Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Бесконачнодимензионе квантне групе

Аутор:
Стефан Милошевић

Ментор:
проф. др Зоран Ракић

15. јул 2012.

Садржај

1 Увод

1.1 Предговор

У класичној механици, фазни простор M је Пуасонова многострукост, тј. на алгебри функција $\mathcal{F}(M)$ постоји билинеарно пресликавање $\{,\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ које задовољава одређене аксиоме, и које називамо Пуасонова заграда. Тада, кретање у том систему описујемо

$$\frac{d}{dt} f(m(t)) = \{\mathcal{H}, f(m(t))\}$$

где је $\mathcal{H}$ функција која је задата и називамо је хамилтонијан (и у класичном случају представља укупну енергију система), док $m(t)$ представља стање система у трнеутку t. У случају кретања једне честице по правој линији, M представља $T^*\mathbb{R}$ - котангентно раслојење, и ако са q означимо координату на правој линији (што је у овом случају положај честице), а са p координату у фибри (у овом случају импулс), Пуасонова заграда је дата са

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_2}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial q}.$$

У овом случају је $\{p, q\} = 1$.

У квантној механици, простор M је замењен са скупом свих једнодимензионих потпростора неког комплексног хилбертовог простора V, а алгебра $\mathcal{F}(M)$ је замењена са алгебром оператора (не обавезно ограничених) на V. Тада еволуција неког оператора A се описује са

$$\frac{dA}{dt} = [\mathcal{H}_q, A]$$

где је $\mathcal{H}_q$ неки оператор, који називамо квантни хамилтонијан. У случају кретања једне честице по правој, простор V је простор $L^2(\mathbb{R})$ квадратно - интеграбилних функција по q а оператори P и Q који одговарају координатним функцијама p и q се дефинишу као:

$$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \qquad Q = *q,$$

где је $*q$ множење са q, а $\hbar$ је $\frac{1}{2\pi}$ пута Планкова константа. Приметимо да је у овом случају

$$[P, Q] = -i\hbar Id_V.$$

Питање које се поставља како прећи са класичне на квантну ситуацију, које се назива квантизација. Најлогичнија претпоставка би била да имамо неко пресликавање Ω које свакој функцији на M додељује неки оператор на V. Такође пошто се еволицја система у једном случају описује преко Пуасонове заграде а у дргуом преко комутатора, пресликавање Ω би требало да задовољава

$$\Omega\{f_1, f_2\} = \frac{[\Omega f_1, \Omega f_2]}{-i\hbar},$$

где нормализација долази од одговарајућих израза. Нажалост, такво пресликавање Ω још није нађено, чак ни у најједноставнијем случају кретања честице по правој линији.

Алтернативну формулацију проблема предложио је Мојал 1949 године. Приметимо прво фундаменталну разлику између класичног и квантног формализма. У првом случају алгебра функција $\mathcal{F}(M)$ је комутативна док алгебра оператора на неком векторском простору V није (под условом $\dim V > 1$). Мојалова идеја је била да покушамо да репродукујемо резултате квантне механике мењањем уобичајеног производа $*$ на $\mathcal{F}(M)$ некомутативним производом $*_h$ који зависи од параметра h таквим да $*_h$ постаје уобичајени производ кад $h \to 0$, и који задовољава

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1 *_h f_2 - f_2 *_h f_1}{h} = \{f_1, f_2\}.$$

Та идеја би одговарала томе да класичну механику добијамо када у квантној узмемо да Планкова константа тежи нули.

Тиме би могли да кажемо да је квантни простор, дуални објекат од асоцијативне али не обавезно комутативне алгебре. Уколико је почетни простор група G, групне операције ће на простору функција индуковати одговарајућа пресликавања, која, као што ћемо видети, уз неке техничке претпоставке снабдевају $\mathcal{F}(G)$ структуром Хопфове алгебре. Самим тим квантна група се дефинише, мада не строго, као дуални објекат од Хопфове алгебре, која није обавезно комутативна. Наравно, у оба ова случаја да би квантни простори и квантне групе имали разумна својства, морају се ставити додатни услови на почетне алгебре.

Рад је превасходно посвећен решавању Јанг - Бакстерове једначине, коришћењем метода квантних група. Специјално, дат је увод у теорију бесконачнодимензионих квантних група, са освртом на области потребне за њихово дефинисање, и приказано је како оне генеришу решења Јанг - Бакстерове једначине на својим репрезентацијама. Такође, због ограничености простора, многи појмови нису детаљно уведени.

Овом приликом хтео бих да изразим захвалност свом ментору проф. др Зорану Ракићу на подршци и помоћи приликом писања овог рада.

1.2 Основни појмови из линеарне алгебре

У овом поглављу увешћемо основне појмове из алгебре који се користе у раду. Основни појмови о векторским просторима и линеарним пресликавањима се подразумевају, као и основна својства тензорског производа. Уведимо неке основне конструкције везане за тензорски производ. Сви детаљи се могу наћи у [11].

1) Тензорска алгебра

Нека је V векторски простор над пољем k. Означимо са $T^0(V) = k, T^1(V) = V$ и $T^n(V) = V^{\otimes n}$ и нека је:

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V).$$

Простор $T(V)$ називамо тензорска алгебра над V. Јединицу дефинишемо на очигледан начин, јер је базно поље већ садржано у $T(V)$, док множење дефинишемо брисањем заграда тј. ако имамо $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in T^n(V)$ и $x_{n+1} \otimes \ldots \otimes x_{m+n} \in T^m(V)$, њихов производ је $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{m+n}$.

Тензорска алгебра има универзално својство да уколико имамо линеарно пресликавање $f : V \to A$ из базног векторског простора у неку алгебру

A, тада се f јединствено продужује до морфизма алгебри $f : T(V) \to A$. Формалну дефиницију алгебре ћемо увести касније, али укратко, то је векторски простор са билинеарном операцијом - множењем, које је асоцијативно и има неутрал.

Приметимо да тензорска алгебра има природну градуацију као векторски простор, као и да ће множење поштовати ту градуацију у смислу да ако је $x \in T^n(V)$ и $y \in T^m(V)$, онда је $xy \in T^{m+n}(V)$
2) Симетрична алгебра
Симетрична алгебра над векторским простором V се добија кад тензорску алгебру посечемо по идеалу I генерисаним са елементима $x \otimes y - y \otimes x$. Њу ћемо означавати са $S(V)$. Јасно је из својстава тензорске алгебре, да уколико имамо линеарно пресликавање $f : V \to A$ где је A комутативна алгебра, да ће се оно подићи до пресликавања $f : S(V) \to A$, које је морфизам алгебри. Симетрична алгебра задржава градуацију тензорске алгебра, јер се елементи идеала I налазе у $T^2(V)$.
Такође, кроз рад ћемо користити ознаку $k[A]$, где је k поље, а A скуп, за векторски простор над пољем k генерисан елементима скупа A.

1.3 Лијеве алгебре

У овом поглављу увешћемо превасходно нотацију која ће се користити кроз рад, и биће наведене основне особине Лијевих алгебри које ће бити коришћене, па самим тим неће се тежити потпуности. Детаљи се могу нпр. наћи у [6].

Дефиниција 1.1. Лијева алгебра је векторски простор L (увек ћемо претпостављати над пољем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) заједно са пресликавањем $[,] : L \times L \to L$, које називамо Лијева заграда (или комутатор), и за које важи:
1)$[x, x] = 0 \quad (\Leftrightarrow [x, y] = -[y, x])$,
2)$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.
Линеарно пресликавање $\phi : L \to L'$ је морфизам Лијевих алгебри ако важи: $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Аналогно као и код осталих алгебарских структура дефинишу се подалгебре. Специјално идеал Лијеве алгебре, је потпростор I, за који важи, уколико је $x \in I$ и $y \in L$ онда је $[x, y] \in I$. Очигледно је да су $\{0\}$ и L увек идеали. Специјално са $[L, L]$ означавамо најмањи идеал који садржи све комутаторе. Уколико су ово једини идеали за Лијеву алгебру L кажемо да је проста (у том случају очигледно важи $L = [L, L]$). Уколико имамо неку подалгебру K од Лијеве алгебре L, њен централизатор $C(K)$ дефинишемо као:

$$C(K) = \{y \in L | [x, y] = 0, \quad \forall x \in K\}.$$

Самим тим, за неки елемент $x \in L$ кажемо да је централни уколико је $x \in C(L)$.

Идеали имају аналогну улогу за Лијеве алгебре коју имају нормалне групе за групе. Нпр. лако се види да је језгро морфизма Лијевих алгебри идеал, и сл.

Основни примери Лијевих алгебра су подалгебре од $M_n(\mathbb{K})$, $n \times n$ матрица над пољем $\mathbb{K}$, на којој се Лијева заграда дефинише:

$$[A, B] = AB - BA$$

где је са десне стране уобичајено множење матрица (одатле и долази назив комутатор). Погледајмо један једноставнији случај:

Пример 1.1. Лијева алгебра $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ је скуп свих 2×2 матрица над пољем комплексних бројева, чији је траг 0, а Лијева заграда је дата комутатором матрица. Како је $tr(AB) = tr(BA)$, видимо да је комутатор било које 2 матрице, матрица трага 0, па је дати скуп затворен за комутатор, тј. она представља Лијеву подалгебру од $M_n(\mathbb{C})$. У њој имамо очигледну базу:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тада су комутатори базних елемената дати са:

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y, \qquad [x, y] = h.$$

Природно се поставља питање, да ли неку Лијеву алгебру можемо реализовати као подскуп неке алгебре, у којој би њена Лијева заграда била замењена комутатором одговарајућих елемената. Одговор ћемо навести кроз следећи пример:

Пример 1.2. Посматрајмо тензорску алгебру у случају када је базни векторски простор Лијева алгебра L. Тада у тензорској алгебри $T(L)$ имамо идеал I генерисан елементима $u \otimes v - v \otimes u - [u, v]$. Простор $T(V)/I$ назива се универзална омотачка алгебра Лијеве алгебре и означава се са $U(L)$. Јасно је да ће свако линеарно пресликавање f Лијеве алгебре L у алгебру A, за које важи $f([u, v]) = f(u)f(v) - f(v)f(u)$, подићи до пресликавања (које опет означавамо са f) $f : U(L) \to A$, које ће бити морфизам алгебри (самим тим, $U(L)$ смо могли да дефинишемо и као јединствену алгебру са јединицом за коју важи претходно својство).

Важна теорема која се односи на омотачке алгебре је следећа (позната као Поенкаре - Бирхоф - Витова теорема). Претходно, уочимо неку базу $\{x_1, \ldots, x_n\}$ од L и елементе $x_M = x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ од $U(L)$, у којима су индекси поређани у растућем поретку. Тада важи:

Теорема 1.1. *Елементи x_M формирају базу од $U(L)$.*

Овакве базе називамо PBW базе. Из ове теореме посебно видимо да се L може утопити у $U(L)$.

За Лијеву алгебру L кажемо да је решива, уколико је низ идеала $L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}], \quad L^{(0)} = L$ од неког n једнак $\{0\}$. Основни пример решиве Лијеве алгебре су горње троугаоне матрице, тј. матрице a_{ij} за које је $a_{ij} = 0$ уколико је $j < i$. Може се показати да свака Лијева алгебра L има јединствен максималан решиви идеал, који називамо радикал и означавамо $Rad(L)$. Уколико је $Rad(L) = \{0\}$, за L кажемо да је полупроста. За решиве Лијеве алгебре важи следећа теорема (позната као Лијева теорема):

Теорема 1.2. *Нека је L Лијева подалгебра од $\mathfrak{gl}(V)$, где је $V \neq 0$ коначнодимензиони векторски простор. Тада V садржи заједнички сопствени вектор за све ендоморфизме из L.*

Слично, за Лијеву алгебру L кажемо да је нилпотентна уколико је низ идеала $L^{i+1} = [L, L^i]$ где је $L^0 = L$ једнак $\{0\}$ од неког n. Основни пример у овом случају су строго горње троугаоне матрице.

За нас ће од посебног значаја бити полупросте Лијеве алгебре. Да би формулисали главни критеријум тог својства означимо са ad_x ендоморфизам од L који $y \to [x, y]$. Како је $ad_x \in \mathfrak{gl}(L)$, добро је дефинисано симетрично билинеарно пресликавање $\kappa(x, y) = Tr(ad_x ad_y)$, које називамо Килингова форма. Она је такође и асоцијативна (или инваријантна) у смислу да је $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$. Важи:

Став 1.1. *Лијева алгебра L је полупроста ако и само ако је њена Килингова форма недегенерисана.*

Такође за полупросте Лијеве алгебре важи:

Теорема 1.3. *Нека је L полупроста. Тада постоје идеали $L_1, \ldots, L_t$ од L који су прости (посматрани као Лијеве алгебре), такви да је $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$.*

Одавде посебно следи да за полупросте Лијеве алгебре важи $L = [L, L]$, као и да су сви идеали и хомоморфне слике опет полупросте Лијеве алгебре.

Даље, репрезентација Лијеве алгебре на неком векторском простору V (V ћемо још називати L-модул), се аналогно дефинише као код нпр. група. Специјално:

Дефиниција 1.2. Векторски простор V заједно са билинеарним пресликавањем $L \times V \to V$ које означавамо са $x.v$ или само xv је L-модул, уколико важи:

$$[x, y].v = x.y.v - y.x.v$$

Што је еквивалентно задавању морфизма $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Морфизам L-модула је линеарно пресликавање $\phi : V \to W$ за које важи: $\phi(x.v) = x.\phi(v)$. Језгро таквог морфизма је L - подмодул (тј. векторски потпростор који је затворен за дејство L). Специјално за L-модул V кажемо да је иредуцибилан ако су једини његови L-подмодули $\{0\}$ и он сам. Кажемо да је потпуно редуцибилан уколико је директна сума иредуцибилних L-модула. Следећа теорема (која се назива Вејлова теорема) каже да је то заправо увек случај код полупростих Лијевих алгебри:

Теорема 1.4. *Нека је $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ коначнодименизона репрезентација полупросте Лијеве алгебре. Тада је ϕ потпуно редуцибилна.*

Тиме је теорија репрезентација полупростих Лијевих алгебри сведена на изучавање њихових иредуцибилних репрезентација. Посматрајмо како би се укратко класификовале све коначнодимензионе, иредуцибилне репрезентације од $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

Пример 1.3. Нека је дата коначнодимензиона, иредуцибилна репрезентација $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to V$. Тада, линеарни оператор $h : x \to h.x$ има барем један сопствени вектор v, за сопствену вредност λ (може се показати да он може да се дијагонализује, али то нам није потребно). Тада је на основу релација из преимера 1.1:

$$h.x.v = [h, x].v + x.h.v = 2x.v + \lambda x.v = (\lambda + 2)x.v,$$

и аналогно би се добило да је вектор $y.v$ сопствени вектор са сопственом вредношћу $\lambda - 2$. Како је V коначнодимензиони простор, а сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима су линеарно независни, после довољног броја примена оператора x на v морамо добити 0 вектор (и аналогно за y). Последњи вектор у том низу који није 0 називамо максимални вектор, (једноставније речено максимални вектор је вектор $v \neq 0$ који је сопствени вектор за h и $x.v = 0$).

Нека је v максимални вектор, и означимо са $v_i = \frac{1}{i!}y^i.v$, $i \geq 0$ и узмимо да је $v_{-1} = 0$. Тада се директно проверава да важи:
1) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$,
2) $y.v_i = (i+1)v_{i+1}$,
3) $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$.
Приметимо неколико ствари. Због претходног, $v_i = 0$ од неког члана, и означимо са m најмањи цео број такав да је $v_m \neq 0$ а $v_{m+1} = 0$. Тада потпростор са базом $\{v_0, \ldots, v_m\}$ је затворен за дејство $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, па је он због иредуцибилности цео простор V. Такође ако применимо формулу 3) за $i = m+1$, добијамо:

$$0 = (\lambda - m)v_m,$$

одакле следи да је $\lambda = m$. Самим тим сопствена вредност која одговара максималном вектору је природан број, и износи $\dim V - 1$. Дати број називамо највећа тежина од V. Такође видимо да је до на производ скаларом v једини избор максималног вектора, јер из 1) следи да су сви сопствени потпростори од h димензије 1. Тиме смо добили дату класификацију.

Уколико имамо репрезентацију Лијеве алгебре L на векторским просторима V и W, тада постоји репрезентација L на $V \otimes W$ дата са:

$$x.(v \otimes w) = (x.v) \otimes w + v \otimes (x.w).$$

У случају $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ важи следећа формула, која се још назива Клебш - Горданова формула:

Став 1.2. *Нека је $V(m)$ репрезентација $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ највеће тежине m, $V(n)$ репрезентација највеће тежине n, и нека је $n \geq m$. Тада важи:*

$$V(m) \otimes V(n) \cong V(m+n) \oplus V(m+n-2) \oplus \ldots \oplus V(n-m).$$

Доказ претходног става се базира на налажењу максималних вектора одговарајућих тежина у тензорском производу репрезентација.

Споменимо још неколико речи о коренима и класификацији простих Лијевих алгебри. Нека је L полупроста Лијева алгебра над пољем комплексних бројева. Приметимо да постоје њене подалгебре које се састоје од полупростих елемената (једноставности ради, можемо посматрати Лијеве алгебре матрица), тј. елемената који могу да се дијагонализују. Назовимо такве подалгебре торалне. Тада важи:

Став 1.3. *Торалне подалгебре од L су комутативне.*

Означимо са H максималну торалну подалгебру од L, тј. торалну подалгебру која није садржана ни у једној другој торалној подалгебри (коју такође називамо и Картанова подалгебра). Како је H комутативна, фамилија ендоморфизама ad_x, $\quad x \in H$ може се истовремено дијагонализовати у некој бази. Другачије речено L је директна сума потпростора $L_\alpha = \{x \in L | [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in H\}$ где је $\alpha \in H^*$. Скуп свих $\alpha \neq 0$ за које је $L_\alpha \neq \{0\}$ означавамо са Φ, и његове елементе називамо корени од L у односу на H. Приметимо да је за $\alpha = 0$, по ставу $L_0 = C_L(H)$, што се може показати да је заправо H. Дакле, добили смо декомпозицију $L = H \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$. Такође може се показати да је рестрикција Килингове форме на H такође недегенерисана, што нам омогућује да идентификујемо H са H^*. Специјално, Φ одговара подскупу $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ од H. У наредна два става ћемо укратко навести основне особине корена:

Став 1.4. *1) Φ генерише H^*.*
2) Ако је $\alpha \in \Phi$ онда је $-\alpha \in \Phi$.
3) Нека је $\alpha \in \Phi$, и нека су $x \in L_\alpha$ и $y \in L_{-\alpha}$. Тада је $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.
4) $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.
5) Ако је $\alpha \in \Phi$ и X_α било који не-нула елемент L_α, тада постоји $Y_\alpha \in L_{-\alpha}$, такав да X_α, Y_α и H_α генеришу тродимензиону подалгебру од L изоморфну са $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
6) $H_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}, \qquad H_\alpha = -H_{-\alpha}$.

Векторе из 5) називамо корени вектори. Пошто смо видели класификацију репрезентација од $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, из својства 5) би даље могла да се добије класификација репрезентација простих Лијевих алгебри.

Став 1.5. *1) Ако је $\alpha \in \Phi$ онда је $\dim L_\alpha = 1$.*
2) Ако је $\alpha \in \Phi$, једини корени пропорционални са α су $\pm\alpha$.
3) Ако су $\alpha, \beta \in \Phi$ тада је $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$, и $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \Phi$ (бројеви $\beta(H_\alpha)$ се називају Картанови цели бројеви).
4) Ако су $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$ онда је $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.
5) Нека је $\alpha, \beta \in \Phi, \quad \beta \neq \pm\alpha$, и нека су r и qнајвећи цели бројеви за које су $\beta - r\alpha$ и $\beta + q\alpha$ корени. Тада су сви $\beta + i\alpha \in \Phi, \quad -r \leq i \leq q$ и $\beta(H_\alpha) = r - q$.
6) L је генерисана као Лијева алгебра са кореним потпросторима L_α.

Даље, може се показати да је могуће изабрати базу $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ (њене елементе ћемо називати прости корени) од H^*, у којој ће коефицијенти сваког корена бити или позитивни или негативни, које ћемо самим тим називати позитивни и негативни корени, а тиме добијамо и да је $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, и јасно је да је $\Phi^- = -\Phi^+$. Аналогно ћемо корене векторе називати позитивни и негативни, и означаваћемо их са X_α^+ и X_α^-.

Погледајмо на примеру $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ шта би били споменути објекти:

Пример 1.4. У случају лијеве алгебре $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ није тешко видети да ће H да се састоји од свих дијагоналних матрица трага 0, јер дијагоналне матрице комутирају, а и свака матрица која комутира са свим дијагоналним мора бити дијагонална. Уочимо у H следећу базу:

$$h_1 \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ \vdots &= \qquad\quad \vdots \\ h_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и означимо са L_i функционале који свакој дијагоналној матрици додељују i-ти дијагонални унос. Нека је E_{ij} стандардна база матрица. Тада важи:

$$[h, E_{ij}] = (L_i(h) - L_j(h))E_{ij} \quad \forall h \in H.$$

Дакле, функционали облика

$$L_i - L_j, \qquad\quad i \neq j,$$

су корени. У овом запису, позитивни корени ће бити:

$$\Phi^+ = \{L_i - L_j \mid i < j\},$$

и аналогно негативни. Даље сваки корен је сума корена облика $\alpha_i = L_i - L_{i+1}$. Специјално за позитивне ће бити:

$$L_i - L_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}.$$

Такође, видимо да елементи

$$E_{i,i+1}, h_i, E_{i+1,i}$$

формирају Лијеву алгебру изоморфну са $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Како Килингова форма дефинише скаларни производ $(,)$ на H^*, матрица $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \alpha_i(H_j)$, се назива Картанова матрица, и њени елементи су цели бројеви. По претходном видимо да она одређује Лијеву алгебру L. Постоје рестрикције на матричне елементе Картанове матрице, и може се показати да важи:

1) $a_{ii} = 2$,
2) $a_{ij} \leq 0$,
3) $a_{ij} = 0$ имплицира $a_{ji} = 0$,
4) $a_{ij}a_{ji}$ је највише 4.

Такође, важи и обрнуто, што наравно није једноставан резултат, а како класификација простих Лијевих алгерби није тема рада, овде ћемо само навести дату теорему:

Теорема 1.5. *Уз претходно уведене ознаке, нека је* L *Лијева алгебра генерисана са елементима* $\{X_i, Y_i, H_i | 1 \leq i \leq l\}$ *који задовољавају релације:*

$$[H_i, H_j] = 0,$$

$$[X_i, Y_i] = H_i,$$
$$[X_i, Y_j] = 0, \quad i \neq j$$
$$[H_i, X_j] = a_{ji} X_j, \quad [H_i, Y_j] = -a_{ji} Y_j,$$
$$(ad_{X_i})^{1-a_{ji}}(X_j) = 0,$$
$$(ad_{Y_i})^{1-a_{ji}}(Y_j) = 0.$$

Тада је L полупроста Лијева алгебра, са максималном торалном алгебром генерисаном са H_i, и кореним системом Φ (чија је база Δ). Такође L је јединствена до на изоморфизам.

На крају овог одељка, дефинишимо још кохомологију Лијеве алгебре. Нека V L - модул, и означимо са $C^n(L, V)$ скуп свих кососиметричних n - линеарних пресликавања $f : L \times \ldots \times L \to V$. Пресликавање је антисиметрично уколико је $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = sgn(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$. За $C^0(L, V)$ узмимо да је V. Тада сваком $f \in C^n(L, V)$ можемо доделити $n+1$ - линеарно пресликавање δf, на следећи начин:

$$(\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$$
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^{i+1} x_i f(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}),$$

где капа означава да је тај члан изостављен. За $f \in C^0 = V$ узимамо да је $\delta f(x) = xf$. Коришћењем Јакобијевог идентитета добија се:

Став 1.6. *Ако је $f \in C^n$ онда је $\delta f \in C^{n+1}$. Такође $\delta \circ \delta = 0$.*

Означимо језгро и слику од δ у C^n са Z^n односно B^n респективно. Елементе од Z^n називамо n - коциклима а елементе од B^n називамо n - кограницама. Из претходног става следи да је B^n векторски потпростор од Z^n, што омогућује да дефинишемо векторски простор:

$$H^n = Z^n / B^n,$$

који називамо n - та кохомолошка група Лијеве алгебре L са коефицијентима у V.

1.4 Кац-Мудијеве алгебре

Претходном теоремом смо из Картанове матрице добили релације које одређују полупросту Лијеву алгебру. Идеја је да слабљењем тих релација, добијемо ширу класу Лијевих алгебри које би и даље заджале лепе особине полупростих Лијевих алгебри. Дакле, генералисана Картанова матрица је квадратна матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ целих бројева, таква да за свако i, j важи:

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ij} \leq 0, \quad a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0.$$

A је симетризабилна ако постоје узајамно прости природни бројеви $d_1, \ldots, d_n$ такви да је матрица $(d_i a_{ij})$ симетрична. У том случају су d_i једнозначно одређени. Надаље ћемо претпостављати A симетризабилна Картанова матрица.

Нека је $\mathfrak{g}'(A)$ Лијева алгебра над $\mathbb{C}$ дефинисана генераторима $H_i, X_i^{\pm}$, $i = 1, \dots, n$ и релацијама:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_j^{\pm}] = a_{ij} X_j^{\pm}, \quad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{i,j} H_i,$$

$$(ad_{X_i^{\pm}})^{1-a_{ij}}(X_j^{\pm}) = 0, \quad i \neq j.$$

Нека је $\mathfrak{h}'$ линеал над H_i. Изаберимо векторски простор $\mathfrak{h}''$ димензије $n - r$ где је r ранг матрице A, са базом $\{D_{r+1}, \dots, D_n\}$. Нека је $\mathfrak{g}(A)$ Лијева алгебра са генераторима $H_i, X_i^{\pm}, \quad i = 1, \dots, n$ и $D_i, i = r+1, \dots n$ са дефинишућим релацијама од $\mathfrak{g}'(A)$ као и:

$$[D_i, D_j] = 0, \quad [D_i, H_j] = 0, \quad [D_i, X_j^{\pm}] = \pm\delta_{i,j} X_j^{\pm}.$$

Директна сума $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'' = \mathfrak{h}$ назива се Картанова подалгебра од $\mathfrak{g}$

На Кац-Мудијевим алгебрама имамо аналогон Килингове форме, тј. постоји јединствена недегенерисана инваријантна билинеарна форма $(,) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ таква да:

$$(H_i, H_j) = d_j^{-1} a_{ij}, \quad (D_i, D_j) = 0, \quad (H_i, D_j) = d_i^{-1}\delta_{i,j}, \quad (D_i, X_j^{\pm}) = 0,$$

$$(H_i, X_j^{\pm}) = 0, \quad (X_j^{\pm}, X_j^{\pm}) = 0, \quad (X_i^+, X_j^-) = d_i^{-1}\delta_{i,j}.$$

Просте корене од $\mathfrak{g}$ дефинишемо као функционале $\alpha_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ дате са:

$$\alpha_i(H_j) = a_{ji}, \quad \alpha_i(D_j) = \delta_{i,j}.$$

Даље, аналогно можемо дефинисати корене потпросторе.

Споменимо још једну важну класу Кац-Мудијевих алгебри. Нека је $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ где је матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ коначног типа, тј. одговара некој полупростој алгебри. Проширена Картанова матрица од $\mathfrak{g}$ је $\widetilde{A} = (a_{ij})_{i,j=0,\dots n}$ где је

$$a_{00} = 2, \quad a_{0i} = -2\frac{(\theta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad a_{i0} = -2\frac{(\theta, \alpha_i)}{(\theta, \theta)},$$

а θ је максимални корен у односу на споменуто уређење. Тада кажемо да је матрица $\widetilde{A}$ афиног типа, а саму Лијеву алгебру називамо афина Лијева алгебра. Њихово важно својство је да су оне изоморфне Лијевој алгебри $\mathfrak{g}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ са заградом

$$[Xz^k, Yz^l] = [X, Y]z^{k+l} + \delta_{k,-l}(X, Y)c,$$

где је елемент c централни, и још диференцирањем D за које важи:

$$D(Xz^k) = kXz^{k-1}, \quad D(c) = 0.$$

2 Основни појмови о Хопфовим алгебрама

2.1 Алгебре, коалгебре и биалгебре

Асоцијативна алгебра са јединицом (или, укратко алгебра), је уређена тројка (A, μ, e) где је A векторски простор, μ је билинеарна операција - множење на њему, која је асоцијативна, и за множење постоји неутрал. Посматрајући дефиницију овог објекта, видимо да га можемо дефинисати и као уређену тројку (A, μ, η) где је дакле A векторски простор, μ линеарно пресликавање $A \otimes A \to A$ и $\eta : k \to A$ линеарно пресликавање из поља k над којим је дефинисан векторски простор A, такви да следећа два дијаграма комутирају:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes id"] \arrow[dr, "\cong"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes k \arrow[l, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\cong"'] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Први дијаграм је само реформулација чињенице да је множење асоцијативно, док други дијаграм каже да у A постоји неутрал за множење (специјално, то ће бити елемент $\eta(1)$). За алгебру још кажемо да је комутативна, уколико је $\mu(a_1 \otimes a_2) = \mu(a_2 \otimes a_1)$, што би се једноставно исказало помоћу дијаграма:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

где је $\tau(a_1 \otimes a_2) = a_2 \otimes a_1$, пресликавање које ћемо називати транспозиција. Такође, морфизам између алгебри је пресликавање $f : (A, \mu, \eta) \to (A', \mu', \eta')$ за које важи:

$$\mu' \circ (f \otimes f) = f \circ \mu, \quad f \circ \eta = \eta'.$$

За алгебру A ћемо рећи да је градуисана, уколико постоје потпростори $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ такви да је:

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_n, \qquad A_i A_j \subset A_{i+j}.$$

За елемент $x \in A_i$ кажемо да је хомоген степена i. Јасно је да је раније споменута тензорска алгебра један пример градуисане алгебре. Слично, за алгебру A кажемо да је филтрирана уколико постоји растући низ потпростора F_i, $i \geq 0$ такав да:

$$A = \bigcup_{i \geq 0} F_i, \qquad F_i F_j \subset F_{i+j}.$$

Приметимо да смо у дефиницији универзалне омотачке алгебре изгубили градуацију од тензорске алгебре, јер елементи идеала који је дефинишу нису истог степена хомогености. Међутим она има структуру филтриране алгебре. Такође, свакој филтрираној алгебри A, можемо придружити градуисану алгебру $S = gr(A)$ дефинисану са

$$S_i = F_i(A)/F_{i-1}(A).$$

У случају универзалне омотачке алгебре, лако је видети да из Поенкаре - Бирхоф - Витове теореме следи да је $gr(U(L))$ заправо симетрична алгебра над L.

Аналогно као код Лијевих алгебри, уколико је дата алгебра A, A - модул је векторски простор V са билинеарним пресликавањем $A \times V \to V$, за које важи

$$a(a'v) = (aa')v, \qquad 1v = v,$$

за све $a, a' \in A$ и $v \in V$.

Како сваки векторски простор, има свој дуал, природно се поставља питање како аксиоме које дефинишу структуру алгебре утичу на дуални векторски простор од A. Као што је познато, уколико имамо линеарно пресликавање $f : V \to W$ између два векторска простора, оно индукује линеарно пресликавање $f^* : W^* \to V^*$. Видимо да се променио смер пресликавања, па је природно дефинисати структуру дуалну алгебри као структуру, у којој би одговарајућа пресликавања променила домене и кодомене, а стрелице у дијаграмима би се окренуле. Тако долазимо до структуре коалгебре. Формално:

Дефиниција 2.1. Коалгебра је уређена тројка (C, Δ, ε) где је C векторски простор $\Delta : C \to C \otimes C$ и $\varepsilon : C \to k$ линеарна пресликавања, таква да следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta\otimes id"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "id\otimes\Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\varepsilon"] & C \otimes k \\
 & C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Пресликавање Δ називамо комножење, пресликавање ε називамо којединица, и први дијаграм изражава својство комножења које називамо коасоцијативност. Аналогно као и за остале аксиоме, комутативност ћемо изразити окретањем стрелица (и у овом случају је назвати кокомутативност), тј. добија се следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "\tau"] & C \otimes C \\
 & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Морфизам коалгебри је пресликавање $f : (C, \Delta, \varepsilon) \to (C', \Delta', \varepsilon')$ које задовољава:

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f, \quad \varepsilon = \varepsilon' \circ f.$$

Приметимо још да уколико је тројка (A, μ, η) алгебра, тада је и тројка $(A, \mu \circ \tau = \mu^{op}, \eta)$ такође алгебра и њу означавамо A^{op}. Аналогно, уколико је тројка (C, Δ, ε) коалгебра коалгебру $(C, \tau \circ \Delta = \Delta^{op}, \varepsilon)$ означавамо са C^{cop}.

Као што је очекивано, важи следеће тврђење:

Став 2.1. *1) Дуални векторски простор коалгебре је алгебра.*
2) Дуални векторски простор коначно димензионе алгебре је коалгебра.

Доказ. Нека су $f : U \to U'$ и $g : V \to V'$ линеарна пресликавања векторских простора. Тада можемо дефинисати пресликавање $f \otimes g : U \otimes V \to U' \otimes V'$ на следећи начин:

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v),$$

за свако $u \in U$ и $v \in V$. Самим тим добијамо линеарно пресликавање

$$\lambda : Hom(U, U') \otimes Hom(V, V') \to Hom(V \otimes U, U' \otimes V').$$

Нека је сад (C, Δ, ε) коалгебра. Уколико за малопре дефинисано пресликавање λ узмемо да је $U = V = C$ и $U' = V' = k$ добијамо пресликавање из $C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ које ћемо опет означити са λ. Нека је $\overline{\lambda} = \lambda \circ \tau$ где је τ транспозиција. Нека је $A = C^*, \mu = \Delta^* \circ \overline{\lambda}$, и $\eta = \varepsilon^*$, где знак * означава да се ради о коњугату датог пресликавања. Директном провером се види (A, μ, η) алгебра.
Доказ случаја под 2) је аналоган, са тим што је у овом случају пресликавање $\overline{\lambda} : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ изоморфизам, и за комножење и којединицу узимамо пресликавања $\Delta = \overline{\lambda}^{-1} \circ \mu^*$ и $\varepsilon = \eta^*$. □

Пример 2.1. Свако поље има природну структуру коалгебре, стављањем да је $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ и $\varepsilon(1) = 1$. Такође тада је за произвољну коалгебру (C, Δ, ε) пресликавање ε морфизам коалгебри.

Пример 2.2. Из претходног става видимо да је дуални простор алгебре $n \times n$- квадратних матрица $M_n(\mathbb{R})$, има структуру коалгебре. Да бисмо експлицитно описале операције комножења и којединице, означимо са E_{ij} матрицу којој су све компоненте 0 и ij-та компонента је 1. Скуп $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ је база простора $M_n(\mathbb{R})$. Нека је x_{ij} њој дуална база. Тада се структура коалгебре на $M_n(\mathbb{R})^*$ дефинише са:

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Заиста, $\varepsilon(x_{ij}) = x_{ij}(\eta(1)) = x_{ij}(\sum_k E_{kk}) = \sum_k \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$, и аналогно се добија формула за комножење.

Пример 2.3. (Тензорски производ коалгебри) Нека су (C, Δ, ε) и $(C', \Delta', \varepsilon')$ коалгебре. Тада се на простор $C \otimes C'$ уводи структура коалгебре комножењем $(id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta')$ и којединицом $\varepsilon \otimes \varepsilon'$.

Претпоставимо сада да имамо неки векторски простор H који истовремено има структуру алгебре (H, μ, η) и коалгебре (H, Δ, ε). Приметимо да простор $H \otimes H$ такође има структуру алгебре и коалгебре (друга је дефинисана у примеру 2.3, док се структура алгебре добија само множењем одговарајућих компоненти тензорског производа). Докажимо прво један став који се односи на компатибилност ове две структуре.

Став 2.2. *Следећа два тврђења су еквивалентна:*
1) Пресликавања μ и η су морфизми коалгебри.
2) Пресликавања Δ и ε су морфизми алгебри.

Доказ. Чињеница да је μ морфизам коалгебри следи из комутативности следећег дијаграма:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta)"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "\mu \otimes \mu"] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\varepsilon \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "\mu"] & k \otimes k \arrow[d, "\cong"] \\
H \arrow[r, "\varepsilon"] & k
\end{tikzcd}$$

а да је η морфизам коалгебри следи из комутативности следећег дијаграма:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\cong"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
k \otimes k \arrow[r, "\eta \otimes \eta"] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "id"] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\
& k
\end{tikzcd}$$

Директно се проверава да ћемо добити исте дијаграме ако су Δ и ε морфизми алгебри. □

Претходно тврђење води до наредне дефиниције:

Дефиниција 2.2. Биалгебра је уређена петорка $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ где су уређене тројке (H, μ, η) и (H, Δ, ε) алгебра односно коалгебра, и која задовољава неко од еквивалентних тврђења претходног става. Морфизам биалгебри је морфизам одговарајућих алгебри и коалгебри.

Приметимо прво очигледне последице претходне дефиниције:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \varepsilon(1) = 1.$$

На основу става, видимо да је дуални векторски простор коначнодимензионе биалгебре биалгебра.

Пример 2.4. Покажимо да тензорска алгебра има структуру биалгебре. Дефинишимо:

$$\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1, \qquad \varepsilon(v) = 0.$$

Како су дата пресликавања линеарна из V у $T(V) \otimes T(V)$ односно k, она се продужују до морфизама алгебри $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ и $\varepsilon : T(V) \to k$. Видимо да ε задовољава аксиоме за којединицу, па још треба проверити да је комножење коасоцијативно, тј. да важи: $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$, што је довољно урадити на генераторима. Лева страна дате једначине је: $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(v) = id \otimes \Delta(1 \otimes v + v \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes v + 1 \otimes v \otimes 1 + v \otimes 1 \otimes 1$, што је исто и десна страна. Дакле тензорска алгебра има структуру биалгебре. Приметимо још да је тензорска алгебра увек кокомутативна.

Уколико је (C, Δ, ε) коалгебра, елементе за које важи $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ називамо примитивним.

Став 2.3. *Нека је H биалгебра. Уколико је елемент x примитиван тада је $\varepsilon(x) = 0$. Уколико је y други примитиван елемент, тада је и њихов комутатор $[x, y] = xy - yx$ такође примитиван.*

Доказ. Из комутативног дијаграма који дефинише којединицу видимо да, уколико је x примитиван елемент

$$x = \varepsilon(1)x + \varepsilon(x)1,$$

одакле следи да је $\varepsilon(x) = 0$. Даље имамо:

$$\Delta(xy) = (1 \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes y + y \otimes 1) = 1 \otimes xy + x \otimes y + y \otimes x + xy \otimes 1,$$

одакле директно следи да је

$$\Delta([x, y]) = 1 \otimes [x, y] + [x, y] \otimes 1,$$

што значи да је елемент $[x, y]$ примитиван. ☐

2.2 Хопфове алгебре

Претпоставимо сада да имамо алгебру (A, μ, η) и коалгебру (C, Δ, ε). Тада се на простору $Hom(C, A)$ може дефинисати билинеарна операција на следећи начин. Нека су, дакле $f, g \in Hom(C, A)$ и дефинишимо њихову конволуцију $f \star g$ као следећу композицију:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A.$$

Конволуција је очигледно билинеарна. Такође важи и следеће тврђење:

Став 2.4. *Уређена тројка $(Hom(C, A), \star, \eta \circ \varepsilon)$ је алгебра.*

Доказ. Приметимо прво, да уколико имамо неки елемент коалгебре x тада је $\Delta(x) = \sum_x x' \otimes x''$ и конволуција на њему је тада очигледно

$$f \star g(x) = \sum_x f(x')g(x'').$$

Приметимо такође, да због коасоцијативности важи

$$\sum_x x' \otimes \Delta(x'') = \sum_x \Delta(x') \otimes x'',$$

и овај израз ћемо означавати

$$\sum_x x' \otimes x'' \otimes x''',$$

што је познато као Свидлерова сигма нотација. У овом запису, због асоцијативности множења у A видимо:

$$((f \star g) \star h)(x) = \sum_x f(x')g(x'')h(x''') = (f \star (g \star h))(x).$$

Дакле $\star$ је асоцијативна. Даље је:

$$((\eta \circ \varepsilon) \star f)(x) = \sum_x \varepsilon(x')f(x'') = f(\sum_x \varepsilon(x')x'') = f(x),$$

што следи из дефиниције којединице, одакле следи да је $\eta \circ \varepsilon$ леви инверз за $\star$. Аналогно се показује да је и десни. $\square$

У специјалном случају, ако је $A = C = H$ биалгебра, конволуција дефинише структуру алгебре на простору $End(H)$.

Дефиниција 2.3. Нека је $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ биалгебра. Ендоморфизам S од H се назива антиподално пресликавање (антипод) биалгебре ако важи:

$$S \star id_H = id_H \star S = \eta \circ \varepsilon.$$

Биалгебра са антиподом се назива Хопфова алгебра. Морфизам Хопфових алгебри је морфизам одговарајућих биалгебри који комутира са антиподом.

Наравно, не мора свака биалгебра да има антипод, међутим уколико га има он је јединствен. Ово следи из чињенице да је антипод инверз од id у односу на операцију $\star$. Такође, Хопфову алгебру са антиподом S ћемо означавати $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$.

Коришћењем Свидлерове конвенције, видимо да је дефиниционо својство антипода заправо следећа релација:

$$\sum_x x'S(x'') = \varepsilon(x)1 = \sum_x S(x')x'',$$

које важи за свако $x \in H$. Погледајмо сад неке основне примере Хопфових алгебри.

Пример 2.5. Нека је G група. Тада на скупу $k[G]$ можемо увести структуру коалгебре пресликавањима $\Delta(x) = x \otimes x, \varepsilon(x) = 1, x \in G$, и линеарно их продужимо до $k[G]$ (ова конструкција наравно не захтева да је G група, може бити само скуп). Такође, множење у G ће индуковати множење у $k[G]$ и притом ће јединица остати иста. Да би $k[G]$ била биалгебра, одговарајућа пресликавања треба да буду морфизми одговарајућих структура, нпр. да су комножење и кojединица морфизми алгебри. Очигледно је:

$$\Delta(x)\Delta(y) = (x \otimes x)(y \otimes y) = xy \otimes xy = \Delta(xy), \quad \varepsilon(xy) = 1 = \varepsilon(x)\varepsilon(y),$$

за све $x, y \in G$, што је и требало показати. Даље видимо да уколико антипод S постоји он мора да задовољава:

$$xS(x) = S(x)x = \varepsilon(x)1 = 1,$$

тј. мора бити $S(x) = x^{-1}$. Дакле видимо да у овом случају, $k[G]$ јесте Хопфова алгебра. Приметимо још да је $k[G]$ увек кокомутативна, док је комутативна само ако је то G. По аналогији са овим примером, елементе a неке Хопфове алгебре за које важи $\Delta(a) = a \otimes a$ називаћемо групни.

Докажимо аналогију става за Хопфове алгебре.

Став 2.5. *Нека је H Хопфова алгебра са антиподом S. Тада је биалгебра H^* Хопфова алгебра са антиподом S^*.*

Доказ. Нека је $\alpha \in H^*$ и $x \in H$. Тада имамо:

$$\left(\sum_{\alpha} \alpha' S^*(\alpha'')\right)(x) = \sum_{\alpha,x} \alpha'(x')S^*(\alpha'')(x'') = \sum_{\alpha,x} \alpha'(x')\alpha''(S(x'')) =$$

$$= \alpha\left(\sum_{x} x' S(x'')\right) = \alpha(\eta\varepsilon(x)) = \varepsilon^*\eta^*(\alpha)(x).$$

Аналогно се показује и друга релација којом се дефинише антипод. □

Наредни став се односи на нека основна својства антипода.

Став 2.6. *Нека је $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ Хопфова алгебра.*
1) Тада је S морфизам биалгебре H у биалгебру $(H, \mu^{op}, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon) = H^{opcop}$, тј. имамо:

$$S(xy) = S(y)S(x), \quad S(1) = 1,$$

за све $x, y \in H$ и

$$(S \otimes S)\Delta = \Delta^{op}S, \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon,$$

2) Следећа три тврђења су еквивалентна:
i) $S^2 = id_H$,
ii) за свако $x \in H$ важи $\sum_x S(x'')x' = \varepsilon(x)1$,
iii) за свако $x \in H$ важи $\sum_x x''S(x') = \varepsilon(x)1$.
3) Ако је H комутативна или кокомутативна тада је $S^2 = id_H$.

Доказ овог става је дугачак и техничког карактера па ћемо га изоставити. Директна последица претходног става је следећи:

Став 2.7. *Нека је $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ Хопфова алгебра. Тада је*

$$H^{opcop} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon, S)$$

такође Хопфова алгебра и $S : H \to H^{opcop}$ је морфизам Хопфових алгебри. Ако је S још и изоморфизам, тада су

$$H^{op} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon, S^{-1}) \text{ и } H^{cop} = (H, \mu, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon, S^{-1})$$

изоморфне Хопфове алгебре.

Такође, још једна битна последица је да би неко пресликавање било антипод, довољно је да задовољава дефинишућу релацију само на одређеним генераторима, тј:

Став 2.8. *Нека је H биалгебра, и нека је $S : H \to H^{op}$ морфизам биалгебри. Нека је H као алгебра генерисана скупом X таквим да је*

$$\sum_x x'S(x'') = \varepsilon(x)1 = \sum_x S(x')x'',$$

за свако $x \in X$. Тада је S антипод за H.

Доказ. Дакле, треба проверити да својство антипода пролази кроз производ, тј. ако важи за x и y да важи и за xy. Тада, коришћењем основних својстава морфизма имамо:

$$\sum_{xy} (xy)'S((xy)'') = \sum_{x,y} x'y'S(x''y'') = \sum_x x' \left(\sum_y y'S(y'') \right) S(x'') =$$

$$= \left(\sum_x x'S(x'') \right) \varepsilon(y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(xy),$$

и аналогно се проверава друга једнакост. □

Погледајмо сад један од најбитнијих примера Хопфових алгебри:

Пример 2.6. Посматрајмо прво тензорску алгебру над неким векторским простором, и покажимо да је она Хопфова алгебра. Већ смо видели да она има структуру биалгебре, дакле остаје да се дефинише антипод, за који се узима $S(1) = 1, S(v) = -v$. Како је $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ то је $\sum_x x'S(x'') = 1S(v) + vS(1) = -1v + v1 = 0 = \varepsilon(v)1$ и аналогно би се испитала друга једнакост. Дакле тензорска алгебра над произвољним векторским простором има структуру Хопфове алгебре.

Покажимо сад да ће $U(L)$ наследити структуру Хопфове алгебре од $T(L)$. Да би се наследила структура коалгебре, треба да важи $\Delta(I) \subset I \otimes T(L) + T(L) \otimes I$ и $\varepsilon(I) = 0$. Прво тврђење се своди на Став 2.3, о примитивним елементима у биалгебри, док се друго тврђење директно проверава. Такође директно се проверава да је и антипод добро дефинисан на количничком простору, па је самим тим $U(L)$ Хопфова алгебра. Приметимо опет, као у случају обичне тензорске алгебре да је и ова Хопфова алгебра кокомутативна.

На крају овог уводног одељка о Хопфовим алгебрама, погледајмо једну мотивацију за увођење ових објеката.

Као што је познато, тензорски прозивод векторских простора је асоцијативан, у смислу да су $(U \otimes V) \otimes W$ и $U \otimes (V \otimes W)$ изоморфни на канонски начин. Уколико је A алгебра и U и V, A - модули, тада је $U \otimes V$ у принципу само $A \otimes A$ - модул, међутим уколико је A биалгебра, комножење нам омогућава да $A \otimes A$ - модул $U \otimes V$ снабдемо структуром A - модула на следећи начин:

$$a(u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v) = \sum_a a'u \otimes a''v.$$

Такође којединица сваки векторски простор снабдева структуром тривијалног A - модула тако што узмемо: $av = \varepsilon(a)v$. Тада важи:

Став 2.9. *Ако је A биалгебра, U, V и W A - модули, и ако поље k посматрамо као тривијални A - модул, тада су канонски изоморфизми:*

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W), \quad k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$$

изоморфизми A - модула. Ако је A још и кокомутативна, тада је транспозиција $\tau : V \otimes W \cong W \otimes V$ изоморфизам A - модула.

Доказ. Доказ тврђења је једноставан, па ћемо показати само да важи асоцијативност. Дакле, треба показати да је $a(u \otimes (v \otimes w)) = a((u \otimes v) \otimes w)$. Израз на левој страни је једнак $\sum_a a'u \otimes a''(v \otimes w) = \sum_a a'u \otimes a''v \otimes a'''w$, а због коасоцијативности, томе је једнак и израз на десној страни једнакости. □

Напоменимо овде још да се свака од претходних импликација може ослабити. Уколико је A још и Хопфова алгебра, постојање антипода нам додатно омогућава да дефинишемо структуру A - модула на векторском простору $Hom(V, V')$. Експлицитно, ако је $a \in A, v \in V$ и $f \in Hom(V, V')$ тада се за дејство A на $Hom(V, V')$ узима:

$$(af)(v) = \sum_a a'f(S(a'')v).$$

И у овом случају важи:

Став 2.10. *Нека је $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ Хопфова алгебра и U, U', V и V' A - модули такви да бар један пар чине коначнодимензиони простори. Тада је пресликавање:*

$$\lambda : Hom(U, U') \otimes Hom(V, V') \to Hom(V \otimes U, U' \otimes V'),$$

из доказа Става 2.1, морфизам A - модула, ако је то и $\tau : U^* \otimes V' \to V' \otimes U^*$. Специјално пресликавања:

$$\lambda : U^* \otimes V^* \to (V \otimes U)^*, \quad \varpi : V \otimes U^* \to Hom(U, V)$$

су морфизми A - модула.

3 Пуасон-Лијеве групе и Лијеве биалгебре

3.1 Лијеве биалгебре

У претходном одељку видели смо како структура алгебре уводи додатну структуру на дуални простор, и након тога смо дошли до појма коалгебре и биалгебре. Аналогним поступком, уколико кренемо од Лијеве алгебре, доћићемо до појма Лијеве биалгебре. Почнимо дакле од појма Пуасонове многострукости.

Дефиниција 3.1. Нека је M глатка многострукост димензије n, и нека је $C^\infty(M)$ алгебра глатких функција на њој. Пуасонова структура на M је $\mathbb{R}$ линеарно пресликавање

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

које задовољава следеће релације:

$$\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}, \tag{1}$$

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0, \tag{2}$$

$$\{f_1 f_2, f_3\} = f_1\{f_2, f_3\} + \{f_1, f_3\}f_2. \tag{3}$$

Ако су M и N Пуасонове многострукости, за пресликавање $F : M \to N$ кажемо да је Пуасоново уколико важи:

$$\{f_1, f_2\}_N \circ F = \{f_1 \circ F, f_2 \circ F\}_M.$$

Својство 2 претходне дефиниције називамо Јакобијев идентитет, а својство 3 лајбницово правило. Посматрајмо пресликавање $g \to \{f, g\}$. На основу својства 3 претходне дефиниције ово пресликавање је диференцирање алгебре функција, па је оно облика $X_f(g)$, за неко векторско поље (које називамо хамилтоново векторско поље), и зависи само од dg, а због својства 1, зависи само од df. Самим тим добро је дефинисано пресликавање $B : T^*(M) \to T(M), B(df) = X_f$, које заправо представља објекат $\omega^M \in T(M)^{\otimes^2}$, којег називамо Пуасонов бивектор.

У следећем примеру видимо везу између Пуасонове и Лијеве структуре.

Пример 3.1. Нека је $\mathfrak{g}$ коначнодимензионална реална Лијева алгебра, и нека су f_1 и f_2 глатке функције на $\mathfrak{g}^*$. Како је $\mathfrak{g}^*$ векторски простор, његов тангентни простор у свакој тачки се може идентификовати са њим самим, па самим тим диференцијал df сваке глатке функције слика $\mathfrak{g}^*$ у $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$, па можемо узети:

$$\{f_1, f_2\}(\xi) = \langle [(df_1)_\xi, (df_2)_\xi], \xi \rangle.$$

Ако је $x_1, \ldots, x_n$ база од $\mathfrak{g}$, тада дати израз можемо записати као:

$$\sum_{i,j} \omega_{ij}(\xi) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j},$$

где је

$$\omega_{ij}(\xi) = \sum_k c_{ij}^k \langle x_k, \xi \rangle,$$

при чему су c_{ij}^k структурне константе Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$. Очигледно важи $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Такође уколико погледамо израз:

$$\sum_r \left(\omega_{ri} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_r} + \omega_{rj} \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x_r} + \omega_{rk} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_r} \right) = \sum_s \sum_r (c_{jk}^r c_{ri}^s + c_{ki}^r c_{rj}^s + c_{ij}^r c_{rk}^s) \langle \xi, x_s \rangle$$

видимо да је он једнак 0 због Јакобијевог идентитета у $\mathfrak{g}$. Дакле $\{,\}$ је Пуасонова заграда на $\mathfrak{g}^*$.

Самим тим, природно би било потражити структуру дуалну структури Лијеве алгебре на тангентном простору Пуасонове многострукости, што нас доводи до следеће:

Дефиниција 3.2. Пуасон-Лијева група је Лијева група G, која је и Пуасонова многострукуст, и ове две структуре су компатибилне у смислу да је множење $\mu : G \times G \to G$ Пуасоново пресликавање.

Пре него што видимо да овиме заиста долазимо до жељене структуре на тангентном простору, погледајмо како се аксиоме Лијеве групе манифестују на Пуасоновом бивектору. Услов да је множење Пуасоново пресликавање се записује:

$$\{f_1, f_2\}(g_1 g_2) = \{f_1 \circ L_{g_1}, f_2 \circ L_{g_1}\}(g_2) + \{f_1 \circ R_{g_2}, f_2 \circ R_{g_2}\}(g_1),$$

што је заправо:

$$\langle \omega_{g_1 g_2}, (df_1)_{g_1 g_2} \otimes (df_2)_{g_1 g_2} \rangle = \langle \omega_{g_2}, d(f_1 \circ L_{g_1})_{g_2} \otimes d(f_2 \circ L_{g_1})_{g_2} \rangle +$$

$$+ \langle \omega_{g_1}, d(f_1 \circ R_{g_2})_{g_1} \otimes d(f_2 \circ L_{g_2})_{g_1} \rangle,$$

односно, записано на бивектору:

$$\omega_{g_1 g_2} = (L_{g_1})_{*g_2} \otimes (L_{g_1})_{*g_2}(\omega_{g_2}) + (R_{g_2})_{*g_1} \otimes (R_{g_2})_{*g_1}(\omega_{g_1}).$$

Специјално, ако ставимо да је $g_1 = g_2 = e$, очигледно добијамо:

Последица 3.1. *Ранг Пуасоновог бивектора у јединици Пуасон-Лијеве групе је* 0*. Специјално Пуасон-Лијева група никад није симплектичка.*

Да смо заиста добили оно што смо и желели, видимо из тога што на $\mathfrak{g}^*$ постоји структура Лијеве алгебре. Заиста, ако су ξ_1 и ξ_2 елементи $\mathfrak{g}^*$, нека су f_1 и f_2 такви да је $(df_i)_e = \xi_i$, и нека је:

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = (d\{f_1, f_2\})_e.$$

Ако за тренутак занемаримо питање да ли је дата операција добро дефинисана, видимо да она заиста јесте Лијева заграда, јер Пуасонова заграда такође задовољава Јакобијев идентитет и остала својства.

Посматрајмо пресликавање $\omega^R : G \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ које је десна транслација Пуасоновог бивектора у јединицу, и нека је $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, његов диференцијал у јединици. Тада је:

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = \delta^*(\xi_1 \otimes \xi_2).$$

Заправо, за свако $g \in G$ је:

$$\{f_1, f_2\}(g) = \langle \omega^R(g), R_g^* \otimes R_g^*((df_1)_g \otimes (df_2)_g) \rangle.$$

Диференцирањем овог израза у јединици у правцу вектора X, и коришћењем претходне последице, добијамо:

$$\langle X, d\{f_1, f_2\}\rangle = \langle \delta(X), \xi_1 \otimes \xi_2\rangle,$$

одакле следи добра дефинисаност.

Ако израз за Пуасонов бивектор запишемо преко ω^R добијамо:

$$\omega^R(g_1 g_2) = (Ad_{g_1} \otimes Ad_{g_1})(\omega^R(g_2)) + \omega^R(g_1),$$

што значи да је ω^R коцикл на G са вредностима у $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, па је његов извод у јединици коцикл на $\mathfrak{g}$ са вредностима у $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, односно:

$$\delta([X,Y]) = (1 \otimes ad_X + ad_X \otimes 1)\delta(Y) - (1 \otimes ad_Y + ad_Y \otimes 1)\delta(X).$$

Самим тим долазимо до следеће дефиниције:

Дефиниција 3.3. а)Нека је $\mathfrak{g}$ Лијева алгебра. Структура Лијеве биалгебре на $\mathfrak{g}$ је косо симетрично линеарно пресликавање $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ које зовемо ко - комутатор и за које важи:
1) $\delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ је Лијева заграда.
2) δ је 1-коцикл на $\mathfrak{g}$ са вредностима у $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.
б) Морфизам Лијевих биалгебри је пресликавање $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, за које важи:

$$\varphi \otimes \varphi \circ \delta_{\mathfrak{g}} = \delta_{\mathfrak{h}} \circ \varphi.$$

Приметимо да ако је $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ Лијева биалгебра, тада је то и $(\mathfrak{g}, \lambda\delta_{\mathfrak{g}})$ за сваки број $\lambda \in \mathbb{R}$. Специјално, за $\lambda = -1$ добијамо Лијеву биалгебру коју означавамо $\mathfrak{g}^{op}$.

Такође видимо да је Лијева биалгебра потпуно одређена Лијевом заградом на $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, па ћемо је означавати и као пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$.

Следеће тврђење је аналогон познатог става за Лијеве групе:

Теорема 3.1. *Нека је G Лијева група са Лијевом алгебром $\mathfrak{g}$. Ако је G Пуасон-Лијева група онда $\mathfrak{g}$ има структуру Лијеве биалгебре. Ако је $\Phi : G \to H$ хомоморфизам Пуасон-Лијевих група, и $\mathfrak{h}$ тангентна Лијева биалгебра групе H, тада је извод у е пресликавања Φ морфизам Лијевих биалгебри.*

Обрнуто, ако је G повезана и просто-повезана Лијева група, тада свака структура Лијеве биалгебре на $\mathfrak{g}$ потиче од јединствене Пуасон-Лијеве структуре на G. Такође ако је $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ морфизам Лијевих биалгебри и H Пуасон-Лијева група са тангентном биалгебром $\mathfrak{h}$, тада постоји јединствен хомоморфизам $\Phi : G \to H$, такав да $\Phi'_e = \phi$.

3.2 Мањинове тројке

Посматрајмо сад један еквивалентан начин задавања Лијевих биалгебри.

Дефиниција 3.4. Мањинова тројка је тројка Лијевих алгебри $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ заједно са недегенерисаном билинеарном формом $(,)$ на $\mathfrak{p}$, инваријантном у односу на адјунговану репрезентацију $\mathfrak{p}$, такву да важи:
i) $\mathfrak{p}_+$ и $\mathfrak{p}_-$ су Лијеве подалгебре од $\mathfrak{p}$.
ii) $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ као векторски простор.
iii) $\mathfrak{p}_+$ и $\mathfrak{p}_-$ су изотропне за $(,)$.

Теорема 3.2. *За сваку коначнодимензиону Лијеву алгебру* $\mathfrak{g}$*, постоји 1-1 кореспонденција између Лијевих биалгебра на* $\mathfrak{g}$ *и Мањинових тројки* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$*, за које је* $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}$*.*

Доказ. Ако је $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ Лијева биалгебра, узмемо $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}, \mathfrak{p}_- = \mathfrak{g}^*$, и дефинишемо скаларни производ на $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$:

$$(X, \xi)_{\mathfrak{p}} = \langle X, \xi \rangle, \quad (X, X)_{\mathfrak{p}} = (\xi, \xi)_{\mathfrak{p}} = 0,$$

за све $X \in \mathfrak{g}$ и $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Обрнуто, скаларни производ дефинише изоморфизам векторских простора $\mathfrak{p}_- \cong \mathfrak{p}_+^*$, и самим тим и Лијевау алгебру на $\mathfrak{p}_+^*$. Дакле, крај тврђења следи из наредног става. □

Став 3.1. *Нека су* $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{g}^*$ *Лијеве алгебре, и нека је на* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ *задат скаларни производ као у доказу претходне теореме. Тада постоји структура Лијеве алгебре на* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$*, таква да су* $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{g}^*$ *Лијеве подалгбре и која оставља инваријантан дати скаларни производ акко је* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ *Лијева биалгебра, и у овом случају структура Лијеве алгебре је јединствена.*

Доказ. Изаберимо базу $\{X_r\}$ од $\mathfrak{g}$ и њој дуалну базу $\{\xi^r\}$ од $\mathfrak{g}^*$, и нека је:

$$[X_r, X_s] = c^t_{rs} X_t, \qquad [\xi^r, \xi^s] = \gamma^{rs}_t \xi^t.$$

Да би одредили заграде на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, треба да израчунамо још изразе $[X_r, \xi^s]$, где користимо инваријантност скаларног производа, тј.

$$([X_r, \xi^s], \xi^t) = (X_r, [\xi^s, \xi^t]).$$

Такође видимо да је на овај начин операција $[,]$ једнозначно одређена. Треба још показати да је Лијева заграда, тј. да задовољава Јакобијев идентитет, акко дуал $\delta_{\mathfrak{g}}$ Лијеве заграде на $\mathfrak{g}^*$, јесте ко - комутатор, тј. јесте 1-коцикл са вредностима у $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Очигледно је $\delta(X_r) = \gamma^{st}_r X_s \otimes X_t$. Дакле услов за 1-коцикл $\delta([X_r, X_s]) = X_r \delta(X_s) - X_s \delta(X_r)$, се може записати:

$$c^t_{rs} \gamma^{ab}_t X_a \otimes X_b = \gamma^{pq}_s X_r (X_p \otimes X_q) - \gamma^{pq}_r X_s (X_p \otimes X_q) =$$

$$= \gamma^{pq}_s (c^a_{rp} X_a \otimes X_q + c^b_{rq} X_p \otimes X_b) - \gamma^{pq}_r (c^a_{sp} X_a \otimes X_q + c^b_{sq} X_p \otimes X_b).$$

Изједначавањем коефицијената уз $X_a \otimes X_b$ добијамо:

$$c^t_{rs} \gamma^{ab}_t = c^a_{rp} \gamma^{pb}_s + c^b_{rq} \gamma^{aq}_s - c^a_{sp} \gamma^{pb}_r - c^b_{sq} \gamma^{aq}_r.$$

Са друге стране, да бисмо проверили Јакобијев идентитет на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ треба показати да је

$$[\xi^a, [X_r, X_s]] + [X_r, [X_s, \xi^a]] + [X_s, [\xi^a, X_r]] = 0,$$

и случај са два ξ и једним X. Развијањем израза на левој страни и поређењем коефицијената уз X_p видимо да се добија одговарајућа једначина. Аналогно се испитује други случај. □

Погледајмо сад неке примере Лијевих биалгебри:

Пример 3.2. Нека је G Лијева група са тривијалном Пуасоновом структуром. Њена тангентна Лијева биалгебра $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ добија се узимањем да је $\mathfrak{g}^*$ абелова.

Дуално, нека је $\mathfrak{g}$ коначнодимензиона абелова Лијева алгебра. Тада су Лијеве биалгебре на $\mathfrak{g}$ у 1-1 кореспонденцији са Лијевим алгебрама на $\mathfrak{g}^*$.

Пример 3.3. Нека је $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ Кац-Мудијева алгебра дефинисана генерализованом Картановом матрицом A. Тада постоји структура биалгебре на њој (која се зове стандардна структура), која се дефинише ко - комутатором на генераторима:

$$\delta(H_i) = 0, \qquad \delta(D_i) = 0, \qquad \delta(X_i^{\pm}) = d_i X_i^{\pm} \wedge H_i,$$

(где је $X \wedge Y = X \otimes Y - Y \otimes X$). Јединственост следи из тога што је ко - комутатор 1-коцикл, и зато што је $\mathfrak{g}$ генерисана као Лијева алгебра датим елементима. Да би се доказало постојање дате структуре користимо Мањинове тројке. Нека је $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (као Лијева алгебра), нека је $\mathfrak{p}_+$ дијагонална подалгебра, и нека је $\mathfrak{p}_- = \{(x, y) \in \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_- | \mathfrak{h}\text{-компонента } x + y = 0\}$(овде је $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \oplus \mathfrak{h}$, а $\mathfrak{n}_\pm$ је алгебра генерисана са $X_i^{\pm}$), и дефинишемо скаларни производ $\langle (x, y), (x', y') \rangle_{\mathfrak{p}} = (x, x')_{\mathfrak{g}} - (y, y')_{\mathfrak{g}}$, где је $(,)_{\mathfrak{g}}$ стандардни скаларни производ на $\mathfrak{g}$. Коришћењем чињеница да је $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_+ + \mathfrak{b}_-, \mathfrak{h} = \mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_-$ као и да су $\mathfrak{n}_\pm$ изотропне за $(,)_{\mathfrak{g}}$ добија се да је $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ Мањинова тројка. Дакле уколико је $dim(\mathfrak{g}) < \infty$, постоји структура биалгебре на $\mathfrak{g}$. Напоменимо да и поред тога што у случају $dim(\mathfrak{g}) = \infty$, не важи претходна теорема, може се показати да ће и тад постојати дата структура Лијеве биалгебре на $\mathfrak{g}$.

Напоменимо још да ово нису једине Лијеве биалгебре на $\mathfrak{g}$ (до на изоморфизам и умножак скаларом), чак ни у случају $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$.

Пример 3.4. Нека је $\mathfrak{a}$ проста коначнодимензиона Лијева алгебра (над пољем $\mathbb{C}$), и нека је $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u] = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[u]$ где је u непозната. Лијева алгебра на $\mathfrak{g}$ се дефинише тачка по тачка (посматрајући $\mathfrak{g}$ као скуп полиномијалних пресликавања $\mathbb{C} \to \mathfrak{a}$). Узмимо инваријантни скаларни производ $(,)_{\mathfrak{a}}$ на $\mathfrak{a}$, и нека је $t \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ Казимиров елемент (тј. елемент који одговара $id \in End(\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{a}^* \otimes \mathfrak{a}$ при изоморфизму $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}^*$ дефинисаном са $(,)_{\mathfrak{a}}$), и дефинишимо $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ са:

$$\delta(f)(u, v) = (ad_{f(u)} \otimes 1 + 1 \otimes ad_{f(v)}) \frac{t}{u - v}.$$

Приметимо да иако десна страна делује да је рационална функција од u и v, тј. да има пол дуж $u = v$, она то није због

$$(ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x) t = 0,$$

за све $X \in \mathfrak{a}$. Одговарајућа Мањинова тројка је $(\mathfrak{a}((u^{-1})), \mathfrak{a}[u], \mathfrak{a}[[u^{-1}]])$, са скаларним производом:

$$(f, g)_{\mathfrak{p}} = -res_0(f(u), g(u))_{\mathfrak{a}},$$

где је res резидум, тј. коефицијент уз u^{-1}.

3.3 Класични дуал и дабл

Приметимо да из особина Мањинове тројке $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ следи да ће тројка $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_+)$ такође бити Мањинова тројка, што значи да је дефиниција Лијеве биалгебре дуална сама себи, тј. ако је $\mathfrak{g}$ Лијева биалгебра, тада је и $\mathfrak{g}^*$ Лијева биалгебра. На основу Теореме 3.1, на нивоу Пуасон-Лијевих група, видимо да ако је G Пуасон-Лијева група са тангентно биалгебром $\mathfrak{g}$, тада постоји јединствена повезана и просто-повезана Пуасон-Лијева група G^* чија је тангентна биалгебра $\mathfrak{g}^*$, коју ћемо називати дуал од G. Како је $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ видимо да је и $G^{**} = G$.

Такође, кад смо посматрали Мањинове тројке, видели смо да ако је $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ Лијева биалгебра, да тада постоји структура Лијеве алгебре на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ која је инваријантна у односу на природни скаларни производ. Заправо важи и више:

Теорема 3.3. *Нека је* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ *коначнодимензиона Лијева биалгебра. Тада постоји канонска структура Лијеве биалгебре на* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$*, таква да су инклузије у сабирке*

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \hookleftarrow (\mathfrak{g}^*)^{op},$$

морфизми Лијевих биалгебри.

Са овом структуром Лијеве биалгебре, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ се назива дабл од $\mathfrak{g}$ и означава $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$. Аналогно као малопре постоји Пуасон-Лијева група $\mathcal{D}(G)$ која се такође назива дабл од G.

Доказ. Нека је $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \subset \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ елемент који одговара id при изоморфизму $End(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$. Ко - комутатор на $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, се дефинише:

$$\delta_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}(u) = (ad_u \otimes id + id \otimes ad_u)r.$$

Да се овако заиста добија Лијева биалгебра, видећемо касније. Засада покажимо да овако дефинисана Лијева биалгебра има жељена својства, тј. да је $\delta_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}(X) = \delta_{\mathfrak{g}}(X)$, и аналогно за $\mathfrak{g}^*$. По нотацији из доказа става 3.1, $r = X_t \otimes \xi^t$, и тада је

$$\delta_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}(X_s) = [X_s, X_t] \otimes \xi^t + X_t \otimes [X_s, \xi^t] =$$

$$= c_{st}^p X_p \otimes \xi^t + X_t \otimes (\gamma_s^{tp} X_p - c_{sp}^t \xi^p) = \gamma_s^{tp} X_t \otimes X_p$$

што заправо јесте ко - комутатор за $\mathfrak{g}$. Аналогно се проверава други случај. □

Вратимо се сад примеру стандардне структуре на Кац-Мудијевој алгебри, и покажимо да се она може реализовати као дабл (до на производ скаларом). Заиста, нека је (нотација је као у примеру 3.3) $\mathfrak{q} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ као Лијева алгебра, и нека је:

$$\mathfrak{q}_\pm = \{(x, h) \in \mathfrak{q} | x \in \mathfrak{b}_\pm, \pm h = \mathfrak{h}\text{-компонента } x\}.$$

Дефинишимо скаларни производ на $\mathfrak{q}$ са

$$((x, h), (x', h'))_{\mathfrak{q}} = (x, x')_{\mathfrak{g}} - (h, h')_{\mathfrak{g}}.$$

Исто као у примеру 3.3, показује се да је $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_+, \mathfrak{q}_-)$ Мањинова тројка, дакле имамо Лијеве биалгебре на $\mathfrak{q}_\pm$, па и на $\mathcal{D}(\mathfrak{q}_+) \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Ко - комутатор налазимо директним рачуном. Видимо да је $\delta|_{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}} = 0$, као и да је:

$$\delta(X_i^+, 0) = \frac{1}{2}d_i(X_i^+, 0) \wedge (H_i, H_i), \quad \delta(X_i^-, 0) = \frac{1}{2}d_i(X_i^-, 0) \wedge (H_i, -H_i).$$

Даље, како је $0\oplus\mathfrak{h}$ идеал (Лијеве биалгебре) од $\mathcal{D}(\mathfrak{q}_+)$, и пошто је $\mathcal{D}(\mathfrak{q}_+)/(0\oplus \mathfrak{h}) \cong \mathfrak{g}$, тиме добијамо Лијеву биалгебру на $\mathfrak{g}$, за коју је ко - комутатор:

$$\delta(X_i^\pm) = \frac{1}{2}d_i X_i^\pm \wedge H_i, \quad \delta|_{\mathfrak{h}} = 0.$$

Множењем дате структуре са 2 добијамо стандардну структуру.

3.4 Класична Јанг-Бакстерова једначина

Из дефиниције дабла, видимо да његов ко - комутатор није само 1-коцикл већ је и 1-кограница. Такве Лијеве биалгебре издвајамо у посебну групу:

Дефиниција 3.5. Кogранична Лијева биалгебра је Лијева биалгебра $\mathfrak{g}$ чији је ко - комутатор облика $\delta(X) = X.r$ за неко $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. ($X.r$ представља адјунговано дејство $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$).

Став 3.2. *Нека је $\mathfrak{g}$ Лијева алгебраи нека је $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Пресликавање δ, из претходне дефиниције је ко - комутатор акко су задовољени следећи услови:*
i) $r_{12} + r_{21}$ је $\mathfrak{g}$ инваријантан елемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.
ii) $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]$ је $\mathfrak{g}$ инваријантан елемент од $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.
(Свуда је подразумевано адјунговано дејство).

Што се ознака тиче, ако је $r = \sum_i a_i \otimes b_i$ тада је $r_{21} = \sum_i b_i \otimes a_i$ док у другом случају је нпр $[r_{12}, r_{23}] = \sum_{i,j} a_i \otimes [b_i, a_j] \otimes b_j$.

Доказ овог тврђења се своди на исписивање одговарајућих израза, па ће бити изостављен.

Приметимо да уколико $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ задаје Лијеву биалгебру на $\mathfrak{g}$ и разликује се од елемента $r' \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ за $\mathfrak{g}$ инваријантан елемент, тада r' задаје исту Лијеву биалгебру. На основу i) r се увек може изабрати тако да буде кососиметричан.

Услов ii) је наравно најлакше задовољен ако је $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$. Дата једначина се назива класична Јанг-Бакстерова једначина, а њена решења класичне r матрице (што долази од случаја $\mathfrak{g} = End(V)$ где се r може посматрати као матрица). Ако Лијева биалгебра долази од решења дате једначине, дату Лијеву биалгебру називамо квазитроугаона, односно троугаона уколико долази од кососиметричног решења. Напоменимо да сви ови појмови имају своју аналогију за Хопфове алгебре.

Следећи став показује да је дабл од Лијеве биалгебре Лијева биалгебра.

Став 3.3. *Нека је $\mathfrak{g}$ коначнодимензиона Лијева биалгебра. Тада је њен дабл $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ квази троугаона Лијева биалгебра.*

Доказ. Дакле треба показати $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$. Ако користимо нотацију од раније имамо:

$$[[r,r]] = \sum_{s,t}([X_s, X_t] \otimes \xi^s \otimes \xi^t + X_s \otimes [\xi^s, X_t] \otimes \xi^t + X_s \otimes X_t \otimes [\xi^s, \xi^t]) =$$

$$= \sum_{s,t,p} \left(c_{st}^p X_p \otimes \xi^s \otimes \xi^t - \gamma_t^{sp} X_s \otimes X_p \otimes \xi^t + c_{tp}^s X_s \otimes \xi^p \otimes \xi^t - \gamma_p^{st} X_s \otimes X_t \otimes \xi^p \right),$$

што се после промене индекса и коришћењем њихове кососиметричности види да је 0.

Такође, лако се види да је симетрични део од $r, \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ - инваријантан. ☐

Приметимо да претходна теорема заправо даје ефикасан метод за решавање Јанг-Бакстерове једначине, јер уколико кренемо од неке Лијеве биалгебре, направимо њен дабл, и знамо да у њој постоји елемент који решава дату једначину, а знамо и који је то елемент. Касније ћемо имати аналогну ситуацију у квантном случају.

Посматрајмо сад још неке примере Лијевих биалгебри.

Пример 3.5. Нека је $\mathfrak{g}$ коначнодимензиона проста Лијева алгебра над пољем $\mathbb{C}$. Може се показати да је заправо у овом случају свака структура Лијеве биалгебре квазитроугаона, што следи из чињенице да је сваки 1 - коцикл на $\mathfrak{g}$ са вредностима у било којој коначнодимензионој репрезентацији кограница (што је познато као Вајтхедова лема), и зато што на њој, до на умножак скаларом постоји само један инваријантни скаларни производ.

Што се тиче стандардне структуре, r - матрица се може добити на следећи начин. Нека је $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ Казимиров елемент и запишимо га као $t = t_{+-} + t_0 + t_{-+}$ где је $t_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, $t_{+-} \in \mathfrak{n}_+ \otimes \mathfrak{n}_-$ и аналогно за преостали члан. Тада се стандардна структура задаје са

$$r = t_0 + 2t_{+-}.$$

Да бисмо ово видели, имамо да се $\mathfrak{g}$ може реализовати као дабл $\mathcal{D}(\mathfrak{q}_+)$. Универзална r - матрица дате биалгебре је:

$$r_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i(H_i, H_i) \otimes (H_i, -H_i) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} d_\alpha (X_\alpha^+, 0) \otimes (X_\alpha^-, 0).$$

Да бисмо добили r - матрицу на $\mathfrak{g}$ дату треба испројектовати на $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ и помножити са 2 (тим поступком смо добили стандардну структуру од датог дабла). На крају, добија се:

$$r_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{n} d_i H_i \otimes H_i + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} d_\alpha X_\alpha^+ \otimes X_\alpha^-.$$

Такође ова структура се може задати на било којој симетричној Кац-Мудијевој алгебри $\mathfrak{g}$. Међутим, у случају да је алгебра бесконачнодимензиона дати елемент ће бити бесконачна сума елемената из $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, и овакве биалгебре називамо псеудо-троугане.

Пример 3.6. Нека је $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u]$ Лијева биалгебра из примера 3.4. Видели смо да њена структура формално долази од r - матрице:

$$\frac{t}{u-v},$$

где је $t \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ Казимиров елемент. Овде смо користили:

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u] \otimes \mathfrak{a}[u] \cong \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}[u, v].$$

Наравно, иако је r добро дефинисано, она није елемент датог алгебарског тензорског производа, али она јесте решење Јанг-Бакстерове једначине, што се може видети из:

$$[t_{12}, t_{13} + t_{23}] = [t_{23}, t_{12} + t_{13}] = 0,$$

што следи из инваријантности t за адјунговано дејство $\mathfrak{a}$.

Дата r матрица представља најпростије нетривијално рационално решење Јанг-Бакстерове једначине. Касније ћемо видети да се квантизацијом ових биалгебри долази до квантних група Јангијана, који генеришу рационална решења квантне Јанг-Бакстерове једначине.

Посматрајмо сад један специјалан случај бесконачнодимензионих Кац-Мудијевих алгебри, афине Лијеве алгебре.

Пример 3.7. Претпоставимо да је $\mathfrak{g}$ неуплетена афина Лијева алгебра, додељена простој комплексној Лијевој алгебри $\mathfrak{a}$. Познато је да се афине Лијеве алгебре могу реализовати као централна раширења алгебре петљи, односно као:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u, u^{-1}] \oplus \mathbb{C}.c \oplus \mathbb{C}.D,$$

где је c централни елемент, а D извод односно

$$[D, f](u) = \frac{df}{du}.$$

Лијева заграда се задаје као:

$$[f, g](u) = [f(u), g(u)] + res_0(\frac{df}{du}, g(u)),$$

где је $(,)$ инваријантни скаларни производ на $\mathfrak{a}$, а res_0 је коефицијент уз u^{-1}. Да бисмо описали стандардну структуру биалгебре на $\mathfrak{g}$ приметимо да је

$$(f + \lambda c + \mu D, g + \xi c \eta D) = res_0(f(u), g(u)) + \lambda\eta + \mu\xi,$$

инваријантни скаларни производ на $\mathfrak{g}$. Дакле у нотацији из примера 3.5, имамо:

$$t_0^{\mathfrak{g}} = t_0^{\mathfrak{a}} + c \otimes D + D \otimes c,$$

и пошто је:

$$\mathfrak{n}_{\pm}^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}_{\pm}^{\mathfrak{a}} \oplus u^{\pm 1}\mathfrak{a}[u^{\pm 1}],$$

имамо:

$$t_{+-}^{\mathfrak{g}} = t_{+-}^{\mathfrak{a}} + \sum_{\lambda} \sum_{k>0} X_\lambda \otimes X_\lambda (\frac{u_1}{u_2})^k,$$

где је $\{X_\lambda\}$ ортонормирана база од $\mathfrak{a}$. Овиме добијамо изражену r матрицу од $\mathfrak{g}$ преко r матрице од $\mathfrak{a}$, на следећи начин:

$$r_{\mathfrak{g}} = r_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}(c \otimes D + D \otimes c) + t^{\mathfrak{a}}(\frac{u_1}{u_2 - u_1}).$$

На крају овог кратког осврта на Лијеве биалгебре, погледајмо који објекат Лијеве групе, одговара универзалној r - матрици. Претходно, додатно ћемо претпоставити да је $r + \tau(r)$ (где је τ транспозиција) недегенерисан. У овом случају кажемо да $\mathfrak{g}$ може да се факторише.

Као што смо видели раније, r и $-\tau(r)$ можемо посматрати као пресликавања $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$, и није тешко видети да су они хомоморфизми Лијевих алгебри (приметимо да $-\tau(r)$ дефинише исту Лијеву биалгебру као и r зато што је елемент $r + \tau(r), \mathfrak{g}$ - инваријантан). Уколико претпоставимо да су G и њен дуал G^* повезани и просто повезани, ова пресликавања се подижу до хомоморфизама Лијевих група S и S^τ из G^* у G. Нека је $T : G^* \to G$ пресликавање дефинисано са $T(x) = S(x)S^\tau(x)^{-1}$. Како је $r + \tau(r)$ недегенерисан, то је T локални дифеоморфизам у околини јединица група G^* и G. Кажемо да G може да се факторише ако је T глобални дифеоморфизам, пошто у том случају сваки елемент $g \in G$ допушта факторизацију $g = g_+ g_-^{-1}$ где су $g_+ = S(T^{-1}(g))$ и $g_- = S^\tau(T^{-1}(g))$.

Став 3.4. *Нека је G Пуасон-Лијева група која допушта факторизацију, и дефинишемо класичну R-матрицу $R : G \times G \to G \times G$ као*

$$R(g,h) = (h_- g h_-^{-1}, (h_- g h_-^{-1})_+^{-1} h (h_- g h_-^{-1})_+).$$

Тада је R Пуасонов дифеоморфизам ако је на G узета Пуасонова структура од G^* коришћењем дифеоморфизма T за идентификацију G и G^*. Такође R је решење квантне Јанг-Бакстерове једначине

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

У овој једначини R_{12} означава пресликавање $G \times G \times G \to G \times G \times G$ дефинисано са

$$R_{12}(g,h,k) = (R(g,h),k),$$

и аналогно за R_{13} и R_{23}.

Остатак рада посвећен је прављењу аналогије између појмова овог поглавља који се односе на Лијеве биалгебре са појмовима везаним за Хопфове алгебре, и коришћењем њих за решавање квантне Јанг-Бакстерове једначине.

4 Нека даља својства Хопфових алгебри

4.1 Примери и тополошке Хопфове алгебре

Уколико посматрамо скуп свих реалних функција на неком скупу (који можемо смањити у зависности од неке додатне струкутре скупа), добијамо алгебру јер реални бројеви чине поље. У наредним примерима видећемо да уколико почетни скуп има структуру групе, на скуп функција се може увести структура Хопфове алгебре.

Пример 4.1. Нека је G коначна група, и означимо са $\mathcal{F}(G)$ алгебру k-вредносних функција на G. Структура k - модула и структура алгебре се дефинишу тачка по тачка, којединицу дефинишемо као $\varepsilon(f) = f(e)$, а антипод $S(f)(g) = f(g^{-1})$. Комножење дефинишемо коришћењем чињенице да је $\mathcal{F}(G \times G) \cong \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$, као алгебре, што следи из коначности групе G. Тада дефинишемо $\Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$, односно као слику при малопре наведеном изоморфизму. Приметимо да је $\mathcal{F}(G)$ увек комутативна, док је кокомутативна акко је то G.

Приметимо још на овом примеру, да ако посматрамо групну алгебру из примера 2.5, да њих можемо упарити пресликавањем, које за дато $f \in \mathcal{F}(G)$ и $\sum\limits_i \lambda_i g_i, \lambda_i \in k, g_i \in G$

$$\langle f, \sum_i \lambda_i g_i \rangle = \sum_i \lambda_i f(g_i).$$

Може се показати да ће ово спаривање индуковати изоморфизме одговарајућих Хопфових алгебри, односно да су оне међусобно дуалне.

Пример 4.2. Аналогну ситуацију имамо ако је G алгебарска група, а $\mathcal{F}(G)$ алгебра регуларних функција на њој, зато што ће и у овом случају важити $\mathcal{F}(G \times G) \cong \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$. Опишимо самим тим шта се добија у случају $G = Gl_n(k)$. Тада је $\mathcal{F}(G)$ алгебра генерисана елементима $x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ и елементом D^{-1} као и једном релацијом:

$$D^{-1} det X = 1$$

где је X матрица чији су елементи x_{ij}. Комножење је дато на генераторима:

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$$

а остала пресликавања $\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$ и $S(x_{ij}) = (X^{-1})_{ij}$. Из мултипликативног својства детерминанте следи да за елемент D^{-1} важи $\Delta(D^{-1}) = D^{-1} \otimes D^{-1}$ као и да је $S(D^{-1}) = D$.

Међутим уколико је G Лијева група, а $\mathcal{F}(G)$ алгебра глатких функција на њој, множење $G \times G \to G$ индукује пресликавање $\mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G \times G)$. Како скуп $\mathcal{F}(G \times G)$ садржи тензорски производ $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$, претходним начином нећемо добити структуру Хопфове алгебре на $\mathcal{F}(G)$. Постоји више решења датог проблема, један је да се замени алгебра глатких функција са неким другим објектом са сличним својствима. Други начин је да уколико је G компактна, увођењем sup норме на алгебру функција добиће се да је

$\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$ густ у $\mathcal{F}(G \times G)$, па би у одговарајућем комплетирању добили тражену једнакост.

Споменимо још да је Хопфова алгебра $\mathcal{F}(G)$ дуална (опет, уз одговарајућу дефиницију дуала), универзалној омотачкој алгебри $U(\mathfrak{g})$ Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$ од G. Како је $\mathfrak{g}$ заправо алгебра свих лево-инваријантних вектроских поља на G, није тешко видети да је $U(\mathfrak{g})$ заправо алгебра свих лево-инваријантних диференцијалних оператора на G. Тада ће спаривање $U(\mathfrak{g}) \times \mathcal{F}(G) \to \mathbb{C}$ дато са $(X, f) \to (X.f)(e)$, индуковати изоморфизме између $\mathcal{F}(G)$ и $U(\mathfrak{g})$.

Нама најважнији пример ове ситуације ће бити Хопфове алгебре над прстеном $k[[h]]$ формалних степених редова над пољем k. Сваки $k[[h]]$ - модул V има h-адску топологију, која се карактерише захтевом да је $\{h^n V | n \geq 0\}$ база околина 0 у V, и да су транслације у V непрекидне. Није тешко видети да за модуле са овом топологијом, сва $k[[h]]$ линеарна пресликавања су непрекидна. Претходно мотивише следећу дефиницију.

Дефиниција 4.1. Тополошка Хопфова алгебра над прстеном $k[[h]]$ је комплетан $k[[h]]$ - модул A са $k[[h]]$ линеарним пресликавањима $\Delta, \varepsilon, \mu, \eta$ која задовољавају аксиоме Хопфове алгебре, са тим што је алгебарски тензорски производ замењен његовим комплетирањем у h-адској топологији (добијени простор називамо тополошки тензорски производ).

Конкретне примере тополошких Хопфових алгебри над $k[[h]]$ видећемо касније. Засад, као једну разлику приметимо да за обичан тензорски производ важи $k[u] \otimes k[v] = k[u, v]$ док то не важи ако се прстен полинома замени прстеном формалних редова. Може се показати да уколико узмемо тополошки тензорски производ важи $k[[u]] \otimes k[[v]] = k[[u, v]]$.

4.2 Квазитроугаоне Хопфове алгебре

Као што смо спомињали, појмови са којима смо се сусрели код Лијевих биалгебри имају своју аналогију на Хопфовим алгебрама. Почећемо од појма скоро кокомутативних Хопфових алгебри. Претпостављаћемо да Хопфове алгебре имају инвертибилан антипод.

Дефиниција 4.2. Хопфова алгебра A над комутативним прстеном k је скоро кокомутативна ако постоји инвертибилни елемент $\mathcal{R} \in A \otimes A$ такав да је:

$$\Delta^{op}(a) = \mathcal{R} \Delta(a) \mathcal{R}^{-1}, \tag{4}$$

за свако $a \in A$.

Приметимо неколико очигледних ствари:
1) Ако је A још и комутативна, она ће очигледно бити и кокомутативна. Специјално алгебра функција на неабеловој Лијевој групи никад није скоро кокомутативна.
2) У ставу 2.9, смо видели да ако имамо две репрезантације Хопфове алгебре A, $\lambda_V : A \to End(V)$ и $\lambda_W : A \to End(W)$, да су тада $V \otimes W$ и $W \otimes V$ изоморфни као A - модули. То ће важити и у случају када је A скоро кокомутативна, специјално изоморфизам (који комутира са дејством A) ће бити пресликавање: $\tau \circ (\lambda_V \otimes \lambda_W)(\mathcal{R})$.

3) Уколико је A тополошка Хопфова алгебра, кажемо да је она скоро кокомутативна ако постоји елемент $\mathcal{R}$ са одговарајућим особинама у комплетирању од $A \otimes A$.

Уколико је A скоро кокомутативна, видимо да је елемент $\mathcal{R}$ јединствен до на множење елементом из централизатора C од $\Delta(A)$ у $A \otimes A$. Очигледно је $Z \times Z \subset C$, где је Z центар A. Такође важи:

Став 4.1. *Нека је $\phi : A \otimes A \to A$ пресликавање дефинисано са $\phi(a_1 \otimes a_2) = a_1 S(a_2)$. Тада је $\phi(C) \subset Z$.*

Доказ. На A задајмо $A \otimes A$ дејство на следећи начин:

$$(a_1 \otimes a_2) * a = a_1 a S(a_2).$$

Приметимо да је $\phi(x) = x * 1$ за свако $x \in A \otimes A$ и да је $\Delta(a) * 1 = \varepsilon(a)1$. Ако је $c \in C$ и $a \in A$, тада је:

$$\Delta(a) * \phi(c) = \Delta(a) * (c * 1) = (\Delta(a)c) * 1 = (c\Delta(a)) * 1 = c * (\Delta(a) * 1) =$$

$$= \varepsilon(a)(c * 1) = \varepsilon(a)\phi(c).$$

Дефинишимо сада за свако $c \in C$, пресликавање $\psi : A \otimes A \otimes A \to A$ са:

$$\psi(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_1 \phi(c) S(a_2) a_3.$$

Због коасоцијативности је $\psi((\Delta \otimes id)\Delta(a)) = \psi((id \otimes \Delta)\Delta(a))$. Ако запишемо $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a^i$ имамо:

$$\psi((\Delta \otimes id)\Delta(a)) = \sum_i (\Delta(a_i) * \phi(c))a^i = \sum_i \phi(c)\varepsilon(a_i)a^i =$$

$$= \phi(c)(\varepsilon \otimes id)\Delta(a) = \phi(c)a$$

$$\psi((id \otimes \Delta)\Delta(a)) = \sum_i a_i \phi(c) \mu(S \otimes id)\Delta(a^i) = \sum_i a_i \varepsilon(a^i)\phi(c) =$$

$$= (id \otimes \varepsilon)\Delta(a)\phi(c) = a\phi(c),$$

одакле следи да $\phi(c)$ комутира са свим елементима $a \in A$. □

Уколико применимо пресликавање $\tau : a \otimes a' \to a' \otimes a$, на обе стране једнакости (4), добијамо да је $\mathcal{R}_{21}\mathcal{R} \in C$, одакле следи да је $\phi(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}) \in Z$. Следећи став побољшава ову чињеницу.

Став 4.2. *Нека је $u = \mu(S \otimes id)(\mathcal{R}_{21})$. Тада, u је инвертибилан елемент од A, и за свако $a \in A$ важи:*

$$S^2(a) = uau^{-1}.$$

Приметимо да смо раније видели да у кокомутативној Хопфовој алгебри важи $S^2 = id$. Из претходног става видимо да се и у скоро кокомутативној Хопфовој алгебри квадрат антипода лепо понаша.

Доказ. Покажимо прво да је $ua = S^2(a)u$, за свако $a \in A$. Запишимо:

$$(\Delta \otimes id)\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a_i' \otimes a_i''.$$

Једнакост (4) повлачи:

$$(\mathcal{R} \otimes 1)(\sum_i a_i \otimes a_i' \otimes a_i'') = (\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'')(\mathcal{R} \otimes 1).$$

Уколико запишемо $\mathcal{R} = \sum_j r_j \otimes r^j$, имамо:

$$\sum_{i,j} r_j a_i \otimes r^j a_i' \otimes a_i'' = \sum_{i,j} a_i' r_j \otimes a_i r^j \otimes a_i''.$$

Ако применимо $id \otimes S \otimes S^2$ на обе стране и окренемо редослед чиниоца, добијамо:

$$\sum_{i,j} S^2(a_i'')S(r^j a_i')r_j a_i = \sum_{i,j} S^2(a_i'')S(a_i r^j)a_i' r_j$$

што се може записати као:

$$\sum_{i,j} S(a_i' S(a_i''))S(r^j)r_j a_i = \sum_{i,j} S^2(a_i'')S(r^j)S(a_i)a_i' r_j. \tag{5}$$

како је

$$\sum_i S(a_i)a_i' \otimes a_i'' = (\mu \otimes id)(S \otimes id \otimes id)((\Delta \otimes id)\Delta(a)) = (\varepsilon \otimes id)\Delta(a) = 1 \otimes a$$

Одакле је:

$$\sum_{i,j} S(r^j)S(a_i)a_i' r_j \otimes a_i'' = \sum_j S(r^j)r_j \otimes a = u \otimes a.$$

Због тога је десна страна једнакости (5) једнака $S^2(a)u$. Слично:

$$\sum_i a_i \otimes a_i' S(a_i'') = a \otimes 1,$$

одакле показујемо да је лева страна једнакости (5) једнака ua, што доказује тражену једнакост.

Да бисмо завршили доказ, треба још показати да је u инвертибилан. Нека је $v = \mu(S^{-1} \otimes id)(\mathcal{R}_{21})$. Ако означимо $\mathcal{R}_{21} = \sum_k s_k \otimes s^k$, имамо:

$$uv = \sum_k uS^{-1}(s^k)s_k = \sum_k S(s^k)us_k =$$

$$= \sum_{k,j} S(r^j s^k)r_j s_k = \mu(S \otimes id)(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{21}^{-1}) = 1.$$

Заменом $a = v$ у једначини $ua = S^2(a)u$ добијамо $1 = S^2(v)u$. Дакле, u има леви и десни инверз, тј. инвертибилан је. □

Аналогно се показује да за:

$$u_2 = \mu(S \otimes id)(\mathcal{R}^{-1}), \quad u_3 = \mu(id \otimes S^{-1})(\mathcal{R}_{21}), \quad u_4 = \mu(id \otimes S)(\mathcal{R}^{-1})$$

важи $S^2(a) = u_i a u_i^{-1}$ за све $a \in A$. Ако још u означимо са u_1, закључујемо:

Последица 4.1. *Елементи* $u_i \in A$ *међусобно комутирају, а елементи* $u_i u_j^{-1}$ *су централни.*

Одавде, као и из чињенице да је A^{op} Хопфова алгебра, јасно је да елемент $\mathcal{R}$ не може бити произвољан. Заправо, мора да важи:

$$(\Delta^{op} \otimes id) \otimes \Delta^{op}(a) = \mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{R})(\Delta \otimes id)\Delta(a)(\Delta \otimes id)(\mathcal{R})^{-1}\mathcal{R}_{12}^{-1},$$

$$(id \otimes \Delta^{op}) \otimes \Delta^{op}(a) = \mathcal{R}_{23}(id \otimes \Delta)(\mathcal{R})(id \otimes \Delta)\Delta(a)(id \otimes \Delta)(\mathcal{R})^{-1}\mathcal{R}_{23}^{-1}.$$

Дакле довољан услов за коасоцијативност Δ^{op} је:

$$\mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{23}(id \otimes \Delta)(\mathcal{R}). \tag{6}$$

Слично да би се задовољиле аксиоме за којединицу, довољно је да важи $(\varepsilon \otimes id)(\mathcal{R}) = (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{R}) = 1$.

Уз мало јаче претпоставке долазимо до следеће:

Дефиниција 4.3. Скоро кокомутативна Хопфова алгебра $(A, \mathcal{R})$ је:
1) Когранична ако $\mathcal{R}$ задовољава једнакост (6), $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}^{-1}$ и $(\varepsilon \otimes \varepsilon)(\mathcal{R}) = 1$.
2) Квазитроугаона ако

$$(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23},$$

$$(id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}.$$

3) Троугаона ако је квазитроугаона, и ако је још $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}^{-1}$.
Ако је A квазитроугаона, елемент $\mathcal{R}$ се назива универзална R матрица од $(A, \mathcal{R})$. Такође A је тополошки квазитроугаона ако постоји одговарајући елемент $\mathcal{R}$ у затворењу од $A \otimes A$.

У овој нотацији, ако је $\mathcal{R} = \sum_i r_i \otimes r^i$ тада је нпр. $\mathcal{R}_{13} = \sum_i r_i \otimes 1 \otimes r^i$ и аналогно за остале случајеве.

Очигледно, свака кокомутативна Хопфова алгебра је квазитроугаона са R матрицом $1 \otimes 1$. Нама ће од интереса бити некокомутативни примери, којима ћемо се бавити касније касније.

Ако је A квазитроугаона Хопфова алгебра, за елементе u_i из последице 4.1 може се показати да важи $u_1 = u_3 = u$ и $u_2 = u_4 = S(u)^{-1}$. Одатле следи да се централни елементи $u_i u_j^{-1}$ своде на елемент $uS(u)$ или његов инверз. Такође може се показати да важи:

$$\Delta(u) = (\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{12})^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{12})^{-1}.$$

Следећи став показује нека додатна својства квазитроугаоних Хопфових алгебри.

Став 4.3. *Нека је* $(A, \mathcal{R})$ *квазитроугаона Хопфова алгебра. Тада важи:*
1) $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$,
2) $(\varepsilon \otimes id)(\mathcal{R}) = 1 = (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{R})$,
3) $(S \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1} = (id \otimes S^{-1})(\mathcal{R})$,
4) $(S \otimes S)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Доказ. 1) Коришћењем дефиниције кокомутативне и квазитроугаоне Хопфове алгебре добијамо:

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = (\Delta^{op} \otimes id)(\mathcal{R})\mathcal{R}_{12}.$$

Даље, применом $\tau \otimes id$ на обе стране прве једнакости које дефинишу квазитроугаону Хопфову алгебру, добијамо да је:

$$(\Delta^{op} \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}.$$

2) Следи директно применом пресликавања $\varepsilon \otimes id \otimes id$ и $id \otimes id \otimes \varepsilon$ на обе стране прве и друге једначине респективно које дефинишу квазитроугаону Хопфову алгебру.
3) Посматрајмо израз

$$\mathcal{R}(S\otimes id)\mathcal{R} = (\mu\otimes id)(id\otimes S\otimes id)(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}) = (\mu\otimes id)(id\otimes S\otimes id)(\Delta\otimes id)(\mathcal{R}) =$$

$$= (\mu(id \otimes S)\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = (\varepsilon \otimes id)(\mathcal{R}) = 1,$$

и аналогно се добија друга једнакост.
4) је директна последица од 3) □

Дакле, једначину из 1) смо већ срели, и као што је речено она се назива квантна Јанг-Бакстерова једначина. Приметимо ипак да R - матрице које се појављују у квазитроугаоним Хопфовим алгебрама су линеарна пресликавања k - модула док су претходна која смо видели нелинеарна.

Приметимо да уколико имамо неку квазитроугаону Хопфову алгебру A, и неку њену репрезентацију $\lambda : A \to End(V)$, тада ће R матрица генерисати решења Јанг-Бакстерове једначине у $End(V)$. Дакле, конструкцијом довољног броја квазитроугаоних Хопфових алгебри добићемо одговарајући број решења Јанг-Бакстерове једначине над линеарним пресликавањима векторских простора. Уколико се сетимо, у случају Лијевих биалгебри конструкција дабла нам је давала од произвољне Лијеве биалгебре квазитроугаону. Погледајмо онда шта се добија у случају Хопфових алгебри.

4.3 Дринфељдов квантни дабл

Опет, уколико се сетимо Лијевих биалгебри, дабл од $\mathfrak{g}$ је била Лијева биалгебра $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ која је изоморфна $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ као векторски простор. Као што смо већ видели, Лијевој алгебри можемо придружити њену омотачку алгебру $U(\mathfrak{g})$, која има структуру Хопфове алгебре, и како важи $U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$, очекивано је да се дабл у овом случају добије као варијација тензорског производа.

Нека су дакле B и C Хопфове алгебре над пољем k, и нека је $\mathcal{R}$ инвертибилни елемент од $C \otimes B$ такав да важи:

$$\begin{aligned} (\Delta^C \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (id \otimes \Delta^B)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}, \\ (id \otimes S^B)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}, \qquad (S^C \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Став 4.4. *Ако $\mathcal{R} \in C \otimes B$ задовољава услове (7) тада је $B \otimes C$ са стандардном структуром алгебре и са комножењем*

$$\Delta(b \otimes c) = \mathcal{R}_{23}\Delta^B(b)_{13}\Delta^C(c)_{24}\mathcal{R}_{23}^{-1},$$

антиподом

$$S(b \otimes c) = \mathcal{R}_{21}^{-1}(S^B(b) \otimes S^C(c))\mathcal{R}_{21},$$

и којединицом

$$\varepsilon(b \otimes c) = \varepsilon^B(b)\varepsilon^C(c),$$

Хопфова алгебра коју означавамо: $B \otimes_{\mathcal{R}} C$*.*

Доказ. Како би доказ овог тврђења био проверавање свих аксиома Хопфове алгебре, што би очигледно било предугачко, провериђемо само да је $\mu(S \otimes id)\Delta = 1\varepsilon$. Нека је:

$$\mathcal{R} = \sum_i c_i \otimes b_i, \qquad \mathcal{R}^{-1} = \sum_j c^j \otimes b^j,$$
$$\Delta^B(b) = \sum_\beta b_\beta \otimes b'_\beta, \quad \Delta^C(c) = \sum_\gamma c_\gamma \otimes c'_\gamma.$$

Тада је:

$$\mu(S \otimes id)\Delta(b \otimes c) = \mu(\mathcal{R}_{21}^{-1}(S^B \otimes S^C \otimes id \otimes id)(\mathcal{R}_{23}\Delta^B(b)_{13}\Delta^C(c)_{24}\mathcal{R}_{23}^{-1})\mathcal{R}_{21})$$

$$= \sum_{i,j,k,l,\beta,\gamma} b^l S^B(b_\beta)b_k b_i b'_\beta b^j \otimes c^l S^C(c^j)S^C(c_\gamma)S^C(c_i)c_k c'_\gamma.$$

Како је:

$$\begin{aligned}\sum_{i,k} S^C(c_i)c_k \otimes b_k b_i = (S^C \otimes id)(\mathcal{R}((S^C)^{-1} \otimes id)(\mathcal{R})) = \\ = (S^C \otimes id)(\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}) = 1 \otimes 1.\end{aligned} \tag{8}$$

То је

$$\mu(S \otimes id)\Delta(b \otimes c) = \sum_{j,l,\beta,\gamma} b^l S^B(b_\beta b'_\beta b^j \otimes c^l S^C(c^j)S^C(c_\gamma)c'_\gamma) =$$

$$= \varepsilon^B(b)\varepsilon^C(c)\sum_{j,l} b^l b^j \otimes c^l S^C(c^j).$$

За израз под сумом се види да је једнак $1 \otimes 1$, аналогно као једнакост (8), па је дати израз једнак

$$\varepsilon^B(b)\varepsilon^C(c)1 \otimes 1 = \varepsilon(b \otimes c)1 \otimes 1.$$

□

Претпоставимо сада да је A коначнодимензиона Хопфова алгебра над пољем k. Применимо сада претходну конструкцију на $B = A^*, C = A^{op}$ (A^{op} је као у другом поглављу, иста Хопфова алгебра само са супротним множењем). Тада важи:

Став 4.5. *Елемент* $\mathcal{R} \in A^{op} \otimes A^*$ *додељен идентичком пресликавању* $A \to A$ *при изоморфизму* $End(A) \cong A \otimes A^*$*, задовољава услове једнакости (7).*

Доказ. Покажимо нпр. прву једнакосту у (7). Нека је $\{a_i\}$ база од A, $\{\alpha^i\}$ њој дуална база од A^*. Тада је $\mathcal{R} = \sum\limits_i a_i \otimes \alpha^i$, и нека је

$$\Delta(a_i) = \sum_{j,k} \gamma_i^{jk} a_j \otimes a_k.$$

Како важи:

$$\langle \alpha^j \alpha^k, a_i \rangle = \langle \alpha^j \otimes \alpha^k, \Delta(a_i) \rangle = \gamma_i^{jk},$$

па је дакле

$$\alpha^j \alpha^k = \sum_i \gamma_i^{jk} \alpha^i.$$

Дакле:

$$(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \sum_i \Delta(a_i) \otimes \alpha^i = \sum_{i,j,k} \gamma_i^{jk} a_j \otimes a_k \otimes \alpha^i =$$

$$= \sum_{j,k} a_j \otimes a_k \otimes \alpha^j \alpha^k = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}.$$

□

Дакле можемо дефинисати квантни дабл од Хопфове алгебре A да буде:

$$\mathcal{D}(A) = (A^* \otimes_{\mathcal{R}} A^{op})^*.$$

Приметимо да нисмо мењали структуру коалгебре, па је дакле $\mathcal{D}(A) \cong A \otimes A^*$ као коалгебра, па самим тим и као векторски простор. Такође, није тешко показати да су канонска утапања:

$$A \hookrightarrow \mathcal{D}(A) \hookleftarrow (A^*)^{cop}$$

морфизми Хопфових алгебри.

На крају овог поглавља погледајмо један занимљив пример Хопфове алгебре. Такође приметимо да су сви примери Хопфових алгебри које смо до сада видели били или комутативни или кокомутативни. Заправо, до појаве квантних група 80-тих година прошлог века, није се знало за много таквих Хопфових алгебри, осим неких очигледних као што су тензорски производ некомутативне и некокомутативне. Касније ћемо видети да постоји доста природних таквих примера. Нека је дакле у овом случају A асоцијативна алгебра са јединицом (над пољем k које није карактеристике 2) дата својим генераторима g и x, и релацијама:

$$g^2 = 1, \quad x^2 = 0, \quad gxg = -x,$$

структуром коалгебре датом са

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x,$$

$$\varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(x) = 0,$$

као и антиподом датим са

$$S(g) = g, \quad S(x) = -x.$$

Није тешко показати да је A заиста Хопфова алгебра. Приметимо да су елементи $\{1, g, x, gx\}$ база од A. Очигледно, A није комутативна ни кокомутативна. Она има следећа својства:

1)$A \cong A^*$ као Хопфова алгебра. Нека је $\{\overline{1}, \overline{g}, \overline{x}, \overline{gx}\}$ дуална база A^* од управо поменуте базе од A. Уколико означимо $\gamma = \overline{1} - \overline{g}$ и $\xi = \overline{x} + \overline{gx}$ имамо:

$$\gamma^2 = \varepsilon, \quad \xi^2 = 0, \quad \gamma\xi\gamma = -\xi,$$

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma, \quad \Delta(\xi) = \xi \otimes \gamma + \varepsilon \otimes \xi,$$
$$\gamma(1) = 1, \quad \xi(1) = 0.$$

Управо наведене формуле се доказују директним рачуном, нпр.:

$$\langle \gamma^2, g \rangle = \langle \gamma \otimes \gamma, \Delta(g) \rangle = \langle \gamma, g \rangle^2 =$$

$$= (\langle \overline{1}, g \rangle - \langle \overline{g}, g \rangle)^2 =$$
$$= (0 - 1)^2 = 1$$

$$\langle \gamma^2, x \rangle = \langle \gamma \otimes \gamma, x \otimes g + 1 \otimes x \rangle =$$

$$= \langle \gamma, x \rangle \langle \gamma, g \rangle + \langle \gamma, 1 \rangle \langle \gamma, x \rangle = 0$$

$$\langle \gamma^2, gx \rangle = \langle \gamma \otimes \gamma, (g \otimes g)(x \otimes g + 1 \otimes x) \rangle =$$

$$= \langle \gamma, gx \rangle \langle \gamma, 1 \rangle + \langle \gamma, g \rangle \langle \gamma, gx \rangle = 0.$$

Што показује да је $\gamma^2 = \varepsilon$.

2)Не-нула групни елементи од A су 1 и g. Заправо видимо ако је $a = \lambda 1 + \mu x + \nu g + \rho g x$ где су $\lambda, \mu, \nu, \rho \in k$, да је $\Delta(a) = a \otimes a$ акко:

$$\mu = \rho = 0, \quad \lambda\nu = 0, \quad \lambda^2 = \lambda, \quad \nu^2 = \nu$$

одакле следи дати исказ. Такође најопштији елемент $y \in A$ такав да је:

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + g \otimes y$$

је $y = \lambda g x$ за неко $\lambda \in k$.

3) A није изоморфна квантном даблу. Заиста ако би било $A \cong \mathcal{D}(H)$ за неку Хопфову алгебру H, тада би H била дводимензиона, а свака таква Хопфова алгебра је комутативна и кокомутативна (комутативност је очигледна, јер је алгебра генерисана само једним елементом, а кокомутативност следи из комутативности дуалне алгебре). Пошто је $\mathcal{D}(H) \cong H \otimes (H^*)^{cop}$ као коалгебра, следи да је $\mathcal{D}(H)$ кокомутативна а A није кокомутативна.

4) A је квазитроугаона. Заправо за свако $\lambda \in k$

$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{\lambda}{2}(x \otimes x + x \otimes gx + gx \otimes gx - gx \otimes x)$$

је универзална R матрица од A, и свака R матрица од A је овог облика, што се наравно може доказати директним рачуном.

5) На крају, претпоставимо да је поље k алгебарски затворено. Тада A има до на изоморфизам тачно 4 нерастављиве репрезентације, наиме две једнодимензионе:

$$g \to \pm 1, \quad x \to 0,$$

као и две дводимензионе дате са:

$$g \to \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \quad x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Да би ово видели, приметимо да пошто је $g^2 = 1$ сваки A - модул V је директна сума $V^+ \oplus V^-$ сопствених потпростора за сопствену вредност ± 1 од g и да релација $gxg = -x$ значи да x слика V^+ у V^- и обрнуто. Дакле A - модул V је одређен паром линеарних пресликавања $X^\pm : V^\pm \to V^\mp$ таквих да је $X^+X^- = X^-X^+ = 0$. Изаберимо линеарне потпросторе $W^\pm \subset V^\pm$ такве да је $\ker(X^\pm) \oplus W^\pm = V^\pm$. Тада, V је директна сума A-инваријантних потпростора $\ker(X^+) \oplus W^-$ и $\ker(X^-) \oplus W^+$. Претпоставимо сада да је V нерастављив. У овом случају (како је језгро инваријантни потпростор), следи да је или X^+ инјективно и $X^- = 0$, или је X^- инјективно и $X^+ = 0$. Аналогним разматрањем за $im(X^\pm)$, добијамо аналогно тврђење за сурјективност, одакле следи да или је X^+ изоморфизам и $X^- = 0$, или је X^- изоморфизам и $X^+ = 0$. Одавде лако следи да је $\dim(V^+) = \dim(V^-) = 1$.

Рачунањем претходно наведене R матрице $\mathcal{R}_\lambda$ у датој дводимензионој репрезентацији добијамо једнопараметарску фамилију:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$$

матричних решења Јанг-Бакстерове једначине.

5 Квантизација

5.1 Деформације Хопфових алгебри

Као што је већ споменуто у уводу, једна идеја да се реши питање квантизације је да се посматра деформација алгебре функција по неком параметру h. У овом поглављу формално уводимо овај појам и видећемо како на тај начин можемо доћи до широке класе квантних група које ће генерисати решења Јанг-Бакстерове једначине. Дакле, прецизна дефиниција деформације Хопфове алгебре је следећа:

Дефиниција 5.1. Деформација Хопфове алгебре $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ над пољем k је тополошка Хопфова алгебра $(A_h, \mu_h, \eta_h, \Delta_h, \varepsilon_h, S_h)$ над прстеном $k[[h]]$ формалних степених редова непознате h над пољем k, таква да:
1) A_h је изоморфна са $A[[h]]$ као $k[[h]]$ - модул.
2) $\mu_h \equiv \mu \mod h, \quad \Delta_h \equiv \Delta \mod h.$
За две деформације A_h и A'_h кажемо да су еквивалентне, ако постоји изоморфизам $f_h : A_h \to A'_h$ Хопфових алгебри над $k[[h]]$ који је идентитет $\mathrm{mod}\ h$.

Напомена: У литератури се уместо параметра h, често сусреће ознака $\hbar$, али у овом раду ћемо због једноставности користити h, уместо $\hbar$.

Приметимо неколико ствари које се односе на дефиницију, прво, својство 1) нам даје да су елементи од A_h облика:

$$a_h = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots \qquad (a_i \in A). \tag{9}$$

Друго, у дефиницији се не спомињу јединица, којединица и антипод од A_h. Заправо, може се показати да је свака деформација еквивалентна деформацији у којој су дата пресликавања добијена као $k[[h]]$-линеарно продужење одговарајућих пресликавања на A. Самим тим је и свака деформација од A као биалгебре истовремено деформација A као Хопфове алгебре.

Наравно, најпростија деформација од A се добија уколико сва пресликавања $k[[h]]$-линеарно продужимо до пресликавања на $A[[h]]$. Деформација која је еквивалентна овој, назива се тривијална деформација.

Како су μ_h и Δ_h $k[[h]]$-линеарна пресликавања, она су потпуно одређена на елементима облика (9), за које је $a_1 = a_2 = \ldots = 0$. Такође, коришћењем услова 2) из дефиниције добијамо да за $a, a' \in A$ важи:

$$\mu_h(a \otimes a') = \mu(a \otimes a') + \mu_1(a \otimes a')h + \mu_2(a \otimes a')h^2 + \dots \tag{10}$$

$$\Delta_h(a) = \Delta(a) + \Delta_1(a)h + \Delta_2(a)h^2 + \dots. \tag{11}$$

за нека линеарна (над k) пресликавања $\mu_i : A \otimes A \to A$ и $\Delta_i : A \to A \otimes A$.

Аналогно, еквиваленција деформација $f_h : A_h \to A'_h$, се може записати на елементима од A као:

$$f_h(a) = a + hf_1(a) + h^2 f_2(a) + \dots$$

Опет, у уводу је споменуто да би квантизацију Пуасонове многострукости M могли да посматрамо као деформацију $\mathcal{F}_h(M)$ од алгебре функција $\mathcal{F}(M)$, такву да је линеарни део комутатора Пуасонова заграда. Ако је G Пуасон -

Лијева група, тада $\mathcal{F}(G)$ има структуру Хопфове алгебре (осим питања комплетности, које ћемо тренутно занемарити), и ове две структуре су компатибилне, у смислу да је:

$$\{f_1 \circ m, f_2 \circ m\}_{G\times G} = \{f_1, f_2\}_G \circ m,$$

где су $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G), m : G \times G \to G$ множење у G, $\{,\}_{G\times G}$ и $\{,\}_G$ су Пуасонова заграда на $G \times G$ и G респективно. Како је $f_i \circ m = \Delta(f_i)$, претходни услов се може записати као:

$$\{\Delta(f_1), \Delta(f_2)\}_{G\times G} = \Delta(\{f_1, f_2\}),$$

што наводи на следећу дефиницију:

Дефиниција 5.2. Пуасонова алгебра над комутативним прстеном k је комутативна алгебра A над k заједно са кососиметричним k-линеарним пресликавањем $\{,\}_A : A \otimes A \to A$, Пуасоновм заградом, за које важи:
1) Јакобијев идентитет:

$$\{a_1, \{a_2, a_3\}_A\}_A + \{a_3, \{a_1, a_2\}_A\}_A + \{a_2, \{a_3, a_1\}_A\}_A = 0.$$

2) Лајбницово правило:

$$\{a_1 a_2, a\}_A = \{a_1, a\}_A a_2 + a_1\{a_2, a\}_A.$$

Даље, Пуасон-Хопфова алгебра над комутативним прстеном k је Пуасонова алгебра $(A, \{,\}_A)$ над k која је и Хопфова алгебра, и важи:

$$\{\Delta(a_1), \Delta(a_2)\}_{A\otimes A} = \Delta(\{a_1, a_2\}_A).$$

У претходном, Пуасонова заграда на $A \otimes A$ је:

$$\{a_1 \otimes a_1', a_2 \otimes a_2'\}_{A\otimes A} = \{a_1, a_2\}_A \otimes a_1' a_2' + a_1 a_2 \otimes \{a_1', a_2'\}_A.$$

Одговарајућа структура на универзалној омотачкој алгебри, ће бити дуална дефиниција претходној.

Дефиниција 5.3. Ко-Пуасонова алгебра над комутативним прстеном k је кокомутативна коалгебра (A, Δ, ε) са кососиметричним k-линеарним пресликавањем $\delta : A \to A \otimes A$ које називамо ко-Пуасонова заграда, и које задовољава:
1) Композиција:

$$A \xrightarrow{\delta} A \otimes A \xrightarrow{\delta\otimes id} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{c.p.} A \otimes A \otimes A$$

је нула, где последње пресликавање означава да је узета сума по цикличним пермутацијама у троструком тензорском производу (ово је ко-Јакобијев идентитет).
2) Ко-Лајбницов идентитет:

$$(\Delta \otimes id)\delta = (id \otimes \delta)\Delta + \sigma_{23}(\delta \otimes id)\Delta.$$

Ко-Пуасон - Хопфова алгебра је ко-Пуасонова алгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \delta)$ која је још и Хопфова алгебра, и важи:

$$\delta(a_1 a_2) = \delta(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\delta(a_2). \tag{12}$$

Како Пуасон Хопфове структуре на $\mathcal{F}(G)$ очигледно одговарају структурама Пуасон Лијеве групе на G, које опет одговарају структурама Лијеве биалгебре на $\mathfrak{g}$, природно је очекивати:

Став 5.1. *Нека је $\mathfrak{g}$ Лијева алгебра над пољем k. Ако њена омотачка алгебра $U(\mathfrak{g})$ има ко-Пуасонову заграду δ, тада је $\delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ и $\delta|_{\mathfrak{g}}$ је Лијева биалгебра на $\mathfrak{g}$. Обрнуто, свака структура Лијеве биалгебре $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ продужује се јединствено до ко-Пуасонове заграде на $U(\mathfrak{g})$ чинећи $U(\mathfrak{g})$ ко-Пуасон Хопфовом алгебром.*

Доказ. Нека је $\delta : U(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ко-Пуасонова заграда на $U(\mathfrak{g})$, и нека је $x \in \mathfrak{g}$. Тада је $\delta(x) = \sum\limits_i a_i \otimes a'_i$ где су $a_i, a'_i \in U(\mathfrak{g})$. Такође можемо претпоставити да су a'_i линеарно независни. Тада важи:

$$\sum_i \Delta(a_i) \otimes a'_i = 1 \otimes \delta(x) + x \otimes \delta(1) + \sigma_{23}(\delta(x) \otimes 1 + \delta(1) \otimes x).$$

Стављајући у (12) $a_1 = a_2 = 1$ добијамо $\delta(1) = 0$. Самим тим:

$$\sum_i \Delta(a_i) \otimes a'_i = \sum_i (a_i \otimes 1 + 1 \otimes a_i) \otimes a'_i$$

одакле следи да су a_i примитивни елементи од $U(\mathfrak{g})$. Како су једини примитивни елементи $U(\mathfrak{g})$ заправо елементи $\mathfrak{g}$ следи да је $a_i \in \mathfrak{g}$. Дакле показали смо да је $\delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes U(\mathfrak{g})$, а због кососиметричности δ следи да је и $\delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Остаје да се покаже да је δ 1-коцикл. Нека су $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, тада је:

$$\delta([x_1, x_2]) = \delta(x_1 x_2 - x_2 x_1) =$$

$$\delta(x_1)\Delta(x_2) + \Delta(x_1)\delta(x_2) - \delta(x_2)\Delta(x_1) - \Delta(x_2)\delta(x_1) =$$
$$[\Delta(x_1), \delta(x_2)] - [\Delta(x_2), \delta(x_1)] = x_1\delta(x_2) - x_2\delta(x_1)$$

Најзад, лако се види да је Јакобијев идентитет за δ^* еквивалентан ко-Јакобијевом идентитету за δ.

Обрнуто тврђење се доказује аналогно, коришћењем једнакости (12), да би δ се продужио на целу $U(\mathfrak{g})$. ☐

5.2 Квантизација

Сада можемо да формализујемо дискусију из увода.

Дефиниција 5.4. Нека је A комутативна Пуасон-Хопфова алгебра над пољем k карактеристике 0, и нека је $\{,\}$ њена Пуасонова заграда. Квантизација од A је деформација Хопфове алгебре A_h од Aтаква да важи:

$$\{x_1, x_2\} \equiv \frac{a_1 a_2 - a_2 a_1}{h} \mod h$$

за $a_1, a_2 \in A_h$ такве да је $a_i \equiv x_i \mod h$ и $x_i \in A$.

Квантизација алгебарске Пуасон-Лијеве групе $(G, \{,\})$ је квантизација $\mathcal{F}_h(G)$ алгебре $\mathcal{F}(G)$ регуларних функција на G посматране као Пуасонове алгебре. Тада $(G, \{,\})$ називамо класичан лимес од $\mathcal{F}_h(G)$.

И наравно за нас најбитнија дефиниција, која се односи на дуални објекат:

Дефиниција 5.5. Нека је A кокомутативна ко - Пуасон - Хопфова алгебра над пољем k карактеристике 0, и нека је δ њена Пуасонова ко - заграда. Квантизација од A је деформација Хопфове алгебре A_h од A таква да је:

$$\delta(x) \equiv \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{op}(a)}{h} \mod h$$

где је $x \in A$ а $a \in A_h$ је било који елемент за који важи $x \equiv a \mod h$.

Квантизација Лијеве биалгебре $(\mathfrak{g}, \delta)$ је квантизација $U_h(\mathfrak{g})$ њене универзалне омотачке алгебре $U(\mathfrak{g})$ са ко-Пуасон-Хопфовом структуром из става 5.1. Обрнуто, $(\mathfrak{g}, \delta)$ се назива класичан лимес $U_h(\mathfrak{g})$.

Убудуће ћемо у раду деформације универзалне омотачке алгебре називати квантне универзалне омотачке алгебре, а деформације алгебре функција квантне алгебре функција.

Приметимо да услов дефиниције има смисла јер је $U(\mathfrak{g})$ кокомутативна, па је $\Delta_h(a) \equiv \Delta_h^{op}(a) \mod h$. Такође видимо да је Лијева алгебра $\mathfrak{g}$ једнозначно одређена квантном омотачком алгебром $U_h(\mathfrak{g})$ будући да је она скуп примитивних елемената од $U_h(\mathfrak{g})/hU_h(\mathfrak{g})$.

Испоставља се да је деформација универзалне омотачке алгебре $U(\mathfrak{g})$ (само као Хопфове алгебре) заправо квантизација Лијеве биалгебре $(\mathfrak{g}, \delta)$. Тачније важи:

Став 5.2. *Нека је $\mathfrak{g}$ Лијева алгебра над пољем k карактеристике 0, и нека је $U_h(\mathfrak{g})$ деформација Хопфове алгебре $U(\mathfrak{g})$. Дефинишимо $\delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ тако да важи:*

$$\delta(x) = \frac{\Delta_h(a) - \Delta_h^{op}(a)}{h} \mod h$$

где је $x \in U(\mathfrak{g})$ и $a \in U_h(\mathfrak{g})$ се своди на $x \mod h$. Тада је $(U(\mathfrak{g}), \delta)$ ко - Пуасон - Хопфова алгебра.

Доказ. Тврђење се своди на проверу одговарајућих израза, и проверићемо да важи ко-Јакобијев идентитет. Имамо:

$$(\delta \otimes id)\delta(x) = \frac{1}{h^2}\{(\Delta_h \otimes id)\Delta_h(a) - (\Delta_h^{op} \otimes id)\Delta_h(a) -$$
$$-(\Delta_h \otimes id)\Delta_h^{op}(a) + (\Delta_h^{op} \otimes id)\Delta_h^{op}(a)\} \mod h.$$

Како је:

$$(\Delta_h \otimes id)\Delta_h(a) = \sum_i a_i \otimes a_i' \otimes a_i''$$

то је:

$$(\Delta_h^{op} \otimes id)\Delta_h(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'',$$

$$(\Delta_h \otimes id)\Delta_h^{op}(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i'' \otimes a_i,$$

$$(\Delta_h^{op} \otimes id)\Delta_h^{op}(a) = \sum_i a_i'' \otimes a_i' \otimes a_i,$$

одакле следи тражени резултат. □

Што се постојања квантизације тиче, одговор даје следећа теорема, коју наводимо без доказа.

Теорема 5.1. *Свака коначнодимензиона Лијева биалгебра* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ *над пољем* k *карактеристике* 0, *допушта квантизацију.*

Такође важи и више тј:

Теорема 5.2. *Нека је* $\mathfrak{g}$ *коначнодимензиона Лијева алгебра, и нека је* $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *косо-симетрично решење класичне Јанг-Бакстерове једначине*

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Тада, постоји квантизација $U_h(\mathfrak{g})$ *од* $U(\mathfrak{g})$ *чији је класични лимес Лијева биалгебра* $\mathfrak{g}$ *са класичном* r *- матрицом* r. *Такође,* $U_h(\mathfrak{g})$ *је троугаона Хопфова алгебра, и изоморфна је са* $U(\mathfrak{g})[[h]]$ *као алгебра над* $\mathbb{R}[[h]]$.

Како квантизације универзалних омотачких алгебри и алгебри функција нису главна тема овог рада, задржимо се на основним њиховим примерима, тј. случају када је $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Посматрајмо прво њену омотачку алгебру. Као што је познато од раније, стандардна Лијева биалгебра на $\mathfrak{sl}_2$ је дата са:

$$\delta(H) = 0, \quad \delta(X^+) = X^+ \wedge H, \quad \delta(X^-) = X^- \wedge H,$$

и она је дефинисана r-матрицом $r = X^+ \wedge X^-$. Нека су $\mathfrak{b}^\pm$ подалгебре од $\mathfrak{sl}_2$ генерисане са $\{X^\pm, H\}$ и нека је $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}^+ \cap \mathfrak{b}^-$. Очигледно је $\delta(\mathfrak{b}^\pm) \subset \mathfrak{b}^\pm \otimes \mathfrak{b}^\pm$ па су дакле $\mathfrak{b}^\pm$ Лијеве под-биалгебре од $\mathfrak{sl}_2$. Дакле, идеја је да квантизујемо прво $(\mathfrak{b}^\pm, \delta|_{\mathfrak{b}^\pm})$ тако да добијемо квантизацију од $(\mathfrak{sl}_2, \delta)$.

Потражимо квантизацију од $\mathfrak{b}^+$ која је изоморфна са $U(\mathfrak{b}^+)[[h]]$ као алгебра. Пошто је $\delta(H) = 0$, избор

$$\Delta_h(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H,$$

задовољава услов дефиниције ко-Пуасон-Хопфове алгебре. Да би добили $\Delta_h(X^+)$, приметимо да је $U(\mathfrak{b}^+)$ градуисан векторски простор уколико ставимо да је $deg(H) = 0$ и $deg(X^+) = 1$, и да комножење чува дату градуацију. Да би се сачувала градуација, можемо узети да је

$$\Delta_h(X^+) = X^+ \otimes f + g \otimes X^+,$$

за неке $f, g \in U(\mathfrak{h})[[h]]$. Услов $\Delta_h \equiv \Delta$ нам даје $f = g = 1 \mod h$.

Није тешко видети да за сваки избор f, g овако дефинисано пресликавање Δ_h се продужује до хомоморфизма алгебри

$$\Delta_h : U(\mathfrak{b}^+) \to U(\mathfrak{b}^+) \otimes U(\mathfrak{b}^+),$$

и да је Δ_h коасоцијативно ако су f и g групни елементи за Δ_h. Такође у претходном изразу се подразумева да је тензорски производ на десној страни узет у одговарајућем комплетирању. Као што је већ спомињано може се показати да је у овом случају комплетирање једноставно $(U(\mathfrak{b}^+) \otimes U(\mathfrak{b}^+))[[h]]$. Што се групних елемената тиче, важи следећи:

Став 5.3. *Групни елементи* f *од* $U(\mathfrak{h})[[h]]$ *такви да је* $f \equiv 1 \mod h$ *су облика* $f = e^{h\mu H}$ *где је* $\mu \in \mathbb{C}[[h]]$.

Доказ. Што се групних елемената тиче, израчунајмо:

$$\begin{aligned}\Delta_h(e^{h\mu H}) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h\mu)^n}{n!}(H \otimes 1 + 1 \otimes H)^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{(h\mu)^n}{n!} H^m \otimes H^{n-m} \\ =& \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h\mu)^{m+k}}{m!k!} H^m \otimes H^k \\ =& e^{h\mu H} \otimes e^{h\mu H}.\end{aligned} \tag{13}$$

Обрнуто нека је

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n H^n \in U(\mathfrak{h})[[h]]$$

групни елемент, где је $f_n \in \mathbb{C}[[h]]$. Рачун сличан претходном показује да је $f_{m+n} = f_m f_n$ за све $m, n \geq 1$. Дакле ако је $f_1 = h\mu$, тада је $f = e^{h\mu H}$. □

Можемо претпоставити да је:

$$\Delta_h(X^+) = X^+ \otimes e^{h\mu H} + e^{h\nu H} \otimes X^+,$$

за неке $\mu, \nu \in \mathbb{C}[[h]]$. Заправо, заменом X^+ са $e^{-h\nu H}X^+$, видимо да можемо претпоставити да је $\nu = 0$. Даље дефиниција 16) захтева да је $\mu \equiv 1 \mod h$ па се за најједноставнији избор $\mu = 1$ добија:

$$\Delta_h(X^+) = X^+ \otimes e^{hH} + 1 \otimes X^+.$$

Сад је лако проверити да ако ставимо да је:

$$S_h(H) = -H, \quad S_h(X^+) = -X^+ e^{-hH}, \quad \varepsilon_h(H) = \varepsilon_h(X^+) = 0,$$

да се тада Δ_h, S_h и ε_h продужују до хомоморфизама алгебри и да задовољавају све аксиоме Хопфове алгебре.

Наравно, и $(\mathfrak{b}^-, \delta|_{\mathfrak{b}^-})$ се може квантовати на исти начин. Као и малопре може се изабрати дефиниција за $\Delta_h(X^-)$, и у овом случају се испоставља да је најзгодније узети:

$$\Delta_h(X^-) = X^- \otimes 1 + e^{-hH} \otimes X^-.$$

Антипод и којединица су тада:

$$S_h(H) = -H, \quad S_h(X^-) = -e^{hH} X^-, \quad \varepsilon_h(H) = \varepsilon_h(X^-) = 0.$$

Узмимо да квантизација $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ буде $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))[[h]]$ као $\mathbb{C}[[h]]$ - модул, са структуром коалгебре управо дефинисаном. Даље, треба изабрати структуру алгебре тако да је Δ_h хомоморфизам. Опет видимо да је:

$$\Delta_h([X^+, X^-]) = [X^+ \otimes e^{hH} + 1 \otimes X^+, X^- \otimes 1 + e^{-hH} \otimes X^-] =$$

$$= [X^+, X^-] \otimes e^{hH} + e^{-hH} \otimes [X^+, X^-] + X^+ e^{-hH} \otimes e^{hH} X^- - e^{-hH} X^+ \otimes X^- e^{hH}.$$

Да би упростили овај израз, користимо следећи:

Став 5.4. *Нека је* A *алгебра над* $\mathbb{C}[[h]]$, *нека су* $a, b, c \in A$ *и претпоставимо да* a *комутира са* c. *Тада:*
1) $e^{h(a+c)} = e^{ha}e^{hc}$
2) Ако је $[a, b] = bc$, *тада је*

$$e^{ha}be^{-ha} = be^{hc}.$$

Доказ. Први део је позната чињеница, а што се другог дела тиче, видимо да је онда $ab = b(a + c)$ и одатле индукцијом да је $a^n b = b(a + c)^n$. Дакле:

$$e^{ha}b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}b(a + c)^n = be^{h(a+c)} = be^{hc}e^{ha}.$$

□

Из овог става видимо да се последња два сабирка претходног израза крате, тј. добијамо:

$$\Delta_h([X^+, X^-]) = [X^+, X^-] \otimes e^{hH} + e^{-hH} \otimes [X^+, X^-]. \qquad (14)$$

Поређењем овог израза са $\Delta_h(H)$ видимо да се релација $[X^+, X^-] = H$ мора променити. Како су елементи $e^{\pm hH}$ групни, узимањем да је $[X^+, X^-]$ било који умножак од $e^{hH} - e^{-hH}$ добићемо да је задовољена једнакост 14). Да би добили исправан класичан лимес узимамо:

$$[X^+, X^-] = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}}.$$

Сва претходна разматрања сумирамо у наредној дефиницији:

Дефиниција 5.6. Квантна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ је тополошка Хопфова алгебра $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ над $\mathbb{C}[[h]]$ дефинисана као:

Нека је $P = \mathbb{C}\{H, X^+, X^-\}$ алгебра над датим генераторима, и нека је I двострани идеал од $P[[h]]$ генерисан са

$$[H, X^+] - 2X^+, \quad [H, X^-] + 2X^-, \quad [X^+, X^-] - \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}},$$

и нека је $\overline{I}$ његово затворење у h-адској топологији. Тада, $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = P[[h]]/\overline{I}$ као алгебра над $\mathbb{C}[[h]]$.

Даље, хомоморфизми $\mathbb{C}[[h]]$ алгебри:

$$\Delta_h : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$$

$$\varepsilon : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}[[h]], \quad S_h : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$$

задати на генераторима у малопређашњој дискусији дефинишу структуру тополошке Хопфове алгебре на $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Такође, $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ је квантна универзална омотачка алгебра, чији је класичан лимес Лијева биалгебра $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ са r-матрицом $r = X^+ \wedge X^-$.

Задржимо се још мало на овом примеру. Прво, како је њен класичан лимес квазитроугаона биалгебра, може се очекивати да је и $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ сама (тополошка) квазитроугаона Хопфова алгебра, што и јесте случај. Овде ћемо само навести шта је њена R-матрица, али пре тога уведимо следећу нотацију:

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}},$$
$$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \dots [2]_q[1]_q,$$
$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q![m-n]_q!}.$$

Ови симболи су добро дефинисани као елементи поља $\mathbb{Q}(q)$ рационалних функција (у последњем изразу је наравно $m \geq n$). Није тешко видети да је и $[n]_q \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Такође у случају $q = e^h$ јасно је да је $[n]_{e^h} \equiv n \mod h$. Дакле, може се показати да је

$$\mathcal{R}_h = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(h) e^{\frac{1}{2}h(H \otimes H)} (X^+)^n \otimes (X^-)^n$$

где је

$$R_n(h) = \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1-q^{-2})^n}{[n]_q!}, \quad q = e^h$$

универзална R-матрица од $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Приметимо да дати елемент, заиста не припада алгебарском тензорском производу, јер је дата сума бесконачна (а и појављује се e, што је опет само формални запис бесконачне суме), и одатле видимо још један разлог због ког је битно узети одговарајуће комплетирање.

Још један разлог због кога нам је битан претходни пример, следи из чињенице да су све Кац-Мудијеве алгебре (овде се задржавамо на коначнодимензионом случају) $\mathfrak{g}$ генерисане подалгебрама које су изоморфне са $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Такође, како се структура биалгебре уводи на $\mathfrak{g}$ као:

$$\delta(H_i) = 0, \quad \delta(X_i^{\pm}) = d_i X_i^{\pm} \wedge H_i,$$

видимо да ће дате подалгебре, заправо бити под-биалгебре, па можемо покушати, као и у случају $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, да прво квантизујемо дате подалгебре, а онда њиховим лепљењем добијемо квантизацију од $\mathfrak{g}$. То нас доводи до следеће:

Дефиниција 5.7. Нека је $\mathfrak{g}$ Лијева алгебра придружена симетризабилној Картановој матрици $(a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$, и нека је $U_h(\mathfrak{g})$ алгебра над $\mathbb{C}[[h]]$ тополошки генерисана са елементима $H_i, X_i^+, X_i^-, i = 1, \dots n$, и релацијама:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_j^{\pm}] = \pm a_{ij} X_j^{\pm},$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{e^{d_i h H_i} - e^{-d_i h H_i}}{e^{d_i h} - e^{-d_i h}},$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{e^{d_i h}} (X_i^{\pm})^k X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad i \neq j.$$

Тада је $U_h(\mathfrak{g})$ тополошка Хопфова алгебра над $\mathbb{C}[[h]]$ са комножењем:

$$\Delta_h(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i,$$

$$\Delta_h(X_i^+) = X_i^+ \otimes e^{d_i h H_i} + 1 \otimes X_i^+, \quad \Delta_h(X_i^-) = X_i^- \otimes 1 + e^{-d_i h H_i} \otimes X_i^-,$$

антиподом:

$$S_h(H_i) = -H_i, \quad S_h(X_i^+) = -X_i^+ e^{-d_i h H_i}, \quad S_h(X_i^-) = -e^{d_i h H_i} X_i^-,$$

и којединицом:

$$\varepsilon_h(H_i) = \varepsilon_h(X_i^\pm) = 0.$$

Такође, $U_h(\mathfrak{g})$ је квантизација стандардне структуре биалгебре на $\mathfrak{g}$.

Што се квантизације алгебре функција тиче, погледајмо прво мало детаљније како се долази до коалгебарских операција на алгебрама функција матричних група. Пођимо прво од неколико очигледних чињеница. Нека је, за почетак, A комутативна алгебра над пољем k, и означимо са $Hom_{Alg}(A, B)$ скуп свих морфизама (у смислу алгебре) из A у B. Јасно је да је

$$Hom_{Alg}(k[x_1, \ldots, x_n], A) \cong A^n$$

и специјално је $Hom_{Alg}(k[x, y], A) \cong A^2$. Наравно, како су матрице уређена $n \times n$-торка бројева, јасно је да по претходном важи:

$$Hom_{Alg}(M(2), A) \cong M_2(A)$$

за сваку комутативну алгебру A, где је $M_2(A)$ скуп 2×2 матрица са елементима у A, а $M(2)$ је полиномијална алгебра $k[a, b, c, d]$. Дата бијекција се остварује пресликавањем, које морфизму $f : M(2) \to A$ додељује матрицу:

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}.$$

Али на матрицама имамо додатну структуру множења $M_2(A) \otimes M_2(A) \to M_2(A)$, које наравно индукује комножење на $M(2)$, и одавде видимо да су комножење и којединица заправо дати са:

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(a) & \Delta(b) \\ \Delta(c) & \Delta(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

што јасно значи да је нпр. $\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c$. Даље је наравно јасно како се долази до алгебри функција на $Gl_2(\mathbb{C})$ и $Sl_2(\mathbb{C})$. Такође, алгебра $M_2(A)$ долази са својим природним дејством на A^2, који је опет у бијекцији са $k[x, y]$. Идеја којом би дошли до квантизације од $M(2)$ је да мало променимо $k[x, y]$, и наравно, најједноставније што можемо да урадимо је да релацију $yx = xy$ заменимо са $yx = qxy$ за неко $q \neq 1$. Из претходног није јасно како можемо директно доћи до алгебре која одговара алгебри $M(2)$. Међутим, претпоставимо да дакле важи $yx = qxy$ и нека су a, b, c и d променљиве које комутирају са x и y. Дефинишимо још $x', y' x''$ и y'' користећи матричне релације:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тада важи:

Став 5.5. *Нека је $q^2 \neq -1$. Тада под претходним претпоставкама, следећи скупови релација су еквивалентни:*
1) Две релације $y'x' = qx'y'$ и $y''x'' = qx''y''$
2) Шест релација:

$$ba = qab, \quad db = qbd,$$
$$ca = qac, \quad dc = qcd,$$
$$bc = cb, \quad ad - da = (q^{-1} - q)bc.$$

Доказ. Покажимо да 1) имплицира 2). Имамо да је:

$$(cx + dy)(ax + by) = q(ax + by)(cx + dy).$$

Изједначавањем коефицијената уз x^2, y^2 и xy добијамо:

$$ca = qac, \quad db = qbd, \quad cb + qda = qad + q^2bc,$$

дељењем последње једнакости са q добија се $ad - da = q^{-1}cb - qbc$, а из једнакости $y''x'' = qx''y''$ се добијају још три релације, које су заправо исте као претходне са замењеним b и c, тј:

$$ba = qab, \quad dc = qcd, \quad ad - da = q^{-1}bc - qcb,$$

одакле следи да је $(q^{-1} + q)(bc - cb) = 0$ одакле следи да је $bc = cb$. Други смер се доказује аналогно. □

Дефиниција 5.8. $M_q(2) = k\{a, b, c, d\}/J_q$ где је $k\{a, b, c, d\}$ слободна алгебра над четири генератора а J_q је двострани идеал генерисан са шест релација из претходног става.

Приметимо да је за $q = 1$ алгебра $M_q(2)$ очигледно изоморфна већ споменутој алгебри $M(2)$. Како је идеал J_q генерисан хомогеним полиномима степена 2, то $M_q(2)$ наслеђује природну градуацију од слободне алгебре у којој су генератори a, b, c, d степена 1.

Да би увели групе $Gl_q(2)$ и $Sl_q(2)$ потребна нам је детерминанта, која ће у овом случају бити $det_q = ad - q^{-1}bc = da - qbc$, што је мотивисано следећим:

Став 5.6. *Елемент $det_q \in M_q(2)$ је централан.*

Доказ. Доказ је само провера да det_q комутира са свим генераторима, што је само директна примена релација које дефинишу $M_q(2)$. □

Даље, видимо да пресликавања Δ и ε која смо раније дефинисали за $M(2)$, имају смисла и за $M_q(2)$, и није тешко видети да је са тим пресликавањима $M_q(2)$ биалгебра, и такође важи:

$$\Delta(det_q) = det_q \otimes det_q, \quad \varepsilon(det_q) = 1.$$

Сад је јасно да је:

$$Sl_q(2) = M_q(2)/(det_q - 1)$$

и наравно важи:

Теорема 5.3. *Пресликавања* Δ *и* ε *биалгебре* $M_q(2)$ *снабдевају* $Sl_q(2)$ *са структуром Хопфове алгебре у којој је антипод* S *задат са:*

$$\begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = det_q^{-1} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}.$$

Доказ овог тврђења је провера аксиома Хопфове алгебре, па ћемо га прескочити. Приметимо само на крају да би добили деформацију у смислу о коме смо говорили раније у раду, треба заменити q са e^{-h} и посматрати $Sl_q(2)$ као деформацију по h. Заправо о ситуацији коју овде имамо рећићемо пар речи у наредном одељку.

5.3 Специјализације квантних универзалних омотачких алгебри

У претходном поглављу смо дакле видели основне идеје како се праве деформације од универзалних омотачких алгебри, и њих смо могли да посматрамо као једнопараметарске фамиЛије хопфових алгебри. Међутим строго говорећи ово нема смисла, зато што h нисмо смели да заменимо неким комплексним бројем, из простог разлога што над прстеном формалних редова то нема смисла. Идеја ове конструкције је да посматрамо алгебру $U_q(\mathfrak{g})$ над прстеном рационалних функција од q, за разлику од формалног објекта $U_h(\mathfrak{g})$. Главна предност од $U_q(\mathfrak{g})$ је што се q може специјализовати за било који комплексан број. Такође, $U_q(\mathfrak{g})$ је и технички простија јер не мора да се води рачуна о h-адским комплетирањима. У овом тренутку изложићемо само дефиницију од $U_q(\mathfrak{g})$ за Кац-Мудијеву алгебру $\mathfrak{g}$, а касније ћемо се вратити овом објекту кад будемо дошли до афиних алгебри. Дакле дефиниција $U_q(\mathfrak{g})$ се базира на дефиницији 5.7: $(q_i = q^{d_i})$

Дефиниција 5.9. Нека је $\mathfrak{g}$ коначнодимензиона проста комплексна Лијева алгебра. Тада је $U_q(\mathfrak{g})$ асоцијативна алгебра над $\mathbb{Q}(q)$ са генераторима X_i^+, X_i^-, K_i и $K_i^{-1}, 1 \geq i \geq n$, и следећим релацијама:

$$K_iK_j = K_jK_i, \quad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1,$$

$$K_iX_j^+K_i^{-1} = q_i^{a_{ij}}X_j^+, \quad K_iX_j^-K_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}}X_j^-,$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^k = 0, \quad i \neq j.$$

Структура Хопфове алгебре се на $U_q(\mathfrak{g})$ задаје са:

$$\Delta_q(K_i) = K_i \otimes K_i,$$

$$\Delta_q(X_i^+) = X_i^+ \otimes K_i + 1 \otimes X_i^+, \quad \Delta_q(X_i^-) = X_i^- \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes X_i^-,$$

$$S_q(K_i) = K_i^{-1}, \quad S_q(X_i^+) = -X_i^+K_i^{-1}, \quad S_q(X_i^-) = -K_iX_i^-,$$

$$\varepsilon_q(K_i) = 1, \quad \varepsilon_q(X_i^+) = \varepsilon_q(X_i^-) = 0.$$

6 Бесконачнодимензионе квантне групе

6.1 Јангијани

Претходни примери квантних група су биле деформације универзалних омотачких алгебри и алгебри функција, које су коначно генерисане као алгебре. У овом поглављу видећемо два примера квантних група које нису коначно генерисане, које ће бити деформације алгебре полинома над неком простом Лијевом алгебром и деформације афиних Лијевих алгебри. Такође, видећемо како њихове репрезентације генеришу решења Јанг-Бакстерове једначине.

Нека је дакле $\mathfrak{g}$ проста коначнодимензиона Лијева алгебра над $\mathbb{C}$, нека је $\mathfrak{g}[u]$ Лијева алгебра из примера 3.4). Подсетимо се, она је била и Лијева биалгебра са ко - комутатором задатим са:

$$\delta(f)(u,v) = (ad_{f(u)} \otimes 1 + 1 \otimes ad_{f(v)})\frac{t}{u-v},$$

где је t казимиров елемент, тј. елемент $\sum_{\lambda} x_\lambda \otimes x_\lambda$ где је $\{x_\lambda\}$ нека ортонормирана база у односу на инваријантну билинеарну форму $(,)$. Приметимо да је $\mathfrak{g}[u]$ градуисана алгебра:

$$\mathfrak{g}[u] = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}u^r, \quad [\mathfrak{g}u^r, \mathfrak{g}u^s] \subset \mathfrak{g}u^{r+s}.$$

Такође, при индукованој градуацији на $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, δ смањује степен за 1, тако да је природно тражити квантизацију $U_h(\mathfrak{g}[u])$ од $(\mathfrak{g}[u], \delta)$ које су хомогене у смислу да постоји густа $\mathbb{C}[[h]]$ Хопфова подалгебра $\overline{U}_h(\mathfrak{g}[u])$ таква да је:

i) $\overline{U}_h(\mathfrak{g}[u])$ је градуисана асоцијативна алгебра над $\mathbb{C}[[h]]$ ($\deg(h) = 1$).

ii) $\overline{U}_h(\mathfrak{g}[u])/h\overline{U}_h(\mathfrak{g}[u]) \cong U(\mathfrak{g}[u])$ као градуисана алгебра над $\mathbb{C}$.

Следећи резултат показује да то може суштински да се уради на јединствен начин.

Претходно, ако су z_1, z_2 и z_3 елементи неке асоцијативне алгебре над $\mathbb{C}$, означимо:

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \frac{1}{24}\sum_{\pi} z_{\pi(1)} z_{\pi(2)} z_{\pi(3)},$$

где претходна сума иде по свим пермутацијама скупа $\{1, 2, 3\}$

Теорема 6.1. *Нека је $\mathfrak{g}$ коначнодимензионална комплексна проста Лијева алгебра. Фиксирајмо инваријантну билинеарну форму $(,)$ на $\mathfrak{g}$ и нека је $\{x_\lambda\}$ ортонормирана база од $\mathfrak{g}$ у односу на $(,)$. Тада постоји, до на изоморфизам, јединствена хомогена квантизација $U_h(\mathfrak{g}[u])$ од $(\mathfrak{g}[u], \delta)$. Она је* *тополошки генерисана елементима* $x, J(x)$ *где је* $x \in \mathfrak{g}$ *и релацијама:*

$$[x,y] \quad (\in U_h(\mathfrak{g}[u])) = [x,y] \quad (\in \mathfrak{g}), \tag{15}$$

$$J(ax+by) = aJ(x) + bJ(y), \tag{16}$$

$$[x, J(y)] = J([x,y]), \tag{17}$$

$$\begin{gathered}[J(x),[J(y),J(z)]] + [J(z),[J(x),J(y)]] + [J(y),[J(z),J(x)]] = \\ h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu} ([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[z,x_\nu]])\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\},\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}[[J(x),J(y)],[z,J(\omega)]] + [[J(z),J(\omega)],[x,J(y)]] = \\ h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu} ([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[[z,\omega],x_\nu]])\{x_\lambda, x_\mu, J(x_\nu)\},\end{gathered} \tag{19}$$

за све $x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in \mathbb{C}$.

Структура Хопфове алгебре на $U_h(\mathfrak{g}[u])$ *се задаје са:*

$$\Delta_h(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \tag{20}$$

$$\Delta_h(J(x)) = J(x) \otimes 1 + 1 \otimes J(x) + \frac{1}{2}h[x \otimes 1, t], \tag{21}$$

$$S_h(x) = -x, \quad S_h(J(x)) = -J(x) + \frac{1}{4}cx, \tag{22}$$

$$\varepsilon_h(x) = \varepsilon_h(J(x)) = 0, \tag{23}$$

где је c *сопствена вредност од* $t \in U(\mathfrak{g})$ *у адјунгованој репрезентацији од* $\mathfrak{g}$ *(у (21)* t *посматрамо као елемент од* $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$*).*

Градуација на $U_h(\mathfrak{g}[u])$ *је дата са:*

$$\deg(x) = 0. \quad \deg(J(x)) = 1.$$

Уместо доказа образложимо мало ове формуле. Прво како је $\mathfrak{g}$ проста, тј. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, видимо да је $\mathfrak{g}[u]$ генерисана елементима x и xu где је $x \in \mathfrak{g}$. Приметимо да би на основу тражене градуације, класичан лимес од $J(x) = xu$. Једначине (15) и (16) су јасне, док из тога што је дата алгебра градуисана, и с обзиром на степене одговарајућих елемената, природна претпоставка је и (17). Даље, како је $\delta(x) = 0$ природно је $\Delta_h(x)$ задати формулом (20). Са друге стране је

$$\delta(xu) = [xu \otimes 1 + 1 \otimes xu, \frac{t}{u-v}] =$$

$$= \frac{u}{u-v}[x \otimes 1, t] + \frac{v}{u-v}[1 \otimes x, t]$$

али како је елемент t у центру од $U(\mathfrak{g})$ то је $[x \otimes 1, t] = -[1 \otimes x, t]$, па је дакле:

$$\delta(xu) = [x \otimes 1, t]$$

одакле видимо да је (21) најпростији начин да се задовољи:

$$\frac{\Delta_h(J(x)) - \Delta_h^{op}(J(x))}{h} \equiv \delta(xu) \mod h.$$

Десне стране једнакости (18) и (19) су добијене тако да комножење $\Delta_h : U_h(\mathfrak{g}[u]) \to U_h(\mathfrak{g}[u]) \otimes U_h(\mathfrak{g}[u])$ буде морфизам алгебри.

Доказ да је $U_h(\mathfrak{g}[u]) \cong U(\mathfrak{g}[u])[[h]]$ ћемо видети касније.

Нека је $\overline{U}_h(\mathfrak{g}[u])$ $\mathbb{C}[h]$ - подалгебра од $U_h(\mathfrak{g}[u])$ генерисана елементима $x, J(x)$ (у уобичајеном смислу) $x \in \mathfrak{g}$. Тада, $\overline{U}_h(\mathfrak{g}[u])$ је градусиана Хопфова алгебра над $\mathbb{C}[h]$ и сад можемо узети h да је било који комплексан број e. Добијена Хопфова алгебра $U_e(\mathfrak{g}[u])$ над $\mathbb{C}$ не зависи од избора e, уколико је $e \neq 0$. Заиста, ако су $e, e' \in \mathbb{C}^\times$ тада је пресликавање $U_e(\mathfrak{g}[u]) \to U_{e'}(\mathfrak{g}[u])$ дефинисано са:

$$x \to x, \qquad J(x) \to \frac{e'}{e} J(x),$$

очигледно изоморфизам. Дакле можемо узети да је $e = 1$.

Дефиниција 6.1. За сваку коначнодимензиону просту комплексну алгебру $\mathfrak{g}$, Јангијан $Y(\mathfrak{g})$ је Хопфова алгебра над $\mathbb{C}$ генерисана елементима $x, J(x)$ где је $x \in \mathfrak{g}$ и релацијама (15)-(23) стављањем да је $h = 1$.

Посматрајмо сад другу реализацију Јангијана. Приметимо да дата реализација прикрива чињеницу да је $\mathfrak{g}[u]$ заправо простор пресликавања $\mathbb{C} \to \mathfrak{g}$. Самим тим природније је узети за генераторе од $U(\mathfrak{g}[u])$ елементе $X_i^{\pm} u^r, H_i u^r$ где је $i = 1, \ldots, n, r \in \mathbb{N}$ и $\{X_i^{\pm}, H_i\}$ су стандардни генератори од $\mathfrak{g}$. Дакле, друга реализација $Y(\mathfrak{g})$ је у терминима генератора чији су класичан лимес елементи $X_i^{\pm} u^r, H_i u^r$.

За убудуће, фиксирајмо на $\mathfrak{g}$ инваријантни скаларни производ $(,)$ и нека су $X_\beta^{\pm}$ корени вектори за позитивне корене β.

Теорема 6.2. *Јангијан $Y(\mathfrak{g})$ је изоморфан асоцијативној алгебри са генераторима $X_{i,r}^{\pm}, H_{i,r}, i = 1, \ldots, n, \quad r \in \mathbb{N}$ и релацијама:*

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0, \tag{24}$$

$$[H_{i,0}, X_{j,s}^{\pm}] = \pm d_i a_{ij} X_{j,s}^{\pm}, \tag{25}$$

$$[H_{i,r+1}, X_{j,s}^{\pm}] - [H_{i,r}, X_{j,s+1}^{\pm}] = \pm \frac{1}{2} d_i a_{ij} (H_{i,r} X_{j,s}^{\pm} + X_{j,s}^{\pm} H_{i,r}), \tag{26}$$

$$[X_{i,r}^{+}, X_{j,s}^{-}] = \delta_{ij} H_{i,r+s}, \tag{27}$$

$$[X_{i,r+1}^{\pm}, X_{j,s}^{\pm}] - [X_{i,r}^{\pm}, X_{j,s+1}^{\pm}] = \pm \frac{1}{2} d_i a_{ij} (X_{i,r}^{\pm} X_{j,s}^{\pm} + X_{j,s}^{\pm} X_{i,r}^{\pm}), \tag{28}$$

$$\sum_{\pi} [X_{i,r_{\pi(1)}}^{\pm}, [X_{i,r_{\pi(2)}}^{\pm}, \ldots, [X_{i,r_{\pi(m)}}^{\pm}, X_{j,s}^{\pm}] \ldots]] = 0. \tag{29}$$

У последњој формули, $r_1, \ldots, r_m$ су ненегативни бројеви, где је $m = 1 - a_{ij}$, и сумира се по свим пермутацијама скупа $\{1, \ldots m\}$.

Изоморфизам φ између две дате реализације је дат са:

$$\varphi(H_i) = d_i^{-1} H_{i,0}, \quad \varphi(J(H_i)) = d_i^{-1} H_{i,1} + \varphi(v_i),$$

$$\varphi(X_i^{\pm}) = X_{i,0}^{\pm}, \quad \varphi(J(X_i^{\pm})) = X_{i,1}^{\pm} + \varphi(\omega_i^{\pm}),$$

где је

$$v_i = \frac{1}{4} \sum_{\beta \in \Delta^+} \frac{d_\beta}{d_i} (\beta, \alpha_i)(X_\beta^{+} X_\beta^{-} + X_\beta^{-} X_\beta^{+}) - \frac{d_i}{2} H_i^2,$$

$$\omega_i^{\pm} = \pm \frac{1}{4} \sum_{\beta \in \Delta^+} d_\beta ([X_i^{\pm}, X_\beta^{\pm}] X_\beta^{mp} + X_\beta^{\mp} [X_i^{\pm}, X_\beta^{\pm}]) - \frac{1}{4} d_i (X_i^{\pm} H_i + H_i X_i^{\pm}).$$

Приметимо да у претходној реализацији нисмо дали формуле за комножење. Иако теоретски, уз помоћ претходног изоморфизма, би могли да добијемо формуле за $\Delta(X_{i,r}^{\pm})$ и $\Delta(H_{i,r})$, оне нису експлицитно познате.

Посматрајмо сад и трећу реализацију која се односи на случај $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, и претходила је претходним двема, и у извесном смислу алгебарски је једноставнија. Посматрајмо прво Лијеву алгебру $\mathfrak{gl}_n$ и на њој стандардну базу $E_{ij}, i, j = 1, \dots n$. Комутационе релације су тада дате са

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}.$$

Нека је E матрица чији је ij-ти унос матрица E_{ij}. Тада у омотачкој алгебри важи израз:

$$[E_{ij}, (E^s)_{kl}] = \delta_{kj} (E^s)_{il} - \delta_{il} (E^s)_{kj}.$$

Међутим важи и уопштење ове формуле, које лако следи индукцијом, тј:

$$[(E^{r+1})_{ij}, (E^s)_{kl}] - [(E^r)_{ij}, (E^{s+1})_{kl}] = (E^r)_{kj} (E^s)_{il} - (E^s)_{kj} (E^r)_{il},$$

где су $r, s \geq 0$ и $E^0 = 1$ је јединична матрица. Дакле, ово је мотивација за следећу:

Дефиниција 6.2. Јангијан од $\mathfrak{gl}_n$ је асоцијативна алгебра са јединицом која има пребројиво много генератора $t_{ij}^{(k)}$ где је $1 \leq i, j \leq n$ и $k \in \mathbb{N}$ и релацијама:

$$[t_{ij}^{(r+1)}, t_{kl}^{(s)}] - [t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s+1)}] = t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(s)} - t_{kj}^{(s)} t_{il}^{(r)},$$

где су $r, s \geq 0$, и $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$. Дату алгебру означавамо са $Y(gl_n)$ или кратко са $Y(n)$.

Приметимо да ову дефиницију не обухвата претходна, јер смо тада претпоставили да је $\mathfrak{g}$ проста алгебра. Даље, уведимо генеришућу функцију:

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + t_{ij}^{(1)} u^{-1} + t_{ij}^{(2)} u^{-2} + \dots \quad \in Y(n)[[u^{-1}]],$$

и нека је $T(u)$ $n \times n$ матрица чији су уноси t_{ij}, тј. елемент $Y(n) \otimes End(\mathbb{C}^n)$ дат са

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(u) \otimes E_{ij},$$

где је E_{ij} стандардна базна матрица, и посматрајмо оператор који мења редослед фактора у $End(\mathbb{C}^n) \otimes End(\mathbb{C}^n)$ који се у овом случају записује као

$$P = \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Тада, лак рачун показује да рационална функција $R = 1 - Pu^{-1}$ са вредностима у $End(\mathbb{C}^n) \otimes End(\mathbb{C}^n)$ задовољава квантну Јанг-Бакстерову једначину:

$$R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u),$$

и она заправо представља најпростије рационално решење. Такође, може се показати да се релације које дефинишу $Y(n)$ могу записати као:

$$R(u-v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R(u-v).$$

Да би добили $Y(\mathfrak{sl}_n)$ потребна нам је детерминанта, и она се у овом случају уводи као:

$$qdet(T(u)) = \sum_{\pi} sgn(\pi) t_{1,\pi(1)}(u-n+1) \dots t_{n,\pi(n)}(u).$$

Може се показати да је у овом случају

$$Y(\mathfrak{sl}_n) \cong Y(n)/(qdet = 1).$$

Споменимо још да $Y(n)$ има структуру Хопфове алгебре, дату аналогно као на алгебрама регуларних функција, тј. комножење и којединица су дати са:

$$\Delta(T(u)) = T(u) \otimes T(u), \quad \varepsilon(T(u)) = 1,$$

и антипод је дат са:

$$S(T(u)) = T(u)^{-1}.$$

Да би добили занимљива својства Јангијана, углавном је неопходно користити више од једне од датих реализација. Као што је споменуто, друга има предност што је у њој очигледно да је класичан лимес Јангијана простор пресликавања док у осталима имамо експлицитно задато комножење. Посматрајмо сад први резултат, који представља квантни аналог једнопараметарске групе аутоморфизама $\mathfrak{g}[u]$ дат са $u \to u + a$.

Став 6.1. *Постоји једнопараметарска фамилија аутоморфизама Хопфових алгебри* τ_a *од* $Y(\mathfrak{g})$ *где је* $a \in \mathbb{C}$ *дата са:*

$$\tau_a(H_{i,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} a^{r-s} H_{i,s}, \qquad \tau_a(X_{i,r}^{\pm}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} a^{r-s} X_{i,s}^{\pm}.$$

Доказ. Дефинишимо прво τ_a у терминима прве реализације где би најлогичнији квантни аналог био:

$$\tau_a(x) = x, \qquad \tau_a(J(x)) = J(x) + ax, \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Лако се види да је ова дефиниција конзистентна са дефиницијама и структуром Хопфове алгебре дате у првој реализацији. Остаје да се покаже да ће важити формула из става, што ћемо показати индукцијом. Дакле, тада за $r = 0$ и 1 следи из дефиниције, док се индуктивни корак доказује коришћењем релација:

$$X_{i,r+1}^{\pm} = \pm\frac{1}{2}[H_{i,1}, X_{i,r}^{\pm}] - \frac{1}{2}d_i(H_{i,0}X_{i,r}^{\pm} + X_{i,r}^{\pm}H_{i,0}),$$

$$H_{i,r+1} = [X_{i,r+1}^{+}, X_{i,0}^{-}].$$

□

Приметимо да провером на генераторима у првој реализацији важи: $S^2 = \tau_{\frac{1}{2}c}$.

Досада нисмо користили чињеницу да је $U_h(\mathfrak{g}[u])$ градуисана алгебра, што се заправо изгубило стављањем да је $h = 1$, пошто је h имао позитиван степен. Ипак важи:

Став 6.2. *Јангијан* $Y(\mathfrak{g})$ *има структуру филтриране алгебре, такву да је придружена градуисана алгебра* $U(\mathfrak{g}[u])$.

Доказ. Коришћењем друге реализације, нека је $Y(\mathfrak{g})_r$ за $r \in \mathbb{N}$ линеарни омотач над свим мономима над генераторима $X^{\pm}_{i,s}, H_{i,s}$ за које је сума индекса s највише r. Тада је очигледно $Y(\mathfrak{g})_r \subset Y(\mathfrak{g})_{r+1}$ као и $Y(\mathfrak{g})_r Y(\mathfrak{g})_s \subset Y(\mathfrak{g})_{r+s}$.

Придружена градуисана алгебра има исте генераторе $X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ које задовољавају исте релације као у теореми 6.2, са тим што су десне стране од (26) и (28) замењене са 0. Није тешко видети да се тад добија $U(\mathfrak{g}[u])$. □

Последица 6.1. *Центар Јангијана* $Y(\mathfrak{g})$ *се састоји од скаларних умножака јединице.*

Доказ. Нека је z елемент центра $Y(\mathfrak{g})$, и тада је по претходном ставу $z \in Y(\mathfrak{g})_r \backslash Y(\mathfrak{g})_{r-1}$. Опет по истом ставу z одговара неком не-нула елементу центра $U(\mathfrak{g}[u])$ степена r, међутим познато је да $U(\mathfrak{g}[u])$ има тривијалан центар, па дакле мора бити $r = 0$. □

Споменимо још у кратким цртама PBW базу Јангијана. Најочигледнија PBW база за $U(\mathfrak{g}[u])$ се састоји од уређених монома над елементима $X^{\pm}_{\beta} u^r$, $H_i u^r$ где је $i = 1 \dots n, \beta \in \Delta^+, r \in \mathbb{N}$. Дакле, да би конструисали PBW за $Y(\mathfrak{g})$ морамо дефинисати квантне аналоге за $X^{\pm}_{\beta} u^r$. Корени вектори $X^{\pm}_{\beta}$ у $\mathfrak{g}$ се дефинишу преко простих корених вектора $X^{\pm}_i$ формулама облика:

$$X^{\pm}_{\beta} = c[X^{\pm}_{i_1}, [X^{\pm}_{i_2}, \dots [X^{\pm}_{i_{k-1}}, X^{\pm}_{i_k}] \dots]]$$

где је c не-нула комплексан број. За свако $r \in \mathbb{N}$ и $k \geq 1$ изаберимо разбијање $r = r_1 + \ldots + r_k$ и дефинишимо:

$$X^{\pm}_{\beta,r} = c[X^{\pm}_{i_1,r_1}, [X^{\pm}_{i_1,r_1}, \dots [X^{\pm}_{i_{k-1},r_{k-1}}, X^{\pm}_{i_k,r_k}] \dots]].$$

Може се показати:

Став 6.3. *Изаберимо линеарно уређење на скупу:*

$$\Sigma = \{X^{\pm}_{\beta,r}\}_{\beta \in \Delta^+, r \in \mathbb{N}} \cup \{H_{i,r}\}_{i=1 \dots n, r \in \mathbb{N}}$$

Тада, скуп свих уређених монома над елементима из Σ *чини базу векторског простора* $Y(\mathfrak{g})$.

Приметимо да одавде следи да је $U_h(\mathfrak{g}[u]) \cong U(\mathfrak{g}[u])[[h]]$, одакле следи да је $U_h(\mathfrak{g}[u])$ заиста деформација од $\mathfrak{g}[u]$.

6.2 Репрезентације Јангијана

У овом одељку ћемо описати коначнодимензионе репрезентације Јангијана, које ће се испоставити да су аналогне класичној теорији репрезентација $\mathfrak{g}$ у терминима највећих тежина.

Нека су $h_{i,r}$, за $i = 1, \dots, n$ $r \in \mathbb{N}$ комплексни бројеви, заједно означени са $\mathbf{h}$. Ако је V $Y(\mathfrak{g})$ - модул, његов тежински простор је:

$$V_{\mathbf{h}} = \{v \in V | H_{i,r} v = h_{i,r} v, \quad i = 1, \dots, n \quad r \in \mathbb{N}\}.$$

Примитивни вектор у V је вектор $v(\neq 0) \in V_{\mathbf{h}}$ за неко $\mathbf{h}$, такав да је $X_{i,r}^{+}v = 0$ за све i и r. Кажемо да је V модул највеће тежине, са највећом тежином $\mathbf{h}$ ако је $V = Y(\mathfrak{g})v$ за неки примитивни вектор $v \in V_{\mathbf{h}}$.

Приметимо да постоји хомоморфизам Хопфових алгебри $\imath : U(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$ дат са $\imath(x) = x$. У принципу, сваку репрезентацију од $Y(\mathfrak{g})$ можемо посматрати као репрезентацију од $\mathfrak{g}$.

Став 6.4. *Сваки коначнодимензиони $Y(\mathfrak{g})$ - модул V је модул највеће тежине.*

Како ћемо скицирати доказ сличан овом за афине алгебре, овај доказ ћемо прескочити.

Следећа теорема се односи на донекле супротно питање, тј. који модули највеће тежине су коначнодимензиони. Тачније:

Теорема 6.3. *Иредуцибилни $Y(\mathfrak{g})$ - модул $V(\boldsymbol{h})$ највеће тежине $\boldsymbol{h}$ је коначнодимензиони акко постоје полиноми $P_i \in \mathbb{C}[u]$ такви да:*

$$\frac{P_i(u+d_i)}{P_i(u)} = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} h_{i,r}u^{-r-1}.$$

Доказ ове теореме је технички захтеван, па га нећемо наводити.

Приметимо да тежина $\mathbf{h}$ одређује полиноме P_i до на умножак скаларом. Дакле, по претходне две теореме, све коначнодимензионе иредуцибилне репрезентације $Y(\mathfrak{g})$ су параметризоване n-торкама моничних полинома.

Нека је λ јединствена највећа тежина од $V(\mathbf{h})$ посматраног као $\mathfrak{g}$ - модул. Коришћењем изоморфизма φ из теореме 6.2, видимо да је $h_{i,0} = d_i\lambda(H_i)$. Са друге стране видимо да је $h_{i,0} = d_i \deg(P_i)$. Дакле, $\deg(P_i) = \lambda(H_i)$.

Наравно, најпростије највеће тежине су оне за које су дати полиноми најмањег степена. Рећићемо да је коначнодимензиона иредуцибилна репрезентација од $Y(\mathfrak{g})$ фундаментална, ако су придружени полиноми облика:

$$P_j(u) = \begin{cases} 1 & j \neq i \\ u - a & j = i \end{cases}$$

Дату фундаменталну репрезентацију означавамо са $V(\lambda_i, a)$ где је λ_i јединствена максимална тежина од V посматраног као $\mathfrak{g}$ - модул.

Дати назив објашњава следећи:

Став 6.5. *Нека су V и W коначнодимензиони $Y(\mathfrak{g})$ - модули, и нека су $v \in V$ и $w \in W$ примитивни вектори који одговарају тежинама $\boldsymbol{h}_V$ и $\boldsymbol{h}_W$. Тада је $v \otimes w$ примитивни вектор у $V \otimes W$ који одговара тежини $\boldsymbol{h}_{V\otimes W}$ где је*

$$P_{i,V\otimes W} = P_{i,V}P_{i,W}$$

и одговарајуће тежине су повезане са одговарајућим моничним полиномима као у теореми 6.3.

Одавде следи:

Последица 6.2. *Свака иредуцибилна коначнодимензиона репрезентација $Y(\mathfrak{g})$ је изоморфна квоцијенту тензорског производа фундаменталних репрезентација.*

Доказ. Нека је $V(\mathbf{h})$ коначнодимензиони модул са придруженим полиномима $P_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Нека су $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ нуле полинома P_i поређане у неком редоследу, рачунајући вишеструкости. По претходном ставу, тензорски производ v вектора највеће тежине у фундаменталним репрезентацијама $V(\lambda_1, a_{11}), \ V(\lambda_1, a_{12}), \ldots, V(\lambda_n, a_{n1}), \ldots$ је примитивни вектор тежине $\mathbf{h}$. Дакле, $V(\mathbf{h})$ је квоцијент од подмодула $Y(\mathfrak{g})v$ - модула $\bigotimes_{ij} V(\lambda_i, a_{ij})$. □

Такође очигледно је:

Последица 6.3. *Нека су V и W иредуцибилни коначнодимензиони $Y(\mathfrak{g})$ - модули и претпоставимо да је и $V \otimes W$ такође иредуцибилан. Тада:*

1) Полиноми $P_{i,V\otimes W}, P_{i,V}$ и $P_{i,W}$ придружени модулима $V \otimes W, V$ и W су повезани са $P_{i,V\otimes W} = P_{i,V} P_{i,W}$.

2) $V \otimes W$ и $W \otimes V$ су изоморфни као $Y(\mathfrak{g})$ - модули.

Напоменимо још да закључак 2) претходне последице не важи у општем случају, а самим тим $Y(\mathfrak{g})$ није квазитроугаона, чак ни у тополошком смислу.

6.3 Квантне афине алгебре

Квантне афине алгебре су дакле Кац-Мудијеве алгебре чија је генералисана Картанова матрица афиног типа, па би се оне могле реализовати исто као и просте Лијеве алгебре, са додатко још једног елемента, тј. оне представљају најједноставније бесконачнодимензионе Кац-Мудијеве алгебре. Самим тим већ имамо једну реализацију квантних афиних алгебри.

Такође, афине Лијеве алгебре $\widetilde{\mathfrak{g}}$ се могу реализовати као централно раширење (са једнодимензионим центром) алгебре петљи $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}[u, u^{-1}]$ где је u непозната. Приметимо да се $L(\mathfrak{g})$ може посматрати као простор Лоранових полинома $\mathbb{C}^\times \to \mathfrak{g}$. Аналогно као и у случају Јангијана, и овде имамо другу реализацију која ближе описује да се ради о простору пресликавања. У овом случају радићемо са специјализацијом $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ уместо са $U_h(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Важи:

Теорема 6.4. *Нека је $\widetilde{\mathfrak{g}}$ афина Лијева алгебра додељена коначнодимензионој комплексној простој Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$. Стандардна квантизација $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ од $\widetilde{\mathfrak{g}}$, из дефиниције 5.7, је изоморфна као алгебра над $\mathbb{C}[q]$ алгебри A_q са генераторима $\mathcal{C}^{\pm 1/2}, \mathcal{K}_i^{\pm 1}, \mathcal{H}_{i,r}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и $\mathcal{X}_{i,r}^{\pm}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad r \in \mathbb{Z}$ и следећим релацијама:*

$$\mathcal{K}_i \mathcal{K}_i^{-1} = \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{K}_i = 1, \quad \mathcal{C}^{1/2} \mathcal{C}^{-1/2} = 1,$$

$$\mathcal{C}^{\pm 1/2} \text{ су централни,}$$

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = [\mathcal{K}_i, \mathcal{H}_{j,r}] = 0,$$

$$[\mathcal{H}_{i,r}, \mathcal{H}_{j,s}] = \delta_{r,-s} \frac{1}{r} [r a_{ij}]_{q_i} \frac{\mathcal{C}^r - \mathcal{C}^{-r}}{q_j - q_j^{-1}},$$

$$\mathcal{K}_i \mathcal{X}_{j,r}^{\pm} \mathcal{K}_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}} \mathcal{X}_{j,r}^{\pm},$$

$$[\mathcal{H}_{i,r}, \mathcal{X}_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{1}{r} [r a_{ij}]_{q_i} \mathcal{C}^{\mp |r|/2} \mathcal{X}_{j,r+s}^{\pm},$$

$$\mathcal{X}^{\pm}_{i,r+1}\mathcal{X}^{\pm}_{j,s} - q_i^{\pm a_{ij}}\mathcal{X}^{\pm}_{j,s}\mathcal{X}^{\pm}_{i,r+1} = q_i^{\pm a_{ij}}\mathcal{X}^{\pm}_{i,r}\mathcal{X}^{\pm}_{j,s+1} - \mathcal{X}^{\pm}_{j,s+1}\mathcal{X}^{\pm}_{i,r},$$

$$[\mathcal{X}^{+}_{i,r}, \mathcal{X}^{-}_{j,s}] = \delta_{i,j}\frac{\mathcal{C}^{(r-s)/2}\Phi^{+}_{i,r+s} - \mathcal{C}^{-(r-s)/2}\Phi^{-}_{i,r+s}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$\sum_{\pi\in\Sigma_m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q_i}\mathcal{X}^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}}\dots\mathcal{X}^{\pm}_{i,r_{\pi(k)}}\mathcal{X}^{\pm}_{j,s}\mathcal{X}^{\pm}_{i,r_{\pi(k+1)}}\dots\mathcal{X}^{\pm}_{i,r_{\pi(m)}} = 0, i \neq j,$$

за све низове целих бројева $r_1, \dots, r_m$ *где је* $m = 1 - a_{ij}$ *а елементи* $\Phi^{\pm}_{i,r}$ *су одређени изједначавањем коефицијената уз степене и у формалним степеним редовима:*

$$\sum_{r=0}^{\infty}\Phi^{\pm}_{i,\pm r}u^{\pm r} = \mathcal{K}_i^{\pm 1}\exp(\pm(q_i - q_i^{-1})\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{H}_{i,\pm s}u^{\pm s}).$$

Нека је $\theta = \sum_i m_i\alpha_i$ *највиши корен од* $\mathfrak{g}$, *нека је* $q_\theta = q_i$ *ако је* θ *конјугован са* α_i *(под дејством Вејлове групе), и нека је* $\mathcal{K}_\theta = \prod_{i=1}^{n}\mathcal{K}_i^{m_i}$. *Претпоставимо да је корени вектор* $\overline{X}_\theta^+$ *од* $\mathfrak{g}$ *изражен преко простих корених вектора као:*

$$\overline{X}_\theta^+ = \lambda[\overline{X}_{i_1}^+, [\overline{X}_{i_2}^+, \dots, [\overline{X}_{i_k}^+, \overline{X}_{i_j}^+]\dots]]$$

за неко $\lambda \in \mathbb{C}$. *Дефинишимо пресликвање* $\omega_i^{\pm} : U_q(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ *са*

$$\omega_i^{\pm}(a) = \mathcal{X}^{\pm}_{i,0}a - \mathcal{K}_i^{\pm 1}a\mathcal{K}_i^{\mp 1}\mathcal{X}^{\pm}_{i,0}$$

Тада постоји изоморфизам $\mathbb{C}(q)$ *алгебри* $f : U_q(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to A_q$ *дефинисан на генераторима са:*

$$f(K_0) = \mathcal{C}\mathcal{K}_\theta^{-1}, \quad f(K_i) = \mathcal{K}_i, \quad f(X_i^{\pm}) = \mathcal{X}^{\pm}_{i,0} \quad i = 1, \dots n,$$

$$f(X_0^+) = \mu\omega^-_{i_1}\dots\omega^-_{i_k}(\mathcal{X}^-_{j,1})\mathcal{K}_\theta^{-1}, \quad f(X_0^-) = \lambda\mathcal{K}_\theta\omega^+_{i_1}\dots\omega^+_{i_k}(\mathcal{X}^+_{j,-1}).$$

Где је $\mu \in \mathbb{C}$ *одређен условом*

$$[X_0^+, X_0^-] = \frac{K_0 - K_0^{-1}}{q_\theta - q_\theta^{-1}}.$$

Везано за ову теорему, напоменимо:

1) Реализација која је сличнија реализацији Јангијана (и односи се на $U_h(\widetilde{\mathfrak{g}})$) се добија уколико се генератори $\mathcal{K}_i$ и $\mathcal{C}^{1/2}$ замене са $\mathcal{H}_{i,0}$ и $c/2$ а трећа и пета релација замени са:

$$[\mathcal{H}_{i,0}, \mathcal{H}_{j,r}] = 0, \qquad [\mathcal{H}_{i,0}, \mathcal{X}^{\pm}_{j,r}] = \pm d_i a_{ij}\mathcal{X}^{\pm}_{j,r}.$$

Остале релације остају исте, осим што q_i треба заменити са $e^{d_i h}$ и $\mathcal{C}^{1/2}$ са $e^{hc/2}$.

2) Стављање

$$\deg(\mathcal{K}_i) = \deg(\mathcal{C}) = 0, \quad \deg(\mathcal{H}_{i,r}) = \deg(\mathcal{X}^{\pm}_{i,r}) = r, \quad \deg(q) = 0,$$

снабдева $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ структуром градуисане алгебре.

Што се PBW базе тиче, из претходне теореме следи:

Последица 6.4. *Нека је* $e \in \mathbb{C}^\times$ *трансцедентан број, и нека су* $U_e^\pm$ *и* U_e^0 *подалгебре од* $U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ *генерисане са елементима* $\mathcal{X}_{i,r}^\pm$ *односно* $\mathcal{C}^{\pm 1/2}, \mathcal{K}_i^{\pm 1}, \mathcal{H}_{i,r}$ *за све* i, r. *Тада је*

$$U_e(\tilde{\mathfrak{g}}) = U_e^- U_e^0 U_e^+.$$

6.4 Коначнодимензионе репрезентације

У овом одељку претпостављамо да је $e \in \mathbb{C}^\times$ трансцедентан.

Рећићемо да је репрезентација V од $U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ типа **1** ако генератори $K_0, \ldots, K_n$ делују полупросто на V, са сопственим вредностима које су целобројни степени од e, и ако $\mathcal{C}^{1/2}$ делује као 1 на V. Приметимо да постоји 2^{n+1} аутоморфизама $\mathbb{C}(q)$ алгебри од $U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ датих на генераторима са:

$$K_i \to \sigma K_i, \quad X_i^+ \to \sigma X_i^+, \quad X_i^- \to X_i^-, \tag{30}$$

за било који избор знакова $\sigma_0, \ldots \sigma_n \in \{\pm 1\}$. Такође користићемо аутоморфизме облика:

$$\mathcal{C}^{1/2} \to -\mathcal{C}^{1/2}, \quad \mathcal{X}_{i,r}^\pm \to (-1)^r \mathcal{X}_{i,r}^\pm, \quad \mathcal{K}_i \to \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{H}_{i,r} \to \mathcal{H}_{i,r}. \tag{31}$$

Став 6.6. *1) Свака коначнодимензиона иредуцибилна репрезентација* V *од* $U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ *може се добити од репрезентације типа* ***1*** *применом неког од аутоморфизама (30) и (31).*
2) Свака коначнодимензиона репрезентација типа ***1****,* V *од* $U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ *садржи не-нула вектор* v *који поништавају* $\mathcal{X}_{i,r}^+$ *за свако* i, r*, и он је истовремено сопствени вектор за све елементе од* U_e^0.

Доказ. Нека је

$$V^0 = \{v \in V | \mathcal{X}_{i,r}^+ v = 0\}$$

за свако i и r. Претпоставимо супротно, тј. да је $V^0 = 0$, и нека је ω заједнички сопствени вектор за $K_1, \ldots K_n$. Тада, по претпоставци, постоји бесконачно много индекса (i_k, r_k), $k = 1, 2, \ldots$ таквих да су вектори ω, $\mathcal{X}_{i_1,r_1}^+ \omega$, $\mathcal{X}_{i_2,r_2}^+ \mathcal{X}_{i_1,r_1}^+ \omega \ldots$ различити од нула вектора. Међутим, пошто ови вектори имају различите тежине у односу на дејство $U_e(\mathfrak{g})$ они су линеарно независни, што противуречи коначнодимензионалности простора V.

Нека је $0 \neq v \in V^0$. Посматрајмо подалгебру $U_{e_i}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ од $U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ генерисану са елементима $X_i^\pm$ и $K_i^{\pm 1}$. Тада се може показати да је

$$K_i v = \sigma_i q^{s_i} v, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

за неке $\sigma_i = \pm 1$ и $s_i \in \mathbb{Z}$ где је $s_0 \leq 0, s_1, \ldots, s_n \geq 0$. Тада

$$\mathcal{C} v = \sigma_0 \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^{m_i} q^{s_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i s_i} v.$$

Са друге стране, ако посматрамо V као репрезентацију $U_{e_i}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ преко хомоморфизма $U_{e_i}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to U_e(\tilde{\mathfrak{g}})$ датог са:

$$X_1^\pm \to \mathcal{X}_{i,\pm r}^\pm, \qquad K_1 \to \mathcal{C}^r \mathcal{K}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad r \in \mathbb{Z}$$

видимо да мора бити:

$$r(s_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i s_i) + s_i \geq 0$$

за све $r \in \mathbb{Z}$ одакле следи да је $s_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i s_i = 0$, па самим тим и

$$\mathcal{C}v = \sigma_0 \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^{m_i} v.$$

Коришћењем аутоморфизама (30), можемо претпоставити да је $\sigma_i = 1$ одакле је $\mathcal{C}v = v$. Како је V иредуцибилан, то мора бити $\mathcal{C}^{1/2} = 1$ или $\mathcal{C}^{1/2} = -1$, где се опет други случај решава коришћењем аутоморфизама (31), што доказује 1).

Ако је V типа **1**, тада видимо из релација теореме 6.4 да елементи од U_e^0 делују на V као комутирајући оператори, као и да чувају V^0. Било који заједнички сопсвени вектор $v \in V^0$ за дејство U_e^0 задовољава услове из 2). $\square$

Дакле, проучавање коначнодимензионих иредуцибилних репрезентација од $U_e(\widetilde{\mathfrak{g}})$ се своди на проучавање репрезентација квантних алгебра петљи $U_q(L(\mathfrak{g}))$, које би се добије сечењем по идеалу генерисаним са $\mathcal{C}^{1/2} - 1$.

Дефиниција 6.3. За репрезентацију V типа **1** од $U_e(L(\mathfrak{g}))$ кажемо да је псеудо највеће тежине ако је генерисана вектором v_0 кога анулирају $\mathcal{X}_{i,r}^{+}$ и који је истовремени сопствени вектор за $\mathcal{K}_i$ и $\mathcal{H}_{i,r}$, $\quad i = 1, \ldots, n \quad r \neq 0$. Како је тада $\Phi_{i,r}^{\pm} v_0 = \phi_{i,r}^{\pm} v_0$, за колекцију комплексних бројева $\phi_{i,r}^{\pm}$ означену са ϕ кажемо да је псеудо највећа тежина.

Из доказа става 6.6 видимо да важи:

Последица 6.5. *Свака коначнодимензиона иредуцибилна репрезентација V типа **1** од $U_e(L(\mathfrak{g}))$ је псеудо највеће тежине.*

Следећа теорема је аналогија теореме 6.3.

Теорема 6.5. *Нека је V коначнодимензиона иредуцибилна репрезентација од $U_e(L(\mathfrak{g}))$ типа **1**, нека је v_0 вектор псеудо највеће тежине у V, и нека су $\phi_{i,r}^{\pm} \in \mathbb{C}$ за $i = 1, \ldots, n, \quad r \in \mathbb{Z}$ као у дефиницији 6.3. Тада постоје јединствени монични полиноми $P_{i,V} \in \mathbb{C}[u], i = 1, \ldots, n$ са не-нула константним чланом, такви да је:*

$$\sum_{r=0}^{\infty} \phi_{i,r}^{+} u^r = q_i^{\deg(P_{i,V})} \frac{P_{i,V}(q_i^{-2} u)}{P_{i,V}(u)} = \sum_{r=0}^{\infty} \phi_{i,-r}^{-} u^{-r}$$

*у смислу да су лева и десна страна једнакости Лоранови развоји средњег члана у околини 0 и ∞. Такође, за сваку n-торку (P_i) моничних полинома са не - нула константним члановима постоји коначнодимензиона иредуцибилна репрезентација од $U_e(L(\mathfrak{g}))$ типа **1** таква да важи претходна* *једнакост. Даље, ако су V и W коначнодимензионе репрезентације типа* ***1*** *од $U_e(L(\mathfrak{g}))$ такве да је $V \otimes W$ иредуцибилна, тада је*

$$P_{i,V\otimes W} = P_{i,V}P_{i,W}$$

Специјално, важи $V \otimes W \cong W \otimes V$.

Из истог разлога као у случају Јангијана, нећемо наводити доказ ове теореме. Исто као за Јангијане, последњи закључак теореме не важи у општем случају.

Опет, исто као у случају јангигјана, кажемо да су коначнодимензионе иредуцибилне репрезентације типа **1** фундаменталне ако су придружени полиноми дати са:

$$P_j(u) = \begin{cases} 1 & j \neq i \\ u - a & j = i \end{cases}$$

и дату репрезентацију ћемо означити са $V(\lambda_i, a)$.

6.5 Евалуационе репрезентације

Присећајући се чињенице да је афина алгебра заправо скуп полиномских пресликавања, и да елементи $\mathcal{X}_{i,r}^{\pm}$ имају за класичан лимес $\overline{X_i^{\pm}}u^r$, могли би очекивати да постоји квантна аналогија хомоморфизма $U_e(L(\mathfrak{g}))$ у $U_e(\mathfrak{g})$ који дакле слика полиномску функцију у њену вредност у некој тачки. Дати хомоморфизам не постоји за свако $\mathfrak{g}$ и ми ћемо посматрати случај $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ у ком ће он узимати вредности у скупу већем од $U_e(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}))$

Фиксирајмо квадратни корен $e^{1/2}$ од e и нека је:

$$[u, v]_{e^{1/2}} = e^{1/2}uv - e^{-1/2}vu.$$

Дефиниција 6.4. $U_e(\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ је асоцијативна алгебра над $\mathbb{C}$ одређена генераторима $x_i^{\pm}$, $\quad i = 1, \ldots, n$ и $t_r^{\pm}$, $\quad 0, 1, \ldots, n$ и релацијама:

$$t_r t_r^{-1} = 1 = t_r^{-1} t_r,$$

$$t_r t_s = t_s t_r,$$

$$t_r x_i^{\pm} t_r^{-1} = e^{\delta_{r,i-1} - \delta_{r,i}} x_i^{\pm},$$

$$[x_i^{\pm}, [x_j^{\pm}, x_i^{\pm}]_{e^{1/2}}]_{e^{1/2}} = 0, \quad |i - j| = 1,$$

$$[x_i^{\pm}, x_j^{\pm}] = 0, \quad |i - j| > 1,$$

$$[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{i,j} \frac{k_i - k_i^{-1}}{e - e^{-1}},$$

где је $k_i = t_{i-1} t_i^{-1}$.

Постоји структура Хопфове алгебре на $U_e(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ дата као у дефиницији 5.9. заједно са:

$$\Delta(t_r) = t_r \otimes t_r, \qquad S(t_r) = t_r^{-1}, \qquad \varepsilon(t_r) = 1.$$

Приметимо да постоји хомоморфизам Хопфових алгебри $U_e(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) \to U_e(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ дат са:

$$X_i^{\pm} \to x_i^{\pm}, \qquad K_i \to k_i.$$

Став 6.7. *За свако $a \in \mathbb{C}$ постоје јединствени хомоморфизми алгебри ev_a и ev^a из $U_e(L(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})))$ у $U_e(\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ такви да је:*

$$ev_a(X_i^{\pm}) = x_i^{\pm} = ev^a(X_i^{\pm}),$$

$$ev_a(K_0) = (k_1 \dots k_n)^{-1} = ev^a(K_0),$$

$$ev_a(X_0^{\pm}) = (\pm 1)^{n-1} e^{\mp(n+1)/2} a^{\pm 1} [x_n^{\mp}, [x_{n-1}^{\mp} \dots [x_2^{\mp}, x_1^{\mp}]_{e^{1/2}} \dots]_{e^{1/2}} (t_0 t_n)^{\pm 1},$$

$$ev^a(X_0^{\pm}) = (\pm 1)^{n-1} e^{\mp(n+1)/2} a^{\pm 1} [x_1^{\mp}, [x_2^{\mp} \dots [x_{n-1}^{\mp}, x_n^{\mp}]_{e^{1/2}} \dots]_{e^{1/2}} (t_0 t_n)^{\mp 1}.$$

Доказ је директна провера одговарајућих чињеница. Споменимо још да ev_a и ev^a нису хомоморфизми Хопфових алгебри.

Фиксирајмо $(n+1)$-ви корен $e^{1/(n+1)}$ од e. Рећићемо да је репрезентација W од $U_e(\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ типа **1** ако важи:

1) W је репрезентација тип **1** посматран као репрезентација од $U_e(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}))$,

2) t_r дејствују полупросто на W са сопственим вредностима које су целобројни степени од $e^{1/(n+1)}$,

3) $t_0 t_1 \dots t_n$ дејствује на W као идентитет.

Није тешко видети да постоји еквиваленција између репрезентрација типа **1** од $U_e(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ и репрезентација типа **1** од $U_e(\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C}))$. Дакле ако имамо репрезентацију типа **1** од $U_e(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ можемо је посматрати као репрезентацију типа **1** од $U_e(\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C}))$. Даље нека су W_a и W^a пулбекови од W при хомоморфизмима ev_a и ev^a. Добијене репрезентације називамо евалуационе репрезентације. Посматрајмо најједноставнији пример дате ситуације:

Пример 6.1. Нека је $a \in \mathbb{C}^\times$, $r \in \mathbb{N}$ и нека је $W = V_e(r)$ стандардна $r+1$-димензиона репрезентација типа **1** од $U_e(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. У стандардној бази $\{v_0, \dots, v_n\}$ дејство $U_e(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ на $V_e(r)$ је дато са:

$$t_0 v_p = e^{(r-2p)/2} v_p, \quad t_1 v_p = e^{-(r-2p)/2} v_p,$$

$$x_1^+ v_p = [r-p+1]_e v_{p-1}, \quad x_1^- v_p = [p+1]_e v_{p+1}.$$

Може се показати да је полином придружен репрезентацији $V_e(r)_a$:

$$P_1(u) = \prod_{p=1}^{r} (u - a^{-1} e^{2p-r-1}).$$

6.6 Рационална и тригонометријска решења квантне Јанг-Бакстерове једначине

Видели смо да Јангијани и квантне афине алгебре нису квазитроугаоне, чак ни у тополошком смислу. И поред тога у овом одељку видећемо да оне ипак генеришу решења Јанг-Бакстерове једначине.

Сетимо се да се на $\mathfrak{g}[u]$ уводио ко - комутатор као

$$\delta(f)(u,v) = (ad_{f(u)} \otimes id + id \otimes ad_{f(v)}) \frac{t}{u-v}$$

и добијена биалгебра, иако је била добро дефинисана, није следило да је квазитроугаона јер елемент $\frac{t}{u-v}$ није елемент алгебарског тензорског производа.

Ипак, нека је λ непозната и $\mathfrak{g}[u]((\lambda^{-1}))$ проширење Лијеве алгебре $\mathfrak{g}[u]$ до Лијеве алгебре над пољем формалних степених редова. Тада, транслација $f(u) \to f(u+\lambda)$ дефинише аутоморфизам $\mathfrak{g}[u]((\lambda^{-1}))$ који ћемо означити са τ_λ, и приметимо да коефицијенти уз степене λ у развоју

$$r(\lambda) = (\tau_\lambda \otimes id)(\frac{t}{u-v}) = \frac{t}{u-v+\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty}(v-u)^r \lambda^{-r-1} t$$

припадају $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})[u,v]$. Дакле, уколико у изразу за ко - комутатор заменимо $\frac{t}{u-v}$ са $r(\lambda)$ добијамо когграничну Лијеву биалгебру $\mathfrak{g}[u]((\lambda^{-1}))$. Приметимо да је $r_{21}(\lambda) = -r(-\lambda)$.

Како смо у Ставу 6.1. видели аналогију датих аутоморфизама, добијамо аналогно добро дефинисане аутоморфизме τ_λ од $Y(\mathfrak{g})((\lambda^{-1}))$ па је из претходне примедбе разумно очекивати да $Y(\mathfrak{g})((\lambda^{-1}))$ има R-матрицу $\mathcal{R}(\lambda)$ која задовољава $\mathcal{R}_{21}(\lambda) = \mathcal{R}(-\lambda)^{-1}$. Ово очекивање је испуњено:

Теорема 6.6. *Постоји јединствени формални степени ред*

$$\mathcal{R}(\lambda) = 1 \otimes 1 + \frac{t}{\lambda} + \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{R}_r \lambda^{-r-1} \qquad \in (Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}))[[\lambda^{-1}]]$$

са следећим својствима:

$$(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}(\lambda)) = \mathcal{R}_{13}(\lambda)\mathcal{R}_{23}(\lambda), \quad (id \otimes \Delta)(\mathcal{R}(\lambda)) = \mathcal{R}_{13}(\lambda)\mathcal{R}_{12}(\lambda),$$

$$(\tau_\lambda \otimes id)(\Delta^{op}(a)) = \mathcal{R}(\lambda)((\tau_\lambda)(\Delta(a)))\mathcal{R}(\lambda)^{-1}$$

за све $a \in Y(\mathfrak{g})$. Такође, $\mathcal{R}(\lambda)$ је троугаоно решење квантне Јанг-Бакстерове једначине:

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda_1-\lambda_2)\mathcal{R}_{13}(\lambda_1-\lambda_3)\mathcal{R}_{23}(\lambda_2-\lambda_3) = \mathcal{R}_{23}(\lambda_2-\lambda_3)\mathcal{R}_{13}(\lambda_1-\lambda_3)\mathcal{R}_{12}(\lambda_1-\lambda_2),$$

$$\mathcal{R}_{21}(-\lambda) = \mathcal{R}(\lambda)^{-1}.$$

$\mathcal{R}(\lambda)$ ћемо називати псеудо-универзална R-матрица од $Y(\mathfrak{g})$. Напоменимо само да не постоји општи израз за $\mathcal{R}(\lambda)$, а један од проблема је што не постоје формуле за комножење у другој реализацији Јангијана коју смо навели.

Наравно, уколико је $\rho : Y(\mathfrak{g}) \to End(V)$ репрезентација од $Y(\mathfrak{g})$ тада $R^\rho(\lambda) = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{R}(\lambda))$ ће бити матрично решење квантне Јанг-Бакстерове једначине, где ће λ_1, λ_2 и λ_3 имати улогу параметара, облика

$$R^\rho(\lambda) = 1 \otimes 1 + (\rho \otimes \rho)(t)\lambda^{-1} + \sum_{r=1}^{\infty} R_r \lambda^{-r-1}. \tag{32}$$

Нажалост, како не постоји експлицитан израз за $\mathcal{R}(\lambda)$, претходно се не може искористити за налажење $R^\rho(\lambda)$.

Укратко опишимо један други метод. Претходно споменимо да уколико имамо фамилију репрезентација $V(v)$ Хопфове алгебре на векторском простору V тада постоји изоморфизам (репрезентација):

$$I(v_1, v_2) : V(v_1) \otimes V(v_2) \to V(v_2) \otimes V(v_1).$$

Такође, ако је $R = \tau \circ I$ где је τ транспозиција, онда R задовољава квантну Јанг-Бакстерову једначину (до на производ скаларом). Идеја је да користимо аутоморфизме из става 6.1. и тиме од неке репрезентације добијемо фамилију репрезентација, и решимо претходно добијену једначину (тј. једначину коју добијамо из чињенице да дати оператор комутира са дејством), која је једноставнија од једначине (32) јер нам фигуришу само два комплексна броја, а не променљива. Означимо $\tau_a^* = \rho \circ \tau_a$, тада важи:

Теорема 6.7. *Нека је $\rho : Y(\mathfrak{g}) \to End(V)$ коначнодимензиона иредуцибилна репрезентација од $Y(\mathfrak{g})$. Тада, до на умножак скаларом $R^\rho(\lambda)$ је Лоранов развој у околини ∞ рационалне функције од λ, и самим тим $R^\rho(a)$ је елемент $End(V \otimes V)$ за све осим коначно много вредности $a \in \mathbb{C}$. Такође, осим за коначно много вредности $a - b$, оператор $I^\rho(a, b) = \tau \circ R^\rho(a - b)$ комутира са дејством на одговарајућим репрезентацијама.*

Што се квантних афиних алгебри тиче, имамо аналогну ситуацију. Нека је λ променљива и τ_λ аутоморфизми од $U_h(\widetilde{\mathfrak{g}})((\lambda))$ дати са:

$$\tau_\lambda(X_i^\pm) = \lambda^{\pm 1} X_i^\pm, \qquad \tau_\lambda(H_i) = H_i.$$

Теорема 6.8. *Постоји елемент $\widetilde{\mathcal{R}}(\lambda) \in (U_h(\widetilde{\mathfrak{g}}) \otimes U_h(\widetilde{\mathfrak{g}}))((\lambda))$ такав да, ако је $\rho : U_h(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to End(V)$ иредуцибилна репрезентација од $U_h(\widetilde{\mathfrak{g}})$ на слободном $\mathbb{C}[[h]]$ - модулу V коначног ранга, тада $\widetilde{R}^\rho(\lambda) = (\rho \otimes \rho)((\tau_\lambda \otimes id)(\widetilde{\mathcal{R}}))$ је добро дефинисан елемент $End(V \otimes V)((\lambda))$ који задовољава квантну Јанг-Бакстерову једначину у облику:*

$$\widetilde{R}^\rho_{12}(\lambda/\mu)\widetilde{R}^\rho_{13}(\lambda/\nu)\widetilde{R}^\rho_{23}(\mu/\nu) = \widetilde{R}^\rho_{23}(\mu/\nu)\widetilde{R}^\rho_{13}(\lambda/\nu)\widetilde{R}^\rho_{12}(\lambda/\mu).$$

До на умножак скаларом, $\tau \circ \widetilde{R}^\rho(\lambda)$ је рационална, матрично-вредносна функција од λ, која комутира са дејством у одговарајућим репрезентацијама.

Такође, може се показати следећи став, који се односи на најједноставнији случај, тензорског производа репрезентација $V_h(r)_a$. Претходно, напоменимо да важи и у квантном случају, да је тензорски производ две репрезентације од $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ тежина m и n, директна сума репрезентација тежина $m+n-2j$ где је $0 \leq j \leq min(m, n)$, што је познато као Клебш-Горданова формула.

Став 6.8. *Нека су $a, b \in \mathbb{C}^\times$ и $r, s \in \mathbb{N}$. Нека је ρ иредуцибилна репрезентација*

$$V = V_h(r)_a \otimes V_h(s)_b$$

од $U_h(\widetilde{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}))$ таква да у тензорском производу смемо да заменимо места. Изаберимо $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ примитивне векторе $v_j \in V_h(r)_a \otimes V_h(s)_b$ и $v'_j \in$

$V_h(s)_b \otimes V_h(r)_a$ *где је* $r+s-2j$ *као малопре, и означимо са* P^j *јединствен хомоморфизам такав да* $P^j(v_j) = v'_j$ *и нула иначе. Тада је*

$$I(r,a;s,b) : V_h(r)_a \otimes V_h(s)_b \to V_h(s)_b \otimes V_h(r)_a$$

дат са:

$$I(r,a;s,b) = \sum_{j=0}^{min(r,s)} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{b - ae^{(r+s-2i)h}}{b - ae^{-(r+s-2i)h}} \right) P^j.$$

Погледајмо ово на примеру $V_h(1)_a \otimes V_h(1)_b$. Нека је $\{v_0, v_1\}$ стандардна база од $V_h(1)$. Тада су пресликавања P^j где је $j = 0, 1$ дата са:

$$P^0(v_0 \otimes v_0) = v_0 \otimes v_0, \quad P^0(v_1 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_1,$$

$$P^0(v_0 \otimes v_1) = \frac{e^{-h} v_0 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_0}{e^h + e^{-h}}, \quad P^0(v_1 \otimes v_0) = \frac{v_0 \otimes v_1 + e^h v_1 \otimes v_0}{e^h + e^{-h}}.$$

И аналогно P^1:

$$P^1(v_0 \otimes v_0) = 0, \quad P^1(v_1 \otimes v_1) = 0,$$

$$P^1(v_0 \otimes v_1) = \frac{e^h v_0 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_0}{e^h + e^{-h}}, \quad P^1(v_1 \otimes v_0) = \frac{e^{-h} v_1 \otimes v_0 - v_0 \otimes v_1}{e^h + e^{-h}}.$$

Тада, формула из става дефинише пресликавање:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b-a}{b-ae^{-2h}} & \frac{a(e^h-e^{-h})}{b-ae^{-2h}} & 0 \\ 0 & \frac{a(e^h-e^{-h})}{b-ae^{-2h}} & \frac{b-a(e^{2h}-1+e^{-2h})}{b-ae^{-2h}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видимо да у случајевима $b/a = e^{\pm 2h}$ дато пресликавање није добро дефинисано, и тада не можемо закључити да ли су дате две репрезентације изоморфне. Испоставља се да баш у тим случајевима нису. Такође, претходни метод решава Јанг-Бакстерову једначину до на умножак скаларом, и у овом случају матрица $R(\lambda)$ се добија за $a = \lambda^2$ и $b = 1$.

Литература

[1] V. Chari and A. Pressley. *A Guide to Quantum Groups.* Cambridge University Press, 1995.

[2] G. W. Delius and N. J. MacKay. Affine quantum groups. *ArXiv Mathematics e-prints*, July 2006.

[3] V. G. Drinfel'd. Quantum groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 41:898–915, 1988.

[4] I. Frenkel and N. Reshetikhin. Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Communications in Mathematical Physics*, 146:1–60, 1992.

[5] S. Gautam and V. Toledano-Laredo. Monodromy of the trigonometric Casimir connection for sl_2. *ArXiv e-prints*, September 2011.

[6] J.E. Humphreys. *Introduction To Lie Algebras and Representation Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1972.

[7] Michio Jimbo. A q-difference analogue of U(g) and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 10:63–69, 1985.

[8] Michio Jimbo. A q-analogue of U(gl(N+1)), Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 11:247–252, 1986.

[9] V.G. Kac. *Infinite-Dimensional Lie Algebras.* Progress in mathematics. Cambridge University Press, 1994.

[10] C. Kassel. *Quantum Groups.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

[11] S. Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.

[12] S. Majid. *A Quantum Groups Primer.* London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2002.

[13] A. I. Molev. Yangians and their applications. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2002.

[14] S. Sternberg. *Lie Algebras.* University Press of Florida, 2009.

[15] M.E. Sweedler. *Hopf algebras.* Mathematics lecture note series. W. A. Benjamin, 1969.

[16] V. Toledano-Laredo. The trigonometric Casimir connection of a simple Lie algebra. *ArXiv e-prints*, March 2010.