Универзитет у Београду

Математички факултет

Хомологија случајног симплицијалног комплекса

мастер рад

Аутор: Миланка Јанковић
Ментор: Др Синиша Врећица

Београд
јул, 2012.

Садржај

Глава 1

Увод

1.1 Увод

Употреба вјероватносних метода у дискретној математици је почела педесетих година прошлог вијека захваљујући радовима Пола Ердеша. Идеја је била да, ако желимо да докажемо да постоји структура која задовољава неке особине, довољно је да докажемо да случајно изабрана структура задовољава тражене особине, при чему вјероватносни простор конструишемо на нама повољан начин. Иако је идеја једноставна, у неким проблемима је довела до тренутно најбољих могућих резултата. Тако су, на примјер, најбоље до сада познате оцјене за Ремзијеве бројеве добијене вјероватносним методом.
Убрзо се јавило интересовање за особине тако добијених вјероватносних структура, што је довело до посматрања случајних графова. Први модел који је проучаван је $G(n, M)$, модел у коме бирамо случајан граф са n чворова и M грана, при чему су сви графови једнако вјероватни. При томе, за дату особину графа се питамо за које M је вјероватноћа да граф задовољава дату особину велика. Међутим, испоставило се да је овај модел доста тежак за проучавање, па је замјењен другим моделом, Ердеш-Ренји моделом $G(n, p)$ у коме сваку грану бирамо са вјероватноћом p, независно од других. Како у $G(n, p)$ број грана има биномну расподјелу $Bi(\binom{n}{2}, p)$ која је концентрисана око свога очекивања, то су та два модела јако слична када је $M \sim n^2p/2$, тако да је већина тврђења доказивана у моделу $G(n, p)$, иако су математичари у стварности били заинтересовани за модел $G(n, M)$.
Природно се поставља питање да ли, за дату особину P, постоји функција $p^* = p^*(n)$ таква да, ако је $p \ll p^*$ онда $G(n, p)$ не задовољава P са великом вјероватноћом, а ако је $p \gg p^*$, онда $G(n, p)$ задовољава P са великом вјероватноћом. Ако та функција постоји, тада се она назива функција прага. Испоставља се да за велику класу особина таква функција постоји и једно од главних питања је тражење функције прага за особину P.
Временом су људи почели да посматрају разне дискретне случајне струк-

туре, при чему су оне често сљедећег облика. Имамо неки полазни скуп Ω који је коначан и бирамо подскуп S тако што сваки елемент из Ω укључујемо у S са неком вјероватноћом, независно од осталих елемената.
Линиал и Мешулам су у [1] предложили модел случајног симплицијалног комплекса димензије d, $Y_{n,p,d}$, са скупом чворова $\{1, \ldots, n\}$ при чему $Y \in Y_{n,p,d}$ садржи све симплексе димензије мање од d, а сваки d симплекс бирамо са вјероватноћом p независно један од другога.
Једно од основних питања везаних за симплицијалне комплексе је како изгледа хомологија датог комплекса. У овом раду посматрамо хомолошку повезаност и хомолошку димензију случајног симплицијалног комплекса у Линиал-Мешуламовом моделу, тј. интересује нас када $H_{d-1}(Y, G)$ и $H_d(Y, G)$ нестају.
На прво питање су одговор дали Линиал и Мешулам у раду [1], у случају када је $d = 2$ и $G = \mathbb{F}_2$, а Мешулам и Валах су у [2] нашли функцију прага за нестајање $H_{d-1}(Y, G)$ за свако $d \geq 2$ и било коју коначну групу G.
Кад је ријеч о нестајању горње хомологије, Козлов је у [3] доказао да је $1/n$ функција прага случају када је G коначна група.
Један од довољних услова за нестајање горње хомологије је колапсибилност комплекса. У [4] и [5] се разматра колапсибилност дводимензионалног комплекса, и доказује да је функција прага n^{-1}, што поправља резултат Козлова, јер нам даје да за произвољну групу горња хомологија нестаје испод функције прага за произвољну групу G.
У [6] Аронштам, Линиал, Лузак и Мешулам су доказали да је функција прага за колапсибилност d комплекса n^{-1}. Сем тога, они разматрају и шта се дешава на граници, тј. шта се дешава са вјероватноћом да комплекс буде колапсибилан за $p = c/n$.

1.2 Појмови и дефиниције

Основне појмове попут симплекса, симплицијалног комплекса, ланца, коланца или хомолошке групе нећемо дефинисати.
Како су особине које нас занимају комбинаторне, то ћемо симплицијални комплекс са n чворова посматрати као фамилију подскупова скупа $\{1, \ldots, n\}$, затворену за узимање подскупа.
Са Δ_k означавамо симплекс димензије $k+1$. За дати симплицијални комплекс Y са $Y(k)$ означавамо скуп свих страна димензије k, а са f_k број таквих страна.
Сем тога, са $C_k(Y)$, $C^k(Y)$ означавамо скуп свих циклуса и коциклуса (респективно) са коефицијентима из неке (унапријед задате) групе G. Са $\partial_k : C_k(Y) \to C_{k-1}(Y)$ и $d_k : C^k(Y) \to C^{k+1}(Y)$ означавамо гранични и ко-гранични оператор.
Ако је Y $d-$димензионални симплицијални комплекс, за $(d-1)-$симплекс τ, *степен* од τ $d_Y(\tau)$ је број d симплекса од Y који садрже τ.
Са $\Delta(Y)$ означавамо максималан степен.

За двије $(d-1)-$стране кажемо да су сусједне, ако постоји $d-$страна која садржи обје, док за двије $d-$стране су сусједне, ако садрже исту $(d-1)-$страну.
Нека је G_Y граф у коме су чворови $d-$димензиони симплекси комплекса Y, при чему је σ_1, σ_2 грана ако су σ_1 и σ_2 сусједни. За комплекс кажемо да је *јако повезан* ако је граф G_S повезан.
Удаљеност између два $d-$симплекса σ_1, σ_2, $d_Y(\sigma_1, \sigma_2)$ дефинишемо као удаљеност у графу G_Y.
Посматрајући граф G'_Y у коме су чворови $(d-1)-$симплекси из Y, а два чвора τ_1, τ_2 су сусједни ако су стране τ_1, τ_2 сусједне, дефинишемо удаљеност између $(d-1)-$страна $d_Y(\tau_1, \tau_2)$ као удаљеност у графу G'_Y.
Нека су S и D $d-$димензионални симплицијални комплекси.
Симплицијална имерзија $g : S \looparrowright D$ је функција $g : V(S) \to V(D)$ која пресликава скуп чворова комплекса S у скуп чворова комплекса D, која задовољава следеће особине

(i) Ако је $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\} \in S(d)$ $d-$симплекс у S, тада је $f(\sigma) = \{g(v_0), \ldots, g(v_d)\}$ $d-$симплекс у D.

(ii) Ако су σ_1, σ_2 два различита $d-$симплекса у S, тада су и $f(\sigma_1)$, $f(\sigma_2)$ два различита $d-$симплекса у D.

Симплицијално улагање $g : S \hookrightarrow D$ је ињективно пресликавање које је симплицијална имерзија.
Ако постоји симплицијално улагање (имерзија) комплекса S у D, онда кажемо да комплекс S допушта улагање (имерзију) у D.
Сем тога, ако постоји улагање S у D кажемо да D садржи S.
Нека је Y коначан d димензионални симплицијални комплекс. Страна димезије $d-1$ се назива слободном ако је инцидентна са само једном d-страном. Слично, $d-$страна је слободна ако садржи бар једну слободну $(d-1)-$страну. *Симплицијални колапс* је операција којом од комплекса Y добијамо комплекс $R(Y)$ тако што избацимо све слободне $d-$стране.
Ову операцију можемо да примјењујемо даље, тако да добијамо низ комплекса $R_i(Y)$, при чему је $R_0(Y) = Y$, $R_{i+1}(Y) = R(R_i(Y))$.
Како је Y коначан симплицијалан комплекс, може се десити да за неко i комплекс $R_i(Y)$ буде димензије $d-1$ и у том случају кажемо да је комплекс Y *колапсибилан.* У супротном посотји i тако да $d-$димензионални комплекс $R_i(Y)$ нема слободних страна. Тада за свако $j \geq i$ имамо $R_j(Y) = R_i(Y)$ и у том случају дефинишемо комплекс $R_\infty(Y) = R_i(Y)$. Комплекс $R_\infty(Y)$ је коначан $d-$комплекс такав да је свака $(d-1)-$страна степена 0 или бар 2.
Чисти комплекс који нема слободних страна називамо *језгро.*
Минимално језгро је комплекс који је језгро, такав да нити један његов прави подкомплекс није језгро.
Нека је S коначан $d-$димензионални симплицијални комплекс. Нека је v чвор у S.
Са $Lk(v)$ означавамо $(d-1)-$димензионални симплицијални комплекс

$$Lk(v) = \{X \setminus \{v\} \mid v \in X \in S\}.$$

Нека је $0 < p < 1$. Тада са $Y_{n,p,d}$ означавамо простор случајних d димензионалних симплицијалних комплекса са n чворова генерисан на сљедећи начин. Посматрајмо симплекс Δ_{n-1}. Тада $Y \in Y_{n,p,d}$ има комплетан $d-1$ скелетон датог симплекса, а сваки d симплекс укључујемо са вјероватноћом p, независно један од другога.
У овом моделу елементарни догађаји су симплицијални комплекси са скупом чворова $\{1, \dots, n\}$, који садрже све $(d-1)-$стране и ни једну $d-$страну. Вјероватноћа сваког симплекса симплицијалног комплекса $Y \in Y_{n,p,d}$ је дата са

$$\mathbb{P}(Y) = p^{f_d(Y)}(1-p)^{\binom{n}{d+1} - f_d(Y)}.$$

Посматрајмо сада неку особину P на d димензионалним симплексима. Нека је $p = p(n) \in (0, 1)$ за довољно велико n.
Кажемо да $Y \in Y_{n,p,d}$ *асимптотски скоро сигурно* (а.с.с.) задовољава особину P ако је

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y \text{ задовољава } P \mid Y \in Y_{n,p,d}) = 1.$$

Ако за особину P постоји функција $p^*(n)$ таква, да за $p \gg p^*$ $Y_{n,p,d}$ а.с.с. задовољва P, а за $p \ll p^*$ а.с.с. не задовољава P, онда p^* називамо *функција прага* за особину P.
За особину кажемо да је *монотоно растућа (опадајућа)* ако за свако $Y \in Y_{n,p,d}$ које задовољава P и $Y \cup \{\sigma\}$ $(Y \setminus \{\sigma\})$задовољава P гдје је σ произвољан $d-$симплекс на $\{1, \dots, n\}$.
Познато је да, ако је P растућа (опадајућа) особина, тада је $f(p) = \mathbb{P}(Y_{n,p,d}$ задовољава $P)$ растућа (опадајућа) функција.
Један од основних резултата из случајних графова је да свака монотона особина има функцију прага.

1.3 Вјероватносни метод

У овом дијелу дајемо преглед неких основних неједнакости које се користе када се говори о дискретним вјероватносним структурама.
Случајна промјењива чије су вриједности у $\mathbb{N}_0$ називамо бројачком промјењивом.
Неједнакост Маркова је једна од основних неједнакости која за посљедицу има тврђење да, ако је $\mathbb{E}(X)$ мало, тада је X скоро сигурно нула.
Како су сви простори које посматрамо коначни, а све случајне промјењиве имају коначну вриједност, подразумијевамо да за сваку случајну промјенјиву постоје очекивање и варијација и да су коначни.

Лема 1.1 (Неједнакост Маркова)**.** *Нека је X ненегативна случана промјењива. Тада, за свако $\lambda > 0$ вриједи*

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}.$$

Доказ. Како је $X \geq 0$ имамо

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X < \lambda)\mathbb{E}(X \mid X < \lambda) + \mathbb{P}(X \geq \lambda)\mathbb{E}(X \mid X \geq \lambda) \geq \mathbb{P}(X \geq \lambda)\lambda.$$

□

Следећа лема се често назива и методом првог момента.

Лема 1.2. *Нека је X_n низ бројачких случајних промјењивих, таква да је $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \neq 0) = 0.$$

Доказ. Како је X_n бројачка промјењива, то је $X_n \neq 0$ ако и само ако је $X_n \geq 1$, тако да примјеном неједнакост Маркова добијамо

$$\mathbb{P}(X_n \neq 0) = \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(X_n),$$

одакле слиједи тврђење. □

Ако је X ненегативна промјењива, ограничена одозго, онда вјероватноћа да је X много мање од $\mathbb{E}(X)$ не може бити превелика.

Лема 1.3. *Нека је X случајна промјењива таква да је $0 \leq X \leq k$. Тада је, за свако $\lambda \geq 0$ вриједи*

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \geq \frac{\mathbb{E}[X] - \lambda}{k}.$$

Доказ. Како је

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(X \geq \lambda)\mathbb{E}[X \mid X \geq \lambda] + \mathbb{P}(X < \lambda)\mathbb{E}[X \mid X < \lambda] \leq \mathbb{P}(X \geq \lambda)k + \lambda$$

добијамо

$$PP(X \geq \lambda) \geq \frac{\mathbb{E}[X] - \lambda}{k}.$$

□

Пошто је често једноставно израчунати очекивање случајне промјењиве X, поставља се питање колико је X удаљено од $\mathbb{E}(X)$. Једна од основних неједнакости тога типа је неједнакост Чебишева.

Лема 1.4. *Дата је случајна промјењива X. Тада, за $\lambda > 0$ вриједи*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$

Доказ. Из неједнакости Маркова добијамо

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{\lambda^2} = \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$

□

Једноставна посљедица ове леме често се користи за доказивање да је бројачка промјењва X скоро сигурно различита од нуле и назива се метод другог момента.

Лема 1.5. *Нека је X_n низ случајних промјењивих такав да је за довољно велико n $\mathbb{E}(X_n) > 0$ и $Var(X_n) = o(\mathbb{E}^2(X_n))$. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 0.$$

Доказ. Како $X_n = 0$ нам даје $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| = \mathbb{E}(X_n)$, то примјеном неједнакости Чебишева, са $\lambda = \mathbb{E}(X_n)$ добијамо

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \leq \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \mathbb{E}(X_n)) \leq \frac{Var(X_n)}{\mathbb{E}^2(X_n)},$$

одакле слиједи тврђење. □

Често имамо скуп лоших догађаја $\{A_1, \ldots, A_m\}$, $m = m(n)$, и случајну промјењиву X_n која представља број реализованих лоших догађаја. Ако са I_i означимо индикатор догађаја A_i, тада је $X_n = \sum_i (I_i)$, па је $\mathbb{E}(X_n) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.
Ако су догађају A_i по паровима независни, онда добијамо да је

$$\begin{aligned} Var(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}^2(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_i I_i + 2\sum_{i<j} I_i I_j\right) - \mathbb{E}^2(X_n) = \\ &= \mathbb{E}\,(X_n) + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_j) - \mathbb{E}^2(X_n) \leq \mathbb{E}(X_n), \end{aligned}$$

тако да услов $Var(X_n) = o\left(\mathbb{E}^2(X_n)\right)$ у претходној леми можемо замијенити са $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$.
Нека је $i \sim j$ ако је $i \neq j$ и догађаји A_i и A_j нису независни и нека је $\Delta^* = \sum_{i\sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$, гдје сума иде по свим уређеним паровима i, j.
Често се метод другог момента користи у сљедећем облику.

Лема 1.6. *Нека су $A_1, \ldots, A_m$ догађаји, и нека је X_n бројачка промјењива која означава број реализованих догађаја A_i. Ако $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$ и $\Delta^* = o\left(\mathbb{E}^2(X_n)\right)$ тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 0.$$

Доказ. Како је

$$\begin{aligned} Var(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}^2(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_i I_i + \sum_{i\neq j} I_i I_j\right) - \mathbb{E}^2(X_n) = \\ &= \mathbb{E}(X_n) + \sum_{i\neq j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{E}^2(X_n) \leq \\ &\leq \mathbb{E}(X_n) + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_j) + \sum_{i\sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{E}^2(X_n) \leq \\ &\leq \mathbb{E}(X_n) + \Delta^*, \end{aligned}$$

те је

$$\frac{Var(X_n)}{\mathbb{E}^2(X_n)} \le \frac{1}{\mathbb{E}(X_n)} + \frac{\Delta^*}{\mathbb{E}^2(X_n)} = o(1).$$

□

Као што смо рекли, често можемо да процијенимо очекивање случајне промјењиве, и хтјели бисмо да процијенимо колико је она удаљена од свога очекивања. Ако је X_n збир n независних случајних промјењивих са истим очекивањем m и истом варијансом σ, неједнакост Чебишева нам даје

$$\mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \ge \lambda \mathbb{E}(X_n)\right) \le \frac{Var(X_n)}{\lambda^2 \mathbb{E}^2(X_n)} = \frac{\sigma}{nm\lambda^2} = \theta(1/n).$$

Поставља се питање да ли можемо добити бољу оцјену од ове.
У неким случајевима, када је X_n одређеног типа, можемо добити експоненцијално добре оцјене. Користићемо два типа таквих оцјена. Један су Ченофљеве оцјене, које су уопштење Чернофљеве неједнакости за биномну распођелу и оне важе у случају када је X_n збир Бернулијевих (не обавезно истих) незавиших случајних промјењивих. Други тип слиједи из Ацумине неједнакости за мартингале.

Лема 1.7. *Нека је $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ гдје су X_i независне Бернулијеве случајне промјењиве такве да је*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i,$$
$$\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i.$$

Тада за $\lambda > 0$ вриједи

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \ge \lambda) \le e^{-2\lambda^2/n},$$
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \le -\lambda) \le e^{-2\lambda^2/n}.$$

Доказ. Нека је $p = (p_1 + \cdots + p_n)/n$. Тада имамо $\mathbb{E}(X) = pn$. За $u > 0$ функција e^{ux} је растућа па имамо

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \ge \lambda) = \mathbb{P}(X \ge \lambda + pn) = \mathbb{P}\left(e^{uX} \ge e^{u(\lambda+pn)}\right) \le$$
$$\le \frac{\mathbb{E}(e^{uX})}{e^{u(\lambda+pn)}} = e^{-u\lambda - unp} \prod \left((1-p_i) + p_i e^u\right).$$

Како је $\ln x$ конкавна функција, то је

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - p_i + p_i e^u) \le (1 - p + pe^u)^n$$

што нам даје

$$\mathbb{P}(X \geq pn + \lambda) \leq e^{-unp - u\lambda}(1 - p + pe^u)^n =$$
$$= e^{-u\lambda}\left((1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)}\right)^n.$$

Докажимо да је

$$(1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)} \leq e^{u^2/8},$$

за све $u \geq 0$ и $p \in [0,1]$.
Посматрајмо функцију $\varphi(u) = \ln\left((1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)}\right)$. Како је

$$\varphi'(u) = \frac{p(1-p)(e^u - 1)}{pe^u + (1-p)},$$
$$\varphi''(u) = \frac{p(1-p)e^u}{\left(pe^u + (1-p)\right)^2}$$

то је $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(u) \leq \frac{1}{4}$ одакле лако добијамо да је $\varphi(u) \leq u^2/8$ што је и требало доказати.
Сада имамо

$$\mathbb{P}(X \geq pn + \lambda) \leq e^{u^2 n/8 - u\lambda}$$

што нам за $u = 4\lambda/n$ даје

$$\mathbb{P}(X \geq pn + \lambda) \leq e^{-2\lambda^2/n}.$$

Неједнакост $\mathbb{P}(X_n - pn \leq -\lambda) \leq e^{-2\lambda^2/n}$ се своди на претходну смјеном $Y_i = 1 - X_i$. $\square$

Неједнакост $(1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)} \leq e^{u^2/8}$ даје добру процјену када је u мало и када је p близу једне половине. У супротном, постоје боље оцјене које се добијају бољим процјенама израза $e^{-u\lambda}\left((1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)}\right)^n$.

Лема 1.8. *Нека је $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ гдје су X_i независне Бернулијеве случајне промјењиве такве да је*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$$
$$\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i.$$

Тада, за $\lambda > 1$ имамо

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}(X)) \leq \left(e^{\lambda - 1}\lambda^{-\lambda}\right)^{\mathbb{E}(X)}.$$

Доказ. У доказу претходне леме смо добили да је, за прозивољно $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq pn + t) \leq e^{-ut}\left((1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)}\right)^n.$$

Посљедња функција достиже минимум за

$$u = \ln\left(\frac{1-p}{p} \cdot \frac{t+np}{n-t-np}\right) = \ln\left(1 + \frac{t}{p(n-t-np)}\right),$$

међутим оцјена добивена уврштавањем ове вриједности често није употребљива, те ћемо користити вриједност $u = \ln(1 + t/pn)$.
Сада добијамо

$$\mathbb{P}(X > pn + t) \leq \left(1 + \frac{t}{pn}\right)^{-np-t} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n}.$$

Уврштавајући $t = (\lambda - 1)pn$ добијамо

$$\mathbb{P}(X \geq pn + t) \leq \lambda^{-\lambda pn} (1 + (\lambda - 1)p)^n \leq \left(\lambda^{-\lambda} e^{\lambda - 1}\right)^{pn}.$$

□

Као што смо видјели, ако је X збир независних случајних промјењивих, онда је вјероватноћа да је X далеко од очекивања експоненцијално мала.
Други случај када можемо добити експоненцијалну оцјену је када се очекивање од X може представити као мартингал и посљедица је Ацумине неједнакости.
За низ случајних промјењивих $c = X_0, X_1, \ldots, = X_n$ кажемо да је мартингал ако вриједи $\mathbb{E}\left[X_i \mid X_{i-1}, X_{i-2}, \ldots, X_0\right] = X_{i-1}$ за свако $i \leq n$.

Лема 1.9 (Ацума)**.** *Нека је $0 = X_0, \ldots, X_n$ мартингал такав да за свако $i > 0$ важи*

$$|X_i - X_{i-1}| \leq 1.$$

Тада, за произвољно $\lambda > 0$ важи

$$\mathbb{P}(X_n \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/2n}.$$

Доказ. За произвољно $u > 0$ имамо

$$\mathbb{P}(X_n \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{uX_n}\right)}{e^{u\lambda}}.$$

Нека је $Y_i = X_i - X_{i-1}$. Тада имамо $\mathbb{E}\,(Y_i \mid X_{i-1}, X_{i-1}, \ldots, X_0) = 0$ и $|Y_i| \leq 1$.
Како је функција e^{ux} конвексна имамо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(e^{uY_i} \mid X_{i-1}, \ldots X_0) &= \mathbb{E}\,(e^{-u\frac{1-Y_i}{2} + u\frac{1+Y_i}{2}} \mid X_{i-1}, \ldots X_0) \leq \\
&\leq \mathbb{E}\left(\frac{1-Y_i}{2} + e^{-u}\frac{1+Y_i}{2}e^{u} \mid X_{i-1}, \ldots X_0\right) = \\
&= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \leq e^{u^2/2}.
\end{aligned}$$

Посљедња неједнакост је специјалан случај неједнакости

$$(1-p)e^{-up} + pe^{u(1-p)} \leq e^{u^2/8}$$

за $p = 1/2$.
Како за произвољне случајне промјењиве F, G важи $\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F \mid G))$, имамо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{uX_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{uY_i}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{uY_i} \mid X_{n-1}, \ldots, X_0\right)\right) = \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{uY_i} \mathbb{E}\left(e^{uY_n} \mid X_{n-1}, \ldots X_0\right)\right) \leq \\
&\leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{uY_i}\right) e^{u^2/2}
\end{aligned}$$

одакле индукцијом слиједи

$$\mathbb{E}\left(e^{uX_n}\right) \leq e^{u^2 n/2}$$

Сада, за $u = \lambda/n$ добијамо

$$\mathbb{P}(X_n \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/2n}.$$

□

Често се Ацумина неједнакост користи у сљедећем облику

Лема 1.10. *Нека је $m = X_0, \ldots, X_n$ мартингал такав да за свако i вриједи*

$$|X_i - X_{i-1}| \leq c.$$

Тада

$$\mathbb{P}(X_n - m \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/(2nc^2)} \text{ и}$$
$$\mathbb{P}(X_n - m \leq -\lambda) \leq e^{-\lambda^2/(2nc^2)}.$$

Доказ. Тврђење слиједи директно из претходне леме посматрајући мартингале $Y_i = \frac{X_i - m}{c}$ и $Z_i = \frac{m - X_i}{c}$. □

Када се говори о случајним графовима, постоје два битна мартингала на њима, мартингал откривања грана и мартингал откривања чворова. Нека су $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $e_1, \ldots, e_m$, $m = \binom{m}{2}$ респективно чворови и гране у $G(n, p)$. Нека је H нека особина графа. Тада мартингал откривања грана дефинишемо као $X_i(H) = \mathbb{E}(H \mid e_1, \ldots, e_i)$ при чему условљавање по гранама знајчи да смо условили да ли гране припадају графу или не. Слично матрингал откривања чворова се дефинише као $Y_i(H) = \mathbb{E}(H \mid v_1, \ldots, v_i)$ при

чему условљавање по чворовима значи да смо открили како изгледају сусједства тих чворова, тј. са којим је чворовима дати чвор сусједан, а са којим не. Примијетимо да је $X_0(H) = Y_0(H) = \mathbb{E}(H)$ и $X_n(H) = Y_m(H) = H$.
Одавде добијамо да, ако је H особина графа која се "мало" мијења додавањем или избацивањем гране, или промјеном сусједства једног чвора, онда је она густо концентрисана око свог очекивања.
Када говоримо о вјероватноћи на дискретним структурама често имамо неки скуп основних елемената, те се случајни елемент простора бира тако што бирамо подскуп скупа основних елемената, обично тако што сваки елемент укључујемо независно један од другога. У том случају је природно посматрати мартингал који открива један по један елемент тог скупа, те добијамо сљедећу неједнакост која се назива и Мекдиармидова неједнакост.

Лема 1.11 (Мекдиармид). *Нека су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне промјењиве које узимају вриједности у скупу $\mathcal{X}$. Нека је $f : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ функција таква да је*

$$|f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)| \leq c.$$

за свако i. Тада за свако $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(f - \mathbb{E}(f) > \lambda) \leq e^{-\lambda^2/2c^2 n}.$$

Доказ. Нека је

$$Z_i = \mathbb{E}(f \mid X_i, X_{i-1}, \ldots, X_0).$$

Тада је $Z_0 = \mathbb{E}(f)$, $Z_n = f$ и

$$|Z_i - Z_{i-1}| \leq c.$$

Да бисмо доказали да је Z_i мартингал, користићемо следеће тврђење.
Ако су G_1, G_2 случајне промјењиве, такве да је G_1 одређена са G_2, онда за случајну промјењиву F имамо

$$\mathbb{E}(F \mid G_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F \mid G_2) \mid G_1).$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} Z_{i-1} &= \mathbb{E}\left(X \mid X_{i-1}, \ldots, X_0\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid X_i, \ldots, X_0\right) \mid X_{i-1}, \ldots, X_0\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(Z_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_0\right), \end{aligned}$$

те добијамо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z_i \mid Z_{i-1}, \ldots, Z_0\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_0\right) \mid Z_{i-1}, \ldots, Z_0\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(Z_{i-1} \mid Z_{i-1}, \ldots, Z_0\right) = Z_{i-1}, \end{aligned}$$

тј. Z_i је мартингал, те тврђење слиједи из леме 1.10.

□

Нека је $\Omega = \{1, \dots, n\}$ почетни скуп. Скуп $S \subset \Omega$ бирамо случајно, тако што сваки елемент $i \in S$ бирамо са вјероватноћом p_i, независно од других. Добијени простор означимо са Ω_n. Нека су $A_1, \dots, A_m$ подскупови од Ω, и нека B_i означава *лош* догађај $A_i \subset S$. Питамо се колика је вјероватноћа да нема лоших догађаја.
Догађај B_i не зависи од догађаја $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$ ако су скупови A_i и $A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_k}$ дисјунктни. Граф зависности G је граф на скупу $\{1, \dots, m\}$ у коме ј $i \sim j$ грана ако $i \neq j$ и $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
Ако су ови догађаји независни, онда је вјероватноћа да се ни један није догодио једнака производу вјероватноћа. Поставља се питање шта можемо да кажемо када они нису независни.
Свака фамилија $\mathcal{A}$ подскупова скупа Ω представља један догађај. За фамилију (или догађај) кажемо да је растућа, ако је затворена за надскуп, а опадајућа ако је затворена за подскуп.
Лако се види да је пресјек растућих догађаја растући, а опадајућих опадајући догађај.
Претходно описани догађаји B_i су растући, а њихови комплементи опадајући.

Лема 1.12 (Клајтманова лема)**.** *Нека су A и B два растућа догађаја. Тада је*

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Доказ. Тврђење ћемо доказати индукцијом по n.
За $n = 1$ тврђење се лако провјерава.
Нека је $n \geq 2$. Нека је $p = p_n$ вјероватноћа са којом бирамо n. Нека је дата фамилија $S \in \Omega_n$. Посматрајмо сљедеће двије фамилије у Ω_{n-1}

$$\begin{aligned} S_1 &= \{X \setminus \{n\} \mid X \in S, n \in X\}, \\ S_0 &= \{X \mid X \in S, n \notin X\}. \end{aligned}$$

Примијетимо да, ако је S растућа фамилија, тада су и S_0 и S_1 растуће фамилије.
Сад имамо $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S_0) + \mathbb{P}(S_1)$ Сем тога, S_0 и S_1 су догађаји у Ω_{n-1}, те имамо да је

$$\mathbb{P}(S) = (1-p)\mathbb{P}_1(S_0) + p\mathbb{P}_1(S_1),$$

гдје $\mathbb{P}_1$ означава вјероватноћу у Ω_{n-1}.
Корситећи индуктивну претпоставку, добијамо да је

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= (1-p)\mathbb{P}_1(A_0 \cap B_0) + p\mathbb{P}_1(A_1 \cap B_1) \geq \\ &\geq (1-p)\mathbb{P}_1(A_0)\mathbb{P}_1(B_0) + p\mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_1(B_1). \end{aligned}$$

Нека је $a_0 = \mathbb{P}_1(A_0)$, $a_1 = \mathbb{P}_1(A_1)$, $b_0 = \mathbb{P}_1(B_0)$, $b_1 = \mathbb{P}_1(B_1)$.
Фамилије A и B су растуће, те имамо $A_0 \subset A_1$ и $B_0 \subset B_1$ тј. $a_0 \leq a_1$, $b_0 \leq b_1$.

Како је $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = ((1-p)a_0 + pa_1)((1-p)b_0 + pb_1)$ то је довољно доказати

$$(1-p)a_0b_0 + pa_1b_1 \geq ((1-p)a_0 + pa_1)((1-p)b_0 + pb_1)$$

што је еквивалентно са

$$p(1-p)(a_1 - a_0)(b_1 - b_0) \geq 0.$$

□

Како је комплемент растуће фамилије опадајућа, то се лако добија да и за двије опадајуће фамилије A, B важи иста неједнакости

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

док за опадајућу и растућу фамилију важи

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ако имамо m опадајућих (растућих) фамилија $B_1, \ldots, B_m$ тада имамо да је $\mathbb{P}(\bigcap B_i) \geq \prod_i \mathbb{P}(B_i)$.
Посматрајмо поново почетну ситуацију, када имамо m скупова $A_1, \ldots, A_m$, и нека је B_i догађај да S садржи скуп A_i.
Са B_i^c означимо комплемент догађаја B_i. Нас интересује вјероватноћа да S не садржи нити један A_i, тј. вјероватноћа догађаја $\bigcap_{i=1}^{m} B_i^c$. Из претходне леме добијамо да је

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B_i^c),$$

при чему знамо да се једнакост достиже ако су скупови независни.
Нека је

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(B_i \cap B_j)$$

при чему сума иде по свим гранама у графу зависности. Нека је

$$M = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B_i^c).$$

Теорема 1.1 (Јансон)**.** *Нека су* $B_1, \ldots, B_m$, Δ, M *као што су описани. Нека је* ε *такво да је* $\mathbb{P}(B_i) \leq \varepsilon < 1$. *Тада вриједи*

$$M \leq \mathbb{P}\left(\bigcap B_i^c\right) \leq M e^{\Delta/(1-\varepsilon)}.$$

Доказ. Из Клајтманове неједнакости добијамо

$$\mathbb{P}\left(\bigcap B_i^c\right) \geq M.$$

С друге стране, имамо

$$\mathbb{P}\left(B_n \bigcap_{i\sim n} B_i^c \bigcap_{j\not\sim n} B_j^c\right) = \mathbb{P}\left(B_n \bigcap_{j\not\sim n} B_j^c\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\sim n} B_i \cap (B_n \bigcap_{j\not\sim n} B_j^c)\right) \geq$$
$$\geq \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(\bigcap_{j\not\sim n} B_j^c) - \sum_{i\sim n} \mathbb{P}(B_i \cap B_n \bigcap_{j\not\sim n} B_j^c).$$

За сваку фамилију B дефинишимо фамилију

$$B' = \{X \setminus A_n \mid X \in B \cap B_n\}.$$

Тада вриједи да је $\mathbb{P}(B \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_1(B')$, гдје $\mathbb{P}_1$ означава вјероватноћу у простору $\Omega_{n-|A_n|} = \Omega \setminus A_n$. Сем тога, ако је фамилија B монотона, таква је и фамилија B'. Како је B_i растућа, а $\cap B_j^c$ опадајућа фамилија, то су фамилије ${B_i}'$ и $\cap B_j^{c\prime}$ растућа и опадајућа редом, те добијамо да је

$$\mathbb{P}\left(B_i \cap B_n \bigcap_{j\not\sim n} B_j^c\right) \leq \frac{\mathbb{P}\left(B_i \cap B_n\right) \mathbb{P}(B_n \bigcap_{j\not\sim n} B_j^c)}{\mathbb{P}(B_n)} = \mathbb{P}(B_i \cap B_n)\mathbb{P}(\bigcap_{j\not\sim n} \mathbb{P}\left(B_j^c\right)).$$

То нам даје

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_n^c) = \mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_{n-1}^c) - \mathbb{P}\left(B_n \cap B_1^c \cap \dots B_{n-1}^c\right) \\
&\leq \mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_{n-1}^c) - \left(\mathbb{P}(B_n) - \sum_{i\sim n} \mathbb{P}(B_i \cap B_n)\right) \mathbb{P}(\bigcap_{j\not\sim n} B_j^c) \leq \\
&\leq \mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_{n-1}^c) \left(1 - \mathbb{P}(B_n) + \sum_{i\sim n} \mathbb{P}(B_i \cap B_n)\right) \leq \\
&\leq \mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_n^c) \left(1 + \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i\sim n} \mathbb{P}(B_i \cap B_n)\right),
\end{aligned}$$

одакле индукцијом добијамо

$$\mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_n^c) \leq M e^{\Delta/(1-\varepsilon)}.$$

□

Глава 2

Случајни дводимензионални симплицијални комплекс

У овом поглављу ћемо разматрати Линиал-Мешуламов случајан симплицијални комплекс, $Y_{n,p,d}$ за $d = 2$, и означаваћемо га са $Y_{n,p}$.
Као што смо рекли у уводу, интересују нас двије хомолошке групе овог симплицијалног комплекса, тј. које су функције прага за нестајање $H_1(Y, G)$ и $H_2(Y, G)$, за дату групу G.
Како је нестајање $H_1(Y, G)$ монотоно растућа, а нестајање $H_2(Y, G)$ монотоно опадајућа особина, то постоје функције прага за ове особине.
Нестајање горње хомологије је уско повезано са колапсибилношћу комплекса, и испоставља се да те двије особине имају исту функцију прага. Јасно је да је комплекс колапсибилан ако и само ако не садржи језгро, тако да ћемо у оквиру колапсибилности разматрати и проблем симплицијалног улагања, тј. за дати комплекс S, која је функција прага за особину да Y допушта симплицијално улагање S.

2.1 Хомолошка повезаност $Y_{n,p}$

Када говоримо о повезаности дводимензионалног симплицијалног комплекса, можемо говорити о више типова повезаности, при чему је најјача нестајање фундаменталне групе π_1. Сем тога, постоји и хомолошка 1 повезаност, тј. нестајање $H_1(Y, \mathbb{Z})$. Ако за неку групу G нестаје $H_1(Y, G)$ кажемо да је Y хомолошки G повезан.
Функција прага за хомолошку G повезаност је позната за било коју коначну Абелову групу G, али ћемо се, једноставности ради, задржати на случају $G = \mathbb{Z}_2$. Случај када је G произвољна коначна Абелова група ће бити разматран касније, када будемо разматрали нестајање групе H_{d-1} за произвољну

димензију $d \geq 2$.
Основни резултат у овом дијелу је сљедећа теорема.

Теорема 2.1. *Нека је $\omega(n)$ функција таква да је $\omega(n) \to \infty$.*

(i) Ако је $p = \dfrac{2\ln n - \omega(n)}{n}$ тада

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(H_1(Y;\mathbb{Z}_2) = 0 \mid Y \in Y(n,p)\right) = 0.$$

(ii) Ако је $p = \dfrac{2\ln n + \omega(n)}{n}$ тада

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(H_1(Y;\mathbb{Z}_2) = 0 \mid Y \in Y(n,p)\right) = 1.$$

Доказ теореме 2.1 (i). Нека је $Y \in Y_{n,p}$. Са X означимо број изолованих грана у Y. Тада је $X = \sum I_i$, гдје је I_i индикатор догађаја A_i да је грана i изолована. Ако имамо изолвану грану, тада је комплекс неповезан тако да је

$$\mathbb{P}[H_1(Y,G) = 0] \leq \mathbb{P}[X = 0].$$

Користећи метод другог момента доказаћемо да је у овом случају

$$\mathbb{P}[X = 0] = o(1).$$

Како је

$$E[X] = \binom{n}{2}(1-p)^{n-2} \sim \frac{n^2}{2}(1-p)^n = \Omega(\exp(\omega(n))),$$

добијамо да $E(X) \to \infty$. Лема 1.6 нам даје да је довољно доказати да је

$$\sum_{i,j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] = o(E^2[X]),$$

при чему сума иде по свим паровима грана i, j таквим да су догађаји A_i, A_j зависни. Примијетимо да су догађаји A_i, A_j зависни ако и само ако гране i, j имају заједнички чвор. У том случају је $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = (1-p)^{2n-5}$, а како таквих парова има $n\binom{n-1}{2}$, то је

$$\sum_{i,j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] = n\binom{n-1}{2}(1-p)^{2n-5} = o(E^2[X]).$$

$\square$

Случај $p = \frac{2\log n + \omega(n)}{n}$ је много компликованији јер није једноставно дати довољан услов да би комплекс био повезан. У једнодимензионалном случају, када је граф неповезан имамо двије компоненте, од којих је барем једна

мања од $n/2$ и вјероватноћу да граф није повезан одозго ограничавамо са $\sum_{k\le n/2}(1-p)^{k(n-k)}$ гдје је k величина најмање компоненте повезаности.
Нешто слично се дешава и у дводимензионалном случају. Како је $H_1(Y,\mathbb{Z}_2) \simeq H^1(Y,\mathbb{Z}_2)$ добијамо да је комплкес $Y \in Y_{n,p}$ неповезан ако и само ако постоји функција $f \in C^1(\Delta_{n-1})$ таква да је $d_1 f \neq 0$ и $d_1 f(\sigma) = 0$ за свако $\sigma \in Y$. Такву функцију f ћемо називати индикатором неповезаности комплекса Y. Јасно је да функција f није јединствена, тако да можемо да изаберемо индикатор неповезаности такав да је $|\text{supp } f|$, број грана на којима f није нула, минималан.
Нека је f индикатор неповезаности за комплекс Y тако да је $|\text{supp } f|$ минималан. За произвољан ко-ланац $g \in C^0(\Delta_{n-1})$ имамо да је $d_1(f) = d_1(f + d_0(g))$, тако да је и $f + d_0(g)$ индикатор неповезаности за Y. Због тога имамо да је $|\text{supp } f| \le |\text{supp } (f + d_0(g))|$.
Посматрајмо граф $G_f = G([n], \text{supp } f)$. Нека је $e = uv$ грана таква да је $f(e) = 1$ и да постоји w такво да је $d_1(f)(uvw) = 1$. Даље, нека је $h \in C^1(\Delta_{n-1})$ таква да је $h(e') = f(e')$ ако су e и e' у истој компоненти графа G_f, иначе је $h(e') = 0$. Ако је f индикатор неповезаности, тада је и h. Сем тога, $\text{supp } h \subset \text{supp } f$, тако да ако је f индикатор неповезаности са минималним бројем ненула вриједности, онда граф G_f мора да има само једну нетривијалну компоненту повезаности.
Нека је $\mathcal{F}_n$ скуп свих функција $f \in C^1(\Delta_{n-1})$ таквих да $d_1(f) \neq 0$, $|\text{supp } f| \le |\text{supp } (f + d_0(g))|$ за произвољно g и да граф G_f има једну нетривијалну компоненту повезаности. Нека је $B(f) = |\text{supp } d_1(f)|$, број троуглова σ таквих да је $d_1(f)(\sigma) = 1$. Функција f је индикатор неповезаности за комплекс Y акко Y не садржи нити један троугао из $\text{supp } d_1(f)$. То нам даје

$$\mathbb{P}[H^1(Y) \neq 0] \le \sum_{f \in \mathcal{F}_n} (1-p)^{B(f)},$$

те ће теорема 2.1 (ii) слиједити из сљедеће теореме.

Теорема 2.2. *Нека је* $p = \frac{2\log n + \omega(n)}{n}$. *Тада је*

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_n} (1-p)^{B(f)} = o(1).$$

Идеја је да израз на лијевој страни процијенимо у односу на број грана у графу G_f, тј. да, у односу на број грана одоздо оцијенимо $B(f)$, а одозго број одговарајућих графова.
Како функције из $C^1(\Delta_{n-1})$ узима вриједности из скупа $\{0,1\}$, јасно је да постоји бијекција између графова на $[n]$ и функција $f \in C^1(\Delta_{n-1})$. Нека је $\mathcal{G}_n = \{G_f \mid f \in \mathcal{F}_n\}$. За граф $G([n], E) = G_f$ означимо $B(G) = B(f)$.
Нека је $\mathcal{G}_n = \{G_f \mid f \in \mathcal{F}_n\}$ класа графова са n чворова који одговарају функцијама у $\mathcal{F}_n$.
Нека је $G = G([n], E) = G_f \in \mathcal{G}_n$. Тада, за свако $g \in C^0(\Delta_{n-1})$ имамо $|\text{supp } f| \ge |\text{supp } (f + d_0(g))|$. Нека је $S \subset \{1, \ldots, n\}$. Тада постоји g тако да је $S = \{v \in \{1, \ldots, n\} \mid g(v) = 0\}$. Нека је $(S, \overline{S})$ скуп грана између S и

његовог комплемента $\overline{S}$. Граф који одговара функцији $d_0(g)$ је комплетан бипартитан граф са партицијом чворова $S, \overline{S}$. Лако се види да је услов

$$|\text{supp }(f + d_0(g))| \geq |\text{supp }(f)$$

еквивалентан услову

$$|E \cap (S, \overline{S})| \leq \frac{|S||\overline{S}|}{2}.$$

Одавде добијамо да је $G \in \mathcal{G}_n$ акко има једну нетривијалну компоненту повезаности и за сваки непразан скуп $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ вриједи $|E \cap (S, \overline{S})| \leq \frac{|S||\overline{S}|}{2}$.
Специјално, узимајући $S = \{v\}$ добијамо да је $d_G(v) \leq \frac{n}{2}$.
За доказ теореме 2.2 су нам потребна два тврђења. Прво тврђење ће нам дати доњу оцјену $B(G)$, за граф G са n чворова и k грана, а друго тврђење ће нам дати горњу оцјену троуглова из $\mathcal{G}_n$ са k грана и $B(G) = (1 - \theta)kn$.
Једноставности ради уведимо сљедеће ознаке:

$$\mathcal{G}_n(k) = \{G([n], E) \in \mathcal{G}_n \mid |E| = k\}.$$

$$\mathcal{G}_n(k, \theta) = \{G([n], E) \in \mathcal{G}_n(k) \mid B(G) = (1 - \theta)kn\}.$$

Лема 2.1. *За сваки $G \in \mathcal{G}_n(k)$ вриједи*

$$B(G) \geq \frac{kn}{3}.$$

Доказ. Нека је $G = G_f \in \mathcal{G}_n(k)$. За чвор v дефинишимо функцију $f_v \in C^1(\Delta_{n-1})$

$$f_v(u) = \begin{cases} f(uv) & u \neq v \\ 0 & u = v \end{cases}$$

Ако су чворови u, v, w различити тада је

$$\begin{aligned}(f + d_0 f_v)(uw) = f(uw) + d_0 f_v(uw) = f(uw) + f_v(u) + f_v(w) = \\ = f(uw) + f(uv) + f(vw) = d_1 f(uvw),\end{aligned}$$

те је supp $(f + d_0 f_v) = \{\sigma \mid \sigma \in \text{supp } d_1 f, v \in \sigma\}$. Одавде добијамо да је

$$3B(f) = \sum_v |\text{supp }(f + d_0 f_v)| \geq \sum_v |\text{supp } f| = nk.$$

□

Прије него што кренемо на тврђење које ће нам ограничити број елемената скупа $\mathcal{G}_n(k, \theta)$ треба нам следећа лема.

Лема 2.2. *За свако* $0 < \epsilon < 1$ *постоји константа* $C = C(\epsilon)$ *тако да за довољно велико* n*, свако* $\frac{1}{3} \leq \theta \leq 1$ *и за сваки граф* $G = G([n], E) \in \mathcal{G}_n(k, \theta)$ *за који вриједи*

$$\frac{n}{5} < k \leq n^{2-\varepsilon}$$

постоји скуп чворова $S \subset [n]$ *такав да је*

$$|S| \leq \frac{Ck}{n} \quad \text{и} \quad |\{e \in E \mid e \cap S \neq \emptyset\}| \geq (2 - \varepsilon)k\theta.$$

Доказ. Ово тврђење ћемо доказати помоћу вјероватносног метода, тако што ћемо доказати да случајано изабран скуп S задовољава обје особине са позитивном вјероватноћом.
Како је $G = G_f \in \mathcal{G}_n(k, \theta)$ имамо $B(G) = kn(1 - \theta)$ и $|E| = k$.
За сваку грану $e = uv \in E$ и чвор w који није сусједан ни са u ни са v имамо да је $d_1 f(uvw) = 1$, те је

$$(1 - \theta)kn = B(G) \geq \sum_{uv \in E} (n - d(u) - d(v)) = kn - \sum_{v \in G} (d(v))^2,$$

па је

$$\sum_{v \in G} (d(v))^2 \geq \theta kn.$$

Скуп S бирамо случајно, тако да сваки чвор v бирамо са вјероватноћом $p_v = \dfrac{2d(v)}{n}$, независно од осталих чворова. Како је за $G \in \mathcal{G}_n$ сваки чвор степена највише $n/2$, дефиниција је добра.
Нека је $X = |\{e \in E \mid e \cap S \neq \emptyset\}|$ случајна промјењива која означава број грана инцидентних са скупом S. Тада је

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{uv \in E} \left(1 - \left(1 - \frac{2d(u)}{n}\right)\left(1 - \frac{2d(v)}{n}\right)\right) = \\
&= \sum_{uv \in E} \left(\frac{2d(u)}{n} + \frac{2d(v)}{n} - \frac{4d(v)d(v)}{n^2}\right) \geq \\
&\geq 2 \sum_{v \in G} \frac{d^2(v)}{n} - \frac{2}{n^2}\left(\sum_{v \in G} d(v)\right)^2 \geq \\
&\geq 2\theta k - \frac{8k^2}{n^2} \geq 2\theta k - 8\frac{kn^{2-\varepsilon}}{n^2} = k(2\theta - 8n^{-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Сем тога, примијетимо да је $0 \leq X \leq k$, тако да према леми 1.3 имамо

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \geq \frac{\mathbb{E}[X] - \lambda}{k}$$

што нам даје

$$\mathbb{P}(X \geq (2-\varepsilon)\theta k) \geq \frac{k(2\theta - 8n^{-\varepsilon}) - (2-\varepsilon)k\theta}{k} = \varepsilon\theta - 8n^{-\varepsilon} \geq \frac{\varepsilon}{6}$$

за довољно велико n.
За чвор v са I_v означимо случајну промјењиву која је индикатор догађаја $v \in S$. Тада је

$$|S| = \sum_{v \in G} I_v.$$

Како је $\mathbb{E}[S] = \frac{4k}{n}$, из леме 1.8 добијамо да за $\delta > 1$

$$\mathbb{P}\left(|S| > \delta\frac{4k}{n}\right) \leq \left(e^{1-\delta}\delta^{\delta}\right)^{-\frac{4k}{n}} \leq \left(e^{1-\delta}\delta^{\delta}\right)^{-\frac{4}{5}},$$

па за довољно велико $C = C(\varepsilon)$ имамо

$$\mathbb{P}\left(|S| > C\frac{4k}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Сада, овако изабрано $C = C(\varepsilon)$ и довољно велико n имамо

$$\mathbb{P}(X < (2-\varepsilon)\theta k) + \mathbb{P}\left(|S| > C\frac{k}{n}\right) < 1 - \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} < 1,$$

те постоји S са траженим особинама. $\square$

Следећа лема ће нам дати горњу оцјену броја графова G са k грана и $B(G) = (1-\theta)kn$

Лема 2.3. *За свако* $0 < \varepsilon < 1$ *постоји константа* $C = C(\varepsilon)$ *тако да за свако* $\frac{1}{3} \leq \theta < 1$ *и* $\frac{n}{5} \leq k \leq n^{2-\varepsilon}$ *вриједи*

$$|\mathcal{G}_n(k,\theta)| \leq \left(Cn^{2(1-(2-\varepsilon)\theta)}\right)^k.$$

Доказ. Довољно је доказати да тврђење важи почевши од неког $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Према леми 2.2 постоји константа $C_1 = C_1(\varepsilon) \geq 2$ и скуп S такав да је

$$|S| = \frac{C_1 k}{n}, \quad |\{e \in E \mid e \cap S \neq \emptyset\}| \geq (2-\varepsilon)\theta k.$$

Скуп S можемо да изаберемо на $\binom{n}{C_1k/n}$ начина. Ако G има l грана инцидентних са S, онда те гране можемо да изаберемо на

$$\binom{|S|(n-|S|) + \binom{|S|}{2}}{l} = \binom{n|S| - \binom{|S|+1}{2}}{l} \leq \binom{n|S|}{l}$$

начина. Како је $l \leq k$ и $2k \leq n|S|$ имамо

$$\binom{n|S|}{l} \leq \binom{n|S|}{k}.$$

Одавде добијамо да је број начина да се изаберу гране које су инцидентне са S највише

$$k\binom{n|S|}{k} \leq k\left(\frac{n|S|e}{k}\right)^k \leq k\,(eC_1)^k \leq (2eC_1)^k.$$

Број начина да изаберемо гране које нису инцидентне са S је највише

$$k(1-(2-\varepsilon)\theta)\binom{\binom{n}{2}}{k(1-(2-\varepsilon)\theta)} \leq kn^{2k(1-(2-\varepsilon)\theta)}$$

па слиједи да је

$$|\mathcal{G}_n(k,\theta)| \leq \binom{n}{C_1k/n}(2eC_1)^k kn^{2k(1-(2-\varepsilon)\theta)} \leq \left(n^{\frac{C_1}{n}}4eC_1n^{2(1-(2-\varepsilon)\theta)}\right)^k.$$

Како је $n^{\frac{1}{n}} = O(1)$, то за $C = 5eC_1$ и довољно велико n важи

$$|\mathcal{G}_nk,\theta| \leq \left(Cn^{2(1-(2-\varepsilon)\theta)}\right)^k.$$

□

Сада можемо прећи на доказ теореме 2.2.

Доказ теореме 2.2. Нека је $p = \frac{2\log n+\omega(n)}{n}$. Треба да докажемо да је

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n}(1-p)^{B(G)} = \sum_{k\geq 1}\sum_{G\in G_n(k)}(1-p)^{B(G)} = o(1).$$

Посматраћемо три могућности за k.

(i) Нека је $1 \leq k \leq \frac{n}{5}$. Како G има тачно једну нетривијалну компоненту, имамо да је

$$|\mathcal{G}_n(k)| \leq \binom{n}{k+1}\binom{\binom{k+1}{2}}{k} \leq \left(\frac{en}{k+1}\right)^{k+1}\left(\frac{e(k+1)}{2}\right)^k =$$
$$= \frac{e^{2k+1}n^{k+1}}{2^k(k+1)} < \left(\frac{e^2n}{2}\right)^{k+1} < (10n)^{k+1}.$$

Сем тога, за сваку грану $e = uv$ и сваки чвор w који није у јединственој нетривијалној компоненти повезаности имамо $d_1(f)(uvw) = 1$, па је

$$B(G) \geq k(n-k-1).$$

Одавде добијамо да је

$$\sum_{k=2}^{n/5}\sum_{G\in G_n(k)}(1-p)^{B(G)} \le \sum_{k=2}^{n/5}(10n)^{k+1}(1-p)^{k(n-k-1)} \le \sum_{k\ge 2}(10n)^{k+1}n^{\frac{-8k}{5}} =$$

$$= n^{-\frac{1}{5}}\sum_{k\ge 0}10^{k+3}n^{\frac{-3k}{5}} = O(n^{-\frac{1}{5}}) = o(1).$$

Сада имамо

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{5}}\sum_{G\in \mathcal{G}_n(k)}(1-p)^{B(G)} \le \binom{n}{2}(1-p)^{n-2} + o(1) = o(1).$$

(ii) Нека је $\frac{n}{5} \le k \le n^{2-1/3}$.
За $0 \le \theta \le \frac{1}{3}$ имамо

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n(k,\theta)}(1-p)^{B(G)} \le \binom{\binom{n}{2}}{k}(1-p)^{(1-\theta)kn} \le$$

$$\le \left(\frac{en^2}{2k}\right)^k n^{-2(1-\theta)k} \le \left(10n^{2\theta-1}\right)^k \le \left(10n^{-\frac{1}{3}}\right)^k$$

Нека је $\theta > \frac{1}{3}$. Примијенимо лему 2.3 са $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Сада имамо

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n(k,\theta)}(1-p)^{B(G)} = |\mathcal{G}_n(k,\theta)|(1-p)^{(1-\theta)kn} \le$$

$$\le \left(Cn^{2(1-(2-\varepsilon))\theta}\right)^k n^{-2(1-\theta)k} =$$

$$= \left(Cn^{-4\theta/3}\right)^k \le \left(Cn^{-4/9}\right)^k.$$

За свако k, број различитих θ тако да је $\mathcal{G}_n(k,\theta) \ne \emptyset$ је највише n^3, тако да добијамо

$$\sum_{k=\frac{n}{5}}^{n^{2-1/3}}\sum_{G\in\mathcal{G}_n(k,\theta)}(1-p)^{B(G)} = \sum_k\sum_\theta\sum_{G\in\mathcal{G}_n(k,\theta)}(1-p)^B(G) \le$$

$$\le n^3\sum_{k\ge\frac{n}{5}}\left(Cn^{-4/9}\right)^k \le$$

$$\le n^3\left(Cn^{-4/9}\right)^{\frac{n}{5}}\sum_{k\ge 0}\left(Cn^{-4/9}\right)^k =$$

$$= \left(Cn^{-\frac{4}{9}+\frac{15}{n}}\right)^{n/5}\cdot O(1) = o(1).$$

(iii) Нека је $k \geq n^{2-1/3}$. Како је $B(G) \geq kn/3$ имамо да је

$$\sum_{k \geq n^{2-1/3}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n(k,\theta)} (1-p)^{B(G)} \leq \sum_{k \geq n^{2-1/3}} \binom{\binom{n}{2}}{k} (1-p)^{kn/3} \leq$$

$$\leq \sum_{k \geq n^{2-1/3}} \left(\frac{en^2}{2k}\right)^k n^{-2k/3} \leq \left(2n^{-1/3}\right)^{n^{2-1/3}} \sum_{k \geq 0} \left(2n^{-1/3}\right)^k = o(1).$$

□

2.2 Хомолошка димензија и колапсибилност $Y_{n,p}$

Као што смо рекли, у Линиал-Мешуламовом моделу $Y_{n,p,d}$ постоје само двије могућности за хомолошку димензију, да је та димензија d или $d-1$, тако да је питање за које p горња хомологија $H_d(Y_{n,p,d}, G)$ нестаје. Како је нестајање горње хомологије опадајућа особина, функција прага постоји.
У [3] Козлов је доказао да је функција прага $1/n$, ако је G коначно поље. Његов доказ је релативно једноставан и важи за свако d, али важи само за коначно поље.
Један од довољних услова да горња хомологија нестаје и за $G = \mathbb{Z}$ је да се комплекс Y димензије d може колапсирати у комплекс димензије $d-1$, и у том случају комплекс називамо колапсибилним. На питање када је дводимензионални комплекс колапсибилан дали су одговор Коста, Фабер и Каплер у [5]. Они су доказали да, за $p \ll n^{-1}$, симплицијални комплекс $Y \in Y_{n,p}$ а.с.с. колапсира у граф, те да за $p \geq cn^{-1}$, $c > 3$ $h_2(Y) > 0$ а.с.с., тако да симплекс није колапсибилан. Случај $p \ll n^{-1}$ разматрамо у овом дијелу, док ћемо случај $p \gg (3+\varepsilon)n^{-1}$ разматрати касније, када будемо говорили о произвољној димензији d.
На питање када је $Y(n,p,d)$ колапсибилан за прозивољно d су дали одговор Аронстал, Линиал, Лузак и Мешулам у [6]. У овом дијелу ћемо говорити о томе када је дводимензионални комплекс колапсибилан, док ћемо случај $d > 2$ разматрати касније.

2.2.1 Нестајање горње хомологије у комплексу $Y_{n,p}$

Иако је Козлов у своме раду разматрао нестајање горње хомологије $H_d(Y, G)$ за d димензионалан случајан комплекс и прозивољну коначну Абелову групу G, ми ћемо се једноставности ради ограничити на случај $d = 2$ и $G = \mathbb{Z}_2$. Случај $d > 2$ и G коначна Абелова група се раде аналогно, али су технички захтјевнији.
Да бисмо доказали да је $p = \frac{1}{n}$ функција прага за нестајање горње хомологије треба да докажемо два тврђења: да за $p \gg n^{-1}$ горња хомологија асимптотски скоро сигурно није нула, те да за $p \ll n^{-1}$ горња хомологија скоро сигурно нестаје.

Теорема 2.3. *Нека је $p = \frac{\omega(n)}{n}$, при чему $\omega(n) \to \infty$. Тада*

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, G) = 0) \to 0,$$

за Абелову групу G.

Теорема 2.4. *Нека је $p = \frac{\omega(n)}{n}$, при чему $\omega(n) \to 0$. Тада*

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, \mathbb{F}_2) \neq 0) \to 0.$$

Примијетимо да је $H_2(Y, G) \neq 0$ ако Y садржи границу тетраедра, четвородимензионалног симплекса, тако да је за теорему 2.3 довољно доказати да $Y_{n,p}$ а.с.с. садржи границу тетраедра.

Доказ теореме 2.3. Нека су $\tau_1, \dots, \tau_{\binom{n}{4}}$ сви четвородимензионални симплекси на скупу чворова $\{1, \dots, n\}$. Са A_i означимо догађај да $Y_{n,p}$ садржи границу тетраедра τ_i. Нека је I_i индикатор догађаја A_i, а $X = \sum_i I_i$ случајна промјењива која означава број тетраедара τ таквих да $\partial\tau \in Y_{n,p}$. Сада имамо

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, G) = 0) \leq \mathbb{P}(X = 0).$$

Како је $X = \sum\limits_i I_i$, то је

$$\mathbb{E}\,(X) = \binom{n}{4} p^4 = \Theta(n^4 p^4) = \Theta(\omega(n)^4) \to \infty.$$

Догађаји A_i и A_j су независни ако тетраедри τ_i и τ_j немају заједничку страну, тако да је, по леми 1.6 довољно доказати да је

$$\sum_{i \sim j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] = o(\mathbb{E}^2[X])$$

гдје је $i \sim j$ ако тетраедри τ_i и τ_j имају заједничку страну. Како различити тетраедри могу имати највише једну заједничку страну, то за $i \sim j$ имамо

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = p^7.$$

Број парова i, j тако да τ_i и τ_j имају заједничку страну је $\binom{n}{5}\binom{5}{3}$ те имамо да је

$$\sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \binom{n}{5}\binom{5}{3} p^7 = \Theta\left(\frac{\omega^7(n)}{n^2}\right) = o(\mathbb{E}^2[X]).$$

□

Претпоставимо да је $H_2(Y, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. Тада постоји циклус $\tau \in Z_2(Y)$ такав да је $\tau \neq 0$. За произвољан троугао $t \in \binom{[n]}{3}$ са A_t означимо догађај да постоји циклус τ такав да је $t \in \operatorname{supp} \tau$.

Јасно је да је

$$\mathbb{P}\left(H_2(Y_{n,p},\mathbb{Z}_2)\neq 0\right)\leq \sum_{t\in\binom{[n]}{3}}\mathbb{P}(A_t)\leq n^3\mathbb{P}(A_{t_0})$$

гдје је t_0 троугао $\{1,2,3\}$.
Нека је τ циклус такав да $t_0\in \text{supp }\tau$. Тада потоји i тако да троугао $t_i\in\text{supp }\tau$, гдје је t_i троугао са чворовима $1,2,i$, $4\leq i\leq n$.
Одавде добијамо да постоји ланац τ' такав да $t,t'\notin \text{supp }\tau'$ и $\text{supp }\partial(t+t')\subset \text{supp }\partial\tau'$.
Суштина доказа теореме 2.4 је у следећој леми која ће нам дати горњу оцјену вјероватноће претходно описаног догађаја.

Дефиниција 1. *Нека је $S\subset\binom{[n]}{3}$, $\lambda\in\mathbb{N}_0$ и $\sigma\in C_1(\Delta_{n-1})$ ланац у Δ_{n-1}. Са $A_{\sigma,S,\lambda}$ означимо догађај да, за $Y\in Y_{n,p}$ постоји ланац $\tau\in C_2(Y)$ такав да је*

(i) supp $\tau\cap S=\emptyset$;

(ii) supp $\sigma\subset$ supp $\partial\tau$;

(iii) $|$supp $\sigma|\geq 3(\lambda-1)$.

Лема 2.4. *Нека је $\lambda\geq 0$ цијели број и $0\leq p\leq 1$ тако да је $np<1$. Тада је*

$$\mathbb{P}\left(A_{\sigma,S,\lambda}\right)\leq\frac{3^\lambda\lambda!p^\lambda}{(1-pn)^\lambda}.$$

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по λ.
За $\lambda=0$ вриједност израза на десној страни је 1, тако да тврђење важи тривијално.
Нека је $\lambda>0$. Тврђење доказујемо опадајућом индукцијом по S.
Нека је $S=\binom{[n]}{3}$ и $Y\in Y_{n,p}$. Тада за свако $\tau\in C_2(Y)$ имамо $\text{supp }\tau=\emptyset$, тј. $\tau=0$, те имамо да је $\text{supp }\sigma=0$. Али, то је немогуће због услова $|\text{supp }\sigma|>3(\lambda-1)$, те имамо да је $A_{\sigma,S,\lambda}=\emptyset$, тј. $\mathbb{P}(A_{\sigma,S,\lambda})=0$, те тврђење важи.
Претпоставимо да имамо произвољно $S\subset\binom{[n]}{3}$, и нека $Y\in A_{\sigma,S,\lambda}$. Како је $|\text{supp }\sigma|>3(\lambda-1)\geq 0$, то постоји грана $e\in\text{supp }\sigma$. Нека је $\tau\in C_2(Y)$ ланац као у дефиницији 1. Тада постоји троугао $t\in\binom{[n]}{3}\setminus S$, такав да је $e\in\partial t$.
Са Ω означимо скуп свих троуглова $t\in\Delta_{n-1}(2)$ таквих да $e\in t$. Јасно је да је $|\Omega|=n-2$.
Нека је

$$A=\{t\in\Omega\setminus S\mid |\text{supp }(\sigma+\partial t)|>3(\lambda-1)\}$$
$$B=\{t\in\Omega\setminus S\mid |\text{supp }(\sigma+\partial t)|\leq 3(\lambda-1)\}$$

Тада је

$$\mathbb{P}(A_{\sigma,S,\lambda}) \leq \sum_{t\in A} p\,\mathbb{P}\left(A_{\sigma+\partial t, S\cup\{t\},\lambda}\right) + \sum_{t\in B} p\,\mathbb{P}\left(A_{\sigma+\partial t, S\cup\{t\},\lambda_t}\right),$$

гдје је λ_t изабран тако да је $|\text{supp }(\sigma+\partial t)| > 3(\lambda_t - 1)$.
Нека је $t \in B$. Тада, поред e, постоји још једна грана e' троугла t таква да $e' \in \text{supp }\sigma$. Троугао t је на јединствен начин одређен гранама e и e', тако да добијамо да је $|B| \leq |\text{supp }\sigma| - 1$.
Сем тога, имамо да је

$$|\text{supp }(\sigma+\partial t)| \geq |\text{supp }\sigma| - |\text{supp }\partial t| = |\text{supp }\sigma| - 3 > 3(\lambda-1) - 3 = 3(\lambda-2),$$

па за λ_t можемо узети $\lambda - 1$.
Поред тога, како је $3(\lambda-1) \geq |\text{supp }\sigma| - 2$, добијамо да је $|\text{supp }\sigma| \leq 3\lambda$, те је $|B| \leq 3\lambda$.
Сада имамо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{\sigma,S,\lambda}) &\leq \sum_{t\in A} p\mathbb{P}(A_{\sigma+\partial t, S\cup\{t\},\lambda}) + \sum_{t\in B} p\mathbb{P}(A_{\sigma+\partial t, S\cup\{t\},\lambda-1}) \leq \\ &\leq pn\frac{3^\lambda p^\lambda \lambda!}{(1-pn)^\lambda} + p\cdot 3\lambda \frac{3^{\lambda-1}p^{\lambda-1}(\lambda-1)!}{(1-pn)^{\lambda-1}} = \\ &= \frac{3^\lambda p^\lambda \lambda!}{(1-pn)^\lambda}.\end{aligned}$$

□

Доказ теореме 2.4. Јасно је да је

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, \mathbb{Z}_2) \neq 0) \leq \sum_{t\in\binom{[n]}{3}} \mathbb{P}(A_t)$$

гдје смо са A_t означили догађај да Y садржи циклус $\tau \in Z_2(Y)$ такав да је $t \in \text{supp }\tau$. Нека је t_0 троугао $\{1,2,3\}$ Тада, због симетрије, имамо $\mathbb{P}(A_t) = \mathbb{P}(A_{t_0})$ за сваки троугао t, те имамо

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, \mathbb{F}_2) \neq 0) \leq n^3 \mathbb{P}(A_{t_0}).$$

Претпоставимо да постоји $\tau \in Z_2(Y)$ такав да $t_0 \in \text{supp }\tau$. Тада постоји још један троугао t_i, $i \geq 4$, са чворовима $\{1,2,i\}$ такав да $t_i \in \text{supp }\tau$.
Нека је $Y \in Y_{n,p}$ симплицијални комплекс који припада догађају A_{t_0}. Тада су t_0 и t_i симплекси у Y. Сем тога, постоји ланац $\tau' \in C_2(Y)$ такав да $t_0, t_i \notin \text{supp }\tau'$ такав да је $\text{supp }\partial(t_0+t_i) \subset \partial\tau'$. Како је $|\text{supp }\partial(t_0+t_i)| = 4 > 3\cdot 1$, добијамо да је $Y \in A_{\partial(t_0+t_i),\{t_0,t_i\},2}$.
Одавде добијамо да је

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, \mathbb{Z}_2) \neq 0) \leq n^3 \mathbb{P}(A_{t_0}) \leq n^3 \sum_{i=4}^{n} p^2 \mathbb{P}(A_{\partial(t_0+t_i),\{t_0,t_i\},2}).$$

Како је, према претходној леми, $\mathbb{P}(A_{\sigma,S,2}) \leq \frac{18p^2}{(1-pn)^2}$, добијамо

$$\mathbb{P}(H_2(Y_{n,p}, \mathbb{F}_2) \neq 0) \leq n^4 p^4 \frac{18}{(1-pn)^2} = 18 \frac{\omega^4(n)}{(1-\omega(n))^2} = o(1).$$

□

2.2.2 Подкомплекси $Y_{n,p}$

Када говоримо о колапсибилности комплекса, главна препрека је постојање језгра, подкомплекса у коме је свака грана степена барем два. Да бисмо доказали да је комплекс колапсибилан, доказаћемо да је вјероватноћа да садржи језгро мала.
У овом дијелу разматрамо вјероватноћу да $Y_{n,p}$ садржи S, гдје је S неки коначан дводимензионални симплицијални комплекс.
За комплекс Y кажемо да садржи S, ако постоји симплицијално улагање $S \hookrightarrow Y$.
Понекад желимо да смјестимо S у Y тако да очувамо симплексе максималне димензије, али нас не занима шта се дешава са симплексима мање димензије. У том случају посматрамо симплицијалну имерзију $S \looparrowright Y$.
Испоставља се да, као и код графова, функција прага за особину $S \subset Y_{n,p}$ зависи од густине комплекса, при чему је густина комплекса однос броја фацета и броја чворова.

Лема 2.5. *Нека је S 2-димензионални симплицијални комплекс са v тјемена и f троуглова. Тада је*

$$\mathbb{P}(S \looparrowright Y_{n,p}) \leq n^v p^f.$$

Доказ. Нека је дата функција $g : V(S) \to \{1, \dots, \}$, таква је ињективна на $2-$симплексима у S. Вјероватноћа да је g имерзија је p^f. Број функција из S у $\{1, 2, \dots, n\}$ је n^v, тако да имамо

$$\mathbb{P}(S \looparrowright Y_{n,p}) \leq \sum_g \mathbb{P}(g \text{ је имерзија }) \leq n^v p^f.$$

□

Одавде видимо да, ако је $p \ll n^{-\frac{v}{f}}$ тада S скоро сигурно не допушта имерзију у $Y_{n,p}$, што нас наводи да уведемо следећу нумеричку инваријанту комплекса.

Дефиниција 2. *Нека је S непразан 2-димензионални симплицијални комплекс. Тада са $\mu(S)$ означавамо*

$$\mu(S) = \frac{v_S}{f_S},$$

гдје је v_S број чворова, а f_S број троуглова симплицијалног комплекса S.

Примијетимо да, ако S допушта имерзију, тада је допушта и сваки његов подкопмплекс, тако да, ако је $p \ll n^{-\mu(S')}$ за неко $S' \subset S$, онда S скоро сигурно не допушта имерзију.

Дефиниција 3. *Нека је S непразан 2-димензионални симплицијални комплекс. Тада $\mu'(S)$ дефинишемо као*

$$\mu'(S) = \min_{S' \subset S} \mu(S')$$

гдје је минимум по свим подкомплексима $S' \subset S$, или, еквивалентно, по свим чистим подкомплексима $S' \subset S$.

Примијетимо да је инваријанта μ' монотоно опадајућа.

Теорема 2.5. *Нека је S 2-димензионални симплицијални комплекс.*

(i) Ако је $p \ll n^{-\mu'(S)}$ тада S асимптотски скоро сигурно не допушта симплицијалну имерзију у $Y_{n,p}$.

(ii) Ако је $p \gg n^{-\mu'(S)}$ тада S асимптотски скоро сигурно допушта симплицијално улагање у $Y_{n,p}$.

Доказ. (i) Нека је $p = \omega(n) n^{-\mu'(S)} \ll n^{-\mu'(S)}$. Тада имамо $\omega(n) \to 0$. Нека је $S' \subset S$ такав да је $\mu(S') = \mu'(S)$. Тада имамо да је

$$\mathbb{P}(S \looparrowright Y_{n,p}) \leq \mathbb{P}(S' \looparrowright Y_{n,p}) \leq n^{v_{S'}} p^{f_{S'}} = (\omega(n))^{f_{S'}} \to 0.$$

(ii) Нека је $p = \omega(n) n^{-\mu'(S)} \gg n^{-\mu'(S)}$. Тада имамо $\omega(n) \to \infty$.

У овом случају користимо други момент, тачније лему 1.6. Нека је $v = v_S$, $f = f_S$ респективно број чворова, односно троуглова у комплексу S.

Смплицијално улагање $S \hookrightarrow Y_{n,p}$ је дефинисано ињективним пресликавањем $g : V(S) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, гдје је $V(S)$ скуп чворова комплекса S.

За ињективно пресликавање g са I_g означимо индикатор догађаја A_g, g је улагање S у $Y_{n,p}$.

Нека је X случајна промјењива која означава број симплицијалних улагања. Тада је $X \sum_g I_g$.

Ињективно пресликавање $g : V(S) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ индукује комплекс $g(S)$ на $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тада је $I_g = 1$ ако и само ако су у $Y_{n,p}$ изабрани сви троуглови који су у $g(S)$, те је $\mathbb{E}(I_g) = p^{f_S}$.

Број ињективних пресликавања скупа $V(S)$ у $\{1, 2, \ldots, n\}$ је $\Theta(n^{v_S})$, тако да имамо да је

$$\mathbb{E}(X_S) = \Theta(n^{v_S} p^{f_S}) = \Theta(n^{f_S(\mu(S) - \mu'(S))} \omega^{f_S}) \to \infty.$$

Догађаји A_{g_1} и A_{g_2} су независни ако комплекс $g_1(S) \cap g_2(S)$ нема ни једног трогула. У супротном постоје комплекси $H = g_1(H_1) = g_2(H_2) = g_1(S) \cap g_2(S)$, тако да је $f_h \geq 1$, при чему су H_1 и H_2 подкомплекси S изоморфни комплексу H. Са $g_1 \sim g_2$ означимо да догађаји A_{g_1}, A_{g_2} нису независни.

Да бисмо доказали да је $\mathbb{P}(X = 0) = o(1)$, према леми 1.6 довољно је доказати да је

$$\sum_{g_1 \sim g_2} \mathbb{P}[A_g \cap A_{g'}] = o(\mathbb{E}^2(X)),$$

тј. да је

$$\sum_{H_1, H_2} \sum_{g_2, g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = o\left(\mathbb{E}^2(X)\right),$$

при чему прва сума иде по свим паровима $H_1, H_2 \subset S$, $H_1 \simeq H_2 \simeq H$, $f_h \geq 1$, а друга по свим паровима пресликавања g_1, g_2 таквим да је $g_1(S) \cap g_2(S) = g_1(H_1) = g_2(H_1) = H$.

Како је S коначан, то има коначно моного парова H_1, H_2, те је довољно доказати да је за сваки пар H_1, H_2

$$\mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = o\left(\mathbb{E}^2(X)\right)$$

гдје је ово горе описана сума.

Нека је $H_1 \simeq H_2 \simeq H$ један такав пар. Како $g_1(S) \cup g_2(S)$ има $2v_S - v_H$ чворова и $2f_S - f_H$ троуглова, то је вјероватноћа

$$\mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = p^{2f_S - f_H},$$

а број функција g_1, g_2 које одговарају овом пару је $\Theta\left(n^{2v_S - v_H}\right)$. Сада добијамо

$$\frac{\sum_{g_1, g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2})}{\mathbb{E}^2(X)} = \Theta\left(\frac{n^{2V_S - v_H} p^{2f_S - f_H}}{n^{2v_S} p^{2f_S}}\right) = \Theta(n^{-v_H} p^{-f_H}) = o(1).$$

□

2.2.3 Колапсибилност $Y_{n,p}$

Нека је S произвољан дводимензионални симплицијални комплекс. Ако је S колапсибилан, тада $H_2(Y, G) = 0$ за произвољну групу G.
Симплицијални комплекс није колапсибилан ако и само ако садржи језгро. Језгро смо дефинисали као симплицијални комплекс без слободних страна, али без умањења општости можемо да претпоставимо да је језгро чист и јако повезан.

Лема 2.6. *Нека је S дводимензионални симплицијални комплекс који је језгро. Тада је $\mu'(S) \leq \mu(S) \leq 1$.*

Доказ. Нека је S јако повезан и чист комплекс. Са v_S, e_S, f_S означимо број чворова, грана и троуглова у S. Како је S језгро, то се свака грана налазу ы бар 2 троугла, тако да добијамо да је $2e_S \leq 3f_S$. Сем тога, сваки чвор мора бити инцидентан са барем 3 гране, тако да добијамо да је $3v \leq 2e$, тј. имамо $3v \leq 3f$, што нам даје

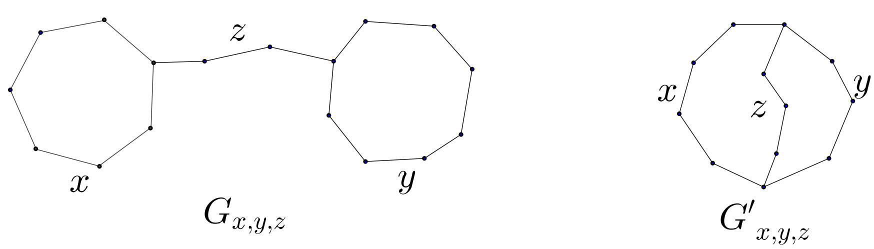
$$\mu(S) = \frac{v_S}{f_S} \leq 1.$$

□

Одавде добијамо да, за произвољно језгро S и $p \ll n^{-1}$ $Y_{n,p}$ не садржи S. Међутим, да би комплекс био колапсибилан нама треба да он не садржи ни једно језгро. Испоставља се да постоји фамилија комплекса $\mathcal{F}$ таква да, ако комплекс Y није колапсибилан онда он допушта симплицијалну имерзију једног од комплекса из $\mathcal{F}$, а у случају $p \ll n^{-1}$ вјероватноћа да $Y_{n,p}$ садржи бар један комплекс из $\mathcal{F}$ тежи ка нули.

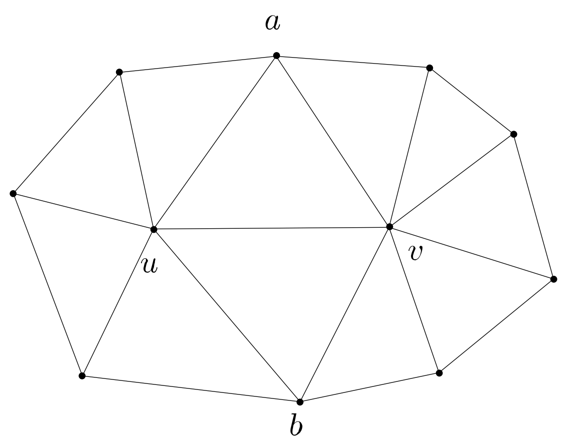
Теорема 2.6. *За* $p \ll n^{-1}$ *комплекс* $Y_{n,p}$ *је колапсибилан а.с.с.*

Доказ. Како је $p \ll n^{-1}$, то је $p = n^{-1}\omega(n)$, при чему $\omega(n) \to 0$.
Нека је $Y \in Y_{n,p}$, такав да Y није колапсибилан. Тада Y садржи минимално језгро, тј. јако повезан, чист подкомплекс S такав да је свака грана $e \in S$ садржана у бар 2 троугла.
Претпоставимо да постоји грана у S која је садржана у бар 3 троугла, и нека је v чвор који садржи ту грану. Посматрајмо комплекс $Lk(v)$. Како је свака грана у v степена барем 2, то је сваки чвор у графу $Lk(v)$ степена барем 2, и при томе је један степена барем 3. Тада постоје x, y, z такви да $Lk(v)$ садржи један од графова $G_{x,y,z}$, $G'_{x,y,z}$ датих на слици 2.1, при чему бројеви x, y, z означавају број грана у одговарајућем дијелу.



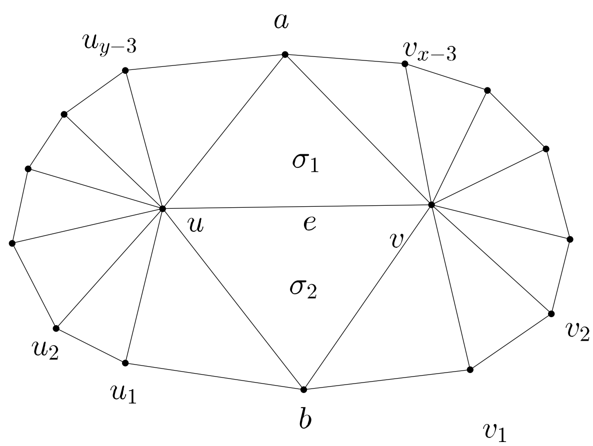
Слика 2.1: Графови $G_{x,y,z}$ и $G'_{x,y,z}$

Са $S_{x,y,z}$, $S'_{x,y,z}$ означимо конусе над графовима $G_{x,y,z}$, $G'_{x,y,z}$. Ако $Lk(v)$ садржи један од ових графова, тада Y садржи један од комплекса $S_{x,y,z}$ или $S'_{x,y,z}$. Лако се види да $S_{x,y,z}$ и $S'_{x,y,z}$ садрже $x+y+z$ чворова и исто толико троуглова, при чему је $x+y+z \geq 4$.
Претпоставимо да је свака грана у S степена 2.
Нека је $L_{x,y}$ комплекс на слици, при чему је чвор u инцидентан са x грана, чвор v са y, $x, y \geq 3$ и $\max\{x, y\} \geq 4$.



Слика 2.2: $L_{x,y}$

Није тешко видјети да $L_{x,y}$ има $x+y-2$ троуглова и исто толико чворова. Докажимо да постоје x, y тако да $L_{x,y} \looparrowright S$.
Нека је $e = uv$ грана у S, и нека су $\sigma_1 = uva$, $\sigma_2 = uvb$ два симплекса са којима је она инцидентна. Посматрајмо компоненту графа $Lk(u)$ у којој се налазе чворови a и b. Та компонента је циклус $a, v, b, v_1, v_2, \ldots, v_{x-3}$ дужине x, за неко $x \geq 3$. Слично, компонента графа $Lk(u)$ која садржи чворове a и b је циклус $a, u, b, u_1, \ldots, u_{y-3}$, за неко $y \geq 3$. Неки од чворова u_i, v_j могу бити исти, али троуглови uu_iu_{i+1} и vv_iv_{i+1} су различити, иначе би грана uv имала степен барем од 3. На слици 2.3 се јасно види имерзија $L_{x,y} \looparrowright S$.
Из претходно разматраног слиједи да, ако Y није колапсибилан, тада он садржи $S_{x,y,z}$ или $S'_{x,y,z}$ за неке x, y, z, или постоји имерзија $L_{x,y}$ у Y, за неке x, y, те добијамо



Слика 2.3: $L_{x,y} \not\hookrightarrow S$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Y \text{ није колапсибилан}\right) \leq \\
&\leq \sum_{x,y,z} \mathbb{P}(S_{x,y,z} \hookrightarrow Y \text{ или } S'_{x,y,z} \hookrightarrow Y) + \sum_{x,y} \mathbb{P}(L_{x,y} \not\hookrightarrow Y) \leq \\
&\leq \sum_{f\geq 4} \sum_{x+y+z=f} 2n^f p^f + \sum_{f\geq 4} \sum_{x+y-2=f} n^f p^f \leq \\
&\leq \sum_{f\geq 4} 2f^2(\omega(n))^f + \sum_{f\geq 4} f(\omega(n))^f \leq \sum_{f\geq 4} (4\omega(n))^f = \frac{(4\omega(n))^4}{1-4\omega(n)} = o(1).
\end{aligned}
$$

□

За $p \ll n^{-1}$ знамо да је $Y \in Y_{n,p}$ колапсибилан а.с.с., али не знамо колико нам корака треба да Y колапсира у граф. Ако захтијевамо коначно много корака k (при чему k не зависи од n) онда нам $p \ll n^{-1}$ није довољно, али за свако $\varepsilon > 0$, ако је $p \ll n^{-1-\varepsilon}$, тада постоји k такво да Y колапсира а.с.с. у највише k корака.

Нека је S симплицијални комплекс. За два троугла смо рекли да су сусједни ако садрже заједничку страну, а удаљеност између троуглова смо дефинисали као удаљеност у графу G_S у коме су чворови троуглови, а гране парови троуглова који су сусједни.

За $2-$комплекс Y кажемо да је колапсибилан у највише k корака (или k коплапсибилан) ако је $R_k(Y)$ граф, а да је колапсибилан у тачно k корака ако је $R_{k-1}(Y)$ димензије 2, а $R_k(Y)$ је граф.

За $2-$симплекс $\sigma \in Y$ дефинишимо

$$D_Y(\sigma) = \sup\{i : \sigma \in R_i(Y)\},$$

што представља број корака колико σ "опстаје", тј. након $i+1$ корака σ нестаје.
Лако се види да Y колапсира у највише $k+1$ корака акко је $D_Y(\sigma) \leq k$ за свако σ.
Ако је $D_Y(\sigma) = k$, то постоји низ 2-симплекса $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k = \sigma$ који задовољавају сљедеће особине:

(i) Симплекс σ_{i-1} нестаје у i-том колапсу;

(ii) σ_i је сусједан са σ_{i+1} за $0 \leq i < k$, тј. имају заједничку грану e_i која постаје слободна након $i-$тог колапса.

Овај низ називамо *пут колапса* за симплекс σ.
Посматрајмо све овакве путеве. Са $A_Y(\sigma)$ означимо све слободне гране комплекса Y, такве да припадају σ_0 за неки од описаних путева.
Ако имамо комплекс Y и $\sigma \in Y$, $D_Y(\sigma) < \infty$, тада, да бисмо "повећали" $D_Y(\sigma)$, тј. да бисмо добили комплекс $Y' \supset Y$ такав да је $D'_Y(\sigma) \geq D_Y(\sigma)+1$, потребан и довољан услов је да додамо нове 2-симплексе $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ такве да за сваку грану $e \in A_Y(\sigma)$ постоји i, тако да $e \in \sigma_i$.
Нека су $k \geq 0$ и $r \geq 2$ цијели бројеви. Тада са $\mathcal{L}_{k,r}$ означимо фамилију свих (до на изоморфизам) дводимензионалних симплицијалних комплекса који задовољавају следеће особине

(i) Сваки комплекс $S \in \mathcal{L}_{k,r}$ је коначан, јако повезан, чист и степена највише r.

(ii) Постоји $2-$симплекс $\sigma_* \in S$ такав да за сваки $2-$симплекс $\sigma \in S$ вриједи $d_S(\sigma_*, \sigma) \leq k$. Симплекс σ_* називамо *центар*.

(iii) S је језгро или $D_S(\sigma_*) = k$.

Јасно је да је $\mathcal{L}_{k,r}$ коначан за свако k и r, и да је $\mathcal{L}_{k,r} \subset \mathcal{L}_{k,r+1}$.

Лема 2.7. *Нека је Y $2-$димензионални комплекс степена највише r, и нека је σ троугао у Y такав да је $D_Y(\sigma) = k$. Тада постоји симплицијални комплекс $S \in \mathcal{L}_{k,r}$ и симплицијално улагање $S \hookrightarrow Y$ такав да се центар σ_* слика у σ.*

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по k. За $k = 0$ имамо само један комплекс у $\mathcal{L}_{0,r} = \{\sigma_*\}$, тако да је тврђење очигледно.
Претпоставимо да је $k \geq 1$, и претпоставимо да је тврђење тачно за све $k' < k$. Посматрајмо $Y' = R(Y)$. Јасно је да је $\sigma \in Y'$, $D_{Y'}(\sigma) = k-1$ и да је Y' степена највише r.
Корситећи индуктивну претпоставку добијамо да постоји симплицијални комплекс $S' \in \mathcal{L}_{k-1,r}$ и симплицијално улагање $S' \hookrightarrow Y'$ такво да се центар S' слика у σ.

Посматрајмо $e \in A_{S'}(\sigma)$. Ако је e слободна грана у Y', тада постоји σ_e, слободан троугао у Y такав да $e \in \sigma_e$. Ако e није слободна грана у Y', тада постоји троугао $\sigma_e \in Y'$ такав да $e \in \sigma_e$ и $\sigma_e \notin S'$.
Комплекс S дефинишемо као

$$S = S' \cup \bigcup_{e \in A_{S'}(\sigma)} \sigma_e.$$

Како је $S' \in \mathcal{L}_{k-1,r}$ то је и S коначан, чист и јако повезан. Максималан степен у комплексу Y је највише r, па је и максималан степен у S највише r.
Како је $D_{S'}(\sigma) = k-1$, то је $D_S(\sigma) = k$. Сем тога, за све $\sigma' \in S'$ важи $d_S(\sigma', \sigma) = d_{S'}(\sigma', \sigma) \leq k-1$. За све $\sigma' \in S \setminus S'$ имамо $\sigma'' \in S'$ тако да је σ' сусједан са σ'', па добијамо $d_S(\sigma', \sigma) \leq d_S(\sigma'', \sigma) + 1 \leq k$.
Одавде добијамо да је $S \in \mathcal{L}_{k,r}$, и да је σ центар S.

□

Следећа лема своди испитивање k колапсибилности на испитивање да ли комплекс садржи подкомплекс из $\mathcal{L}_{k,r}$.

Лема 2.8. *Симплицијални комплекс Y степена највише $r \geq 2$ није k колапсибилан акко постоји комплекс $S \in \mathcal{L}_{k,r}$ такав да S допушта симплицијално улагање у Y.*

Доказ. Како комплекси из $\mathcal{L}_{k,r}$ нису $k-$колапсибилн слиједи да, ако Y садржи један од њих онда ни Y није $k-$колапсибилан.
Претпоставимо да Y није $k-$колапсибилан. Можемо претпоставити да је Y јако повезан, иначе можемо да се ограничимо на једну компоненту од Y. Посматрајмо низ комплекса $Y, R_1(Y), R_2(Y), \ldots, R_k(Y)$. Како Y није колапсиблиан у k корака, то $R_k(Y)$ није граф. Разликујемо два случаја, у зависности од тога да ли је $R_k(Y)$ језгро или не.

(i) Претпоставимо да $R_k(Y)$ није језгро, тј. да постоји троугао $\sigma \in R_k(Y)$ који је слободан. Тада је $D_Y(\sigma) = k$, па према леми 2.7 постоји $S \in \mathcal{L}_{k,r}$ такав да S допушта симплицијално улагање у Y, при чему се центар слика у σ.

(ii) Претпоставимо да је $R_k(Y)$ језгро. Нека је $\sigma_* \in R_k(Y)$. Ако за свако $\sigma \in R_k(Y)$ важи $d_{R_k(Y)}(\sigma_*, \sigma) \leq k$, тада имамо да $R_k(Y) \in \mathcal{L}_{k,r}$. Ако не, тада са $Z \subset R_k(Y)$ означимо комплекс који се састоји од троуглова σ таквих да је $d_{R_k(Y)}(\sigma, \sigma_*) \leq k$.

Ако је Z језгро, тада $Z \in \mathcal{L}_{k,r}$.

У супротном, из дефиниције Z и чињенице да је $R_k(Y)$ језгро добијамо да је $d_Z(\sigma_*, \sigma) = k$ за све слободне симплексе у Z, одакле добијамо да $\sigma_* \in R_k(Z)$. Ако $R_k(Z)$ није језгро, тада тврђење слиједи из (i).

Ако $R_k(Z)$ јесте језгро, тада, како је $R_k(Z)(\sigma_*, \sigma) \leq k$ за свако $\sigma \in R_k(Z)$, добијамо да је $R_k(Z) \in \mathcal{L}_{k,r}$.

$\square$

Ова лема нам је свела проблем k колапсибилности на то да ли Y садржи комплекс из једне од класа $\mathcal{L}_{k,r}$ за неко r. Иако имамо бесконачно много класа, за сваку класу имамо коначно много комплекса, тако да, ако знамо да је максималан степен највише r, за неко r, тада се проблем своди на то да ли симплицијални комплекс садржи један од коначно много комплекса.

Дефиниција 4. *Нека је $\mu'_{k,r}$ највећа вриједност $\mu'(S)$ за све комплексе из фамилије $\mathcal{L}_{k,r}$, тј.*

$$\mu'_{k,r} = \max_{S \in \mathcal{L}_{k,r}} \mu'(S) \in \mathbb{Q}.$$

Теорема 2.7. *Нека је $Y \in Y_{n,p}$ случајан 2-комплекс.*

(i) Ако, за неко $r \geq 2$ и $k \geq 1$ важи

$$p \ll n^{-1-\frac{2}{r+1}} \quad \text{и} \quad p \ll n^{-\mu'_{k,r}}$$

тада Y колапсира у граф у највише k корака а.с.с.

(ii) Ако за неко $r \geq 2$ и $k \geq 1$ важи $p \gg n^{-\mu'_{k,r}}$ тада Y а.с.с. није $k-$колапсибилан.

Доказ. (i) Нека су $k \geq 1$, $r \geq 2$ и нека је p таква да је $p \ll n^{-1-2/(r+1)}$ и $p \ll n^{-\mu'_{k,r}}$.

Доказаћемо да је

$$\mathbb{P}(\Delta(Y) > r | Y \in Y_{n,p}) = o(1),$$

гдје је $\Delta(Y)$ максималан степен од Y.

Нека је e произвољна грана у $Y_{n,p}$. Тада је $d_Y(e)$, степен гране e, случајна промјењива. Како је

$$\mathbb{P}(d_Y(e) \geq r+1) \leq \binom{n-2}{r+1} p^{r+1} \leq (np)^{r+1},$$

то је

$$\mathbb{P}(\Delta(Y) \geq r+1) \leq \binom{n}{2} (np)^{r+1} \leq \left(n^{1+\frac{2}{r+1}} p\right)^{r+1} = o(1).$$

За произвољно $S \in \mathcal{L}_{k,r}$ имамо да је $\mu'(S) \leq \mu'_{k,r}$, па како је $p \ll n^{-\mu'_{k,r}} \leq n^{-\mu'(S)}$ то из теореме 2.5 слиједи да је

$$\mathbb{P}(S \hookrightarrow Y_{n,p}) = o(1).$$

Фамилија $\mathcal{L}_{k,r}$ је коначна, тако да имамо

$$\mathbb{P}(Y \text{ није } k \text{ колапсибилан }) \leq \mathbb{P}(\Delta(Y) > r) + \sum_{S \in \mathcal{L}_{k,r}} \mathbb{P}(S \hookrightarrow Y) = o(1).$$

(ii) Како је $p \gg n^{-\mu'_{k,r}}$ то постоји $S \in \mathcal{L}_{k,r}$ такав да је $p \gg n^{-\mu'(S)}$, па према теореми 2.5 слиједи да Y а.с.с. садржи S, те није k колапсибилан.

$\square$

Проблем са овом теоремом је што не знамо тачну оцјену параметра $\mu'_{k,r}$. Следеће двије леме нам дају горње и доње ограничење $\mu'_{k,r}$ које зависи само од k.

Лема 2.9. *Нека је $S \in \mathcal{L}_{k,r}$, за неко $k \geq 0$, $r \geq 2$. Тада је*

$$\mu'(S) \leq 1 + \frac{2}{k+1}.$$

Доказ. Ако је S језгро, тада тврђење слиједи из леме 2.6.
Ако није, тада постоји пут колапса $\sigma_0, \ldots, \sigma_k = \sigma_*$ за центар σ_*. Нека је

$$S' = \cup_{i=0}^{k} \sigma_i.$$

Како троуглови σ_i и σ_{i-1} имају заједничку грану, то S' има највише $k+3$ чворова, и тачно $k+1$ троугао, па је

$$\mu'(S) \leq \mu(S) \leq \frac{k+3}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+2}.$$

$\square$

Посматрајмо низ 2-дименизоналних симплицијалних комплекса $S_0, S_1, S_2 \ldots$ дефинисаних на следећи начин. Комплекс S_0 се састоји из једног троугла. Комплекс S_k добијамо из комплекса S_{k-1} тако што на сваку слободну грану у S_k додамо нови троугао, тј. за сваку слободну грану e додамо нови чвор v_e и троугао ev_e.
Лако се види да $S_k \in \mathcal{L}_{k,2}$. Сем тога, комплекс S_k има $v_S = 3 \cdot 2^k$ чворова и $f_S = 3 \cdot 2^k - 2$ троуглова, тако да је $\mu(S) = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1} - 1}$. Доказаћемо да за сваки подкомплекс $S' \subset S_k$ имамо $\mu(S') \geq \mu(S)$.
Нека је v', f' број чворова и троуглова у S'. Индукцијом по k ћемо доказати да је $v' - f' \geq 2$. Нека је v'_1 број чворова S' који се налазе у S_{k-1}, $v'_2 = v' - v'_1$ број чворова S' који се налазе у $S_k \setminus S_{k-1}$, f'_1 број троуглова у S' који се налазе у S_{k-1} и f'_2 број троуглова у S' који припадају $S_k \setminus S_{k-1}$. Како постоји $1-1$ пресликавање између тоуглова и чворова у $S_k \setminus S_{k-1}$, то имамо да је $v'_2 \geq f'_2$. Како је, по индуктивној претпоставци $v'_1 - f'_1 \geq 2$, добијамо да је

$$v' - f' = v'_1 - f'_1 + v'_2 - f'_2 \geq v'_1 - f'_1 \geq 2.$$

Сада имамо да је

$$\mu(S') - \mu(S) = \frac{v'}{f'} - \frac{v_S}{f_S} \geq \frac{2+f'}{f} - \frac{2+f_S}{f_S} = \frac{2}{f'} - \frac{2}{f} \geq 0.$$

Одавде слиједи да је за $S_k \in \mathcal{L}_{k,2}$ $\mu'(S_k) = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1} - 1}$, те је

$$1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1} - 1} \leq \mu_{k,r} \leq 1 + \frac{2}{k+1}.$$

Сада се теорема 2.7 може преформулисати на следећи начин.

Теорема 2.8. *(i) Ако за неко $k \geq 1$ имамо*

$$p \ll n^{-1-\frac{2}{k+1}}$$

онда $Y \in Y_{n,p}$ а.с.с. је k колапсибилан.

(ii) Ако за неко $k \geq 1$ имамо

$$p \gg n^{-1-\frac{1}{3\cdot 2^{k-1}-1}}$$

тада Y не колапсира у граф у k корака а.с.с.

Доказ. (i) За $r = \max\{k, 2\}$ имамо

$$p \ll n^{-1-2/(k+1)} \leq n^{-1-2/(r+1)}.$$

Како је $\mu'_{k,r} \leq 1 + \dfrac{2}{k+1}$, то је $p \ll n^{-\mu'_{k,r}}$, па тврђење слиједи из теореме 2.7 (i).

(ii) Како је

$$p \gg n^{-1-\frac{1}{2^{k-1}-1}} \geq n^{-\mu'_{k,r}}$$

то тврђење слиједи из теореме 2.7 (ii).

□

Глава 3

Случајни слимплицијални комплекс $Y_{n,p,d}$

У овом поглављу ћемо говорити о $d-$димензионалним случајним симплицијалним комплексима, тачније о Линиал-Мешуламовом моделу $Y_{n,p,d}$. Као што смо рекли, елемент $Y \in Y_{n,p,d}$ подкомплекс симплекса Δ_{n-1} који садржи све $(d-1)-$стране Δ_{n-1}, док сваки $d-$симплекс бирамо са вјероватноћом p, независно један од другога. Сада, за сваки $d-$димензионални комплекс Y са n чворова имамо да је

$$\mathbb{P}(Y \in Y_{n,p,d}) = p^{f_d(Y)}(1-p)^{\binom{n}{d+1}-f_d(Y)},$$

гдје је $f_d(Y)$ број $d-$страна.
Пошто се докази неких тврђења битно разликују у случају графа, претпоставићемо да је $d \geq 2$.

3.1 Хомолошка повезаност случајног $d-$димензионалног комплекса

Већ смо говорили о хомолошкој повезаности случајног комплекса за $d = 2$. Особина "бити хомолошки повезан" је монотоно растућа, тако да слиједи да постоји функција прага, тј. постоји $p^* = p^*(n)$ такво да

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H_{d-1}(Y_{n,p,d}, G) = 0) = \begin{cases} 0, & p \ll p^* \\ 1, & p \gg p^*. \end{cases}$$

У [2] Мешулам и Валах су одредили ову функцију за коначне групе G, мада питање шта се дешава за $G = \mathbb{Z}$ и даље није ријешено.
Главни резултат у овом поглављу је да, за коначну групу Абелову групу G имамо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H_{d-1}(Y_{n,p,d}, G) = 0) = \begin{cases} 0, & p = \frac{d \ln n - \omega(n)}{n} \\ 1, & p = \frac{d \ln n + \omega(n)}{n}, \end{cases}$$

гдје је $\omega(n)$ функција која (произвољно споро) тежи ка ∞.
Суштина доказа је иста као и у дводимензионалном случају, те срж доказа чини случај $p = \frac{d \ln n + \omega(n)}{n}$.
Како за произвољну групу G важи $H_{d-1}(Y, G) \simeq H^{d-1}(Y, G)$, умјесто хомологије $H_{d-1}(Y, G)$, ми ћемо посматрати ко-хомологијеу $H^{d-1}(Y, G)$.

Теорема 3.1. *Нека је $d \geq 2$, G коначна Абелова група, и $\omega(n)$ произвољна функција која тежи ка ∞. Тада, за $p = \dfrac{d \ln n - \omega(n)}{n}$ важи*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(H^{d-1}(Y_{n,p,d}, G) = 0) = 0.$$

Доказ. Нека је X број изолованих $(d-1)-$страна. Тада је

$$X = \sum_{\tau \in \Delta_{n-1}(d-1)} I_\tau,$$

гдје је $\Delta_{n-1}(d-1)$ скуп свих $(d-1)-$симплекса комплекса Δ_{n-1}, а I_τ је индикатор догађаја A_τ који означава да је страна τ изолована, тј. да није изабрана нити једна d страна која садржи τ. При томе, догађај A_τ зависи само од оних d страна које садрже τ, тако да је A_τ независан од свих $A_{\tau'}$ таквих да τ и τ' не припадају истом $d-$симплексу, тј. ако је $|\tau \cap \tau'| \leq d-2$.
Како је $\mathbb{P}(H^{d-1}(Y, G) = 0) \leq \mathbb{P}(X = 0)$ то је довољно доказати да је

$$\mathbb{P}(X = 0) = o(1).$$

Сваку $(d-1)-$страну садржи $n-d$ $d-$симплекса, па је вјероватноћа да је τ изолована $\mathbb{P}(A_\tau) = (1-p)^{n-d}$, одакле добијамо да је

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{d}(1-p)^{n-d} \sim \frac{n^d}{d!} e^{(n-d)\ln(1-p)} = \Omega(e^{\omega(n)}).$$

Како $\mathbb{E}[X] \to \infty$, то је довољно доказати да је

$$\Delta^* = \sum_{\tau_1 \sim \tau_2} \mathbb{P}(A_{\tau_1} \cap A_{\tau_2}) = o(E^2[X]),$$

при чему $\tau_1 \sim \tau_2$ акко $|\tau_1 \cap \tau_2| = d-1$.
Како за $\tau_1 \sim \tau_2$ постоји тачно један d симплекс који садржи и τ_1 и τ_2, то је $\mathbb{P}(A_{\tau_1} \cap A_{\tau_2}) = (1-p)^{2n-2d-1}$. Број парова $\tau_1 \sim \tau_2$ је $\binom{n}{d+1}\binom{d+1}{2}$ те имамо

$$\frac{\Delta^*}{(\mathbb{E}(X))^2} = \frac{\binom{n}{d+1}\binom{d+1}{2}(1-p)^{2n-2d-1}}{\binom{n}{d}^2(1-p)^{2n-2d}} \sim \frac{d \cdot d!}{2} \frac{1}{n^{d-1}(1-p)} = o(1),$$

што је и требало доказати. $\square$

Посматрајмо сада случај $p = \frac{d\ln n + \omega(n)}{n}$. Нека је $Y \in Y_{n,p,d}$ Нека је $f \in C^{d-1}(\Delta_{n-1})$, $(d-1)-$ко-циклус у Y. Комплекс Y је d хомолошки неповезан акко постоји $f \in C^{d-1}(\Delta_{n-1})$ такав да је $d_{d-1}(f) \neq 0$, и $d_{d-1}(f)(\sigma) = 0$ за свако $\sigma \in Y(d)$. Такав ко-циклус називамо *индикатором неповезаности* комплекса Y. Како је $d_{d-1}(f) = d_{d-1}(f + d_{d-2}(g))$ за било које $g \in C^{d-2}(\Delta_{n-1})$, индикатор неповезаности није јединствен, тј. постоји извјестан степен слободе при његовом бирању.
Са supp f означимо скуп оних $(d-1)-$димензионалних страна од Δ_{n-1} на којима f није нула, тј. supp $f = \{\sigma \in \Delta_{n-1}(d-1) \mid f(\sigma) \neq 0\}$. Нека је $w(f) = \min\{|\text{supp } (f + d_{d-2}(g))| : g \in C^{d-2}(\Delta_{n-1})\}$.
Функцији f можемо придружити d униформан хиперграф са n чворова H_f, при чему су гране H_f фамилија supp f. У даљем тексту ћемо хиперграф H идентификовати са скупом његових грана, тако да је $|H_f| = |\text{supp } f|$. Двије гране хиперграфа τ_1, τ_2 су сусједне ако је $|\tau_1 \cap \tau_2| = d-1$. Хиперграф је повезан ако за сваке двије гране постоји пут од једне до друге.
Нека је $Y \in Y_{n,p,d}$ неповезан. Нека је f индикатор неповезаности за Y, такав да је $|\text{supp } f|$ минималан.
Као и у дводимензионом случају, ако је H_f неповезан, можемо се ограничити на f' која одговара једној компоненти. Тада је и f' индикатор неповезаности, али је $|\text{supp } f'| < |\text{supp } f|$. Тако смо добили да H_f мора бити повезан.
Сем тога, како је $d_{d-1}(f) = d_{d-1}(f + d_{d-2}(g))$, то је и $d + d_{d-2}g$ индикатор неповезаности за Y, па добијамо да је $|\text{supp } f| = w(f)$.
Нека је $\mathcal{F}_n = \{f \in C^{d-1}(\Delta_{n-1}) \mid H_f \neq \emptyset \text{ је повезан } \wedge |\text{supp } f| = w(f)\}$.
Функција $f \in \mathcal{F}_n$ је индикатор неповезаности за Y акко ни један од $d-$симплекса на којима је $d_{d-1}(f)$ различита од нуле није у Y. Нека је $B(f) = |\{\sigma \in \Delta_{n-1}(d) \mid d_{d-1}(f)(\sigma) \neq 0\}|$. Тада имамо да је

$$\mathbb{P}(H^{d-1}(Y_{n,p,d}, G) \neq 0) \leq \sum_{f \in \mathcal{F}_n} (1-p)^{B(f)}.$$

Следећа лема нам даје доњу оцјену $B(f)$ у односу на $w(f)$.

Лема 3.1. *Нека је $f \in C^{d-1}(\Delta_{n-1})$. Тада је*

$$B(f) \geq \frac{nw(f)}{d+1}.$$

Доказ. За оријентисани симплекс $\tau = [v_0, \ldots, v_l]$ и чвор $v \notin \tau$ са $v\tau$ означавамо орјентисани симплекс $[v, v_0, \ldots, v_l]$. За произвољан чвор $v \in [n]$ дефинишимо $f_v \in C^{d-2}(\Delta_{n-1})$ на следећи начин

$$f_v(\tau) = \begin{cases} f(v\tau) & v \notin \tau \\ 0 & v \in \tau. \end{cases}$$

Сада, за произвољан $(d-1)-$симплекс $\tau \in \Delta_{n-1}(d-1)$ имамо да је

$$f(\tau) - d_{d-2}(f_v)(\tau) = \begin{cases} d_{d-1}f(v\tau) & v \notin \tau \\ 0 & v \in \tau. \end{cases}$$

Бројећи парове (v,σ) гдје је v чвор, $\sigma \in \Delta_{n-1}(d)$, $d_{d-1}f(\sigma) \neq 0$ и $v \in \sigma$ добијамо да је

$$\begin{aligned}(d+1)B(f) &= |\{(v,\sigma) \mid v \in \sigma, d_{d-1}f(\sigma) \neq 0\}| = \\ &= |\{(v,\tau) \mid v \notin \tau, f(\tau) - d_{d-2}f_v(\tau) \neq 0\}| = \\ &= |\{(v,\tau) \mid \tau \in \text{supp } (f - d_{d-2}f_v)\}| = \\ &= \sum_v |\text{supp } (f - d_{d-2}f_v)| \geq nw(f).\end{aligned}$$

□

Циљ следећих пар тврђења је да оцијенимо број функција $f \in \mathcal{F}_n$ са унапријед задатим бројем $B(f)$. Прво уведимо пар ознака:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n(m) &= \{f \in \mathcal{F}_n \mid |\text{supp } f| = w(f) = m\} \\ \mathcal{F}_n(m,\theta) &= \{f \in \mathcal{F}_n(m) \mid B(f) = (1-\theta)nm\}\,.\end{aligned}$$

Нека је $f \in \mathcal{F}_n(m,\theta)$. Јасно је да је $B(f) \leq nm$, а према претходној леми $B(f) \geq \dfrac{nm}{d+1}$, тако да је $\dfrac{d}{d+1} \leq \theta \leq 1$.
Са $\mathcal{H}_n(m)$, $\mathcal{H}_n(m,\theta)$ означимо фамилије $d-$униформних хиперграфова који одговарају фамилијама $\mathcal{F}_n(m)$ и $\mathcal{F}_n(m,\theta)$ редом.
Нека је H $d-$униформан хиперграф на скупу $[n]$ и $\sigma \in H$. Са $\beta_H(\sigma)$ означимо број свих $(d+1)-$подскупова скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ таквих да је σ једини њихов подскуп у H, тј.

$$\beta_H(\sigma) = \left|\left\{\tau \in \binom{[n]}{d+1} : \binom{\tau}{d} \cap H = \{\sigma\}\right\}\right|.$$

Дефинишимо

$$\beta(H) = \sum_{\sigma \in H} \beta_H(\sigma).$$

Нека је σ грана у хиперграфу H. Са $\Gamma(\sigma)$ означимо скуп сусједа гране σ, тј.

$$\Gamma(\sigma) = \{\tau \in H : |\sigma \cap \tau| = d-1\}.$$

За $S \subset H$ са $\Gamma(S)$ означимо фамилију грана H таквих да имају бар једног сусједа у S, тј.

$$\Gamma(S) = \bigcup_{\sigma \in S} \Gamma(\sigma).$$

Следећа лема нам говори да, за хиперграф H са m грана постоји релативно мали скуп грана који је сусједан са јако пуно грана.

Лема 3.2. *За свако $0 < \varepsilon < 1$ постоји $C = C(\varepsilon)$, тако да за довољно велико n, свако $\dfrac{1}{4d} \leq \theta \leq 1$ и сваки $d-$униформан хиперграф H, $|H| = m \geq \frac{n}{2d}$ такав да је*

$$\beta(H) \leq (1-\theta)m(n-d)$$

постоји фамилија $S \subset H$ таква да је

$$|\Gamma(S)| \geq (1-\varepsilon)\theta m$$

и

$$|S| \leq C\frac{m}{n}.$$

Доказ. Нека је $c_\varepsilon > 0$ константа која зависи од ε и која ће касније бити одређена. Фамилију $S \subset H$ бирамо случајно при чему свака грана $\sigma \in H$ припада S са вјероватноћом $p_\varepsilon = \frac{c_\varepsilon}{n-d}$. За довољно велико n имамо $p_\varepsilon < 1$, па је S добро дефинисано за $n \geq n_0$.
Нека је $\sigma \in H$. Посматрајмо догађај $\sigma \in \Gamma(S)$. Нека су $\sigma \cup \{v_1\}, \ldots, \sigma \cup \{v_{\beta_H(\sigma)}\}$ они $(d+1)-$подскупови од $\{1,\ldots,n\}$ који из H садрже само σ. Посматрајмо остале $(d+1)-$подскупове који садрже σ: $\sigma\cup\{v_{\beta_H(\sigma)+1}\}, \ldots, \sigma\cup\{v_{n-d}\}$. За свако $\beta_H(\sigma)+1 \leq i \leq n-d$ постоји $d-$скуп $\tau_i \subset \sigma\cup\{v_i\}$ различит од σ, који припада H. Како $v_i \in \tau_i$ и $v_i \notin \tau_j$ за $i \neq j$, то су ови скупови различити. Сем тога, сви τ_i су сусједни са σ те ако S садржи било који од њих имамо $\sigma \in \Gamma(S)$ те одавде слиједи

$$\mathbb{P}(\sigma \notin \Gamma(S)) \leq (1-p_\varepsilon)^{n-d-\beta_H(\sigma)},$$

одакле добијамо да је

$$\mathbb{E}\left(|H - \Gamma(S)|\right) \leq \sum_{\sigma \in H}(1-p_\varepsilon)^{n-d-\beta_H(\sigma)}.$$

Из конвексности функције a^x добијамо да за свако $0 \leq \lambda \leq 1$ и $y \in \mathbb{R}$ вриједи $a^{\lambda y} \leq (1-\lambda) + \lambda a^y$.
Узимајући $a = 1 - p_\varepsilon$, $\lambda = \dfrac{n-d-\beta_H(\sigma)}{m(n-d)-\beta(H)} m\theta$ и $y = \frac{m(n-d)-\beta(H)}{m\theta} \geq n-d$, добијамо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|H-\Gamma(S)|\right) &\leq m(1-\theta) + m\theta(1-p_\varepsilon)^{n-d} \leq \\ &\leq m(1-\theta) + m\theta e^{-p_\varepsilon(n-d)} = m(1-\theta) + m\theta e^{-c_\varepsilon},\end{aligned}$$

одакле добијамо да је

$$\mathbb{E}\left(|\Gamma(S)|\right) \geq m\theta(1-e^{-c_\varepsilon}).$$

Како је $|\Gamma(S)| \leq m$, то из леме 1.3 добијамо да је

$$\mathbb{P}(|\Gamma(S)| \geq (1-\varepsilon)\theta m) \geq \frac{\mathbb{E}\left(|\Gamma(S)|\right) - (1-\varepsilon)\theta m}{m} \geq \theta(\varepsilon - e^{-c_\varepsilon}).$$

Изаберимо c_ε довољно велико, тако да је $\varepsilon > e^{-c_\varepsilon}$. Тада је

$$\mathbb{P}(|\Gamma(S)| \geq (1-\varepsilon)\theta m) \geq \frac{1}{4d}(\varepsilon - e^{-c_\varepsilon}).$$

Случајна промјењива $|S|$ има биномну расподјелу $Bi(m, p_\varepsilon)$, па из леме 1.8 добијамо да је, за произвољно $\lambda > 1$ вриједи

$$\mathbb{P}(|S| \geq \lambda m p_\varepsilon) \leq \left(e^\lambda \lambda^{-\lambda}\right)^{mp_\varepsilon}$$

Како је $mp_\varepsilon = \dfrac{mc_\varepsilon}{n-d} \geq \dfrac{nc_\varepsilon}{2d(n-d)} \geq \dfrac{c_\varepsilon}{2d}$ то је, за произвољно $\lambda > e$,

$$\mathbb{P}(|S| \geq \lambda m p_\varepsilon) \leq \left(e^\lambda \lambda^{-\lambda}\right)^{c_\varepsilon/2d}$$

Како, за фиксне $\varepsilon > 0, c_\varepsilon > 0$, израз на десној страни тежи ка 0 када $\lambda \to \infty$, то постоји $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon)$ тако да је

$$\mathbb{P}(|S| \geq \lambda_1 m p_\varepsilon) < \frac{1}{4d}(\varepsilon - e^{-c_\varepsilon}).$$

Како је $\lambda_1 m p_\varepsilon = \lambda_1 c_\varepsilon \dfrac{m}{n-d} \leq 2\lambda_1 c_\varepsilon n$, то је за $C = 2\lambda_1 c_\varepsilon$

$$\mathbb{P}(|S| \geq C\frac{m}{n}) \leq \mathbb{P}(|S| \geq \lambda_1 m p_\varepsilon) < \frac{1}{4d}\left(\varepsilon - e^{-c_\varepsilon}\right).$$

Сада имамо

$$\mathbb{P}\left(|S| > C\frac{m}{n} \text{ или } |\Gamma(S)| < (1-\varepsilon)\theta m\right) < \frac{1}{4d}(\varepsilon - e^{-c_\varepsilon}) + 1 - \frac{1}{4d}(\varepsilon - e^{-c_\varepsilon}) = 1,$$

тј. постоји S са траженим особинама. $\square$

Као што смо рекли, за сваку функцију $f \in \mathcal{F}_n(m,\theta)$ постоји $d-$униформан хиперграф $H \in \mathcal{H}_n(m,\theta)$. С друге стране, ако хиперграф H одговара функцији f, онда знамо који $(d-1)-$симплекси леже у $\operatorname{supp} f$. Нека је r ред групе над којом посматрамо хомологије. Тада за сваки хиперграф $H \in \mathcal{H}_n(m)$ постоји највише $(r-1)^m$ функција из $\mathcal{F}_n(m)$ које му одговарају, тако да имамо

$$|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq (r-1)^m \left|\mathcal{H}_n(m,\theta)\right|.$$

Сада можемо да ограничимо број функција у $\mathcal{F}_n(m,\theta)$.

Лема 3.3. *Постоји константа $c = c(r,d)$ таква да за довољно велико n ($n \geq n_0(d)$), $m \geq \frac{n}{2d}$ и $\theta \geq \frac{1}{2d}$ вриједи*

$$|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq \left(cn^{(d-1)(1-\theta(1-\frac{1}{d^2}))}\right)^m.$$

Доказ. Већ смо рекли да вриједи $|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq (r-1)^m \left|\mathcal{H}_n(m,\theta)\right|$, тако да је довољно да процијенимо $|\mathcal{H}_n(m,\theta)|$.
Нека је $H \in \mathcal{H}_n(m,\theta)$. Нека је $f \in \mathcal{F}_n(m,\theta)$ таква да је $H = \operatorname{supp} f$, $|H| = m$ и $B(f) = mn(1-\theta)$.
Нека је $\tau \in H$ и $\sigma \in \binom{[n]}{d+1}$ такав да је τ једини подскуп од σ из H. Тада је $d_{d-1}f(\sigma) = \pm f(\sigma) \neq 0$, па је

$$\beta(H) \leq B(f) = mn(1-\theta) = m(n-d)\left(1 - \frac{\theta n - d}{n-d}\right).$$

За $\theta' = \frac{\theta n - d}{n-d}$ и довољно велико n (у зависности од d) имамо $\theta' \geq \theta/2 \geq 1/(4d)$. Узимајући $\varepsilon = \frac{1}{2d^2}$, лема 3.2 нам даје да постоји скуп S, и константа $c_2 = c_2(d)$ такав да је

$$|S| \leq c_2 \frac{m}{n}, \quad \text{и} \quad |\Gamma(S)| \geq \left(1 - \frac{1}{2d^2}\right) \theta' m.$$

Хиперграф H бирамо на сљедећи начин. Прво изаберемо скуп $S \subset H$. Тада за све скупове из $\binom{[n]}{d}$ који су сусједни са S бирамо да ли су у H или не. На крају бирамо скупове који нису ни у S ни у $\Gamma(S)$. То нам даје

$$|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq \sum_{i=0}^{c_2 m/n} \binom{\binom{n}{d}}{i} 2^{(c_2 \frac{m}{n}) nd} \sum_{j=0}^{m(1-\theta'(1-\frac{1}{2d^2}))} \binom{\binom{n}{d}}{j}.$$

Како је $m \leq \binom{n}{d}$, то је, за довољно велико n, $c_2 \dfrac{m}{n} \leq \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{d}$, па је $\binom{\binom{n}{d}}{i} \leq \binom{\binom{n}{d}}{c_2 m/n} \leq \left(\dfrac{n^{d+1}}{c_2 m}\right)^{c_2 m/n}$. Како је $n^{\frac{d}{n}} \to 1$, то постоји c_3 тако да је

$$\sum_{i \leq c_2 m/n} \binom{\binom{n}{d}}{i} \leq c_2 \frac{m}{n} \left(\frac{n^{d+1}}{c_2}\right)^{c_2 m/n} \leq c_3^m.$$

Ако је $\left(1 - \theta'\left(1 - \dfrac{1}{2d^2}\right)\right) m \leq \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{d}$, тада је $\binom{\binom{n}{d}}{j} \leq \binom{\binom{n}{d}}{\left(1-\theta'\left(1-\frac{1}{2d^2}\right)\right) m}$.
Ако не, онда је $m \geq \frac{1}{2}\binom{n}{d}$, па је $\sum \binom{\binom{n}{d}}{j} \leq 2^{\binom{n}{d}} \leq 4^m$.
У сваком случају, постоје константе c_4, c_5 (које зависе од d), такве да је

$$|\mathcal{H}_n(m,\theta)| \leq c_4^m \binom{\binom{n}{d}}{\left(1-\theta'\left(1-\frac{1}{2d^2}\right)\right) m} \leq c_5^m \left(\frac{n^d}{m}\right)^{\left(1-\theta'\left(1-\frac{1}{2d^2}\right)\right) m},$$

па је

$$|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq (r-1)^m c_5^m \left(\frac{n^d}{m}\right)^{\left(1-\theta'\left(1-\frac{1}{2d^2}\right)\right) m}.$$

Како је $\theta' = \frac{\theta n - d}{n-d}$, то је, за довољно велико n, $\theta'\left(1 - \frac{1}{2d^2}\right) > \theta\left(1 - \frac{1}{d^2}\right)$. Сем тога, имамо $m \geq \frac{n}{2d}$. Узимајући $c_1 = 2d(r-1)c_5$ добијамо

$$|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq \left(c_1 n^{(d-1)\left(1+\theta\left(1-\frac{1}{d^2}\right)\right)}\right)^m.$$

$\square$

Теорема 3.2. *Нека је $d \geq 2$ и G коначна група. Нека је $p = \frac{d \ln n + \omega(n)}{n}$, при чему $\omega(n) \to \infty$. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H^{d-1}(Y_{n,p,d}, G) = 0) = 1.$$

Доказ. Како је хомолошка повезаност монотона особина, то је довољно доказати тврђење за $\omega(n) \to \infty$ произвољно споро.
Видјели смо да је

$$\mathbb{P}(H^{d-1}(Y_{n,p,d}, G) \neq 0) \leq \sum_{f \in \mathcal{F}_n} (1-p)^{B(f)} = \sum_m \sum_{f \in \mathcal{F}_n(m)} (1-p)^{B(f)}.$$

Разликујемо два случаја, у зависносто од тога да ли је m мало или велико.

(i) Нека је $1 \leq m \leq \frac{n}{2d}$. Ако је $f \in \mathcal{F}_n(m)$, тада је $H = \operatorname{supp} f \subset \binom{[n]}{d}$ $d-$униформан, повезан хиперграф, те постоји скуп $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|S| \leq m + d - 1$, такав да је $H \subset \binom{S}{d}$.

За свако $\sigma \in H$ и $u \notin S$ имамо $d_{d-1} f(u\sigma) \neq 0$, па је

$$B(f) \geq m(n - m - d + 1).$$

Сем тога, како је $|\mathcal{H}_n(m)| \leq \binom{\binom{n}{d}}{m}$, имамо

$$|\mathcal{F}_n(m)| \leq (r-1)^m \left(\frac{n^d}{m}\right)^m = \left(c_6 \frac{n^d}{m}\right)^m,$$

па имамо да је

$$|\mathcal{F}_n(m)| (1-p)^{m(n-m-d+1)} \leq \left(c_6 \frac{n^d}{m} (1-p)^{n-m-d+1}\right)^m \leq$$
$$\leq \left(c_7 \frac{n^d}{m} (1-p)^{n-m}\right)^m \leq \left(c_7 \frac{n^d}{m} e^{-p(n-m)}\right)^m,$$

за $c_7 = c_7(r, d)$.

Даље, имамо

$$\frac{n^d}{m} e^{-p(n-m)} = \frac{n^d}{m} n^{-d\frac{n-m}{n}} e^{-\omega(n)\frac{n-m}{n}} \leq \frac{n^{dm/n}}{m} e^{-\omega(n)/2}.$$

Ако је $m \leq n^{2/3}$ тада је $\dfrac{n^{dm/n}}{m} \leq n^{dn^{-1/3}} = O(1)$, а ако је $n^{2/3} \leq m \leq n/2d$, тада имамо $\dfrac{n^{dm/n}}{m} \leq n^{-1/6} = O(1)$. Одавде добијамо да постоји $c_8 = c_8(r, d)$, таква да је

$$|\mathcal{F}_n(m)| (1-p)^{m(n-m-d+1)} \leq \left(c_8 e^{-\omega(n)/2}\right)^m.$$

Сада имамо

$$\sum_{m=1}^{n/2d} \sum_{f\in\mathcal{F}_n(m)} (1-p)^{B(f)} \le \sum_{m\le n/2d} |\mathcal{F}_n(m)|\,(1-p)^{m(n-m-d+1)} \le$$
$$\le \sum_{m\ge 1} \left(c_8 e^{-\omega(n)/2}\right)^m = O(e^{-\omega(n)/2}) = o(1).$$

(ii) Нека је $m \ge \frac{n}{2d}$.
Сада имамо

$$\sum_{m\ge n/2d} \sum_{f\in\mathcal{F}_n(m)} (1-p)^{B(f)} = \sum_{m\ge n/2d} \sum_{\theta} \sum_{f\in\mathcal{F}_n(m,\theta)} (1-p)^{mn(1-\theta)}.$$

Претпоставимо да је $\theta \le \frac{1}{2d}$. Тада је

$$\sum_{m\ge \frac{n}{2d}} \sum_{\theta\le\frac{1}{2d}} |\mathcal{F}_n(m,\theta)|(1-p)^{mn(1-\theta)} \le \sum_{m\ge\frac{n}{2d}} |\mathcal{F}_n(m)|(1-p)^{mn(1-\frac{1}{2d})} \le$$
$$\le \sum_{m\ge\frac{n}{2d}} \left(c_6 \frac{n^d}{m}\right)^m (1-p)^{mn\left(1-\frac{1}{2d}\right)}.$$

Даље, имамо

$$\frac{n^d}{m}(1-p)^{n\left(1-\frac{1}{2d}\right)} \le 2dn^{d-1}e^{-(1-\frac{1}{2d})\frac{d\ln n+\omega(n)}{n}n} =$$
$$= 2dn^{-1/2}e^{-\left(1-\frac{1}{2d}\right)\frac{\omega(n)}{n}} = O(n^{-1/2}),$$

те постоји $c_9 = c_9(r,d)$ тако да важи

$$\sum_{m\ge\frac{n}{2d}} \sum_{\theta\le\frac{1}{2d}} |\mathcal{F}_n(m,\theta)|(1-p)^{mn(1-\theta)} \le \sum_{m\ge n/2d} \left(c_9 n^{-1/2}\right)^m$$
$$= O\left(\left(n^{-1/2}\right)^{\frac{n}{2d}}\right) = o(1).$$

Остаје нам случај $\theta \ge \frac{1}{2d}$. Треба да процијенимо

$$\sum_{m\ge n/2d} \sum_{\theta\ge\frac{1}{2d}} |\mathcal{F}_n(m,\theta)|\,(1-p)^{B(f)}.$$

Из леме 3.1 добијамо да је, за $\theta > \frac{d}{d+1}$, $\mathcal{F}_n(m,\theta) = \emptyset$, тако да можемо да претпоставимо да је $\theta \le \frac{d}{d+1}$.

Из леме 3.3 добијамо да је $|\mathcal{F}_n(m,\theta)| \leq \left(c_1 n^{(d-1)\left(1-\theta\left(1-\frac{1}{d^2}\right)\right)}\right)^m$. Како је $B(f)$ број $d-$димензионалних симплекса, то је $B(f) \leq n^{d+1}$, те за највише n^{d+1} вриједности θ имамо $\mathcal{F}_n(m,\theta) \neq \emptyset$. Сем тога, имамо $p \geq \frac{d \ln n}{n}$, те добијамо

$$\begin{aligned}
&\sum_{m \geq n/2d} \sum_{\theta \geq \frac{1}{2d}} |\mathcal{F}_n(m,\theta)| (1-p)^{B(f)} \leq \\
&\leq \sum_{m \geq n/2d} \sum_{\theta \geq \frac{1}{2d}} \left(c_1 n^{(d-1)\left(1-\theta\left(1-\frac{1}{d^2}\right)\right)} (1-p)^{n(1-\theta)}\right)^m \leq \\
&\leq \sum_{m \geq n/2d} \sum_{\theta \geq \frac{1}{2d}} \left(c_1 n^{(d-1)\left(1-\theta\left(1-\frac{1}{d^2}\right)\right)} n^{-d(1-\theta)}\right)^m = \\
&= \sum_{m \geq n/2d} \sum_{\theta \geq \frac{1}{2d}} \left(c_1 n^{-1+\theta\left(1+\frac{d-1}{d^2}\right)}\right)^m \leq \\
&\leq \sum_{m \geq n/2d} \sum_{\theta \geq \frac{1}{2d}} \left(c_1 n^{-1+\frac{d}{d+1}\left(1+\frac{d-1}{d^2}\right)}\right)^m \leq \\
&\leq n^{d+1} \sum_{m \geq n/2d} \left(c_1 n^{-1+\frac{d}{d+1}\left(1+\frac{d-1}{d^2}\right)}\right)^m = \\
&= n^{d+1} \sum_{m \geq n/2d} \left(c_1 n^{-\frac{1}{d(d+1)}}\right)^m = O\left(n^{d+1-\frac{n}{2d^2(d+1)}}\right) = o(1).
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Нестајање горње хомологије и колапсибилност

Хомолошка димензија је једна од основних особина симплицијалног комплекса. За симплицијални комплекс $Y \in Y_{n,p,d}$ хомолошка димензија може бити d или $d-1$.

У [3] Козлов доказује да је функција прага за нестајање горње хомологије $p = n^{-1}$, тј. да је

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(H^d(Y_{n,p,d}, G) = 0) = \begin{cases} 1 & p \ll n^{-1} \\ 0 & p \gg n^{-1} \end{cases}$$

за произвољну, коначну групу G, при чему у случају $p \gg n^{-1}$ тврђење важи и за $G = \mathbb{Z}$.

Тежина овог тврђења је у случају $p \ll n^{-1}$, и Козловљев доказ је исти (само технички сложенији) као у случају $d = 2$, те га нећемо наводити. Проблем са овим резултатом је што важи само за коначне групе и не може се проширити на $G = \mathbb{Z}$.

Проблем $p \ll n^{-1}$ и $G = \mathbb{Z}$ рјешавамо тако што умјесто нестајања горње хомологије посматрамо јачи услов, колапсибилност. Јасно је да је колапсибилност монотона особина, тако да постоји функција прага, и, испоставља се да је она, као и у случају $d = 2$ једнака n^{-1}. У [6] Мешулам и остали су посматрали колапсибилност комплекса за $p = cn^{-1}$ и доказали да постоји c_d тако да, за $c > c_d$ комплекс није колапсибилан, тачније доказали су да горња хомологија није нула. Сем тога, доказали су да постоји γ_d тако да за $c < \gamma_d$ комплекс је или колапсибилан или садржи границу $(d+1)-$симплекса, $\partial\Delta_{d+1}$.
Како за $p \ll n^{-1}$ скоро сигурно немамо $\partial\Delta_{d+1}$, из њиховог резултата слиједи да је n^{-1} функција прага за колапсибилност комплекса, а, као посљедица тога, имамо да је то и функција прага за нестајање горње хомологије.

3.2.1 Подкомплекси

Нека је S коначан $d-$димензионални симплицијални комплекс. Тада дефинишемо

$$\mu(S) = \frac{v_S}{f_S},$$

гдје је v_S број чворова, а f_S број $d-$димензионалних страница.
Слично као и у дводимензионалном случају, дефинишимо

$$\mu'(S) = \min_{S' \subset S} \mu(S'),$$

минимум по свим (чистим) $d-$димензионалним подкомплексима комплекса S.
Кажемо да $Y \in Y_{n,p,d}$ садржи S, ако постоји симплицијално улагање $S \hookrightarrow Y$, и тај догађај означавамо са $S \hookrightarrow Y_{n,p,d}$.

Теорема 3.3. *Нека је S коначан $d-$димензионалан симплицијални комплекс.*

(i) Ако је $p \ll n^{-\mu'(S)}$, тада $\mathbb{P}(Y_{n,p,d}$ садржи $S) \to 0$.

(ii) Ако је $p \gg n^{-\mu'(S)}$, тада $\mathbb{P}(Y_{n,p,d}$ садржи $S) \to 1$.

Доказ. (i) Нека је $S' \subset S$, такав да је $\mu'(S) = \mu(S')$. Имамо да је

$$\mathbb{P}(S \hookrightarrow Y_{n,p,d}) \leq \mathbb{P}(S' \hookrightarrow Y_{n,p,d}).$$

Нека је X_n број симплицијалних улагања S' у Y. Тада је

$$\mathbb{P}(S' \hookrightarrow Y_{n,p,d}) = \mathbb{P}(X_n > 0).$$

Како је X_n бројачка промјењива, то је

$$\mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}\,(X_n),$$

те је довољно доказати да је $\mathbb{E}\,(X_n) = o(1)$.

Нека је $g : V(S) \to \{1, \dots, n\}$ ињективно пресликавање. Тада је g симплицијално улагање у Y ако и само ако Y садржи све одговарајуће симплексе. Са A_g означимо догађај да је g симплицијално угалање, а са I_g индикатор тога догађаја. Тада имамо

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \sum_g \mathbb{E}\left(I_g\right) = \sum_g p^{f_{S'}} = n(n-1)\dots(n-v+1)p^{f_{S'}} \sim n^{v_{S'}} p^{f_{S'}}.$$

Како је $p \ll n^{-\mu(S')} = n^{-\frac{v_{S'}}{f_{S'}}}$, то имамо да је $\mathbb{E}\left(X_n\right) = o(1)$.

(ii) Као и у доказу теореме 2.5, користимо други момент. Имамо да је $p = \omega(n)n^{-\mu'(S)}$, $\omega(n) \to \infty$.

Нека је X_n број улагања S у $Y_{n,p,d}$. Сада имамо да је

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \sum_g \mathbb{E}\left(I_g\right) \sim n^{v_S} p^{f_S} = n^{f_S\left(\mu(S) - \mu'(S)\right)} \omega(n)^{f_S} \to \infty.$$

Нека су $g_1, g_2 : V(S) \to \{1, \dots, n\}$ два ињективна пресликавања. Тада $g_1(S)$ и $g_2(S)$ нам дају два симплицијална комплекса, оба изоморфна са S. Догађаји A_{g_1} и A_{g_2} су независни ако та два симплицијална комплекса немају заједничких $d-$симплекса.

У супротном, $g_1(S) \cap g_2(S)$ је $d-$димензионални симплицијални комплекс који је изоморфан са неким H, подкомплексом S. При томе g_1 слика H_1 у H, а g_2 слика H_2 у H, гдје су H_1 и H_2 подкомплекси S изоморфни са H. Примијетимо да таквих могућности има коначно много.

Према леми 1.6 довољно је доказати да је

$$\sum_{g_1 \sim g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = o\left(\mathbb{E}^2(X_n)\right),$$

гдје сума иде по свим паровима g_1, g_2 таквим да догађаји A_{g_1}, A_{g_2} нису независни, тј. довољно је доказати да је

$$\sum_{H_1, H_2} \sum_{g_1, g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = o\left(\mathbb{E}^2(X_n)\right)$$

гдје прва сума иде по свим паровима $H_1 \simeq H_2$, $H_1, H_2 \subset S$ $d-$димензионих подкомплекса S, а друга по свим ињективним пресликавањима $V(S)$ у $\{1, \dots, n\}$ таквим да је

$$g_1(H_1) = g_2(H_2) = g_1(S) \cap g_2(S).$$

Прва сума је коначна, тако да је довољно доказати да за сваки пар H_1, H_2 имамо

$$\sum_{g_1, g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = o(\mathbb{E}^2(X_n)).$$

За овакав пар g_1, g_2 имамо

$$\mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) = p^{2f_S - f_H}.$$

Парове бројимо на сљедећи начин: прво изаберемо заједничке чворове, њих v_H. Онда бирамо осталих $v_S - v_H$ чворова за g_1, па чворове за g_2. Како укупно бирамо $2v_S - v_H$ чворова, број начина је

$$n(n-1)\ldots(n-2v_s+v_H+1) \sim n^{2v_S - v_H},$$

па имамо

$$\sum_{g_1,g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2}) \sim n^{2v_S - v_H} p^{2f_S - f_H}$$

те добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{g_1 \sim g_2} \mathbb{P}(A_{g_1} \cap A_{g_2})}{\mathbb{E}^2(X_n)} &\sim \frac{n^{2v_S - v_H} p^{2f_S - f_H}}{n^{2v_S} p^{2f_S}} = n^{-v_H} p^{-f_H} = \\ &= n^{-f_H(\mu(H) - \mu'(S))} \omega(n)^{-f_H} = o(1).\end{aligned}$$

□

Лема 3.4. *Нека је $\partial\Delta_{d+1}$ граница $(d+1)$-димензионалног симплекса. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_{n,p,d} \text{ садржи } \partial\Delta_{d+1}\right) = \begin{cases} 0 & p \ll n^{-1} \\ 1 & p \gg n^{-1}. \end{cases}$$

Доказ. Лако се провјерава да је $\mu'(\partial\Delta_{d+1}) = 1$, те тврђење слиједи из теореме 3.3. □

3.2.2 Нестајање горње хомологије

У овом дијелу ћемо посматрати шта се дешава са $H_d(Y, G)$ за $Y \in Y_{n,p,d}$, $p = cn^{-1}$ и произвољну Абелову групу G.
Како је нестајање хомологије $H_d(Y, H)$ опадајућа особина, поставља се питање да ли постоји c_0 тако да, за $c < c_0$ $H_d(Y, G) = 0$ а.с.с., а за $c > c_0$ $H_d(Y, G) \neq 0$, а.с.с.
Ако Y садржи границу $(d+1)-$симплекса, тада имамо $H_d(Y, G) \neq 0$.
За $p = cn^{-1}$ вјероватноћа да $Y_{n,p,d}$ саржи $\partial\Delta_{d+1}$ тежи ка $p_c \in (0,1)$, одакле слиједи да оваква константа не постоји, међутим, испоставља се да постоје константе $\gamma_d \leq c_d$ такве да за $c > c_d$ имамо $H_d(Y, G) \neq 0$, а.с.с., док за $c < \gamma_d$ комплекс је или колапсибилан или садржи границу $(d+1)-$симплекса.
Посматрањем Ојлерове карактеристике долазимо до константе c_d, док константу γ_d добијамо тако што посматрамо како $Y_{n,p,d}$ изгледа "из једне $(d-1)-$стране", тј. конструишемо $Y_{n,p,d}$ тако што крећемо од једне $(d-1)-$стране и додајемо један по један $d-$симплекс, при чему нови симплекс садржи неку већ додату $(d-1)-$страну.

Како је $\chi(Y) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i f_i(Y) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i h_i(Y)$, то је, за $Y \in Y_{n,p,d}$

$$h_d(Y) = f_d(Y) - \binom{n-1}{d} + h_{d-1}(Y).$$

Одавде добијамо да је $h_d(Y) > 0$ еквивалентно са $f_d(Y) - \binom{n-1}{d} + h_{d-1}(Y) > 0$.

Теорема 3.4. *Нека је $p = \frac{c}{n}$, $c > d+1$. Тада*

$$\mathbb{P}(H_d(Y_{n,p,d}, G) = 0) \to 0,$$

за произвољну коначну Абелову групу G.

Доказ. Из претходног разматрања добијамо

$$\mathbb{P}\left(H_d(Y_{n,p,d}, G) = 0\right) = \mathbb{P}\left(f_d - \binom{n-1}{d} + h_{d-1} \leq 0\right) \leq \mathbb{P}\left(f_d - \binom{n-1}{d} \leq 0\right).$$

Случајна промјењива f_d представља број изабраних d симплекса, и има биномну расподјелу $f_d \sim Bi(\binom{n}{d+1}, p)$.
Користећи Чернофљеву неједнакост (лема 1.7) добијамо да је

$$\mathbb{P}\left(f_d - \binom{n-1}{d} \leq 0\right) = \mathbb{P}\left(f_d - \mathbb{E}\left(f_d\right) \leq -t\right) \leq \exp\left\{\frac{-2t^2}{\binom{n}{d+1}}\right\},$$

за $t = \left(\frac{c}{d+1} - 1\right)\binom{n-1}{d}$.
Како је

$$\frac{2t^2}{\binom{n}{d+1}} = \left(\frac{c}{d+1} - 1\right)^2 \binom{n-1}{d}^2 \frac{2}{\binom{n}{d+1}} \geq c_1 n^{d-1},$$

гдје је $c_1 > 0$ константа која зависи од c и d, имамо

$$\mathbb{P}(f_d - \mathbb{E}\left(f_d\right) \leq -t) \leq e^{-c_1 n^{d-1}} = o(1).$$

□

Претходна теорема нам даје константу $d+1$, тако да је, за $c > d+1$, хомолошка димензија комплекса $Y_{n,p,d}$ једнака d а.с.с. Међутим, у доказу теореме смо занемарили h_{d-1}, тако да је дата оцјена поприлично груба. Нетривијална оцјена $\mathbb{E}\left(h_{d-1}\right)$ ће нам поправити константу.
Нека је

$$g_d(x) = (d+1)(x+1)e^{-x} + x(1-e^{-x})^{d+1},$$

и нека је c_d јединствено позитивно рјешење једначине $g_d(x) = d+1$. Није тешко видјети да је $c_d = d+1 - \Theta\left(\frac{d}{e^d}\right)$.

Теорема 3.5. *Нека је $p = \frac{c}{n}$, $c > c_d$. Тада је, за прозивољну Абелову групу G,*

$$\mathbb{P}(H_d(Y_{n,p,d}; G) = 0) = o(1).$$

Доказ. Нека је $Y \in Y_{n,p,d}$. Јасно је да сада имамо $h_{d-1}(Y) = \dim \frac{Z^{d-1}(Y)}{Im^{d-1}(Y)} = \dim Z^{d-1}(Y) - \binom{n-1}{d-1}$.
Нека је τ симплекс димензије $d-1$ у Y, и нека је $1_\tau \in C^{d-1}(Y)$ индикатор тог симплекса. Тада, ако је $d_Y(\tau) = 0$, имамо $1_\tau \in Z^{d-1}(Y)$
Са $\mathcal{L}_\tau$ означимо једнодимензиони вектроски простор генерисан овим коциклусом.
За произвољан $d-$симплекс $\sigma \in Y$, са L_σ означимо скуп свих $(d-1)$-симплекса τ, $\tau \in \sigma$, таквих да је степен од τ већи од 1,

$$L_\sigma = \{\tau \in \Delta_{n-1}(d-1) : \tau \subset \sigma,\, d_Y(\tau) > 1\}.$$

Нека је $|L_\sigma| = j$. Са $\mathcal{L}_\sigma$ означимо векторски простор свих $(d-1)$-ко-ланаца у $C^{d-1}(\sigma)$ који нестају на L_σ.
Нека су $\tau_1, \dots, \tau_j$ сви $(d-1)$-симплекси у σ који су степена већег од 1. Тада су $\tau_{j+1}, \dots, \tau_{d+1}$ степена 1, тј. једини d-симплекс коме припадају је σ.
Одавде је јасно да да су $1_{\tau_{j+2}} - 1_{\tau_{j+1}}, 1_{\tau_{j+3}} - 1_{\tau_{j+1}}, \dots, 1_{\tau_{d+1}} - 1_{\tau_j+1}$ у $\mathcal{L}_\sigma$. Сем тога, они су линеарно независни и генеришу $\mathcal{L}_\sigma$, тако да је $\dim \mathcal{L}_\sigma = d-j$.
Посматрајмо просторе $\mathcal{L}_{\sigma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\sigma_m}, \mathcal{L}_{\tau_1}, \dots, \mathcal{L}_{\tau_k}$, гдје су $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ d-димензионални симплекси у Y, а $\tau_1, \dots, \tau_k$ $(d-1)$-димензионални симплекси степена 0. Вид̄ели смо да су $\mathcal{L}_{\sigma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\sigma_m}, \mathcal{L}_{\tau_1}, \dots, \mathcal{L}_{\tau_k} \subset Z^{d-1}(Y)$. Сем тога вектори који генеришу ове просторе су линеарно независни јер су скупови на којима нису нуле дисјунктни по паровима, тако да добијамо

$$\dim Z^{d-1}(Y) \geq \alpha(Y) + \sum_{j=0}^{d} (d-j)\beta_j(Y),$$

гдје је $\alpha(Y)$ број $(d-1)$-страна степена нула, док је $\beta_k(Y)$ број d-страна који садрже тачно $d+1-k$ $(d-1)$-страна степена 1.
Сада имамо

$$\begin{aligned} h_d(Y) &\geq f_d(Y) - \binom{n-1}{d} + \alpha(Y) + \sum_{j=0}^{d} \beta_j(Y)(d-j) - \binom{n-1}{d-1} \\ &= f_d(Y) + \alpha(Y) + \sum_{j=0}^{d} \beta_j(Y)(d-j) - \binom{n}{d}. \end{aligned}$$

Дефинишимо случајну промјенљиву v на сљедећи начин

$$v(Y) = f_d(Y) + \alpha(Y) + \sum_{k=0}^{d} \beta_k(Y)(d-k) - \binom{n}{d}.$$

Сада имамо $\mathbb{P}(h_{d-1} \leq 0) \leq \mathbb{P}(v \leq 0)$. Израчунајмо очекивање $v(Y)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f_d\right) &= \binom{n}{d+1}p = \frac{n^d c}{(d+1)!}\left(1+o(1)\right), \\
\mathbb{E}\left(\alpha\right) &= \binom{n}{d}(1-p)^{n-d} = \frac{e^{-c}}{d!}n^d(1+o(1)), \\
\mathbb{E}\left(\beta_j\right) &= \binom{n}{d+1}\binom{d+1}{j}p(1-p)^{(n-d-1)(d+1-j)}(1-(1-p)^{n-d-1})^j \\
&= \frac{n^d}{(d+1)!}\binom{d+1}{j}ce^{-c(d+1-j)}\left(1-e^{-c}\right)^j\left(1+o(1)\right), \\
\binom{n}{d} &= \frac{n^d}{d!}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Одавде добијамо да је

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(v\right) = {} & \frac{n^d}{(d+1)!}(c+(d+1)e^{-c}+c\sum_{j=0}^{d}\binom{d+1}{j}e^{-c(d+1-j)}\left(1-e^{-c}\right)^j(d-j) \\
& -d-1)\left(1+o(1)\right) = \\
= {} & \frac{n^d}{(d+1)!}\Big((d+1)(c+1)e^{-c}+c\left(1-e^{-c}\right)^{d+1}-d-1\Big)\left(1+o(1)\right) \\
= {} & \frac{n^d}{(d+1)!}\left(g_d(c)-d-1\right)\left(1+o(1)\right).
\end{aligned}$$

Како је $c > c_d$, то постоји констана $\varepsilon = \varepsilon(c,d) > 0$, таква да, за довољно велико n имамо $\mathbb{E}\left(v\right) \geq \varepsilon n^d$.
Добили смо да је очекивање од v јако велико, али још увијек не знамо шта се дешава са самом случајном промјењивом v. Да бисмо доказали да је v блиска своме очекивању користићемо Мекдиармидову неједнакост, дату у леми 1.11.
У нашем случају промјењива v зависи од тога који од $\binom{n}{d+1}$ симплекса су укључени у Y. Нека су $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, $m = \binom{n}{d+1}$ сви $d-$димензионални симплекси из $\Delta_{n-1}(d)$. Тада је $v = v(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Промјена на једној координати i представља разлику да ли је симплекс σ_i укључен или није.
Нека су Y, Y' два симплицијална комплекса из $Y_{n,p,d}$ који се разликују у највише једном d-симплексу. Тада имамо

$$\begin{aligned}
|f_d(Y) - f_d(Y')| &\leq 1 \\
|\alpha(Y) - \alpha(Y')| &\leq d+1 \\
|\beta_j(Y) - \beta_j(Y')| &\leq d+1,\ 0 \leq j \leq d.
\end{aligned}$$

Сада имамо да је

$$|v(Y) - v(Y')| \leq 1 + \sum_{j=0}^{d}(d+1)(d-j) + d + 1 \leq C_1 d^3,$$

при чему је C_1 константа која не зависи ни од n ни од d.
Примјеном Мекдиармидове неједнакости добијамо

$$\mathbb{P}(v \leq \mathbb{E}\,(v) - \lambda) \leq \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{C^2 m}\right\},$$

за $C = 2C_1 d^3$ и $m = \binom{n}{d+1}$. Узимајући $\lambda = \mathbb{E}\,(v)$ добијамо да је

$$\mathbb{P}(v \leq 0) \leq \exp\left\{-\frac{\mathbb{E}^{\,2}(v)}{C\binom{n}{d+1}}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^{2d}}{C\binom{n}{d+1}}\right\}.$$

Како је $\displaystyle\binom{n}{d+1} \sim \frac{n^{d+1}}{(d+1)!}$ имамо да је

$$\mathbb{P}(v \leq 0) \leq \exp\{-C_2 n^{d-1}\},$$

гдје је C_2 константа која зависи од d и ε, па је

$$\mathbb{P}(v \leq 0) = o(1).$$

□

Поставља се питање да ли постоји константа c_1 таква да је $H_d(Y, G) = 0$, а.с.с за $Y \in Y_{n,p,d}$, при чему је $p = cn^{-1}$ и $c < c_1$.
Као што смо рекли, један од услова да је $H_d(Y, G) \neq 0$ је да Y садржи $S = \partial\Delta_{d+1}$.
Из леме 3.4 добијамо да за $p \ll n^{-1}$, $Y_{n,p,d}$ не садржи S а.с.с., док за $p \gg n^{-1}$ $Y_{n,p,d}$ а.с.с. садржи S. Питање је шта се дешава за $p = \frac{c}{n}, c > 0$.

Лема 3.5. *Нека је $p = \frac{c}{n}$. Тада*

$$\mathbb{P}\left(\partial\Delta_{d+1} \hookrightarrow Y_{n,p,d}\right) \to 1 - \exp\left\{-\frac{c^{d+2}}{(d+2)!}\right\}.$$

Доказ. Нека су $A_1, \ldots, A_{\binom{n}{d+2}}$ сви $(d+1)$-димензиони симплекси у Δ_{n-1}. Са B_i означимо догађај да $\partial A_i \subset Y_{n,p,d}$, а са X број догађаја B_i. Нас интересује вјероватноћа да је $X = 0$, тј. да ни један комплекс није изабран.
Јансонова неједнакостнам даје добру оцјену ове вјероватноће у случају када између догађаја B_i постоји мало зависности.
Подсјетимо се, у Јансоновој неједнакости имамо полазни скуп Ω (што је у овом случају скуп свих $d-$симплекса, $\Delta_{n-1}(d)$), те случајно бирамо $R \subset \Omega$ тако што, за свако $r \in \Omega$, r бирамо са вјероватноћом p_r, независно од осталих елемената Ω. У овом случају $Y_{n,p,d}$ поистовјећујемо са скупом изабраних $d-$симплекса.
Сем тога, имамо "лоше" скупове, што у овом случају представљају $d-$симплекси од $\partial A_1, \ldots, \partial A_{\binom{n}{d+2}}$, као и лоше догађаје, да су лоши скупови подскупови од R, што у нашем случају представљају догађаји B_i.

Конструишемо граф зависности на следећи начин: два догађаја B_i и B_j су повезана, $i \sim j$, ако је $i \neq j$ и скупови који одговарају овим догађајима нису дисјунктни, тј. $\partial A_i \cap \partial A_j \neq \emptyset$, при чему симплицијалне комплексе ∂A_i поистовјећујемо са скупом d-симплекса који им припадају.
Како два $(d+1)$-симплекса могу да имају највише један заједнички d-симплекс, то значи да је $i \sim j$ акко A_i и A_j имају тачно један заједнички симплекс.
Нека је $M = \prod \mathbb{P}(B_i^c) = \prod (1 - \mathbb{P}(B_i))$, $\mathbb{P}(B_i) \leq \varepsilon$ и $\Delta = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(B_i \cap B_j)$, гдје сума иде по свим неуређеним паровима $i \sim j$.
Јансонова неједнакост, дата у теореми 1.1 нам даје

$$M \leq \mathbb{P}(X = 0) \leq M e^{\Delta/(1-\varepsilon)}.$$

Како сваки A_i садржи тачно $d+2$ d-димензионална симплекса, имамо

$$\mathbb{P}(B_i) = p^{d+2}, \quad M = \left(1 - p^{d+2}\right)^{\binom{n}{d+2}}.$$

Сем тога, $i \sim j$ ако симплекси A_i и A_j имају заједнички d-симплекс.
У том случају $A_i \cup A_j$ садржи $2d+3$ d-симплекса, па је

$$\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = p^{2d+3}.$$

Број неуређених парова је $\binom{n}{d+1}\binom{n-d-1}{2}$, па имамо

$$\Delta = \binom{n}{d+1}\binom{n-d-1}{2} p^{2d+3}.$$

За $\varepsilon = p^{d+2}$ добијамо

$$\left(1 - p^{d+2}\right)^{\binom{n}{d+2}} \leq \mathbb{P}(X = 0) \leq \left(1 - p^{d+2}\right)^{\binom{n}{d+2}} e^{\frac{\Delta}{1-p^{d+2}}}.$$

Како је

$$\frac{\Delta}{1 - p^{d+2}} \leq \frac{n^{d+3}}{1 - p^{d+2}} \frac{c^{2d+3}}{n^{2d+3}} = o(1),$$

добијамо да је

$$\mathbb{P}(X = 0) \sim \left(1 - p^{d+2}\right)^{\binom{n}{d+2}} \to \exp\left\{-\frac{c^{d+2}}{(d+2)!}\right\}.$$

□

3.2.3 Колапсибилност

Као што смо видјели, за $p = \frac{c}{n}$, $c > c_d$, горња хомологија скоро сигурно не нестаје, тако да комплекс скоро сигурно није колапсибилан. Као што смо већ смо рекли једна од очигледних препрека да комплекс буде колапсибилан је да садржи $\partial \Delta_{d+1}$. За $p = \frac{c}{n}$ та вјероватноћа је позитивна, тако да не постоји константа c', таква да је $Y_{n,p,d}$ а.с.с. колапсибилан за $c < c'$.
Међутим, постоји константа γ_d, таква да за $c < \gamma_d$ једина препрека да комплекс буде колапсибилан је да садржи $\partial \Delta_{d+1}$.

Теорема 3.6. *Постоји константа γ_d, таква да, за $p = \frac{c}{n}, c < \gamma_d$ имамо*

$$\mathbb{P}(Y_{n,p,d} \text{ је колапсибилан или } \partial\Delta_{d+1} \hookrightarrow Y_{n,p,d}) \to 1.$$

Доказ се састоји из два дијела. У првом дијелу доказујемо да, ако комплекс садржи мало минимално језгро, тада он садржи $\partial\Delta_{d+1}$. У другом дијелу доказујемо да скоро сигурно Y не садржи језгро са великим бројем d страна.

Теорема 3.7. *Нека је $Y \in Y_{n,p,d}$, $p \leq \frac{c}{n}$. Тада постоји константа $\delta = \delta(c,d) > 0$, таква да асимптотски скоро сигурно свако минимално језгро $K \subset Y$, такво да је $f_d(K) \leq \delta n^d$ мора садржати границу $\partial\Delta_{d+1}$.*

Нека је $m = \delta n^d$, $\delta > 0$. Хоћемо да процијенимо број минималних језгара C таквих да је $f_d(C) = m$.
Примијетимо да, за сваку партицију $A \cup B$ скупа d симплекса минималног језгра C постоји $\sigma_1 \in A$, $\sigma_2 \in B$ који су сусједни. Ако не, тада су и A и B језгра, тако да K није минимално језгро.
То значи да за свако минимално језгро C постоји низ симплицијалних комплекса $C_1, \ldots, C_m = C$, такав да се C_1 састоји од једног d симплекса, а сваки сљедећи комплекс добијамо из претходног додајући нови d симплекс који је сусједан неком већ постојећем симплексу.
Дефинишимо пар појмова.
Нека је $b = \left(\frac{d(d+1)\delta}{2}\right)^{1/d}$. Страну димензије $d-2$ називамо *тешком* ако се налази у бар bn $(d-1)$-страна, иначе је називамо *лаганом.* Страну димензије $i < d-2$ називамо тешком ако је покривена са бар bn тешких страна димензије $i+1$, иначе је називамо лаганом. Ако са T_i, L_i означимо скуп тешких и лаганих i-страна, редом, тада добијамо да је

$$|T_{d-2}| \leq \frac{d(d+1)m}{2bn} = b^{d-1}n^{d-1}.$$

Даље, добијамо да вриједи

$$|T_i| \leq \frac{|T_{i+1}|(i+2)}{bn},$$

одакле индукцијом добијамо да важи

$$|T_i| \leq (bn)^{i+1}\frac{(d-1)!}{(i+1)!}.$$

Са T_i^σ, L_i^σ означимо скуп тешких и лаганих i-страна које припадају страни σ.
Посматрајмо поменути низ $C_1, \ldots, C_m$. У комплексу C_i $(d-1)$-страну σ називамо *засићеном* или *незасићеном* у зависности од тога да ли је сваки d симплекс у C који садржи σ у C_i или не.
У сваком кораку бирамо незасићену $(d-1)$-страну σ и додајемо d симплекс t_i који ју садржи, а да већ није у C_i. Ту страну можемо бирати на

произвољан начин. Да бисмо процијенили број минималних језгара са m страна хоћемо да процијенимо број начина да изградимо низ $C_0, \dots, C_m$ који задовољава одређене особине, и у томе ће нам кључну улогу играти начин на који бирамо незасићену страну σ.
Свакој $(d-1)$-страни σ придружимо вектор $(v_0, \dots, v_{d-2})$ у коме v_i означава број тешких i страна које припадају σ. Све стране уредимо лексикографски у односу на овај вектор, при чему оне са истим вектором уредимо прозивољно. Страну σ називамо *примарном* ако јој одговара нула вектор.
Од свих незасићених страна комплекса C_i бирамо ону која је најмања у датом поретку и на њу додајемо d симплекс.
У кораку j од комплекса C_{j-1} добијамо C_j тако што $(d-1)$-страну σ "проширујемо" до d стране $\sigma \cup \{y\}$.
Такав корак је *добар* уколико важи бар један од сљедећа три услова

(d1) чвор $\{y\}$ је тежак;

(d2) постоји лагана $(d-2)$-страна $\tau \subset \sigma$, таква да је $\tau \cup \{y\}$ у C_{j-1};

(d3) Постоји лагана i-страна $\tau \subset \sigma$, таква да је $\tau \cup \{y\}$ тешка, за неко $i < d-2$.

Број начина да проширимо страну у првом случају је ограничен са $|T_0| \leq (d-1)!bn$.
У другом случају τ се налази у највише bn $(d-1)$-страна тако да је број начина да се страна σ прошири ограничен са dbn.
Слично, за свако $i = 0, 1, \dots, d-3$ страна τ је лагана, па се налази у највише bn $(i+1)$-тешких страна. С друге стране, број i-страна у σ је $\binom{d}{i+1}$, тако да је број начина да се σ прошири ограничен са $\binom{d}{i+1}dbn$.
У сваком случају, број начина да изаберемо y и да добијемо добар корак је ограничен са $d^d bn$.
Корак који није добар називамо лош. У случају да је корак лош, користимо тривијалну горњу оцјену за број начина да изаберемо y, n.
Докажимо да сваки процес које даје минимално језгро мора имати доста добрих корака.

Лема 3.6. *На сваких d^3 лоших постоји бар један добар корак.*

Доказ. Претпоставимо да смо у једном тренутку изабрали $(d-1)$-димензионалну незасићену страну σ која није примарна, и да је корак којим смо је проширили лош.
Нека је i најмања димензија таква да је $|T_i^\sigma| > 0$. Такво i мора да постоји, иначе би страна била примарна.
Како је корак $\sigma \cup \{y\}$ лош, то за свако $i' < i$ свака i'-страна $\sigma \cup y$ је лагана, као и свака i-страна која садржи y.
Нека је $u \in \sigma$ чвор и $\sigma_u = \sigma \cup y \setminus u$.
Тада је $|T_{i'}^{\sigma_u}| = 0$ за све $i' < i$. Како $\sigma \cup \{y\}$ нема лаганих i-страна које садрже y то је

$$|T_i^\sigma| = |T_i^{\sigma'}| - r_i^\sigma(u),$$

гдје је $r_i^\sigma(u)$ број тешких i страна у σ које садрже u.
Како је $|T_i^\sigma| > 0$, то постоји чвор u такав да је $r_i^\sigma(u) > 0$. Изаберимо чвор u тако да је $r_i^\sigma(u)$ максимално.
Нека је $\sigma' = \sigma_u$. Тада је $\sigma' < \sigma$ у датом поретку. Како је σ биран у претходном кораку, слиједи да је σ' мања од свих $(d-1)$-незасићених страна које су већ постојале у претходном кораку. Све нове стране су облика σ_v, за неко $v \in \sigma$, а како смо одабрали чвор u такав да је $r_i^\sigma(u)$ максимално, то је σ' мања од свих њих. Одатле слиједи да је σ' мања од свих незасићених страна у C_j.
Ако је $\sigma' \in C_{j-1}$, она је морала бити незасићена, јер $\sigma' \cup \{u\} = \sigma \cup \{y\} \notin C_{j-1}$, али у том случају би бирали σ', а не σ, тако да имамо $\sigma' \notin C_{j-1}$. Одатле слиједи да је нови d-симплекс $\sigma \cup \{y\}$ једини d-симплекс у C_j који садржи σ'. Пошто је $C_m = C$ језгро, страна σ' мора бити незасићена, те у следећем кораку морамо бирати σ'.
Нека је V_k^σ скуп чворова у σ који се налазе у тешким k-странама σ, T_j^σ. Како за $k < i$ нема тешких страна, то је $V_k^\sigma \emptyset$. Сем тога, видјели смо да је $V_k^{\sigma'} = \emptyset$, за $k < i$.
Посматрајмо i-стране од σ и σ'. Једине стране у којима се они разликују су оне које садрже y и u. Како y не припада тешкој i-страни $\sigma \cup \{y\}$, то y не припада тешкој i-страни у σ', те имамо $V_i^{\sigma'} \subset V_i^\sigma$. Сем тога, $r_i(u) > 0$, те u припада некој тешкој i-страни од σ, те је

$$V_i^{\sigma'} \subset V_i^\sigma \setminus \{u\} \quad \text{тј.} \quad |V_i^{\sigma'}| \leq |V_i^\sigma| - 1.$$

Како $0 \leq |V_i^\sigma| \leq d$ и $0 \leq i \leq d-2$, то може да постоји највише $d(d-1)$ узастопних лоших потеза који не стварају незасићене примарне стране.
Претпоставимо сада да примарну страну σ проширујемо симплексом $\sigma \cup \{y\}$ и да је то лош корак. Нека је $\sigma = \{a_1, \ldots, a_d\}$. Нове стране су облика $\sigma^i = \{a_1, \ldots, a_d, y\} \setminus \{a_i\}$. Како се ради о лошем кораку, то је y лаган чвор, тј. сви чворови од σ^i су лагани.
Свака i'-страна од σ^i која не садржи y је лагана, јер је то и i'-страна σ. Свака i'-страна за $0 < i' < d-1$ која садржи y је лагана, иначе би потез био добар, по услову d3. Одавде добијамо да је σ^i примарна страна.
Ако σ^i није нова страна, онда је потез добар по услову d2. Како је σ^i нова, то она мора бити незасићена страна.
Одавде добијамо да проширивањем примарне стране лошим потезом добијамо нових d-незасићених примарних страна. Сем тога, сваких $d(d-1)$ узастопних лоших потеза даје барем једну незасићену примарну страну.
Из разматраног слиједи да се број незасићених примарних страна може смањити једино добрим потезом. При томе сваки потез смањује број незаисћених примарних страна за највише $d+1$, одакле добијамо да је

$$\frac{l_p}{d(d-1)} \leq d_p(d+1)$$

тј.

$$d_p \geq \frac{l_p}{d^3}$$

гдје l_p и d_p означавају број лоших и добрих потеза редом. $\square$

Сада можемо да оцијенмо број минималних језгара са m грана.
Видјели смо да за свако минимално језгро са $m = \delta n^d$ грана постоји низ d-симплекса $C_1, \ldots, C_m$, који задовољава следеће особине.
Постоји скуп $(d-2)-$страна које називамо тесхим, и њима су одређени скупови тешких i-страна за $i < d-2$.
Све стране димензије $d-1$ су уређене лексикографски у односу на вектор $(v_0, \ldots, v_{d-2})$, гдје је v_i број тешких страна димезије i у датој $(d-1)$-страни.
Симплекс C_1 је изабран произвољно, и све његове $(d-1)$-стране су незасићене. У сваком следећем кораку додајемо нови $d-$димезионални симплекс. При томе нови симплекс садржи минималну незасићену $(d-1)$-страну.
Након сваког корака највише $d+1$ страна постану засићене или незасићене, остале остају исте као и раније.
Постоје добри и лоши кораци. Однос добрих и лоших корака је бар $1/d^3$.
При лошем кораку комплекс можемо проширити на највише n начина, док при добром кораку комплекс можемо проширити на највише $d^d bn$ начина.

Лема 3.7. *Нека је $m = \delta n^d$, при чему је $d^d b < 1$ и $2(d^d\delta)^{(d-1)/2}$. Са $C_{m,n}$ означимо број минималних језгара са m грана на скупу чворова $\{1, \ldots, n\}$. Тада постоји константа $c_1 = c_1(d)$ таква да је*

$$C_{n,m} \leq \binom{n^{d-1}}{(d^2m)^{\frac{d-1}{d}}} n^d n^m \left(c_1 \delta^{\frac{1}{d^4}}\right)^m .$$

Доказ. Посматрајмо све низове $C_1, \ldots, C_m$ који задовољавају горе описане особине.
Прво изаберимо $b^{d-1}n^{d-1}$ страна димезије $(d-2)$ које могу да буду тешке. То можемо да урадимо на $\binom{\binom{n}{d-1}}{b^{d-1}n^{d-1}}$ начина. То нам одређује скуп тешких i страна за $0 \leq i \leq d-2$.
Након тога бирамо први симплекс C_1 и све његове стране означимо као незасићене. То можемо да урадимо на највише $\binom{n}{d+1}$ начина.
Одлучимо који потез је добар, а који лош и, ако је потез добар по ком услову је добар (при томе, ако је добар по услову d3, онда одлучимо и за које $1 \leq i \leq d-3$ постоји i страна која задовољава услов), што нам даје укупно $d+1$ могућности. У добром кораку чвор којим се проширује минимална незасићена страна можемо да изабрати на највише $d^d bn$ начина.
Број проширења за лош корак је највише n. При томе је однос добрих и лоших корака барем $1/d^3$.
На крају сваког потеза одлучимо које $(d-1)$-стране су постале засићене.
Страна може постати засићена само ако припада новом комплексу, тако да је број измјена највише 2^{d+1}. Одавде добијамо да је

$$C_{m,n} \leq \binom{\binom{n}{d-1}}{b^{d-1}n^{d-1}} \binom{n}{d+1} (d+1)^{m-1} n^{m-1} (d^d b)^{m/d^3} \left(2^{d+1}\right)^m .$$

Имамо да је

$$\binom{\binom{n}{d-1}}{b^{d-1}n^{d-1}} \leq \binom{n^{d-1}}{(bn)^{d-1}} = \binom{n^{d-1}}{\left(\frac{d(d+1)m}{2}\right)^{\frac{d-1}{d}}} \leq \binom{n^{d-1}}{(d^2m)^{\frac{d-1}{d}}},$$

$$\binom{n}{d+1} \leq n^{d+1},$$

$$(d^d b)^{d_p} \leq (d^d b)^{\frac{m}{d^3}},$$

те добијамо да је

$$\begin{aligned} C_{m,n} &\leq \binom{n^{d-1}}{(d^2m)^{\frac{d-1}{d}}} n^{d+1} n^{m-1} \left(2^{d+1}(d+1)d^{\frac{1}{d^2}} b^{\frac{1}{d^3}}\right)^m = \\ &= \binom{n^{d-1}}{(d^2m)^{\frac{d-1}{d}}} n^d n^m \left(c_1 \delta^{\frac{1}{d^4}}\right)^m \end{aligned}$$

гдје је $c_1 = 2^{d+1}(d+1)d^{1/d^2}\left(\dfrac{d(d+1)}{2}\right)^{\frac{1}{d^4}}$. □

Сада можемо доказати теорему 3.7

Доказ теореме 3.7. Изаберимо $\delta = \delta(c) \leq (c_1 c/e)^{-d^4}$, тако да задовољава услове претходне леме.
Нека је X_m број минималних језгара K са m грана, која не садрже $\partial\Delta_{d+1}$, тако да је $K \subset Y \in Y_{n,p,d}$. Тада имамо $m \geq d+3$.
Прво посматрајмо случај $m_1 \leq m \leq m_2$, гдје је $m_1 = (d^3 \ln n)^d$, $m_2 = \delta n^d$.
Имамо да је

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_1}^{m_2} \mathbb{E}(X_m) &\leq \sum_{m=m_1}^{m_2} C_{n,m} p^m \leq \\ &\leq \sum_{m=m_1}^{m_2} (n^{d-1})^{\left(d^2 m\right)^{\frac{d-1}{d}}} n^d \left(c_1 c \delta^{\frac{1}{d^4}}\right)^m \leq \\ &\leq n^d \sum_{m=m_1}^{m_2} (n^{d-1})^{\left(d^2 m\right)^{\frac{d-1}{d}}} e^{-m} \leq \\ &\leq n^d \sum_{m=m_1}^{m_2} (n^{d-1} e^{-\frac{m^{1/d}}{d^2}})^{\left(d^2 m\right)^{\frac{d-1}{d}}} \leq \\ & n^d \sum_{m=m_1}^{m_2} (\frac{1}{n})^{\left(d^2 m\right)^{\frac{d-1}{d}}} = o(1). \end{aligned}$$

Одавде слиједи да скоро сигурно Y не садржи минимално језгро са $m_1 \leq m \leq m_2$ грана.
Нека је $d+3 \leq m \leq m_1$.

Нека је S минимално језгро, такво да је $f_d(S) = m$. За произвољан чвор $v \in S$ са $\Delta(v)$ означимо број d-симплекса који га садрже. Како је S језгро, то имамо $\Delta(v) > 0 \Rightarrow \Delta(v) \geq d+1$.
Претпоставимо да d-симплекс $\sigma \in S$ садржи два чвора u, v таква да је $\Delta(u) = \Delta(v) = d+1$. Тада се лако види да S мора садржати $\partial\Delta_{d+1}$. Како је S минимално језгро са бар $d+3$ d-стране, то је контрадикција.
Нека је t број чворова таквих да је $\Delta(u) = d+1$. Нека је v_S број чворова за које је $\Delta(v) \neq 0$. Тада имамо

$$(d+1)t + (d+2)(v_S - t) \leq (d+1)m.$$

Како у сваком d-симплексу има највише један чвор такав да је $\Delta(v) = d+1$, то је $t \leq \dfrac{m}{d+1}$, па добијамо да је

$$v_S(d+2) \leq (d+1)m + t \leq \left(d + 1 + \frac{1}{d+1}\right) m,$$

тј.

$$v_S \leq \frac{\left((d+1)^2 + 1\right) m}{(d+1)(d+2)} \leq \frac{d+3}{d+4} m.$$

Одавде слиједи да је број минималних језгара

$$C_{m,n} \leq \binom{n}{v_S} \binom{\binom{v_S}{d+1}}{m},$$

па имамо да је

$$\mathbb{E}\left(X_m\right) \leq n^{v_S} (v_S^{d+1} p)^m \leq \left(\left(\frac{d+3}{d+4}\right)^{d+1} n^{\frac{d+3}{d+4}} m^{d+1} \frac{c}{n} \right)^m \leq \left(c_2 n^{\frac{-1}{d+4}} \ln n^{d(d+1)}\right)^m,$$

гдје је $c_2 = c_2(d)$ константа.
Сада имамо

$$\sum_{m=d+3}^{m_1} \mathbb{E}\left(X_m\right) \leq \sum_{m \geq 1} \left(c_2 n^{\frac{-1}{d+4}} \ln n^{d(d+1)}\right)^m = O\left(n^{-\frac{1}{d+4}} \ln n^{d(d+1)}\right) = o(1).$$

Одавде добијамо да очекивани број минималних језгара $S \subset Y \in Y_{n,p,d}$, таквих да је $d+3 \leq f_d(S) \leq \delta n^d$ тежи нули. Одавде слиједи да је $Y_{n,p,d}$ а.с.с не садржи минимално језгро $m \leq \delta n^{d-1}$ d-симплекса, које није $\partial\Delta_{d+1}$.

$\square$

Једноставна посљедица ове теореме је

Посљедица 1. *Нека је $Y \in Y_{n,p,d}$, $p \leq cn^{-1}$, и $\delta = \delta(c,d)$ као у претходној теореми. Тада*

$$\mathbb{P}\left(f_d(Y) \leq \delta n^d, Y \text{ није колапсибилан и } \partial\Delta_{d+1} \not\hookrightarrow Y\right) \to 0.$$

Из до сада разматраног добијамо сљедећу теорему

Теорема 3.8. *Нека је $Y \in Y_{n,p,d}$.*

(i) Ако је $p \ll n^{-1}$, тада

$$\mathbb{P}(Y \text{ није колапсибилан}) \to 0.$$

(ii) Ако је $p \gg n^{-1}$, тада

$$\mathbb{P}(Y \text{ је колапсибилан}) \to 0.$$

Доказ. (i) Из леме 3.4 добијамо да за $p \ll n^{-1}$

$$\mathbb{P}(\partial\Delta_{d+1} \not\to Y) \to 1,$$

те је довољно доказати је а.с.с. $f_d(Y) \leq \delta n^d$, за прозивољно $\delta > 0$.

Како је f_d случајна промјењива са биномном расподјелом $Bi(\binom{n}{d+1}, p)$, то је $\mathbb{E}\left(f_d\right) \leq n^{d+1}p = n^d np$, па имамо да је

$$\mathbb{P}(f_d(Y) \geq \delta n^d) \leq \exp\left\{-\frac{n^{2d}(\delta - np)^2}{2\binom{n}{d+1}}\right\} = o(1).$$

(ii) За $p \gg n^{-1}$ имамо

$$\mathbb{P}\left(Y \text{ је колапсибилан}\right) \leq \mathbb{P}\left(\partial\Delta_{d+1} \not\to Y\right) = o(1).$$

□

На почетку смо рекли да нам је циљ да докажемо да постоји γ_d тако да, за $p = \frac{c}{n}$, $c < \gamma_d$ случајни комплекс $Y_{n,p,d}$је или колапсибилан или садржи границу $d+1$ симплекса.
Из претходног разматрања слиједи да $Y_{n,p,d}$ или има границу Δ_{d+1}, или нема малих језгара, за произвољно $p = \frac{c}{n}$, те нам преостаје да докажемо да постоји константа γ_d таква да за $0 < c < \gamma_d$ граф $Y_{n,p,d}$ нема великих језгара.

Случајно d-стабло

Симплицијални комплекс T димензије d називамо d-стаблом ако се његови чворови могу поредати у низ $v_1, \ldots, v_l$ тако да је комплекс $Lk(T[v_1, \ldots, v_i], v_i)$ $d-1$ димензионалан симплекс, за свако $i \geq d+1$. Другим ријечима, T се може добити тако што почнемо од симплекса $\{v_1, \ldots, v_{d+1}\}$ и у сваком кораку бирамо $d-1$ страну τ која се налази у комплексу, и њу проширимо новим тјеменом v_i до d-стране, тј. додајемо d-симплекс $\tau \cup \{v_i\}$.
За комплекс S са G_S означимо граф чији су чворови све $d-1$ стране комплекса S, а два чвора τ_1, τ_2 су сусједни уколико је $\tau_1 \cap \tau_2$ d-симплекс у S.

Лако се види да је S d-стабло ако и само ако је граф G_S стабло. Удаљеност између двије $d-1$-стране у комплексу S смо дефинисали као удаљеност између чворова у графу G_S, и означавамо је са $d_S(\tau_1, \tau_2)$.
Коријенско стабло је пар (T, τ), гдје је T d стабло, а коријен $\tau \in T$ његова $d-1$ страна.
Коријенско стабло T са коријеном τ, дубине највише $k \geq 0$ је стабло у коме за сваки $(d-1)$-симплекс τ' важи $d_T(\tau, \tau') \leq k$. Такво коријенско стабло T можемо добити на сљедећи начин. На почетку имамо комплекс T_0 који се састоји само од τ. Посматрајмо низ корака $1 \leq i \leq k$, при чему у кораку i имамо стабло T_{i-1}. Нека су $\tau_1, \ldots, \tau_m$ све слободне $(d-1)$-стране стабла T_{i-1}. Тада за сваку од страна τ_t додајемо нових $j_t \geq 0$ чворова $z_{t_1}, \ldots, z_{t_{j_t}}$, и проширимо ту страну d-симплексима $\tau_t z_{t1}, \ldots, \tau_t z_{tj_i}$. При томе нове d-симплексе називамо *потомцима* стране τ. Тако добијено стабло означавамо са T_i. На крају имамо да је $T_k = T$.
Дефинишимо операцију *орезивања* коријенског стабла (T, τ_0). Нека су $\tau_1, \ldots, \tau_m$ све слободне $(d-1)$-стране у T, различите од τ_0, и нека су $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ слободне d-стране које садрже $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Тада за коријенско стабло T' са коријеном τ_0, $T' = T \setminus \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, кажемо да је добијено орезивањем стабла T. Примијетимо да је операција орезивања јако слична операцији колапсирања. Разлика је у томе што не избацујемо d-симплексе који садрже коријен. Ако након i орезивања стабло постаје τ_0, тада кажемо да стабло колапсира у τ_0 након i корака.
Нека је дата случајна промјењива X која узима вриједности у $\mathbb{N}_0$. Са $\mathcal{T}_d(k)$ означимо простор свих случајних стабала са коријеном τ_0, и расподјелом X који дефинишемо на сљедећи начин.
За $k = 0$, $\mathcal{T}_d(0)$ се састоји од $d-1$ симплекса τ_0.
Нека је $k > 0$. Тада прво бирамо случајно бирамо број i, при чему i има расподјелу X. Након тога τ_0 проширујемо са нових i чворова $v_1, \ldots, v_i$, те стаблу додајемо симплексе $\tau_0 v_1, \ldots, \tau_0 v_i$.
Сада имамо нових di страна димензије $d-1$, $\tau_1, \ldots, \tau_{di}$. Над сваком од ових страна као коријеном генеришемо случајно коријенско стабло $\mathcal{T}_d(k-1)$ при чему су ова стабла независна једно од другога. Добијени простор је у $\mathcal{T}_d(k)$.
Са $\mathcal{T}_d(k, \lambda)$ означавамо простор случајних коријенских стабала $\mathcal{T}_d(k)$ при чему промјењива X има Поасонову расподјелу са коефицијентом λ, $Po(\lambda)$.
Јасно је да након највише k орезивања стабло $T \in \mathcal{T}_d(k)$ постаје τ_0. Нека је $\rho_\lambda(k)$, $k \geq 1$ вјероватноћа да $T \in \mathcal{T}_d(k, \lambda)$ колапсира у τ_0 након највише $k-1$ орезивања.

Лема 3.8. *Нека је $\rho_\lambda = \lim_{k\to\infty} \rho_\lambda(k)$. Тада је ρ најмање позитивно рјешење једначине*

$$e^{-\lambda(1-x)^d} = x.$$

Доказ. Стабло $T \in \mathcal{T}_d(1, \lambda)$ је τ_0 ако и само ако у првом кораку нисмо додали ни једну d страну, тако да имамо

$$f_\lambda(1) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}.$$

Нека је $k > 1$. Нека су $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ све d стране додате у првом кораку. Тада T колапсира у τ_0 у највише $k-1$ корака ако и само ако за свако i постоји $(d-1)-$ страна $\tau_0 \neq \tau_i \in \sigma_i$ тако да стабло $T_i \in \mathcal{T}_d(k-1, \lambda)$ са коријеном τ_i колапсира у τ_i у највише $k-2$ корака. Одавде добијамо да је

$$\rho_\lambda(k) = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^t}{t!} \left(1 - (1 - \rho_\lambda(k-1))^d\right)^t = e^{-\lambda(1-\rho_\lambda(k-1))^d}.$$

Ако дефинишемо $\rho_\lambda(0) = 0$, тада низ $\rho_\lambda(k)$, $k \geq 0$ задовољава

$$\rho_\lambda(k+1) = \exp\{-\lambda(1 - \rho_\lambda(k))^d\}.$$

Функција

$$e^{-\lambda(1-x)^d}$$

је растућа, те се лако добија да је низ $\rho_\lambda(k)$ строго растући, а самим тим и конвергентан. Сем тога, ρ_λ је рјешење једначине

$$e^{-\lambda(1-x)^d} = x,$$

а како је $\rho_\lambda(0) = 0$ и $e^{-\lambda(1-x)^d}$ растућа, то је ρ_λ најмање позитивно рјешење ове једначине.

□

Посматрајмо једначину $e^{-\lambda(1-x)^d} = x$. Како 1 задовољава дату једначину, то је $\rho_\lambda \leq 1$. Питање је за које λ је $\rho_\lambda < 1$.
Нека је $f(x) = e^{-\lambda(1-x)^d} - x$. За $\lambda = 0$ најмање позитивно рјешење једначине $f(x) = 0$ је $\rho_0 = 1$. Сем тога, $e^{-\lambda(1-x)^d} - x$ је опадајућа по λ за $x \in (0, 1)$, тако да, ако за неко λ_0 постоји позитивна нула функције $f(x)$ мања од 1, тада постоји и за све $\lambda \geq \lambda_0$. Одатле добијамо да постоји константа λ_d таква да за $\lambda < \lambda_d$ имамо $f_\lambda = 1$, а за $\lambda > \lambda_d$, $f_\lambda < 1$.
За константу γ_d у теореми 3.6 узимамо $\gamma_d = \lambda_d$.
Нека је Y d-димензионални симплицијални комплекс са n чворова и τ његова $(d-1)$-страна. Посматрајмо низ комплекса $S_1(Y), S_2(Y), \ldots, S_i(Y)$ добијених на сљедећи начин:

- $S_0(Y) = \tau$.
- Нека је $i \geq 1$. Нека су $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ сви d-симплекси у Y који садрже бар једну $(d-1)$-страну $\tau \in S_{i-1}(Y)$. Тада је $S_i = S_{i-1} \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$.

Нека је $\mathcal{T}_d$ фамилија свих d-стабала и нека је $Y \in Y_{n,p,d}$ случајни симплицијални комплекс. Тврдимо да је за $p = \frac{c}{n}$ и унапријед задато k, комплекс $S_k(Y_{n,p,d})$ стабло и да је при томе максималан степен највише $\ln n$.
Са $\Delta(Y)$ означимо максималан степен, тј.

$$\Delta(Y) = \max\{d_Y(\tau)\}$$

гдје је τ $(d-1)$-димензионална страна од Y.

Лема 3.9. *Нека је* $k \in \mathbb{N}$ *и* $c > 0$, $p \leq \frac{c}{n}$. *Тада, за* $Y \in Y_{n,p,d}$ *важи*

$$\mathbb{P}(S_k(Y) \in \mathcal{T}_d \text{ и } \Delta(Y) \leq \ln n) \to 1.$$

Доказ. Нека је τ произвољна $(d-1)$-страна у Y. Тада је $d_Y(\tau)$ случајна промјењива са биномном расподјелом $Bi((n-d), p)$, па према леми 1.8 имамо да за $\lambda > 1$ вриједи

$$\mathbb{P}(d_Y(\tau) > \lambda p(n-2)) \leq e^{\lambda} \lambda^{-\lambda^{p(n-2)}}.$$

За довољно велико n је $\ln n \geq p(n-2)$, па узимајући $\lambda = \ln n / p(n-2)$ добијамо

$$\mathbb{P}(d_Y(\tau) > \lambda) \leq \exp\{\ln n - \ln n \ln\ln n + p(n-2)\ln n\} \leq n^{-C \ln\ln n},$$

за неку костанту $C > 0$.
Сада добијамо да је

$$\mathbb{P}(\Delta(Y) > \ln n) \leq \binom{n}{d} n^{-C\ln\ln n} \leq n^{d - C\ln n} = o(1).$$

Претпоставимо да је $\Delta(Y) \leq \ln n$. Тада су и број чворова и број грана у $S_k(Y)$ ограничени са $\ln^k n$, тј. важи $f_0(S_k(Y)) = O(\ln^k n)$, $f_{d-1}(S_k(Y)) = O(\ln^k n)$.
Комплекс $S_k(Y)$ је стабло ако и само ако ни у једном кораку i нисмо додали d-симплекс τv гдје је τ $d-1$ страна, а v чвор такви да су и τ и v у S_{i-1}.
Број таквих парова је највише $f_0(S_{k-1}) \cdot f_{d-1}(S_k(Y))$, тако да је

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_k(Y) \notin \mathcal{T}_d \mid \Delta_Y \leq \ln n\right) &\leq 1 - (1-p)^{f_0(S_{k-1}) \cdot f_{d-1}(S_k(Y))} \leq \\ &\leq 1 - \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{O\left(\ln^{2k+1} n\right)} = o(1).\end{aligned}$$

Сада имамо

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(S_k(Y) \in \mathcal{T}_d \text{ и } \Delta(Y) \leq \ln n\right) \geq \\ \geq &1 - \mathbb{P}\left(\Delta(Y) > \ln n\right) - \mathbb{P}\left(S_k(Y) \notin \mathcal{T}_d \mid \Delta(Y) \leq \ln n\right) \cdot \mathbb{P}\left(\Delta(Y) \leq \ln n\right) = \\ = &1 - o(1).\end{aligned}$$

□

Ако је $Y \in Y_{n,p,d}$ такво да је $S_k = S_k(Y)$ стабло, и $\tau_0 \in \Delta_{n-1}(d-1)$, тада S_k можемо генерисати на сљедећи начин.

- $S_0 = \tau_0$.

- Нека је $1 \leq i \leq k$. Прво генеришемо $T_0 = S_{i-1}$. Са $\mathcal{U}$ означимо скуп свих $d-1$ страна комплекса T_0, τ, таквих да је $d_T(\tau_0, \tau) = i$. Нека је $\mathcal{U} = \tau_1, \ldots, \tau_m$. Посматрајмо низ комплекса $T_0, \ldots, T_m$ добијених на сљедећи начин. За свако $1 \leq t \leq m$ изаберимо j нових чворова $z_1, \ldots, z_j$ при чему је j случајно изабран број који има биномну расподјелу $Bi(n-n', p)$, независно од остатка процеса, гдје је n' број чворова у T_{t-1}. Тада је $T_t = T_{t-1} \cup \{\tau_t z_1, \ldots, \tau_t z_j\}$. На крају добијамо $S_i = T_m$.

Овај процес називамо процес претраживања комплекса $Y_{n,p,d}$ из $(d-1)$-стране τ_0. Простор стабала који настаје у овом процесу означавамо са $\mathcal{S}_k$. Процес је у суштини исти као процес генерисања случајног стабла, с тим што умјесто унапријед задате расподјеле X број потомака има посебну расподјелу за сваку $(d-1)$-страну, $Bi(n-n', p)$.
Свако стабло дубине највише k припада простору $\mathcal{T}_d(k)$. Ако има највише n чворова онда се може добити и као стабло у S_k, при чему та два стабла имају различите вјероватноће у та два простора. Сљедећа лема каже да, за $p = \frac{c}{n}$, простор комплекса $S_k(Y_{n,p,d})$ се понаша (у расподјели) као $\mathcal{T}_d(k, c)$.

Лема 3.10. *Нека је $p = \frac{c}{n}$, $c > 0$, и $Y \in Y_{n,p,d}$. Тада, за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0, тако да $n \geq n_0$ тотална варијација у дистрибуцији $S_k(Y)$ и $\mathcal{T}_d(k, c)$ је мања од ε.*

Доказ. Како за $Y \in Y_{n,p,d}$ а.с.с. важи да је $S_k(Y)$ стабло и $\Delta(Y) \leq \ln n$, то је довољно доказати да, за довољно велико n

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\mathbb{P}_1(T) - \mathbb{P}_2(T)| \leq \varepsilon$$

гдје је $\mathcal{T}$ фамилија свих корijенских стабала (T, τ_0) са највише n чворова таквих да свака $(d-1)$-страна има највише $\ln n$ потомака, дубине највише k. При томе $\mathbb{P}_1(T)$ и $\mathbb{P}_2(T)$ означавају вјероватноћу стабла T у просторима $S_k(Y)$ и $\mathcal{T}_d(k)$, редом.
Нека T има m $(d-1)$-димензионих страна. Како је $\Delta(T) \leq \ln n$, то је $m \leq M \ln^k n$, за неку константу $M = M(d, k)$.
Нека је $\{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ скуп $(d-1)$-димензионалних страна стабла T, и нека је d_i број d симплекса који су потомци $(d-1)$-симплекса τ_i. Како сваки потомак даје нових d $(d-1)$ страна, то је број $(d-1)$ страна различитих од τ_0 једнак $d \cdot d_0 + \cdots + d \cdot d_m$, те имамо да је $d \cdot d_0 + \cdots + d \cdot d_m = m$. Нека је $t = d_0 + \cdots + d_m = m/d$.
Сада добијамо да је

$$\mathbb{P}_2(T) = \prod_{i=0}^{m} e^{-c} \frac{c^{d_i}}{d_i!} = e^{-(m+1)c} \frac{c^t}{d_0! \cdot \cdots \cdot d_m!} \quad = \binom{t}{d_0, \ldots, d_m} e^{-c(m+1)} \frac{c^t}{t!}.$$

С друге стране имамо да је

$$\mathbb{P}_1(T) = \binom{n-d}{d_0, d_1, \ldots, d_m} \prod_{i=0}^{m} p^{d_i} \prod_{i=0}^{m} (1-p)^{n-d-d_0-\cdots-d_i} =$$
$$= \binom{t}{d_0, \ldots, d_m} \frac{c^t}{t!} \frac{(n-d)!}{(n-t)! n^t} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{(n-d)(m+1)-d_m-\cdots-(m+1)d_0}$$

Сада имамо да је

$$\mathbb{P}_1(T) \leq \binom{t}{d_0, \ldots, d_m} \frac{c^t}{t!} e^{-c(m+1)} e^{\frac{c(m+1)(t+d)}{n}},$$

одакле слиједи да је

$$\mathbb{P}_1(T) - \mathbb{P}_2(T) \leq \mathbb{P}_2(T) \left(e^{\frac{c(m+1)(t+d)}{n}} - 1\right) \leq \mathbb{P}_2(T) e^{\frac{c(m+1)(t+d)}{n}} \frac{c(m+1)(t+d)}{n}.$$

С друге стране, имамо да је

$$\mathbb{P}_1(T) \geq \binom{t}{d_0, \ldots, d_m} \frac{c^t}{t!} \left(1 - \frac{d}{n}\right)^t \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n(m+1)} \geq$$
$$\geq \binom{t}{d_0, \ldots, d_m} \frac{c^t}{t!} e^{-t\frac{d}{n-d}} e^{-(m+1)c} e^{-(m+1)\frac{c^2}{n-c}},$$

те добијамо да је

$$\mathbb{P}_2(T) - \mathbb{P}_1(T) \leq \mathbb{P}_2(T) \left(1 - e^{-(m+1)\frac{c^2}{n-c}}\right) \leq \mathbb{P}_2(T) \frac{c^2(m+1)}{n-c}.$$

Како је $m = dt = O(\ln^k(n))$, добијамо да постоји константа $C_1 = C_1(c, d)$ тако да је

$$|\mathbb{P}_1(T) - \mathbb{P}_2(T)| \leq \mathbb{P}_2(T) C_1 \frac{t^2}{n} e^{C_1 t^2/n}$$

Сада имамо

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\mathbb{P}_1(T) - \mathbb{P}_2(T)| \leq \sum_{t \leq M \ln^k n} \sum_{d_0 + \cdots + d_m = t} \binom{t}{d_0, \ldots, d_m} \frac{c^t}{t!} e^{-(m+1)c} C_1 \frac{t^2}{n} e^{C_1 t^2/n} =$$
$$= \sum_{t \leq M \ln^k n} (m+1)^t \frac{c^t}{t!} e^{-(m+1)c} C_1 \frac{t^2}{n} e^{C_1 t^2/n}.$$

Како је $\frac{((m+1)\, c)^t}{t!} \leq e^{(m+1)c}$ имамо

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\mathbb{P}_1(T) - \mathbb{P}_2(T)| \leq \sum_{t \leq M \ln^k n} C_1 \frac{t^2}{n} e^{C_1 t^2/n} = o(1),$$

што смо и требали доказати.

$\square$

За $(d-1)$-страну $\tau \in \Delta_{n-1}(Y)$ са $\Gamma(\tau) = \Gamma_Y(\tau)$ означимо скуп свих d-страна симплицијалног комплекса Y у којима се налази,

$$\Gamma_Y(\tau) = \{\sigma \in Y(d) \mid \tau \subset \sigma\}.$$

Са $G(Y)$ означимо скуп $(d-1)$-страна које су инцидентне са барем једним d-симплексом у језгру, тј. скуп $(d-1)$-страна које се налазе у чистом дијелу језгра,

$$G(Y) = \{\tau \in \Delta_{n-1}(d-1) \mid R_\infty(Y) \cap \Gamma(Y) \neq \emptyset\}.$$

и нека је $g(Y) = |G(Y)|$.

Лема 3.11. *Нека је $0 < c < \gamma_d$ и $p = \frac{c}{n}$. Нека је $\tau \in \Delta_{n-1}(d-1)$ произвољна $(d-1)$-страна симплицијалног комплекса $Y \in Y_{n,p,d}$. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau \in G(Y)) = 0$$

Доказ. Нека је $\delta > 0$. Како је $c < \gamma_d$, то је $\rho_c = 1$, па постоји k такво да је

$$\rho_c(k+1) > 1 - \frac{\delta}{3}.$$

Посматрајмо $S_{k+1}(Y)$, при чему је $\tau_0 = \tau$. Како је

$$\mathbb{P}\left(S_{k+1}(Y) \in \mathcal{T}(d) \text{ и } \Delta(Y) \leq \ln n\right) \to 1,$$

то је за довољно велико n

$$\mathbb{P}\left(S_{k+1}(Y) \in \mathcal{T}(d) \text{ и } \Delta(Y) \leq \ln n\right) > 1 - \frac{\delta}{3}.$$

Претпоставимо да је $S_{k+1}(Y)$ стабло и да $\Delta(Y) \leq \ln n$. Тада се S_{k+1} може добити процесом претраживања из τ. Сем тога, из претходне леме слиједи да је тотална варијација између простора $\mathcal{S}_{k+1}$ и $\mathcal{T}_d(k+1,c)$ мања од $\frac{\delta}{3}$, за довољно велико n.
Са A_k и B_k означимо догађаје да коријенско стабло (T, τ_0) колапсира у τ_0 у највише k корака, у просторима $\mathcal{S}_{k+1}$, $\mathcal{T}_d(k+1,c)$ респективно.
Како је тотална варијација $\mathcal{S}_{k+1}$ и $\mathcal{T}_d(k+1,c)$ мања од $\delta/3$, то је

$$|\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(B_k)| \leq \frac{\delta}{3}.$$

Ако $Y \in A_k$, тада $S_{k+1}(Y)$ колапсира у мање од $k+1$ корака, што значи да ће сви симплекси који садрже τ нестану у највише k корака симплицијалног колапса, што нам даје $R_\infty(Y) \cap \Gamma(\tau) = \emptyset$.
Одавде добијамо да је

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau \in G(Y)) &\leq 1 - \mathbb{P}\left(S_{k+1}(Y) \in \mathcal{T}(d) \text{ и } \Delta(Y) \leq \ln n\right) + 1 - \mathbb{P}(A_k) \leq \\ &\leq 1 - \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) + 1 - \mathbb{P}(B_k) + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3} + 1 - \rho_c(k) \leq \\ &\leq \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.\end{aligned}$$

$\square$

За било коју фамилију $\mathcal{A} \subset \Delta_{n-1}(d-1)$ са $\omega(\mathcal{A})$ означимо фамилију свих d-страна Y, таквих да су им све $(d-1)$-стране у $\mathcal{A}$.
Шпернерова теорема нам даје сљедећу процјену величне $\omega(\mathcal{A})$.

Лема 3.12 (Шпернерова теорема)**.** *Нека је $\mathcal{B}$ фамилија $k-skupova$ скупа $\{1,\ldots,n\}$. Са $\omega(\mathcal{B})$ означимо фамилију свих $k+1$-скупова таквих да су сви њихови k-подксупови у $\mathcal{B}$. Тада је*

$$|\omega(\mathcal{B})| \leq |\mathcal{B}|\frac{n-k}{k+1}.$$

Доказ. Посматрајмо парове (C,D) такве да је $C \in \mathcal{B}$, $D \in \omega(\mathcal{B})$ и $C \subset D$.
Како за сваки $D \in \omega(\mathcal{B})$ сви његови k-подскупови припадају $\mathcal{B}$, то је број парова једнак $(k+1)|\omega(\mathcal{B})|$.
С друге стране, сваки скуп C се налази у тачно $n-k$ $k+1$-скупова, тако да ј еброј парова највише $|B|(n-k)$ одакле добијамо да је

$$(k+1)|\omega(\mathcal{B})| \leq |B|(n-k).$$

□

Следећа теорема нам даје да, за $c < \gamma_d$, комплекс $Y_{n,p,d}$ нема великих језгара.

Теорема 3.9. *Дати су $\delta > 0$ и $0 < c < \gamma_d$. Нека је $p = \frac{c}{d}$ и $Y \in Y_{n,p,d}$. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(f_d(R_\infty(Y)) > \delta n^d\right) = 0.$$

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ константа коју ћемо касније одредити.
Како је

$$\mathbb{P}(f_d(R_\infty(Y)) > \delta n^d) \leq \mathbb{P}(g(Y) > \varepsilon\delta n^d) + \mathbb{P}\left(g(Y) \leq \varepsilon\delta n^d \text{ и } f_d(R_\infty(Y)) > \delta n^d\right)$$

довољно је доказати да оба сабрика теже нули.
Претпоставимо да је $g(Y) \geq \varepsilon\delta n^d$. Према леми 3.11, за произвољну $(d-1)$-страну $\tau \in \Delta_{n-1}(d-1)$ имамо $\mathbb{P}(\tau \in G(Y)) = o(1)$, тако да је

$$\mathbb{E}\left(g(Y)\right) = \binom{n}{d}\mathbb{P}(\tau \in G(Y)) = o(n^d).$$

Неједнакост Маркова нам даје

$$\mathbb{P}\left(g(Y) \geq \varepsilon\delta n^d\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(g(Y)\right)}{\varepsilon\delta n^d} = o(1).$$

Нека је сада $g(Y) \leq \varepsilon\delta n^d$. Тада је $G(Y) \subset G$ за неки $G \subset \Delta_{n-1}(d-1)$, такав да је $|G| = \varepsilon\delta n^d$. При томе имамо $R_\infty(Y) \subset \omega(G)$.
Одавде добијамо да је

$$\mathbb{P}(g(Y) \leq \varepsilon\delta n^d \text{ и } f_d(R_\infty(Y)) > \delta n^d) \leq \sum_{|G|=\varepsilon\delta n^d} \mathbb{P}\left(|\omega(G) \cap Y(d)| > \delta n^d\right).$$

Ако је $|G| = \varepsilon\delta n^d$, тада је из Шпернерове теореме добијамо да је

$$|\omega(G)| \leq \varepsilon\delta n^d \frac{n-d}{d+1} \leq \varepsilon \frac{\delta}{d+1} n^{d+1} = C_1 \varepsilon n^{d+1}.$$

Нека је $N = |\omega(G)|$. Нека је $h(Y) = |\omega(G) \cap Y(d)|$ случајна промјењива која означава број d страна комплекса Y које се налазе у $\omega(G)$. Тада $h(Y)$ има биномну расподјелу $Bi\left(N, \dfrac{c}{n}\right)$ те добијамо

$$\mathbb{P}(h(Y) \geq \delta n^d) \leq \binom{N}{\delta n^d} \left(\frac{c}{n}\right)^{\delta n^d} \leq \left(\frac{Nec}{\delta n^{d+1}}\right)^{\delta n^d} \leq \left(\frac{C_1 \varepsilon c e}{\delta}\right)^{\delta n^d} = (C_2\varepsilon)^{\delta n^d},$$

гдје константа $C_2 = C_2(\delta, c, d)$ не зависи од ε.
Сада имамо

$$\mathbb{P}(g(Y) \leq \varepsilon\delta n^d \text{ и } f_d(R_\infty(Y)) > \delta n^d) \leq \sum_{|G| = \varepsilon\delta n^d} \mathbb{P}\left(|\omega(G) \cap Y(d)| > \delta n^d\right) \leq$$

$$\leq \binom{\binom{n}{d}}{\varepsilon\delta n^d} (C_2\varepsilon)^{\delta n^d} \leq \left(\frac{n^d e}{\varepsilon\delta n^d}\right)^{\varepsilon\delta n^d} (C_2\varepsilon)^{\delta n^d} = \left(\left(\frac{e}{\varepsilon\delta}\right)^{\varepsilon} C_2\varepsilon\right)^{\delta n^d}.$$

Како је

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{e}{\varepsilon\delta}\right)^{\varepsilon} C_2\varepsilon = 0,$$

можемо да изаберемо $\varepsilon > 0$ тако да је

$$\mathbb{P}\left(g(Y) \leq \varepsilon\delta n^d \text{ и } f_d(R_\infty(Y)) > \delta n^d\right) = o(1).$$

□

Сада из теорема 3.7 и 3.9 слиједи теорема 3.6, тј. да је комплекс $Y \in Y_{n,p,d}$, за $p = \frac{c}{n}$ и $c < \gamma_d$ колапсибилан или садржи границу $(d+1)$-симплекса

Доказ теореме 3.6. Комплекс Y је или колапсибилан или садржи минимално језгро. Према теореми 3.7, постоји константа $\delta = \delta(c, d) > 0$ таква да Y а.с.с. не садржи минимално језгро K, $d + 3 \leq f_d(K) \leq \delta n^d$. Према теореми 3.9 Y а.с.с. не садржи минимално језго са $f_d(K) > \delta n^d$, тако да је Y а.с.с. колапсибилан или садржи минимално језгро са $f_d(K) = d + 2$. Једино такво језгро је $\partial\Delta_{d+1}$, те добијамо тврђење. □

Како је вјероватноћа да Y не садржи $\Delta_{n,p,d}$ одвојена од нуле, то добијамо и да условна вјероватноћа да је комплекс колапсибилан, под условом да не садржи $\partial\Delta_{d+1}$ тежи ка нули.
Са $\mathcal{F}_{n,d}$ означмо фамилију свих комплекса из $Y_{n,p,d}$ који не садрже $\partial\Delta_{d+1}$.

Посљедица 2. *Нека је* $0 < c < \gamma_d$ *и* $p = c/n$. *Тада, за* $Y \in Y_{n,p,d}$ *важи*

$$\mathbb{P}(Y \text{ није колапсибилан} \mid Y \in \mathcal{F}_{n,d}) = o(1).$$

Доказ. Из дефиниције условне вјероватноће имамо да је

$$\mathbb{P}\left(Y \text{ није колапсибилан} \mid Y \in \mathcal{F}_{n,d}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(Y \text{ није колапсибилан и } Y \in \mathcal{F}_{n,d}\right)}{\mathbb{P}\left(Y \in \mathcal{F}_{n,d}\right)}.$$

Из претходне теореме слиједи да је

$$\mathbb{P}\left(Y \text{ није колапсибилан и } Y \in \mathcal{F}_{n,d}\right) = o(1),$$

а из леме 3.5 имамо

$$\mathbb{P}\left(Y \in \mathcal{F}_{n,d}\right) \sim \exp\left\{-\frac{c^{d+2}}{(d+2)!}\right\},$$

одакле слиједи тврђење.

$\square$

Библиографија

[1] Nathan Linial and Roy Meshulam. Homological connectivity of random 2-complexes. *Combinatorica*, 26:475–487, August 2006.

[2] R. Meshulam and N. Wallach. Homological connectivity of random k-dimensional complexes. *Random Struct. Algorithms*, 34:408–417, May 2009.

[3] D. N. Kozlov. The threshold function for vanishing of the top homology group of random d-complexes. *ArXiv e-prints*, April 2009.

[4] D. C. Cohen, M. Farber, and T. Kappeler. The homotopical dimension of random 2-complexes. *ArXiv e-prints*, May 2010.

[5] A. Costa, M. Farber, and T. Kappeler. Topology of random 2-complexes. *ArXiv e-prints*, June 2010.

[6] L. Aronshtam, N. Linial, T. Luczak, and R. Meshulam. Collapsibility and vanishing of top homology in random simplicial complexes. *ArXiv e-prints*, October 2010.

[7] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley, 1984.

[8] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The Probabilistic Method.* Wiley, New York, 1992.

[9] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[10] B. Bollobas. *Random Graphs.* Cambridge University Press, 2001.

[11] Ian Anderson. *Combinatorics of Finite Sets (Dover Books on Mathematics).* Dover Publications, 2002.