Универзитет у Београду

Математички факултет

Математичко образовање кроз векове

мастер рад

Ментор:

проф. др Милан Божић

Студент:

Бланка Унковић 1054/2010

Београд, 2012.

Садржај

Увод

Математика је стара природна наука. Као таква била је везана за реалан свет, за нешто што постоји, што је тачно, што је истинито. Од самог почетка цивилизације човек је почео да упоређује величине, броји, мери. Са развојем цивилизације и писмености развила се и математика, која је опет омогућавала даљи развитак науке и цивилизације. Она је пре свега настала из праксе, из потребе људи да побољшају своје услове живота, да постану умни и паметни људи.

Свако време је имало своје математичаре који су новим открићима допуњавали и дограђивали грађевину математике. Она је била вечито млада и у духу времена, јер новим открићима добијала је нове, савршеније форме и прецизније формулације које су потпуно потискивале и замењивале све оно што је застарело и превазиђено.

Основна нит трагања за математичком истином остала је свевременска, вечни извор младости из кога се математика вековима подмлађивала и обнављала. И оно што ми сада видимо је потпуно другачије од оне математике у претходним вековима.

Да би суштински упознали математику потребно је сагледати њен историјски развој од темеља до данашњих дана, јер се нова знања граде на темељима претходних.

Историја математике је значајна јер омогућава већу заинтересованост за њену материју. Тако на пример, децу могу заинтересовати разне анегдоте везане за многе математичаре, њихов живот и рад.

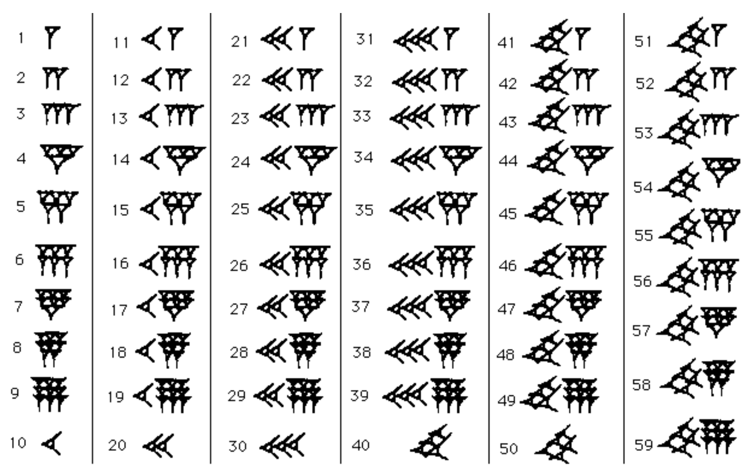
Због свог сталног развоја по свим гранама, математика сваког времена чезне за дубинском систематизацијом тих знања и великим математичарима који ће то обавити.

У овом раду најпре је дат осврт на математичко образовање кроз векове. У делу који се односи на математику данашњег времена пажња је посвећена истраживачким радовима и актуелним PISA и TIMSS међународним истраживањима.

Математика Месопотамије

Месопотамија, подручје између Еуфрата и Тигра сматра се колевком људске цивилизације. Говорећи о математици старе Месопотамије подразумевамо оставштину Сумераца, Вавилонаца, Асираца, Акађана и других народа који су у појединим раздобљима живели на деловима тог подручја. Већина најранијих великих цивилизација настала је уз велике реке. Оне су омогућавале наводњавање и тиме развој пољопривреде. Коришћењем глинених плоча, на чијим су површинама, док је мекана, урезивали трагове и њиховим каснијим печењем на сунцу, створено је клинасто писмо. Тако су добијени трајнији и бројнији сведоци њихове учености, па и математичких достигнућа. Сачуваних и дешифрованих плочица има око 500000, а од тога су око 150 са чисто математичким текстом и око 200 разних бројевних таблица. Оне нам сведоче о развијенијем математичком умећу у односу на Египћане.

Вавилонци су у својим прорачунима користили шездесетични бројевни систем који је у многим аспектима напреднији од нашег десетичног. Уместо 10 имали су 60 цифара за записивање бројева, тачније 59, јер у Месопотамији нису знали за нулу све до 3. века пре н.е. Уведена је подела дана на 24 сата, а сата на 60 минута и минута на 60 секунди. Од 3000. до 1700.год. пре н.е. појављује се и календар.



Слика 1. Вавилонски бројевни систем

Множење су свели на сабирање и множење потпуних квадрата бројева. За потребе дељења Вавилонци уводе обрнуте (реципрочне) бројеве, па је дељење вршено као множење.

Карактеристика вавилонске математике је широка примена таблица које представљају први вид математичког научног и наставног средства за помоћ у операцијама са бројевима. Постоје таблице за квадрат, куб, као и за други и трећи корен.

О високом степену развоја математике код Вавилонаца сведочи глинена плоча Плимптон 322[1], писана клинастим писмом, а представља табелу целобројних страница правоуглог троугла. На тој плочи је представљена тројка бројева (12709, 13500, 18541). Разуме се, Вавилонци су знали за опште решење проблема Питагориних тројки.

Умели су да решавају линеарне и квадратне једначине и проблеме на начин сличан ономе који се користи у средњошколској алгебри. Постоје и глинене плоче са једначинама и системима једначина трећег степена, а у неким текстовима пронађене су једначине осмог степена.

Из потребе мерења, изградњи зидова, насипа и канала настала је потреба за знањем геометрије. Сачуван је велики број планова земљаних поседа подељених на троуглове, правоугаонике и трапезне области, као и планова грађевина.

Вавилонци су имали и значајна знања из астрономије. Претпоставља се да су астрономска осматрања коришћена у сврху састављања календара и предвиђања периодичних плављења Тигра и Еуфрата, као и за предвиђања помрачења Сунца и Месеца. Вавилонски астрономи су развили сферни координатни систем, готово исти какав је у употреби у савременој астрономији.

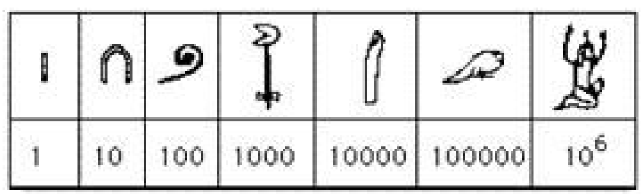
Сматра се да је настава извођена само за полазнике из високих класа ради доказивања и уочавања њихове доминације. Готово искључиво је била намењена мушкој популацији и имала је врло висок степен индивидуалности.

[1] Вавилонска глинена плоча из око 1900. и 1600. године пре н.е. коју је пронашао амерички археолог Едгар Џемс Бенкс 1922. по коме је направљен фиктивни лик Индијана Џонса. Плочу је откупио Џорџ Адамс Плимптон, коју је у својој колекцији завео под редним бројем 322. Плимптон је колекцију поклонио Колумбија универзитету где се и данас чува.

Математика старог Египта

Једна од најстаријих култура и цивилизација била је и староегипатска. Математика Египта је била окренута пре свега практичним питањима државне управе и пољопривреде. Математичка знања су омогућавала грађевинске подухвате, поделу имања, размену робе, мерење површине поља, запремине тела, мерење жита, одређивање пропорција различитих величина. Све је то захтевало и математичко образовање.

У односу на Вавилонце, Египћани су имали знатно савршенију технологију писања. Писали су на папирусу, названом по биљци од које се правио. Отуда савремено име за папир. Користили су пиктографко, хијероглифско писмо. Имали су своје ознаке за бројеве.



Слика 2. Египатски нумерички хијероглифи

Из Египта потичу први чисто математички списи из којих понајвише сазнајемо о математици те културе. То су Московски и Рајндов папирус. Московски папирус датира из око 1850. године пре н.е. Откупио га је гроф Голеничев и донео у Москву, па се понекад назива и Голеничевљев папирус. Рајндов папирус, назван по имену шкотског египтолога Хенрија Рајнда који га је откупио од египатских сељака 1858. године у околини Луксора. Изворни документ потиче из 1850. године пре н.е, а Ахмес га је преписао 200 година касније.

Ахмесов папирус је збирка таблица и вежби, која је намењена углавном учењу математике. Садржи вежбе из аритметике, алгебре, геометрије и разних мерења.

Списи показују да је у Египту у то време већ постојао вид организованог система наставе. Засебних наука још није било, а главни центри учености су били у свештенству. Египћани су имали адитивни систем сличан ономе који данас називамо „римским бројевима“, па су поступци разних математичких операција били веома сложени. У решавању проблема се не излаже општи метод већ се иде на конкретна израчунавања. Такође, задаци нису класификовани по методама решавања већ по темама. Сваки задатак се решава изнова, на јединствен начин, а понегде се даје и провера резултата.

Хијероглифским знацима се писало по камену како с лева на десно, тако и обратно, а понекад и одозго ка доле. Повремено су се употребљавале и неке посебне ознаке за бројеве, нпр. за број два цртали би се говеђи рогови, за број пет морска звезда, а људска глава била је ознака за број седам (седам отвора).

Сабирали су скупљањем истих симбола заједно и претварањем њих десет у један симбол, док се одузимало тако што се одмицао одређени број истих симбола. То је некада било компликовано када је требало одузети више симбола него што их је приказано.

Множење se сводило на сабирање. Рецимо да желимо да помножимо 34 и 14. Узмимо 34 и саберимо га са самим собом. Добијени резултат поново саберемо са самим собом и тако формирамо табелу (Табела 1.). Уочимо да је 14=2+4+8 и саберемо бројеве на позицијама 2, 4 и 8. Тако добијамо 476.

Табела 1. Пример множења

34 · 14	
1	34
/**2**	68
/**4**	136
/**8**	272
34 ·14 = **2** ·34 + **4** ·34 + **8** ·34 = 476	

Метода дељења темељи се на једноставној математичкој чињеници која је била позната египатским писарима, а то је да су множење и дељење инверзне операције.

У 69. задатку Рајндовог папируса даје се савет за технику дељења 1120:80. Каже се: „Множи са 80 док не добијеш 1120.“

Табела 2. Пример дељења

1	80
/10	800
2	160
/4	320
800+320 =1120	

Операцијом дељења Египћани долазе и до разломака. На посебан начин су их означавали. Када је писар морао рачунати са разломцима, био је суочен са многим проблемима, углавном везаних за њихово записивање. Сви разломци су били облика $\frac{1}{n}$, $n \in N$ изузев $\frac{2}{3}$. При томе су се историчари математике договорили да $\frac{1}{n}$ записујемо $\bar{n}$, а $\frac{2}{3}$ са $\bar{\bar{3}}$.

Погледамо ли фантастичне грађевине које су стари Египћани оставили у прилог светској баштини, не можемо да се не запитамо колико су имали добро развијену геометрију, стереометрију.

Египћани су знали да израчунају запремине многих тела: коцке, квадра, ваљка, као производ основе и висине. Сматра се да су до обрасца за запремину пирамиде дошли емпиријски, упоређујући пирамиду и призму истих основа и висина.

У грађевиснким конструкцијама правог угла користи се троугао са страницама 3, 4 и 5. Међутим, није познато да су се у ту сврху користили неки други троуглови са целобројним страницама. Стога се сматра да Египћани нису знали за опште правило Питагорине теореме.

Староегипатска алгебра је била реторичка, проблеме и решења давали су речима. Знали су да решавају једначине првог степена с тим што су при решавању обавезно спроводили анализу и синтезу, тј. свако решење су уврстили у почетни проблем да се увере да то јесте право решење.

И данас ћемо се још увек задивити пред остацима ове велике баштине, расутим по музејима широм света и у својој постојбини, било да је реч о уметничким делима или остацима чудесних грађевина. У сваком случају, остаћемо изненађени снагом, вољом и дубином мисли које су никле и развиле се у долини Нила.

Математика античке Грчке

Египат и Месопотамија су својом величином, богатством и моћи импресионирали старе Грке. Од Феничана су преузели писмо, па је сва прилика да су и прва значајнија математичка знања преузели од њих.

Стари Грци представљају круну античке културе. Систематизовали су знања својих претходника, додали им много суштинских резултата и створили основ за развој касније математике.

Из архајског доба, које се смешта између 750. и 500. године пре н.е. имамо стрелу са које се види да је тадашњи грчки нумерички систем био децималан, али не позициони већ адитиван попут египатског.

Током већег дела античке грчке историје образовање је било приватно. Било је привилигија само младића и то оних из богатих породица. Жене су се образовале у оквиру својих кућа, самоиницијативно или уз помоћ родитеља, користећи се врло оскудном литературом.

Кроз све делатности уочава се снажна потреба за прикупљањем знања у заједнички оквир који треба да темељи традиционално образовање и васпитање.

Међу првим старогрчким математичарима о којима нешто знамо био је Талес, рођен 624. године пре н.е. у Милету, на обали Мале Азије. Сматран је мудрацем, једним од *Седам великих мудраца* које су касније генерације Грка сматрале оснивачима своје културе.

Талес је доста полагао на образовање. Једна од његових изрека је:

> *Необразованост је терет.*

Талесу се, као оцу грчке математике, приписује пет теорема, пет открића у геометрији:

1) да пречник полови круг,
2) да су углови на основици једнакокраког троугла једнаки,
3) да су наспрамни углови које формирају две праве које се секу једнаки,
4) да је угао уписан у полукруг прав,
5) да је троугао одређен једном страницом и угловима налегним на њих.

Питагора, рођен 560. године пре н.е. на Самосу, бавио се музиком , математиком и астрономијом. Не постоје сачувани чак ни преписи његових оригиналних текстова, па тачних података заправо нема.

Питагора оснива школу и удружење, које је имало поред научног и политички и религиозни карактер. Правим оснивачима грчке математике треба сматрати Питагору и питагорејце. Питагорина школа је дала значајне математичке резултате.

У Кротону долази до процвата Питагорине школе, која је стекла бројне следбенике. Унутрашњи круг следбеника називао се математичарима. Они су живели у заједници, стриктно се придржавали правила реда, а поучавао их је сам Питагора. Оно што је занимљиво је то да је и женама било дозвољено да припадају реду, од којих су неке од њих касније прерасле у истакнуте филозофе. Код питагорејаца не можемо знати шта је дело самог Питагоре, а шта следбеника.

Питагора је био импресиониран ритуалима египатских свештеника. Име које је додељено његовим следбеницима потиче од речи матхема, што је био назив за врсту земље коју су египатски свештеници користили у ритуалима. На описани начин настала је *математика*, а по Питагори означавала је „оно што се учи“.

Питагорејци су се бавили појмовима, концептима, а не доказивањем и израчунавањем, нити су се интересовали за формулисање и решавање математичких задатака. Временом, управо изучавајући математику, почели су да се баве и њеним апаратом, па су тако поставили темеље савремене математике.

Основна питагорејска догма гласи: *Све је број*. Не само да се број може разумети као апстрактан појам, већ светом владају односи бројева и сви односи се могу свести на такве.

Једно од најзначајнијих резултата Питагорине школе је откриће несамерљивости странице и дијагонале квадрата и уопште несамерљивости, односно, ирационалних бројева.

Питагорина теорема је једно од најинспиративнијих математичких тврђења. Оно је било познато готово свим цивилизацијама и пре Питагоре. До данас је саопштен велики број доказа ове теореме, а математичари се и даље баве новим приступима доказу и примени ове значајне теореме.

Најкрупнији недостатак Питагорине школе је што се учење преносило искључиво усменим путем, тако да о њиховим активностима знамо из списа каснијих аутора.

Талес и Питагора нам остављају утисак да је грчка математика од самих почетака била теоријска дисциплина. Може се рећи да је то последица недостатка материјалних доказа њене практичности.

Археолошки материјал је веома оскудан. Из 5. и 4. века пре н.е. постоји неколико десетина сачуваних грчких камених *абакуса*[2]. Осим абакуса постоје још неки примери не толико практичне математике, колико евиденција да је она морала бити коришћена.

Наследници Талеса и Питагоре, као и креатори математике као теоријске дисциплине, су тројица математичара Архит, Теетет и Еудокс.

Значајна је појава софиста, путујућих учитеља који су излагали своја знања свима који су хтели да их слушају. Много су путовали како њихова педагошка делатност не би била географски ограничена само на развијене градове и области. Грађанима жељним знања поред филозофије и естетике држали су предавања и из математике. За своја предавања узимали су новац од којег су се издржавали. То је тада сматрано неописивом срамотом. Без обзира на осуду средине, у њиховом раду налазе се зачеци средњошколске и универзитетске наставе.

Њима се супротставио Сократ (470-399. године пре н.е.), којима је приговорио етичку неутралност, која се по њему граничила са неморалношћу. Сократ се сматра оцем етике. Развио је логичке методе, које касније постају основа за било коју логику и методологију, све до данас.

У своју методологију увео је *универзалне дефиниције* – формулисање универзално важећих релација и *индуктивну аргументацију* – подупирање исказа примерима.

У закључивањима се користио индукцијом кроз своју херуистичку[3] методу. Његово најважније достигнуће је увођење хипотезе у научно мишљење. Метод се

[2] Справа за рачунање, најстарија рачунска машина у историји, „предак“ свих данашњих рачунских машина.

[3] Метода којом предавач постављањем развојних питања подстиче ученике да самостално закључују о новом, коришћењем оног што већ знају.

састојао у томе да се започне са оним претпоставкама које делују као најистинитија хипотеза и да се затим разматрају логичке последице. Ако се наиђе на контрадикцију, хипотеза отпада. Ако се пак не наиђе, може се сматрати потврђеном, али не и доказаном јер се доказ може извести једино ако се дедукује иницијална хипотеза из неких већ прихваћених или општијих хипотеза.

Сократ је истицао потребу за самосазнањем. Није подучавао само на једном месту, већ му је било важно да је окружење духовно инспиративно и естетски пријатно. Седео је окружен својим ученицима и подучавао карактеристичном дијалошком методом. Сократови ученици су наставили његов педагошки рад.

Прва велика школа после Питагорине је Платонова *Академија*.

Платон, рођен око 428. године пре н.е, у Атини оснива своју школу, названу *Академија*. Назив је добила по грчком хероју Академосу. Иако Платон није имао никаквих математичких резултата, његова школа постаје стециште најпознатијих филозофа и математичара тог времена.

На улазу у школу је стајао натпис:

Нека нико ко не познаје геометрију не улази овде.

На Сицилији је упознао математику и питагорејско наслеђе. Платон је био дубоко убеђен да реалност за којом трага научна мисао мора бити изразива кроз математичко мишљење, јер је математика најпрецизнији и најпотпунији начин мишљења за који смо способни. Циљ му је био да хипотезе замени сигурним знањем и да заснује целу науку.

Платон оснивањем *Академије*, којом је руководио, ствара нова правила учења уопште, а самим тим и правила преношења математичких знања. Залагао се да се у васпитању деце, поготово најмлађих, користи и игра.

Платон је сматрао да првих десет година ваља посветити изучавању аритметике, геометрије (планиметрије и стереометрије), астрономије и хармоније, „да би уму постала блиска сазнања до којих се може доћи само размишљањем“. Затим би следило пет година изучавања онога што Платон назива дијалектиком, што подразумева вештину расправљања, постављања питања и давања одговора кроз које се стиже до суштине ствари.

У петој књизи *Закона* написао је следеће:

> *Ниједан предмет науке не садржи у себи толику вредност као вежбање у рачунању, ни за домаћинства, ни за државничке послове. А што је најважније, оно дремљивца и човека по природи необразованог буди и улива му лакоћу схватања, памћења и бистрину; и тако он, упркос својој слабијој природној надарености, може напредовати, јер му у томе помаже ово божанско знање и вештина.*

Академија је наставила да живи и после Платонове смрти, а затворио ју је император Јустинијан 529. године. Трајала је читавих 916 година и данас је универзитет са најдужим трајањем у историји човечанства, који за сто година надмашује данашње најстарије универзитете попут Болоње, Париза, Оксфорда и Кембрица.

Слика 3. Атинска школа, фреска идеализоване *Академије*

Најчувенији и најзначајнији полазник *Академије* био је Аристотел (384-322. године пре н.е.). По узору на Платона основао је сопствену школу, названу *Лицеј*. Предавао је скоро све филозофске и научне дисциплине које су постојале. Новина у настави је држање предавања методом разговора у шетњи, такозвана перипатетичка настава.

Оно по чему се Аристотелова школа разликовала од Платонове *Академије* јесте револуционарни метод рада. Држане су две врсте предавања: јутарња – за оне који су се посветили науци и филозофији и вечерња – за оне који су се интересовали за друге дисциплине, нарочито за беседништво.

Аристотелови многобројни списи нису стигли до нас осим у фрагментима. Значајна су Аристотелова дела из логике, организована у збирку под називом *Органон*. У њима Аристотел систематизује и формализује основна логичка правила.

Највећу пажњу обраћа на дедукцију и код њега се први пут јављају такозвани силогизми, који у крајњој мери одговарају данашњим правилима извођења – из две премисе се изводи закључак.

Типичан пример је силогизам који гласи:

Сваки Грк је човек.
Сваки човек је смртан.
Дакле, сваки Грк је смртан.

Нажалост, требало је да прође више од две хиљаде година да се Аристотелов рад на логици систематизује и преточи у савремену математичку логику.

После смрти Александра Великог, за науку је најзначајнији био Птоломеј. По узору на Платонову *Академију*, Птоломеј отвара школу *Музеум*. То је била научна и културна институција најсличнија нашим данашњим универзитетима. У своју школу је позвао најпознатије научнике и предаваче тог времена.

Школа је направљена као грандиозан архитектонски објекат са просторијама за рад и становање. Добро прецењујући значај писане речи, Птоломеј уз школу гради и чувену *Библиотеку*, која је у свом склопу имала шеталишта, баште, просторије за заједничке ручкове и састанке, читаонице, амфитеатре за предавања, као и астрономску опсерваторију. Сличан садржај и распоред простора је и на данашњим универзитетима. Имала је и набавно одељење, лоцирано у луци, као и каталошко.

Иако се и раније постојали разни видови библиотека, овде се први пут сакупљају сви научни, уметнички и државни списи из тада познатог света, праве њихове копије и преводе на грчки језик. Нажалост, библиотека је страдала у пожару у рату са Римљанима, 47. године пре н.е. и изгорело је преко 500000 разних записа.

У 3. веку пре н.е. Александрија је постала културни центар света, па самим тим и математике. У том периоду најзначајнија је појава дела које је сумирало све дотадашње грчко знање о математици, а то су Еуклидови *Елементи*.

Еуклид, рођен око 325. године пре н.е. у Александрији је можда и најзначајнији антички математичар. Написао је бројна дела, од којих су значајна *Дата (Податак)*, *О дељењу фигуре*, *Феномени* и *Оптика*. Ниједно од ових дела није извршило такав утицај на историју математике као *Елементи*.

Елементи изражавају став да аритметика није довољна да опише свет, али да геометрија јесте. Основно у *Елементима*, што се и данас сматра најзначајнијим, је заснивање геометрије на аксиоматским основама. Овим делом се математика дефинитивно заснива као дедуктивна дисциплина.

Слика 4. Вероватно најстарији очувани фрагменти *Елемената*

Многе дефиниције у Еуклидовој геометрији су застареле и више се не користе, јер би могле да изазову разне недоумице и проблеме. Елементарна геометрија, која се изучава у средњим школама многих земаља широм света, се у мало чему разликује од геометрије изложене у *Елементима*.

Елементи су вековима сматрани најсавршенијим математичким делом. Оно је доживело преко 1700 издања, па су се вековима на њему васпитавале генерације, не само математички него и логички уопште. Ово дело је постало модел посебне лепоте и математичке строгости.

Поред Еуклида, други великан је Архимед, рођен 287. године пре н.е. у Сиракузи у Грчкој. Означио је сам врх античке математике. Био је математичар, физичар и астроном.

Захваљујући својим проналасцима стекао је светску славу. Од његових радова значајни су: *О равнотежи у равни*, *Квадратура параболе*, *О сфери и цилиндру*, *О спиралама*, *О телима која пливају*, *Мерење круга* и *Бројач песка*.

Архимед је први израчунао број π, користећи описани и уписани полигон око круга, при чему је полигон имао 96 страница. Добио је вредност између $3\frac{10}{71}$ і $3\frac{1}{7}$.

После Архимедове смрти наступа период постепеног одумирања математике. Ипак, значајан број математичара је постигао низ резултата вредних помена.

У 2. веку пре н.е живео је Хипарх (око 175-125. године пре н.е.), један од најпознатијих астронома и геометара старогрчке културе. Он уводи географске ширине и дужине места, што представља први појам о координатном систему. Хипарх је и оснивач значајне математичке дисциплине – тригонометрије.

Што се тиче практичних примена, један од највећих математичара је био Херон, који је живео у првом веку нове ере. Поставио је основе у грађевинарству и геодезији. У свом делу *Метрика* даје чувени образац за површину троуглова и метод приближног израчунавања квадратног корена. Приписују му се и правила за тачно израчунавање запремине зарубљене пирамиде, зарубљене купе и других геометријских тела.

У 3. веку н.е. живео је Диофант. Његово значајно дело је *Аритметика*, прва књига из алгебре. Првенствено се интересовао за теорију бројева и решавање једначина и много допринео напретку алгебре употребом симбола за величине, математичке операције и односе. *Аритметика* је, уз Еуклидове *Елементе*, била један од најважнијих уџбеника кроз наредне векове.

Прва педагошка разматрања која су дали антички филозофи, посебно Сократ, Платон, Аристотел и многи други, допринела су развитку педагогије, јер су наметнула потребу за целовитим системом образовања, васпитањем деце од најранијег узраста и људима који ће се професионално бавити образовањем.

Након пада Грчке под римску власт 146. године, грчка култура, а посебно њена математика, цветала је још неколико векова. Историја показује да је у периоду од Питагоре до хеленизма живело и делало бар десет пута више значајних мислилаца него у следећих хиљаду година.

Математичко образовање након пада Грчке под римску власт

Римљани су више били заокупљени јачању војног и државног апарата, па је школовање усмерено ка правним и војничким школама. Математика, а и друге науке су запостављене. Ипак, настава математике се задржала за потребе робно новчаних трансакција.

Да је у Риму математика имала велику улогу у разоноди показује и популарност игре Архимедовог стомахиона. Игра је слична танграму и састоји се у прављењу задатих геометријских фигура коришћењем свих 14 различитих делова на које је исечен квадрат.

Најзначајнији педагог Римског царства је Марко Фабије Квинтилијан који је живео на прелазу из 1. у 2. век. После двадесетогодишњег успешног рада у школи, као веома цењен и поштован педагог, напушта професорски посао и посвећује се писању значајног дела *О образовању говорника*, у којем су представљени његови педагошки принципи.

Сматрао је да у предшколском васпитању значајну улогу треба да има породица. Залагао се да основно образовање буде широко доступно, а поверено најбољим учитељима. Такође, сматрао је да деци прва сазнања треба саопштити кроз игру, а залагао се и за укидање телесних казни. Учење треба да буде без присиле, а настава прилагођена узрасту и индивидуалним способностима појединца.

Поред говорништва и књижевности, у основно образовање уводи математику, геометрију и музику. Учење је посматрао оптимистички и сматрао да је већина деце способна за учење. Увео је принцип учења од лакшег ка тежем, а за стимулисање ученичке активности уводи такмичења, похвале и награде. Његов рад је имао огроман утицај на педагоге из 15. и 16. века.

Арапски допринос математици

Многи сматрају да у раздобљу од краја грчке античке зналости, па до касног средњег века није било значајнијих догађаја у математици осим превођења грчких текстова на арапски језик, који су касније постали доступни Европи. Међутим, допринос арапског подручја математици много је већи од самог превођења и преноса података.

Једна од главних интелектуалних дисциплина која је цветала у арабљанском периоду ислама била је математика. Њени почеци се могу сместити на преласку из 8. у 9. век. У том периоду багдадским калифом су владали Харун ал Рашид и његов син Ал Мамун, који је у Багдаду основао *Кућу мудрости*, која постаје главни научни центар.

Први значајни арапски математичар био је Абу Џабар Мухамед Иби Муса Ал Хорезми (око 780-850. године). Ал Хорезми заснива оно што се данас назива алгебра. Ослањајући се на грчку традицију и на индијска сазнања, Ал Хорезми систематски заснива оно што данас називамо децималним бројевним системом и његовим записивањем у позиционом систему са ознакама за сваку цифру. Кроз његово дело засновано је оно што данас називамо арапским бројевима.

Арапи су преводили готово све што им је од грчке културе дошло под руку. Превели су сва значајнија Еуклидова дела, а такође и значајна дела Архимеда, Диофанта и осталих мање важних грчких математичара, која су касније пренета у Европу.

Математичко образовање Европе средњег века

После пропасти грчке цивилизације математичка биљка је спавала зимски сан, скоро читавих хиљаду година, све док поново није донета у Европу и засађена на плодно тло.

Клајн

Математичка активност у Европи је замрла после пада Римског царства, тачније Западног римског царства 476. године, јер је Источно наставило да постоји кроз Византију још хиљаду година, али без значајне математичке дјелатности. Скоро хиљаду година од пропасти Рима, и скоро хиљаду и по од настанка хришћанства, европска култура је стагнирала.

Мрачно доба Европе почиње падом Западног римског царства и са становишта математике траје до 16. века. У добром делу тог периода једина значајна примена математике постојала је у израчунавању датума Ускрса.

Латински је постао главни језик учених људи, па је математика морала да се учи из латинских књига. Грчки није знао готово нико, па је почео превод књига са грчког на латински.

У средњем веку израз *седам слободних вештина* користио се да означи образовни програм који су похађали свештеници пре него што би се прикључили универзитетским студијама. Слободне вештине су обухватале оне активности које су захтевале искључиво интелектуални напор.

Боеције (480 - 524. година) поделио је ове вештине у две групе и тиме поставља основе средњовековног школства. Први део тривијум (тропуће) садржи граматику, реторику и дијалектику. Други део квадривијум (четворопуће) садржи геометрију, аритметику, астрономију и музику.

Од 6. до 12. века готово све школе у Западној Европи имале су за циљ обучавање свештеника и биле су блиско повезане са катедралама и манастирима.

Потребе детета, као и његове могућности нису биле важне. Деца су васпитавана да буду покорна, а као најчешће средство постизања покорности ученика коришћена је физичка казна.

Образовање је сведено на чисто механичко учење правила из одређених области, а централна фигура је био учитељ, уз строго наглашен ауторитет. Систем образовања је био под утицајем схоластике[4], чији циљ није да се пронађе истина, већ да се кроз црквене догме објасни и оправда већ саопштена истина. Овакав вид наставе се задржава и на новоотвореним универзитетима и провлачи се чак и до 16. века.

У поређењу са западном Европом у средњем веку, по питању образовања предњачила је Византија. Образовање се заснивало на античкој традицији. Образованост у Византији била је веома цењена, а необразованост се презирала и често исмејавала. Образовање је било веома корисно јер је олакшавало приступ одређеним државним положајима, омогућавало промену друштвеног статуса и животног стандарда.

Постојала су три нивоа школовања: основно, средње и високо.

Основне школе су углавном биле приватне, а било је и школа које су организоване по црквама и манастирима. Основна школа је трајала око три године. Била је отворена свима, како дечацима тако и девојчицама, како деци из богатих и угледних породица, тако и деци из сиромашних домова, заправо свима који су били у могућности да плате школовање.

У школу се полазило са шест до осам година. Прво се изучавао правопис, митологија, античка књижевност, рачунање и певање. Метод рада се сводио на постепено савладавање градива од једноставнијег ка сложенијем.

Средња школа је трајала шест или седам година. Средње и високо образовање у Византији нису били строго одвојени, тако да су се њихови програми донекле поклапали. Уџбеници који су се користили били су исти они који су се користили у античко доба, уз мале промене.

У самом Цариграду је на почетку 10. века постојало 12 средњих школа, а свака је имала између 20 и 40 полазника.

[4] Сколастика је средњовековна хришћанска филозофија.

Први подаци о високом образовању потичу из периода владавине Теодосија II, који је 27. фебруара 425. године издао декрет о оснивању Цариградског универзитета. Предавања су била и на грчком и на латинском језику.

Крајем 9. века на чело те школе постављен је Лав Математичар, најобразованија личност тог периода. Крајем 13. века Цариградски универзитет доживљава процват, а радио је све до пада Цариграда 1453. године и пропасти Византијског царства, до када је и постојало високо школство у Византији.

Први универзитет у западној Европи основан је у Болоњи 1088. године. На њему су се изучавали грађанско (римско) право и канонско (црквено) право.

Крајем 9. века јак образовни центар постаје катедрална школа у Паризу. Оснивају се и универзитету у Оксфорду и Кембрицу.

Универзитети су у почетку називани и *studium generale*, што је значило универзална школа. Универзитет постаје зборно место студената из различитих земаља, а предавања су по правилу била на латинском језику. Због недостатка књига почело се са предавањем по лекцијама. Студенти су правили белешке, а затим су то прерађивали на заједничким дискусијама. Обично је тада професор задавао одређену тему за разговор, а студенти је разрађивали кроз дискусије. Често је у жару дискусија долазило и до туча, па су постављане преграде међу студентима.

Пошто су често студенти долазили неспремни на студије, а и да би се побољшала ефикасност студија, у 14. веку Виљем из Викема оснива Винчестер колеџ, на којем је припремао ученике за универзитет.

По пријему на универзитет студент је почињао да ради на граматици, реторици и логици. Професор би изабрао неки уџбеник који би читао студентима, а затим давао своје и коментаре значајних предходника. Овај процес се звао *слушање књиге*. Поред овога и студент је морао сам да прочита одређене књиге. У Паризу студент који одслуша две књиге о граматици и пет о логици стицао је дипломе из тих вештина. То је значило да је нека врста шегрта, асистента и да је могао да подучава друге који су тежили истом степену. На Оксфорду је кандидат за неки степен морао да доведе одређени број професора који би се заклели да је он одслушао и прочитао тражена дела.

Током 14. века у Италији је отворено седам универзитета, у Француској четири, а у Немачкој пет. Током 15. века основано је још седам универзитета у Француској и још неколико у Немачкој.

У овом периоду се доста инсистирало на обогаћивању садржаја, посебно природних наука које су у претходном периоду биле запостављене, као и на новим методама и другачијем односу према деци, чије потребе и могућности сада постају важне.

Појава универзитета је значајна, како за појединце тако и за друштво у целини. Ширио се круг образованих људи, а самим тим и мрежа школа. Образовањем су се стицале разне привилегије

Буђење европске математике средњег века допринели су понајвише италијански математичари. Најзначајнији био је Леонардо Пизано, познат под надимком Фибоначи. Живео је на прелазу из 12. у 13. век.

У 13. веку је објавио своје дело *Књига о абаку (Liber abaci)*. Дело је базирано на аритметици и алгебри коју је Фибоначи усвајао током својих путовања. Уводи цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, као и нулу, што је од великог значаја. Поред тога, дело садржи велики број проблема намењених трговцима, као што су проблеми типа: како израчунати профит и како се обавља конверзија различитих валута. У трећем делу књиге представљен је Фибоначијев низ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... По овом низу је Фибоначи данас вероватно најпознатији. Фибоначи је ипак најзначајнији због промовисања позиционог децималног система и тиме утемељивања модерне аритметике и њених поступака.

Крајем средњег века центар математичког високог школства постаје Италијански универзитет у Падови. Својим приступом настави, у овом периоду се истакао Виторино дел Фелтре. Неговао је блиске односе са студентима и залагао се за прилагођавање наставе узрасту ученика. Сматрао је да у учењу подједнаку шансу треба дати како деци племића тако и онима из сиромашних породица. Увео је едукативна путовања и укључио их у своје наставне програме. Амбијент школе је такође био веома важан. Школа је морала бити чиста, пуна светлости, окружена дрвећем и травњацима. Многе школе у Европи, а поготово у Енглеској, преузеле су Фелтреов метод.

У настави математике овог периода највише су коришћени Еуклидови *Елементи* и Фибоначијева *Књига о абаку*. Колико је био велики ауторитет *Елемената* у настави говори и податак да је у Енглеској предмет геометрија често називан и Еуклид.

Математичко образовање у 16, 17. и 18. веку

Уопште, у математици, као и у другим наукама, периоди дужег или краћег затишја су време „затишја пред буру“. Тада се рађају нове гране и истичу нова имена која остају у историји. Овај период донео је до тада невиђену експанзију математике, како у броју математичара, тако и у броју дисциплина које су основане или којима су се бавили.

Први критичар употребе *Елемената* у настави математике у основној школи био је Петрус Рамус. Сматрао је да *Елементи* нису прикладни дечијем узрасту, већ одраслима на вишем нивоу школовања. Водећи се тиме он предлаже индуктивни приступ увођењу почетних геометријских појмова у основним школама. Писао је и нове уџбенике прилагођене узрасту ученика. Поред тога написао је и уџбеник из аритметике руководећи се принципом очигледности и практичном применом знања.

Овај период обилује великим открића у науци. Долази до утемељења нумеричке математике увођењем децималног записа и децималне тачке, а долази и до увођења логаритама.

Рене Декарт (1596–1650. године) у свом делу *Геометрија* уноси револуцију у математику. Декарт повезује алгебру са геометријом, тврдећи да свакој геометријској величини одговара број и обратно. Тиме је утемељио оно што данас називамо аналитичком геометријом.

Проналазак калкулуса, тј. диференцијалног и интегралног рачуна, је најзначајнији интелектуални искорак у 17. веку.

Исак Њутн (1643-1727. године) и Готфрид Вилхем фон Лајбниц (1646-1716. године) су учествовали у стварању калкулуса, независно један од другог. Револуционарност Њутновог открића састојала се у схватању да су диференцирање и интегрисање две узајамно инверзне математичке операције и да не морају бити у корелацији са геометријом, односно са израчунавањем било каквих геометријских величина. Лајбниц је 1675. године је написао текст у коме по први пут користи ознаку ∫ за интеграл, а 1676. године открива формулу $d\,(x^n) = n\,x^{n-1}dx$.

Међу математичарима 18. века Леонард Ојлер (1707-1783. године) био је најистакнутији. Први је увео тригонометријске формуле попут *sin* и *cos*. Интегрисао је диференцијални и интегрални рачун у целовиту математичку дисциплину коју данас називамо математичка анализа и увео је готово све ознаке које и данас користимо, као што су *f(x)*, *e*, π, Σ , итд.

Најчувенија математичка формула која повезује комплексне бројеве, Ојлеров број *e* и тригонометријске функције, коју је пронашао Ојлер је:

$$\sin x + \cos x = e^{ix} .$$

У овом периоду се у настави јављају разне идеје, међу којима је и та да се дете ослободи и да се поштује његова личност. Било је и идеја, попут Локове, о укидању школе и залагању за индивидуално образовање. Џон Лок је пре свега заступао интересе буржујског друштва и није га занимало образовање ширих народних маса. Он ставља акценат на садржај васпитања и његову улогу у развоју личности, али пре свега у породици, а не у школи.

Најутицајнија личност у заснивању новог система образовања је чешки педагог Јан Амос Коменски. Сматрао је да полазак у школу мора бити обавезан за свако дете, без обзира на материјално стање и памет. Написао је и многе уџбенике који су се дуго времена употребљавали у Европи, а такође је помогао и у организацији образовног система у многим земљама, као што су Чешка, Шведска и друге.

Коменски у свом раду *Пут светла* предлаже да просвећени народи образују скупштину мудраца, који ће направити план усавршавања и донети просвећеност осталим народима. Поред тога, предложио је чак да се уведе нов заједнички међународни језик који би био лак за учење. Коменски уводи и школски час, разред, наставни програм и циљеве, летњи распуст и много тога што је и данас у употреби.

Његово најзначајније дело је *Велика дидактика* у којем је предложио свој концепт образовања и организовања школства:

- од рођења до 6. године дете треба да одраста и учи у окриљу мајке и породице
- од 7. до 12. године похађа се основна школа
- од 13. до 18. године похађа се гимназија
- од 19. до 24. године је академско доба и доба едукативних путовања.

Питањима наставе математике бавио се и чувени француски математичар Алексис Клод Клеро. У уџбенику *Елементарна геометрија* полази од занимљивих практичних задатака запостављајући теорију. Клеро сматра да школски час треба испланирати тако да ученици увиде потребу изучавања теме која се обрађује. Уз помоћ практичних задатака надао се да ће обезбедити довољно мотива и знања, тако да ће се логичко мишљење, побуђено интересовањем ученика, развијати само од себе. Запостављање теорије у настави правдао је тиме да ће задовољство сопственим открићима ученицима дати трајнија и касније примењљивија знања.

Француски академик Силвестре Лакроа разматрао је методу анализе и синтезе. Посветио се анализи елементарног курса математике у тадашњим школама. У аритметици је дао предност децималним бројевима у односу на разломке, због честе потребе за приближним вредностима, а и сматрао је то лакшим и прихватљивијим приступом за ученике. У наставу алгебре укључује елементе геометрије и обратно. Предлаже да се аксиоме у уџбенике геометрије уводе постепено, а не да се формулишу на почетку уџбеника. Залагао се и за увођење основа диференцијалног рачуна у средње школе.

За развитак школства од изузетног значаја је и швајцарски педагог Јохан Хајнрих Песталоци. У његовим радовима методика математике се издваја као посебна математичка дисциплина.

Песталоци је сматрао да дете треба да учи крећући се „од лакшег ка тежем“ и да им не треба пружати готова знања него прилику да сама сазнају кроз личну активност. Сматра да је циљ образовања стварање комплетне личности. Своје идеје је почео да реализује отварањем школе у којој је био и управник и предавач.

У школу су примани полазници од 7 до 11 година, а школовање је трајало до петнаесте године. Уводи и групни рад у одељењу. Ученици који су показивали изузетан таленат и постизали натпросечне резултате помагали су осталим ученицима у раду. Наставници су писали извештаје о напредовању ученика, али није било оцењивања. За учење су биле веома важне и шетње у природи, које су биле саставни део школског програма. У одређеном периоду дана деца су имала време и за слободне активности и самостално учење.

Математичко образовање 19. и 20. века

Потпуна доминација Европе у светској математици није неочекивана. Упоредо са економским процватом који је донела индустријализација, која је доживела процват у 19. веку, развило се и грађанско друштво које је математику посматрало и као културну делатност и као науку која се непосредно може променити. Одједном су велике масе људи имале приступ врхунском образовању у најбољим школама најбогатијих земаља тадашњег света.

Поред Ојлера, последњи математичар у историји за кога се без претеривања може рећи да је познавао целокупну тада познату математику је Карл Фридрих Гаус (1777–1855.године). Сматра се једним од најутицајнијих математичара у историји. Конструисао је правилни полигон од 17 страница помоћу лењира и шестара, што је један од најзначајнијих резултата из геометрије од времена античке грчке. Засновао је савремену диференцијалну геометрију, а значајно је и његово интересовање за нееуклидску геометрију.

Гаусово најзначајније дело *Disquisitiones Arithmeticae* (*Аритметичке расправе*) објављено је 1801. године. Ово дело је дало значајан допринос теорији бројева. Сва област теорије бројева у данашње време се базира на резултатима који су изложени у овој књизи.

Значајно је и Гаусово деловање на Гутингенен универзитету, који од његовог постављања за ректора постаје водећа математичка институција у свету дуги низ година.

Један од најзначајнијих математичара на споју 18. и 19. века је француски математичар Лежандр (1752–1833. године). Посветио се нееуклидској геометрији. Доказао је значајан еквивалент петог постулата:

Збир углова у троуглу једнак је збиру два права угла.

За Лежандра је интересантно да је чак 40 година радио на нееуклидској геометрији. Написао је и један уџбеник геометрије, где је систематизовао сва дотадашња сазнања и по највишим стандардима допунио и кориговао Еуклидове *Елементе*.

Руски математичар Николај Иванович Лобачевски (1792–1856. године) поставио је темеље нееуклидске геометрије. Први је засновао оно што данас називамо апсолутном геометријом, односно геометрију без петог постулата. Утврдио је да постоје две геометрије, она у којој важи пети постулат – *еуклидска геометрија* и она у којој он не важи, а коју данас називамо *геометрија Лобачевског*.

Формулисао је пети постулат у новој геометрији у облику у којем га данас користимо:

Кроз тачку ван праве постоје бар две праве које су паралелне са том правом.

Значајан допринос у развоју математике у овом периоду дао је и Џорџ Фридрих Бернхард Риман (1826–1866. године). Значајни су његови радови из теорије функција комплексне променљиве. Увео је данас чувене Риманове површи и тиме најавио настанак топологије. Постоји много значајних Риманових резултата, међу којима је и критеријум за интеграбилност преко којег се данас дефинише у анализи познати Риманов интеграл.

Процес настанка савремене математике одвијао се у 19. веку. Појава математике ослобођене онтолошког притиска означава почетак савремене математике. Математика ослобођена онтолошког притиска је математика која не мора бити примењена, па чак можда и никада неће бити примењена.

Француски математичар Огистен Коши (1789–1857. године) је темељно разрадио свој приступ анализи и целу анализу засновао преко извода. Дефинисао је граничну вредност, скоро истовремено када и чешки филозоф и математичар Болцано, а дугујемо му и строгу дефиницију непрекидности функције. Болцано и Коши покушавали су да из анализе прогнају бесконачност. Појам бесконачно мале величине заменили су појмом граничне вредности.

Немачки математичар Карл Вајерштрас (1815–1897.године) је Кошијеву дефиницију граничне вредности низа бројева проширио на дефиницију граничне вредности функције уопште.

Енглески математичар Џорџ Бул (1815–1864. године) је оснивач математичке логике. Логици је приступио на сасвим нов начин, редукујући законе логике на једноставну алгебарску структуру, данас по њему названу Булова алгебра.

Немачки математичар Георг Кантор (1845–1918. године) је утемељивач теорије скупова. Бавио се теоријом бројева, а потом и анализом. Увео је и кардиналне и ординалне бројеве. Прве значајне радове из теорије скупова објавио је 1873. године, када је доказао да рационалних бројева има колико и природних. У његовим текстовима се први пут помиње израз *пребројив*, којим се означавају скупови који могу бити стављени у једнозначну кореспонденцију са скупом природних бројева, а крајем 1873. године доказује да скуп реалних бројева није пребројив.

Педагошка изучавања уопште, па и у настави математике добијају на замаху у 19. веку. Француски професор Жан Мари Дигамел у свом раду *Методе апстрактних наука* предлаже „буђење живе, садржајне математичке мисли“ код ученика. Такође даје анализу разних метода општег умног закључивања, а посебно историјски развој анализе и синтезе кроз радове старогрчких математичара.

На наставу математике велики утицај је имао и руски академик Михаил Васиљевич Остроградски. Заједно са Блумом се залагао да настава, поготово на основном нивоу, мора бити максимално активна, стваралачка и очигледна. У изучавању геометрије даје новине у доказивању теорема и његова књига о геометрији постаје званичан уџбеник.

Крај 19. века означен је са два значајна скупа, Међународни филозофски и Светски математички конгрес. Од краја 19. века формира се традиција да математичари редовно размењују своја искуства на масовним научним скуповима.

Славни руски писац Лав Николајевич Толстој (1828–1910. године) је у свом родном месту Јасна Пољана основао школу за сеоску децу, у којој је једно време предавао математику, физику и историју. Предавања је обогаћивао интересантним примерима из живота. Покренуо је педагошки часопис *Јасна Пољана* са циљем откривања одговора на питања зашто учити и како боље учити. О методици наставе математике написао је два списа *Аритметика, четири правила* и *Аритметика, разломци*.

Интересантан је Толстојев цитат:

> *Човек је попут разломка чији је бројилац оно што јесте, а именилац оно што мисли о себи. Што је именилац већи, разломак је мањи.*

Основни проблем наставе постаје одређивање циља и садржаја наставе математике. На крају 19. века искристалисао се традиционални међународни систем образовања у математици за који је карактеристично следеће:

1) створен је курс елементарне математике који се изучава у средњој школи, а који се састојао од четири дисциплине: аритметике, алгебре, геометрије и тригонометрије,
2) упрошћава се циљ изучавања математике,
3) преовлађује метод предавања готових знања уз употребу великог броја традиционалних задатака,
4) оформио се пирамидални систем пролазности, тако да у наредни разред прелази у просеку 90% полазника, да би у последњој години учења број недовољних достизао и до 50% оних који су започели школовање.

Такав традиционални систем образовања је у 20. веку доспео у противречност са новом праксом обавезног школовања. Све је то проузроковало заједничке међународне активности на реформи наставе математике. Тако је 1908. године у Риму основана међународна организација за едукацију у математици – Међународни комитет математичких конструкција. За првог председника изабран је Феликс Клајн. Његов ауторитет и рад имали су велики значај да методика наставе математике дефинитивно постане самостална математичка дисциплина.

Убрзо се оснивају и националне асоцијације за едукацију у математици. Први међународни конгрес о настави математике организован је 1969. године у Лиону. После другог таквог скупа 1972. године у Енглеској, уведена је пракса да се конгреси одржавају сваке четврте године.

У 20. веку се све науке, па и математика интензивно развијају. Централна математичка личност са почетка тог века био је немачки математичар Давид Хилберт (1862–1943. године). Он је на математичком конгресу 1900. године изложио списак са 23 проблема која математика 19. века оставља 20. веку.

Хилберт је 1899. године објавио *Основе геометрије*, у којима је први пут историји изложен строг и потпун систем аксиома који је допунио недостатке Еуклидових *Елемената*. Хилбертово дело је одмах постало стандард за излагање математике и доживело је светску славу. Данас се геометрија излаже онако како је Хилберт изложио у овом делу.

Математика се развијала веома брзо. То пре свега важи за математичку логику и тзв. заснивање математике, јер су проблеми којима се ове гране математике баве у вези са разним савременим проблемима многих наука. Тешкоће овладавања математиком везане су за њен непрекидан раст, који је довео и до кризе у настави, јер много више новог и значајног се јавља него што старо заслужује да буде одбачено.

Континуитет између раније математичке мисли и савременије много је потпунији него што се то чини онима које плаши количина новог, обиље нових симбола и све апстрактнији начин говора. Уз промене у друштву у којем живимо мења се и састав образовања, а у променама састава образовања није поштеђена ни настава математике.

И друштвени положај математике се мењао кроз векове. Данас је углед математике неоспоран и рапидно расте, јер скоро да нема области у којој она није нашла своју примену.

Математика данас

Драги колега наставниче! Избегавајте речи „Ви сте погрешили“. Говорите уместо њих „Ви сте углавном у праву, али...“ Верујте ми – то није лицемерје него човечност. И остављајте ђацима онолико слободе колико то дозвољавају услови.

Пре свега – и то је, неспорно, најбитније – потребно је научити младе да „МИСЛЕ“. То је, ако хоћете, највећи национални и цивилизацијски интерес!

Ђ. Поља

Када је у питању настава математике, савремена настава се обично описује као настава орјентисана према ученицима, што значи да се улога наставника ставља у други план, а повећава се ученикова активност у настави. Може се рећи да је савремена настава математике испланиран, двосмерни процес у којем се врши преношење математичких знања са наставника на ученике, побуђује и поспешује математичко образовање ученика, са сврхом њиховог оспособљавања за самостално и успешно сналажење у животном окружењу. Развој савремених технологија и усавршавање наставних средстава даје нове могућности и нов квалитет наставе.

Важност математике углавном се односи на њену примену, али и на утицај математичког образовања на развој мишљења. Математика никад није била толико популарна као у данашње време. Један од разлога је све већа „математизација“ друштва у смислу да математика данас налази примену свуда. Томе је нарочито допринела информатичка револуција која је, због убрзаног протока информација, иницирала потребу за применом сложених математичких модела.

У истраживачком раду Финца П. Перкила (Päivi Perkkilä) описано је како наставници предају математику, која је улога наставника за време часова математике и колика је употреба уџбеника.

Веровања могу да представљају субјективно знање индивидуе или субјективно знање и осећања. Ученик може да верује да није добар у математици и да је то разлог због ког он не може да је научи. Ова врста веровања у себи садржи емоције о неуспеху. Постоје и разна друга веровања у вези математике као што су:

- „Математика је тешка.“
- „Математика може да се научи само у школи.“
- „Постоји само неколицина људи који могу да науче математику и због тога се само неколико њих сналази у математици.“
- „Математика је апстрактна и није повезана са свакодневним животом.“

Математички погледи наставника су основа њиховог модела предавања и учења математике. Када наставник поседује инструменталистичко схватање математике, типична карактеристика његовог предавања је стриктно праћење наставних модела и стриктно праћење уџбеника.

Основа података за овај истраживачки рад је упитник заснован на Ликертовој скали.[5] Упитник је послат наставницима првог и другог разреда у различитим основним школама, чије наставно искуство варира од 1 до 30 година. Упитник је обухватио 70 изјава које се односе на погледе и ставове наставника, као и идеје о учењу математике, предавању математике, а посебно на коришћење уџбеника. Упитник је садржао следеће нивое:

A. Шта је математика?
B. Учење математике у првом и другом разреду.
C. Предавање математике у првом и другом разреду.
D. Математичке наставне активности у првом и другом разреду.

[5] Ликертова скала је врста скале ставова која се састоји од низа тврдњи посвећених различитим аспектима неког става. Она се даје испитанику са задатком да за сваку појединy тврдњу изрази степен свог слагања или неслагања, по правилу, на петостепеној скали као: „уопште се не слажем“, „не слажем се“, „немам мишљење“, „слажем се“, „потпуно се слажем“. Сваки одговор испитаника се бодује на одговарајући начин, а онда се сабирањем бодова за сваку тврдњу добија укупни скор који изражава став испитаника, у одређеној мери позитиван или негативан према објекту става.

Ради лакшег упоређивања, одговори наставника су класификовани на следећи начин: традиционалан (T), примарно традиционалан (PT), нетрадиционалан (N), примарно нетрадиционалан (PNT) и комбинован (M). Традиционални одговори су били приближни инструменталистичком схватању, а нетрадиционални одговори су били орјентисањи решавању проблема.

Изабрано је 6 наставника чији су одговори приказани у следећој табели. Након бодовања сваког одговора и сабирања, у заградама су приказане одговарајуће аритметичке средине .

Табела 3. Одговори наставника кроз нивое A, B, C и D из упитника

Наставници/Нивои	**A**	**B**	**C**	**D**
Ана	M (3,40)	M (2,85)	M (3,16)	M (3,13)
Берта	M (3,00)	PNT (2,26)	M (2,66)	M (2,50)
Сесилија	PNT (2,35)	PNT (1,93)	PNT (2,00)	PNT (1,97)
Дорис	PNT (2,05)	M (2,70)	M (2,88)	M (2,91)
Ени	PNT (1,70)	PNT (1,78)	PNT (1,88)	PNT (2,25)
Фани	PNT (1,60)	PNT (1,89)	PNT (2,06)	M (2,53)

Прикупљање података сваког наставника обухватало је:

- двонедељно посматрање часова (видео или аудио запис),
- планови часова наставника,
- разговор са наставником након посматрања часова,
- анализа снимљених часова заједно са наставником.

Одговори из упитника, белешке са посматрања часова и интервјуи са свих 6 наставника су искоришћени да опишу доследности и недоследности између упитника и праксе. На основу прикупљених података могло се закључити да су искуства наставника из периода њихових ђачких дана утицала на њихово данашње предавање математике. Због несигурности наставници су углавном пратили редослед и инструкције математичких уџбеника.

Пажња је усмерена на два случаја, Берту и Сесилију. Из табеле се може приметити да су Сесилијини ставови примарно нетрадиционални, а Бертини комбиновани. Берта је наставница већ 20 година, а Сесилија тек годину дана. Упркос њиховим различитим ставовима, одговорима и искуству, обе су зависиле од математичких уџбеника јер су се осећале несигурно. На основу посматрања часова примећено је да су њихова предавања била ближа традиционалним схватањима него нетрадиционалним.

Берта је за време школовања имала потешкоће у математици, али то је био разлог и мотив да јој предавање математике буде изазов. Важно јој је да математику предаје на начин који је деци смислен и разумљив. Њена филозофија је била да се математика учи кроз кооперативни рад. Берта сматра да ако деца која имају потешкоће раде заједно са децом која су добра у математици могу да напредују, тј. они који знају могу да помогну и подуче оне који не знају.

Постојале су недоследности између Бертиних одговора из упитника и њене наставне праксе. На њеним часовима су уџбеници некада веома доминантни. Некада се толико ослањала на уџбенике да није слушала тачна објашњења и решења ученика и није давала простора њиховим размишљањима, што је у недоследности са дечијом креативношћу, већ је само чекала тачне одговоре који се подударају са одговорима у уџбенику. Тачни одговори су били важнији од дечијих размишљања.

Са друге стране, Сесилија је одувек волела математику јер је задатке решавала веома брзо. На основу посматрања њених часова такође је закључено да се и њена предавања веома често ослањају искључиво на уџбеник. На почетку лекције обично је децу подучавала пред таблом, а након тога су ученици решавали задатке из уџбеника. Сесилија сматра да јој студије нису пружиле спремност и знање да предаје математику због чега се осећала несигурно. Тиме оправдава превелико ослањање на уџбеник који јој је служио као вид упутства.

Упркос разлици у њиховом радном искуству имале су сличне навике у свом раду. Пре свега се мисли на велику доследност уџбеницима. Такође, велики значај у њиховом раду и начину предавања су имала и њихова лична искуства, потешкоће и проблеми у математици.

Битно је охрабрити наставнике да не раде у изолацији, већ у наставничкој заједници, да раде заједно и трагају за новим идејама. Најважнија ствар је дати деци простора, њиховим размишљањима, слушати њихове одговоре, њихове идеје, јер ће она у супротном постати несигурна и на крају одговарати оно што мисле да наставник жели да чује.

Светска истраживања и студије из подручја методике наставе математике доносе важне закључке о питању каква треба да буде настава математике у данашњем времену. На нове планове и реформе утичу и велика међународна истраживања, као што су PISA и TIMSS.

PISA

Међународни програм процене образовних постигнућа PISA (Programme for International Student Assessment) иницирао је OECD (The Organisation for Economic Co-operation and Development). Сврха PISA студије је да се систематски прати квалитет и ефикасност образовања у земљама учесницама. У многим земљама резултати PISA студије су предмет озбиљних јавних и стручних дебата и на основу њих се доносе стратешке одлуке у домену образовне политике. У оквиру PISA студије систематски се прати који ниво функционалне математичке, научне и читалачке писмености достижу петнаестогодишњаци у земљама учесницама. Ова три домена су изабрана као најопштији и најрелевантнији индикатори образовних постигнућа ученика и квалитета образовања. Специфичност PISA студије је да она не испитује у којој мери ученици могу да репродукују оно што су учили у школи, већ у којој мери су компетентни да разумеју и користе расположиве информације приликом решавања релевантних проблема из свакодневног живота. Поред тога, циљ PISA студије је да утврди у којој мери су различити контекстуални фактори (карактеристике образовног система, карактеристике породичног окружења, карактеристике школе и карактеристике ученика) повезани са образовним постигнућима ученика.

Табела 4. Постигнућа држава од 2000. до 2009. године

	Држава (Економија)	**2000.**	**2003.**	**2006.**	**2009.**
1.	Кина (Шангај)				600
2.	Сингапур				562
3.	Хонг-Конг		550	547	555
4.	Јужна Кореја	547	542	547	546
5.	Кина (Таипеи)			549	543
6.	Финска	536	544	548	541
7.	Лихтенштајн	514	536	525	536
8.	Швајцарска	529	527	530	534
9.	Јапан	557	534	523	529
10.	Канада	533	532	527	527
11.	Холандија		538	531	526
12.	Кина (Макао)		527	525	525
13.	Нови Зеланд	537	523	522	519
14.	Белгија	520	529	520	515
15.	Аустралија	533	524	520	514
16.	Немачка	490	503	504	513
17.	Естонија			515	512
18.	Исланд	514	515	506	507
19.	Данска	514	514	513	503
20.	Словенија			504	501
21.	Пољска	470	490	495	499
22.	Норвешка	499	495	490	498
23.	Француска	517	511	496	497
24.	Словачка		498	492	497
25.	Аустрија	515	506	505	496

26.	Шведска	510	509	502	494
27.	Чешка	498	516	510	493
28.	Велика Британија	529	508	495	492
29.	Мађарска	488	490	491	490
30.	Луксембург	446	493	490	489
31.	Ирска	503	503	501	487
32.	САД	493	483	474	487
33.	Португалија	454	466	466	487
34.	Шпанија	476	485	480	483
35.	Италија	457	466	462	483
36.	Летонија	463	483	486	482
37.	Литванија			486	477
38.	Русија	478	468	476	468
39.	Грчка	447	445	459	466
40.	Хрватска			467	460
41.	Дубаи (УАЕ)				453
42.	Израел			442	447
43.	Турска		423	424	445
44.	Србија		437	435	442
45.	Азербејџан			476	431
46.	Бугарска			413	428
47.	Уругвај		422	427	427
48.	Румунија			415	427
49.	Чиле			411	421
50.	Тајланд		417	417	419
51.	Мексико	387	385	406	419
52.	Тринидан и Тобаго				414
53.	Казахстан				405
54.	Црна Гора			399	403
55.	Аргентина			381	388

56.	Јордан			384	387
57.	Бразил	334	356	370	386
58.	Колумбија			370	381
59.	Албанија				377
60.	Индонезија		360	391	371
61.	Тунис		359	365	371
62.	Катар			318	368
63.	Перу				365
64.	Панама				360
65.	Киргистан			311	331

Постигнућа ученика класификована су на 6 нивоа, а сваки од нивоа описан је математичким компетенцијама. Ученици из Србије остварили су просечан резултат од 437 поена на скали математичке писмености 2003. године и задржали исто просечно постигнуће и у наредном тестирању 2006. године. Статистички значајно боље постигнуће Србија је остварила на тестирању 2009. године. Ово постигнуће припада другом нивоу на развојној скали (адаптираној према OECD-у, 2007), што значи да су ученици у просеку оспособљени за примену једноставних процедура и алгоритама, за проналажење решења у једноставној ситуацији у којој су све релевантне информације дате. Захтеви које ученици решавају на овом нивоу траже од њих репродуктивне когнитивне активности. Може се рећи да је наш образовни систем превасходно оријентисан на развијање и подржавање знања које се налази на нивоу репродукције, с тим да нешто мање од једне петине ученика не успева да реши ни задатке са првог нивоа и да нешто мање од једне трећине ученика може да решава и нешто комплексније захтеве.

OECD/PISA је данас вероватно најреферентнији међународни програм у домену образовања и један од најважнијих оријентира за образовну политику. Један од очекиваних и планираних ефеката примене PISA налаза, као и других међународних компаративних студија у области образовања, јесте стварање услова и потребе за сарадњом међу учесницама, финансијерима, менаџерима и политичарима који покушавају да остваре неколико циљева, међу којима су најопштији побољшање квалитета образовања и стварање успешнијег образовања.

Иако PISA даје податке који припадају нивоу образовног система, они могу да се употребе и за унапређивање наставног процеса, а посебно учења. Стручњаци који спроводе међународне истраживачке програме у области образовања тврде да без међународног поређења образовни програми ризикују да школе, као и читава друштва, могу да заврше само са „осећањима“, уверењима и мишљењима о квалитету свог образовања.

PISA је осмишљена тако да обезбеди поуздане податке за доносиоце одлука и учеснике у образовању о образовним постигнућима ученика. Дакле, циљ PISA студије је да земљама учесницама пружи корисна сазнања о томе где и како њихов образовни систем треба да се побољша или да задржи достигнути квалитет.

Током последње деценије, у земљама које су учествовале у програму, резултати PISA студије изазвали су бројне реакције стручњака за образовање и оних који креирају образовну политику.

TIMSS

TIMSS истраживање (Trends in International Mathematics and Science Study) представља међународно истраживање образовних постигнућа ученика основних школа из области математике и природних наука. Истраживање TIMSS осмислило је и реализује Међународно удружење за евалуацију образовних постигнућа (International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA), чије је седиште у Амстердаму, заједно са Међународним центром за TIMSS и PIRLS истраживања при Бостонском колеџу (TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College). Прикупљање и обраду података обављају IEA Центар за обраду података (IEA Data Processing Center), са седиштем у Хамбургу, као и Канадска национална агенција за статистику (Statistics Canada), са седиштем у Отави. Истраживање се реализује сваке четврте године и до сада су реализовани циклуси 1995, 1999, 2003. и 2007. године.

Србија је учествовала у тестирању 2003. и 2007. године. Центар који је реализовао TIMSS истраживање у Србији је Институт за педагошка истраживања из Београда у партнерству са Заводом за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Садржај TIMSS испитивања разликује домене садржаја и когнитивне домене. Домени садржаја односе се на области у математици из којих се проверавају знања ученика, а когнитивни домени подразумевају когнитивне способности које су неопходне за успешно решавање математичких задатака. Од домена садржаја извојени су: *број, алгебра, геометрија* и *подаци и вероватноћа*, а од когнитивних домена: *домен познавања чињеница и процедура, домен примене* и *домен резоновања*.

Кључна интенција TIMSS истраживања састоји се у томе што омогућава утврђивање нивоа знања ученика из математике и природних наука, сагледавање сложеног односа између постигнућа ученика у контексту курикулума, школских и породичних услова, у односу на ставове ученика. Значај истраживања је и у томе да омогућава међусобно поређење образовних система различитих земаља, мери промене у ефикасности образовања једне земље сваке четврте године. Подаци из TIMSS-а се могу користити у националној образовној политици.

У истраживању образовна постигнућа се пореде са тзв. просеком TIMSS скале – он износи 500 поена и не представља међународни просек, већ унапред постављену лествицу знања.

Табела 5. Резултати TIMSS тестирања из 2003. и 2007. године

	Држава	**4. разред**		**8.разред**	
		2003.	**2007.**	**2003.**	**2007.**
1.	Кина (Таипеи)	564	576	585	598
2.	Јужна Кореја			589	597
3.	Сингапур	594	599	605	593
4.	Хонг Конг	575	607	586	572
5.	Јапан	565	568	570	570
6.	Белгија	551		537	

7.	Холандија	540	535	536	
8.	Казахстан		549		
9.	Естонија			531	
10.	Мађарска	529	510	529	517
11.	Летонија	536	537	508	
12.	Енглеска	531	541		513
13.	Русија	532	544	508	512
14.	Словачка		496	508	
15.	САД	518	529	504	508
16.	Литванија	534	530	502	506
17.	Немачка		525		
18.	Данска		523		
19.	Чешка		486		504
20.	Словенија	479	502	493	501
21.	Јерменија	456	500	478	499
22.	Аустралија		516	505	496
23.	Шведска		503	409	491
24.	Малта				488
25.	Шкотска	490	494	498	487
26.	Нови Зеланд	493	492	494	
27.	Србија			477	486
28.	Италија	503	507	484	480
29.	Малезија			508	474
30.	Норвешка	451	473	461	469
31.	Молдавија	504		460	
32.	Кипар	510		459	465
33.	Аустрија	499	505		
34.	Бугарска			476	464
35.	Израел			496	463
36.	Украјина		469		462

37.	Румунија			475	461
38.	Македонија			435	
39.	Босна и Херцег.				456
40.	Либија			433	449
41.	Тајланд				441
42.	Турска				432
43.	Јордан			424	427
44.	Тунис	339	327	410	420
45.	Грузија		438		410
46.	Иран	389	402	411	403
47.	Бахреин			401	398
48.	Индонезија			411	397
49.	Сирија				395
50.	Египат			406	391
51.	Алжир		378		387
52.	Колумбија		355		380
53.	Оман				372
54.	Палестина			390	367
55.	Чиле			387	
56.	Мароко	347	341	387	
57.	Филипини	358		378	
58.	Боцвана			366	364
59.	Кувајт		316		354
60.	Ел Салвадор		330		340
61.	Саудијска Арабија			332	329
62.	Гана			276	309
63.	Јужна Африка			264	
64.	Катар		296		307
65.	Јемен		224		

Просечно постигнуће из математике ученика из Србије се побољшало у 2007. години у односу на 2003. – са 477 на 486 поена. Постугнућа из математике ученика из Србије 2007. године по доменима садржаја и когнитивним доменима дати су у следећој табели.

Табела 6. Постигнућа ученика према доменима садржаја и когнитивним доменима

Домени садржаја	
Број	478
Алгебра	500
Геометрија	486
Подаци и вероватноћа	458
Когнитивни домени	
Познавање чињеница и процедура	478
Примена	500
Резоновање	474

У истраживачком раду који је спроведен у Основној школи „Вељко Дугошевић“ у Београду, у мају 2011. године, на узорку од по 100 ученика четвртог и осмог разреда, извршено је тестирање у сврхе упоређивања добијених резултата са резултатима TIMSS истраживања. Ученици су решавали 10 одабраних задатака из колекције задатака TIMSS 2003. У следећим табелама приказани су одабрани задаци за 4. и 8. разред и проценат ученика са тачним решењем, заједно са међународним просеком.

Табела 7. Задаци за 4.разред

<table>
<tr><th>Задатак</th><th>Проценат ученика са тачним решењем (међународни просек)</th></tr>
<tr><td>1. Марко има 50 јабука. Део је продао и остало му је 20 јабука. Којим од понуђених одговора ово можемо представити?

A. __ - 20 = 50
B. 20 - __ = 50
C. __ - 50 = 20
D. 50 - __ = 20</td><td>97,5 % (73 %)</td></tr>
<tr><td>2. Правило таблице је да збир сваке колоне и збир сваког реда даје исти број. Који број треба уписати у празан квадрат?

<table><tr><td>4</td><td>11</td><td>6</td></tr><tr><td>9</td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>8</td><td>3</td><td>10</td></tr></table>
A. 1
B. 2
C. 7
D. 12</td><td>77,5 % (61 %)</td></tr>
</table>

3.

$$\boxed{5} \xrightarrow{\cdot 2} 10 \xrightarrow{+2} 12 \xrightarrow{-3} 9$$

Ако уместо броја 5 упишемо број 7, користећи исте операције, који број ћемо добити уместо броја 9?

A. 11
B. 13
C. 14
D. 25

85 % (50 %)

4. Следећа табела показује температуре забележене током четири дана.

Дани	Температуре				
	6 h	9 h	12 h	15 h	20 h
Понедељак	15ºC	17ºC	20ºC	21ºC	19ºC
Уторак	15ºC	15ºC	15ºC	10ºC	9ºC
Среда	8ºC	10ºC	14ºC	13ºC	15ºC
Четвртак	8ºC	11ºC	14ºC	17ºC	20ºC

Када је забележена највиша температура ?

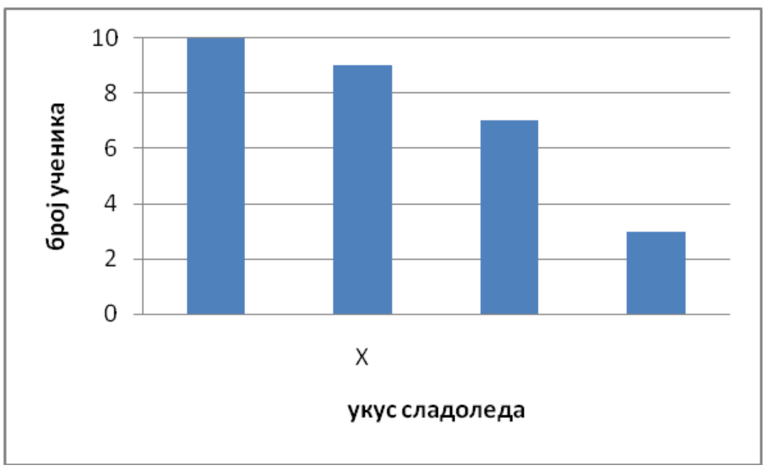
A. у 12 h у понедељак
B. у 15 h у понедељак
C. у 12 h у уторак
D. у 12 h у среду

95 % (74 %)

5. Учитељица је питала 30 ученика који је њихов омиљени укус сладоледа. Следећа табела показује њихове одговоре.	

Омиљени укус сладоледа	Број ученика
Киви	IIII
Чоколада	IIIII IIIII
Јагода	IIIII IIII
Ванила	IIII II

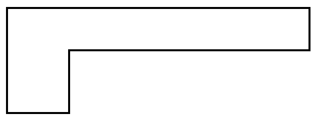
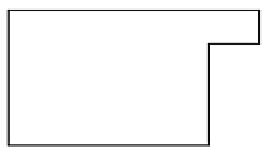
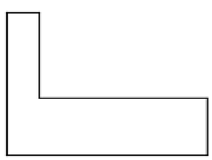
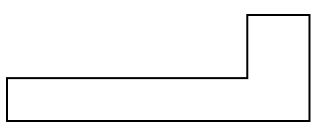
На следећем графику, који укус сладоледа треба уписати уместо X ?



A. Киви
B. Чоколада
C. Јагода
D. Ванила

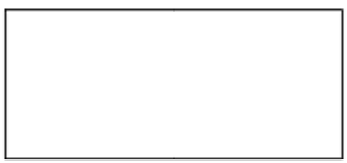
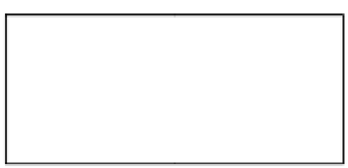
85 % (47 %)

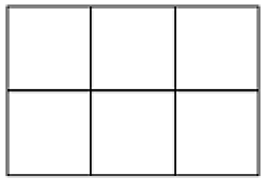
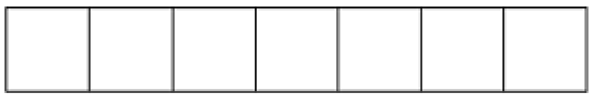
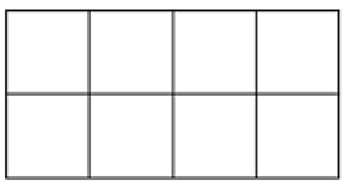
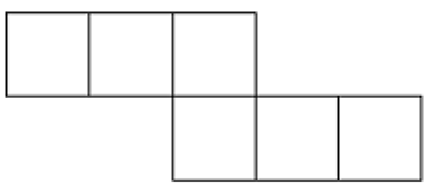
<table>
<tr>
<td>
6. За две фигуре кажемо да су подударне ако су исте величине и облика.

1)

2)

3)

4)


Које две фигуре су подударне?

A. 1 и 2
B. 1 и 3
C. 1 и 4
D. 3 и 4
</td>
<td>93,75 % (85 %)</td>
</tr>
</table>

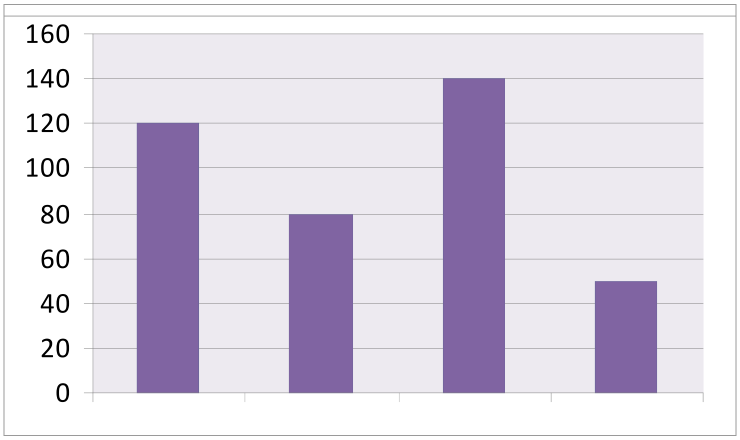
7. Која од следећих величина може да представља тежину одраслог човека ? A. 1 kg B. 6 kg C. 60 kg D. 600 kg	100 % (72 %)
8. A. Нацртати једну линију тако да од датог правоугаоника добијемо два троугла.  B. Нацртати једну линију тако да од датог правоугаоника добијемо два правоугаоника.  C. Нацртати две линије тако да од правоугаоника добијемо два троугла и један правоугаоник. 	90 % (75 %)

<table>
<tr>
<td>9. Која од следећих фигура има највећу површину ?
A.

B.

C.

D.
</td>
<td>88,75 % (78 %)</td>
</tr>
<tr>
<td>10. Владимир жели помоћу дигитрона да израчуна колико је 1379 + 243, али је грешком укуцао 1279 + 243. Шта треба да уради како би исправио своју грешку ?

A. да дода 100
B. да дода 1
C. да одузме 1
D. да одузме 100</td>
<td>93,75 % (72 %)</td>
</tr>
</table>

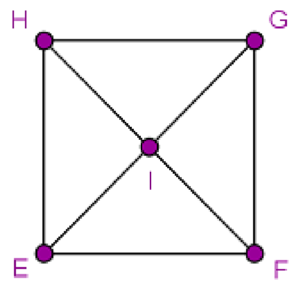
Табела 8. Задаци за 8. разред

Задатак	Проценат ученика са тачним решењем (међународни просек)
1. Који од понуђених одговора је једнак $2x - 3y + 7x + 5y$? A. 5x + 2y B. $5x + 8y$ C. $9x + 2y$ D. $9x + 8y$	93,75 % (49 %)
2. Дати су парови бројева : (3, 6), (6, 15) и (8, 21). Који од понуђених одговора описује како се од првог броја у пару добија други број? A. дода се 3 B. одузме се 3 C. помножи се са 2 D. помножи се са 2, па се дода 3 E. помножи се са 3, па се одузме 3	87,5 % (50 %)

3. На графику је представљено колико је фломастера, оловака, лењира и гумица продато током једне седмице.  Имена ствари које су продате недостају на графику. Фломастери су највише, а гумице најмање продате у односу на остале ствари. Ако је оловака више продато него лењира, колико је онда оловака продато? A. 40 B. 80 C. 120 D. 140	82,5 % (67 %)
4. Марко је имао 78, 76 и 74 поена на три теста, док је Милош имао 72, 82 и 74 поена. Упоредити Марков просечни (средњи) резултат са Милошевим просечним (средњим) резултатом. A. Марко има 1 поен више. B. Марко има 1 поен мање. C. Њихови просеци су једнаки. D. Марко има 2 поена више. E. Марко има 2 поена мање.	98,75 % (68 %)

<table>
<tr><td>

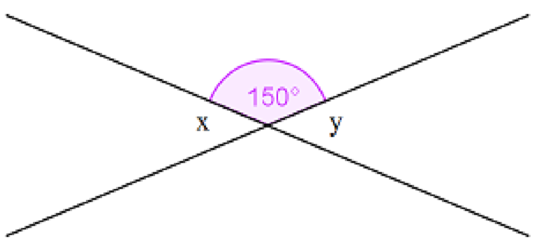
5. Дат је квадрат. Које од следећих тврђења није тачно ?



A. ΔEIF и ΔEIH су подударни.
B. ΔGHI и ΔGHF су подударни.
C. ΔEFH и ΔEGH су подударни.
D. ΔEIF и ΔGIH су подударни.

</td><td>80 % (56 %)</td></tr>
<tr><td>

6. Дате су две праве које се секу.

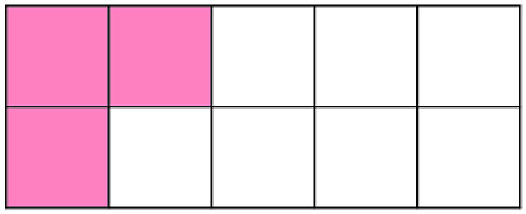


Која је вредност $x + y$?

A. 15º
B. 30º
C. 60º
D. 180º
E. 300º

</td><td>78,75 % (50 %)</td></tr>
</table>

7. Који од следећих одговора представља најмањи износ времена? A. 1 дан B. 20 сати C. 1800 минута D. 90000 секунди	86,25 % (43 %)
8. Од танке жице дужине 20 cm направљен је правоугаоник. Уколико је ширина правоугаоника 4 cm, колика му је дужина ? A. 5 cm B. 6 cm C. 12 cm D. 18 cm	85 % (37 %)
9. Ствари у бутику су поскупеле за 20 %. Која је нова цена ствари, ако је претходна била 800 динара ? A. 640 динара B. 900 динара C. 960 динара D. 1000 динара	88,75 % (49 %)

10. Колико је још потребно обојити квадрата да би $\frac{4}{5}$ фигуре било обојено?  A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1	88,75 % (49 %)

Анализирајући добијене резултате долазимо до закључка да је наш узорак тестираних ученика постигао боље резултате од међународног просека. Наравно, ово је само део експеримента, у сврхе истраживачког рада, и сагледавање постигнућа ученика једне школе. Разматрајући добијене резултате можемо се надати и пожелети да нам наредна тестирања донесу боље резултате и боље пласмане.

Закључак

Уз промене у друштву у којем живимо мења се и састав образовања, а у променама састава образовања није поштеђена ни настава математике. Развојем математике кроз векове очекивано је и да су се догађале модификације садржаја у настави математике.

Временом су радови на побољшању услова учења, на испитивању начина који би поступци у настави могли да доведу до бољих, трајнијих и примењљивијих знања добијали на озбиљности и свеобухватности.

У најранијем периоду предмет методике математике је била настава у основној и средњој школи, која се углавном односила на теме из тзв. елементарне математике. У последње време методика наставе математике укључује у своја разматрања и област високог образовања.

Полазни појам у методици наставе математике је циљ математичког образовања. Под циљем подразумевамо стање које желимо постићи код ученика применом одређених активности средстава и садржаја. Тако је општи циљ математичког образовања да код ученика развије способности правилног, критичког мишљења, да му пружи неопходан математички апарат потребан у делатности за коју се ученик припрема и да га упути како самосталном коришћењу литературе и самообразовања, тако и одговорности и конструктивности у колективном раду. Остали предмети и поступци изучавања су директно или посредно подређени том циљу.

Посебни циљеви су да ученик развије оне способности и стекне она знања која су предвиђена одређеном наставном јединицом или неком одређеном математичком облашћу. Оба ова циља прожета су стручно образовним и васпитно образовним циљем. Први је везан за чисто стручна математичка сазнања, а други за стицање особина, знања и навика које утичу на изградњу осталих социјално-психолошких особина личности.

Може се рећи да настава математике великим уделом учествује у изграђивању (васпитању и образовању) уравнотежене вредносне личности. Настава математике је та која је „обавезна“ да изгради интелектуални део, интелектуалну компоненту личности. Она то постиже, најкраће речено, оспособљавањем ученика да мисли.

Према резултатима претходних међународних истраживања јасно је да је наша настава математике далеко од ефикасне. У многим наставним програмима је проблем у томе што не постоји јасна веза између самих планова и програма, стандарда и уџбеника са једне стране и циљева са друге. Тако циљеви остају апстрактни, немерљиви и неповезани са наставом и активношћу наставника.

Поред тога, уџбеници и збирке задатака из математике су углавном написани тако да не одговарају узрасним могућностима деце и обично су збирке једина литература која се користи, док се уџбеници занемарују. Такође, треба нагласити пренатрпаност и преопширност програма математике.

У сврхе напредовања наставе математике треба порадити и на усавршавању наставника и њиховом обучавању за интерактивни рад са ученицима. Факултети који школују будуће наставнике математике би требало да у свом програму предвиде много тренинга наставника за кооперативан рад.

Креативан наставник математике има велике изгледе да код својих ученика развије креативне особине. Од важности је адекватна мотивација, како за сваку наставну целину, тако и за сваку наставну тему. Потребно је и растеретити наставне програме из математике, уџбенике прилагодити дечјем узрасту, као и подстаћи наставнике на међусобну сарадњу.

Наравно, не треба занемарити ни социјалне, психолошке и друштвене аспекте који утичу на ученике, на њихово понашање и став према школи, знању и математици самој. Само уз обухватање што већег броја потребних параметара могуће је пронаћи решење за ефикасну организацију и реализацију наставе математике.

Литература

1. Анић, И. (2011): *Когнитивни процеси у решавању математичких проблема у реалном контексту,* докторска дисертација, Нови Сад: Природно-математички факултет.
2. Антонијевић, Р. и Јањетовић, Д. (2006): *TIMSS у Србији*, Београд: Институт за педагошка истраживања.
3. Баркер, С. (1973): *Филозофија математике,* Београд: Нолит.
4. Божић, М. (2002): *Преглед историје и филозофије математике*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
5. Знам, Ш. и сарадници (1989): *Поглед у повијест математике,* Загреб: Техничка књига.
6. Лучић, З. (2009): *Огледи из историје античке геометрије*, Београд: ЈП Службени гласник.
7. Петковић, Љ. и Петковић, М. (2006): *Математички времеплов, прилози за историју математике*, Нови Сад: ЗМАЈ.
8. Стројк, Д. (2001): *Кратак преглед историје математике*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
9. Чекрлија, Б. (2001): *Времеплов кроз математику*, Бања Лука: Графомарк.

Интернет странице:

10. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/
11. http://sr.wikipedia.org/
12. http://ahyco.ffri.hr/seminari2007/povijestmatematike/1.htm
13. http://www.viser.edu.rs/im/htm/Radionica/Istorija/IstorijatMatematike.htm
14. http://www.pedagog.rs/
15. http://www.pisaserbia.org/
16. http://nces.ed.gov/timss/
17. http://www.ipisr.org.rs/TIMSSkratko.aspx
18. http://matematika.mingl.org/

19. http://pefmath2.etf.rs/files/105/627.pdf
20. http://www.eyelid.co.uk/numbers.htm
21. http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/index.html
22. http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/
23. http://www.historyworld.net/wrldhis/PlainTextHistories.asp?historyid=aa50
24. http://www.storyofmathematics.com/