z_{[uv]}) \geqslant 3$.
За доказ Леме 8.1 потребна нам је још једна чињеница. Наиме, сваком 1-ланацу C можемо доделити пондерисани оријентисани граф Γ_C који се састоји од свих оријентисаних ивица $[w_1 w_2]$ које припадају C и чији су коефицијенти позитивни. Приметимо да је C цикл ако је у сваком његовом темену сума тежина улазних ивица једнака суми техзина излазних ивица. Мотивисани овим опажањем кажемо да темена $w_1, \ldots, w_k$ чине усмерени прости цикл у C ако ивице $[w_1 w_2], \ldots, [w_k w_1]$ улазе у C са позитивним коефицијентима. Очигледно важи следећа лема.

Лема 8.5. 1-*цикл садржи усмерени прости цикл.*

Спремни смо да докажемо Лему 8.1

Доказ Леме 8.1. Нека је надаље $P = supp(Z)$. Тврђење доказујемо индукцијом по $q(Z_{[uv]})$. База индукције је случај $q(Z_{[uv]}) = 3$. Тада

$$Z_{[uv]} = [p_1 p_2] + [p_2 p_3] + [p_3 p_1]$$

те је

$$Z = [uvp_1 p_2] + [uvp_2 p_3] + [uvp_3 p_1] + A$$

где је A сума 3-симплекса који не садрже $[uv]$. Посматрајмо 4-симплекс $\eta = [uvp_1 p_2 p_3]$ и 3-цикл

$$Z' = Z - \partial\eta = [up_1 p_2 p_3] - [vp_1 p_2 p_3] + A$$

Приметимо да су сва темена и ивице од $supp(Z')$ уједно темена и ивице од $supp(Z)$. Даље, како ни један од симплекса од Z не садржи $[uv]$ то $[uv] \notin supp(Z')$. Дакле, или $u \notin supp(Z')$ и број темена од $supp(Z')$ је мањи од m, или $u \in supp(Z')$ и $deg(u) < d$. У сваком случају, сигнатура од $supp(Z')$ је мања од (m, d) те на основу предпоставке леме Теорема 8.1 важи за $supp(Z')$ тј. $V_{Z'}$ је интегралан над прстеном $R_{Z'}$ генерисаним квадратима дужина ивица од $supp(Z')$. Како је $R_{Z'} \subset R$ то је $V_{Z'}$ интегралан над R. Даље, $V_{\partial\eta}$ је запремина 4-симплекса те је на основу Кејли-Менгерове формуле она интегрална над $R_{\partial\eta}$ а самим тим и над R јер $R_{\partial\eta} \subset R$. Дакле, $V_Z = V_{Z'} + V_{\partial\eta}$ је интегралан над R чиме је доказана база индукције.
Предпоставимо сада да лема важи за све цикле Z такве да $q(Z_{[uv]}) < k$ и докажимо да тада важи за цикле Z такве да $q(Z_{[uv]}) = k$. На основу Леме 8.5 постоји усмерен прост цикл $p_1, \ldots, p_n$ у $Z_{[uv]}$. Нека је

$$\begin{aligned} \eta_i &= [uvp_i p_{i+1} p_{i+2}], 1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ Z_i &= Z - \partial\eta_i \\ P_i &= supp(Z_i) \end{aligned}$$

Темена од P_i су уједно и темена од P. Даље, свака ивица од P_i која садржи u је уједно и ивица од P. Дакле, сигнатура сваког P_i није већа од (m, d). Могућа су два случаја.
Сигнатура од P_i је мања од (m, d) и тада је на основу предпоставке леме V_{Z_i} интегралан над R_{Z_i}.
Сигнатура од P_i је једнака (m, d). У том случају је

$$(Z_i)_{[uv]} = Z_{[uv]} - [p_i p_{i+1}] - [p_{i+1} p_{i+2}] + [p_i p_{i+2}]$$

Како $[p_ip_{i+1}]$ и $[p_{i+1}p_{i+2}]$ улазе у $Z_{[uv]}$ са позитивним коефицијентима то је $q((Z_i)_{[uv]}) = q(Z_{[uv]}) - h$, $h \in \{1,3\}$. У сваком случају, $q((Z_i)_{[uv]}) < k$ те по индуктивној предпоставци постоји $s_i \geqslant 0$ такво да је $l_{uv}^{s_i}V_{Z_i}$ интегралан над R_{Z_i}.
У оба случаја закључујемо да постоји $s_i \geqslant 0$ такво да је $l_{uv}^{s_i}V_{Z_i}$ интегралан над R_{Z_i}. Како су све ивице од P_i сем евентуално $[p_ip_{i+2}]$ уједно и ивице од P то је $R_{Z_i} \subset R[l_{p_ip_{i+2}}]$. Такође, $R_{\eta_i} \subset R[l_{p_ip_{i+2}}]$ те како је $V_Z = V_{Z_i} + V_{\eta_i}$ закључујемо да је $l_{uv}^{s_i}V_Z$ интегралан над $R[l_{p_ip_{i+2}}]$ тј. да је V_Z интегралан над $R[l_{p_ip_{i+2}}, \frac{1}{l_{uv}}]$.
Ако је $n = 3$ тада $[p_1p_3] \in P$ те је лема доказана. Ако је $n > 3$ потребно је показати да је V_Z интегралан над $R[\frac{1}{l_{uv}}]$. Нека је O валуациони прстен од K са максималним идеалом $\mathfrak{m}$ такав да $R[\frac{1}{l_{uv}}] \subset O$. Како $\frac{1}{l_{uv}} \in O$ то $l_{uv} \notin \mathfrak{m}$ те $u, v, p_1, \ldots, p_n$ задовољавају услове Леме 8.4 те постоји $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ такво да $l_{p_jp_{j+2}} \in O$. Дакле, $l_{p_jp_{j+2}}$ је интегалан над $R[\frac{1}{l_{uv}}]$ те како је V_Z интегралан над $R[l_{p_jp_{j+2}}, \frac{1}{l_{uv}}]$ закључујемо да је V_Z интегралан над $R[l_{uv}]$. □

8.4 Доказ Леме 8.2

За доказ Леме 8.2 користимо алате алгебарске геометрије. За варијетет $X \subset \mathbb{C}^r$ кажемо да је дефинисан над $\mathbb{Q}$ ако је $I(X)$ генерисан рационалним полиномима. Са $F\lceil X\rceil$ и $F(X)$ означавамо прстен регуларних, односно поље рационалних, функција над X са коефицијентима у пољу F.

Како су рационалне функције $f = \frac{g}{h} \in F(X)$ заправо пресликавања $f : X \to F \cup \{\infty\}$ при чему је $f(x) = \infty$ ако је $h(x) = 0$, мултискуп $(f)_\infty = f^{-1}(\{\infty\})$ је добро дефинисан и називамо га дивизором полова од f. Приметимо да је $\operatorname{codim}((f)_\infty) = 1$.

Лема 8.6. *Нека је $X \subset \mathbb{C}^r$ иредуцибилан афини аријетет дефинисан над $\mathbb{Q}$. Нека су $f_1, \ldots, f_p \in \mathbb{Q}\lceil X\rceil$ такви да је $\{f_1 = \ldots = f_p\} \subset X$ кодимензије 2. Нека је L раширење од $\mathbb{Q}(X)$ и $y \in L$ такво да су за неке $s_i \geqslant 0$ $f_1^{s_1}y, \ldots, f_p^{s_p}y$ интегрални над $\mathbb{Q}[X]$. Тада је y интегралан над $\mathbb{Q}\lceil X\rceil$.*

Доказ. Доказујемо тврђење за $y \in \mathbb{Q}(X)$. Доказ општег случаја када y припада неком раширењу следи директно из предходног (види [12]).

Нека је $\pi\tilde{X} \to X$ нормализација од X. Како је $\mathbb{C}\lceil\tilde{X}\rceil$ интегрално затворење од $\mathbb{C}\lceil X\rceil$ у $\mathbb{C}(X)$ то је $y \in \mathbb{C}(\tilde{X})$ и $f_i^{s_i}y$ су регуларне функције на $\tilde{X}$. Како је $\tilde{X}$ нормалан то је дивизор полова $(y)_\infty$ добро дефинисан у $\tilde{X}$. Нека је $Y \subset \tilde{X}$ носач од $(y)_\infty$. Како су $f_i^{s_i}y$ регуларне на $\tilde{X}$ то је Y садржан у $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant p}\{f_i = 0\} \subset \tilde{X}$. Како је π коначан регуларан морфизам, закључујемо да скупови $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\} \subset \tilde{X}$ и $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\} \subset X$ истих кодимензија тј. бар 2. Дакле, $\operatorname{codim}(Y) \geqslant 2$ те закључујемо да је $(y)_\infty = 0$ (јер је дивизор увек кодимензије 1). Закључујемо да је y интегралан над $\mathbb{C}\lceil X\rceil$. Будући да је елемент од $\mathbb{Q}(X)$ интегралан над $\mathbb{Q}\lceil X\rceil$ ако је интегралан над $\mathbb{C}\lceil X\rceil$ закључујемо да је y интегралан над $\mathbb{Q}\lceil X\rceil$ што је и требало доказати. □

Нека је K $(n-1)$-димензиони симплицијални комплекс са m темена и r ивица. Посматрамо афине просторе $\mathbb{C}^{mn}$ са координатама $x_{u,i}$ где је u теме од K и $i \in \{1, \ldots, n\}$, и $\mathbb{C}^r$ са кординатама $g_{uv} = g_{vu}$ где је $[uv] \in K$. Уочимо разлику између g_{uv} и функције квадрата растојања ивице l_{uv}. Нека је $h : \mathbb{C}^{mn} \to \mathbb{C}^r$ хомоморфизам дефинисан са

$$g_{uv} = \sum_{i=1}^{n}(x_{u,i} - x_{v,i})^2$$

Приметимо да је $h^*(g_{uv}) = l_{uv}$. Нека је X_K затворење од $Im(h)$ (у односу на топологију Зариског). X_K је иредуцибилан афини варијетет дефинисан над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}\lceil X_K \rceil$ је $\mathbb{Q}$-подалгебар од R.

Лема 8.7. *Нека је u теме од P и нека су $p_1, \ldots, p_k$, $k \geqslant 2$, темена од P таква да $[up_i] \in P$. Тада је $Y = \{l_{up_1} = \ldots = l_{up_k} = 0\} \subset X_P$ кодимензије бар 2.*

Предходна лема потребна нам је само за $k = 4$. Лема 8.2 следи директно из Леме **??** и Леме 8.7. Лему 8.7 доказујемо користећи две додатне помоћне леме чији доказ.

Лема 8.8. *Нека је $P : K \to \mathbb{C}^n$ и $\epsilon = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |l_{up_i}(P)|$. Тада постоји $1 \leqslant j \leqslant k$ и $P' : K \to \mathbb{C}^n$ такво да $l_{up_j}(P') = 0$ и $(\forall [v_1 v_2] \in K)\, |l_{v_1 v_2}(P') - l_{v_1 v_2}(P)| \leqslant 3\epsilon$.*

Лема 8.9. *Нека је $g = (g_{v_1 v_2}) \in X_K$ такав да $(\forall 1 \leqslant i \leqslant k)\, g_{up_i} = 0$ и $\epsilon > 0$. Постоји поледар $P : K \to \mathbb{C}^n$ такав да*

1. *$(\forall [v_1 v_2] \in K)\, |l_{v_1 v_2} - g_{v_1 v_2}| \leqslant \epsilon$.*
2. *$(\exists i_1 \in \{1, \ldots, k\})\, l_{up_1} = 0$.*
3. *$(\exists i_2 \in \{1, \ldots, k\})\, l_{ip_1} \neq 0$.*

Доказ Леме 8.7. Нека је $Y_i = \{l_{up_i} = 0\} \subset X_K$. Нека је $Y_i = Y_{i,1} \cap \ldots Y_{i,q_i}$ разбијање Y_i на иредуцибилне компоненте. Предопставимо да тврђење леме није тачно. Тада $Y = Y_1 \cap \ldots \cap Y_k$ садржи иредуцибилну компоненти C кодимензије 1. Не умањујући општост можемо предпоставити да је $Y_{i,1} = C$. Постоји $g = (g_{v_1 v_2}) \in C$ такво да $g \notin \bigcup_{j>1} Y_{i,j}$. Неке је $U_\epsilon(g)$ ϵ-околна тачке g. Како су $Y_{i,j}$ затворени, $U_\epsilon(g) \cap \bigcup_{j>1} Y_{i,j} = \emptyset$, за довољно мало ϵ. Тада је $U_\epsilon(g) \cap (Y_1 \cup \ldots Y_k) = U_\epsilon(g) \cap C$. Али, на основу Леме 8.9, постоји $g' \in U_\epsilon(g)$ такво да $g' \in Y_{i_1}$ и $g' \notin Y_{i_2}$, за неке i_1 и i_2 те $g' \in Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$ и $g' \notin C$ што је контрадикција. Дакле, Y мора бити кодимензије бар 2. □

9 Отворени проблеми

9.1 Флексибилнин полиедри у вишим димензијама и нееуклидским просторима

Није познато да ли постоје флексибилни полиедри у $\mathbb{R}^n$ за $n \geqslant 5$. Питање које се такође може поставити је да ли постоје флексибилни полиедри у нееуклидским просторима. Валцова конструкција флексибилног октаедра у $\mathbb{R}^4$ може се модификовати [11] у конструкцију флексибилног октаедра у елиптичком или хиперболичком простору. За димензије различите од 4, да ли постоје флексибилни полиедри у хиперболичком или елиптичком простору није познато. У случају сферног простора показано је да постоје флексибилни полиедри у димензији 3. За један од тих полиедара је доказано [18] да не чува запремину при савијању те ФЗП хипотеза не важи у $\mathbb{S}^3$. Поменимо још да постоје флексибилани полиедари у простору минковског[25] димензије 3 и они да задовољавају ФЗП хипотезу [17]. Питање у којим просторима и којим димензијама постоје флексибилни полиедри и да ли задовољавају ФЗП хипотезу се још увек активно проучава.

9.2 ФЗП хипотеза у еуклидским просторима виших димензија

Отворено је питање да ли ФЗП хипотеза важи у димензијама већим од 4 односно да ли важи јаче алгебарско тврђење чије је она последица.

Уколико желимо да уопштимо идеје доказа у $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$, потребна нам је одговарајућа инваријанта полиедра у односу на коју вршимо индукцију.

Нека је K $(n-1)$-димензиони симплицијални комплекс и нека је $m(K)$ број темена од K. За k-симплекс $\tau \in K$ нека је $m(\tau, K)$ број $(k+1)$-симплекса од K који садрже τ. $(n-4)$-застава од K је низ T симплекса $\tau_0 \subset \ldots \subset \tau_{n-4}$ комплекса K таквих да је $dim(\tau_i) = i$. Нека је $\mathcal{F}(K)$ скуп свих $(n-4)$-застава. За $T \in \mathcal{F}(K)$ нека је

$$\mathbf{m}(T, K) = (m(K), m(\tau_0, K), \ldots, m(\tau_{n-4}, K))$$

Нека је

$$\mathbf{m}(K) = \min_{T \in \mathcal{F}} \mathbf{m}(\mathcal{T})$$

где је мимимум подразумеван у односу на лексикографски поредак. Нека је $\mathbf{D}_\sigma$ Кејли-Менгерова темена симплекса $\sigma \in K$. Уопштења кључних лема коришћених у доказу ФЗП хипотезе у $\mathbb{R}^4$ су следеће.

Лема 9.1. *Нека је* $n \geqslant 3$ *и* $\mathbf{m}_0$ *фиксно. Предпоставимо да је за сваки* $(n-1)$*-димензиони цикл* Z *такав да је* $\mathbf{m}(supp(Z)) < \mathbf{m}_0$ V_Z *интегралан над* R_{suppZ}*. Нека је* Z' $(n-1)$*-димензиони цикл,* $\mathbf{m}_{supp(Z')} = \mathbf{m}_0$ *и нека је* $T \in \mathfrak{F}$ *такав да* $\mathbf{m}(T, supp(Z')) = \mathbf{m}_0$*. Нека је* $\sigma \in supp(Z')$ $(n-3)$*-димензиони симплекс који садржи* τ_{n-4}*. Тада постоји* $s \geqslant 0$ *такво да је* $\mathbf{D}_\sigma^s V_Z$ *интегралан над* $R_{supp(Z')}$*.*

Лема 9.2. *Нека је* Z $(n-1)$*-цикл,* τ $(n-4)$*-димензиони симплекс од* $supp(Z)$ *и* $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ $(n-3)$*-симплекси од* $supp(Z)$ *који садрже* τ*. Ако са свако* $1 \leqslant i \leqslant k$ *постоји* $s_i \geqslant 0$ *такво да је* $\mathbf{D}_{\sigma_i}^{s_i} V_Z$ *интегралан над* $R_{supp(Z)}$ *тада је и* V_Z *интегралан над* $R_{supp(Z)}$*.*

---

[25] *Hermann Minkowski* (1864 – 1909) - Немачки математичар.

Лема 9.1 доказује се потпуно аналогно као у $\mathbb{R}^4$. Да ли је Лема 9.2 тачна још увек није познато. Доказ би следио из позитивног одговора на следеће питање.

Питање 1. Нека је Z $(n-1)$-цикл, $\tau \in supp(Z)$ $(n-4)$-димензиони симплекс и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ $(n-3)$-димензиони симплекси од $supp(Z)$ који садрже τ. Да ли $\{\mathbf{D}_{\sigma_1} = \ldots = \mathbf{D}_{\sigma_k} = 0\} \subset X_{suppZ}$ има кодимензију бар 2?

9.3 Јака ФЗП хипотеза

Дефиниција 9.1. Полиедри P и P' су еквирастављиви се оба могу разложити на коначно много полиедара $P_1, \ldots, P_n$.

Ако су полиедри еквирастављиви запремине су им очигледно исте. Да ли важи обрат је један од 23 чувена проблема које је Хилберт изложио на Интернационалном конгресу математичара 1900 у Паризу.

Питање 2 (Хилбертов трећи проблем)**.** Да ли су свака два полиедра у $\mathbb{R}^3$ исте запремине еквирастављиви?

Макс Ден[26] је негативно решио проблем 1902. год. Идеја Деновог доказа је увођење одговарајуће инваријанте полиедра која је иста за све еквирастављиве полиедра. Ден је потом показао да постоје полиедри исте запремине а различите Денове инваријанте експлицитно конструишући одговарајући пример чиме је негативно решио Хилбертов трећи проблем. Ј.-П. Сидлер[27] је 1965. год. доказао [20] супротан смер тј. показао да су полиедри истих запремина еквирастављиви акко им је Денова инваријанта иста.

Конели је предложио следећу хипотезу о Деновој инваријанти флексибилних полиедара.

Хипотеза 2 (*Strong bellows conjecture*)**.** *Денова инваријанта флексибилног полиедра је константна при његовом савијању.*

Јака ФЗП хипотеза је проверена за Брикардове октаеде неке флексибилне полиедре као што је Стефенов полиедар [19]. У свим до сада испитаним случајевима потврђена је као тачна. Ипак, општи доказ и даље не постоји.

---

[26] *Max Dehn* (1878 – 1952) - Немачки математичар. Ученик Давида Хилберта.

[27] *Jean-Pierre Sydler* (1921 – 1988) - Швајцарски математичар и библиотекар.

Литература

[1] Bricard R.: *Memoire sur la theorie de loctaedre articule*, *J. math. pur. appl., Liouville*, **3**, 1897, 113148.

[2] Cauchy A.L., *Recherche sur les polydres - premier mmoire*, *Journal de l'Ecole Polytechnique* **9**, 1813, 66-86.

[3] Blumenthal L. M., *Theory and Applications of Distance Geometry, 2nd ed.*, Chelsea, N. Y., 1970.

[4] Connelly R., *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **47**, 1977, 333-338.

[5] Connelly R., Sabitov I. Kh, Walz A., *The Bellows Conjecture*, *Beitr. Algebra Geom.* **38:1**, 1-10.

[6] Connelly R., *An immersed polyhedral surface which flexes*, *Indiana University Math. J.*, **25**, 1976, 965-972.

[7] Engler A. J., Prestel A., *Valued Fields*, Springer, 2005.

[8] Aigner M., Ziegler G. M., *Proofs from THE BOOK, 4th Edition*, Springer, 2009.

[9] Cayley A.: *On a theorem in the geometry of position*, *Cambridge Math. J.*, **2**, 1841, 267-271.

[10] Menger K.: *New Foundation of Euclidean Geometry*, *Amer. J. Math.*, **53:4**, 1931, 721745.

[11] Stachel H.: *Flexible Cross-Polytopes in the Euclidean 4-Space*, *Journal for Geometry and Graphics*, **4:2**, 2000, 159-167.

[12] Гайфуллин А. А.: *Sabitov polynomials for volume of polyhedra in four dimensions*, *preprint*, 2011.

[13] Fogelsanger A. L.: *The generic rigidity of minimal cycles*, *Ph.D. Thesis*, 1988.

[14] Сабитов И. Х.: *К проблеме об инвариантности объёма изгибаемого многогранника*, Успехи Математических Наук, **50:2**, 1995, 223-224.

[15] Сабитов И. Х.: *Обьём многогранника как функциясго метрики*, Фундаментальхаяи прикладнаJA Математика, **2:4**, 1996, 1235-1246.

[16] Lang S.: *Introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley, 1972.

[17] Александров В.: *Flexible polyhedra in Minkowski 3-space*, *Manuscripta Math.*, **111**, 2003.

[18] Аклександров В.: *An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space*, *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, **38:1**, 1997, 11-18.

[19] Виктор Александров: *The Dehn invariants of the Bricard octahedra*, *Journal of Geometry*, **99**, 2010, 1-13.

[20] Sydler J.-P.: *Conditions necessaires et suffisantes pour l'equivalence des polyedres de l'espace euclidien a trois dimensions*, *Comment. Math. Helv.*, **40**, 1965, 43-80.