MIRKO S. JOVANOVIĆ

DOBRILO Đ. TOŠIĆ

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA I PROBLEMA IZ MATEMATIKE

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

ZAVOD ZA UDŽBENIKE, Beograd 2010.

Urednik
Ljubomir Protić

Odgovorni urednik
Slobodan G. Marković

Za izdavača
Miloljub Albijanić,
direktor i glavni urednik

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016 : 51 (075.3) (076)

ЈОВАНОВИЋ, Мирко С., 1952-
Zbirka rešenih zadataka i problema iz matematike: za učenike srednjih škola / Mirko S. Jovanović, Dobrilo Đ. Tošić. - 1. izd. - Beograd: Zavod za udžbenike, 2010 (Beograd: Planeta print). - 278 str. : graf. prikazi; 24 cm

Tiraž 500.

ISBN 978-86-17-17008-8
1. Тошић, Добрило, 1932- [аутор]

COBISS.SR-ID 176343564

ISBN 978-86-17-17008-8

©ZAVOD ZA UDŽBENIKE, Beograd 2010.
Ovo delo se ne sme umnožavati i na bilo koji način reprodukovati, u celini niti u delovima, bez pismenog odobrenja izdavača.

PREDGOVOR

Autori ove knjige su članovi Katedre za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, čiji je osnivač profesor DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ (1908–1995). Na njegovu inicijativu 1956. godine pokrenuto je izdavanje časopisa Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija matematika, a 1957. štampan je prvi broj Matematičke biblioteke u izdanju Zavoda za udžbenike i ova edicija je do danas doživela oko 50 naslova. Profesor MITRINOVIĆ je objavio više zbornika zadataka iz raznih oblasti više matematike, zatim je sa svojim saradnicima organizovao štampanje dve serije: Novi zbornik matematičkih problema i Matematički problemi i ekspozicije.

Pre tačno 45 godina, 1965. pojavila se knjiga *Matematički pripučnik za takmičenja srednjoškolaca i prijemne ispite na fakultetima*, čiji su autori OLGA MITRINOVIĆ, ZORAN POP–STOJANOVIĆ, DOBRILO Đ. TOŠIĆ i PETAR M. VASIĆ. Do 1991. godine izašlo je 6 izdanja te knjige.

Nekoliko kniga Matematičke biblioteke su u stvari zbirke zadataka i problema sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja kao i priručnici za pripremu takmičenja. Vredno je pomenuti jednu interesantnu knjigu: VLADIMIR DEVIDÉ: 100 *elementarnih ali težih zadataka.*

Ova knjiga je posvećena sećanju na nezaboravno vreme velike aktivnosti naše Katedre u gore pomenutim poslovima, a posebno u propagiranju zadataka i problema iz elementarne matematike.

Zbirka sadrži 454 zadatka i problema sa detaljnim rešenjima. Možda bi bolji naslov bio “Zbirka težih zadataka.” Od ovog naslova smo odustali jer se u knjizi može pronaći i poneki elementaran zadatak. Poreklo zadataka i problema je raznovrsno. Pored onih koji su zadavani na matematičkim takmičenjima u Srbiji, Hrvatskoj, Sloveniji, Rusiji, Poljskoj, Češkoj, Slovačkoj, Rumuniji, Južnoj Africi, Švedskoj i Austriji, veliki deo problema je iz poznatih svetskih časopisa: Matematika b skole, Középiskolai Lapok, The American Mathematical Mounthly, Gazeta matematika, Kvant, Tangenta. Nekoliko zadataka je zadavano u Francuskoj. Pored toga, ima i originalnih. Prvi autor je sastavio zadatke: 38, 119, 144, 152, 179, 181, 219, 271, 284, 295, 296, 307, 322, 324, 360, 385, 386, 387, 401, 429, 431. Zadaci 186, 224, 240, 424, 441 imaju originalna rešenja.

Zbirka je namenjena talentovanim učenicima iz matematike i njihovim nastavnicima.

Zbirka je podeljena na 10 oblasti i ta podela je urađena po ličnom ukusu autora.

Autori su se potrudili da svaki zadatak bude autonoman i da se ne oslanja na druge zadatke. To istovremeno znači da se zadaci mogu rešavati preko reda.

EUGEN VEDRAL, profesor Pete beogradske gimnazije, prihvatio se recenzije ove knjige. Brižljivo je pregledao rukopis i dao nam niz sugestija za poboljšanje teksta, na čemu smo mu zahvalni. Na nekoliko mesta gde su data dva rešenja ili dva dokaza jedan od njih pripada profesoru VEDRALu.

Svesni smo da se ponegde potkrala greška. Teši nas poznati Njutnov aforizam: *U matematici i najmanje greške nisu za potcenjivanje.*

Autori će biti zahvalni čitaocima koji ukažu na greške i propuste u ovoj knjizi.

Autori:

Beograd, 25. aprila 2010.

MIRKO S. JOVANOVIĆ
email: msj@sbb.rs

DOBRILO Đ. TOŠIĆ
email: dobrilot@gmail.com.yu

SADRŽAJ

ZADACI I PROBLEMI

REŠENJA

Prilozi

ZADACI I PROBLEMI

I. TRANSFORMACIJE ALGEBARSKIH IZRAZA

1. Ako za brojeve a i b važi $a+b=-5$, tada izraz

$$\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+2a^2b+ab^2}+\frac{1}{a+b}-\frac{a^2-ab-2b^2}{(a+b)^3}\right)\frac{a}{a-b}-\frac{2a}{a^2-b^2}$$

ima za sve a i b istu vrednost, koju treba odrediti.

2. Uprostiti izraz

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

3. Uprostiti izraz

$$E=\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} \qquad (a\neq b\neq c\neq a).$$

4. Ako je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, dokazati da su bilo koja dva od brojeva a, b, c jednaki po apsolutnoj vrednosti, a suprotni po znaku.

5. Neka je $ax+by+cz=0$. Dokazati da izraz

$$I=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$

ne zavisi od x, y, z.

6. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $abc=1$, dokazati da je tada

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1.$$

7. Ako su x, y, z različiti celi brojevi, a n nenegativan ceo broj, dokazati da je vrednost izraza

$$S=\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

ceo broj.

8. Dokazati da iz

$$p+q+r=1, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0$$

sleduje

$$a^2+b^2+c^2=(pa+qb+rc)^2+(qa+rb+pc)^2+(ra+pb+qc)^2.$$

9. Ako je $a>b>c$, dokazati da je izraz $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}$ uvek pozitivan.

10. Naći najmanju vrednost izraza

$$A=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+x^3+\frac{1}{x^3}}$$

za $x>0$.

11. Uprostiti izraz $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{56}}+1)$.

12. Uprostiti izraze:

$$E(x)=\frac{x^5+2\,x^4+3\,x^3+3\,x^2+2\,x+1}{x^4+x^3-x-1},$$

$$F(a)=\frac{(a+1)^4-1}{a\,(a+2)}-(a+1)\sqrt{\frac{(a+1)(a^3+1)}{a^2-a+1}}\,.$$

Izračunati $E(\pm 1)$.

13. Uprostiti izraz

$$E=\frac{a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab})}-\frac{a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}-ab}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+\sqrt{ab}}\,.$$

Izračunati vrednost izraza E za $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$.

14. Naći sve nenegativne brojeve a, b, c za koje važi jednakost

$$\sqrt{a-b+c}=\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

15. Odrediti vrednost funkcije

$$f(x)=\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}} \quad \text{za} \quad x=\frac{2am}{b\,(1+m^2)}\,.$$

Izdvojiti one slučajeve (u zavisnosti od a i b) kada $f(x)$ ne postoji.

16. a) Dokazati identitet

$$E(x)=\frac{x^4+(a-1)\,x^3-(b+a-1)\,x^2+(a+b)\,x-b}{x^4-(b+1)\,x^3+(b+c+1)\,x^2-(b+c)\,x+c}=\frac{x^2+ax-b}{x^2-bx+c}.$$

b) Izračunati $E(x)$ za $x=-\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a+b}}$.

17. Uprostiti izraz $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

18. Odrediti racionalne brojeve r i s tako da je

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{r}-\sqrt[4]{s}.$$

19. 1° Racionalisati izraz $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

2° Primeniti rezultat pod 1° na razlomak

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}.$$

20. Šta je veće

$$\frac{2.000\,000\,000\,04}{(1.000\,000\,000\,04)^2+2.000\,000\,000\,04}$$

ili

$$\frac{2.000\,000\,000\,02}{(1.000\,000\,000\,02)^2+2.000\,000\,000\,02}?$$

21. Naći sve cele brojeve x za koje je $A=\dfrac{6\,(x^2-3\,px-x+3\,p)}{x^3-3\,px^2-x+3p}$ (p realno) ceo broj.

II. TEORIJA BROJEVA

22. Izračunati vrednost razlomka $\dfrac{166\ldots6}{66\ldots64}$ ako je poznato da brojilac i imenilac sadrže jednak broj cifara.

23. Napisati sve parove uzajamno prostih prirodnih brojeva x, y čiji je proizvod 415 800.

24. Dokazati da je $27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$ deljivo sa 26 460.

25. Dokazati da $n^2 + 3n + 5$ ni za koji ceo broj n nije deljivo sa 121.

26. Ako a nije deljivo sa 5, dokazati da je tada $a^8 + 3a^4 - 14$ deljivo sa 5.

27. Naći sve cele brojeve n takve da je $n^2 - 7n + 10$ deljivo sa $n - 3$.

28. Da li postoji takvo celo n da je $n^2 + n + 1$ deljivo sa 1955?

29. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da broj $n^8 - n^2$ nije deljiv sa 504.

30. Ako prirodan broj n nije deljiv sa 7, dokazati da je jedan od brojeva $n^3 + 1$ i $n^3 - 1$ deljiv sa 7.

31. Naći sve prirodne brojeve n za koje je broj $10^n + 8$ deljiv sa 72.

32. Dokazati da je broj $11^{100} - 1$ oblika $10^4 n + 6\,000$ i da je deljiv ca 6 000.

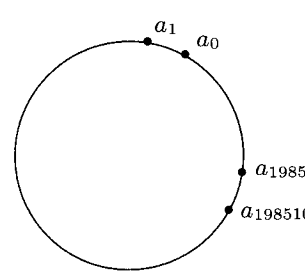
33. Za koji prirodan broj n je $n^4 + 4^n$ prost broj?

34. Broju 523 dopisati tri cifre tako da dobijeni šestocifreni broj bude deljiv sa 7, sa 8 i sa 9.

35. Za koje vrednosti broja k je izraz $N(n) = 3^{6n-1} + k \cdot 2^{3n-2} + 1$ deljiv sa 7 ako je n bilo koji prirodan broj?

36. Neka su a, b, c, d, e celi brojevi. Ako su $ae + b$ i $ce + d$ deljivi sa k, dokazati da je tada $ad - bc$ deljivo sa k.

37. Odrediti sve zajedničke delioce brojeva $5k + 6$ i $8k + 7$, gde je k ceo broj.



38. Duž kruga je ispisano 198512 cifara. Ako se cifre čitaju u smeru kretanja kazaljke na časovniku, počev od nekog mesta, tada će dobijeni broj sa 198512 cifara biti deljiv sa 17. Dokazati da će broj od 198512 cifara, ako se počne čitati sa bilo kog mesta, takođe biti deljiv sa 17.

39. Dokazati da se razlomak $\dfrac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ ne može skratiti ni za jednu celu vrednost a.

40. Ako su a, b, c dužine stranica trougla, dokazati da je

$$3\,(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4\,(ab + bc + ca).$$

41. Naći dvocifren broj takav da je kub zbira njegovih cifara jednak njegovom kvadratu.

42. Naći sve četvorocifrene brojeve koji kad im se dopiše s desne strane broj 400 daju sedmocifren broj koji je potpun kvadrat.

43. Naći najmanji multipl od 9 koji nema neparnih cifara.

44. 1° Naći skup A deset prirodnih brojeva takvih da nema šest različitih elemenata A čija je suma deljiva sa 6.

2° Da li je mogućno naći takav skup ako se "deset" zameni sa "jedanaest"?

45. Koji je najveći prirodni broj koji ne može biti izražen u obliku $5x + 7y$, gde su x i y prirodni brojevi?

46. Naći prirodne brojeve a i b takve da je

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - 1\right)^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}.$$

47. Naći beskonačan skup prirodnih brojeva A koji ima osobinu da zbir elemenata bilo kog konačnog podskupa od A nije kvadrat prirodnog broja.

48. Dat je četvorocifren broj $N = \overline{abcb}$. Kada se saberu svi različiti četvorocifreni brojevi koji imaju dve cifre b, jednu cifru a i jednu cifru c, dobija se broj $\overline{cbbba}$. Odrediti N.

NAPOMENA. $\overline{abcb}$ označava broj čija je cifra jedinica b, cifra desetica c, itd. Pretpostaviti da je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0; a \neq b \neq c \neq a$.

49. Merni brojevi stranica pravouglog trougla jesu celi brojevi. Dvostruka veličina površine trougla jednaka je trostrukoj veličini njegovog obima. Naći veličine stranica trougla.

50. Naći sve prirodne brojeve x (sa bar tri cifre), koji imaju osobinu: Broj x i njegov kvadrat x^2 završavaju se (u dekadnom sistemu) istom trojkom brojeva.

51. Nekom dvocifrenom broju doda se zbir njegovih cifara, a zatim se dobijenim brojem izvrši ista operacija. Na ovaj način dobija se dvocifren broj koji ima iste cifre kao početni broj, ali u obrnutom redosledu. Odrediti brojeve koji imaju ovu osobinu.

52. Naći četvorocifreni broj koji pri deobi sa 131 daje ostatak 112, a pri deobi sa 132 daje ostatak 98.

53. Naći sve trojke prirodnih brojeva čiji je zbir jednak njihovom proizvodu.

54. Odrediti četvorocifren broj koji je jednak četvrtom stepenu zbira svojih cifara.

55. Jedan broj se može rastaviti na dva faktora čija je razlika 6, a zbir njihovih četvrtih stepena 272. Koji je to broj?

56. Poređane po veličini cifre šestog stepena nekog prirodnog broja su: 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9. Odrediti taj broj.

57. Odrediti poslednje dve cifre broja $77^{77^{77}}$.

58. Naći 5 poslednjih cifara od $5^{5^{5^{5^{5}}}}$.

59. Odrediti poslednjih pet cifara broja $N = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{5^{\overbrace{55\cdots5}^{m \text{ cifara}}}}}}}$ (sa n petica u kuli).

60. Koje su dve poslednje cifre broja 3^{1995}?

61. Neki prirodan broj n ima sve cifre jednake 3 i deljiv je sa 383. Naći poslednjih pet cifara broja $n/383$.

62. Koliko postoji prirodnih brojeva u opsegu od 1 do 1 000 000 koji su kvadrati, kubovi ili istovremeno kvadrati i kubovi?

63. Koji je najveći paran prirodan broj koji ne može biti prikazan kao zbir dva neparna složena prirodna broja?

64. Kvadrat nekog prirodnog broja je šestocifren broj koji se sastoji, kada se zasebno posmatraju dve po dve cifre, od tri dvocifrena broja. Prvi i treći od njih su jednaki, a srednji je dva puta manji. Odrediti broj sa ovom osobinom.

65. Broj 24 ima 8 delilaca (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 i 24). Naći najmanji broj koji ima 30 delilaca.

66. Ako tri prosta broja, veća od 3, obrazuju aritmetičku progresiju, dokazati da je diferencija progresije deljiva sa 6.

67. Ako je $n \geq 3$, dokazati da zbir n uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti prost broj.

68. Ako je n prost broj, dokazati da su tada svi koeficijenti, osim prvog i poslednjeg, u razvoju $(x+a)^n$ deljivi sa n.

69. Ako je n stepen od 2, dokazati da su svi koeficijenti u razvoju $(1+x)^n$, izuzimajući prvi i poslednji, parni brojevi.

70. Dokazati da između 6 celih brojeva postoji par čiji su zbir ili razlika deljivi sa 9.

71. Neka je A proizvoljan skup od 20 različitih celih brojeva biranih iz aritmetičke progresije $1, 4, 7, \ldots, 100$. Dokazati da moraju postojati dva različita cela broja u A čija je suma 104.

72. Dokazati da je u Fibonačijevom[1] nizu svaki član čiji je indeks deljiv sa 12 takođe deljiv sa 12.

73. Ako su m i n prirodni brojevi i m neparan, dokazati da je

$$\mathrm{NZD}\,(2^m - 1, 2^n + 1) = 1.$$

74. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $2\,(m^2 + mn + n^2)$ kvadrat prirodnog broja.

75. Dato je $2^n = 10b + a$. Ako je $n > 3$, dokazati da je ab deljivo sa 6. Ovde su n, a, b celi pozitivni brojevi, $a < 10$.

76. Dokazati da ne postoje celi brojevi koji se prebacivanjem početne cifre na kraj povećavaju 5 puta.

77. Dokazati da se među šest proizvoljno izabranih uzastopnih prirodnih brojeva uvek može naći broj koji je uzajamno prost u odnosu na ostale.

78. Dokazati da šestocifren broj, koji se u dekadnom sistemu označava sa $xyxyxy$, gde su x i y cifre, nema prost činilac veći od 97.

79. Ako se brojevi a i b mogu predstaviti u obliku $x^2 - 5y^2$, dokazati da se i broj ab takođe može predstaviti u tom obliku.

80. Dokazati da u nizu prirodnih brojeva postoji proizvoljno veliki interval koji ne sadrži proste brojeve.

81. Rešiti jednačinu $x! + y! + z! = \overline{xyz}$, gde su x, y i z prirodni brojevi i $\overline{xyz}$ označava trocifreni broj.

82. Naći sva celobrojna rešenja jednačine $y^k = x^2 + x$, gde je k prirodan broj veći od 1.

83. Naći sve cele brojeve x za koje je izraz $y = -6\,x^2 + 167\,x + 4\,823$

a) prost broj, b) što veći prirodan broj, c) što manji prirodan broj.

84. Naći celobrojna rešenja jednačine $xy + 3x - 5y = -3$.

85. Dati paran broj $2k$ rastaviti na zbir dva relativno prosta prirodna broja x i y tako da proizvod xy bude najveći.

86. Pokazati kako se 1993 izražava pomoću zbira prirodnih brojeva

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1993$$

tako da je proizvod $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ najveći.

[1]Fibonači (Leonardo da Pisa, zvani Fibonacci (oko 1170-posle 1228)) italijanski matematičar, prvi je u Evropi uveo arapsko-indijsku numeraciju.

III. JEDNAČINE. NEJEDNAČINE. SISTEMI JEDNAČINA

87. Dokazati da jednačina $\dfrac{A^2}{x-a}+\dfrac{B^2}{x-b}=1$ (A, B, a, b realni brojevi) ima realna rešenja.

88. Rešiti jednačinu $\left|\dfrac{x^2+2\,x-24}{x^2-9\,x+20}\right|=10.$

89. Po x rešiti jednačinu

$$\frac{(a+b)(c-x)}{a^2}-\frac{(b+c)(x-2c)}{bc}-\frac{(c+a)(c-2x)}{ac}=\frac{(a+b)c}{ab}+2.$$

Posebno razmotriti slučaj $a:b:c=6:3:4$.

90. Rešiti jednačinu $x^4+4x-1=0$.

91. Rešiti jednačinu $(5-x)^4+(x-2)^4=17$. Takođe rešiti opštiju jednačinu $(a-x)^4+(x-b)^4=c$.

92. Rešiti jednačinu $(3x+2)^4+(2x-4)^4=(2x+3)^4+(4x-2)^4$.

93. Koliko negativnih korena ima jednačina $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$?

94. Naći sve proste brojeve p i q za koje jednačina $5x^2-px+q=0$ ima različite racionalne korene.

95. Odrediti potrebne i dovoljne uslove koje moraju zadovoljavati realni koeficijenti a, b, c, d tako da jednačine $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$ imaju jedan zajednički pozitivan koren i da preostali koren prve jednačine bude veći od preostalog korena druge.

96. Data je jednačina $ax\,(x-1)+(b-c)\,x+c=0$.

a) Odrediti vrednost zbira kubova njenih korena.

b) Ako su a, b, c stranice trougla, dokazati da je trinom na levoj strani jednačine pozitivan.

97. Ako su sva rešenja jednačine $ax^3+bx^2+cx+d=0$ realna i pozitivna, dokazati da je $b^2\geq 3\,ac\wedge ad<0$.

98. Dokazati da zbir s korena jednačine

$$x^2-\frac{1}{x^2}-\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=0\quad(m>0)\tag{1}$$

nije manji od 2.

U slučaju kada je $s = 2$, dokazati da koreni jednačine (1) zadovoljavaju jednakost

$$\frac{x^{12} - 2x^9 + 2x^3 - 1}{(x^2 + x + 1)^3(x^2 - x + 1)} = 0.$$

99. a) Za jednačinu

$$(1) \qquad x^3 + amx^2 + ax + an = 0 \qquad (a, m, n \in \mathbb{R})$$

odrediti vrednost izraza

$$(2) \qquad s = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2.$$

b) Dokazati da ako jednačina

$$(3) \qquad 2mx^2 + 2x + n = 0$$

ima imaginarna[1] rešenja, tada jednačina (1) ima takođe imaginarnih rešenja.

100. Ako su a, b, c koreni jednačine $x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$, koliko je (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; (b) $a^3 + b^3 + c^3$?

101. Data je jednačina

$$x^4 + (5 - 3m)\,x^3 + 2\,(m^2 - 2m - 2)\,x^2 + (5 - 3m)\,x + 1 = 0.$$

a) Rešiti jednačinu; b) odrediti skup vrednosti parametra m ($\in \mathbb{R}$) tako da koreni jednačine budu realni.

102. Realni brojevi α i β zadovoljavaju jednačine

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0, \qquad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

Naći $\alpha + \beta$.

103. Dokazati da vrednosti x koje zadovoljavaju nejednačinu

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} > 1$$

formiraju disjunktne intervale. Kolika je dužina tih intervala?

104. Za koje vrednosti λ jednačina

$$(\lambda - 1)\,x^2 + (2\lambda + 7)\,x + 5\,(2\lambda + 7) = 0$$

ima bar jedan realan koren?

[1] Imaginaran broj je kompleksan broj čiji je imaginarni deo različit od nule.

105. Rešiti nejednačinu $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2$, gde je a pozitivan broj.

106. Naći sve realne brojeve p za koje nejednačina $x+\sqrt{1+px-2p}\le 1$ ima bar jedno realno rešenje.

107. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{2-5x-3x^2}+2x>2x\cdot 3^x\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2 3^x.$$

108. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9.$$

109. Rešiti jednačinu $\dfrac{1}{\sqrt{11-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{4}{3}$.

110. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x-x^2}+\sqrt{2x^2-x-1}=1.$$

111. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

112. Rešiti jednačinu $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$.

113. Rešiti jednačinu $x-\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}=\dfrac{2}{x+3}$.

114. Rešiti jednačinu $\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1$.

115. Rešiti jednačinu

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+7.$$

116. Rešiti jednačinu $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{10}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}-x}=0$.

117. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

118. Naći sva realna rešenja jednačine $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

119. Rešiti nejednačinu $\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2+3x-4}\leq\sqrt{4x^2-5x+1}$.

120. Rešiti jednačinu

$$\left[\frac{3x-1}{4}\right]+\left[\frac{3x+1}{4}\right]+\left[\frac{3x-1}{2}\right]=\frac{6x+3}{5}, \tag{1}$$

gde je $[t]$ oznaka za ceo deo realnog broja t.

121. Rešiti jednačinu $x^3-[x]=3$, gde $[x]$ označava najveću celu vrednost od x.

122. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{array}{llll}
(1) & x_1+x_2+x_3=6, & (5) & x_5+x_6+x_7=-9,\\
(2) & x_2+x_3+x_4=9, & (6) & x_6+x_7+x_8=-6,\\
(3) & x_3+x_4+x_5=3, & (7) & x_7+x_8+x_1=-2,\\
(4) & x_4+x_5+x_6=-3, & (8) & x_8+x_1+x_2=2.
\end{array}$$

123. Date su linearne jednačine:

$$px-2y=2p-1,\quad 2x+py=p-1,\quad (p-1)x+y=p+1,$$

sa nepoznatim x i y. Naći sve realne brojeve p za koje navedene tri jednačine imaju zajedničko rešenje i odrediti to rešenje.

124. Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+1}{x+y-1}+\frac{y+z+2}{y+z-3}+\frac{z+x+3}{z+x-2}&=\frac{3}{2},\\
\frac{1}{x+y-1}+\frac{1}{y+z-3}-\frac{2}{z+x-2}&=0,\\
\frac{1}{x+y-1}-\frac{2}{y+z-3}-\frac{1}{z+x-2}&=0.
\end{aligned}$$

125. Rešiti sistem

$$x+\frac{1}{y}=2-(y-z)^2,\quad y+\frac{1}{z}=2-(x-y)^2,\quad z+\frac{1}{x}=2-(z-x)^2$$

u skupu pozitivnih realnih brojeva.

126. Rešiti sistem jednačina

$$x^2=a+(y-z)^2,\quad y^2=b+(z-x)^2,\quad z^2=c+(x-y)^2\qquad (abc\neq 0).$$

127. Rešiti sistem jednačina

$$(1)\quad x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=a,\qquad (2)\quad y\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)=b,\qquad (3)\quad z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=c.$$

128. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y^2 + yz + z^2 &= a^2, \\ x^2 + xz + z^2 &= b^2, \\ x^2 + xy + y^2 &= c^2 \end{aligned} \qquad (a,\, b,\, c > 0).$$

129. Odrediti sve cele brojeve x i y koji zadovoljavaju jednačinu

$$(3x + y)(x + y) = p,$$

gde je p dati prost broj.

130. Naći vrednosti x, y, z koje nisu sve tri istovremeno jednake nuli, a koje zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\begin{aligned} (x+1)(3-4y) &= (6x+1)(3-2y), \\ (4x-1)(z+1) &= (x+1)(z-1), \\ (3-y)(z-2) &= (1-3y)(z-6). \end{aligned}$$

131. Rešiti sistem

$$8x^2 = 18y + 7xy^2, \qquad 8y^2 = 18x - 7x^2y.$$

132. Naći sva realna rešenja sistema:

$$x^3 + y^3 = 1, \quad x^4 + y^4 = 1.$$

133. Rešiti sistem jednačina:

$$105\,(x+y) = 120\,(y+z) = 168\,(z+x) = xyz.$$

134. Rešiti sistem jednačina:

$$x^3y^2z = 2, \quad y^3z^2u = 8, \quad z^3u^2x = 32, \quad u^3x^2y = 8.$$

135. Rešiti sistem jednačina

$$x + y + z = m, \quad xy + yz + zx = m, \quad xyz = 1$$

i odrediti vrednosti parametra m tako da rešenja sistema budu realna.

136. Rešiti sistem

$$x + 2y + 4z = 12, \quad xy + 4yz + 2xz = 22, \quad xyz = 6.$$

137. U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$y(x+y)^2 = 9, \qquad y(x^3-y^3) = 7.$$

138. Rešiti sistem jednačina:

$$\frac{x+y}{2p+4} + \frac{y+p^2-4}{p^2-4} = 1, \qquad (p-2)^2x - 2py = 2p^2x,$$

gde je p dat realan broj.

139. Dat je sistem jednačina:

$$ax+by+cz = d, \quad bx+cy+az = d, \quad cx+ay+bz = d,$$

u kojima su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $a+b+c=0$. Naći sva rešenja datog sistema.

140. Rešiti sistem jednačina

$$3\,(x^3+y^3) - 13\,(x^2+y^2) + 31\,(x+y) - 55 = 0, \quad xy = 2.$$

141. Rešiti sistem jednačina

$$a^2+bc = 0, \quad ab+bd = 0, \quad ac+cd = 0, \quad bc+d^2 = 0.$$

142. Poznato je da sistem jednačina

$$x+y+z = 3, \quad x^3+y^3+z^3 = 15, \qquad x^4+y^4+z^4 = 35$$

ima realna rešenja x, y, z koja zadovoljavaju uslov $x^2+y^2+z^2 < 10$. Naći $x^5+y^5+z^5$ za ovo rešenje.

143. Odrediti realna rešenja sistema

$$x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3, \quad y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0.$$

144. Odrediti realna rešenja sistema

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4y} = x^2+y^2, \qquad \frac{2}{x} - \frac{1}{2y} = -x^2+y^2.$$

145. Naći sva rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 10,\\ x^2+y^2+z^2+w^2 &= 30,\\ x^3+y^3+z^3+w^3 &= 100,\\ xyzw &= 24. \end{aligned}$$

146. Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{x_2x_3x_4\cdots x_n}{x_1} &= a_1, \\ \frac{x_1x_3x_4\cdots x_n}{x_2} &= a_2, \qquad (a_i > 0). \\ &\vdots \\ \frac{x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}}{x_n} &= a_n \end{aligned}$$

147. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2. \end{aligned}$$

148. Rešiti jednačinu $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

149. Ako su $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$ i $b^2 + c^2 = a^2$, rešiti jednačinu

$$b^{\log_a x} + c^{\log_a x} = x.$$

150. Rešiti jednačinu $(5^x - 2^{x-2})^2 + 2\log_{10}(5^x + 2^{x-2}) = x$.

151. Rešiti jednačinu $2^{\log_3 x} + 3^{\log_x 2} = 4 \quad (x > 1)$.

152. Rešiti jednačinu $\log_{10}^4 x - 3\sqrt{3\log_{10}^2 x + 4} = 4$.

IV. FUNKCIJE. NIZOVI

153. Odrediti najveću i najmanju vrednost koju može imati izraz $3x + y + 3z$ ako je $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

154. Ako realni brojevi x i y ispunjavaju uslov $x + y = 1$, odrediti maksimalnu vrednost izraza

$$A(x, y) = x^4y + xy^4 + x^3y + xy^3 + x^2y + xy^2.$$

155. Ako su a i b realni brojevi takvi da je $a^2 + 4b^2 = 4$, koja je najveća vrednost izraza $E = 3a^5b - 40a^3b^3 + 48ab^5$?

156. Dato je da su x, y, z pozitivni realni brojevi koji ispunjavaju uslov $xyz = 32$. Naći minimalnu vrednost izraza $A = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$.

157. Naći maksimum i minimum funkcije $y = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$.

158. Data je funkcija $y = x^3 + px + q$, gde su p i q realni brojevi.

1° Ako je M maksimum i m minimum date funkcije, dokazati da je

$$Mm = q^2 + \frac{4}{27}p^3.$$

2° Odrediti p i q tako da $x = -2$ bude nula date funkcije i $M - m = 4$.

159. Neka je x realan broj $(0 < x < \pi)$. Dokazati da je za sve prirodne brojeve n suma

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

pozitivna.

160. Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ i $f(0) = f(1)$. Ako je $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$ za svako $x_1, x_2 \in [0,1]$, dokazati da je tada $|f(x_2) - f(x_1)| < 1/2$.

161. Odrediti funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takvu da je $f(0) = 1$ i

$$f\big(f(n)\big) = f\big(f(n+2) + 2\big) = n$$

za svako $n \in \mathbb{Z}$.

162. Naći sve funkcije f takve da je

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

za sve realne vrednosti x i y.

163. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava uslove:

(1) $$f(10 + x) = f(10 - x) \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R},$$

(2) $$f(20 + x) = -f(20 - x) \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Dokazati da je f neparna i periodična funkcija.

164. Realna funkcija f, koja nije identički jednaka nuli, za svako $x \in \mathbb{R}$ zadovoljava jednakost

(1) $$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3}\, f(x).$$

Dokazati da je f periodična funkcija. Dati primer bar jedne takve funkcije.

165. Funkcija f zadovoljava uslove: 1° $f(0)=1$; 2° za bilo koji prirodan broj n važi jednakost

$$1+f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=f(n).$$

Izračunati zbir

$$s=f(0)^2+f(1)^2+f(2)^2+\cdots+f(n)^2.$$

166. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takva funkcija koja za neku pozitivnu konstantu a ispunjava jednakost

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\big(f(x)\big)^2}.$$

1° Dokazati da je f periodična funkcija.

2° Za $a=1$ dati primer funkcije, različitu od konstante, koja zadovoljava datu funkcionalnu jednačinu.

167. U ravni Oxy šrafirati oblast $A=\{(x,y)|\log_x(\log_y x)>0)\}$.

168. Rešiti jednačinu

$$10^{-3}x^{\log_{10}x}+x\left(\log_{10}^2 x-2\log_{10}x\right)=x^2+3x.$$

169. Rešiti jednačinu $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x+2x-6=0$.

170. Odrediti pozitivna rešenja jednačine $x^2-x-1=2^x-\log_2(x^2+2^x)$.

171. Rešiti jednačinu $x=\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4x}}}$.

172. Rešiti jednačinu $\sqrt[5]{x^3+2x}=\sqrt[3]{x^5-2x}$ u skupu realnih brojeva.

173. Koliko rešenja ima jednačina $\log_{1/16}x=\left(\frac{1}{16}\right)^x$?

174. Rešiti sistem jednačina

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{27}\right)^y=\frac{5}{6}, \qquad \log_{1/4}x-\log_{1/27}y=\frac{1}{6}.$$

175. Rešiti sistem jednačina

$$2y-x=\sin x-\sin 2y,$$
$$\cos x+5\sin y=4.$$

176. Ako je $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, izračunati zbir $a_1+a_2+\cdots+a_{99}$.

177. Prirodni brojevi razvrstani su na sledeći način:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

1° Dokazati da je $n^3 + (n-1)^3$ zbir brojeva u n-toj vrsti.

2° Izračunati zbir n brojeva u koloni koja se nalazi u sredini $(1+3+7+13+\cdots)$.

178. Data je tablica

$$\begin{array}{lllllll} 1 & & & & & & \\ 2, & 3, & 4 & & & & \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7 & & \\ 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

Odrediti zbir brojeva u n-toj vrsti date tablice.

179. Dat je niz racionalnih brojeva

$$\frac{1}{2}, \frac{19}{20}, \frac{199}{200}, \frac{1999}{2000}, \frac{19999}{20000}, \ldots$$

Ako saberemo prvih 1000 članova datog niza, dobijamo decimalni broj. Odrediti zbir cifara tog broja.

180. Neka je (a_n) aritmetička progresija i S_n suma prvih n članova date progresije. Dokazati ekvivalenciju

$$\frac{S_n}{S_k} = \frac{n^2}{k^2} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_k} = \frac{2n-1}{2k-1}.$$

181. Neka su (a_n) i (b_n) dve aritmetičke progresije i neka A_n i B_n označavaju redom sume prvih n članova datih progresija. Dokazati da je

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{A_{2k-1}}{B_{2k-1}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

182. Naći izraz za n-ti član niza brojeva $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ako je $x_0 = a$, $x_1 = b$, a svaki x_k počev od x_2 je aritmetička sredina dva prethodna člana, tj.

$$x_k = \frac{1}{2}(x_{k-2} + x_{k-1}).$$

183. Definišimo $(x_n)_{n \geqq 1}$ induktivno sa $x_1 = 1$ i

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}.$$

Dokazati da $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ postoji i naći tu graničnu vrednost.

184. Dat je niz (x_n) takav da za svako $m, n \in \mathbb{N}$ važi nejednakost

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}.$$

Dokazati da je (x_n) aritmetička progresija.

V. KOMPLEKSNI BROJEVI. POLINOMI

185. Dat je kompleksan broj

$$z = \frac{3 - t^2}{1 + t^2} + i \, \frac{2t^2 + 4t + 2}{1 + t^2},$$

gde je t realan parametar. Odrediti geometrijsko mesto tačke $M(z)$.

186. Izračunati $E = \sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}$.

187. Kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 ispunjavaju uslove

$$z_1 + z_2 + z_3 \neq 0, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \quad |z_1| + |z_2| = |z_3| = 1.$$

Izračunati $|z_1 + z_2 + z_3|$.

188. 1° Neka se z_1 i z_2 nalaze na krugu poluprečnika r čiji je centar tačka O, tj. $z_1 = r(\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1)$, $z_2 = r(\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2)$, pri čemu pretpostavljamo da je $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$. Dokazati da je $|z_1 - z_2| = 2r \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$.

2° Neka je u krugu upisan konveksan četvorougao $A_1A_2A_3A_4$. Dokazati da je

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} + \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_2A_4} \tag{1}$$

(Ptolomejeva[1] teorema).

189. Odrediti a i b tako da polinom $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ bude potpun kvadrat.

---

[1] Klaudije Ptolomej (oko 100–178) starogrčki matematičar i astronom. Odredio je $\sin 1° = 0{,}017268\ldots$ (tačna vrednost je $0{,}017453\ldots$) i za $\pi = 3{,}14166\ldots$

190. Naći ceo broj a za koji se izraz $(x-a)(x-10)+1$ razlaže u proizvod $(x+b)(x+c)$ dva faktora sa celim brojevima b i c.

191. Odrediti najmanje prirodne brojeve p i x za koje izraz

$$\frac{x^2+2px+p^2-16}{p^2+px-4x-16}$$

ima vrednost 1.05.

192. Odrediti najveći zajednički delilac polinoma:

$$P(x)=x^5+x^4+x^2+x,\quad Q(x)=x^6+2\,x^5+2\,x^4+2\,x^3+2\,x^2+2\,x+1.$$

193. Odrediti a, b, c, d tako da budu istovremeno zadovoljeni uslovi:

a) $(ax+b)^2+(cx+d)^2=x^2+1$ za svako x,

b) $(ax+b)(cx+d)=2$ za $x=2$.

194. Razložiti na linearne faktore polinom

$$f(x)=2x^2-3xy-2y^2-x+7y-3$$

ili dokazati da je takvo razlaganje nemoguće.

195. Dokazati da je polinom $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ pozitivan za svako x.

196. Dokazati da je $P(x)=A\,(x^3-x)$ ($A=$const) jedini polinom koji zadovoljava jednakost

$$(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x). \tag{1}$$

197. Odrediti polinom trećeg stepena iz uslova $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)=n^4$.

198. Polinom $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ sa celobrojnim koeficijentima za $x=0$ i $x=1$ ima vrednosti $P_n(0)$ i $P_n(1)$ koje su neparni brojevi. Dokazati da jednačina $P_n(x)=0$ nema celobrojnih rešenja.

199. Odrediti ostatak deljenja binoma x^m+a^m ($m\in\mathbb{N}$) sa $(x+b)(x+c)$. Proučiti slučaj kada je $b=c=a$. Na osnovu dobijenog rezultata dokazati da važi relacija $169\,|\,12^m+(-1)^m(13\,m-1)$ ($m\in\mathbb{N}$).

200. Neka su $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ realni brojevi, gde je $n\geq 1$, i neka je

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

takvo da je $|f(0)|=f(1)$ i svaki koren α od f je realan i zadovoljava uslov $0<\alpha<1$. Dokazati da proizvod korena nije veći od $1/2^n$.

201. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ realni brojevi. Pretpostavimo da su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti i da postoji realan broj α takav da proizvod

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n)$$

ima vrednost α za svako i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Dokazati da postoji realan broj β takav da proizvod

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_n + b_j)$$

ima vrednost β za svako j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

VI. GEOMETRIJA. ANALITIČKA GEOMETRIJA

202. U paralelogramu $ABCD$, čije su stranice $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ $(a \leq b)$ i unutrašnji ugao $\alpha\,(\leq 90^\circ)$ kod temena A, konstruisane su simetrale unutrašnjih uglova.

1° Izračunati dijagonalu pravougaonika kojeg obrazuju ove simetrale.

2° Koji uslov treba da ispunjavaju a i b da se pravougaonik nalazi u paralelogramu?

203. U ravni je dat konveksan šestougao $ABCDEF$, pri čemu je $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$. Da li se simetrale uglova $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle E$ datog šestougla seku u jednoj tački?

204. U trouglu ABC visina BD i medijana BE dele ugao B na tri jednaka dela. Odrediti uglove trougla.

205. Poluprečnik kruga upisanog u trouglu iznosi 4. Jedna dodirna tačka deli stranicu trougla na odsečke dužine 6 i 8. Odrediti dužine stranica trougla. (Zadatak Luke Pačolija[1]).

206. U trouglu ABC je $\alpha = \sphericalangle A = 75^\circ$ i $AB = 2CH$, gde je $CH = h$ visina. Odrediti $\beta = \sphericalangle B$.

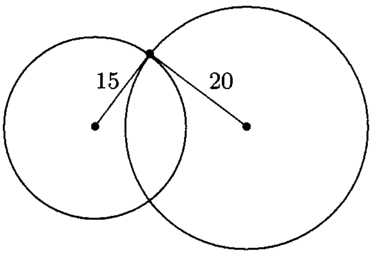
207. Dokazati da je površina oštrouglog trougla jednaka proizvodu poluprečnika kruga opisanog oko trougla i polovine obima trougla čija su temena ortogonalne projekcije ortocentra na stranice trougla.

208. Stranice a, b, c trougla ABC obrazuju aritmetički niz sa diferencijom $d = \rho/4$, gde je ρ poluprečnik upisanog kruga u trouglu ABC. Odrediti odnos $a : b : c$.

[1]Luka Pačoli (Luca Pacioli (1445–1517)), italijanski matematičar, pronalazač dvojnog knjigovodstva, učitelj i drug Leonarda da Vinčija. Preveo na italijanski i izdao Euklidove elemente 1509. godine.

209. Odrediti ugao između dijagonala jednakokrakog trapeza ako su odsečci dijagonala $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 14$ cm, a krak $c = 13$ cm. Koliki su uglovi na osnovici?

210. Izračunati visinu trapeza čije su paralelne stranice 15 i 11, a neparalelne stranice 5 i 7.



211. Krug poluprečnika 15 seče se sa krugom poluprečnika 20 pod pravim uglom. Posmatrajmo dve oblasti koje se dobijaju kada se iz svakog kruga ukloni njihova zajednička oblast. Kolika je razlika površina te dve oblasti?

212. Izračunati površinu krivolinijskog trougla koji obrazuju luci tri kruga istih poluprečnika r koji se seku, dva po dva, pod pravim uglom.

213. U pravilnom petouglu povučene su dve dijagonale koje se seku. Dokazati da presečna tačka deli svaku od te dve dijagonale na dva dela takva da je veći deo jednak stranici petougla.

214. Neka je tačka M sredina osnovice AB trapeza $ABCD$. Na dijagonali AC unutar trapeza uzeta je proizvoljna tačka E. Prave BC i ME seku se u tački F, prava FD seče pravu AB u tački G, a prava DE seče pravu AB u tački H. Dokazati da tačka M polovi duž GH.

215. U prostoru je data zatvorena izlomljena linija $A_1A_2\cdots A_n$. Jedna ravan seče sve njene segmente, i to: A_1A_2 u tački B_1, A_2A_3 u tački $B_2, \ldots,$ A_nA_1 u tački B_n. Dokazati da je

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\,\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$$

216. Neka je P proizvoljna tačka unutar datog trougla ABC. Prave AP i BP seku stranice BC i AC redom u tačkama M i N. Označimo sa M_1, N_1, P_1, C_1 ortogonalne projekcije tačaka M, N, P, C na stranicu AB. Dokazati da je

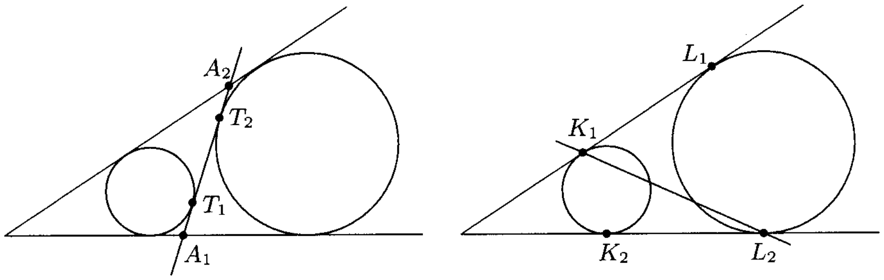
$$\frac{1}{MM_1} + \frac{1}{NN_1} = \frac{1}{PP_1} + \frac{1}{CC_1}\,.$$

217. U krugu su povučene dve međusobno normalne tetive. Ako su a, b, c, d dužine odsečaka tih tetiva od presečne tačke do periferije kruga, dokazati da je površina kruga

$$P = \frac{\pi}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

218. 1° U ugao su upisana dva kruga čija zajednička unutrašnja tangenta T_1T_2 (T_1 i T_2 tačke dodira) preseca krake ugla u tačkama A_1 i A_2. Dokazati da je $A_1T_1 = A_2T_2$.

2° U ugao su upisana dva kruga. Jedan od njih dodiruje krake ugla u tačkama K_1 i K_2, a drugi u tačkama L_1 i L_2. Dokazati da dati krugovi odsecaju na pravoj K_1L_2 jednake tetive.



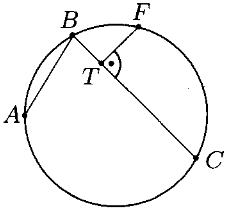
219. Na datom krugu uzete su tačke A, B, C tako da je $CA = CB$. Neka su D i E redom proizvoljne tačke na manjim lukovima CA i CB. Ako su M, N, P, Q redom ortogonalne projekcije tačke C na pravama BD, AD, AE, BE, dokazati da je $MQ = NP$.

220. Dat je krug k i njegov prečnik AB. U tački B konstruisana je tangenta t_1 na krug k. Iz tačke P na tangenti t_1 konstruisana je tangenta t_2 na krug k. Tačku dodira tangente t_2 i kruga k označimo sa C. Neka je T ortogonalna projekcija tačke C na prečnik AB. Dokazati da AP polovi duž CT.

221. Kroz datu tačku P van kruga k prolazi prava koja seče krug u tačkama A i B tako da je $PA = AB = 1$. Tangente iz tačke P dodiruju krug k u tačkama C i D. Duži AB i CD seku se u tački M. Koliko je PM?

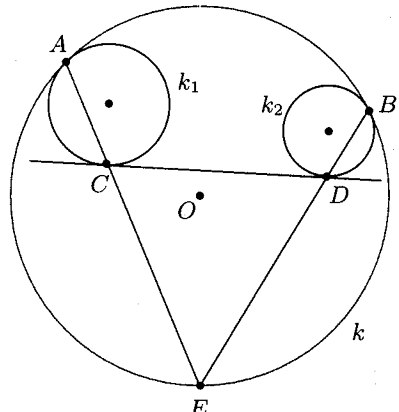
222. Krug k_2 dodiruje iznutra krug k_1 u tački A. Tangenta kruga k_2 u proizvoljnoj tački D različitoj od A preseca krug k_1 u tačkama B i C. Dokazati da je AD simetrala ugla BAC.

223. Neka T označava ortogonalnu projekciju sredine F kružnog luka ABC nad izlomljenom linijom ABC. Dokazati da T polovi datu izlomljenu liniju, tj. da je $AB + BT = TC$.



224. Dva kruga k_1 i k_2 seku se u tačkama A i B. Tangenta u tački A na krug k_1 seče krug k_2 u tački C, a tangenta u tački B na krug k_2 seče krug k_1 u tački D. Dokazati da je $BD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot AD$.

225. Disjunktni krugovi k_1 i k_2 dodiruju krug k iznutra u tačkama A i B. Zajednička tangenta t krugova k_1 i k_2 dodiruje krugove u tačkama C i D, tako da su krugovi k_1 i k_2 sa suprotne strane tangente t u odnosu na centar O kruga k. Neka je E presek duži AC i BD. Dokazati da E pripada krugu k.



226. Dokazati da je u svakom konveksnom četvorouglu, upisanom u krug, proizvod dijagonala jednak zbiru proizvoda suprotnih stranica (Ptolomejeva teorema).

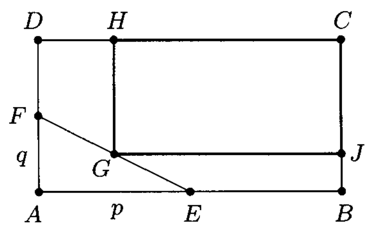
227. Krug koji prolazi kroz teme A paralelograma $ABCD$ seče stranice AB, AD i dijagonalu AC ili njihove produžetke u tačkama F, H i G respektivno. Dokazati da je $AB \cdot AF + AD \cdot AH = AC \cdot AG$.

228. Dat je četvorougao $ABCD$ čije se dijagonale seku pod pravim uglom u tački M. Dokazati da 8 tačaka u kojima normale iz tačke M na prave AB, BC, CD, DA seku stranice četvorougla, leže na jednom krugu.

229. Neka krug k upisan u trougao ABC dodiruje stranice trougla u tačkama E, F i G. Rastojanja proizvoljne tačke P kruga k od stranica trougla su a, b i c a njena rastojanja od pravih FG, EG i FG su e, f, g. Dokazati da je $abc = efg$.

230. Četiri kruga raspoređena su tako da svaki od njih dodiruje spolja po dva kruga. Dokazati da dodirne tačke leže na jednom krugu.

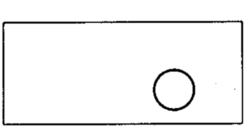
231. Dat je pravougaonik $ABCD$ ($AB = a$, $AD = b$). Data je takođe tačka E na stranici AB ($EA = p$) i tačka F na stranici AD ($AF = q$). Na duži EF odrediti tačku G tako da pravougaonik $GJCH$ ima maksimalnu površinu.



232. Dokazati da od svih trouglova date osnovice i date površine jednakokraki trougao ima najmanji obim.

233. Kroz tačku M, koja leži unutar datog ugla, postaviti pravu koja od datog ugla odseca trougao najmanje površine.

234. Na slici je dat pravougaoni komad papira iz koga je izrezan krug. Objasniti kako treba pravolinijski raseći papir da dva dela imaju istu površinu.



235. Dat je krug $k\ (S, r)$ i prava p, čija udaljenost od centra S iznosi d. Konstruisati kvadrat čija jedna stranica leži na pravoj p, a suprotna stranica je tetiva kruga k. Diskusija.

236. Dat je krug $k\,(S,\ r = 4\,\text{cm})$. Upisati u njega jednakokraki trapez tako da se iz tačke S njegovi kraci vide pod uglom od $90°$ i da produženi kraci zatvaraju ugao od $45°$.

237. Dat je ugao i tačka van njega. Kroz datu tačku postaviti pravu tako da sa kracima datog ugla obrazuje trougao obima $2s$.

238. Na listu papira konstruisan je pravilan šestougao dužine stranice 1. Koristeći se samo lenjirom konstruisati duž dužine $\sqrt{7}$.

239. Data je duž AB i prava m paralelna datoj duži. Naći sredinu duži AB koristeći se samo lenjirom, tj. crtajući samo prave.

240. Dat je krug k, njegov prečnik AB i tačka C van prave AB. Ako centar kruga nije poznat, koristeći se samo lenjirom konstruisati normalu iz tačke C na pravu AB. Razmotriti sledeće slučajeve: $1°$ tačka C je van kruga k; $2°$ tačka C je u krugu k; $3°$ tačka C pripada krugu k.

241. Pravilna trostrana piramida, čija je bočna ivica s, presečena je sa ravni Π koja prolazi kroz ivicu osnove i ortogonalna je sa naspramnom bočnom ivicom.

$1°$ Izračunati zapreminu piramide ako se zna da je površina preseka ravni Π i piramide jednaka S.

$2°$ Neka je $a = s\sqrt{3}/3$, gde je a stranica osnove. Izračunati $\sin\alpha$, gde je α ugao koji zaklapa ravan Π sa osnovom piramide.

242. Dve strane tetraedra $SABC$ (S je vrh tetraedra) su jednakostranični trouglovi CSA i BSC čije su stranice a. Ostale dve strane su jednakokraki pravougli trouglovi ($\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACB = 90°$). Odrediti

$1°$ Zapreminu tetraedra.

$2°$ Poluprečnik r sfere upisane u tetraedar.

243. Dat je jednakostranični trougao ABC stranice a. Nad njegovim stranicama, kao hipotenuzama, konstruisani su sa iste strane ravni trougla jednakokrako-pravougli trouglovi APB, BQC, CRA tako da su ravni ovih trouglova normalne na ravni trougla ABC.

$1°$ Izračunati površinu i zapreminu poliedra $ABCPQR$.

$2°$ Posmatrani poliedar presečen je jednom ravni koja je paralelna ravni trougla ABC a na rastojanju d od nje. Koji se poligon dobija u tom preseku i kolika je površina tog preseka?

244. Poluprečnik lopte upisane u zarubljenu kupu je R, a poluprečnik opisane lopte je $R\sqrt{30}$. Naći ugao između izvodnice i osnove kupe.

245. Na kojoj krivoj leži skup centara krugova kojima je tetiva na x-osi jednaka $2a$ a tetiva na y-osi jednaka $2b$.

246. Date su dve uzajamno normalne prave. Odsečak stalne dužine klizi svojim krajevima po datim pravama. Naći u ravni skup težišta trouglova koje ova duž obrazuje sa datim pravama.

247. Stranica $AB = c$ trougla ABC je nepomična, dok se stranica $AC = b$ obrće oko temena A u ravni trougla ne menjajući svoju dužinu. Naći jednačinu skupa sredina stranice BC.

248. Dat je trougao ABC i krug k sa centrom u težištu datog trougla. Ako je $P \in k$ proizvoljna tačka, dokazati da je zbir $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \text{const}$, tj. nezavisan je od izbora tačke P na krugu k.

249. Odrediti geometrijsko mesto tačaka P u ravni datog trougla ABC tako da je $PA^2 = PB^2 + PC^2$.

250. Nad prečnikom AB kruga konstruisan je pravougaonik $ABCD$ čija je visina AD jednaka stranici kvadrata upisanog u tom krugu. Temena D i C spojena su sa proizvoljnom tačkom N kruga. Duži DN i CN seku prečnik AB redom u tačkama E i L. Dokazati da je $AL^2 + BE^2 = AB^2$ (Fermaov[1] zadatak).

251. Dokazati da je proizvod odstojanja žiža od tangente na elipsi (hiperboli) konstantan.

252. Odrediti geometrijsko mesto tačaka u xy-ravni iz kojih se elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vidi pod pravim uglom.

253. Odrediti geometrijsko mesto tačaka sredina tetiva hiperbole $x^2 - 4y^2 = 16$ koje zaklapaju sa x-osom ugao od $\pi/4$.

254. Neka je P proizvoljna tačka na elipsi sa žižama F_1 i F_2 i koja se razlikuje od temena na velikoj osi elipse. Dokazati da je proizvod

$$\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle PF_1F_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle PF_2F_1}{2}$$

nezavisan od tačke P.

255. U krug poluprečnika r upisan je konveksan petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$. Dokazati da težišta T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 četvorouglova $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_2A_3A_4$ pripadaju jednom krugu poluprečnika $r/4$.

Napomena. Ako je dat četvorougao $A_1A_2A_3A_4$ i označimo redom sa M_1, M_2, M_3, M_4 sredine stranica $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$, tada se duži M_1M_3 i M_2M_4 seku u težištu T_5.

---

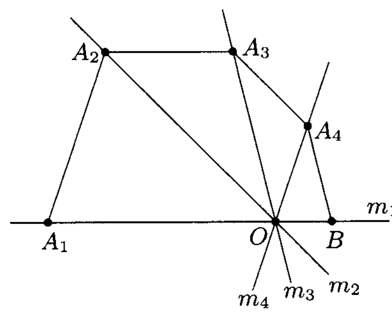
[1] Pjer Ferma (Pierre Fermat (1601–1665)) veliki francuski matematičar, najpoznatiji po velikoj Fermaovoj teoremi koja je dokazana tek 1994. godine

VII. VEKTORI

256. Neka su A_1, $A_2, \ldots, A_8$ proizvoljne tačke. Označimo sa M_1, $M_2, \ldots, M_8$ redom sredine duži A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_8A_1$. Neka su P_1, $P_2, \ldots, P_8$ redom sredine duži M_1M_3, M_2M_4, M_3M_5, M_4M_6, M_5M_7, M_6M_8, M_7M_1, M_8M_2. Dokazati da se duži P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7, P_4P_8 seku u jednoj tački.

257. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_6$ proizvoljne tačke. Označimo sa T_1, T_2, T_3, T_4 redom težišta trouglova $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$ i $A_5A_6A_1$. Dokazati da tačke T_1, T_2, T_3 i T_4 obrazuju paralelogram ili su kolinearne.

258. Date su četiri prave m_1, m_2, m_3, m_4 koje se seku u tački O. Kroz proizvoljnu tačku A_1 na pravoj m_1 povučena je prava paralelna pravoj m_4 koja seče m_2 u tački A_2, kroz A_2 povučena je prava paralelna sa m_1 koja seče m_3 u tački A_3, kroz A_3 povučena je prava paralelna sa m_2 koja seče m_4 u A_4 i kroz A_4 povučena je prava paralelna m_3 koja seče m_1 u tački B.



Dokazati da je $OB \leq \frac{1}{4} OA_1$.

259. Neka je O centar opisanog kruga i H ortocentar trougla ABC. Tada je $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (Hamiltonova[1] teorema).

260. U krugu k upisan je četvorougao $ABCD$. Neka je M proizvoljna tačka na krugu k. Sa H_1, H_2, H_3, H_4 označimo ortocentre trouglova MAB, MBC, MCD, MDA, a sa E i F redom sredine duži AB i CD. Dokazati da je $H_1H_2H_3H_4$ paralelogram i $H_1H_3 = 2 \cdot EF$.

261. Dat je tetivni petougao $ABCDE$. Označimo sa H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 redom ortocentre trouglova ABC, BCD, CDE, DEA, EAB, a sa M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 redom sredine stranica DE, EA, AB, BC, CD. Dokazati da se prave H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5 seku u jednoj tački.

262. Dat je četvorougao $ABCD$ takav da je $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Dokazati da je $AC \perp BD$.

263. U četvorouglu $ABCD$ je $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = \sqrt{3}$, $\measuredangle ABC = 120°$, $\measuredangle BCD = 90°$. Odrediti dužinu stranice AD.

264. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$. Neka su E i F redom sredine dijagonala AC i BD, G i H sredine stranica BC i DA. Ako je $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, dokazati da je tada

[1]Hamilton (William Rowan Hamilton (1805–1865)) veliki irski matematičar.

1° $4\,EF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2$,

2° $4\,GH^2 = a^2 + c^2 + e^2 + f^2 - b^2 - d^2$.

265. Dat je trougao ABC čije su stranice a, b, c, T težište, S centar i R poluprečnik opisanog kruga. Dokazati jednakost $ST^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

266. Date su dve mimoilazne duži. Odrediti geometrijsko mesto sredina duži koje spajaju svaku tačku prve sa svakom tačkom druge duži.

267. Ako su uglovi strana roglja 90°, 60°, 60°, odrediti uglove njegovih diedara.

VIII. NEJEDNAKOSTI. GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI

268. Dokazati da za $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq b$ važi nejednakost

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

269. Dokazati bez pomoći tablica da je $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

270. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ važi nejednakost

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

271. Dokazati nejednakosti:

1° $\log_{10}^2 9 + \log_{10}^2 11 > \log_{10} 98$.

2° $\ln(e^x - 1) \cdot \ln(e^x + 1) < x^2 \qquad (x > 0)$.

272. Ako $x, y, z \in \mathbb{R}$, dokazati da je

$$|x| + |y| + |z| - |x+y| - |y+z| - |z+x| + |x+y+z| \geq 0.$$

273. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a < b + c$, dokazati da je

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

274. Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, dokazati da je $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leqq 3$.

275. Ako su a, b i c pozitivni brojevi, dokazati da je

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Kada važi jednakost?

276. Dokazati da za pozitivne vrednosti a, b, c važe nejednakosti

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

pri čemu jednakosti važe samo za $a = b = c$.

277. Neka su a i b pozitivni brojevi manji od 1. Dokazati da je tada

$$1+a+b > 3\sqrt{ab}.$$

278. Dokazati nejednakost $(a+b)^4 \leq 8\,(a^4+b^4)$.

279. Ako su $a > 0$ i $b > 0$, dokazati nejednačinu $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

280. Ako je $a^2+b^2+c^2 = 1$ i $m^2+n^2+p^2 = 1$, dokazati da je

$$|am+bn+cp| \leq 1.$$

281. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 5, \quad a+b+c = 1.$$

282. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ realni brojevi, dokazati da važi nejednakost

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2 \leq m\,(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2).$$

283. Dokazati implikaciju:

$$(a_i > 0 \land a_i c_i - b_i^2 > 0,\ i = 1,2,\ldots,n) \Rightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) > 0.$$

284. Dokazati nejednakost

$$\log_\alpha(\alpha+1) > \log_{\alpha+n}(\alpha+n+1) \qquad (\alpha > 1,\ n \in \mathbb{N}).$$

285. Odrediti najveći realan broj C tako da važi

$$\frac{\big((x+y)^2-6\big)\big((x-y)^2+8\big)}{(x-y)^2} \geq C$$

za sve realne brojeve x i y ($x \neq y$) i $xy = 2$. Za koje uređene parove (x, y) važi jednakost?

286. Odrediti najmanju i najveću vrednost izraza $K = 5x - 6y + 7z$ ako su x, y, z nenegativni brojevi koji zadovoljavaju jednačine

$$4x+y+2z = 4, \qquad 3x+6y-2z = 6.$$

287. Sto pozitivnih brojeva $C_1, C_2, \dots, C_{100}$ zadovoljavaju uslove

$$C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_{100}^2 > 10\,000, \quad C_1 + C_2 + \cdots + C_{100} < 300.$$

Dokazati da među njima postoje bar tri broja čiji je zbir veći od 100.

288. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d} \qquad (a, b, c, d > 0).$$

289. Ako su a, b, c, d proizvoljni pozitivni brojevi, dokazati da važi nejednakost

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

290. Kolika je najmanja vrednost izraza

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}$$

gde su a, b, c pozitivni brojevi?

291. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) \qquad (a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n),$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $a_i/b_i = \text{const}$ $(i = 1, \dots, n)$.

292. Dokazati nejednakosti:

1° $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$, gde su $x_i \in \mathbb{R}$, $y_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$.

2° $\displaystyle\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$.

3° $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1}$, gde je $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$, $(n \geq 2)$.

293. Dokazati nejednakosti

$$1^\circ \quad \frac{a}{b+\lambda c}+\frac{b}{c+\lambda a}+\frac{c}{a+\lambda b}\geq\frac{3}{1+\lambda} \qquad (a,b,c>0,\ \lambda>0).$$

$$2^\circ \quad \frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}\geq\frac{1}{18}(a+b+c)^3 \qquad (a,b,c>0).$$

$$3^\circ \quad \frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \qquad (a,b,c>0).$$

$$4^\circ \quad \frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}+\frac{1+c^2}{1-c^2}\geq\frac{15}{4} \qquad (a+b+c=1,\ a,b,c>0).$$

294. Ako je $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, dokazati implikaciju

$$\frac{1}{x_1+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\leq 1 \Rightarrow x_1x_2\cdots x_n\geq(n-1)^n \qquad (n\geq 2).$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $x_i=n-1$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

295. Ako su $a,b,c>0$ i $a+b+c=1$, dokazati nejednakost

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)>64\sqrt{abc}.$$

296. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=1$, dokazati da tada važi nejednakost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>(\sqrt{3}-1)(a+b+c).$$

297. Dokazati nejednakost

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \qquad (a,b,c>0).$$

298. Dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve x,y,z važi nejednakost

$$L=\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}\leq 8.$$

299. Dokazati nejednakost

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}\geq\frac{1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pozitivni brojevi.

300. Dokazati da proizvoljan oštrougli trougao sadrži dva ugla čija je razlika manja od 30°.

301. Neka su m i n dva pozitivna broja. Posmatrajući elemente pravouglog trougla, dokazati da je

$$\sqrt{mn} \le \frac{m+n}{2}.$$

Stavljajući $m = \dfrac{1}{\alpha}$, $n = \dfrac{1}{\beta}$, izvesti novu nejednakost između $\sqrt{mn}$ i $\dfrac{2mn}{m+n}$.

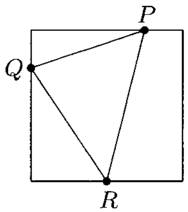
302. Neka su a, b, c dužine stranica trougla ABC, a A, B, C veličine suprotnih uglova. Dokazati da je

$$Aa + Bb + Cc \ge \frac{1}{2}\,(Ab + Ba + Ac + Ca + Bc + Cb).$$

303. Tačka P se nalazi unutar konveksnog četvorougla $ABCD$. Dokazati da je

$$\text{area}\,ABCD \le \frac{1}{2}\,(AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2).$$

Kada važi jednakost?



304. Trougao PQR je upisan u kvadrat stranice 1. Dokazati da je $\text{area}\,PQR \le 1/2$.

305. U jedinični kvadrat upisan je četvorougao tako da na svakoj stranici kvadrata leži jedno teme tog četvorougla. Dokazati da je jedna stranica tog četvorougla veća ili jednaka $\sqrt{2}/2$.

306. Neka su a i b katete, c hipotenuza pravouglog trougla i $\alpha \in \mathbf{R}$. Dokazati nejednakosti

$$c^2\left(\frac{ab}{c}\right)^{\alpha-2} < a^\alpha + b^\alpha < c^\alpha \quad \text{za } \alpha > 2.$$

Dokazati da za $\alpha < 2$ važe suprotne nejednakosti.

307. Trougao ABC ima $\sphericalangle A = 2\pi/3$. Dokazati da je

$$4 \le \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \le 4 + \frac{49}{16}\cdot\frac{1}{\sin B \sin C}.$$

308. Dat je nepravilan tetraedar $ABCD$. Neka su dužine ivica $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = a_1$, $BD = b_1$, $CD = c_1$. Dokazati da je tada

$$ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + abc \le 4P\sqrt{R^2 - r^2},$$

gde je R poluprečnik opisane sfere, r poluprečnik upisane sfere i P površina datog tetraedra.

IX. TRIGONOMETRIJA. PRIMENA TRIGONOMETRIJE

309. Dokazati implikaciju

$$\sin 2\,(a+c) = n \sin 2b \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c).$$

310. Sumirati $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx$.

311. Proveriti identitet $\dfrac{\cos 3t}{\cos t} - \dfrac{\cos 6t}{\cos 2t} = 2\,(\cos 2t - \cos 4t)$.

Da li ovaj identitet važi za svako t?

Rešiti jednačinu $\dfrac{\cos 3t}{\cos t} = \dfrac{\cos 6t}{\cos 2t}$.

312. Dokazati da je

$$\left(\frac{\sin 3t}{\sin t}\right)^3 + \left(\frac{\cos 3t}{\cos t}\right)^3 = 4\cos 6t + 24\cos 2t. \tag{1}$$

Za koje vrednosti t važi ovaj identitet?

Rešiti jednačinu $\cos 6t + 6\cos 2t = 0$.

313. Transformisati u proizvod $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} 3x$.

314. Ako je $\dfrac{\sin(t-x)}{\sin(t-y)} = \dfrac{a}{b}$ i $\dfrac{\cos(t-x)}{\cos(t-y)} = \dfrac{c}{d}$ $\left(t \neq \dfrac{x+y}{2} + k\pi,\ t \neq \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$, izračunati $\cos(x-y)$.

315. Dokazati da iz uslova

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0 \quad \wedge \quad \cos x + \cos y + \cos z = 0$$

izlazi

$$\operatorname{tg}(3\cdot 2^n x) = \operatorname{tg}(3\cdot 2^n y) = \operatorname{tg}(3\cdot 2^n z),$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

316. Naći $\operatorname{tg}\alpha$ ako je $4\alpha - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

317. Ako su $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ koreni kvadratne jednačine $x^2 + px + q = 0$, koji uslov moraju zadovoljavati p i q pa da bude $\alpha + \beta = \pi/3$?

318. Dokazati da izraz $E = \dfrac{\cos 2x - (m-1)\cos 4x + m}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) + m\sin^2 x}$ ne zavisi od m.

319. Ako je $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} 2x : \operatorname{tg} 4x = 1 : 4 : y$, koliko je y?

320. Dokazati implikaciju

$$\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\sin x}{\sin y} = -1 \Rightarrow \frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\sin^3 y}{\sin x} = 1.$$

321. Koliko je $(1 - \sin t)(1 - \cos t)$ ako je $(1 + \sin t)(1 + \cos t) = \frac{5}{4}$?

322. Dokazati jednakost $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$.

323. Dokazati jednakost $\dfrac{\sin 80^\circ + \sin 50^\circ \cos 70^\circ}{\sin 50^\circ \sin 70^\circ} = \sqrt{3}$.

324. Dokazati jednakost $4 \sin 10^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ = 1$.

325. Dokazati jednakost

$$\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{ctg} 10^\circ + 3(\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ - 3 \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

326. Dokazati jednakosti

1° $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$,

2° $-\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

3° $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}$.

327. Dokazati jednakosti:

1° $$\cos \frac{\pi}{21} - \cos \frac{4\pi}{21} + \cos \frac{5\pi}{21} = \frac{\sqrt{21} - 1}{4},$$

2° $$-\sin \frac{\pi}{21} + \sin \frac{4\pi}{21} + \sin \frac{5\pi}{21} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}},$$

3° $$\sin \frac{2\pi}{21} + \sin \frac{8\pi}{21} - \sin \frac{10\pi}{21} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}},$$

4° $$\cos \frac{\pi}{21} \cdot \cos \frac{4\pi}{21} \cdot \cos \frac{5\pi}{21} = \frac{5 + \sqrt{21}}{16},$$

5° $$\cos \frac{2\pi}{21} \cdot \cos \frac{8\pi}{21} \cdot \cos \frac{10\pi}{21} = \frac{5 - \sqrt{21}}{16},$$

6° $$\sin \frac{\pi}{21} \cdot \sin \frac{4\pi}{21} \cdot \sin \frac{5\pi}{21} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}}.$$

328. Dokazati jednakosti

1° $\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \sqrt{3}$,

2° $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 10^\circ = 3$,

3° $\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ = 9$,

4° $\operatorname{tg}^3 10^\circ - \operatorname{tg}^3 50^\circ + \operatorname{tg}^3 70^\circ = 11\sqrt{3}$,

5° $\operatorname{tg}^4 10^\circ + \operatorname{tg}^4 50^\circ + \operatorname{tg}^4 70^\circ = 59$.

329. Ako je (1) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin(x+y)} = a$ i (2) $\dfrac{\cos x - \cos y}{\sin(x-y)} = \dfrac{\sqrt{3}-2}{a}$ $(x, y \in (0, \pi/2))$, izračunati $x + y$.

330. Dokazati da za sve realne brojeve x i y važi nejednakost

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3.$$

331. Ako su A, B, C uglovi trougla, za koji trougao važi jednakost

(1) $$\cos(A - B) \cdot \cos(B - C) \cdot \cos(C - A) = 1\,?$$

332. Ako su a i b realni brojevi, dokazati da je $|\sin(a+b)| \leq |\sin a| + |\sin b|$ i da za svaki prirodan broj k važi $|\sin kx| \leq k\,|\sin x|$.

333. Ako je $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{8}{5}$ i $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, dokazati da je

$$\frac{4}{5} \leq \cos\alpha + \cos\beta \leq \frac{6}{5}\,.$$

334. Dokazati bez upotrebe kalkulatora $0.17 < \sin 10^\circ < 0.18$.

335. Bez upotrebe kalkulatora dokazati da je $\operatorname{tg} 11^\circ < 0.2$.

336. Ako su α i β oštri uglovi i $\alpha < \beta$, dokazati da je

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}\,.$$

337. Šta je veće: $4 \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 9^\circ$ ili $3 \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$?

338. Dokazati nejednakosti:

1° $\operatorname{tg}(\sin x) < \operatorname{ctg}(\cos x)$, ako $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

2° $\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg} x) < \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$, ako $x \in \left(\operatorname{arcctg}\pi,\ \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

339. Dokazati implikaciju

(1) $$\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta \Rightarrow |\cos\alpha \cdot \cos\beta| < \frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3}}}\,.$$

340. Naći najveću i najmanju vrednost izraza

$$E \equiv a\cos^2 x + 2bc\cos x \sin x + c\sin^2 x.$$

341. Dokazati da izraz $\cos\left(\frac{n\pi}{6} - \frac{55\pi}{72}\right) + \cos\left(\frac{5n\pi}{6} + \frac{\pi}{72}\right)$ nije jednak nuli ako je n ceo broj.

342. Oštri uglovi α i β pravouglog trougla zadovoljavaju uslov

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^3\beta = 70.$$

Odrediti uglove ovog trougla.

343. 1° Izračunati $\sin(\operatorname{arctg} x)$ i $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

2° Dokazati formulu $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0)$.

344. Dokazati teoremu za zbir arkustangensa:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \qquad \varepsilon = \begin{cases} 0 & (xy < 1), \\ 1 & (x > 0,\, xy > 1), \\ -1 & (x < 0,\, xy > 1). \end{cases}$$

345. Izračunati $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}$.

346. Dokazati teoremu za zbir arkuskosinusa:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon}\arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\,\right) + 2\pi\varepsilon,$$

gde je $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ i $\varepsilon = \begin{cases} 0 & (x+y \geq 0), \\ 1 & (x+y < 0). \end{cases}$

347. Dokazati teoremu za zbir arkussinusa:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,\right) + \varepsilon\pi, \quad (|x| \leq 1,\ |y| \leq 1),$$

gde je $\varepsilon = \begin{cases} 0 & (xy \leq 0 \vee x^2+y^2 \leq 1), \\ \operatorname{sgn} x & (xy > 0 \wedge x^2+y^2 > 1). \end{cases}$

348. Naći $\sin x$ iz jednačine

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = 0.2.$$

349. Rešiti jednačinu $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

350. Rešiti trigonometrijske jednačine

1° $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$;

2° $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$.

351. Rešiti jednačinu

$$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right).$$

352. 1° Za razne vrednosti realnog broja p rešiti jednačinu

$$p\sin 3x + \sin^3 x + p\sin x = 0.$$

2° Naći rešenje jednačine u specijalnom slučaju $p = -1/12$.

353. Rešiti jednačinu $\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x$.

354. Naći realne brojeve x tako da su $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$ redom tri uzastopna člana geometrijske progresije.

355. Rešiti jednačinu $4c^2 \sin(x+B)\sin(x+A) = (a+b)^2 + 2ab$, gde su a, b, c, B, A stranice i dva ugla pravouglog trougla.

356. Koji uslov moraju zadovoljavati konstante a, b, c da sistem

$$\sin x = a\sin(y-z), \quad \sin y = b\sin(z-x), \quad \sin z = c\sin(x-y)$$

ima rešenje?

357. Rešiti trigonometrijsku nejednačinu

$$(1 + 2\cos x)^{1/2} \leq \sin x. \tag{1}$$

Za koje realne vrednosti x važi znak jednakosti?

358. Naći sve x u intervalu $0° \leq x < 360°$ koji zadovoljavaju nejednačinu

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x) \geq (\sqrt{3} - 1)\sin 2x.$$

359. Odrediti skup vrednosti parametra α sa segmenta $[0°, 360°]$ da jednačina

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0$$

ima pozitivan koren x_1, pri čemu drugi koren, ako postoji i ako je različit od x_1, nije pozitivan.

360. Rešiti nejednačinu $2\log_x \sin x \geq \log_{\sin x}\left(\dfrac{\sin^3 x}{x}\right)$.

361. Ako za uglove α, β i γ trougla ABC važi jednakost

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)+\sin\gamma},$$

dokazati da je trougao ABC pravougli.

362. U trouglu ABC je

$$\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12.$$

Naći $\sin A : \sin B : \sin C$.

363. Ako su tangensi uglova trougla u razmeri $1 : 2 : 3$, dokazati da su stranice trougla u razmeri $\sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$.

364. U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ postoji tačka M takva da je $MA = 7$, $MB = 13$, $MC = 17$. Odrediti površinu kvadrata.

365. Dužina duže katete nekog pravouglog trougla jednaka je 1, a dužina druge katete je t. Dužine kateta drugog pravouglog trougla su $2t$ i $1-t^2$. Dokazati da je ugao naspram stranice $2t$ dvaput veći od najmanjeg ugla prvog trougla.

366. Ako su e i f dužine dijagonala i α oštar ugao paralelograma, dokazati da je njegova površina $P = \dfrac{1}{4}\left|e^2 - f^2\right| \operatorname{tg}\alpha$.

367. Ortogonalna projekcija centra romba $ABCD$ na stranicu AB je T, a projekcija temena D na istu stranicu je U. Tačka F deli duž DU na dva jednaka dela. Dokazati da je duž BF normalna na duž TC.

368. Ako su a, b, c dužine stranica trougla i α, β, γ naspramni uglovi, dokazati implikaciju $3\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow a^2 + bc - c^2 = 0$.

369. Dužine stranica nekog trougla su

$$a = p^2 + p + 1, \quad b = p^2 + 2p, \quad c = 2p + 1,$$

gde je p pozitivan broj.

Izračunati srednji po veličini ugao tog trougla.

370. Izraziti dužinu dijagonala tetivnog četvorougla pomoću dužina njegovih stranica.

371. Odrediti najveći ugao trougla čije su dužine stranica jednake brojevima $\cos 5^\circ$, $\cos 35^\circ$ i $\cos 50^\circ$.

372. Oko pavilnog poligona sa 26 stranica $A_1A_2\cdots A_{26}$ opisan je krug k sa centrom u tački O. Neka su tačke O_1 i O_2 simetrične tački O u odnosu na prave $A_{25}A_1$ i A_2A_6. Dokazati da je O_1O_2 jednako dužini stranice jednakostraničnog trougla upisanog u krug k.

373. Šestougao je upisan u krugu. Tri stranice imaju dužinu a i tri dužinu b. Odrediti poluprečnik kruga u funkciji a i b.

374. Dokazati da u trouglu važi $2a = b + c \Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Odrediti interval kome pripada ugao A.

375. U trouglu ABC čiji su uglovi α, β i γ izabrana je tačka O takva da je $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCA = \omega$. Dokazati da je

1° $\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$,

2° $\dfrac{1}{\sin^2\omega} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\beta} + \dfrac{1}{\sin^2\gamma}$,

3° $\omega \leq \pi/6$.

376. U kružnom isečku sa centralnim uglom 2α i poluprečnikom r upisan je pravougaonik čije su dve stranice paralelne osi simetrije isečka. Odrediti pravougaonik najveće površine.

377. U dati trougao upisati pravougaonik najmanje dijagonale.

378. Dat je četvorougao $ABCD$ opisan oko kruga. Dokazati da se kvadrati rastojanja centra kruga do suprotnih temena odnose kao proizvodi stranica koje se sustiču u tim temenima.

379. U četvorouglu $ABCD$ dijagonale su AC i BD, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 60°$ i $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBD$. Dokazati da je $AD + BC = AB$.

380. U trouglu ABC je $\sphericalangle BAC = 45°$. Označimo sa P tačku na stranici AC tako da je $AP : PC = 2 : 1$ i $\sphericalangle ABP = 15°$. Odrediti $\sphericalangle ACB$.

381. U trouglu ABC je $\sphericalangle B = 26°$ i $\sphericalangle C = 51°$. Neka se tačka P nalazi unutar trougla tako da je $\sphericalangle PBC = 13°$ i $\sphericalangle PCB = 17°$. Odrediti $\sphericalangle APB$.

382. Odrediti uglove jednakokrakog trougla ABC $(AB = AC)$ ako je

$$\frac{AB}{BC} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

383. Dat je trougao ABC čiji su uglovi $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 75°$. Nad stranicom AB, izvan trougla, konstruisan je jednakostranični trougao ABD. Dokazati da se težišna duž iz temena A i simetrala $\sphericalangle B$ trougla ABC i duž CD seku u jednoj tački.

384. Neka je f bisektrisa ugla između polupravih a i b. Krug k_1, koji dodiruje poluprave a i f, dodiruje prvu u tački A. Krug k_2, koji dodiruje f i b, dodiruje drugu polupravu u tački B. Dokazati da na pravoj AB leže tetive krugova k_1 i k_2 koje imaju iste dužine.

385. Dat je pravilan n-tougao $A_1A_2\ldots A_n$ sa centrom upisanog kruga u tački O, dužine stranice a. Neka su $M_1, M_2, \ldots, M_n$ redom proizvoljne tačke na stranicama A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, A_nA_1. Duži OA_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ seku stranice n-tougla $M_1M_2\ldots M_n$ u tačkama P_k. Dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_kM_k \cdot A_{k+1}M_k} = \frac{2\sin(\pi/n)}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_kP_k} \qquad (A_{n+1} \equiv A_1).$$

386. U tetraedru $ABCD$ označimo sa S_A, S_B, S_C, S_D površine strana tetraedra koje su suprotne redom temenima A, B, C, D, a sa $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ uglove diedara tetraedra čije su ivice AD, BD, CD, BC, AC, AB. Dokazati da je

1° $S_D^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S_AS_B\cos\gamma - 2S_BS_C\cos\alpha - 2S_AS_C\cos\beta$.

2° $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\alpha' + \cos\beta' + \cos\gamma' \leq 2$, pod pretpostavkom da su uglovi diedara datog tetraedra oštri.

387. Data je četvorostrana piramida $ABCDV$ čija je osnova paralelogram $ABCD$ kod koga je $AB : BC = 16 : 19$. Bočne strane ABV, BCV, CDV, DAV sa ravni osnove grade redom uglove čiji je odnos $1 : 2 : 4 : 2$. Odrediti ove uglove.

X. RAZNI ZADACI I PROBLEMI

388. Dokazati da jednačina $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$ ne može imati rešenja u skupu celih brojeva, osim trivijalnog rešenja $x = y = z = 0$.

389. Naći celobrojna rešenja jednačine $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

390. Naći sve cele brojeve a za koje $x^3 - x + a = 0$ ima tri celobrojna rešenja.

391. Dokazati da izraz

$$(1) \qquad u = \frac{3n^4 + 6n^3 - 2n^2 - 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

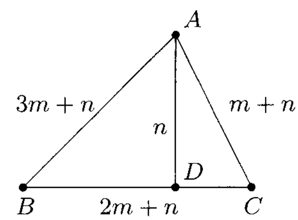
nije ceo broj ni za jedno $n \in \mathbb{N}$.

Za $n = 1, 2, 3, \ldots, k$ iz (1) se dobija niz $\{u_\nu\}$. Dokazati da je $\sum_{\nu=1}^{k} u_\nu^*$ potpun kub, gde je u_ν^* glavni deo decimalnog broja u_ν.

392. Ako se od brojioca jednog razlomka oduzme 27, dobija se ista vrednost kada se imeniocu doda 12. Kako glasi opšti oblik toga razlomka?

393. Koliko puta u toku 24 časa satne kazaljke obrazuju prav ugao?

394. Na slici je $AD \perp BC$ i m i n su uzajamno prosti prirodni brojevi, pri čemu su stranice trougla $2m+n$, $m+n$, $3m+n$. Odrediti m i n.



395. Zbir deset realnih brojeva jednak je nuli; zbir proizvoda svakog sa svakim takođe je jednak nuli. Dokazati da je zbir kubova tih brojeva jednak nuli.

396. U skupu od 21 broja zbir bilo kojih 10 brojeva manji je od zbira ostalih 11. Dokazati da su svi brojevi pozitivni.

397. Pravilni poligoni od m i n stranica upisani su u isti krug. Odnos njihovih površina je $m:n$. Naći sve mogućne vrednosti m i n.

398. Koliko i kakvih ima trouglova sa celobrojnim stranicama $a=29$, $b=21$, $c=x$?

399. Ako su a, b, c celi brojevi takvi da je $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ racionalan broj, dokazati da je tada $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ ceo broj.

400. Dokazati implikaciju $a,b,c \in \mathbb{Q} \wedge a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0 \Rightarrow a=b=c=0$.

401. Dokazati implikaciju $\sqrt{3}-\dfrac{m}{n}>0 \Rightarrow \sqrt{3}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{4n^2} \qquad (m,n \in \mathbb{N})$.

402. Rešiti jednačinu $\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=0$.

403. Rešiti nejednačinu $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}$, gde je a realan parametar, različit od nule.

404. Dokazati jednakost

$$\frac{1}{\log_a B}+\frac{1}{\log_{a^2} B}+\cdots+\frac{1}{\log_{a^n} B}=\frac{n(n+1)}{2}\log_B a,$$

gde su a i B pozitivni brojevi, različiti od jedinice.

405. a) Rešiti nejednačinu $m^{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}}<m^2 \; (0<m<1)$.

b) Odrediti $\log_{24} 2$ ako je $\log_{168} 3=a$ i $\log_{168} 7=b$.

406. Naći zbir $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k k^2$.

407. Naći najveći član u razvoju izraza $(1+\sqrt{2})^{20}$ po binomnom obrascu.

408. Koliko ima nizova od 5 cifara koji ne sadrže uzastopne nule?

409. Koliko postoji prirodnih brojeva, sa najviše šest cifara, u kojima se javlja cifra 1?

410. Dat je Pascalov[1] trougao binomnih koeficijenata. Uočimo njegovu treću hipotenuzu (uokvireni elementi).

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
\boxed{1} & 2 & 1 \\
1 & \boxed{3} & 3 & 1 \\
1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1 \\
\vdots
\end{array}$$

1° Ispitati čemu je jednaka razlika kvadrata bilo koja dva uzastopna broja na toj hipotenuzi.

2° Na osnovu rezultata pod 1° odrediti funkciju $x \mapsto f(x)$ takvu da je $T_n = f(S_n)$, gde je

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n, \qquad T_n = 1^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

411. Dokazati jednakost

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)(2n-1),$$

gde je n prirodan broj.

412. Metodom matematičke indukcije dokazati nejednakost

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} > 0 \qquad (n > 1).$$

413. Dokazati nejednakost[2] $\sin x < n \sin \dfrac{x}{n} \qquad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ n > 1\right).$

414. Izračunati sume

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},$$
$$T = \sin\frac{\pi}{2n+1} + \sin\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

415. Šta je veće: $\sqrt[3]{60}$, ili $2 + \sqrt[3]{7}$?

416. Šta je veće: $300!$ ili 100^{300}?

417. Dokazati da je $7^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{7}}$ bez upotrebe računara.

[1] Paskal (Blaise Pascal (1623–1662)) veliki francuski matematičar, fizičar i filozof. Prvi je konstruisao računsku mašinu 1641. i otkrio metod matematičke indukcije.

[2] Videti zadatak 332

418. Dat je broj

$$\frac{0.12345678910111213 14\ldots 4748495051}{0.5150494847\ldots 1413121110987654321}.$$

Dokazati da je njegova vrednost $0.239\ldots$

419. Rešiti sistem jednačina

$$\frac{4\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{5\sqrt{y^2+1}}{y}=\frac{6\sqrt{z^2+1}}{z}, \tag{1}$$

$$x+y+z=xyz \tag{2}$$

u skupu realnih brojeva.

420. Rešiti jednačinu $x=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}$.

421. Neka su a,b,c,d realni brojevi takvi da je $a^2+b^2\le 1$ i $c^2+d^2\le 1$. Dokazati da je $(a-c)^2+(b-d)^2\ge (ad-bc)^2$.

422. Rešiti jednačinu $2^{-\sin^2 x}+2^{-\cos^2 x}=\sin y+\cos y$.

423. Odrediti najmanju vrednost funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{8}+x\cos x+\cos 2x$.

424. Odrediti maksimum funkcije $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ za $x>0$ i $y>0$.

425. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{xyz}+\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}\le \min\left\{\sqrt{1-x},\ \sqrt{1-y},\ \sqrt{1-z}\right\}$$

ako $x,y,z\in[0,\ 1/2]$.

426. Date su jednakosti

$$(J_1)\qquad x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-z^2)}+z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=xyz,$$

$$(J_2)\qquad xy\sqrt{1-z^2}+xz\sqrt{1-y^2}+yz\sqrt{1-x^2}=1+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$$

gde $x,y,z\in(0,1)$. Dokazati da jednakost (J_1) važi ako i samo ako važi jednakost (J_2).

427. Neka su a_1, b_1, a_2, b_2 realni brojevi. Dokazati:

1° Ako je $a_1\ge a_2$, $b_1\ge b_2$, tada je $\dfrac{a_1+a_2}{2}\,\dfrac{b_1+b_2}{2}\le\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{2}$.

2° Ako je $a_1\le a_2$, $b_1\ge b_2$, tada je $\dfrac{a_1+a_2}{2}\,\dfrac{b_1+b_2}{2}\ge\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{2}$.

428. Rešiti jednačinu $x^2 + \left(\frac{5x}{x-5}\right)^2 = 11$.

429. Ako su x, y, z realni brojevi, dokazati implikaciju

$$|x| \le \frac{1}{2}, \ |y| \le \frac{1}{3}, \ |z| \le \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right| \le \frac{5}{3}.$$

430. Šta je veće

$$A = \sqrt[3]{1 - 12\sqrt[3]{65^2} + 48\sqrt{65}} + 4 \ \text{ ili } \ B = \sqrt[3]{1 - 48\sqrt[3]{63} + 36\sqrt[3]{147}} + \sqrt[3]{63}\,?$$

431. Odrediti realan parametar a pod uslovom da jednačine $a\sin x - \cos x = 2$ i $\sin x + 2\cos x = 1$ imaju bar jedno zajedničko rešenje.

432. Bez upotrebe kalkulatora dokazati da je $\sin 23^\circ > 1/\sqrt{7}$.

433. Rešiti jednačinu $\cos^2 x + \cos^2 11^\circ = \frac{3}{4} + \cos x \cdot \cos 11^\circ$.

434. Dat je niz brojeva $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ određen formulom

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{3 - a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Izraziti opšti član niza a_n u funkciji od a_1, gde je a_1 negativna konstanta. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

435. Poluprave a, b, c leže u jednoj ravni π i imaju zajedničku početnu tačku M. Poluprave a i b obrazuju oštar ugao aMb unutar kojeg se nalazi poluprava c. U ravni π tačka O nalazi se izvan ugla aMb. Ortogonalne projekcije tačke O na poluprave a, b i c označimo redom sa A, B i C. Dokazati da je

$$OA \cdot BC + OB \cdot AC = OC \cdot AB. \tag{1}$$

436. Ako je $x, y, z \in [0, 1]$, dokazati nejednakost $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \le 1$.

437. Razložiti na činioce $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{4n}$.

438. Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x + \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,) &= y, \\ y + \ln(y + \sqrt{y^2+1}\,) &= z, \\ z + \ln(z + \sqrt{z^2+1}\,) &= x. \end{aligned}$$

439. Označimo sa x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ tri različita realna korena jednačine $x^3 - 3x - 1 = 0$. Dokazati da je tada $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

440. Dokazati da je

$$\sqrt{1+\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,\right)^2}-\sqrt{1+\left(x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}\,\right)^2}=2xy,$$

gde $x, y \in \mathbb{R}$.

441. Izračunati $\inf\limits_{\alpha\in(0,\pi)} \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} |\sin(p\alpha)|$.

442. Neka je ABC nedegerativni trougao u ravni. Neka je $(C_n)_{n=0}^{+\infty}$ niz tačaka koji se formira na sledeći način: $C_0 := C$ i C_{n+1} je centar upisanog kruga u trougao ABC_n. Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n$.

443. Dokazati da je zbir recipročnih vrednosti prirodnih brojeva

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots \tag{1}$$

beskonačno veliki.

444. Odrediti polinome $P(x)$ i $Q(x)$ tako da važi identitet

$$(x^8-1)P(x)+(x^5-1)Q(x)\equiv x-1. \tag{1}$$

445. Dokazati da je svaki polinom

$$P_n(x)=(\cos\theta+x\sin\theta)^n-\cos n\theta-x\sin n\theta$$

deljiv sa x^2+1, gde je θ realan broj različit od $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

446. Dokazati da postoje celi brojevi a, b, c, koji nisu istovremeno jednaki nuli i čija je apsolutna vrednost manja od 10^6, takvi da je

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

447. Dokazati da je broj $N=\underbrace{111\ldots11}_{91}$, prikazan u dekadnom sistemu, složen.

448. Neka su a, b i n prirodni brojevi. Dokazati da postoje celi brojevi x i y za koje je $(a^2+b^2)^n=x^2+y^2$.

449. Dokazati jednakost

$$4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

450. Ako je $A=m^2+n^2$ i $B=k^2+\ell^2$, izraziti proizvod AB u obliku zbira dva kvadrata.

451. Ako su a i b realni brojevi različiti od nule, dokazati da važi bar jedna od sledećih nejednakosti:

$$\left|\frac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right|<1, \qquad \left|\frac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right|<1.$$

452. Šta je veće: $\sqrt[3]{60}$ ili $2+\sqrt[3]{7}$?

NAPOMENA. Ovo je Zadatak 415. Data su dva nova rešenja.

453. Izračunati

$$s_n = 1 + 22 + 333 + \cdots + n(\underbrace{11\ldots1}_{n}). \tag{1}$$

454. Rešiti sistem $1-\dfrac{12}{3x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}, \quad 1+\dfrac{12}{3x+y}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}.$

REŠENJA

I. TRANSFORMACIJE ALGEBARSKIH IZRAZA

1. Rešenje. Kako je

$$\frac{1}{a+b}-\frac{a^2-ab-2b^2}{(a+b)^3}=\frac{(a+b)^2-a^2+ab+2\,b^2}{(a+b)^3}=\frac{3\,ab+3\,b^2}{(a+b)^3}=\frac{3\,b}{(a+b)^2}\,,$$

izraz u zagradama se svodi na

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a\,(a+b)^2}+\frac{3\,b}{(a+b)^2}=\frac{a^2+2\,ab+b^2}{a\,(a+b)^2}=\frac{1}{a}\qquad (a\neq 0).$$

Vodeći računa da je $a+b=-5$, dati izraz postaje

$$A=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{a-b}-\frac{2\,a}{a^2-b^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{2\,a}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b-2a}{(a+b)(a-b)}=-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{5}\,,$$

pri čemu je $a\neq b$, tj. $a\neq -5/2$ i $b\neq -5/2$.

2. Rešenje. Brojilac zadatog izraza $B=a^3+b^3+c^3-3\,abc$ može se prikazati u obliku

$$\begin{aligned}
B &= (a^3+a^2b+a^2c)+(b^3+b^2a+b^2c)+(c^3+c^2a+c^2b)\\
&\qquad -a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b-3\,abc\\
&= (a+b+c)\,a^2+(a+b+c)\,b^2+(a+b+c)\,c^2\\
&\qquad -a\,(ab+ac+bc)-b\,(ab+ac+bc)-c\,(ab+ac+bc)\\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(ab+ac+bc)\\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\\
&= \frac{a+b+c}{2}\big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big).
\end{aligned}$$

Pod uslovom da ne važi $a=b=c$, dati izraz se može skratiti sa

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

tako da dobijamo $\dfrac{a+b+c}{2}$.

3. Rešenje. Dovođenjem razlomka na desnoj strani na zajednički imenilac, dobijamo

$$E=-\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{(b-c)(c-a)(a-b)}\,.$$

Uvedimo oznake $b-c=x$, $c-a=y$, $a-b=z$. Imamo $x+y+z=0$, odnosno $x+y=-z$. Iz poslednje jednakosti sleduje $(x+y)^3=-z^3$. Kako je

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y),\quad x+y=-z,$$

to je

$$x^3 + y^3 - 3xyz = -z^3 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Na osnovu poslednje jednakosti E postaje

$$E = -\frac{3(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

tj. posle skraćivanja, $E = -3$ za svako a, b, c ($a \neq b \neq c \neq a$).

NAPOMENA. Do istog rezultata može se doći direktno ako se izvrše naznačena množenja, stepenovanja i skraćivanja.

4. Dokaz. Datu jednakost možemo transformisati na sledeći način:

$$\begin{gathered}\frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{a+b+c},\\ \frac{(a+c)b+ac}{abc} - \frac{1}{(a+c)+b} = 0,\\ b(a+c)^2 + (b^2+ac)(a+c) = 0.\end{gathered}$$

Na levoj strani možemo izvući faktor $a+c$, pa imamo dalje

$$(a+c)(ab+bc+b^2+ac) = 0,$$

tj.

$$(a+c)(a+b)(b+c) = 0. \tag{1}$$

Prema tome, data jednakost je ekvivalentna jednakosti (1), pod uslovom $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Jednakost (1) je ispunjena ako je bar jedan faktor jednak nuli, odnosno ako je $c = -a$ ili $b = -a$ ili $c = -b$, čime je dokaz završen.

5. Dokaz. Označimo sa K izraz u imeniocu izraza I. Tada je posle kvadriranja

$$K = bc(y^2+z^2) + ac(z^2+x^2) + ab(x^2+y^2) - 2(abxy + bcyz + cazx). \tag{1}$$

Ako kvadriramo uslov $ax + by + cz = 0$, dobijamo

$$-2\,(abxy + bcyz + cazx) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2. \tag{2}$$

Zamenom (2) u (1) imamo

$$\begin{aligned}K &= bc(y^2+z^2) + ac(z^2+x^2) + ab(x^2+y^2) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\\ &= (a^2x^2 + abx^2 + acx^2) + (aby^2 + b^2y^2 + bcy^2) + (acz^2 + bcz^2 + c^2z^2)\\ &= ax^2(a+b+c) + by^2(a+b+c) + cz^2(a+b+c)\\ &= (ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c).\end{aligned}$$

Na osnovu toga dati izraz postaje

$$I = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{(ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c)} = \frac{1}{a+b+c}.$$

6. Dokaz 1. Neka je $A=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}$. Eliminacijom c pomoću $c=\dfrac{1}{ab}$ i $\dfrac{1}{c}=ab$, dobijamo

$$A=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{\dfrac{1}{a}+b+1}+\frac{1}{a+1+ab}=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1\,.$$

Dokaz 2. Ako brojilac i imenilac drugog sabirka proširimo sa a, a trećeg sa ab, imamo

$$\begin{aligned}A&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1.\end{aligned}$$

7. Dokaz. Kao što se vidi, izraz S je formiran pomoću zbira tri razlomka. Njihov zajednički imenitelj je $(x-y)(y-z)(z-x)$, tako da je

$$S=-\frac{(y-z)\,x^n+(z-x)\,y^n+(x-y)\,z^n}{(x-y)(y-z)(z-x)}\,.$$

Polinom u brojiocu ovog razlomka je

$$(y-z)\,x^n+(z-x)\,y^n+(x-y)\,z^n.$$

Kako je za vrednost ovog polinoma za $x=y$ jednaka nuli, iz njega se može izvući faktor $x-y$. Isto tako, za $y=z$ ili $z=x$ vrednost polinoma je jednaka nuli, pa se iz njega može izvući i faktor $(y-z)(z-x)$.

Prema tome, razlomak se može skratiti sa $(x-y)(y-z)(z-x)$, što znači da je S ceo broj za cele i različite brojeve x, y, z i nenegativan ceo broj n.

8. Dokaz. Iz drugog uslova, množenjem jednakosti sa pqr, dobijamo

$$pq+qr+rp=0. \tag{1}$$

Kvadriranjem prve jednakosti imamo

$$p^2+q^2+r^2+2\,(pq+qr+rp)=1,$$

odakle je

$$p^2+q^2+r^2=1. \tag{2}$$

Kako je

$$\begin{aligned}&(pa+qb+rc)^2+(qa+rb+pc)^2+(ra+pb+qc)^2\\&\quad=(p^2+q^2+r^2)\,a^2+(q^2+r^2+p^2)\,b^2+(r^2+p^2+q^2)\,c^2\\&\qquad+2\,(pq+qr+rp)\,ab+2\,(qr+rp+pq)\,bc+2\,(rp+pq+qr)\,ca,\end{aligned}$$

primenom (1) i (2) vrednost ovog izraza se svodi na $a^2+b^2+c^2$, čime je dokaz završen.

9. Dokaz 1. Označimo dati izraz sa A. Prikažimo ga u obliku

$$\begin{aligned}A &= \frac{(b-c)(c-a)+(a-b)(c-a)+(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(a-c)}\,.\end{aligned}$$

Pošto je $a > b > c$ i pošto su brojilac i imenilac pozitivni, zaključujemo da je $A > 0$, čime je dokaz završen.

Dokaz 2. Izraz A se može prikazati u obliku

$$A = \frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a} = \frac{1}{b-c}+\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}\,.$$

Kako je $a > b > c$, oba sabirka su pozitivna, pa je $A > 0$.

10. Rešenje. Kako je

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = x^6+\frac{1}{x^6}+6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+20,$$

dati zraz se može uprostiti sledećim postupkom:

$$\begin{aligned}A &= \frac{6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+18}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+x^3+\frac{1}{x^3}} = \frac{6\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \frac{6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2x^2+\frac{2}{x^2}+1\right)} = \frac{6\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\right)\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\right)}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{x}} = 3\left(x+\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Pošto je $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$, zaključujemo da je $\min A = 6$ za $x = \dfrac{1}{x}$, tj. za $x = 1$.

11. Rešenje. Neka je

$$A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{56}}+1).$$

Množenjem desne strane ove jednakosti sa $2-1\ (=1)$, dobijamo

$$\begin{aligned} A &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{56}}+1)\\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{56}}+1)\\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{56}}+1)\\ &\ \vdots\\ &= (2^{2^{56}}-1)(2^{2^{56}}+1) = 2^{2^{57}}-1. \end{aligned}$$

12. Rešenje. Za polinome u brojiocu i imeniocu racionalne funkcije $E(x)$ važe sledeće faktorizacije:

$$\begin{aligned} x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1 &= x^5+1+2x(x^3+1)+3x^2(x+1)\\ &= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+2x(x+1)(x^2-x+1)+3x^2(x+1)\\ &= (x+1)(x^4+x^3+2x^2+x+1) = (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)\\ x^4+x^3-x-1 &= x^3(x+1)-(x+1)\\ &= (x+1)(x^3-1) = (x+1)(x-1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Prema tome, $E(x)$ se svodi na

$$E(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Ako je $x \neq -1$, izraz se može skratiti sa $(x+1)(x^2+x+1)$, jer je trinom $x^2+x+1>0$ za svako x, tako da imamo $E(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

U zadatku se traži $E(\pm 1)$. Međutim, za $x=-1$ ili $x=1$ izraz $E(x)$ nije definisan, jer se imenilac svodi na nulu.

Za drugi izraz važi:

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{(a+1)^4-1}{a(a+2)} - (a+1)\sqrt{\frac{(a+1)(a^3+1)}{a^2-a+1}}\\ &= \frac{\big((a+1)^2-1\big)\big((a+1)^2+1\big)}{a(a+2)} - (a+1)\sqrt{(a+1)^2\,\frac{a^2-a+1}{a^2-a+1}}\\ &= \frac{a(a+2)\big((a+1)^2+1\big)}{a(a+2)} - (a+1)\,|a+1|, \end{aligned}$$

pri čemu je pod korenom opravdano skraćivanje jer je $a^2-a+1>0$ za svako a.

Za $a\neq 0$ i $a\neq -2$ izraz $F(a)$ postaje

$$F(a) = (a+1)^2+1-(a+1)|a+1| = \begin{cases} 1 & (a\ge -1,\ a\neq 0),\\ 2(a+1)^2+1 & (a<-1,\ a\neq -2). \end{cases}$$

13. Rešenje. Primetimo najpre da izraz E ima smisla za $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $a \neq b$.

Označimo prvi razlomak sa E_1. Imamo

$$E_1 = \frac{a^3 + b^3 - 2\,ab\,\sqrt{ab}}{\big(\sqrt{a} - \sqrt{b}\big)\big(a + b + \sqrt{ab}\big)} = \frac{(a^{3/2})^2 - 2\,a^{3/2}\,b^{3/2} + (b^{3/2})^2}{a^{3/2} - b^{3/2}}$$
$$= \frac{(a^{3/2} - b^{3/2})^2}{a^{3/2} - b^{3/2}} = a^{3/2} - b^{3/2}.$$

Drugi razlomak E_2 može se transformisati na sledeći način:

$$E_2 = \frac{a^3 + b^3 - 2ab\,\sqrt{ab} - ab}{a\sqrt{a} - b\,\sqrt{b} + \sqrt{ab}}$$
$$= \frac{a^3 + b^3 - 2\,a^{3/2}\,b^{3/2} - ab}{a^{3/2} - b^{3/2} + a^{1/2}\,b^{1/2}} = \frac{(a^{3/2} - b^{3/2})^2 - (a^{1/2}\,b^{1/2})^2}{a^{3/2} - b^{3/2} + a^{1/2}\,b^{1/2}}$$
$$= \frac{(a^{3/2} - b^{3/2} + a^{1/2}\,b^{1/2})(a^{3/2} - b^{3/2} - a^{1/2}b^{1/2})}{a^{3/2} - b^{3/2} + a^{1/2}\,b^{1/2}}$$
$$= a^{3/2} - b^{3/2} - a^{1/2}\,b^{1/2}.$$

Na osnovu toga je

$$E = E_1 - E_2 = a^{1/2}\,b^{1/2} = \sqrt{ab}.$$

Za $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$ je $ab = 1$, pa je $E = 1$.

14. Rešenje. Prikažimo jednakost u obliku

$$\sqrt{a - b + c} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{c}.$$

Kvadriranjem dobijamo

$$a - b + c + 2\sqrt{a - b + c}\cdot\sqrt{b} + b = a + 2\sqrt{ac} + c,$$

odakle je

$$\sqrt{b}\cdot\sqrt{a - b + c} = \sqrt{ac}.$$

Još jednim kvadriranjem dolazimo do kvadratne jednačine

$$b^2 - (a + c)\,b + ac = 0,$$

čija su rešenja $b = a$ ili $b = c$, a to su uslovi kada važi zadata jednakost.

15. Rešenje. Za $x = x_0 = \dfrac{2am}{b\,(1 + m^2)}$ imamo

$$a + bx = a + \frac{2am}{1 + m^2} = a\left(1 + \frac{2m}{1 + m^2}\right) = a\,\frac{(m + 1)^2}{1 + m^2}\,,$$
$$a - bx = a - \frac{2am}{1 + m^2} = a\left(1 - \frac{2m}{1 + m^2}\right) = a\,\frac{(m - 1)^2}{1 + m^2}\,,$$

pri čemu je $a > 0$ i $b \neq 0$.

Na osnovu toga je

$$f(x_0) = \frac{|m + 1| + |m - 1|}{|m + 1| - |m - 1|}\,.$$

Ovde razlikujemo sledeće slučajeve:

$$1^\circ \quad m > 1, \quad f(x_0) = \frac{m+1+(m-1)}{m+1-(m-1)} = m,$$

$$2^\circ \quad -1 \le m \le 1, \quad f(x_0) = \frac{m+1-(m-1)}{m+1+(m-1)} = \frac{1}{m},$$

$$3^\circ \quad m < -1, \quad f(x_0) = \frac{-(m+1)-(m-1)}{-(m+1)+(m-1)} = m.$$

Da $f(x)$ postoji, mora biti ispunjen uslov $a > 0$ i $b \neq 0$. Prema tome, $f(x)$ ne postoji ni za jedno realno x ako je $a \le 0$ ili $b = 0$.

16. Rešenje. a) Brojilac i imenilac izraza $E(x)$ možemo prikazati u obliku

$$\begin{aligned}
x^4 &+ (a-1)x^3 - (b+a-1)x^2 + (a+b)x - b \\
&= x^4 - x^3 + x^2 + a(x^3 - x^2 + x) - b(x^2 - x + 1) \\
&= x^2(x^2 - x + 1) + ax(x^2 - x + 1) - b(x^2 - x + 1) \\
&= (x^2 + ax - b)(x^2 - x + 1), \\
x^4 &- (b+1)x^3 + (b+c+1)x^2 - (b+c)x + c \\
&= x^4 - x^3 + x^2 - b(x^3 - x^2 + x) + c(x^2 - x + 1) \\
&= x^2(x^2 - x + 1) - bx(x^2 - x + 1) + c(x^2 - x + 1) \\
&= (x^2 - bx + c)(x^2 - x + 1).
\end{aligned}$$

Kao što se vidi, izraz $E(x)$ se može skratiti sa $x^2 - x + 1$, pa ostaje

$$E(x) = \frac{x^2 + ax - b}{x^2 - bx + c}.$$

b) Za $x = -\sqrt{\dfrac{b^2 - ac}{a+b}}$ izraz $E(x)$ se svodi na

$$\frac{\dfrac{b^2 - ac}{a+b} - b + ax}{\dfrac{b^2 - ac}{a+b} + c - bx} = \frac{-ac - ab + a(a+b)x}{b^2 + bc - b(a+b)x}$$

$$= -\frac{a}{b}\,\frac{(a+b)x - (b+c)}{(a+b)x - (b+c)} = -\frac{a}{b}.$$

Primetimo da se račun znatno uprostio zbog toga što smo dato x zamenili tamo gde se nalazi samo x^2.

17. Rešenje. Uprostimo najpre $\sqrt{13 + \sqrt{48}}$. Imamo

$$\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} = x + y\sqrt{3}.$$

Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo

$$x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{3} = 13 + 4\sqrt{3},$$

odakle je $x^2+3y^2=13$, $2xy=4$. Pozitivno rešenje ovog sistema je $x=1$, $y=2$, pa je

$$\sqrt{13+4\sqrt{3}}=1+2\sqrt{3}.$$

Na taj način dati izraz postaje

$$A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}.$$

Dalje je $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=x-y\sqrt{3}$, tj. $x^2+3y^2-2xy\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$.
Iz sistema $x^2+3y^2=4$, $2xy=2$ nalazimo $x=-1$, $y=-1$, pa je

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=-1+\sqrt{3},$$

Na osnovu toga imamo

$$A=2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Najzad, iz jednakosti

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}=x+y\sqrt{3},$$

tj.

$$8+4\sqrt{3}=x^2+3y^2+2xy\sqrt{3},$$

dobijamo sistem

$$x^2+3y^2=8,\quad xy=2,$$

čije je rešenje $x=y=\sqrt{2}$. Prema tome, uprošćen izraz postaje

$$A=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

18. Rešenje. Imamo

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3}\,)}=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\frac{27}{4}}-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Prema tome, $r=\dfrac{27}{4}$, $s=\dfrac{3}{4}$.

19. Rešenje. 1° Pođimo od jednakosti

(1) $$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Ako u ovu jednakost uvedemo $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, dolazimo do zaključka da dati izraz, tj. razlomak treba proširiti sa

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}.$$

Koristeći se jednakošću (1) dobijamo

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Ostaje da se ovaj razlomak proširi sa

$$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Tada u imeniocu imamo $(a+b+c)^3-27\,abc$, tako da smo izraz racionalisali.

2° Ako u jednakost (2) stavimo $a=2$, $b=3$, $c=4$, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}} &= \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{8}}{2+3+4-3\sqrt[3]{24}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{12}-2}{3(3-2\sqrt[3]{3})}.\end{aligned}$$

Ostaje da se ovaj razlomak proširi sa $3^2+3\cdot 2\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}$, tako da će razlomak biti oslobođen iracionalnog imenioca.

20. Rešenje. Označimo date razlomke sa

$$A=\frac{2+2\varepsilon}{(1+2\varepsilon)^2+2+2\varepsilon}, \qquad B=\frac{2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2+2+\varepsilon},$$

gde je $\varepsilon = 0.000\,000\,000\,02$. Formirajmo razliku $A-B$. Imamo

$$\begin{aligned}A-B &= \frac{2(1+\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)^2+2+2\varepsilon}-\frac{2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2+2+\varepsilon}\\ &= \frac{2(1+\varepsilon)\big((1+\varepsilon)^2+2+\varepsilon\big)-(2+\varepsilon)\big((1+2\varepsilon)^2+2+2\varepsilon\big)}{\big((1+2\varepsilon)^2+2+2\varepsilon\big)\big((1+\varepsilon)^2+2+\varepsilon\big)}.\end{aligned}$$

Imenilac ovog razlomka je pozitivan, a brojilac se svodi na $-3\varepsilon-6\varepsilon^2-2\varepsilon^3$.

Kao što se vidi, $A-B$ je negativno, pa je prvi razlomak manji od drugog.

21. Rešenje. Dati izraz možemo rastaviti na faktore, tj.

$$\begin{aligned}A &= \frac{6\big(x(x-3p)-(x-3p)\big)}{x^2(x-3p)-(x-3p)} = \frac{6(x-3p)(x-1)}{(x-3p)(x^2-1)}\\ &= \frac{6(x-3p)(x-1)}{(x-3p)(x-1)(x+1)}.\end{aligned}$$

Za $x=1$ i $x=3p$ izraz nema smisla. Ako je $x\neq 1$ i $x\neq 3p$, izraz se svodi na

$$A=\frac{6}{x+1}.$$

Ovaj razlomak je ceo broj za $x=-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5$. Međutim, ovde treba izostaviti $x=1$, jer je $x\neq 1$. Isto tako, treba izostaviti slučajeve kada je $x=3p$. Na primer, za $p=-7/3$ izraz A nije definisan za $x=-7$, itd.

II. TEORIJA BROJEVA

22. Rešenje. Neka brojilac i imenilac sadrže $n+1$ cifru. Na osnovu toga je

$$\frac{1\overbrace{66\ldots6}^{n}}{\underbrace{66\ldots6}_{n}4} = \frac{1\cdot10^n+\overbrace{66\ldots6}^{n}}{\underbrace{66\ldots6}_{n}0+4} = \frac{10^n+6\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}}{6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}0+4}$$

$$= \frac{10^n+6\cdot\dfrac{10^n-1}{9}}{6\cdot\dfrac{10^n-1}{9}\cdot10+4} = \frac{15\cdot10^n-6}{4(15\cdot10^n-6)} = \frac{1}{4}.$$

23. Rešenje. Broj 415 800 se faktoriše na sledeći način:

$$415\,800 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot11.$$

Pošto su $2\cdot2\cdot2$, $3\cdot3\cdot3$, $5\cdot5$, 7, 11 uzajamno prosti brojevi, faktori $2\cdot2\cdot2$, $3\cdot3\cdot3$, $5\cdot5$ moraju kompletno pripadati x ili y, tj. ne može, na primer, 2 pripadati x, a $2\cdot2$ pripadati y, jer x i y su uzajamno prosti brojevi. Zbog toga ćemo datu faktorizaciju prikazati u obliku

$$415\,800 = 8\cdot27\cdot25\cdot7\cdot11.$$

Ako uzmemo da x ima jedan faktor, tada postoji pet kombinacija:

$$\begin{array}{llcll}
x=8, & y=27\cdot25\cdot7\cdot11 & \Rightarrow & x=8, & y=51\,975;\\
x=27, & y=8\cdot25\cdot7\cdot11 & \Rightarrow & x=27, & y=15\,400;\\
x=25, & y=8\cdot27\cdot7\cdot11 & \Rightarrow & x=25, & y=16\,632;\\
x=7, & y=8\cdot27\cdot25\cdot11 & \Rightarrow & x=7, & y=59\,400;\\
x=11, & y=8\cdot27\cdot25\cdot7 & \Rightarrow & x=11, & y=37\,800.
\end{array}$$

Ako x ima dva faktora, dobijamo sledećih deset kombinacija:

$$\begin{array}{llcll}
x=8\cdot27, & y=25\cdot7\cdot11 & \Rightarrow & x=216, & y=1\,925;\\
x=8\cdot25, & y=27\cdot7\cdot11 & \Rightarrow & x=200, & y=2\,079;\\
x=8\cdot7, & y=27\cdot25\cdot11 & \Rightarrow & x=56, & y=7\,425;\\
x=8\cdot11, & y=27\cdot25\cdot7 & \Rightarrow & x=88, & y=4\,725;\\
x=27\cdot25, & y=8\cdot7\cdot11 & \Rightarrow & x=675, & y=616;\\
x=27\cdot7, & y=8\cdot25\cdot11 & \Rightarrow & x=189, & y=2\,200;\\
x=27\cdot11, & y=8\cdot25\cdot7 & \Rightarrow & x=297, & y=1\,400;\\
x=25\cdot7 & y=8\cdot27\cdot11 & \Rightarrow & x=175, & y=2\,376;\\
x=25\cdot11, & y=8\cdot27\cdot7 & \Rightarrow & x=275, & y=1\,512;\\
x=7\cdot11, & y=8\cdot27\cdot25 & \Rightarrow & x=77, & y=5\,400.
\end{array}$$

Prema tome, postoji ukupno 15 faktorizacija broja 415 800 na dva uzajamno prosta faktora x i y.

24. Dokaz. Važi sledeća faktorizacija:

$$26\,460 = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7.$$

Neka je $A = 27\,195$, $B = 10\,887$, $C = 10\,152$.

Broj C^8 je deljiv sa $2 \cdot 2$. Broj $A^8 - B^8$ je razlika osmih stepena brojeva A i B i ona je deljiva sa $2 \cdot 2$ (razlika kvadrata dva neparna broja deljiva je sa 8). To znači da je zadati broj $A^8 - B^8 + C^8$ deljiv sa $2 \cdot 2$.

Svaki od brojeva A, B, C je deljiv sa 3, pa su osmi stepeni deljivi sa $3 \cdot 3 \cdot 3$.

Broj A je deljiv sa 5 i sa $7 \cdot 7$ ($A/49 = 555$), tako da je A^8 deljivo sa 5 i sa $7 \cdot 7$.

Na kraju, razlika $B^8 - C^8$ ima faktor $B - C = 735$. Kako je $735/49 = 15$, a 735 se završava sa 5, izlazi da je $B^8 - C^8$ deljivo sa 5 i sa $7 \cdot 7$.

Prema tome, broj $A^8 - B^8 + C^8$ je deljiv sa $26\,460 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

25. Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $n^2 + 3n + 5$ deljivo sa 121. Dakle, neka važi jednakost $n^2 + 3n + 5 = 121\,k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Rešenje ove kvadratne jednačine je

$$\begin{aligned} n_{1/2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\,(5 - 121\,k)}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{4 \cdot 121\,k - 11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11\,(4 \cdot 11\,k - 1)}}{2}. \end{aligned}$$

Da bi se iz diskriminante izvukao kvadratni koren, potrebno bi bilo da faktor $4 \cdot 11k - 1$ bude deljiv sa 11, a to je nemoguće. Prema tome, diskriminanta ne može biti kvadrat celog broja, čime je dokazano da n ne može biti ni racionalan broj, tj. da $n^2 + 3n + 5$ nije deljivo sa 121.

26. Dokaz 1. Broj a koji nije deljiv sa 5 može se prikazati u oblicima

$$a = 5k \pm 1, \quad a = 5k \pm 2 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ako je, na primer, $a = 5k + 1$, primenom binomnog obrasca dobijamo

$$\begin{aligned} a^8 + 3a^4 - 1 &= (5k+1)^8 + 3\,(5k+1)^4 - 14 \\ &= (5k)^8 + \binom{8}{1}(5k)^7 + \cdots + \binom{8}{7}(5k) + 1 \\ &\qquad + 3\left((5k)^4 + \binom{4}{1}(5k)^3 + \cdots + \binom{4}{3}(5k) + 1\right) - 14 \\ &= 5N + 1 + 3 - 14 = 5N + 10 \qquad (N \text{ ceo broj}), \end{aligned}$$

a to je broj koji je deljiv sa 5. Slično je za $a = 5k - 1$. Za $a = 5k + 2$ imamo

$$\begin{aligned} a^8 + 3a^4 - 14 &= (5k+2)^8 + 3\,(5k+2)^4 - 14 \\ &= (5k)^8 + \binom{8}{1}(5k)^7 \cdot 2 + \cdots + \binom{8}{7}(5k) \cdot 2^7 + 2^8 \\ &\qquad + 3\left((5k)^4 + \binom{4}{1}(5k)^3 \cdot 2 + \cdots + \binom{4}{3}(5k) \cdot 2^3 + 2^4\right) - 14 \\ &= 5M + 2^8 + 3 \cdot 2^4 - 14 = 5M + 290 \qquad (M \text{ prirodan broj}), \end{aligned}$$

a to je broj koji je takođe deljiv sa 5.

Istim postupkom se dokazuje da je dati izraz za $a = 5k - 2$ deljiv sa 5.

Dokaz 2. Dati izraz se može prikazati u obliku

$$a^8 + 3a^4 - 14 = a^8 - 2a^4 + 1 + 5a^4 - 15 = (a^4 - 1)^2 + 5\,(a^4 - 3).$$

Drugi sabirak je deljiv sa 5 za svako a. Brojevi a koji nisu deljivi sa 5 završavaju se sa 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, a njihovi četvrti stepeni završavaju se redom sa 1, 6, 1, 6, 6, 1, 6, 1. To znači da se $a^4 - 1$, tj. $(a^4 - 1)^2$ završava sa 0 ili 5, pa je $(a^4 - 1)^2$ deljiv sa 5.

27. Rešenje. Kako je za $n \neq 3$

$$(n^2 - 7n + 10) : (n - 3) = n - 4 - \frac{2}{n-3},$$

i 2 ima delioce $-2, -1, 1, 2$, trinom $n^2 - 7n + 10$ je deljiv sa $n - 3$ ako je 2 deljiv sa $n - 3$, tj. $n - 3 = -2$, $n - 3 = -1$, $n - 3 = 1$ ili $n - 3 = 2$, tj. $n = 1$, 2, 4 ili 5.

28. Rešenje 1. Ispitajmo najpre da li je broj n^2+n+1 deljiv sa 5. Kako je $n^2+n+1 = n\,(n+1)+1$, a $n\,(n+1)$ je proizvod dva uzastopna broja koji se nikada ne završava sa 4, pa se $n^2 + n + 1$ ne završava sa 5, tako da nije deljiv sa 5. Na osnovu toga zaključujemo da $n^2 + n + 1$ nije deljiv sa 1955.

Rešenje 2. Pretpostavimo da je $n^2 + n + 1$ deljivo sa 1955, tako da za neko n važi jednakost

$$n^2 + n + 1 = 1955\,k \Rightarrow n^2 + n - (1955\,k - 1) = 0, \tag{1}$$

gde je k prirodan broj.

Da bi kvadratna jednačina (1) imala cele korene, mora diskriminanta

$$D = 1 + 4\,(1955\,k - 1) = 7820\,k - 3$$

biti kvadrat prirodnog broja. Pošto se $7820\,k$ završava sa nulom, broj $7820\,k-3$ se završava sa 7. Međutim, ne postoji prirodan broj čiji se kvadrat završava sa 7.

29. Rešenje. Broj 504 može se faktorisati, tj. $504 = 9 \cdot 8 \cdot 7$. Ispitajmo redom za koje je n broj $n^8 - n^2$ deljiv sa 9, 8 i 7.

Deljivost sa 9: Napišimo dati broj u obliku $n^2(n^6 - 1) = n^2(n^3 - 1)(n^3 + 1)$. Ako je n oblika $3k$, tada je n^2 deljivo sa 9, zatim, ako je $n = 3k + 1$, tada je $n^3 - 1$ deljivo sa 9, jer je

$$n^3 - 1 = (3\,k + 1)^3 - 1 = 27\,k^3 + 27\,k^2 + 9\,k,$$

a ako je $n = 3k - 1$, onda je $n^3 + 1$ deljivo sa 9. Prema tome, $n^8 - n^2$ je deljivo sa 9 za svako n.

Deljivost sa 7: Podelimo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ na podskupove $7\,k - a$, gde je $a = 0, 1, \ldots, 6$, a $k \in \mathbb{N}$. Za $n = 7\,k - a$ primenom binomne formule izraz $n^8 - n^2$ postaje

$$\begin{aligned} n^8 - n^2 &= \sum_{i=0}^{8} (-1)^i \binom{8}{i} (7\,k)^{8-i} a^i - (49\,k^2 - 14\,ak + a^2) \\ &= (7\,k)^8 - \binom{8}{1}(7\,k)^7 a + \cdots - \binom{8}{7} 7\,k \cdot a^7 + a^8 - (49\,k^2 - 14\,ak + a^2) \\ &= 7\,M + a^8 - a^2, \end{aligned}$$

gde je M prirodan broj. Neka je $P(a) = a^8 - a^2$. Kako je

$$P(0) = 0, \quad P(1) = 0, \quad P(2) = 252 = 7 \cdot 36, \quad P(3) = 6\,552 = 7 \cdot 936,$$
$$P(4) = 65\,520 = 7 \cdot 9\,360, \quad P(5) = 390\,600 = 7 \cdot 55\,800,$$
$$P(6) = 1\,679\,580 = 7 \cdot 239\,940,$$

broj $n^8 - n^2$ je deljiv sa 7 za svako n.

Deljivost sa 8: Neka je n neparan broj, tj. $n = 2k - 1$. Tada je

$$\begin{aligned}(2k-1)^8 - (2k-1)^2 &= (2k)^8 - \binom{8}{1}(2k)^7 - \cdots - \binom{8}{7} \cdot 2k + 1 - 4k^2 + 4k - 1 \\ &= 8M - 4k(k-1),\end{aligned}$$

gde je M prirodan broj. Pošto je $k(k-1)$ proizvod dva uzastopna broja, od kojih je jedan paran, $4k(k-1)$ je deljiv sa 8. Prema tome, $n^8 - n^2$ je deljiv sa 8 za svako neparno n.

Za $n = 2k$ imamo $n^8 - n^2 = 2^8k^8 - 4k^2$. Izraz 2^8k^8 je deljiv sa 8. Za $k = 2m$ je $4k^2$ deljiv sa 8, a za $k = 2m - 1$ je

$$4k^2 = 4(2m-1)^2 = 16(m^2 - m) + 4,$$

tako da ovaj broj nije deljiv sa 8.

Na osnovu ove analize zaključujemo da broj $n^8 - n^2$ nije deljiv sa 504 za $n = 4m - 2$, gde je $m \in \mathbb{N}$.

30. Dokaz. Prirodan broj koji nije deljiv sa 7 može se prikazati u obliku

$$n = 7k + m \qquad (m = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Zamenom n dobijamo

$$n^3 + 1 = (7k)^3 + 3(7k)^2m + 3(7k)m^2 + m^3 + 1 = 7N + m^3 + 1,$$
$$n^3 - 1 = (7k)^3 + 3(7k)^2m + 3(7k)m^2 + m^3 - 1 = 7N + m^3 - 1.$$

Ostaje da se dokaže da je samo jedan od brojeva $m^3 + 1$ i $m^3 - 1$ deljiv sa 7. Dokaz je ilustrovan sledećom tabelom:

m	m^3+1	m^3-1
1	2	0*
2	9	7*
3	28*	26
4	65	63*
5	126*	124
6	217*	215

Brojevi sa zvezdicom su deljivi sa 7.

31. Rešenje. Da bi broj $10^n + 8$ bio deljiv sa 72, treba da bude deljiv sa 9 i sa 8. Broj $10^n + 8$ ima zbir cifara 9, pa je deljiv sa 9. S druge strane, 10^n je deljiv sa 8 ako je $n \geq 3$.

Prema tome, dati broj je deljiv sa 72 za svako $n \geq 3$.

32. Dokaz. Napišimo dati broj u obliku

$$(1+10)^{100}-1.$$

Primenom binomnog obrasca imamo

$$\begin{aligned}(1+10)^{100}-1 &= 1+\binom{100}{1}\cdot 10+\binom{100}{2}\cdot 10^2+\binom{100}{3}\cdot 10^3+\cdots+10^{100}-1\\ &= \binom{100}{1}\cdot 10+\binom{100}{2}\cdot 10^2+\binom{100}{3}\cdot 10^3+10^4\cdot m,\end{aligned}$$

gde je m prirodan broj. Kako je

$$\binom{100}{1}=100,\quad \binom{100}{2}=\frac{100\cdot 99}{2!}=4\,950,$$
$$\binom{100}{3}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{3!}=16\,170,$$

iz sabirka $\binom{100}{3}\cdot 10^3$ možemo izvući faktor 10^4, dok je

$$\begin{aligned}\binom{100}{1}\cdot 10+\binom{100}{2}\cdot 10^2 &= 1\,000+495\,000=496\,000\\ &= 49\cdot 10^4+6\,000.\end{aligned}$$

Na osnovu toga je

$$11^{100}-1=10^4 n+6\,000. \tag{1}$$

Iz ove jednakosti izlazi da je $11^{100}-1$ deljiv sa 10^3. Ostaje da se dokaže da je pored toga $11^{100}-1$ deljiv sa 6. To se može sprovesti na sledeći način:

$$11^{100}-1=121^{50}-1=(120+1)^{50}-1=120^{50}+\binom{50}{1}\cdot 120^{49}+\cdots+\binom{50}{49}\cdot 120.$$

Kao što se vidi, svi sabirci su deljivi sa 120, pa je $11^{100}-1$ deljiv sa 6, čime je dokaz završen.

33. Rešenje. Ako je n paran broj, onda je n^4+4^n složen broj. Za $n=1$ je $n^4+4^n=5$, tj. dobijamo prost broj. Ako je n neparan broj veći od 1, važi sledeća faktorizacija:

$$\begin{aligned}n^4+4^n &= (n^2+2^n)^2-2n^2\cdot 2^n\\ &= (n^2+2^n)^2-(2^{(n+1)/2}\cdot n)^2\\ &= (n^2+2^n-2^{(n+1)/2}\cdot n)(n^2+2^n+2^{(n+1)/2}\cdot n).\end{aligned}$$

Za prvi činilac, koji je manji od drugog, važi nejednakost

$$\begin{aligned}n^2+2^n-2^{(n+1)/2}\cdot n &= n^2-2\cdot 2^{(n-1)/2}\cdot n+2^{n-1}+2^n-2^{n-1}\\ &= (n-2^{(n-1)/2})^2+2^{n-1}>1,\end{aligned}$$

što znači da je n^4+4^n za $n>1$ složen broj.

34. Rešenje. Traženi broj se može napisati u obliku $523000 + X$, gde je X trocifreni broj koji treba dopisati. Kako su 7, 8 i 9 uzajamno prosti brojevi, da bi traženi broj bio deljiv sa 7, 8 i 9 on mora biti deljiv i njihovim proizvodom $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Kada se broj 523000 podeli sa 504, dobija se količnik 1037 i ostatak 352, tj. važi $523000 = 504 \cdot 1037 + 352$. Prema tome, broj $X + 352$ mora biti deljiv sa 504. Pošto je X trocifren broj, to je mogućno ako je $X + 352 = 504$ ili $X + 352 = 2 \cdot 504$, odakle se dobija $X = 152$ ili $X = 656$.

Dakle, traženi šestocifren broj može biti 523152 ili 523656.

35. Rešenje. Za $n = 1$ vrednost datog izraza je

$$N(1) = 3^5 + k \cdot 2 + 1 = 244 + 2k = 7 \cdot 34 + 6 + 2k.$$

Za $k = 4$ broj $N(1)$ je deljiv sa 7.

Dokažimo da je

$$N(n) = 3^{6n-1} + 4 \cdot 2^{3n-2} + 1 \tag{1}$$

deljiv sa 7 za svako n. Primenimo metod matematičke indukcije. Već smo dokazali da je $N(1)$ deljivo sa 7 i to je baza indukcije. Pretpostavimo da je $N(n)$, dato sa (1), deljivo sa 7. Postavimo pitanje: Da li iz te pretpostavke izlazi da je $N(n+1)$ deljivo sa 7? Kako je

$$\begin{aligned}
N(n+1) &= 3^{6n+5} + 4 \cdot 2^{3n+1} + 1 \\
&= 3^6 \cdot 3^{6n-1} + 4 \cdot 2^3 \cdot 2^{3n-2} + 1 \\
&= 729 \cdot 3^{6n-1} + 4 \cdot 8 \cdot 2^{3n-2} + 1 \\
&= 104 \cdot 7 \cdot 3^{6n-1} + 3^{6n-1} + 4 \cdot 7 \cdot 2^{3n-2} + 4 \cdot 2^{3n-2} + 1 \\
&= 7 \cdot (104 \cdot 3^{6n-1} + 4 \cdot 2^{3n-2}) + 3^{6n-1} + 4 \cdot 2^{3n-2} + 1 \\
&= 7 \cdot \left(104 \cdot 3^{6n-1} + 4 \cdot 2^{3n-2}\right) + N(n).
\end{aligned}$$

Kao što se vidi, iz pretpostavke da je $N(n)$ deljivo sa 7 izlazi da je $N(n+1)$ deljivo sa 7, čime je dokaz završen.

Prema tome, za $k = 4 + 7\ell$ $(\ell \in \mathbb{Z})$ izraz $N(n)$ je deljiv sa 7.

36. Dokaz. Prema uslovima zadatka je

$$ea + b = kM, \quad ce + d = kN,$$

gde su M i N celi brojevi. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa $-c$ i drugu sa a, a zatim tako dobijene jednačine saberemo, dobijamo

$$ad - bc = k\,(aN - cM).$$

Kao što se vidi, $ad - bc$ je deljivo sa k.

37. Rešenje 1. Brojevi $5k+6$ i $8k+7$ imaju zajedničke delioce ako se razlomak $\dfrac{8k+7}{5k+6}$ može skratiti. Prikažimo ovaj razlomak u obliku tzv. verižnog razlomka:

$$\frac{8k+7}{5k+6} = 1 + \frac{3k+1}{5k+6} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2k+5}{3k+1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{k-4}{2k+5}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{13}{k-4}}}}.$$

Kao što se vidi, razlomak se može skratiti ako se 13 može skratiti sa $k-4$, tj. ako je $k = 13n + 4$, gde je n ceo broj.

Za te vrednosti k dati brojevi se svode na $13\,(5n+2)$ i $13\,(8n+3)$. Prema tome, za $k = 13n+4$ zajednički delilac je 13. Istim postupkom se dokazuje da brojevi $5n+2$ i $8n+3$ nemaju zajedničkih delilaca.

Rešenje 2. Neka je d zajednički delilac brojeva $5k+6$ i $8k+7$, tj.

$$5k+6 = md, \quad 8k+7 = nd.$$

Iz ovih jednačina izlazi

$$(8m-5n)d = 13 \Rightarrow 8m - 5n = 1 \wedge d = 13.$$

Dakle, zajednički delilac je 13 pod uslovom da jednačina $8m-5n=1$ ima rešenja. Jedno rešenje te jednačine (direktnim pogađanjem) je $m=2$, $n=3$, a opšte $m = 5\ell + 2$, $n = 8\ell + 3$, gde je ℓ ceo broj. Za ove vrednosti m, n i $d\,(=13)$ dobijamo $k = 13\ell + 4$.

38. Dokaz. Neka je broj

$$N = \overline{a_{198511}\ldots a_1 a_0} \tag{1}$$

deljiv sa 17. Dovoljno je dokazati da će i sledeći broj

$$N_1 = \overline{a_{198510}\ldots a_1 a_0 a_{198511}}$$

biti deljiv sa 17. Imamo

$$\begin{aligned} N &= a_{198511}\cdot 10^{198511} + a_{198510}\cdot 10^{198510} + \cdots + a_1\cdot 10 + a_0,\\ 10N &= a_{198511}\cdot 10^{198512}\\ &\quad + \underbrace{a_{198510}\cdot 10^{198511} + \cdots + a_1\cdot 10^2 + a_0\cdot 10 + a_{198511}}_{N_1} - a_{198511}, \end{aligned}$$

$$10N = a_{198511}(10^{198512}-1) + N_1. \tag{2}$$

Na osnovu male Fermatove teoreme[1]

$$10^{16} \equiv 1\,(\text{mod} 17) \Rightarrow (10^{16})^{12407} \equiv 1\,(\text{mod}\,17),$$

odakle izlazi da je

$$10^{198512} \equiv 1\,(\text{mod}\,17). \tag{3}$$

Sada na osnovu (1) i (3) iz relacije (2) izlazi $17|N_1$. Analogno imamo implikaciju $17|N_1 \Rightarrow 17|N_2$, gde je $N_2 = \overline{a_{198509}\ldots a_1 a_0 a_{198511} a_{198510}}$, itd.

39. Dokaz. Pođimo od sledećeg stava: *Ako se razlomak p/q može skratiti, tada se i razlomak q/p može skratiti.*

Posmatrajmo recipročnu vrednost razlomka

$$\frac{a^4 + 7a^2 + 11}{a^2+3} = a^2 + 4 - \frac{1}{a^2+3}\,.$$

[1] *Ako je $a \in \mathbb{N}$ i p prost broj, onda je $a^p \equiv a\,(\text{mod}\,p)$.*

Kao što se vidi, razlomak $1/(a^2+3)$ se ne može skratiti ni za jednu vrednost a, tako da se polazni razlomak ne može skratiti.

40. Dokaz. Leva nejednačina se svodi na

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$$

i posle množenja sa 2 dobijamo

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Desna nejednakost se transformiše u

$$a^2+b^2+c^2 \leq 2\,(ab+bc+ca)$$

ili u

$$a^2+b^2+c^2 \leq a(b+c)+b(c+a)+c(a+b). \tag{1}$$

Na osnovu nejednakosti trougla je $b+c \geq a$, $c+a \geq b$ i $a+b < c$, pa je nejednakost (1) tačna.

41. Rešenje. Neka je traženi broj $10a+b$. Napišimo jednakost

$$(10a+b)^2=(a+b)^3$$

u obliku

$$\big(9a+(a+b)\big)^2=(a+b)^3,$$

tj.

$$81a^2+18a\,(a+b)+(a+b)^2=(a+b)^3.$$

Ako levu i desnu stranu ove jednakosti podelimo sa 81, zaključujemo da $a+b$ mora biti deljivo sa 9, a to je jedino mogućno za $a+b=9$. Tada je $(a+b)^3=729$, pa je traženi broj

$$10a+b=\sqrt{(a+b)^3}=\sqrt{729}=27.$$

42. Rešenje. Najmanji četvorocifren broj čiji je kvadrat sedmocifren broj koji se završava sa 400 jeste 1 020, tj. važi jednakost $1\,040\,400=1\,020^2$.

Prema tome, ako broju 1 040 dodamo 400, dobijamo sedmocifren broj koji je potpun kvadrat.

Najveći četvorocifren broj čiji je kvadrat sedmocifren broj koji se završava sa 400 je 3 120, jer je $3\,120^2=9\,734\,400$, a $3\,220^2=10\,368\,400$.

Traženi četvorocifreni brojevi su dati nizom

$$a_k=\big((1\,020+100\,k)^2-400\big):1\,000,$$

tj.

$$a_k=\big((102+10\,k)^2-4\big):10,$$

gde je $k=0,\,1,\,2,\dots,\,21$. To su brojevi

1 040	1 254	1 488	1 742	2 016	2 310
2 624	2 958	3 312	3 686	4 080	4 494
4 928	5 382	5 856	6 350	6 864	7 398
7 952	8 526	9 120	9 734		

43. Rešenje. Svi dvocifreni brojevi koji su multipli od 9 imaju bar jednu neparnu cifru. Trocifreni multipli broja 9 čija je prva cifra 1 otpadaju jer je 1 neparan broj. Ako je prva cifra 2, jedina mogućnost je da zbir ostale dve cifre bude 16, tj. da te cifre budu jednake 8. Prema tome, 288 je najmanji multipl broja 9 koji nema neparnih cifara.

44. Rešenje. 1° Jedno rešenje je skup $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 1, 7, 13, 19, 25\}$. Kao što se vidi, prvih pet brojeva pripadaju skupu $\{6k,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$, a ostalih pet skupu $\{6k - 5,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$, tako da ne postoji nijedna šestorka brojeva čiji je zbir deljiv sa 6.

2° Ako se ovom skupu doda samo jedan broj iz skupa čiji je opšti član $6k - 4$, $6k - 3$, $6k - 2$ ili $6k - 1$, na primer 2, 3, 4 ili 5, jednostavno se dokazuje da će se uvek naći šestorka brojeva čiji je zbir deljiv sa 6.

45. Rešenje. Za $y = 1, 2, 3, 4, 5$ formirajmo skupove $\{5x + 7y | x \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{array}{ll} y = 1: & \{12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, \ldots\}, \\ y = 2: & \{19, 24, 29, 34, 39, 44, \ldots\}, \\ y = 3: & \{26, 31, 36, 41, \ldots\}, \\ y = 4: & \{33, 38, 43, \ldots\}, \\ y = 5: & \{40, 45, \ldots\}. \end{array}$$

Kao što se vidi, brojevi $1, 2, \ldots, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 20, \ldots$ ne mogu se izraziti u obliku $5x + 7y$, a poslednji je 35. Pored toga, primetimo da se 5 uzastopnih brojeva, 36, 37, 38, 39 i 40, mogu izraziti pomoću $5x + 7y$. Ako na njih dodamo 5, dobijamo sledećih 5 uzastopnih brojeva, itd. Prema tome, zaključujemo da je 35 najveći prirodan broj koji se ne može izraziti sa $5x + 7y$.

46. Rešenje. Kvadriranjem leve i desne strane dobijamo

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{ab} = 48 + 20\sqrt[3]{6}.$$

Jedini član na levoj strani koji može da bude racionalan je $2\sqrt[3]{ab}$. Prema tome,

$$2\sqrt[3]{ab} = 48 \Rightarrow \sqrt[3]{ab} = 24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow ab = 2^9 \cdot 3^3,$$

pa ostaje

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b} = 20\sqrt[3]{6}. \tag{1}$$

Na osnovu jednakosti $ab = 2^9 \cdot 3^3$ zaključujemo da su prirodni brojevi a i b različiti. Zbog toga pretpostavljamo da je jedna razlika na levoj strani jednakosti jednaka nuli.

Neka je $\sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[3]{b}$, tj. $a^2 = 8b$. Iz sistema $ab = 2^9 \cdot 3^3$, $a^2 = 8b$ nalazimo $a = 2^4 \cdot 3 = 48$, $b = 2^5 \cdot 3^2 = 288$. Za ove vrednosti a i b imamo

$$\sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^{10} \cdot 3^4} - 2\sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = 2^3 \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 3} - 2^2\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 20\sqrt[3]{6},$$

pa je jednakost (1) ispunjena.

47. Rešenje. Neka je $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ niz prostih brojeva. Tada skup

$$\{p_1,\ p_1^2 p_2,\ p_1^2 p_2^2 p_3,\ p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4, \ldots\} \tag{1}$$

ima osobinu da zbir bilo koja dva elementa nije kvadrat prirodnog broja.

Na primer,

$$p_1^2 p_2 + p_1^2 p_2^2 p_3 = p_1^2 p_2 (1 + p_2 p_3)$$

nije kvadrat prirodnog broja jer 1 nije deljivo sa p_2, ili uopšte

$$\begin{aligned} &p_1^2 p_2^2 \cdots p_{\ell-1}^2 p_\ell + p_1^2 p_2^2 \cdots p_{\ell-1}^2 p_\ell^2 p_{\ell+1}^2 \cdots p_{m-1}^2 p_m \\ &\qquad = p_1^2 p_2^2 \cdots p_{\ell-1}^2 p_\ell (1 + p_\ell p_{\ell+1}^2 \cdots p_{m-1}^2 p_m), \end{aligned}$$

takođe nije kvadrat prirodnog broja jer 1 nije deljivo sa p_ℓ.

Jednostavan primer takvog skupa je

$$\{2,\ 2^2 3,\ 2^2 3^2 5,\ 2^2 3^2 5^2 7,\ 2^2 3^2 5^2 7^2 11, \ldots\}.$$

48. Rešenje. Postoji 12 različitih četvorocifrenih brojeva, formiranih od cifara b, b, a i c. To su sledeći brojevi (uređeni leksikografski):

$$\begin{array}{cccccc} \overline{abbc}, & \overline{abcb}, & \overline{acbb}, & \overline{babc}, & \overline{bacb}, & \overline{bbac}, \\ \overline{bbca}, & \overline{bcab}, & \overline{bcba}, & \overline{cabb}, & \overline{cbab}, & \overline{cbba}. \end{array}$$

Zbir ovih brojeva je

$$S = 1111 \cdot (3a + 6b + 3c).$$

S obzirom da je broj $\overline{cbbba}$ može prikazati u obliku

$$10000\,c + 1110\,b + a,$$

iz uslova $S = \overline{cbbba}$ imamo

$$1111\,(3a + 6b + 3c) = 10000\,c + 1110\,b + a,$$

tj.

(1) $$3332\,a + 5556\,b = 6667\,c.$$

Ako jednakost (1) napišemo u obliku

(2) $$3333\,a + 5555\,b = 6666\,c + a - b + c,$$

zaključujemo da mora biti $a - b + c = 0$, tj. $b = a + c$, jer su ostali sabirci deljivi sa 1111. Na osnovu toga jednakost (2) se svodi na

$$3a + 5b = 6c.$$

Kako je $b = a + c$, odavde je $c = 8a$. S obzirom da je $a \neq 0$, ova jednakost je ispunjena samo za $a = 1$ i $c = 8$. Iz uslova $b = a + c$ nalazimo $b = 9$. Prema tome, traženi broj je $N = 1989$.

49. Rešenje. Neka su a i b katete i c hipotenuza pravouglog trougla. Na osnovu teksta zadatka važi jednakost

$$2 \cdot \frac{ab}{2} = 3\,(a + b + c),$$

tj.

(1) $$ab = 3\,(a + b + c).$$

Za ovaj trougao važi Pitagorina teorema

(2) $$a^2 + b^2 = c^2.$$

Množenjem jednačine (1) sa 2 i sabiranjem sa (2) dobijamo kvadratnu jednačinu po $a + b$:

$$(a+b)^2 - 6\,(a+b) - 6\,c - c^2 = 0.$$

Pozitivni koren ove jednačine je

$$a + b = 3 + \sqrt{9 + 6\,c + c^2} = 3 + \sqrt{(c+3)^2} = c + 6.$$

Zamenom $c = a + b - 6$ u (1) imamo

$$ab = 3\,(a + b + a + b - 6) = 6\,a + 6\,b - 18,$$

odakle je

$$a = \frac{6\,b - 18}{b - 6} = 6 + \frac{18}{b - 6}.$$

Pošto su a i b celi, tj. prirodni brojevi, $b - 6$ može biti 1, 2, 3, 6, 9, 18. Na osnovu toga imamo sledeća rešenja

a	24	15	12	9	8	7
b	7	8	9	12	15	24
c	25	17	15	15	17	25

50. Rešenje. Prirodan broj n sa najmanje tri cifre možemo prikazati u obliku

$$n = 10^3 A + 100\,a + 10\,b + c,$$

gde A može biti jednako nuli ako je $a \neq 0$.

Ako n kvadriramo, u broju n^2 u zadnje tri cifre učestvovaće

$$200\,ac + 100\,b^2 + 20\,bc + c^2.$$

Pošto se n^2 završava sa iste tri cifre kao i n, to znači da se $n^2 - n$, tj. broj

(1) $$200\,ac + 100\,b^2 + 20\,bc + c^2 - 100\,a - 10\,b - c,$$

završava sa najmanje tri nule.

Uočimo da se najpre c i c^2 moraju završavati sa istim ciframa, što znači da je $c = 0$, 1, 5 ili 6. Dakle, imamo 4 slučaja.

1° $c = 0$. Izraz (1) se svodi na $100\,b^2 - 100\,a - 10\,b$.

Odavde izlazi da a i b moraju biti jednaki nuli. Prema tome, kvadrat svih brojeva koji se završavaju sa tri nule, završava se takođe sa tri nule.

2° $c = 1$. Izraz (1) postaje $100\,a + 100\,b^2 + 10\,b$.

Cifre desetica i stotina jednake su nuli ako je $b = 0$ i $a = 0$. Svi brojevi koji se završavaju sa 001 imaju kvadrat koji se završava 001.

3° $c = 5$. Izraz (1) je

$$900\,a + 100\,b^2 + 90\,b + 20. \tag{2}$$

Da cifra desetica ovog broja bude nula, jedina mogućnost je $b = 2$. Tada je (2) jednako $900\,a + 600$, pa je za $a = 6$ broj stotina jednak nuli. Dakle, svi brojevi koji se završavaju sa 625 imaju kvadrat koji se završava sa 625.

4° $c = 6$. Tada je izraz (1) jednak

$$1100\,a + 100\,b^2 + 110\,b + 30. \tag{3}$$

Broj desetica je jednak nuli samo za $b = 7$. Za ovu vrednost b izraz (3) se svodi na $1100\,a + 5700$. Cifra stotina je nula ako je $a = 3$. Prema tome, ako se broj n završava sa 376, tada se i n^2 završava sa 376.

51. Rešenje. Neka je traženi dvocifreni broj $10x + y$, gde su x i y cifre tog broja. Dodavanjem zbira cifara tom broju dobijamo

$$10x + y + x + y, \text{ tj. } 10x + x + 2y.$$

Posmatrajmo sledeća tri slučaja:

1° $x+2y \leq 9$. Tada je zbir cifara broja $10x+x+2y$ jednak $x+x+2y$, pa je na osnovu teksta zadatka

$$10x + x + 2y + x + x + 2y = 10y + x.$$

Iz ove jednakosti izlazi $y = 2x$. Jedina mogućnost je $x = 1$, $y = 2$ (jer za $x = 2, y = 4$ je $2y + x = 10$). Dakle, traženi broj je 12. Zaista, kada se ovom broju doda zbir cifara, dobijamo 15. Ponovnim dodavanjem zbira cifara nalazimo 21, a to je broj koji ima obrnuti redosled cifara od 12.

2° $10 \leq x + 2y \leq 19$. Tada se broj $10x + x + 2y$ svodi na

$$10\,(x + 1) + x + 2y - 10.$$

Zbir cifara ovog broja je $x + 1 + x + 2y - 10$. Važi jednakost

$$10\,(x + 1) + x + 2y - 10 + x + 1 + x + 2y - 10 = 10y + x,$$

tj.

$$12x - 9 = 6y.$$

Ova jednakost nema rešenja jer je na levoj strani neparan, a na desnoj strani paran broj.

3° $x + 2y \geq 20$. U ovom slučaju se broj $10x + x + 2y$ svodi na $10\,(x + 2) + x + 2y - 20$. Zbir cifara dobijenog broja je $x + 2 + x + 2y - 20$, pa je

$$10\,(x + 2) + x + 2y - 20 + x + 2 + x + 2y - 20 = 10y + x.$$

Posle sređivanja, ova jednakost postaje

$$y = 2\,x - 3.$$

Vodeći računa o uslovu $x + 2y \geq 20$, jedina mogućnost je $x = 6$, $y = 9$. Prema tome, i broj 69 ispunjava uslove zadatka, tako da imamo dva rešenja: 12 i 69.

52. Rešenje. Neka je n nepoznati četvorocifren broj koji pri deobi sa 131 daje ostatak 112. To znači da je

$$\frac{n}{131} = p + \frac{112}{131} \Rightarrow n = 131\,p + 112,$$

gde je p prirodan broj. Deljenjem poslednje jednakosti sa 132 dobijamo

$$\frac{n}{132} = \frac{131\,p}{132} + \frac{112}{132} = p + \frac{112 - p}{132}.$$

Pošto je ostatak jednak 98, imamo $112 - p = 98$, odakle izlazi $p = 112 - 98 = 14$. Na osnovu toga je traženi broj $n = 131 \cdot 14 + 112 = 1946$.

53. Rešenje. Neka su dati prirodni brojevi a, b, c. Po uslovu zadatka je

(1) $$a + b + c = abc.$$

Pošto je ova jednačina simetrična u odnosu na promenljive, možemo pretpostaviti da je $a \le b \le c$. Tada iz (1) dobijamo nejednakost $abc \le c + c + c \Rightarrow ab \le 3$.

Ovu nejednakost zadovoljavaju parovi $(1, 1)$, $(1, 2)$ i $(1, 3)$. Za $a = 1$, $b = 1$ iz (1) izlazi $2 + c = c$, što je nemoguće. Za $a = 1$, $b = 2$ iz (1) nalazimo $c = 3$, dok za $a = 1$, $b = 3$ izlazi $c = 2$. Trojka prirodnih brojeva koja zadovoljava uslove zadatka je (1, 2, 3). To rešenje je dobijeno pod uslovom $a \le b \le c$. Prema tome, svih 6 permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$ su rešenja zadatka.

54. Rešenje. Jedini brojevi čiji su četvrti stepeni četvorocifreni brojevi su 6, 7, 8 i 9, tj.

$$6^4 = 1296, \quad 7^4 = 2401, \quad 8^4 = 4096, \quad 9^4 = 6561.$$

Uslove zadatka zadovoljava broj 2401, jer je $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4 = 7^4$.

55. Rešenje. Neka je $x - y = v$, $xy = u$. Kvadriranjem prve jednakosti imamo

$$x^2 - 2\,xy + y^2 = v^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = v^2 + 2\,u.$$

Odavde je

$$x^4 + 2\,x^2y^2 + y^4 = (v^2 + 2\,u)^2,$$

tj.

$$(v^2 + 2\,u)^2 - 2\,u^2 = x^4 + y^4.$$

Zamenom $v = 6$, $x^4 + y^4 = 272$, poslednja jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu

$$u^2 + 72\,u + 512 = 0.$$

Koreni ove jednačine su $u = -8$ i $u = -64$. Iz sistema

$$x - y = 6, \quad xy = -8$$

nalazimo $x = 2$, $y = -4$ ili $x = 4$, $y = -2$. Za $u = -64$ sistem

$$x - y = 6, \quad xy = -64$$

nema realna rešenja. Dakle, traženi broj je -8.

56. Rešenje. Kao što se vidi, šesti stepen traženog prirodnog broja je devetocifren broj. Kako je

$$\begin{aligned} 21^6 &= 85\,766\,121, & 22^6 &= 113\,379\,904, \\ 31^6 &= 887\,503\,681, & 32^6 &= 1\,073\,741\,824, \end{aligned}$$

nepoznati broj treba tražiti u skupu $\{22, 23, \ldots, 31\}$. Primetimo da je zbir cifara šestog stepena tog broja 45, tj. deljiv je sa 3, što znači da je i taj broj deljiv sa 3. Kandidati su 24, 27, 30. Broj 30 otpada jer se 30^6 završava sa 6 nula, a broj 24^6 se završava sa 6. Pošto broja 6 nema među datim ciframa, jedina preostala mogućnost je 27. Zaista, $27^6 = 387\,420\,489$, a broj na desnoj strani ima sve cifre date u zadatku.

57. Rešenje. Napišimo dati broj u obliku

$$n = 77^{77^{77}} = (7 \cdot 11)^{77^{77}} = 7^{77^{77}} \cdot 11^{77^{77}} = A \cdot B,$$

gde je $A = 7^{77^{77}}$ i $B = 11^{77^{77}}$. Da bismo odredili dve krajnje cifre broja n, dovoljno je naći dve krajnje cifre brojeva A i B. Polazeći od činjenice da je $7^4 = 49^2 = 2401$, zaključujemo da se $7^8, 7^{12}, \ldots$ i uopšte 7^{4k} $(k \in \mathbb{N})$ završava se sa 01. Kako je

$$77^{77} = (76+1)^{77} = \sum_{k=0}^{77} \binom{77}{k} 76^{77-k} = \sum_{k=0}^{76} \binom{77}{k} 76^{77-k} + 1 = 4 \cdot (19m) + 1,$$

broj A se završava sa $01 \cdot 7 = 07$.

S druge strane, za stepene broja 11 važi sledeće pravilo: *Stepen* $11^{10j+\ell}$, *gde je* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *i* $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ *završava se na* $\ell 1$.

Ovo pravilo se jednostavno dokazuje. Naime, 11^{10j} se završava na 01, a 11^{ℓ} na $\ell 1$. Na osnovu toga imamo

$$B = 11^{77^{77}} = 11^{(70+7)^{77}} = 11^{10j+7^{77}} = 11^{10j+7\,(1400+1)^{19}} = 11^{10M+7},$$

gde su j i M prirodni brojevi. Dakle, B se završava na 71. Množenjem završetaka brojeva A i B, tj $07 \cdot 71 = 497$, dolazimo do traženog rezultata: broj n se završava na 97.

58. Rešenje. Navedimo najpre u tabeli pet poslednjih cifara broja 5^n.

n	5 zadnjih cifara od 5^n
5	03125
6	15625
7	78125
8	90625
9	53125

n	5 zadnjih cifara od 5^n
10	65625
11	28125
12	40625
13	03125
14	15625

Posmatranjem ove tabele zaključujemo da se 5^5 i 5^{13}, ili uopšte 5^{8N+5}, gde je $N = 0, 1, 2, \ldots$, završavaju na 03125.

Kako je $5^5 = 3125 = 3120 + 5 = 8 \cdot 390 + 5$, imamo

$$5^{5^5} = 5^{8 \cdot 390+5} = 25^{8 \cdot 195} \cdot 5^5 = (3 \cdot 8 + 1)^{8 \cdot 195}(8 \cdot 390 + 5).$$

Primenom binomnog obrasca na $(3 \cdot 8 + 1)^{8 \cdot 195}$ dobijamo broj koji se može prikazati u obliku $8M + 5$. Dakle, broj 5^{5^5} se prikaziuje u obliku $8M + 5$ i završava se na 03125.

Kao što se vidi, odavde se može izvući induktivna hipoteza da se uopšte $5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}$ završava na 03125.

59. Rešenje. Kako je $5 \equiv 1 \pmod 4) \Rightarrow 5^{5^{\cdot^{\cdot^{5^{\overline{55\cdots 5}}}}}} \equiv 1 \pmod 4$, tj.

$$\left.5^{5^{\cdot^{\cdot^{5^{\overline{55\cdots5}\,\}\,m \text{ cifara}}}}}}\right\}n-2 \quad = 4p+1 \qquad (p \in \mathbb{N}),$$

dobijamo

$$N = 5^{5^{4p+1}} = 5^{(5^4)^p \cdot 5} = 5^{625^p \cdot 5}.$$

Pošto je $625 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 625^p \equiv 1 \pmod 8$, tj. $625^p = 8q+1$, imamo

$$625^p \cdot 5 = (8q+1)\cdot 5 = 40\,q + 5 = 8k+5.$$

Time smo dobili da je $N = 5^{8k+5}$. Izvršimo sledeće transformacije:

$$N = 5^{8k} \cdot 5^5 = \Big((5^k)^8 - 1 + 1\Big)\ 5^5, = \Big((5^k-1)(5^k+1)(5^{2k}+1)(5^{4k}+1)+1\Big)\cdot 5^5.$$

S obzirom da je

$$4 \,|\, 5^k - 1, \quad 2 \,|\, 5^k + 1, \quad 2 \,|\, 5^{2k} + 1, \quad 2 \,|\, 5^{4k} + 1,$$

sleduje

$$(5^k-1)(5^k+1)(5^{2k}+1)(5^{4k}+1) = 2^5 \cdot s \qquad (s \in \mathbb{N}).$$

Tada je

$$N = (2^5 s + 1)\, 5^5 = 10^5 s + 5^5 = 10^5 s + 3125.$$

Dakle, broj N se završava sa 03125.

60. Rešenje 1. Prikažimo dati broj u obliku

$$3^{1995} = 3^{1994+1} = 3 \cdot 3^{1994} = 3 \cdot 9^{997}.$$

Primenom binomnog obrasca dobijamo

$$\begin{aligned} 3 \cdot 9^{997} &= 3 \cdot (10-1)^{997} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{997} (-1)^k \binom{997}{k} 10^{997-k} \\ &= 3 \cdot \left(10^{997} - \binom{997}{1} 10^{996} + \cdots + \binom{997}{996} \cdot 10 - 1\right). \end{aligned}$$

Poslednje dve cifre se dobijaju iz zadnja dva člana ovog razvoja. Kako je

$$3 \cdot \left(\binom{997}{996} \cdot 10 - 1\right) = 3 \cdot (997 \cdot 10 - 1) = 299\boxed{07},$$

poslednje dve cifre su 07.

Rešenje 2. Polazeći od jednakosti $3^5 = 243 = 43 \pmod{100}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
3^{10} \pmod{100} &= 43^2 \pmod{100} = 1849 \pmod{100} = 49 \pmod{100},\\
3^{15} \pmod{100} &= 43 \cdot 49 \pmod{100} = 2107 \pmod{100} = 7 \pmod{100},\\
3^{30} \pmod{100} &= 7 \cdot 7 \pmod{100} = 49 \pmod{100},\\
3^{60} \pmod{100} &= 49 \cdot 49 \pmod{100} = 2401 \pmod{100} = 1 \pmod{100},
\end{aligned}$$

odakle je $3^{1995} \pmod{100} = 3^{33 \cdot 60 + 15} \pmod{100} = 3^{15} \pmod{100} = 7 \pmod{100}$.

Prema tome, broj 3^{1995} se završava sa 07.

61. Rešenje. Neka je $n/383 = \ldots abcde$, gde je $n = \ldots 33333$. Iz ove jednakosti izlazi $383 \times \ldots abcde = \ldots 33333$, odakle zaključujemo da je $e = 1$. To znači da je $383 \times \ldots abcd1 = \ldots 33333$, tj. $383 \times \ldots abcd0 = \ldots 33333 - 383 = \ldots 32950$.

Ako ovu jednakost skratimo sa 10, dobijamo $383 \times \ldots abcd = \ldots 33295$. Iz ove jednakosti izlazi da je $d = 5$. Ovim postupkom dobijamo niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
383 \times \ldots abc5 &= \ldots 33295,\\
383 \times \ldots abc0 &= \ldots 33295 - 5 \cdot 383 = \ldots 31380,\\
383 \times \ldots abc &= \ldots 33138 \Rightarrow c = 6,\\
383 \times \ldots ab6 &= \ldots 33138,\\
383 \times \ldots ab0 &= \ldots 33138 - 6 \cdot 383 = \ldots 30840,\\
383 \times \ldots ab &= \ldots 3384 \Rightarrow b = 8,\\
383 \times \ldots a8 &= \ldots 33084,\\
383 \times \ldots a0 &= \ldots 33084 - 8 \cdot 383 = \ldots 30020,\\
383 \times \ldots a &= \ldots 33002 \Rightarrow a = 4.
\end{aligned}$$

Prema tome, broj $n/383$ se završava sa 48651.

62. Rešenje. Neka je A_2 skup kvadrata prirodnih brojeva u opsegu od 1 do 1000000 i A_3 skup kubova prirodnih brojeva u istom opsegu. Broj kvadrata je $|A_2| = 1000$ a broj kubova $|A_3| = 100$. Presek skupova A_2 i A_3 je skup $A_2 \cap A_3$ i njega obrazuju brojevi koji su šesti stepeni prirodnih brojeva. Od 1 do 1000000 ima 10 takvih brojeva, tj. $|A_2 \cup A_3| = 10$.

U zadatku tražimo koliko elemenata ima skup $A_2 \cup A_3$. Kako je

$$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|,$$

imamo

$$|A_2 \cup A_3| = 1000 + 100 - 10 = 1090.$$

63. Rešenje. Pretraživanjem nalazimo da se 38 ne može izraziti pomoću zbira dva složena neparna broja. Parni brojevi veći od 38 mogu se svrstati u 5 skupova čiji su opšti članovi

$$\begin{aligned}
40 + 10k &= 15 + 25 + 10k = 15 + 5(2k + 5) = 3 \cdot 5 + 5 \cdot (2k + 5),\\
42 + 10k &= 27 + 15 + 10k = 27 + 5(2k + 3) = 3 \cdot 9 + 5 \cdot (2k + 3),\\
44 + 10k &= 9 + 35 + 10k = 9 + 5(2k + 7) = 3 \cdot 3 + 5 \cdot (2k + 7),\\
46 + 10k &= 21 + 25 + 10k = 21 + 5(2k + 5) = 3 \cdot 7 + 5 \cdot (2k + 5),\\
48 + 10k &= 33 + 15 + 10k = 33 + 5(2k + 3) = 3 \cdot 11 + 5 \cdot (2k + 3),
\end{aligned}$$

gde je $k = 0, 1, 2 \ldots$ Prema tome, 38 je zaista najveći paran prirodan broj koji se ne može izraziti kao zbir dva neparna složena broja.

64. Rešenje. Neka su pomenuti dvocifreni brojevi redom $2x$, x, $2x$, od kojih se, napisani jedan pored drugog, sastoji šestocifreni broj a. Tada broj a možemo prikazati u obliku

$$a = 2x \cdot 10^4 + x \cdot 10^2 + 2x = 20\,102\, x,$$

gde je $x < 50$. Za broj 20 102 važi faktorizacija $20\,102 = 2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 23$, pa je

$$a = 2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 23 \cdot x.$$

Pošto je a kvadrat prirodnog broja, vodeći računa o ograničenju za x, jedini izbor je $x = 2 \cdot 19 = 38$. Tada je $a = 20\,102 \cdot 38 = 763\,876 = 874^2$.

NAPOMENA. Ako bismo izmenili tekst tako da pretposlednja rečenica teksta glasi: "Prvi i treći od njih su jednaki, a srednji je dva puta veći," tada bi se šestocifreni broj a sastojao iz dvocifrenih brojeva x, $2x$, x, napisanih jedan pored drugog. Prema tome,

$$a = 10^4 x + 10^2 \cdot 2x + x = (10^2 + 1)^2 x,$$

gde je $x < 50$.

Pošto je a kvadrat nekog prirodnog broja, x je dvocifren broj manji od 50, postoje četiri vrednosti: $x = 16,\ 25,\ 36,\ 49$ za koje je redom

$$a = 16\,32\,16 = 404^2, \quad a = 25\,50\,25 = 505^2, \quad a = 36\,72\,36 = 606^2, \quad a = 49\,98\,49 = 707^2.$$

65. Rešenje. Neka su p_1 i p_2 različiti prosti brojevi. Broj $p_1^{k_1}$ ima $k_1 + 1$ delilaca: $1, p_1, p_1^2, \cdots, p_1^{k_1}$. Broj $p_2^{k_2}$ ima k_2+1 delilaca. Primenom pravila proizvoda broj $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ ima $(k_1+1)(k_2+1)$ delilaca. Uopšte, broj $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ ima

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_m + 1)$$

delilaca.

Posmatrajmo brojeve koji imaju 30 delilaca i pokušajmo da nađemo najmanji takav broj. Za $m = 1$ uzimamo $k_1 = 29$. Dakle, brojevi $2^{29}, 3^{29}, 5^{29}, \ldots$ imaju 30 delilaca i najmanji je 2^{29}. Za $m = 2$ je $(k_1 + 1)(k_2 + 1) = 30$, pa nalazimo kombinacije $(k_1, k_2) = (14, 1), (9, 2), (5, 4)$. Da proizvod $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ bude što manji, izlazi da je $p_1 = 2$ i $p_2 = 3$, pri čemu stepen od 3 mora biti manji nego stepen od 2. Mogućnosti su

$$2^{14} \cdot 3 = 49142, \quad 2^9 \cdot 3^2 = 4608, \quad 2^5 \cdot 3^4 = 2592.$$

Najmanji broj je 2592.

Za $m = 3$ uzimamo $k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 1$, dok su p_1, p_2, p_3 jednaki $2, 3, 5$ (nije obavezno istim redom). Najmanji broj je jednak $5^1 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 720$ i to je traženi broj.

66. Dokaz. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ možemo podeliti na podskupove

$$(6m-5),\ (6m-4),\ (6m-3),\ (6m-2),\ (6m-1),\ (6m),$$

gde je $m = 1, 2, \ldots$ Prosti brojevi veći od 3 pripadaju podskupovima $(6m-1)$ i $(6m+1)$, gde smo umesto $(6m-5)$ uzeli $(6m+1)$, jer se isključuje broj 1.

Neka su p_1, p_2, p_3 prosti brojevi koji obrazuju aritmetičku progresiju. Kako je $p_2 = \dfrac{p_1 + p_3}{2}$, svi ovi prosti brojevi su oblika

$$p_1 = 6i - 1,\ p_2 = 6j - 1,\ p_3 = 6k - 1, \tag{1}$$

ili su svi oblika

$$p_1 = 6i + 1,\ p_2 = 6j + 1,\ p_3 = 6k + 1. \tag{2}$$

Ako je, na primer, $p_1 = 6i + 1, p_3 = 6j - 1$, tada p_2 ne može biti prost broj jer je

$$p_2 = \frac{p_1 + p_3}{2} = \frac{6i + 1 + 6j - 1}{2} = 3\,(i + j).$$

U slučajevima (1) i (2) je diferencija progresije

$$d = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = 6\,(j - i) = 6\,(k - j),$$

pa je zaista deljiva sa 6.

Najmanja trojka prostih brojeva koja ispunjava uslove zadatka je (7, 13, 19).

67. Dokaz. Zbir n uzastopnih prirodnih brojeva $k,\ k + 1, \ldots,\ k + n - 1$ jednak je

$$S_n = \frac{n}{2}\,(k + k + n - 1) = \frac{n}{2}\,(2\,k + n - 1),$$

gde je $n \geq 3$ i $k \geq 1$.

Ako je n paran broj, tj. $n = 2m$ $(m > 1)$, imamo $S_n = m\,(2\,k + 2\,m - 1)$, a ovo je složen broj.

Ako je n neparan broj, tj. $n = 2\,m + 1$ $(m \geq 1)$, zbir je

$$S_n = \frac{2\,m + 1}{2}\,(2\,k + 2\,m + 1 - 1) = (2\,m + 1)(k + m).$$

Kao što se vidi, i ovo je složen broj, čime je dokaz završen.

68. Dokaz. Binomni koeficijent se definiše na sledeći način:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,.$$

Jednostavno se dokazuje jednakost

$$\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k} = \binom{n}{k}. \tag{1}$$

S obzirom da je

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, a^{n-k} b^k,$$

treba dokazati da je $\binom{n}{k}$ deljiv sa n ako je n prost broj, gde je $k = 1,\ 2, \ldots,\ n - 1$.

Napišimo jednakost (1) u obliku

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}. \tag{2}$$

Poznato je da su binomni koeficijenti celi brojevi. To znači da je na levoj strani jednakosti (2) ceo broj. Naravno, i na desnoj strani mora biti ceo broj. Pošto je n prost broj a k je manji od n, zaključujemo da su k i n uzajamno prosti brojevi, tj. nemaju zajedničke faktore. Na osnovu toga zaključujemo da je $\binom{n}{k}$ deljivo sa n, što je trebalo dokazati.

69. Dokaz. Primenimo metod matematičke indukcije. Tvrđenje je tačno za $n = 2^1 = 2$, tj. $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$. Naime, prvi i treći (poslednji) koeficijent su jednaki 1 (neparni) a drugi 2 (paran).

Neka je $n = 2^N$, gde je N prirodan broj. Onda je

$$(1+x)^{2^N} = \sum_{\ell=0}^{2^N} \binom{2^N}{\ell} x^\ell = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{2^N-1}x^{2^N-1} + x^{2^N}.$$

Pretpostavimo da su koeficijenti $p_1, p_2, \ldots, p_{2^N-1}$ parni brojevi. Ako umesto N uzmemo $N+1$, dobijamo

$$\begin{aligned}(1+x)^{2^{N+1}} &= (1+x)^{2^N\cdot 2} = \left((1+x)^{2^N}\right)^2 \\ &= \left(1 + p_1x + p_2x^2 + p_{2^N-1}x^{2^N-1} + x^{2^N}\right)^2.\end{aligned}$$

Kvadriranjem polinoma u zagradi, tj. množenjem samim sobom, vidimo da će samo koeficijenti uz x^0 i $x^{2^{N+1}}$ biti neparni, a ostali parni. Time je induktivni dokaz završen.

70. Dokaz. Primenimo Dirihleov[2] princip. Posmatrajmo 5 kaveza označenih sa $\{0\}$, $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$. U kavez sa oznakom $\{0\}$ ubacujemo broj koji je deljiv sa 9, u kavez sa oznakom $\{1,8\}$ ubacujemo broj čiji je ostatak deljenja sa 9 jednak 1 ili 8, itd. Pošto imamo 5 kaveza i 6 brojeva, u jedan kavez moramo staviti bar dva broja, tako da mora postojati bar jedan par brojeva čiji je zbir ili razlika deljivi sa 9.

71. Dokaz. Izaberimo najpre parove čiji elementi imaju zbir 104. To su $(4,100)$, $(7,97), (10,94), \ldots, (49,55)$. Ovih parova ima 16. Sada pokušavamo da izdvojimo skup od 20 brojeva, pri čemu ne postoje dva broja čiji je zbir 104. Uzimamo 4, $7, 10, \ldots, 49$ (to su prvi elementi u gornjim parovima) i 1 i 52. Ovde ima 18 brojeva. Potrebna su još dva broja. Bilo koji da uzmemo, pojaviće se dva para brojeva čiji je zbir 104.

Primetimo da smo primenili tzv. DIRICHLET-ov princip.

72. Dokaz. Fibonačijevi brojevi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ definisani su rekurentnom formulom

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \tag{1}$$

[2]Dirihle Ležen (Dirichlet Lejeune Peter Gustav (1805–1859)) nemački matematičar, francuskog porekla, poznat po radovima iz Teorije brojeva i Matematičke analize.

gde je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Izrazimo a_{12n} pomoću linearne kombinacije brojeva a_{12n-12} i a_{12n-13}. Na osnovu (1) imamo

$$\begin{aligned} a_{12n} &= a_{12n-1} + a_{12n-2} \\ &= 2\,a_{12n-2} + a_{12n-3} \\ &= 3\,a_{12n-3} + 2\,a_{12n-4} \\ &= 5\,a_{12n-4} + 3\,a_{12n-5} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Primetimo da su koeficijenti uz Fibonačijeve brojeve na desnim stranama početni Fibonačijevi brojevi. To su brojevi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... Prema tome,

$$a_{12n} = 233\,a_{12n-12} + 144\,a_{12n-13}.$$

Na osnovu ove jednakosti zaključujemo da je a_{12n} deljiv sa 12 ako je a_{12n-12} deljiv sa 12. S obzirom da je $a_{12} = 144$ (baza indukcije), dokaz je završen.

73. Dokaz. Pretpostavimo da je NZD $(2^m - 1, 2^n + 1) = d$ i $d > 1$. Tada je $2^m - 1 = kd$ i $2^n + 1 = \ell d$ $(k, \ell \in \mathbb{N})$, pa je $2^m = kd + 1$ i $2^n = \ell d - 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} &(1) \qquad 2^{mn} = (2^m)^n = (kd+1)^n = M_1 d + 1 \qquad (M_1 \in \mathbb{N}), \\ &(2) \qquad 2^{mn} = (2^n)^m = (\ell d - 1)^m = M_2 d + (-1)^m = M_2 d - 1 \qquad (M_2 \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

jer je m neparan broj.

Iz (1) i (2) nalazimo $M_1 d + 1 = M_2 d - 1 \Rightarrow d(M_2 - M_1) = 2$ pa je $d|2$. Kako je $d > 1$, sleduje $d = 2$, što je nemogućno jer d ne može biti paran broj. Dakle, $d = 1$, što je trebalo dokazati.

74. Dokaz. Pretpostavimo da je $2\,(m^2 + mn + n^2)$ kvadrat prirodnog broja. Iz ove pretpostavke izlazi da m i n moraju biti parni brojevi, jer ako je bar jedan neparan, onda je $m^2 + mn + n^2$ neparan, pa 2 puta neparan ne može biti kvadrat. Prema tome, $m = 2M_1$ i $n = 2N_1$. Dati izraz postaje $8\,({M_1}^2 + M_1 N_1 + {N_1}^2)$. Pošto je ispred zagrade 8, broj u zagradi mora biti paran, tj. $M_1 = 2M_2, N_1 = 2N_2$, itd. do beskonačnosti. To znači da su m i n beskonačno veliki brojevi, što je u kontradikciji sa gornjom pretpostavkom.

75. Dokaz. Kako je $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256, \ldots$, poslednja cifra broja 2^n se periodički ponavlja. Za $n = 4\,k$ poslednja cifra je $a = 6$, za $n = 4\,k + 1$ je $a = 2$, za $n = 4\,k + 2$ je $a = 4$ i za $n = 4\,k + 3$ je $a = 8$.

Pošto je za $n = 4\,k$ poslednja cifra $a = 6$, zaključujemo da je ab deljivo sa 6. Za $n = 4\,k + 1$ imamo $2^{4\,k+1} = 10\,b + 2$. Odavde izlazi

$$10\,b = 2^{4\,k+1} - 2 = 2\,(2^{4\,k} - 1).$$

Dokažimo da je $2^{4\,k} - 1$ deljivo sa 3. Imamo

$$\begin{aligned} 2^{4\,k} - 1 &= (2^{2\,k} - 1)(2^{2\,k} + 1) = (4^k - 1)(2^{2\,k} + 1) \\ &= (4 - 1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \cdots + 4 + 1)(2^{2\,k} + 1) \\ &= 3\,(4^{k-1} + 4^{k-2} + \cdots + 4 + 1)(2^{2\,k} + 1). \end{aligned}$$

Kako je 3 jedan faktor broja $2^{4k}-1$, b je deljivo sa 3, pa je ab deljivo sa 6.

Za $n=4k+2$ je $2^{4k+2}=10b+4$, tj.

$$10b=2^{4k+2}-4=4(2^{4k}-1),$$

a $2^{4k}-1$ je deljivo sa 3.

Najzad, za $n=4k+3$ je

$$2^{4k+3}=10b+8 \Rightarrow 10b=8(2^{4k}-1)$$

i ponovo imamo faktor $2^{4k}-1$ koji je deljiv sa 3. Prema tome, u svim slučajevima je ab deljivo sa 6, čime je dokaz završen.

76. Dokaz. Pretpostavimo da takvi brojevi postoje. Neka je njihov oblik $a\cdot 10^k+x$, gde je a prva cifra, a broj x sadrži ostale cifre, tako da je $x<10^k$.

Ako se početna cifra prebaci na kraj, dobija se broj $10x+a$. Pošto je taj broj pet puta veći od početnog, važi jednakost

$$10x+a=5(a\cdot 10^k+x),$$

iz koje dobijamo

$$5x=(5\cdot 10^k-1)a.$$

S obzirom da $5\cdot 10^k-1$ nije deljivo sa 5, jedina mogućnost je $a=5$, ali je tada $x=5\cdot 10^k-1>10^k$, što je suprotno uslovu $x<10^k$. Prema tome, takvi brojevi ne postoje.

Do istog zaključka možemo doći na sledeći način: Prebacivanjem prve cifre na kraj ne može se povećati broj cifara novonastalog broja. To znači da početna cifra mora biti 1. Međutim, ako se 1 prebaci na kraj, dobija se broj koji nije deljiv sa 5.

77. Dokaz. Proizvoljna šestorka uzastopnih prirodnih brojeva sadrži tri parna broja. Nijedan od njih ne može biti uzajamno prost u odnosu na sve ostale, jer sadrže zajednički faktor 2. Ostaju tri neparna broja. Među njima postoji samo jedan koji je deljiv sa 3. On nije uzajamno prost sa parnim brojem koji je deljiv sa 3.

Znači da uzajamno prost broj treba potražiti među preostala dva neparna broja. Jedan od njih može biti deljiv sa 5. Ako postoji odbačeni paran broj koji je deljiv sa 5, odbacujemo i taj neparan broj, preostali neparan broj je traženi broj. Ako ne postoji paran broj deljiv sa 5, onda su ta dva preostala neparna broja traženi brojevi.

Prema tome, postoji jedan ili dva broja sa osobinom datom u zadatku.

78. Dokaz. Šestocifren broj N koji se u dekadnom sistemu označava sa $xyxyxy$ možemo prikazati u obliku $N=10101\cdot(10x+y)$, gde je $x\neq 0$.

Kako je $10101=3\cdot 7\cdot 13\cdot 37$, najveći prost faktor broja 10101 je 37. Najveći dvocifren broj koji je uzajamno prost sa 3, 7, 13 i 37 je 97, jer su 98 i 99 složeni brojevi. Prema tome, ne postoji prost činilac broja N veći od 97.

79. Dokaz. Neka je $a=x^2-5y^2$, $b=u^2-5v^2$. Tada je

$$\begin{aligned} ab &= (x^2-5y^2)(u^2-5v^2)=x^2u^2-5y^2u^2-5x^2v^2+25y^2v^2\\ &= x^2u^2+10xuyv+25y^2v^2-5(x^2v^2+2xvyu+y^2u^2)\\ &= (xu+5yv)^2-5(xv+yu)^2. \end{aligned}$$

Kao što se vidi, i ab se može prikazati u obliku A^2-5B^2.

80. Dokaz. Jedan od takvih intervala je $[(n+1)!+2,\ (n+1)!+n+1]$. Zaista, pošto je

$$(n+1)! = 2\cdots 3\cdots n\cdot(n+1),$$

brojevi $(n+1)!+k$ za $k = 2, 3, \ldots, n+1$ su složeni, jer se iz njih može izvući faktor k. Pri tome, n može biti proizvoljno veliki broj.

81. Rešenje. Pođimo od činjenice da je $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$. Pošto je $7! = 5040$, nijedan broj ne može biti veći ili jednak 7. Međutim, jednostavno se zaključuje da nijedan broj ne može biti ni 6. S druge strane, jedan broj mora biti 5, jer ako bi svi brojevi bili manji od 5, najveći zbir faktorijela je $3\cdot 4! = 72$, a to nije trocifren broj. Ne mogu svi brojevi biti jednaki 5, jer je tada $5!+5!+5! = 360 \neq 555$.

Ako su dva broja jednaka 5, to ne može biti x, već y i z, pa je $x = 2$. Ovaj slučaj otpada jer je $2!+5!+5! = 242 \neq 255$.

Ostaje jedina mogućnost $x = 1$. Jednostavnim pretraživanjem jednostavno se proverava da je jedinstveno rešenje $x = 1$, $y = 4$, $z = 5$, jer je $1!+4!+5! = 145$.

82. Rešenje. Kako je $y^k = x(x+1)$, svaki od brojeva x i $x+1$ mora biti k-ti stepen celog broja. Pošto je $k > 1$, jedina dva uzastopna k-ta stepena su 0 i 1 ili -1 i 0. Prema tome, imamo dva rešenja: $y = 0$, $x = 0$ ili $y = 0$, $x = -1$, pri čemu je $k > 1$ proizvoljno.

83. Rešenje. Nule kvadratnog trinoma $-6x^2+167x+4\,823$ su $x = 91/2$ i $x = -53/3$, tako da važi faktorizacija

$$y = -6x^2+167x+4\,823 = -6\Big(x-\frac{91}{2}\Big)\Big(x+\frac{53}{3}\Big),$$

tj.

$$y = y\,(x) = (91-2x)(3x+53).$$

a) Da bi y bio prost broj, potrebno je da jedan od faktora bude 1 ili -1. Prvi faktor je jednak 1 za $x = 45$, a -1 za $x = 46$, dok je drugi faktor jednak -1 za $x = -18$. Međutim, pošto je

$$y\,(45) = 188 = 2\cdot 94, \quad y\,(46) = -191 < 0, \quad y\,(-18) = -127 < 0,$$

ne postoji ceo broj x za koji je y prost broj.

b) Zadati kvadratni trinom dostiže maksimum za $x = 167/12 = 13.91\ldots$

Najbliža celobrojna vrednost je $x = 14$, tako da je y najveći prirodan broj za $x = 14$, tj. $y\,(14) = 5\,985$.

c) Kako je $y > 0$ za $-53/3 < x < 91/2$, celo x najbliže krajevima ovog intervala je $x = 45$, pa je y najmanji prirodan broj za $x = 45$, tj. $y\,(45) = 188$.

84. Rešenje. Rešimo datu jednačinu po x. Imamo

$$x = \frac{5y-3}{y+3} = 5 - \frac{18}{y+3}\,.$$

Da x bude ceo broj, 18 treba da bude deljivo sa $y+3$, tj. $y+3$ mora uzeti sledeće vrednosti: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18. Na taj način dobijamo sledeće parove (x,y) celobrojnih rešenja:

$$(-13,-2),\ (23,-4),\ (-4,-1),\ (14,-5),\ (-1,0),\ (11,-6),\ (2,3),\ (8,-9),$$
$$(3,6),\ (7,-12),\ (4,15),\ (6,-21).$$

85. Rešenje. Ako se $2k$ rastavlja na zbir dva broja x i y čiji je proizvod najveći, to bi bili brojevi $x=k$, $y=k$, tj. najveći proizvod je k^2. Za $x=k-1$, $y=k+1$ ovaj proizvod je k^2-1, za $x=k-2$, $y=k+2$ proizvod je $xy=k^2-4$, itd. Prema tome, ukoliko se brojevi x i y "udaljavaju" jedan od drugog, njihov proizvod se smanjuje.

Pošto je u našem zadatku dat uslov da x i y budu uzajamno prosti, rešenje $x=k$, $y=k$ otpada. Razlikovaćemo dva slučaja:

1° k je paran broj. Tada su $k+1$ i $k-1$ dva najbliža uzajamno prosta broja i njihov proizvod je k^2-1.

2° k je neparan broj. Dva najbliža uzajamno prosta broja su $k+2$ i $k-2$ i njihov proizvod je k^2-4.

NAPOMENA. Ako je k paran broj, $k+1$ i $k-1$ su dva uzastopna neparna broja. Da su oni uzajamno prosti brojevi, sleduje iz jednakosti

$$\mathrm{NZD}\,(a,b)=\mathrm{NZD}\,(a,a-b).$$

Zaista,

$$\mathrm{NZD}\,(2n+1,2n-1)=\mathrm{NZD}\,(2n+1,2)=1.$$

Slično se dokazuje da su $k+2$ i $k-2$ uzajamno prosti brojevi kada je k neparan broj.

86. Rešenje. Dokažimo najpre da nijedan sabirak nije jednak jedinici. Naime, ako je $a_i=1$, tada se a_i može dodati sabirku a_j i proizvod se povećava jer je $a_j+1>a_j\cdot1$. S druge strane, ako je $a_i\ge5$, zamenjujući a_i sa dva sabirka a_i-3 i 3, povećavamo proizvod jer je $3\cdot(a_i-3)>a_i$.

Ako je $a_i=4$, ostaje da se a_i zameni sa $2+2$, ali se tada proizvod $2\cdot2$ ne menja. Najzad, vodeći računa da je $2+2+2=3+3$ i $2\cdot2\cdot2<3\cdot3$, zaključujemo da se zbir $a_1+a_2+\cdots+a_n$ sastoji iz što većeg broja trojki. Proizvod je najveći ako je

$$1993=2+2+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{663}\qquad(\text{ili } 4+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{663}).$$

Kosmičko značenje broja sedam

Stari Sumerci i Vavilonci računali su po seksagezimalnom (šezdesetnom) sistemu. Decimalni sistem nisu poznavali, mada su znali za broj 10. Broj 60 je deljiv sa 10 brojeva (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30) a broj 100 samo sa sedam (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50). U semitsko doba broj sedam dobija kosmičko značenje i postaje sveti broj. Pošto je po sumersko-vavilonskom verovanju postojalo sedam nebeskih sfera, sedam planeta, a sedam zidova je okruživalo podzemni svet, zato su i mnoge svete kule, zigurati, imale po sedam stepenastih spratova.

III. JEDNAČINE. NEJEDNAČINE. SISTEMI JEDNAČINA

87. Dokaz. Pretpostavimo da je $A^2 + B^2 \neq 0$, tj. da A i B nisu istovremeno jednaki nuli. Množenjem date jednačine sa $(x-a)(x-b)$, i posle sređivanja dobijamo kvadratnu jednačinu

$$x^2 - (a+b+A^2+B^2)\,x + ab + bA^2 + aB^2 = 0.$$

Ostaje da se dokaže da je diskriminanta ove jednačine veća ili jednaka nuli. Imamo

$$\begin{aligned}
D &= (a+b+A^2+B^2)^2 - 4\,(ab+bA^2+aB^2) \\
&= (a+b)^2 + 2\,(a+b)(A^2+B^2) + (A^2+B^2)^2 - 4\,ab - 4\,bA^2 - 4\,aB^2 \\
&= (a-b)^2 + (A^2+B^2)^2 + 2\,aA^2 + 2\,bB^2 - 2\,bA^2 - 2\,aB^2 \\
&= (a-b)^2 + (A^2+B^2)^2 + 2\,(a-b)(A^2-B^2) \\
&= (a-b)^2 + 2\,(a-b)(A^2-B^2) + (A^2-B^2)^2 + 4\,A^2B^2 \\
&= (a-b+A^2-B^2)^2 + 4\,A^2B^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Primetimo da specijalan slučaj nastupa kada je $b = a$. Tada se početna jednačina svodi na linearnu jednačinu

$$\frac{A^2+B^2}{x-a} = 1 \Rightarrow x = a + A^2 + B^2.$$

Linearnu jednačinu dobijamo i za $A = 0$ ili $B = 0$, pri čemu je $AB \neq 0$.

88. Rešenje. Pošto je

$$x^2 + 2\,x - 24 = (x+6)(x-4), \quad x^2 - 9\,x + 20 = (x-5)(x-4),$$

data jednačina se može prikazati u obliku

$$\left|\frac{(x+6)(x-4)}{(x-5)(x-4)}\right| = 10.$$

Kao što se vidi, jednačina nema smisla za $x = 4$. Za $x \neq 4$ svodi se na

$$\left|\frac{x+6}{x-5}\right| = 10 \Rightarrow 10\,|x-5| = |x+6|.$$

Za $x \geq 5$ imamo $10\,(x-5) = x+6 \Rightarrow x = \dfrac{56}{9}$.

Za $-6 \leq x < 5$ jednačina postaje $10\,(5-x) = x+6 \Rightarrow x = 4$, ali $x = 4$ smo ranije isključili.

Najzad, za $x < -6$ imamo $10\,(5-x) = -x-6 \Rightarrow x = \dfrac{56}{9}$, ali ova vrednost x ne ispunjava uslov $x < -6$.

Prema tome, jednačina ima jedno rešenje, $x = 56/9$.

89. Rešenje. Ovo je linearna jednačina koja se množenjem leve i desne strane sa a^2bc i sređivanjem svodi na

$$(abc + a^2b - a^2c - b^2c)\,x = c\,(abc + a^2b - a^2c - b^2c),$$

pri čemu pretpostavljamo da je $abc \neq 0$. Pod uslovom da je $abc + a^2b - a^2c - b^2c \neq 0$, rešenje jednačine je $x = c$. Ako je $abc + a^2b - a^2c - b^2c = 0$, jednačina je neodređena i zadovoljava je svako x.

U specijalnom slučaju $a : b : c = 6 : 3 : 4$ imamo $a = 6t$, $y = 3t$, $c = 4t$, pa je

$$abc + a^2b - a^2c - b^2c = 72\,t^3 + 108\,t^3 - 144\,t^3 - 36\,t^3 = 0.$$

Prema tome, u tom slučaju je jednačina neodređena.

90. Rešenje. Prikažimo polinom $x^4 + 4x - 1$ u obliku proizvoda dva kvadratna trinoma, tj.

$$x^4 + 4x - 1 \equiv (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Ovaj identitet važi ako je

(1) $a + c = 0$, (2) $b + ac + d = 0$, (3) $ad + bc = 4$, (4) $bd = -1$.

Iz jednačine (1) je $c = -a$, tako da se sistem svodi na sistem od tri jednačine:

(5) $b - a^2 + d = 0$, (6) $a\,(d - b) = 4$, (7) $bd = -1$.

Iz jednačine (5) je $d = a^2 - b$. Eliminacijom d, jednačine (6) i (7) postaju:

(8) $a\,(a^2 - 2b) = 4$, (9) $b\,(a^2 - b) = -1$.

Najzad, iz jednačine (8) izlazi $b = \dfrac{a^3 - 4}{2a}$, pa zamenom u (9) dobijamo

$$\frac{a^3 - 4}{2a} \cdot \left(a^2 - \frac{a^3 - 4}{2a}\right) = -1.$$

Sređivanjem ove jednačine dolazimo do jednačine šestog stepena

$$a^6 + 4a^2 - 16 = 0,$$

koja se smenom $a^2 = t$ svodi na

$$t^3 + 4t - 16 = 0.$$

Jedini realni koren ove jednačine je $t = 2$ (to je faktor broja 16), jer je

$$(t^3 + 4t - 16) : (t - 2) = t^2 + 2t + 8,$$

a jednačina $t^2 + 2t + 8 = 0$ nema realne korene.

Iz $a^2 = t = 2$ nalazimo $a = \sqrt{2}$, pa je

$$\begin{aligned} b &= \frac{a^3 - 4}{2a} = \frac{(\sqrt{2}\,)^3 - 4}{2\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}, \\ d &= a^2 - b = (\sqrt{2}\,)^2 - (1 - \sqrt{2}\,) = 1 + \sqrt{2}, \\ c &= -a = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Jednačina $x^4 + 4x - 1 = 0$, s obzirom na dobijenu faktorizaciju, svodi se na dve kvadratne jednačine

$$x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 - \sqrt{2} = 0, \qquad x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 + \sqrt{2} = 0,$$

koje se jednostavno rešavaju.

91. Rešenje. Uvedimo smenu nepoznate x pomoću $5-x=\alpha-t$, $\quad x-2=\alpha+t$.

Sabiranjem levih i desnih strana nalazimo $3=2\,\alpha$, tj. $\alpha=3/2$. Prema tome, smenom $x=t+\alpha+2=t+\dfrac{7}{2}$ data jednačina se transformiše na

$$\left(\frac{3}{2}-t\right)^4+\left(\frac{3}{2}+t\right)^4=17.$$

Posle naznačenog stepenovanja i sređivanja, ova jednačina se svodi na bikvadratnu jednačinu $16\,t^4+216\,t^2-55=0$, iz koje dobijamo $t^2=1/4$ i $t^2=-55/4$. Odavde je

$$t_1=\frac{1}{2},\quad t_2=-\frac{1}{2},\quad t_3=\frac{i\sqrt{55}}{2},\quad t_4=-\frac{i\sqrt{55}}{2}.$$

Kako je $x=t+\dfrac{7}{2}$, koreni polazne jednačine su

$$x_1=4,\quad x_2=3,\quad x_3=\frac{7+i\sqrt{55}}{2},\quad x_4=\frac{7-i\sqrt{55}}{2}.$$

Opštija jednačina $(a-x)^4+(x-b)^4=c$ rešava se smenom $x=\dfrac{a+b}{2}+t$. Jednačina ima oblik

$$\left(\frac{a-b}{2}-t\right)^4+\left(\frac{a-b}{2}+t\right)^4=c.$$

Posle razvoja četvrtih stepena binoma, jednačina se svodi na bikvadratnu jednačinu koja se jednostavno rešava.

92. Rešenje. Primetimo najpre da su izrazi

$$(3x+2)^4-(2x+3)^4,\qquad (2x-4)^4-(4x-2)^4$$

jednaki nuli za $x=\pm1$. To znači da se iz ovih izraza može izvući faktor x^2-1. Kako je

$$\begin{aligned}(3x+2)^4-(2x+3)^4 &= \big((3x+2)^2-(2x+3)^2\big)\big((3x+2)^2+(2x+3)^2\big)\\ &= 5\,(x^2-1)(13x^2+24x+13),\\ (2x-4)^4-(4x-2)^4 &= \big((2x-4)^2-(4x-2)^2\big)\big((2x-4)^2+(4x-2)^2\big)\\ &= -48\,(x^2-1)(5x^2-8x+5),\end{aligned}$$

data jednačina postaje

$$5\,(x^2-1)(13x^2+24x+13)-48\,(x^2-1)(5x^2-8x+5)=0.$$

Sređivanjem ove jednačine dobijamo

$$-7(x^2-1)(25x^2-72x+25)=0.$$

Koreni jednačine su

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1,$$

$$25x^2 - 72x + 25 = 0 \Rightarrow x_{3/4} = \frac{36 \pm \sqrt{671}}{25}.$$

93. Rešenje 1. Za $x = -1$ leva strana jednačine jednaka je 13. Za $x \in (-1, 0)$ trinom $x^4 - 5x^3 - 7x$ je pozitivan. S druge strane je $4 - 4x^2 > 0$, pa jednačina nema negativne korene na ovom intervalu. Za $x \in (-\infty, -1)$ je $x^4 - 7x + 4 > 12$ a $-5x^3 - 4x^2 > 1$, pa je vrednost polinoma na levoj strani veća od 13. Prema tome, jednačina nema negativne korene.

Rešenje 2. Ako datu jednačinu napišemo u obliku $(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x$, za $x < 0$ leva strana je nenegativna a desna negativna, pa nema nenegativnih korena.

94. Rešenje. Da bi koreni bili racionalni, diskriminanta mora biti potpun kvadrat, tj.

$$p^2 - 20q = n^2. \tag{1}$$

Najmanja vrednost prostog broja q je 2, što znači da prost broj p mora biti veći od 5. Pošto je p neparan broj, zaključujemo da je da je i n neparan broj. Ako stavimo $p = 2k+1$ i $n = 2m + 1$, uslov (1) se svodi na

$$20q = p^2 - n^2 = 4\big(k(k+1) - m(m+1)\big).$$

Proizvodi $k(k + 1)$ i $m(m + 1)$ su parni brojevi, što znači da je

$$4\big(k(k+1) - m(m+1)\big)$$

deljivo sa 8 samo za $q = 2$. Imamo

$$p^2 - n^2 = 40 \Rightarrow (p - n)(p + n) = 40.$$

Postoje dva rešenja ove jednačine

$$p + n = 20,\ p - n = 2 \Rightarrow p = 11,\ n = 9;$$

$$p + n = 10,\ p - n = 4 \Rightarrow p = 7,\ n = 3.$$

Prema tome, zadatak ima dva rešenja: $p = 7$, $q = 2$ i $p = 11$, $q = 2$.

95. Rešenje. Pretpostavimo da su x_1 i x_2 koreni prve, a x_3 i x_4 koreni druge jednačine, pri čemu je $x_1 = x_3 = x_0 > 0$ zajednički koren. Pošto x_0 zadovoljava prvu i drugu jednačinu, zadovoljavaće i jednačinu

$$(x^2 + ax + b) - (x^2 + cx + d) = 0, \text{ tj. } (a - c)\,x + b - d = 0.$$

Prema tome, zajednički koren je

$$x_0 = \frac{b - d}{c - a}. \tag{1}$$

Na osnovu VIÈTE-ovog pravila imamo

$$x_0 x_2 = b, \quad x_0 x_4 = d, \text{ tj. } x_2 = \frac{b}{x_0}, \quad x_4 = \frac{d}{x_0}.$$

Kako je $x_2 > x_4$ i $x_0 > 0$, zaključujemo da je $b > d$, tako da iz (1) izlazi da je $c > a$.

Zajednički koren x_0, dat sa (1), zadovoljava ove jednačine. Ako ga zamenimo u prvoj jednačini, imamo

$$\left(\frac{b-d}{c-a}\right)^2 + a\,\frac{b-d}{c-a} + b = 0,$$

odakle je

$$(2) \qquad (b-d)^2 = (c-a)(ad-bc).$$

Nejednakosti $b > d$, $c > a$ i jednakost (2) su traženi potrebni i dovoljni uslovi. Jednostavno se dokazuje da su ti uslovi dovoljni.

96. Rešenje. a) Sređivanjem date jednačine dobijamo

$$(1) \qquad a\,x^2 - (a-b+c)\,x + c = 0.$$

Primenom VIÈTE-ovih pravila imamo

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1+x_2)\big((x_1+x_2)^2 - 3\,x_1x_2\big) \\ &= -p\,(p^2 - 3\,q), \end{aligned}$$

gde je $p = -\dfrac{a-b+c}{a}$, $\quad q = \dfrac{c}{a}$.

b) Trinom na levoj strani jednačine (1) je pozitivan ako je $a > 0$ i ako je diskriminanta D negativna. Pošto je a stranica trougla, ona je pozitivna. Diskriminanta je

$$\begin{aligned} D &= (a-b+c)^2 - 4\,ac \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2\,ab - 2\,bc + 2\,ac - 4\,ac \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2\,(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Kako su a, b, c stranice trougla, važe nejednakosti

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b.$$

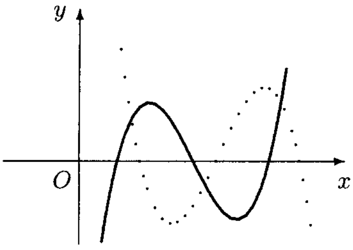
Množenjem ovih nejednakosti redom sa a, b, c i sabiranjem tako dobijenih nejednakosti, dobijamo

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2\,(ab + bc + ca).$$

Na osnovu ove nejednakosti zaključujemo da je $D < 0$, čime je dokaz završen.

97. Dokaz. Na slici je prikazan grafik kubne parabole

$$(1) \qquad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$



koja ima tri preseka x_1, x_2, x_3 sa pozitivnim delom x-ose. Kao što se vidi, ova kubna parabola ima dva ekstremuma, što znači da jednačina

$$(2) \qquad y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

ima dva realna korena. Koreni jednačine (2) su realni ako je

$$D = 4b^2 - 12ac \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 3ac.$$

Za parabolu (1) je $a > 0$ (jer $y \to +\infty$ ako $x \to +\infty$) i $y(0) = d < 0$. To znači da je $ad < 0$.

Na slici je prikazan tačkicama slučaj kada je $a < 0$. Tada je $y(0) = d > 0$, pa je opet $ad < 0$.

NAPOMENA. Primetimo da obrnuto ne važi, tj. ako su ispunjeni uslovi $b^2 \geq 3ac$ i $ad < 0$, ne znači da su sva rešenja kubne jednačine realna i pozitivna.

98. Dokaz 1. Množenjem date jednačine sa x^2 dobijamo jednačinu četvrtog stepena

$$x^4 - \left(m + \frac{1}{m}\right)x^3 + \left(m + \frac{1}{m}\right)x - 1 = 0. \tag{1}$$

Na osnovu VIÈTE-ovog pravila imamo $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + \dfrac{1}{m}$, a zbir pozitivnog broja i njegove recipročne vrednosti je veći ili jednak 2, pri čemu je $s = 2$ za $m = 1$.

Za $m = 1$ jednačina (1) glasi $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$, tj. $(x^2 - 1)(x - 1)^2 = 0$. Ova jednačina ima dva korena $x = 1$ i $x = -1$, za koje je polinom $x^{12} - 2x^9 + 2x^3 - 1$ jednak nuli.

Dokaz 2. Ako levu stranu faktorišemo na sledeći način:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - \left(m + \frac{1}{m}\right)\right) = 0,$$

jednačina se raspada na dve kvadratne jednačine

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0, \quad x^2 - \left(m + \frac{1}{m}\right)x + 1 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = m + \frac{1}{m}.$$

Dakle, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + \dfrac{1}{m}$, itd.

99. Rešenje. a) Primenom VIÈTE-ovih pravila na jednačinu (1) imamo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -am, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= a, \\ x_1x_2x_3 &= -an. \end{aligned}$$

Kvadriranjem druge jednačine dobijamo

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2\left(x_1x_3x_2^2 + x_2x_1x_3^2 + x_2x_3x_1^2\right) = a^2,$$

odakle je

$$\begin{aligned} s = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 &= a^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= a^2 + 2an(-am) \\ &= a^2(1 - 2mn). \end{aligned}$$

b) Jednačina (3) ima imaginarna rešenja ako je diskriminanta manja od nule, tj.

$$4 - 8mn < 0 \Rightarrow 1 - 2mn < 0.$$

Međutim, ako je $1 - 2mn < 0$, tada je na osnovu rezultata pod a) zbir kvadrata $s < 0$, što znači da jednačina (1) mora imati imaginarnih korena, naravno pod uslovom $a \neq 0$.

100. Rešenje. (a) Pošto su $1/a$, $1/b$ i $1/c$ koreni recipročne jednačine

$$7x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0,$$

na osnovu VIÈTE-ovog pravila njihov zbir je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{7}.$$

(b) Za treći stepen zbira tri broja važi jednakost

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b+c)^2(a+b+c)\\ &= (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)(a+b+c)\\ &= a^3+b^3+c^3+3ab^2+3a^2b+3bc^2+3ac^2+3a^2c+6abc\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc.\end{aligned}$$

Primenom VIÈTE-ovih pravila imamo

$$a+b+c=4, \quad ab+bc+ca=5, \quad abc=7,$$

pa je na osnovu gornje jednakosti

$$a^3+b^3+c^3 = 4^3 - 3\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 7 = 25.$$

101. Rešenje. a) Data jednačina je tzv. *recipročna jednačina*, jer su koeficijenti simetrični u odnosu na koeficijent uz x^2. Napišimo jednačinu u obliku

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (5-3m)\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2(m^2-2m-2) = 0. \tag{1}$$

Smenom $x + \dfrac{1}{x} = t$, za koju je $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, jednačina (1) se svodi na kvadratnu jednačinu

$$t^2 + (5-3m)t + 2(m^2-2m-3) = 0.$$

Koreni ove jednačine su $t_1 = 2m-6$, $t_2 = m+1$. Ostaje da se reše jednačine

$$x + \frac{1}{x} = 2m-6, \quad x+\frac{1}{x} = m+1,$$

tj.

$$x^2 - 2(m-3)x + 1 = 0, \quad x^2 - (m+1)x + 1 = 0. \tag{2}$$

b) Koreni jednačine (2) su realni ako su ispunjeni uslovi

$$4(m-3)^2 - 4 \geq 0, \quad (m+1)^2 - 4 \geq 0.$$

Prva nejednačina je zadovoljena za $m \leq 2$ ili $m \geq 4$, a druga za $m \leq -3$ ili $m \geq 1$. Njihovo zajedničko rešenje je $m \leq -3$ ili $1 \leq m \leq 2$ ili $m \geq 4$, tj.

$$m \in (-\infty, -3] \cup [1, 2] \cup [4, +\infty).$$

102. Rešenje. Ako date jednačine prikažemo u obliku

$$(\alpha-1)^3 + 2(\alpha-1) - 14 = 0, \quad (\beta-1)^3 + 2(\beta-1) + 14 = 0$$

i dobijene jednačine saberemo, dobijamo

$$u^3 + v^3 + 2(u+v) = 0, \tag{1}$$

gde su $u = \alpha - 1$, $v = \beta - 1$.

Iz jednačine (1), posle faktorizacije leve strane, nalazimo

$$(u+v)(u^2-uv+v^2+2)=0.$$

S obzirom da je $u^2-uv+v^2 \geq 0$ za svako realno u i v, iz poslednje jednačine izlazi

$$u+v=0 \Rightarrow \alpha+\beta=2.$$

NAPOMENA. Tačna rešenja zadatih jednačina su

$$\alpha=\left(\frac{11\sqrt{13}}{9}+7\right)^{1/3}-\left(\frac{11\sqrt{13}}{9}-7\right)^{1/3}+1,$$

$$\beta=\left(\frac{11\sqrt{13}}{9}-7\right)^{1/3}-\left(\frac{11\sqrt{13}}{9}+7\right)^{1/3}+1,$$

odakle se vidi da je $\alpha+\beta=2$.

103. Dokaz. Prikažimo datu nejednačinu u obliku $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$, gde je

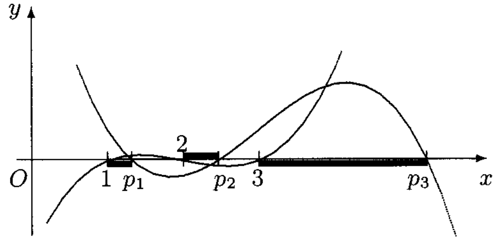
$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2)-(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= -x^3+9x^2-23x+17, \\ Q(x) &= (x-1)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

Kao što se vidi, P i Q su polinomi trećeg stepena. Za polinom P važe sledeće jednakosti:

$$P(1)=2,\ P(2)=-1,\ P(3)=2,\ P(4)=5,\ P(5)=2,\ P(6)=-13,$$

odakle zaključujemo da $P(x)$ ima tri realne nule p_1, p_2, p_3, za koje je $1<p_1<2$, $2<p_2<3$, $5<p_3<6$.

Na slici su skicirani grafici polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Nejednačina $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ je ispunjena ako x pripada intervalima $(1,p_1)$, $(2,p_2)$ i $(3,p_3)$. Zbir dužina ovih intervala je



$$\begin{aligned} \ell &= p_1-1+p_2-2+p_3-3 \\ &= p_1+p_2+p_3-6. \end{aligned}$$

Primenom VIÈTE-ovog pravila imamo $p_1+p_2+p_3=9$, pa je $\ell=9-6=3$.

104. Rešenje. Jednačina ima bar jedan realan koren ako je njena diskriminanta veća ili jednaka nuli, tj.

(1) $$(2\lambda+7)^2-20(\lambda-1)(2\lambda+7)\geq 0 \Rightarrow 4\lambda^2+8\lambda-21\leq 0.$$

Koreni jednačine $4\lambda^2+8\lambda-21=0$ su $-7/2$ i $3/2$, pa je rešenje nejednačine (1) $-7/2\leq\lambda\leq 3/2$.

NAPOMENA. Mnogo teži zadatak bi bio ako bi se pitalo za koje vrednosti λ data jednačina ima samo jedan realan koren. To se dešava kada je $\lambda=-7/2$ ili $\lambda=3/2$, jer je tada diskriminanta jednaka nuli. Medjutim, ne sme se izostaviti slučaj $\lambda=1$. Tada se data jednačina svodi na linearnu jednačinu.

105. Rešenje. Pretpostavimo da x zadovoljava nejednačinu

(1) $$\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2 \quad (a>0).$$

Tada je $x\geq a$, i iz (1) dobijamo niz ekvivalentnih nejednačina

$$\sqrt{x}>2+\sqrt{x-a} \Leftrightarrow x>(2+\sqrt{x-a})^2 \Leftrightarrow x>4+x-a+4\sqrt{x-a},$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-a}<\frac{a-4}{4}.$$

Iz poslednje nejednačine izlazi da je $a>4$ i da je

$$x-a<\left(\frac{a-4}{4}\right)^2, \text{ tj. } x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2.$$

Prema tome, ako x zadovoljava nejednačinu (1), tada je

(2) $$a>4, \quad a\leq x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2.$$

Važi i obrnuto, ako su ispunjeni uslovi (2), važi (1). Dakle, nejednačina (1) ima rešenje

$$a\leq x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2$$

ako i samo ako je $a>4$. Za ostale vrednosti a nejednačina nema rešenja.

106. Rešenje. Promenljiva x mora ispunjavati uslov $x\leq 1$, tj. ne postoji ni jedno $x>1$ koje zadovoljava datu nejednačinu. S druge strane, nejednačina ima smisla ako je

(1) $$1+px-2p\geq 0.$$

Pod datim uslovima nejednačinu

(2) $$\sqrt{1+px-2p}\leq 1-x$$

možemo kvadrirati. Dobijamo

(3) $$x^2-(2+p)x+2p\geq 0.$$

Razmotrimo sledeća tri slučaja:

1° $p=0$. Tada je uslov (1) ispunjen, a (2) važi za $x\leq 0$.

2° $p>0$. Uslov (1) daje

(4) $$x\geq 2-\frac{1}{p}.$$

Za $p=1$, data nejednačina je zadovoljena za $x=1$. Za $p>1$ iz (4) izlazi da je $x>1$, što je u suprotnosti sa uslovom $x\leq 1$. Dakle, za $p>1$ nejednačina nema rešenja.

Za $0 < p < 1$, vodeći računa da su p i 2 nule trinoma $x^2 - (2+p)\,x + 2p$, nejednačina (3) ima rešenje $x \le p$ ili $x \ge 2$. S obzirom da je $x \le 1$ i (4), rešenje date nejednačine je

$$2 - \frac{1}{p} \le x \le p.$$

3° $p < 0$. Iz uslova (1) izlazi

$$x \le 2 - \frac{1}{p}\,.$$

Međutim, pošto je $x \le 1$, ovaj uslov je ispunjen za svako $p < 0$. Nejednačina (3) je zadovoljena za $x \le p$, i to je rešenje date nejednačine u slučaju 3°.

107. Rešenje. Data jednačina ima smisla ako je $2 - 5x - 3x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in [-2, 1/3]$ i ekvivalentna je sa

$$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x > 2x \cdot 3^x \left(\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x\right),$$

tj.

(1) $$(1 - 2x \cdot 3^x)\left(\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x\right) > 0.$$

Razmotrimo slučajeve:

1° $\quad -2 \le x \le 0$. Tada je $1 - 2x \cdot 3^x > 0$ i zbog toga iz (1) izlazi

$$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x > 0,$$

tj.

$$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} > -2x,$$

a kako je $-2x \ge 0$, kvadriranjem dobijamo $2 - 5x - 3x^2 > 4x^2 \Rightarrow x \in (-1, 2/7)$. Vodeći računa da $x \in [-2, 0]$ imamo $x \in (-1, 0]$.

2° $\quad 0 < x \le 1/3$. Tada je $\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x > 0$ i $2x \cdot 3^x \le 2 \cdot \frac{1}{3}\, 3^{1/3} = \frac{2}{3^{2/3}} < 1$, tj. $1 - 2x \cdot 3^x > 0$, pa možemo zaključiti da je nejednačina (1) zadovoljena za $x \in (0, 1/3]$.

Na osnovu 1° i 2° imamo $x \in (-1, 0] \vee x \in (0, 1/3] \Rightarrow x \in (-1, 1/3]$, i to je rešenje date nejednačine.

108. Rešenje 1. Zadatu iracionalnu jednačinu prikažimo u obliku

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} = 9 - \sqrt{3x^2 - 4x - 11}\,.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobijamo

$$\sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 2, \quad \text{tj.} \quad 3x^2 - 4x - 15 = 0.$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su $x_1 = 3$ i $x_2 = -5/3$. Zamenom dobijenih rešenja u polaznu jednačinu, uveravamo se da su to zaista rešenja.

Rešenje 2. Množenjem date jednačine sa $\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}$, imamo

$$\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5\,.$$

Ako ovu jednačinu saberemo sa zadatom, dobijamo

$$\sqrt{3x^2-4x+34}=7 \Rightarrow 3x^2-4x-15=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-5/3\,.$$

109. Rešenje. Jednačina ima smisla za $1<x<11$. Množenjem leve i desne strane sa $\sqrt{(11-x)(x-1)}$, jednačina postaje

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=\frac{4}{3}\sqrt{(11-x)(x-1)}.$$

Kvadriranjem dobijamo

$$x-1+2\sqrt{(11-x)(x-1)}+11-x=\frac{16}{9}(11-x)(x-1).$$

Smenom $\sqrt{(11-x)(x-1)}=t$ ova jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu

$$10+2t=\frac{16}{9}t^2,\ \text{tj. } 8t^2-9t-45=0,$$

čiji su koreni 3 i $-15/8$. Negativni koren odbacujemo jer je $t>0$.

Jednačina

$$\sqrt{(11-x)(x-1)}=3,\ \text{tj. } x^2-12x+20=0,$$

ima korene $x_1=10$, $x=2$, koji zadovoljavaju datu jednačinu.

110. Rešenje. Jednačina ima smisla ako su ispunjeni uslovi

$$1-x^2\geq 0,\quad 1+x-x^2\geq 0,\quad 2x^2-x-1\geq 0 \Rightarrow x\in\left[\frac{1-\sqrt5}{2},-\frac12\right]\cup\{1\}.$$

Ako stavimo $a=1-x^2$, $b=1+x-x^2$, $c=2x^2-x-1$ i primetimo da je $a+b+c=1$, data jednačina se svodi na

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{a+b+c}\,.$$

Kvadriranjem ove jednačine dobijamo

$$2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)=0 \Rightarrow ab=0\wedge bc=0\wedge ca=0,$$

tako da je

$$(1-x^2)(1+x-x^2)=0\wedge(1+x-x^2)(2x^2-x-1)=0\wedge(2x^2-x-1)(1-x^2)=0$$

i jedino $x=1$ zadovoljava ovu konjunkciju.

Neposrednom proverom zaključujemo da je $x=1$ zaista rešenje date jednačine.

111. Rešenje. Jednačina ima smisla ako je $x \geq 1$. Ako levu i desnu stranu jednačine pomnožimo sa $2\sqrt{x+\sqrt{x}}$, dobijamo

$$2(x+\sqrt{x}) - 2\sqrt{x^2-x} = 3\sqrt{x},$$

tj.

$$2x - 2\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x}.$$

Pošto je $x \geq 1$, dobijenu jednačinu možemo podeliti sa $\sqrt{x}$. Imamo

$$2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 + 2\sqrt{x-1}.$$

Kvadriranjem ove jednačine nalazimo $4x = 1 + 4\sqrt{x-1} + 4x - 4$, odakle je

$$\sqrt{x-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow x - 1 = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{25}{16}.$$

112. Rešenje. Razmotrimo sledeća tri slučaja:

1° $a > 0$. Jednačina ima smisla ako je $x \geq a$. Njenim kvadriranjem nalazimo

$$x + a + x - a + 2\sqrt{x^2-a^2} = 2x \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = 0 \Rightarrow x = a;$$

2° $a < 0$. Jednačina ima smisla za $x \geq -a$. Isto kao u slučaju 1°, kvadriranjem dobijamo $\sqrt{x^2-a^2} = 0 \Rightarrow x = -a$.

3° $a = 0$. Jednačina $2\sqrt{x} = \sqrt{2x}$ ima rešenje $x = 0$.

113. Rešenje. Jednačina ima smisla ako je $\dfrac{x}{x+3} \geq 0$, tj. $x \in (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$. Primetimo da $x = 0$ nije rešenje date jednačine. Zbog toga isključujemo $x = 0$. Razmotrimo sledeća dva slučaja:

1° $x > 0$. Tada je data jednačina ekvivalentna sa $1 - \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x+3}} = \dfrac{2}{x(x+3)}$, odnosno sa

$$1 - \sqrt{\frac{1}{x(x+3)}} = 2 \cdot \frac{1}{x(x+3)}.$$

Ako uvedemo smenu $t = \sqrt{\dfrac{1}{x(x+3)}} > 0$, dobijamo jednačinu $1 - t = 2t^2$ i njeno jedino pozitivno rešenje je $t = 1/2$. Iz jednačine $\sqrt{\dfrac{1}{x(x+3)}} = \dfrac{1}{2}$ nalazimo pozitivno rešenje $x = 1$.

2° $x < -3$. Data jednačina je ekvivalentna sa $1 - \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x+3}} = \dfrac{2}{x(x+3)}$, tj. sa

$$1 + \sqrt{\frac{1}{x(x+3)}} = 2 \cdot \frac{1}{x(x+3)}.$$

Ako uvedemo istu smenu kao u 1°, dobijamo kvadratnu jednačinu čije je rešenje manje od -3 jednako $-\dfrac{1}{2}(3+\sqrt{13})$.

Prema tome, rešenja date jednačine su $x = 1$ ili $x = -\dfrac{1}{2}(3+\sqrt{13})$.

114. Rešenje. Ako jednačinu pomnožimo sa $\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}$, dobijamo

$$2(x+1)=(x+1)\Big(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}\Big).$$

Pošto $x=-1$ nije rešenje date jednačine, tada je jednačina ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1 \quad \text{(zadata jednačina)},\\&\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=2,\end{aligned}$$

koji je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned}2\sqrt{x^3-4x^2+x+15}&=x+3,\\2\sqrt{x^3-4x^2-x+13}&=x-1\end{aligned}$$

i posle kvadriranja ekvivalentan sa

$$\begin{aligned}4\left(x^3-4x^2+x+15\right)&=(x+3)^2,\\4\left(x^3-4x^2-x+13\right)&=(x-1)^2,\end{aligned}$$

pri čemu je $x\geq 1$.

Posle sređivanja jednačine zaključujemo da su jednačine iste, tj. svode se na jednačinu

$$(x-3)(4x^2-5x-17)=0 \qquad (x\geq 1).$$

Ova jednačina ima dva rešenja, $x_1=3$, $x_2=\dfrac{1}{8}\left(5+3\sqrt{33}\right)$, dok drugo rešenje kvadratne jednačine ne ispunjava uslov $x\geq 1$. Prema tome, x_1 i x_2 su rešenja zadate jednačine.

115. Rešenje. Data jednačina se može svesti na sistem od dve jednačine ako uvedemo nove nepoznate u i v pomoću

$$u=\sqrt[3]{8-x}, \qquad v=\sqrt[3]{27+x}.$$

Imamo

$$u^2+v^2=uv+7, \qquad u^3+v^3=35.$$

Druga jednačina se može prikazati u obliku

$$(u+v)(u^2-uv+v^2)=35.$$

Iz prve jednačine izlazi $u^2-uv+v^2=7$, tako da je $u+v=5$, tj. $u^2+v^2=25-2uv$. Dobijamo sistem

$$u+v=5, \qquad uv=6,$$

čija su rešenja $u=2$, $v=3$ ili $u=3$, $v=2$.

U prvom slučaju dobijamo $x=0$, a u drugom $x=-19$.

116. Rešenje 1. Imamo niz ekvivalencija i samo jednu implikaciju

$$
\begin{aligned}
& \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{5}-x}=-\sqrt[3]{\frac{1}{10}} \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{5}-x}\right)^{3}=-\frac{1}{10} \\
\Leftrightarrow\quad & x+\frac{1}{5}-x+3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{5}-x}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{5}-x}\right)}_{=-\sqrt[3]{1/10}}=-\frac{1}{10} \\
\Rightarrow\quad & 3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{5}-x}\cdot\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\right)=-\frac{1}{10}-\frac{1}{5} \\
\Leftrightarrow\quad & 3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{5}-x}\cdot\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\right)=-\frac{3}{10} \\
\Leftrightarrow\quad & x\left(\frac{1}{5}-x\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{1000} \\
\Leftrightarrow\quad & x^{2}-\frac{1}{5}x+\frac{1}{100}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x-\frac{1}{10}\right)^{2}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=\frac{1}{10}.
\end{aligned}
$$

Međutim, kako $x = 1/10$ nije ekvivalentno datoj jednačini, moramo da proverimo da li je $x = 1/10$ rešenje jednačine. Neposrednom proverom zaključujemo da $x = 1/10$ nije rešenje jednačine. Dakle, data jednačina nema rešenja.

Rešenje 2. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{10}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5} - x}$. Za $x \geq 0$ ili $x < 0$ važi nejednakost $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{5} - x} > 0$, tako da je za svako x funkcija pozitivna i nema nula.

117. Rešenje. Očigledno, $x = 0$ je rešenje date jednačine. Ako je $x = x_0$ rešenje date jednačine, primetimo da je tada i $x = -x_0$ njeno rešenje. Zbog toga ćemo tražiti samo pozitivna rešenja.

Razmotrimo sledeće mogućnosti:

1° $x \in [1, +\infty)$. Onda je

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > \sqrt{1+x} > \sqrt[3]{1+x} \geq \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x},$$

pa jednačina u ovom intervalu nema rešenja.

2° $x \in (0,1)$. U ovom slučaju imamo

$$(1) \qquad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 2 \qquad \left(\text{jer je } a + \frac{1}{a} \geq 2,\ a > 0\right).$$

Dokažimo da je za $x \in (0,1)$ ispunjena nejednakost

$$(2) \qquad \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} < 2.$$

Važe ekvivalencije

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} < 2 &\Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{1-x} > \sqrt[3]{1+x} \\ &\Leftrightarrow 8 + x - 1 - 6\sqrt[3]{1-x}\,\left(2 - \sqrt[3]{1-x}\right) > 1 + x \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt[3]{1-x} + \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \sqrt[3]{1-x}\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

što znači da je nejednakost (2) tačna.

Iz nejednakosti (1) i (2) izlazi da je $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} > \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$.

Prema tome, na osnovu 1° i 2° zaključujemo za $x > 0$ leva strana date jednačine ne može biti jednaka desnoj strani, što znači da ta jednačina u skupu realnih brojeva ima samo jedno rešenje, $x = 0$.

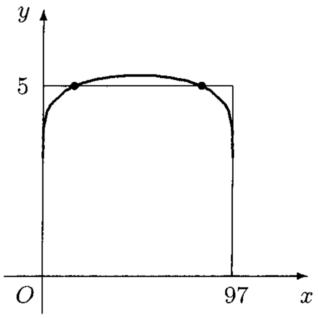
Napomena. Zadatak se može rešiti primenom diferencijalnog računa. Neka je $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ i $g(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$. Za $x = 0$ je $f(0) = g(0) = 2$. Za funkciju f imamo $f'(x) = \dfrac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} > 0$ za $x > 0$. Dakle, za $x > 0$ funkcija f raste. Izvod funkcije g je $g'(x) = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} - \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}$. Kako je $\lim\limits_{x\to 1} g'(x) = -\infty$, a za ostale pozitivne vrednosti x je $g'(x) < 0$, funkcija g opada.

Prema tome, jednačina $f(x) = g(x)$ ima jedno rešenje, $x = 0$.

118. Rešenje 1. Posmatrajmo funkciju $y = f(x) = \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x}$.

Funkcija je definisana za $0 \leq x \leq 97$. Primetimo da je funkcija simetrična u odnosu na $x = 97/2$, tj. važi jednakost

$$f\left(\frac{97}{2} + \alpha\right) = f\left(\frac{97}{2} - \alpha\right).$$



Zaista,

$$f\left(\frac{97}{2} + \alpha\right) = \sqrt[4]{\frac{97}{2} - \alpha} + \sqrt[4]{\frac{97}{2} + \alpha},$$

$$f\left(\frac{97}{2} - \alpha\right) = \sqrt[4]{\frac{97}{2} + \alpha} + \sqrt[4]{\frac{97}{2} - \alpha}.$$

Prvi izvod funkcije f jednak je

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\,(97-x)^{-3/4} + \frac{1}{4}\,x^{-3/4}.$$

Prvi izvod je jednak nuli za $x = 97/2$. Za $x > 97/2$ je $f'(x) < 0$, pa funkcija opada, a za $x < 97/2$ je $f'(x) > 0$, pa funkcija raste. To znači da za $x = 97/2$ funkcija f dostiže maksimum, $f_{\max} = 2\sqrt[4]{97/2} \approx 5.28$.

Na slici je prikazan grafik funkcije f. Kao što se vidi, jednačina

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

ima samo dva korena koji se direktno pogađaju:

$$x_1 = 16, \; x_2 = 81.$$

Rešenje 2. Uvedimo nove nepoznate $u = \sqrt[4]{97-x}$, $v = \sqrt[4]{x}$, $u, v \geq 0$. Tada dobijamo sistem

$$u + v = 5, \qquad u^4 + v^4 = 97.$$

Ako prvu jednačinu stepenujemo sa 4, imamo

$$\begin{aligned} &u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 = 625, \\ &\underbrace{u^4 + v^4}_{=97} + 4uv\big(\underbrace{(u+v)^2}_{=25} - 2uv\big) + 6(uv)^2 = 625, \end{aligned}$$

tj. $(uv)^2 - 50(uv) + 264 = 0 \Rightarrow uv = 6 \vee uv = 44$.

Imamo dva podsistema:

i) $u + v = 5$, $uv = 6$ i rešenja

$$\begin{aligned} u = 2,\; v = 3 &\Rightarrow \sqrt[4]{97-x} = 2,\; \sqrt[4]{x} = 3 \Rightarrow x = 81, \\ u = 3,\; v = 2 &\Rightarrow \sqrt[4]{97-x} = 3,\; \sqrt[4]{x} = 2 \Rightarrow x = 16. \end{aligned}$$

ii) $u + v = 5$, $uv = 44$. Ovaj sistem ima kompleksna rešenja, što se isključuje jer $u, v \in \mathbb{R}$, $u, v \geq 0$.

Dakle, jednačina ima rešenja: $x_1 = 81$, $x_2 = 16$.

119. Rešenje. Data nejednačina je ekvivalentna sa

$$\sqrt{(x-1)(x-4)} + \sqrt{(x-1)(x+4)} \leq \sqrt{(x-1)(4x-1)} \tag{1}$$

koja je definisana za $(x-1)(x-4) \geq 0 \wedge (x-1)(x+4) \geq 0 \wedge (x-1)(4x-1) \geq 0$, tj. $x \in (-\infty, -4] \cup \{1\} \cup [4, +\infty)$. Kvadriranjem nejednačine (1) dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

$$(x-1)(x-4) + 2\sqrt{(x-1)^2(x^2-16)} + (x-1)(x+4) \leq (x-1)(4x-1). \tag{2}$$

Primetimo da za $x = 1$ u (2) važi znak jednakosti, tj. $x = 1$ je jedno od rešenja date nejednačine. Ako je $|x| \geq 4$, nejednakost (2) je ekvivalentna sa

$$(x-1)(x-4) + 2|x-1|\sqrt{x^2-16} + (x-1)(x+4) \leq (x-1)(4x-1). \tag{3}$$

Razmotrimo sledeće dve mogućnosti:

i) $x \leq -4$. Tada je

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow (x-1)(x-4) - 2(x-1)\sqrt{x^2-16} + (x-1)(x+4) \leq (x-1)(4x-1)\\ &\Leftrightarrow x - 4 - 2\sqrt{x^2-16} + x + 4 \geq 4x - 1 \qquad (\text{jer je } x-1<0)\\ &\Leftrightarrow 1 - 2x \geq 2\sqrt{x^2-16} \Leftrightarrow (1-2x)^2 \geq 4(x^2-16) \Leftrightarrow x \leq 65/4\end{aligned}$$

pa $x \in (-\infty, -4]$.

ii) $x \geq 4$. Tada je

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow (x-1)(x-4) + 2(x-1)\sqrt{x^2-16} + (x-1)(x+4) \leq (x-1)(4x-1)\\ &\Leftrightarrow x - 4 + 2\sqrt{x^2-16} + x + 4 \leq 4x - 1 \qquad (\text{jer je } x-1>0)\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-16} \leq 2x - 1 \Leftrightarrow x \leq 65/4 \Leftrightarrow x \leq 65/4\end{aligned}$$

pa $x \in [4, 65/4]$.

Prema tome, skup svih rešenja date nejednačine je

$$x \in (-\infty, -4] \cup \{1\} \cup [4, 65/4].$$

120. Rešenje. Neka je $\dfrac{6x+3}{5} = p$ (leva strana date jednačine je p, pa je p ceo broj). Tada je

$$x = \frac{5p-3}{6}, \tag{2}$$

Polazeći od nejednakosti $[t] \leq t < [t] + 1$, imamo

$$\begin{aligned}\left[\frac{3x-1}{4}\right] &\leq \frac{3x-1}{4} < \left[\frac{3x-1}{4}\right] + 1,\\ \left[\frac{3x+1}{4}\right] &\leq \frac{3x+1}{4} < \left[\frac{3x+1}{4}\right] + 1,\\ \left[\frac{3x-1}{2}\right] &\leq \frac{3x-1}{2} < \left[\frac{3x-1}{2}\right] + 1.\end{aligned}$$

Sabiranjem ovih nejednakosti i vodeći računa o (1), nalazimo

$$\frac{6x+3}{5} \leq \frac{3x-1}{4} + \frac{3x+1}{4} + \frac{3x-1}{2} < \frac{6x+3}{5} + 4.$$

Ovaj sistem linearnih nejednačina je zadovoljen za $\dfrac{11}{18} \leq x < \dfrac{41}{18}$, tako da zbog (2) izlazi

$$\frac{11}{18} \leq \frac{5p-3}{6} < \frac{41}{18} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq p < \frac{10}{3}.$$

Pošto je p ceo broj, poslednja nejednakost važi ako je $p \in \{2, 3\}$. Za $p = 2$ je $x = \dfrac{7}{6}$ a za $p = 3$ je $x = 2$.

Neposrednom proverom zaključujemo da je jedino rešenje $x = \dfrac{7}{6}$.

121. Rešenje. Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^3 - [x]$. Polazeći od sledećih osobina ove funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & (x \in [-2, -1)), \\ x^3 + 1 & (x \in [-1, 0)), \\ x^3 & (x \in [0, 1)), \\ x^3 - 1 & (x \in [1, 2)), \end{cases}$$

zaključujemo da jednačina $x^3 - [x] = 3$ ima jedno rešenje na intervalu $[1, 2)$. Tada se jednačina svodi na

$$x^3 - 1 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

122. Rešenje. Sabiranjem levih i desnih strana svih jednačina sistema dobijamo

$$3\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_8) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 0.$$

Sabiranjem jednačina (1), (4) i (7) nalazimo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 + x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Zatim, sabiranjem (2), (5) i (8) imamo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2.$$

Zamenom x_1 i x_2 u jednačine sistema dolazimo do ostalih nepoznatih

$$x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = -4,\ x_6 = -3,\ x_7 = -2,\ x_8 = -1.$$

123. Rešenje. Iz treće jednačine sistema dobijamo

$$y = p + 1 - (p - 1)\,x.$$

Zamenom y u prve dve jednačine imamo redom

$$px - 2\big(p + 1 - (p - 1)\,x\big) = 2p - 1, \tag{1}$$

$$2x + p\big(p + 1 - (p - 1)\,x\big) = p - 1. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) nalazimo

$$x = \frac{4p + 1}{3p - 2}, \qquad x = \frac{p^2 + 1}{p^2 - p - 2}. \tag{3}$$

S obzirom da date tri jednačine imaju zajedničko rešenje, rešenja (3) moraju biti jednaka, tj.

$$\frac{4p + 1}{3p - 2} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - p - 2} \Rightarrow p^3 - p^2 - 12p = 0.$$

Koreni ove jednačine su $p = 0$, $p = 4$, $p = -3$.

Za $p = 0$ je $x = -1/2$, $y = 1/2$;

za $p = 4$ rešenje je $x = 17/10$, $y = -1/10$;

za $p = 3$ rešenje je $x = 1$, $y = 2$.

124. Rešenje. Prvu jednačinu sistema možemo napisati u obliku

$$\frac{x+y-1+2}{x+y-1}+\frac{y+z-3+5}{y+z-3}+\frac{z+x-2+5}{z+x-2}=\frac{3}{2},$$

tj.

$$\frac{2}{x+y-1}+\frac{5}{y+z-3}+\frac{5}{z+x-2}=-\frac{3}{2}.$$

Smenom $u=\dfrac{1}{x+y-1}$, $v=\dfrac{1}{y+z-3}$, $w=\dfrac{5}{z+x-2}$ dati sistem postaje

$$2u+5v+5w=-\frac{3}{2},\quad u+v-2w=0,\quad u-2v-w=0.$$

Rešenje ovog sistema je

$$u=-\frac{1}{4},\quad v=-\frac{1}{20},\quad w=-\frac{3}{2}.$$

Vraćanjem na stare nepoznate x, y, z dobijamo sistem

$$x+y-1=-4,\quad y+z-3=-20,\quad z+x-2=-\frac{20}{3},$$

tj.

(1) $$x+y=-3,\quad y+z=-17,\quad z+x=-\frac{14}{3}.$$

Sabiranjem ovih jednačina imamo

$$2(x+y+z)=-\frac{74}{3}\Rightarrow x+y+z=-\frac{37}{3}.$$

Pomoću zbira nepoznatih, iz sistema (1) nalazimo

$$x=\frac{14}{3},\quad y=-\frac{23}{3},\quad z=-\frac{28}{3}.$$

125. Rešenje. Sabiranjem jednačina dobijamo

(1) $$6-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}.$$

Kako je $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ $(a>0)$, imamo da je

(2) $$x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}\geq 6.$$

Iz (1) i (2) nalazimo

$$6-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2\geq 6,$$

tj.

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leq 0\Rightarrow x=y=z.$$

Zamenom u dati sistem dobijamo da je $x=y=z=1$ rešenje datog sistema.

126. Rešenje. Pretpostavimo da je $abc \neq 0$, tj. da su a, b, c različiti od nule. Ako razlike kvadrata pretvorimo u proizvod, sistem se svodi na

$$(x+y-z)(x-y+z)=a, \quad (y+z-x)(y-z+x)=b, \quad (z+x-y)(z-x+y)=c.$$

Deljenjem prve jednačine sa drugom i druge sa trećom, dobijamo

$$\frac{x-y+z}{y+z-x}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{y-z+x}{z+x-y}=\frac{b}{c},$$

tj.

$$(b+a)x-(a+b)y=(a-b)z, \quad (c-b)x+(b+c)y=(b+c)z.$$

Rešenje ovog sistema je

(1) $$x=\frac{a(b+c)z}{c(a+b)}, \quad y=\frac{b(a+c)z}{c(a+b)}.$$

Zamenom x i y u jednačinu $z^2-(x-y)^2=c$ nalazimo

$$z^2=\frac{c(a+b)^2}{4ab} \Rightarrow z=\pm\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{c}{ab}},$$

tako da jednačine (1) daju

$$x=\pm\frac{b+c}{2}\sqrt{\frac{a}{bc}}, \quad y=\pm\frac{c+a}{2}\sqrt{\frac{b}{ca}},$$

pri čemu su, s obzirom na (1), sve nepoznate istovremeno istog znaka.

127. Rešenje. Pretpostavimo da su a, b, c pozitivni brojevi. Iz jednačine (3) izlazi $z=\dfrac{cxy}{x^2+y^2}$, pa zamenom u (1) i (2) dobijamo sistem od dve jednačine

(4) $$\frac{x^2+y^2}{c}+\frac{cx^2}{x^2+y^2}=a,$$ (5) $$\frac{x^2+y^2}{c}+\frac{cy^2}{x^2+y^2}=b.$$

Sabiranjem i oduzimanjem ovih jednačina, posle sređivanja, imamo

$$2\,\frac{x^2+y^2}{c}+c=a+b, \qquad y^2=\frac{c-a+b}{c+a-b}\,x^2.$$

Eliminacijom y^2 nalazimo

$$x^2=\frac{a^2-(b-c)^2}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-(b-c)^2}.$$

Permutovanjem konstanti a, b, c dobijamo

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-(c-a)^2}, \quad z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{c^2-(a-b)^2}.$$

NAPOMENA. Pošto smo uveli pretpostavku da su a, b, c pozitivni brojevi, zaključujemo da nepoznate moraju biti istovremeno pozitivne, ili dve nepoznate negativne i jedna pozitivna. To znači da sistem ima četiri rešenja.

128. Rešenje. Oduzimanjem levih i desnih strana prve i druge, a zatim prve i treće jednačine, dobijamo

$$y^2 - x^2 + z\,(y-x) = a^2 - b^2, \qquad z^2 - x^2 + y\,(z-x) = a^2 - c^2, \text{ tj.}$$
$$(y-x)(x+y+z) = a^2 - b^2, \qquad (z-x)(x+y+z) = a^2 - c^2.$$

Sabiranjem ovih jednačina imamo $(y+z-2x)(x+y+z) = 2\,a^2 - b^2 - c^2$, tj.

$$(x+y+z-3x)(x+y+z) = 2\,a^2 - b^2 - c^2.$$

Neka je $x+y+z=p$. Tada poslednja jednačina postaje $(p-3\,x)\,p = 2\,a^2 - b^2 - c^2$, odakle nalazimo

$$(1) \qquad x = \frac{p^2 + b^2 + c^2 - 2\,a^2}{3p}.$$

Analogno ovom postupku, dobijamo

$$(2) \quad y = \frac{p^2 + c^2 + a^2 - 2\,b^2}{3p}, \qquad (3) \quad z = \frac{p^2 + a^2 + b^2 - 2\,c^2}{3p}.$$

Zamenom x, y, z iz (1), (2) i (3) u bilo koju jednačinu sistema, dolazimo do bikvadratne jednačine po p, iz koje izlaze četiri vrednosti p, koje uvođenjem u (1), (2) i (3) daju četiri trojke rešenja.

129. Rešenje. Data jednačina

$$(3\,x+y)(x+y) = p = p \cdot 1 = (-p)\cdot(-1)$$

svodi se na četiri sistema linearnih jednačina

$$(1)\ \begin{aligned} 3\,x+y&=p,\\ x+y&=1, \end{aligned} \quad (2)\ \begin{aligned} 3\,x+y&=1,\\ x+y&=p, \end{aligned} \quad (3)\ \begin{aligned} 3\,x+y&=-p,\\ x+y&=-1, \end{aligned} \quad (4)\ \begin{aligned} 3\,x+y&=-1,\\ x+y&=-p. \end{aligned}$$

Rešenja sistema (1) – (4) su redom sledeći parovi (x,y) :

$$\left(\frac{p-1}{2}, \frac{3-p}{2}\right), \ \left(\frac{1-p}{2}, \frac{3p-1}{2}\right), \ \left(\frac{1-p}{2}, \frac{p-3}{2}\right), \ \left(\frac{p-1}{2}, -\frac{3p-1}{2}\right).$$

Primetimo da jednačina nema rešenja za $p=2$.

130. Rešenje. Dati sistem se može prikazati u obliku

$$8xy = 15x + 2y, \quad 3xz = -5x + 2z, \quad yz = 8y - z.$$

Iz prve i druge jednačine nalazimo

$$y = \frac{15x}{8x-2}, \qquad z = \frac{-5x}{3x-2}.$$

Zamenom y i z u treću jednačinu i sređivanjem dobijamo kvadratnu jednačinu $19\,x^2 - 10x = 0$. Za $x=0$ su y i z jednaki nuli. To rešenje na osnovu teksta zadatka odbacujemo. Ostaje drugo rešenje $x = 10/19$, za koje je $y = 25/7$, $z = 25/4$.

131. Rešenje. Sistem ima trivijalno rešenje $(x, y) = (0, 0)$. Ostala rešenja dobijamo na sledeći način: Prikažimo dati sistem u obliku

$$8\,\frac{x^2}{y} = 18 + 7xy, \quad 8\,\frac{y^2}{x} = 18 - 7xy.$$

Množenjem levih i desnih strana dobijamo

$$64xy = 324 - 49(xy)^2.$$

Kao što se vidi, ovo je kvadratna jednačina po xy i njena rešenja su

$$xy = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 + 324 \cdot 49}}{49} = \frac{-32 \pm 130}{49},$$

tj. $xy = 2$ ili $xy = -162/49$.

Za $xy = 2$ dati sistem se svodi na $x^2 = 4y$, $2y^2 = x$, odakle je $(x, y) = (2, 1)$.

Za $xy = -162/49$ imamo $2x^2 = -\frac{9}{7}\,y$, $y^2 = \frac{36}{7}\,x$, odakle je $(x, y) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

132. Rešenje. Primetimo najpre da su $x = 1$, $y = 0$ i $x = 0$, $y = 1$ rešenja datog sistema. Ispitajmo da li ima drugih rešenja. Ako je $x < 0$, iz prve jednačine izlazi da je $y > 1$, međutim iz druge jednačine dobijamo da je $x^4 < 0$, što nema smisla.

Ako je $x > 1$, iz druge jednačine je $y^4 < 0$, što ne dolazi u obzir. Na kraju, ako je $0 < x < 1$, iz prve jednačine izlazi da je $0 < y < 1$. Međutim, tada je $x^4 < x^3$ i $y^4 < y^3$, tj. $x^4 + y^4 < x^3 + y^3$, pa ne može biti $x^3 + y^3 = x^4 + y^4 = 1$. Prema tome, osim $x = 1$, $y = 0$ i $x = 0$, $y = 1$ nema drugih rešenja.

133. Rešenje. Jednačine

$$105\,(x + y) = 120\,(y + z), \quad 105\,(x + y) = 168\,(z + x),$$

posle skraćivanja i sređivanja svode se na

$$7\,x - y = 8\,z, \quad -3\,x + 5\,y = 8\,z.$$

Odavde nalazimo $y = \frac{5}{3}\,x$, $z = \frac{2}{3}\,x$, tako da eliminacijom y i z iz jednačine

$$105\,(x + y) = xyz$$

dobijamo kubnu jednačinu

$$x^3 - 9 \cdot 4 \cdot 7\,x = 0,$$

čiji su koreni $x_1 = 0$, $x_2 = 6\sqrt{7}$, $x_3 = -6\sqrt{7}$. Odgovarajuće vrednosti y i z su

$$y_1 = 0,\ y_2 = 10\sqrt{7},\ y_3 = -10\sqrt{7},$$
$$z_1 = 0,\ z_2 = 4\sqrt{7},\ \ z_3 = -4\sqrt{7}.$$

134. Rešenje. Primetimo najpre da nijedna nepoznata ne može biti jednaka nuli. S druge strane, što se tiče znakova, mogu da postoje sledeće kombinacije: 1° sve nepoznate su pozitivne; 2° sve nepoznate su negativne; 3° x i z su pozitivne a y i u negativne; 4° x i z su negativne a y i u pozitivne. To znači da proizvod nepoznatih mora biti pozitivan.

Množenjem levih i desnih strana jednačina sistema dobijamo

$$(xyzu)^6 = 2^{12} \Rightarrow xyzu = 4,$$

jer je $xyzu > 0$.

Napišimo prvu jednačinu sistema u obliku

$$xyzu \cdot \frac{x^2 y}{u} = 2.$$

Pošto je $xyzu = 4$, ova jednačina postaje $x^2 y = \frac{u}{2}$, što zajedno sa četvrtom jednačinom sistema daje

$$u^4 = 16 \Rightarrow u = \pm 2.$$

Slično tome, drugu jednačinu sistema prikažimo u obliku

$$xyzu \cdot \frac{y^2 z}{x} = 8 \Rightarrow y^2 z = 2x,$$

pa na osnovu prve jednačine dobijamo

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Zamenom x i u u trećoj jednačini nalazimo z, tj. kada je $x = 1$, tada je $z = 2$, a kada je $x = -1$, tada je $z = -2$.

Na kraju, iz četvrte jednačine dobijamo $y = \pm 1$, kada je redom $u = \pm 2$. Prema tome, dati sistem jednačina zadovoljavaju sledeće četvorke (x, y, z, u) :

$$(1,\, 1,\, 2,\, 2), \quad (1,\, -1,\, 2,\, -2), \quad (-1,\, 1,\, -2,\, 2), \quad (-1,\, -1,\, -2,\, -2).$$

135. Rešenje. Ako drugu jednačinu sistema napišemo u obliku

$$x\,(y + z) + yz = m$$

i iz prve i treće jednačine uvedemo

(1) $$y + z = m - x, \quad yz = \frac{1}{x},$$

dobijamo jednačinu po x :

$$x\,(m - x) + \frac{1}{x} = m,$$

tj.

$$x^3 - m\,x^2 + mx - 1 = 0.$$

Jedan koren ove jednačine je $x_1 = 1$. Kako je

$$(x^3 - m\,x^2 + mx - 1) : (x - 1) = x^2 - (m - 1)\,x + 1,$$

još dva korena dobijamo iz jednačine

(2) $$x^2 - (m - 1)\,x + 1 = 0,$$

tj.

(3) $$x_{2/3} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2}.$$

Zamenom $x = x_1 = 1$ u sistem (1), imamo

$$(4) \qquad y + z = m - 1, \quad yz = 1.$$

Na osnovu VIÈTE-ovih pravila zaključujemo da su y i z koreni kvadratne jednačine

$$t^2 - (m-1)\,t + 1 = 0.$$

Kao što se vidi, ovo je ista jednačina kao (2), pa su rešenja $t = x_{2/3}$. To znači da sistem (4) ima rešenja $y = x_2$, $z = x_3$ ili $y = x_3$, $z = x_2$.

Za $x = x_2$ sistem (1) glasi

$$y + z = m - x_2, \quad yz = \frac{1}{x_2} = x_3,$$

gde smo primenili VIÉTE-ovo pravilo $x_2 x_3 = 1$. Prema tome, y i z su koreni jednačine

$$t^2 - (m - x_2)\,t + x_3 = 0.$$

Primetimo da je $t_1 = 1$ jedno rešenje ove jednačine, jer je $x_2 + x_3 = m - 1$. Drugo rešenje je $t_2 = x_3$ (jer je $t_1 t_2 = x_3$). Prema tome, za $x = x_2$ rešenja sistema su $y = 1$, $z = x_3$ ili $y = x_3$, $z = 1$. Na isti način se dolazi do rezultata da za $x = x_3$ sistem ima rešenja $y = 1$, $z = x_2$ ili $y = x_2$, $z = 1$.

Primetimo da sistem ima realna rešenja za

$$m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Rightarrow m \leq -1 \text{ ili } m \geq 3.$$

Rešenja su trojke $(x,\, y,\, z)$ dobijene permutacijama brojeva

$$1, \quad \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2}, \quad \frac{m - 1 - \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2}.$$

Za $m = 3$ rešenje je $(x,\, y,\, z) = (1,\, 1,\, 1)$, a za $m = -1$ rešenja su

$$(x,\, y,\, z) = (1, -1, -1),\ (-1, 1, -1),\ (-1, -1, 1).$$

136. Rešenje. Prikažimo prvu i drugu jednačinu u obliku

$$x + 2y = 4\,(3 - z), \qquad xy = 22 - 2z\,(x + 2y).$$

Množenjem druge jednačine sa z i zamenom $x + 2y$ iz prve, vodeći računa da je $xyz = 6$, dobijamo jednačinu po z

$$4z^3 - 12z^2 + 11z - 3 = 0.$$

Jedno rešenje ove jednačine je $z_1 = 1$. Kako je

$$(4z^3 - 12z^2 + 11z - 3) : (z - 1) = 4z^2 - 8z + 3,$$

ostala dva rešenja su $z_2 = 3/2$, $z_3 = 1/2$. Za ove vrednosti z jednostavno dobijamo x i y. Sistem ima sledećih 6 trojki rešenja:

$$(2, 3, 1), \quad (6, 1, 1), \quad (4, 1, 3/2), \quad (2, 2, 3/2), \quad (6, 2, 1/2), \quad (4, 3, 1/2).$$

137. Rešenje. Ako postoji rešenje (x, y) datog sistema u skupu realnih brojeva, tada iz prve jednačine sleduje $y > 0$, a iz druge $x > y$, pa je $x > y > 0$. Iz prve jednačine izlazi $x + y = \dfrac{3}{\sqrt{y}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{y}} - y$, pa ako x zamenimo u drugu jednačinu, dobijamo

$$P(t) = 2t^9 - 9t^6 + 27t^3 + 7t - 27 = 0,$$

gde je $t = \sqrt{y}$. Kako je $P(t) = (t-1)Q(t)$, gde je

$$\begin{aligned} Q(t) &= 2t^8 + 2t^7 + 2t^6 - 7t^5 - 7t^4 - 7t^3 + 20t^2 + 20t + 27 \\ &= \underbrace{(t^2 + t + 1)}_{>0}\underbrace{(2t^6 - 7t^3 + 20)}_{>0} + 7 > 0 \text{ za svako } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

zaključujemo da jednačina $P(t) = 0$ ima samo jedno realno rešenje $t = 1$. Odavde dobijamo $y = 1$, a zatim $x = 2$. Prema tome, dati sistem ima samo jedno rešenje $(2, 1)$.

138. Rešenje. Primetimo najpre da prva jednačina sistema ima smisla ako je $p \neq \pm 2$. Pod ovim uslovom, množenjem te jednačine sa $p^2 - 4$, ona se svodi na

(1) $$(p-2)\,x + p\,y = 0.$$

Za $p = 0$ iz ove jednačine izlazi $x = 0$, a za te vrednosti p i x zadovoljena je druga jednačina, tako da je y proizvoljno.

Drugu jednačinu možemo napisati u obliku

(2) $$(-p^2 - 4p + 4)\,x - 2\,py = 0.$$

Sistem (1), (2) ima netrivijalna rešenja ako je

(3) $$\frac{p-2}{-p^2 - 4p + 4} = \frac{p}{-2p} = -\frac{1}{2},$$

gde smo pretpostavili da je $p \neq 0$.

Sređivanjem (3) imamo $p^2 + 2p = 0$. Koreni ove jednačine su $p = 0$ i $p = -2$. Međutim, te vrednosti p smo isključili.

Prema tome, za $p = \pm 2$ sistem nema smisla. Za $p = 0$ sistem je neodređen i ima rešenje: $x = 0$ i y proizvoljno. Za $p \neq 0,\ 2,\ -2$ sistem ima trivijalno rešenje $x = 0$, $y = 0$.

139. Rešenje. Sabiranjem levih i desnih strana jednačina datog sistema dobijamo

$$(a + b + c)(x + y + z) = 3\,d.$$

Pošto je $a + b + c = 0$, zaključujemo da je $d = 0$. Ako je $d \neq 0$, sistem nema rešenja. Za $d = 0$ sistem se svodi na sistem homogenih jednačina

(1) $$ax + by + cz = 0, \quad bx + cy + az = 0, \quad cx + ay + bz = 0.$$

U specijalnom slučaju $a = b = c = 0$ sistem (1) zadovoljavaju proizvoljne trojke brojeva (x, y, z). Ako je jedan od brojeva, na primer a, jednak nuli, sistem (1) postaje

$$by + cz = 0, \quad bx + cy = 0, \quad cx + bz = 0.$$

Kako je $b + c = 0$, tj. $c = -b$, ovaj sistem je zadovoljen za $x = y = z = t$, gde je t proizvoljan broj.

Na kraju, razmotrimo slučaj kada su a, b, c različiti od nule. Iz jednakosti $a+b+c=0$ izlazi $c=-(a+b)$, pa sistem (1) glasi

$$ax+by-(a+b)z=0, \quad bx-(a+b)y+az=0, \quad -(a+b)x+ay+bz=0.$$

Ovde je jedna jednačina suvišna, tj. iz dve jednačine izlazi treća. Ako, na primer, saberemo prve dve jednačine, dobijamo treću. Pretpostavimo da je z proizvoljno. Posmatrajmo sistem

$$ax+by=(a+b)z, \quad bx-(a+b)y=-az.$$

Rešenje ovog sistema po x i y je $x=z$, $y=z$.

Dakle, zadati sistem nema rešenja za $d\neq 0$. Ako je $d=0$ i $a=b=c=0$, rešenja su proizvoljne trojke. Za $d=0$ u svim drugim slučajevima rešenja su proizvoljne trojke jednakih brojeva.

140. Rešenje. Uvedimo novu nepoznatu $u=x+y$. Kako je

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= (x+y)\big((x+y)^2-3\,xy\big)=u\,(u^2-6), \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2-2\,xy=u^2-4, \end{aligned}$$

prva jednačina sistema se svodi na

$$\begin{aligned} 3\,u^3-13\,u^2+13\,u-3=0 &\Leftrightarrow 3(u^3-1)+13u(u-1)=0 \\ &\Leftrightarrow (u-1)(3u^2-10u+3)=0. \end{aligned}$$

Rešenja ove jednačine su

$$u_1=1,\ u_2=3,\ u_3=1/3.$$

Sada se jednostavno rešavaju tri sistema

$$x+y=1,\ xy=2; \quad x+y=3,\ xy=2; \quad x+y=\frac{1}{3},\ xy=2.$$

Njihova rešenja su redom

$$\begin{aligned} &x_{1/2}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}, \quad y_{1/2}=\frac{1\mp i\sqrt{7}}{2}; \\ &x_{3/4}=\frac{1\pm i\sqrt{71}}{6}, \quad y_{3/4}=\frac{1\mp i\sqrt{71}}{6}; \\ &x_5=1,\ y_5=2; \quad x_6=2,\ y_6=1. \end{aligned}$$

141. Rešenje. Drugu i treću jednačinu sistema možemo prikazati u obliku

$$b(a+d)=0, \qquad c(a+d)=0.$$

Ove jednačine su zadovoljene ako je $a=-d$ ili $b=0$ i $c=0$. Za slučaj $a=-d$ iz prve i četvrte jednačine dobijamo $a=\pm\sqrt{-bc}$ i $d=\mp\sqrt{-bc}$, što znači da je jedno rešenje zadatog sistema

$$a=\pm\sqrt{-bc}, \quad d=\mp\sqrt{-bc} \qquad (b \text{ i } c \text{ proizvoljni}).$$

Međutim, ovo je opšte rešenje sistema, jer obuhvata i slučaj $b=0$ i $c=0$, kada je $a=0$ i $d=0$.

142. Rešenje. Primenićemo sledeće identitete:

$$(1) \qquad (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$

$$(2) \qquad (xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z),$$

$$(3) \qquad x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

$$(4) \qquad (x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Uvedimo oznake

$$xyz = \alpha, \quad xy+yz+zx = \beta, \quad x^2+y^2+z^2 = \gamma, \quad x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = \delta.$$

Polazeći od jednačina zadatog sistema, iz (1), (2), (3) i (4) dobijamo

$$\begin{aligned} 9 = \gamma + 2\beta \quad &\Rightarrow \quad (5) \quad \beta = \frac{1}{2}(9-\gamma), \\ \beta^2 = \delta + 2\alpha\cdot 3 \quad &\Rightarrow \quad (6) \quad \delta = \beta^2 - 6\alpha, \\ 15 - 3\alpha = 3(\gamma-\beta) \quad &\Rightarrow \quad (7) \quad \alpha = 5-\gamma+\beta, \\ (4) \quad &\Rightarrow \quad (8) \quad \gamma^2 = 35+2\delta. \end{aligned}$$

Ako (6) zamenimo u (8), sleduje (9) $\gamma^2 = 35+2\beta^2-12\alpha$. Ako (5) zamenimo u (7), imamo (10) $\alpha = \frac{1}{2}(19-3\gamma)$. Ako sada (10) i (5) zamenimo u (9), dobijamo $\gamma^2 - 18\gamma + 77 = 0$. Rešenje $\gamma_1 = 11$ ove kvadratne jednačine ne dolazi u obzir zbog uslova u zadatku $\gamma = x^2+y^2+z^2 < 10$. Prema tome, imamo drugo rešenje $\gamma_2 = 7$. Zamenom $\gamma_2 = 7$ u (5) i (7) dobijamo $\alpha = -1$, $\beta = 1$, pa imamo sistem

$$x+y+z=3, \quad xy+yz+zx=1, \quad xyz=-1.$$

Koristeći se VIÈTE-ovim pravilima za kubnu jednačinu, zaključujemo da su x, y, z rešenja jednačine $t^3-3t^2+t+1=0$, tj. $(t-1)(t^2-2t-1)=0$, pa možemo uzeti, na primer, da je $x=1$, a da su y i z rešenja jednačine $t^2-2t-1=0$. Na osnovu VIÈTE-ovih pravila za kvadratnu jednačinu imamo

$$(11) \qquad y+z=2, \qquad yz=-1.$$

Pošto je

$$(12) \quad (y+z)^5-y^5-z^5 = 5yz(y+z)(y^2+yz+z^2) = 5xy(y+z)\big((y+z)^2-yz\big),$$

zamenom (11) u (12) dobijamo

$$2^5-y^5-z^5 = 5\cdot(-1)\cdot 2\big(2-(-1)\big) \Rightarrow y^5+z^5=82.$$

Sada je $x^5+y^5+z^5 = 1^5+82 = 83.$

143. Rešenje. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa y a drugu sa x i tako pomnožene saberemo, dobijamo

$$2xy + \frac{3xy - y^2 - x^2 - 3xy}{x^2+y^2} = 3y \Rightarrow 2xy - 1 = 3y,$$

odakle je

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2y}. \tag{1}$$

Ako x iz (1) zamenimo u drugu jednačinu sistema, dolazimo do bikvadratne jednačine

$$4y^4 - 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad (\text{pošto } y \in \mathbb{R}).$$

Za $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$ i za $y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$. Dakle, realna rešenja sistema su $(2,1)$ i $(1,-1)$.

144. Rešenje. Ako dati sistem posmatramo kao linearni sistem po nepoznatama $1/x$ i $1/y$, pri čemu uzimamo da su x^2+y^2 i $-x^2+y^2$ konstante, dobijamo

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4}(x^2+3y^2), \quad \frac{1}{y} = 3x^2+y^2, \text{ tj.}$$

$$x^3 + 3xy^2 = 4, \qquad 3x^2y + y^3 = 1. \tag{1}$$

Sabiranjem jednačina sistema (1) dolazimo do jednačine

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 5 \Rightarrow (x+y)^3 = 5 \Rightarrow x + y = \sqrt[3]{5} \quad (\text{pošto } x, y \in \mathbb{R}).$$

Ako od prve jednačine sistema (1) oduzmemo drugu jednačinu nalazimo

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3 \Rightarrow (x-y)^3 = 3 \Rightarrow x - y = \sqrt[3]{3} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Prema tome, sistem (1) se transformiše na $x+y = \sqrt[3]{5}$, $\quad x-y = \sqrt[3]{3}$, odakle dobijamo $x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})$, a to su realna rešenja datog sistema.

145. Rešenje. Primetimo najpre da je zadati sistem simetričan. Zatim, direktnim pogađanjem, nalazimo jedno rešenje $(x,y,z,w) = (1,2,3,4)$. S obzirom na pomenutu simetriju rešenja su sve permutacije četvorke $(1,2,3,4)$. Ovih permutacija ima $4! = 24$. Proizvod stepena jednačina datog sistema je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$, pa sistem nema više rešenja osim 24 navedena.

146. Rešenje. Množenjem levih i desnih strana datih jednačina, dobijamo

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{n-2} = a_1a_2\cdots a_n,$$

odakle je

$$x_1x_2\cdots x_n = \sqrt[n-2]{a_1a_2\cdots a_n} = A. \tag{1}$$

Iz prve jednačina sistema

$$\frac{x_2x_3\cdots x_n}{x_1} = a_1,$$

posle proširivanja razlomka na levoj strani sa x_1 i primenom (1), imamo

$$\frac{A}{x_1^2} = a_1 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{A}{a_1}}.$$

Slično je $x_i = \pm\sqrt{\dfrac{A}{a_i}} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$.

Rešenje sistema su one n-torke $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kod kojih je paran broj elemenata n-torki koje uzimaju negativne vrednosti.

Ukupan broj rešenja sistema je: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$.

147. Rešenje. Koristeći se jednakostima

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = 2\,\log_4 x, \\ \log_3 y &= \frac{\log_9 y}{\log_9 3} = 2\,\log_9 y, \\ \log_4 z &= \frac{\log_{16} z}{\log_{16} 4} = 2\,\log_{16} z, \end{aligned}$$

dati sistem se svodi na

$$\begin{aligned} &2\,\log_4 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ &2\,\log_9 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ &2\,\log_{16} z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2, \end{aligned}$$

odakle se antilogaritmovanjem dobija

(1) $$x^2yz = 4^2, \quad y^2zx = 9^2, \quad z^2xy = 16^2.$$

Množenjem levih i desnih strana ovih jednačina, imamo

$$(xyz)^4 = 4^2 \cdot 9^2 \cdot 16^2 \Rightarrow xyz = 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

pri čemu smo vodili računa da zadati sistem ima smisla ako su x, y, z pozitivni. Kako je $xyz = 24$, iz jednačina (1) izlazi

$$x = \frac{4^2}{24} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{9^2}{24} = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{16^2}{24} = \frac{32}{3}.$$

148. Rešenje. Prikažimo datu jednačinu u obliku $x^{\sqrt{x}} = x^{x/2}$. Jednačina je zadovoljena ako je $x = 1$ ili $\sqrt{x} = x/2$. Rešenje druge jednačine je samo $x = 4$, jer za $x = 0$ izrazi $x^{\sqrt{x}}$ i $(\sqrt{x}\,)^x$ nisu određeni. Prema tome, rešenja su $x = 1$ i $x = 4$.

149. Rešenje. Data jednačina je ekvivalentna sa

$$b^{\log_a x} + c^{\log_a x} = a^{\log_a x} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_a x} = 1.$$

Pošto je $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$, zaključujemo da je jedno rešenje $\log_a x = 2 \Rightarrow x = a^2$. Dokažimo da je ovo jedino rešenje. Zaista, kako je

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1,\ 0 < \frac{c}{a} < 1,$$

imamo

$1^\circ \quad \log_a x > 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} < \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_a x} < \left(\frac{c}{a}\right)^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_a x} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1;$$

$2^\circ \quad \log_a x < 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_a x} > 1 \quad$ (analogno kao 1°).

Prema tome,

$$\log_a x \neq 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_a x} \neq 1,$$

pa je $x = a^2$ jedino rešenje date jednačine.

150. Rešenje. Primenimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

$$5^x + 2^{x-2} \geq 2\sqrt{5^x \cdot 2^{x-2}} = 10^{x/2},$$

odakle je

$$(1) \qquad 2\log_{10}(5^x + 2^{x-2}) \geq x,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $5^x = 2^{x-2}$. Pošto je $(5^x - 2^{x-2})^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tada na osnovu zadate jednačine i nejednačine (1) imamo

$$x = (5^x - 2^{x-2})^2 + 2\log_{10}(5^x + 2^{x-2}) \geq x,$$

pa odatle sleduje

$$(5^x - 2^{x-2})^2 = 0 \quad \text{i} \quad 2\log_{10}(5^x + 2^{x-2}) = x,$$

a to je ispunjeno kada je

$$5^x = 2^{x-2} \Rightarrow x\log_2 5 = x - 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{\log_2 5 - 1}.$$

151. Rešenje. Kako je $\log_x 2 = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 x}$, jednačina se svodi na

$$4 = 2^{\log_3 x} + 3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 x}} \Rightarrow 4 = 2^{\log_3 x} + \left(3^{\log_3 2}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}},$$

odakle je

$$4 = 2^{\log_3 x} + 2^{\frac{1}{\log_3 x}}.$$

Ako uvedemo smenu $t = \log_3 x$ $(x > 1 \Rightarrow t > 0)$, dobijamo

$$4 = 2^t + 2^{1/t}.$$

Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$4 = 2^t + 2^{1/t} \geq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{1/t}} = 2\sqrt{2^{t+\frac{1}{t}}} \geq 2\sqrt{2^2} = 4,$$

pri čemu smo upotrebili nejednakost $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$.

Prema tome, važi znak jednakosti u odnosu aritmetičke i geometrijske sredine, tj.

$$2^t = 2^{1/t} \Rightarrow t = \frac{1}{t}.$$

Pošto je $t > 0$, jedino rešenje ove jednačine je $t = 1$. Najzad, iz jednačine $\log_3 x = t = 1$, nalazimo $x = 3$, a to je jedino rešenje zadate jednačine.

152. Rešenje. Smenom $\log_{10}^2 x = t > 0$ data jednačina se svodi na

$$t^2 = 3\sqrt{3t+4} + 4. \tag{1}$$

Neka je $\sqrt{3t+4} = u > 0$. Onda umesto jednačine (1) imamo sistem

$$t^2 = 3u + 4, \qquad u^2 = 3t + 4.$$

Ako od prve jednačine oduzmemo drugu, dobijamo

$$(t-u)(t+u+3) = 0 \Rightarrow u = t \quad (\text{jer je } t+u+3 > 0).$$

Zamenom $u = t$ u prvu jednačinu sistema, nalazimo $t^2 = 3t + 4$. Pozitivno rešenje ove jednačine je $t = 4$. Prema tome, dobijamo $\log_{10}^2 x = 4$, odakle je $x = 10^2$ ili $x = 10^{-2}$ i to su jedina rešenja date jednačine.

Jedno takmičenje u matematici u XIII veku

Leonardo Fobonači, italijanski matematičar, učestvovao je na matematičkom takmičenju (turniru) 1225. godine u gradu Pizi. Takmičenje je održano u prisustvu nemačkog cara Fridriha II, koji je specijalno zbog ovog došao u Pizu.

Pored ostalih bio je i zadatak: Odrediti racionalan razlomak koji je potpun kvadrat (tj. može se napisati u obliku kvadrata drugog racionalnog razlomka), a koji ostaje potpun kvadrat i kada se smanji za 5 i kada se poveća za 5.

Fibonači ga je brzo rešio (ne zna se kako!) i dobio $\frac{1681}{144}$, tj. $\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$ i $\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$.

Od kada je 13 baksuzni broj

Verovanje da je 13 baksuzni broj, kao i mnoga druga verovanja, nastalo je u pradavna vremena. U drevnom Vavilonu, državi na obali Persijskog zaliva, najznačajniji broj bio je broj 12. Kao što je poznato, Vavilonci su godinu delili na dvanaest meseci. Dan i noć su delili na 24 časa, odnosno na dvanaest dvostrukih sati od kojih je svaki čas bio podeljen na 60 minuta, ili na pet po 12. Osim toga, broj 12 bio je vrlo "merljiv", lak i podesan za deljenje i računanje. Tako, na primer, taj broj se mogao bez ostatka deliti i sa 2, i sa 3, i sa 4 i sa 6. Prema tome, taj broj je vrlo pogodna jedinica merenja. Sasvim drugi slučaj je bio sa brojem 13. On nije bio pogodan za deobu kao broj 12, ni sa jednim od gore navedenih brojeva. Zbog toga su prilikom računanja često nastajali ne samo nesporazumi već i svađe, pa i krvave tuče. Upravo zato je ovaj broj, ni kriv ni dužan, dobio naziv "đavolje tuce" i baksuzan broj.

IV. FUNKCIJE. NIZOVI

153. Rešenje. Ako stavimo $u = 2x + y + 3z$, imamo

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2x + y + 3z) = 14 + \lambda u,$$

tj.

$$(1) \qquad (x+\lambda)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3\lambda}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}\lambda^2 + u \cdot \lambda + 14 \geq 0$$

za svako $\lambda \in \mathbb{R}$. Odavde zaključujemo da diskriminanta kvadratnog trinoma na desnoj strani jednakosti (1) ne može biti pozitivna, tj.

$$u^2 - 4 \cdot 14 \cdot \frac{7}{2} \leq 0 \Rightarrow -14 \leq u \leq 14.$$

Prema tome, $u_{\min} = -14$, $u_{\max} = 14$.

NAPOMENA. Odredimo tačke u kojima je dostignuta najmanja i najveća vrednost. Posmatrajmo jednakosti

$$2x + y + 3z = -14, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

Ako prvu jednakost pomnožimo sa 2 i saberemo sa drugom jednakošću, dobijamo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z = -14,$$

odnosno

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -2,\ y = -1,\ z = -3.$$

Prema tome, u tački $(-2, -1, -3)$ izraz $2x + y + 3z$ ima najmanju vrednost.

Analogno dokazujemo da u tački $(2, 1, 3)$ izraz $2x + y + 3z$ ima najveću vrednost.

154. Rešenje. Dati izraz možemo prikazati u obliku

$$\begin{aligned} A(x,y) &= xy(x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + x + y) \\ &= xy\big((x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y)^2 - 2xy + x + y\big). \end{aligned}$$

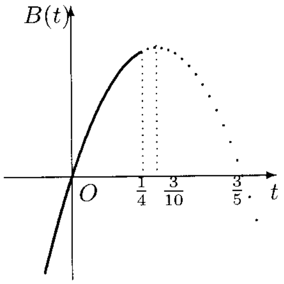
Ako zamenimo $x + y = 1$ i $xy = t$, dobijamo

$$A(x,y) = B(t) = -5t^2 + 3t.$$

Primetimo da iz jednakosti $t = xy$, $x + y = 1$, izlazi

$$t = x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4},$$

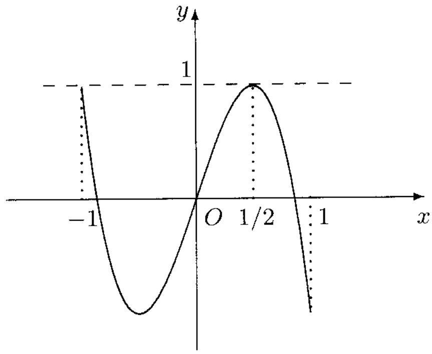
tj. $t \in (-\infty, 1/4]$. Prema tome, tražimo maksimum funkcije $B(t) = -5t^2 + 3t$, pod uslovom $t \in (-\infty, 1/4]$.



Na slici je prikazan grafik funkcije $B(t)$. Punom linijom je nacrtan deo parabole za $t \le 1/4$. Odavde zaključujemo da je

$$\max_{t\le 1/4} B(t) = B\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{16} + \frac{3}{4} = \frac{7}{16}.$$

Prema tome, $\max A(x,y) = \dfrac{7}{16}$ i on je dostignut ako je $x = y = 1/2$.



155. Rešenje. Iz datih uslova imamo

$$\begin{aligned} 4 &= a^2 + 4b^2 \ge 4\,|ab| \;\Rightarrow\; (1) \quad |ab| \le 1 \\ E &= ab\big(3(a^4 + 16b^4) - 40a^2b^2\big) \\ &= ab\big(3(\underbrace{a^2 + 4b^2}_{=4})^2 - 64a^2b^2\big) \end{aligned}$$

$$(2) \qquad E = 16ab(3 - 4a^2b^2).$$

Prema tome, treba da nađemo najveću vrednost izraza (2) pod uslovom (1).

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x(3 - 4x^2)$ na segmentu $[-1, 1]$. Iz uslova $f'(x) = 3 -12x^2 = 0$ nalazimo $x_1 = -1/2$ i $x_2 = 1/2$. Kako je $f''(x) = -24x$, za $x = x_2$ funkcija ima maksimum 1. Za $x = -1$ je $f(-1) = 1$. Prema tome, zaključujemo da je $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = 1$, pa je $E_{\max} = 16$.

156. Rešenje. Prikažimo dati izraz u obliku

$$A = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = 6 \cdot \frac{x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2 + z^2 + z^2}{6}.$$

Kao što se vidi, A je predstavljen pomoću aritmetičke sredine brojeva $x^2, 2xy, 2xy, 4y^2, z^2$ i z^2. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo

$$A \ge 6 \cdot \sqrt[6]{x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy \cdot 4y^2 \cdot z^2 \cdot z^2} = 6\sqrt[6]{16(xyz)^4}.$$

Kako je $xyz = 32$, dobijamo

$$A \ge 6 \cdot \sqrt[6]{16 \cdot (32)^4} = 6\sqrt[6]{2^{24}} = 6 \cdot 2^4 = 96.$$

Znak jednakosti važi ako je $x^2 = 2xy = 4y^2 = z^2$, a to je ispunjeno za $x = 4, y = 2, z = 4$.

Napomena. Ako ovi uslovi ne bi bili ispunjeni, najmanja vrednost A bi bila veća od 96 i ne bi na elementaran način mogla biti određena.

157. Rešenje 1. Primetimo najpre da je zadata funkcija ograničena jer je trinom u imeniocu pozitivan, tj. njegova diskriminanta je negativna.

Iz uslova

$$y' = \frac{2\,(x^2+4\,x+3)}{(x^2+4\,x+5)^2} = 0$$

dobijamo $x = -1$ ili $x = -3$. Drugi izvod date funkcije je

$$y'' = -\frac{4\,(x+2)(x^2+4\,x+1)}{(x^2+4\,x+5)^3}\,.$$

Kako je $y''(-1) = 1 > 0$ i $y''(-3) = -1 < 0$, za $x = -1$ funkcija ima minimum $y_{\min} = 1$, a za $x = -3$ funkcija ima maksimum $y_{\max} = 3$.

Rešenje 2. Postavimo pitanje za koje y iz jednačine

$$y = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$$

dobijamo realno x. Sređivanjem ove jednačine po x dolazimo do kvadratne jednačine

$$(y-2)\,x^2 + (4\,y-6)\,x + 5\,y - 6 = 0.$$

Ona ima realna rešenja ako je $D \geq 0$, tj.

$$(4\,y-6)^2 - 4\,(y-2)(5\,y-6) \geq 0.$$

Odavde je

$$y^2 - 4\,y + 3 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3.$$

Prema tome, $y_{\min} = 1$, $y_{\max} = 3$.

158. Rešenje. a) Prvi izvod date funkcije je $y' = 3x^2 + p$, a drugi $y'' = 6x$. Nule prvog izvoda dobijaju se rešavanjem jednačine $3x^2 + p = 0$, odakle je $x_1 = -(-p/3)^{1/2}$, $x_2 = (-p/3)^{1/2}$.

Da bi data funkcija imala maksimum i minimum moraju nule prvog izvoda biti realne, tj. mora biti $p \leq 0$.

Kako je $y''(x_1) < 0$, a $y''(x_2) > 0$, to je $y_{\max} = y(x_1)$, a $y_{\min} = y(x_2)$, pa imamo

$$\begin{aligned} y(x_1) &= x_1(x_1^2 + p) + q = -(p/3)^{1/2}(-p/3 + p) + q \\ &= q - \frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}} = M. \end{aligned}$$

Slično nalazimo da je

$$y(x_2) = x_2(x_2^2 + p) + q = q + \frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}} = m.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} Mm &= \left(q - \frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q + \frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \\ &= q^2 - \frac{4}{9}\,p^2\left(-\frac{p}{3}\right) = q^2 + \frac{4}{27}\,p^3. \end{aligned}$$

b) Iz uslova $y(-2) = 0$ dobijamo $-8 - 2p + q = 0$, dok iz uslova $M - n = 4$ imamo

$$q - \frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}} - q - \frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}} = 4, \quad \text{tj.} \quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = 1.$$

Poslednja jednačina ekvivalentna je sa $p^3 = -27$, pa je $p = -3$, a iz $-8 - 2p + q = 0$ nalazimo $q = 2$.

159. Dokaz 1. Neka je

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,.$$

Ako pomožimo levu i desnu stranu sa $2\sin x$ i transformišemo proizvode sinusa u razlike kosinusa, dobijamo

$$\begin{aligned}
2\sin x f(x) &= 2\sin^2 x + \frac{2\sin x \sin 3x}{3} + \cdots + \frac{2\sin x\sin(2n-3)x}{2n-3} \\
&\qquad + \frac{2\sin x \sin(2n-1)x}{2n-1} \\
&= 1 - \cos 2x + \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3} + \cdots + \frac{\cos(2n-4)x - \cos(2n-2)x}{2n-3} \\
&\qquad + \frac{\cos(2n-2)x - \cos 2nx}{2n-1} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\cos 2x - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\cos 4x + \cdots \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-2)x - \frac{1}{2n-1}\cos 2nx.
\end{aligned}$$

Desna strana jednakosti je najmanja ako su istovremeno $\cos 2x = 1$, $\cos 4x = 1, \ldots$, $\cos 2nx = 1$, što znači da je $2\sin x f(x) \geq 0$. Međutim, pošto je $0 < x < \pi$, ne mogu svi kosinusi biti istovremeno jednaki jedinici. Prema tome, $f(x) > 0$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 2. Pođimo od identiteta

$$\sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 kx - \sin^2(k-1)x}{\sin x}\,, \tag{1}$$

koji se dobija primenom jednakosti

$$\begin{aligned}
&\sin^2 kx = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2kx), \\
&\sin^2(k-1)x = \frac{1}{2}\,\big(1 - \cos(2k-2)x\big), \\
&\cos(2k-2)x - \cos 2kx = 2\sin x \sin(2k-1)x.
\end{aligned}$$

Koristeći se identitetom (1) imamo

$$\begin{aligned}
&\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \\
&\quad = \frac{1}{\sin x}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right)\sin^2 x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\sin^2 2x + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin^2 nx\right) > 0.
\end{aligned}$$

160. Dokaz. Neka je $0 \le x_1 < x_2 \le 1$. Onda imamo dve mogućnosti:

(i) $0 < x_2 - x_1 \le 1/2$, tada je

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \le 1/2;$$

(ii) $x_2 - x_1 > 1/2$. Tada je

$$|f(0) - f(x_1)| < x_1, \quad |f(1) - f(x_2)| < 1 - x_2,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f(0) - f(x_1) + f(x_2) - f(x_1)| \\ &\le |f(0) - f(x_1)| + |f(x_2) - f(1)| \\ &< x_1 + 1 - x_2 \\ &= 1 - (x_2 - x_1) \\ &< 1/2. \end{aligned}$$

161. Rešenje. Implikacija

$$f(n) = f(m) \Rightarrow f\big(f(n)\big) = f\big(f(m)\big) \Rightarrow n = m,$$

pokazuje da je preslikavanje f uzajamno jednoznačno, tj. 1-1. Na osnovu toga je $f(n) = f(n+2) + 2$ za svako n. Kako je $f(0) = 1$, iz jednakosti $f\big(f(n)\big) = n$ za $n = 0$ dobijamo $f\big(f(0)\big) = 0$, tj. $f(1) = 0$. Pošto je $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, iz rekurentne formule

$$f(n+2) = f(n) - 2 \tag{1}$$

izlazi $f(2) = f(0) - 2 = -1$, $f(3) = f(1) - 2 = -2$, $f(4) = f(2) - 2 = -3$. Prema tome, imamo induktivnu pretpostavku da je $f(n) = 1 - n$, gde je $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ako formulu (1) prikažemo u obliku

$$f(n) = f(n+2) + 2,$$

nalazimo vrednosti funkcije za negativne cele brojeve, tj. $f(-1) = f(1) + 2 = 2$, $f(-2) = f(0) + 2 = 3$, $f(-3) = f(-1) + 2 = 4$. Zaključujemo takođe da je $f(n) = 1 - n$ i za negativne cele brojeve.

162. Rešenje. Ako u jednačinu stavimo $x = 0$ i $y = 0$, dobijamo $f(0)^2 - f(0) = 0$, odakle izlazi $f(0) = 0$ ili $f(0) = 1$. Međutim, za $x = 0$ i $y = 1$ jednačina se svodi na $f(0) \cdot f(1) - f(0) = 1$. Odavde zaključujemo da je $f(0) \ne 0$, pa ostaje $f(0) = 1$. Najzad, za $y = 0$, iz jednačine izlazi $f(x)f(0) - f(0) = x$, tj. $f(x) = x + 1$.

163. Dokaz. 1° *f je neparna funkcija*

$$f(20 + x) = f\big(10 + (10 + x)\big) = f\big(10 - (10 + x)\big) = f(-x) \quad \text{(na osnovu (1))}, \tag{3}$$

$$f(20 - x) = f\big(10 + (10 - x)\big) = f\big(10 - (10 - x)\big) = f(x) \quad \text{(na osnovu (1))}. \tag{4}$$

Iz (2), (3), (4) sleduje $f(-x) = -f(x)$.

2° *f je periodična funkcija*

$$\begin{aligned} f(60+x) &= f\big(20+(40+x)\big) = -f\big(20-(40+x)\big) \quad \text{(na osnovu (2))} \\ &= -f\big(-(20+x)\big) \\ &= f(20+x) \quad (f \text{ je neparna funkcija}) \\ &= f(-x) \quad \text{(jednakost (3))} \\ &= -f(x) \quad (f \text{ je neparna funkcija}). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$f(60+x) = -f(x). \tag{5}$$

Najzad imamo

$$\begin{aligned} f(120+x) &= f\big(60+(60+x)\big) = -f(60+x) \quad \text{(na osnovu (5))} \\ &= -\big(-f(x)\big) \quad \text{(na osnovu (5))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Dakle, f je periodična funkcija sa periodom $T = 120$.

164. Dokaz. Ako u (1) x zamenimo sa $t+1$ i $t+3$, dobijamo

$$f(t+2) + f(t) = \sqrt{3}\, f(t+1), \qquad f(t+4) + f(t+2) = \sqrt{3}\, f(t+3).$$

Ako saberemo ove jednakosti, imamo

$$f(t+4) + 2f(t+2) + f(t) = \sqrt{3}\Big(\underbrace{f(t+3) + f(t+1)}_{\sqrt{3}\, f(t+2)}\Big) = 3f(t+2),$$

tj.

$$f(t+4) + f(t) = f(t+2) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Ako u (2) umesto t stavimo $t+2$, nalazimo

$$f(t+6) + f(t+2) = f(t+4). \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobijamo $f(t+6) + f(t) = 0$, odnosno $f(t+6) = -f(t)$. Sada imamo

$$f(t+12) = -f(t+6) = -\big(-f(t)\big) = f(t) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}.$$

Prema tome, f je periodična funkcija čiji je osnovni period 12.

Primer takve funkcije je $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

165. Rešenje. Ako u jednakosti

$$1 + f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) = f(n) \tag{1}$$

umesto n stavimo $n-1$, dobijamo

$$1 + f(0) + f(1) + \cdots + f(n-2) = f(n-1). \tag{2}$$

Oduzimanjem jednakosti (2) od (1), dobijamo $f(n-1) = f(n) - f(n-1)$, tj.

$$f(n) = 2\,f(n-1). \tag{3}$$

Ako u (3) redom stavimo $n = 1, 2, 3, \ldots$, zbog $f(0) = 1$ imamo

$$f(1) = 2f(0) = 2 \cdot 1 = 2, \quad f(2) = 2f(1) = 2 \cdot 2 = 2^2, \quad f(3) = 2f(2) = 2 \cdot 2^2 = 2^3, \ldots$$

Matematičkom indukcijom dokazaćemo da je $f(n) = 2^n$. Za $n = 1$, tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da za fiksno n važi $f(n) = 2^n$. Tada na osnovu (3) imamo

$$f(n+1) = 2f(n) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Dakle, ako je tvrđenje tačno za n, tačno je i za $n+1$. Time je dokaz završen.

Traženi zbir je

$$\begin{aligned} s &= f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2 + \cdots + f(n)^2 = 1^2 + 2^2 + (2^2)^2 + \cdots + (2^n)^2 \\ &= 1 + 4 + 16 + \cdots + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \frac{1}{3}\,(4^{n+1}-1). \end{aligned}$$

166. Rešenje. 1° Primetimo najpre da je $f(x) \geq 1/2$. Kvadriranjem leve i desne strane dobijamo

$$\begin{aligned} \big(f(x+a)\big)^2 &= \frac{1}{4} + f(x) - \big(f(x)\big)^2 + \sqrt{f(x) - \big(f(x)\big)^2} \\ &= \frac{1}{4} + f(x) - \big(f(x)\big)^2 + f(x+a) - \frac{1}{2} \\ &= f(x) - \big(f(x)\big)^2 - \frac{1}{4} + f(x+a). \end{aligned}$$

Ako u početnu jednačinu umesto x uvedemo $x+a$, imamo

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - \big(f(x+a)\big)^2}. \tag{1}$$

Kako je

$$f(x+a) - \big(f(x+a)\big)^2 = -f(x) + \big(f(x)\big)^2 + \frac{1}{4} = \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2,$$

iz (1) nalazimo

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = f(x),$$

gde smo primenili uslov $f(x) \geq 1/2$.

Kao što se vidi, f je periodična funkcija sa periodom $2a$.

2° Iz zadate jednakosti izlazi da je f periodična funkcija sa periodom $2a$, međutim f mora zadovoljiti još jedan uslov. Izraz $\sqrt{f(x) - \big(f(x)\big)^2}$ je definisan ako je $0 \leq f(x) \leq 1$, što sa uslovom $f(x) \geq 1/2$ daje $1/2 \leq f(x) \leq 1$.

Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|$ ispunjava sve ove uslove.

167. Rešenje. Imamo sledeće mogućnosti.

(i) Ako je $x > 1$, tada je

$$\log_x(\log_y x) > 0 \Rightarrow \log_y x > 1 \Rightarrow \log_y x > \log_y y.$$

Razmotrimo dva slučaja:

1° $y > 1 \Rightarrow x > y$;

2° $0 < y < 1 \Rightarrow x < y$. To je nemogućno jer je $x > 1$.

Dakle, imamo $x > 1$, $y > 1$, $x > y$.

(ii) Ako je $0 < x < 1$, tada je

$$\log_x(\log_y x) > 0 \Rightarrow 0 < \log_y x < 1 \Rightarrow \log_y 1 < \log_y x < \log_y y.$$

Imamo dva slučaja:

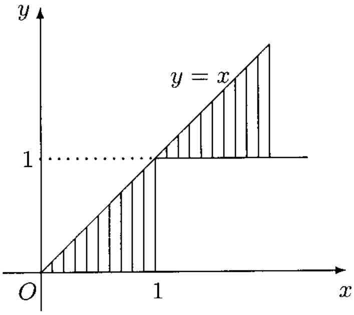
1° $y > 1 \Rightarrow 1 < x < y$. To je nemogućno jer je $0 < x < 1$.

2° $0 < y < 1 \Rightarrow 1 > x > y$.

Prema tome, imamo $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $x > y$.

Iz (i) i (ii) nalazimo

$$\begin{aligned} A = &\{(x,y) | x > 1,\, y > 1,\, x > y\} \\ &\cup \{(x,y) | 0 < x < 1,\, 0 < y < 1,\, x > y\}. \end{aligned}$$



A je šrafirana oblast bez rubnih tačaka.

168. Rešenje. Datu jednačinu možemo transformisati na sledeći način:

$$10^{-3} \cdot x^{\log_{10} x} \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x - 3\right) \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

$$10^{-3}\left(10^{\log_{10} x}\right)^{\log_{10} x} \cdot \frac{1}{10^{\log_{10} x^2}} + \left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x - 3\right)\frac{1}{10^{\log_{10} x}} = 1,$$

$$10^{\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x - 3} + \frac{\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x - 3}{10^{\log_{10} x}} = 1.$$

Ako stavimo $\log_{10} x = t$, dobijamo jednačinu

(1) $$10^{t^2 - 2t - 3} + \frac{t^2 - 2t - 3}{10^t} = 1.$$

Neposredno vidimo da je za $t^2 - 2t - 3 = 0$ zadovoljena jednačina (1), tj. za $t = 3$ ili $t = -1$. Dokažimo da su ovo jedina rešenja jednačine (1). Zaista, imamo:

(i) $\quad t^2 - 2t - 3 > 0 \Rightarrow 10^{t^2-2t-3} > 1 \Rightarrow 10^{t^2-2t-3} + \dfrac{t^2-2t-3}{10^t} > 1,$

(ii) $\quad t^2 - 2t - 3 < 0 \Rightarrow 10^{t^2-2t-3} < 1 \Rightarrow 10^{t^2-2t-3} + \dfrac{t^2-2t-3}{10^t} < 1.$

Prema tome, rešenja date jednačine su $\log_{10} x = 3$, tj. $x_1 = 10^3$ i $\log_{10} x = -1$, tj. $x_2 = 10^{-1}$.

NAPOMENA. Umesto transformacija na početku, može se odmah uvesti smena $\log_{10} x = t$, tj. $x = 10^t$.

169. Rešenje. Data jednačina je ekvivalentna sa

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 6 + x(\log_2 x + 2) = 0,$$
$$(\log_2 x - 3)(\log_2 x + 2) + x(\log_2 x + 2) = 0,$$
$$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 3 + x) = 0.$$

Jednačina se svodi na sledeće dve jednačine:

1° $\quad \log_2 x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1/4.$

2° $\quad \log_2 x + x - 3 = 0$. Rešenje ove jednačine je $x = 2$. Dokažimo da je ono jedino rešenje. Pošto data jednačina ima smisla ako je $x > 0$, posmatraćemo dva intervala:

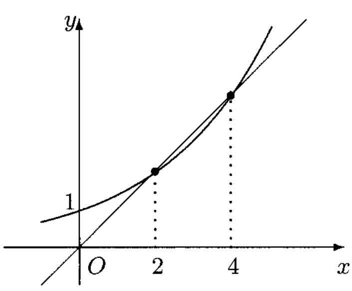
$$0 < x < 2 \Rightarrow \log_2 x < 1 \Rightarrow \log_2 x + x < 3 \Rightarrow \log_2 x + x - 3 < 0;$$
$$2 < x \Rightarrow 1 < \log_2 x \Rightarrow 3 < \log_2 x + x \Rightarrow 0 < \log_2 x + x - 3.$$

Dakle, $x \neq 2 \Rightarrow \log_2 x + x - 3 \neq 0$.

Prema tome, data jednačina ima dva rešenja: $x = 1/4$ ili $x = 2$.

170. Rešenje. Stavimo $y = \log_2(x^2 + 2^x)$. Tada je $2^y = x^2 + 2^x$, pa datu jednačinu možemo napisati u obliku $2^y - 2^x - x - 1 = 2^x - y$, ili

(1) $\qquad 2^y + y = 2^{x+1} + (x+1).$



Kako je funkcija $f(x) = 2^x + x$ strogo rastuća, jer je $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0$, iz (1) izlazi $y = x + 1$, pa je

$$\log_2(x^2 + 2^x) = x + 1,$$

tj.

$$x^2 + 2^x = 2^{x+1} \Rightarrow 2^x = x^2 \Rightarrow 2^{x/2} = x \qquad (x > 0).$$

Na slici su prikazani grafici funkcija $f_1(x) = 2^{x/2}$ i $f_2(x) = x$. Grafici se seku u tačkama čije su apscise 2 i 4. Prema tome, pozitivna rešenja date jednačine su $x_1 = 2$ i $x_2 = 4$.

171. Rešenje 1. Uvedimo funkciju $f(x) = \sqrt{-3 + 4x}$. Datu jednačinu možemo prikazati u obliku $x = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$. Funkcija f je strogo rastuća. Primetimo da su $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$ rešenja date jednačine. Dokažimo da su to jedina rešenja. Razmotrimo mogućnosti:

1° $1 < x < 3 \Rightarrow x < \sqrt{-3+4x}$, tj. $x < f(x)$. Kako je f strogo rastuća funkcija, izlazi $f(x) < f\big(f(x)\big) \Rightarrow f\big(f(x)\big) < f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$. Dakle, imamo $x < f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

2° $x < 1 \vee x > 3 \Rightarrow x > \sqrt{-3+4x}$, tj. $x > f(x)$, pa analogno kao pod 1° možemo zaključiti da je $x > f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

Iz 1° i 2° sleduje $x \neq 1 \wedge x \neq 3 \Rightarrow x \neq f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$. Time smo dokazali da su $x_1 = 1 \vee x_2 = 3$ jedina rešenja.

NAPOMENA. Na isti način se može rešiti opštija jednačina

$$x = \underbrace{\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4\sqrt{-3+\cdots+4\sqrt{-3+4x}}}}}_{n \text{ korena}}.$$

Rešenje 2. U rešenju 1 smo datu jednačinu prikazali u obliku $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = x$. Odavde izlazi da su $f(x)$ i $f\big(f(x)\big)$ inverzne funkcije, pa je $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{-3+4x} = x$. Kvadriranjem ove jednačine dobijamo $x^2 - 4x + 3 = 0$, odakle je $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$.

172. Rešenje. Ako stavimo $f(x) = \sqrt[5]{x^3+2x}$ i $g(x) = \sqrt[3]{x^5-2x}$ i ako jednačina ima rešenje x_0, onda je $f(x_0) = g(x_0) = t_0$. U tom slučaju imamo

$$(1) \qquad \big(f(x_0)\big)^5 = x_0^3 + 2x_0 = t_0^5, \quad \big(g(x_0)\big)^3 = x_0^5 - 2x_0 = t_0^3.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$(2) \qquad x_0^5 + x_0^3 = t_0^5 + t_0^3.$$

Posmatrajmo funkciju $x \mapsto \varphi(x) = x^5 + x^3$. Kako je $\varphi'(x) = 5x^4 + 3x^2 \geq 0$, funkcija φ je strogo monotono rastuća pa iz (2) sleduje $x_0 = t_0$. Jednačine (1) se svode na jednačinu $x_0^5 - x_0^3 - 2x_0 = 0$. Realna rešenja ove jednačine su $x_0 = 0$, $x_0 = \pm\sqrt{2}$, a to su istovremeno realna rešenja zadate jednačine.

173. Rešenje. Uvedimo funkcije $f_1(x) = \log_{1/16} x$ i $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$. Sa k_1 i k_2 označimo krive određene jednačinama $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$. Tačke $(1/2, 1/4)$ i $(1/4, 1/2)$ pripadaju presecima k_1 i k_2 pa su $x = 1/2$ i $x = 1/4$ rešenja zadate jednačine. Primetimo da su funkcije f_1 i f_2 uzajamno inverzne. To znači da je kriva k_1 simetrična krivoj k_2 u odnosu na pravu $y = x$, i obrnuto, pa je prava $y = x$ osa simetrije. Prema tome, neke tačke preseka tih krivih pripadaju pravoj $y = x$. Apscise tačaka preseka su rešenja jednačine $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x = x$. Ova jednačina ima jedno rešenje, $x = 0.3642498898\ldots$, dobijeno numeričkim putem.

Prema tome, zadata jednačina ima tri rešenja.

174. Rešenje. Neposrednom proverom zaključujemo da je $x = 1/2$ i $y = 1/3$ rešenje datog sistema. Da bismo dokazali da dati sistem nema drugih rešenja, koristimo činjenicu da su funkcije $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto \log_a x$ $(0 < a < 1)$ monotono opadajuće. Pretpostavimo da je (x_0, y_0) još jedno rešenje datog sistema. Tada imamo sledeće mogućnosti:

1° $x_0 > 1/2$, $y_0 \geq 1/3$ (ili $x_0 \geq 1/2$, $y_0 > 1/3$)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x_0} < \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}, \left(\frac{1}{27}\right)^{y_0} \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x_0} + \left(\frac{1}{27}\right)^{y_0} < \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{5}{6};$$

2° $x_0 < 1/2$, $y_0 \leq 1/3$ (ili $x_0 \leq 1/2$, $y_0 < 1/3$)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x_0} > \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}, \left(\frac{1}{27}\right)^{y_0} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x_0} + \left(\frac{1}{27}\right)^{y_0} > \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{5}{6};$$

3° $x_0 > 1/2$, $y_0 \leq 1/3$ (ili $x_0 \geq 1/2$, $y_0 < 1/3$)

$$\Rightarrow \log_{1/4} x_0 < \log_{1/4} \frac{1}{2}, \ \log_{1/27} y_0 \geq \log_{1/27} \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \log_{1/4} x_0 - \log_{1/27} y_0 < \log_{1/4} \frac{1}{2} - \log_{1/27} \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

4° $x_0 < 1/2$, $y_0 \geq 1/3$ (ili $x_0 \leq 1/2$, $y_0 > 1/3$)

$$\Rightarrow \log_{1/4} x_0 > \log_{1/4} \frac{1}{2}, \ \log_{1/27} y_0 \leq \log_{1/27} \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \log_{1/4} x_0 - \log_{1/27} y_0 > \log_{1/4} \frac{1}{2} - \log_{1/27} \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Time smo dokazali da $(x_0, y_0) \neq (1/2, 1/3)$ ne može biti rešenje datog sistema.

175. Rešenje. Iz prve jednačine imamo

$$x + \sin x = 2y + \sin 2y. \tag{1}$$

Posmatrajmo funkciju $f(t) = t + \sin t$. Za ovu funkciju važi: $f'(t) = 1 + \cos t \geq 0$ i $f'(t) = 0$ ako i samo ako je $t = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Pošto skup $\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ne sadrži nijedan interval, funkcija f je strogo rastuća, i funkcijom f je preslikavanje injektivno.

Na osnovu ovih osobina funkcija f, iz (1) izlazi da je $x = 2y$. Zamenom x u drugu jednačinu sistema dobijamo

$$\cos 2y + 5 \sin y = 4 \ \Rightarrow \ 2\sin^2 y - 5 \sin y + 3 = 0.$$

Iz ove jednačine dobijamo $\sin y = 1$, odakle je $y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ i $x = \pi + 4k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Rešenje $\sin y = 3/2 > 1$ odbacujemo.

176. Rešenje. Kako je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \, \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

to je

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

177. Rešenje. 1° U prvoj vrsti imamo jedan broj, u drugoj 3 broja, ..., u $k-1$-oj vrsti $2k-3$ brojeva, ..., u n-toj vrsti $2n-1$ brojeva. U prvih $k-1$ vrsta imamo ukupno

$$1 + 3 + \cdots + 2k - 3 = \frac{k-1}{2}(2k - 3 + 1) = (k-1)^2$$

brojeva. Zbog toga k-ta vrsta počinje sa $(k-1)^2 + 1$, a završava se sa k^2. Zbir brojeva u n-toj vrsti iznosi

$$S_n = \big((n-1)^2 + 1\big) + \big((n-1)^2 + 2\big) + \cdots + (n^2).$$

Ovo je aritmetička progresija koja ima $2n-1$ članova i diferencija je 1. Prema tome,

$$S_n = \frac{2n-1}{2}\big((n-1)^2 + 1 + n^2\big) = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + (n-1)^3,$$

što je trebalo dokazati.

2° U sredini k-te vrste nalazi se broj a_k koji je jednak aritmetičkoj sredini početnog i krajnjeg broja u toj vrsti, tj.

$$a_k = \frac{1}{2}\big((k-1)^2 + 1 + k^2\big) = k^2 - k + 1.$$

Zbir ovakvih n brojeva je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n^2+2)}{3}.$$

178. Rešenje. Elementi n-te vrste su $n, n+1, n+2, \ldots, 3n-2$ i ona ima $2n-1$ član. Ova vrsta je aritmetički niz sa prvim članom $a_1 = n$, diferencijom $d = 1$ i poslednjim članom $a_{2n-1} = 3n - 2$. Suma elemenata n-vrste jednaka je

$$S_{2n-1} = \frac{2n-1}{2}(a_1 + a_{2n-1}) = \frac{2n-1}{2}(n + 3n - 2) = (2n-1)^2.$$

179. Rešenje. Dati niz možemo napisati u obliku

$$1 - \frac{5}{10},\ 1 - \frac{5}{10^2},\ 1 - \frac{5}{10^3}, \ldots, 1 - \frac{5}{10^{1000}}, \ldots$$

Tada je zbir prvih 1000 članova jednak

$$S_{1000} = 1000 - 5\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{1000}}\right) = 1000 - \frac{5}{10}\,\frac{1 - \dfrac{1}{10^{1000}}}{1 - \dfrac{1}{10}}$$
$$= 1000 - \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^{1000}}\right) = 1000 - \frac{5}{9} \cdot 0,\underbrace{99\ldots 9}_{1000}$$
$$= 1000 - 0,\underbrace{55\ldots 5}_{1000} = 999,\underbrace{44\ldots 4}_{999}5$$

Zbir cifara decimalnog broja S_{1000} je $3 \cdot 9 + 999 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 4028$.

180. Dokaz. Imamo sledeće ekvivalencije

$$\frac{S_n}{S_k} = \frac{n^2}{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{n}{2}(a_n + a_1)}{\frac{k}{2}(a_k + a_1)} = \frac{n^2}{k^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_n + a_1}{a_k + a_1} = \frac{n}{k}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_1 + (n-1)d + a_1}{a_1 + (k-1)d + a_1} = \frac{n}{k}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2a_1 = d, \tag{3}$$
$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{2n-1}{2k-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1 + (n-1)d}{a_1 + (k-1)d} = \frac{2n-1}{2k-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2a_1 = d. \tag{4}$$

Iz (1) i (2) sleduje data ekvivalencija.

181. Dokaz. Kako je $a_k = a_1 + (k-1)d_1$, $b_k = b_1 + (k-1)d_2$, $A_k = \frac{k}{2}\big(2a_1 + (k-1)d_1\big)$, $B_k = \frac{k}{2}\big(2b_1 + (k-1)d_2\big)$, imamo

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1 + (k-1)d_1}{b_1 + (k-1)d_2} = \frac{2a_1 + (2k-1-1)d_1}{2b_1 + (2k-1-1)d_2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(2k-1)\big(2a_1 + (2k-1-1)d_1\big)}{\frac{1}{2}(2k-1)\big(2b_1 + (2k-1-1)d_2\big)}$$
$$= \frac{A_{2k-1}}{B_{2k-1}}.$$

182. Rešenje. Data veza između tri uzastopna člana niza

$$x_k = \frac{1}{2}(x_{k-2} + x_{k-1}) \tag{1}$$

je tzv. diferencna jednačina. Potražimo rešenje ove jednačine u obliku $x_k = r^k$. Zamenom x_k u jednačinu (1) dobijamo

$$r^k = \frac{1}{2}\left(r^{k-2} + r^{k-1}\right),$$

tj.

$$2r^2 - r - 1 = 0.$$

Koreni ove jednačine su $r_1 = 1$ i $r_2 = -1/2$. Opšte rešenje jednačine (1) je

$$x_k = C_1 r_1^k + C_2 r_2^k = C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \tag{2}$$

gde su C_1 i C_2 konstante koje treba odrediti. Kako je $x_0 = a$, $x_1 = b$, iz jednakosti (2) za $k = 0$ i $k = 1$ dobijamo

$$C_1 + C_2 = a, \qquad C_1 - \frac{C_2}{2} = b.$$

Iz ovog sistema nalazimo

$$C_1 = \frac{a+2b}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}(a-b),$$

tako da jednakost (2) postaje

$$x_k = \frac{a+2b}{3} + \frac{2}{3}(a-b)\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Prema tome, n-ti član niza je

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{a-b}{3}(-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}.$$

183. Dokaz. Za $x_1 = 1$ dobijamo $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Primetimo da je uopšte $0 < x_n \leq 1$. Prisustvo izraza $\sqrt{1 - x_n^2}$ navodi nas da uvedemo smenu $x_n = \sin\varphi_n$, pri čemu je $0 < \varphi_n \leq 90^\circ$. Tada je

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2\varphi_n}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi_n}{2}} = \sin\frac{\varphi_n}{2}.$$

Odavde izlazi da je $\varphi_n = \dfrac{180^\circ}{2^n}$ (provera za $n = 1$ daje zaista $\varphi_1 = 90^\circ$). Dakle, pri svakoj iteraciji ugao se smanjuje 2 puta, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{180^\circ}{2^n} = 0.$$

184. Rešenje. Na osnovu uslova zadatka za svako $k, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\left|(x_{n+1} - x_n) - (x_{k+1} - x_k)\right| &= \left|(x_{n+k+1} - x_n - x_{k+1}) - (x_{n+k+1} - x_{n+1} - x_k)\right| \\
&\leq |x_{n+k+1} - x_n - x_{k+1}| + |x_{n+k+1} - x_{n+1} - x_k| \\
&\leq \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k+1} \\
&< \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Ako fiksiramo k i pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo da niz $(x_{n+1} - x_n)$ ima graničnu vrednost $x_{k+1} - x_k$. Međutim, kako se k može birati proizvoljno, zaključujemo da $x_{k+1} - x_k$ ne zavisi od k. Prema tome, $x_2 - x_1 = x_{n+1} - x_n = \text{const}$, pa je (x_n) aritmetička progresija.

V. KOMPLEKSNI BROJEVI. POLINOMI

185. Rešenje. Kako je $z = x + iy$, iz date jednačine dobijamo

$$x = \frac{3 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t^2 + 4t + 2}{1 + t^2}. \tag{1}$$

Treba eliminisati parametar t. Prikažimo jednakosti (1) u obliku

$$x = 1 - \frac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \quad y = 2 + \frac{4t}{t^2 + 1},$$

tj.

$$x - 1 = -\frac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \quad y - 2 = \frac{4t}{t^2 + 1}.$$

Kvadriranjem i sabiranjem ovih jednakosti imamo

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\,\frac{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}{(t^2+1)^2} = 4\,\frac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2} = 4.$$

Prema tome, traženo geometrijsko mesto je kružnica $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

186. Rešenje 1. Neka je $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} \Rightarrow z^{-1} = \cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}$. Imamo $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, tj. $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$. Dalje je

$$z^3 = \left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^3 \Rightarrow z^3 = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} \Rightarrow z^{-3} = \cos\frac{3\pi}{10} - i\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Na osnovu toga je

$$\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{z^3 - z^{-3}}{2i} = \frac{z^6 - 1}{2iz^3}.$$

Sada je

$$E = \frac{z^6 - 1}{2iz^3} - \frac{z^2 - 1}{2iz} \Rightarrow \quad (1) \quad E = \frac{z^8 - z^6 + z^4 - z^2}{2iz^5}.$$

Pošto je (2) $z^5 = i$ i $z^{10} = -1 \Rightarrow z^{10} + 1 = 0 \Rightarrow (z^2+1)(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1) = 0$ i $z^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ (3) $z^8 - z^6 + z^4 - z^2 = -1$.

Ako (2) i (3) zamenimo u (1), dobijamo $E = \frac{-1}{2i \cdot i} = \frac{1}{2}$.

Rešenje 2. Imamo

$$E=\frac{2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}-2\sin\frac{2\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{2\pi}{10}}=\frac{\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{5\pi}{10}-\left(\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{3\pi}{10}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{10}}$$
$$=\frac{\cos\frac{3\pi}{10}}{2\sin\frac{2\pi}{10}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{2\sin\frac{2\pi}{10}}=\frac{1}{2}.$$

187. Rešenje. Pošto je

$$(z_1+z_2+z_3)^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\ \text{ i }\ z_1^2+z_2^2+z_3^2=0,$$

onda je

$$(z_1+z_2+z_3)^2=2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1),$$

tj.

$$(1)\qquad |z_1+z_2+z_3|^2=2\,|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|.$$

Iz uslova $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ izlazi $|z_1z_2z_3|=1$, $z_1\overline{z}_1=z_2\overline{z}_2=z_3\overline{z}_3=1$, tako da je

$$\begin{aligned}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|&=\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1z_2z_3|}\\&=\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\\&=|\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}\,|\end{aligned}$$

i na kraju

$$(2)\qquad |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=|z_1+z_2+z_3|.$$

Iz (1) i (2) izlazi

$$|z_1+z_2+z_3|^2=2\,|z_1+z_2+z_3|,$$

odakle, s obzirom na uslov $z_1+z_2+z_3\neq 0$, dobijamo $|z_1+z_2+z_3|=2$.

188. Dokaz. 1° Kako je $z_1-z_2=r\big((\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+i(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\big)$, tada je

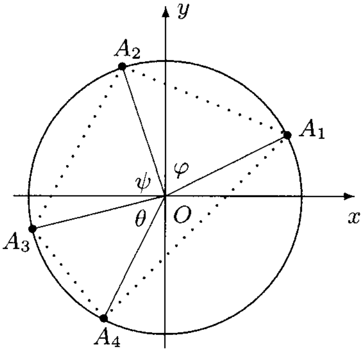
$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=r^2\big((\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)^2+(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)^2\big)\\&=r^2\big(2-2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\big)\\&=4r^2\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2},\end{aligned}$$

i pošto je $0<\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}<\pi$, izlazi

$$|z_1-z_2|=2r\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}.$$

2° Postavimo kompleksnu ravan tako da centar kruga poluprečnika r bude koordinatni početak i da kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3, z_4 koji označavaju temena četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ imaju argumente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tako da je

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 2\pi.$$



Tada je

$$z_k = r(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k) \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Na osnovu 1° imamo

$$\overline{A_jA_k} = |z_j - z_k| = 2r\sin\frac{\alpha_k - \alpha_j}{2} \qquad (1 \leq j < k \leq 4).$$

Prema tome, jednakost (1) je ekvivalentna sa

$$2r\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cdot 2r\sin\frac{\alpha_4-\alpha_3}{2} + 2r\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cdot 2r\sin\frac{\alpha_4-\alpha_1}{2}$$
$$= 2r\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cdot 2r\sin\frac{\alpha_4-\alpha_2}{2}.$$

Ako stavimo da je $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $\psi = \alpha_3 - \alpha_2$, $\theta = \alpha_4 - \alpha_3$, dobijamo

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi+\theta}{2} = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\psi+\theta}{2}, \text{ tj.}$$
$$\cos\frac{\varphi-\theta}{2} - \cos\frac{\varphi+\theta}{2} + \cos\frac{\varphi+\theta}{2} - \cos\frac{\varphi+2\psi+\theta}{2}$$
$$= \cos\frac{\varphi-\theta}{2} - \cos\frac{\varphi+2\psi+\theta}{2},$$

a ovo je tačna jednakost. Time je dokazana jednakost (1).

189. Rešenje. Prikažimo dati polinom u obliku

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b \equiv (x^2 + px + q)^2.$$

Kvadriranjem desne strane, dobijamo

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b \equiv x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2.$$

Ovaj identitet važi ako su ispunjeni uslovi

$$2p = 1, \quad p^2 + 2q = 2, \quad 2pq = a, \quad q^2 = b.$$

Iz prve dve jednačine izlazi $p = 1/2$, $q = 7/8$, tako da je $a = 7/8$ i $b = 49/64$. Na osnovu toga važi jednakost

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{49}{64} = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}\right)^2.$$

190. Rešenje. Da bi važio identitet

$$(x+b)(x+c) \equiv (x-a)(x-10) + 1, \text{ tj.}$$
$$x^2 + (b+c)x + bc \equiv x^2 - (a+10)x + 10a + 1,$$

moraju biti ispunjene jednakosti $b + c = -a - 10$, $bc = 10a + 1$.

Koristeći se VIÈTE-ovim pravilima, zaključujemo da su b i c koreni kvadratne jednačine

$$t^2 + (a+10)\,t + 10a + 1 = 0.$$

Rešenja su

$$t_{1/2} = \frac{-(a+10) \pm \sqrt{(a+10)^2 - 4\,(10a+1)}}{2} = \frac{-(a+10) \pm \sqrt{(a-10)^2 - 4}}{2}.$$

Pošto su b i c celi brojevi, treba odrediti a tako da $(a-10)^2 - 4$ bude kvadrat celog broja. To je jedino mogućno za $a = 12$ ili $a = 8$. Za $a = 12$ je $b = c = -11$, a za $a = 8$ je $b = c = -9$.

191. Rešenje. Dati izraz se može napisati u izmenjenom obliku na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2px + p^2 - 16}{p^2 + px - 4x - 16} &= \frac{(x+p)^2 - 4^2}{p^2 - 16 + x\,(p-4)} = \frac{(x+p-4)(x+p+4)}{(p-4)(x+p+4)}\\ &= \frac{x+p-4}{p-4}.\end{aligned}$$

Ovde je skraćivanje opravdano jer su x i p prirodni brojevi, pa je $x+p+4>0$.

Iz jednakosti $\dfrac{x+p-4}{p-4} = 1.05 = 1 + \dfrac{1}{20}$ izlazi

$$x + p - 4 = p - 4 + \frac{p-4}{20} \;\Rightarrow\; x = \frac{p-4}{20}.$$

Najmanje p za koje je x prirodan broj je $p = 24$. Tada je $x = 1$. Prema tome, najmanji prirodni brojevi za koje dati izraz ima vrednost 1.05 su $p = 24$ i $x = 1$.

192. Rešenje. Zadate polinome možemo faktorisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}P(x) &= x^5 + x^4 + x^2 + x = x^2(x^3+1) + x\,(x^3+1)\\ &= (x^3+1)(x+1)\,x = (x+1)^2(x^2-x+1)\,x;\\ Q(x) &= x^6 + 2\,x^5 + 2\,x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + 2\,x + 1\\ &= (x^6 + 2\,x^3 + 1) + 2\,(x^5 + x^2 + x^4 + x)\\ &= (x^3+1)^2 + 2\,x^2(x^3+1) + 2x\,(x^3+1)\\ &= \quad (x^3+1)(x^3+1+2\,x^2+2\,x)\\ &= (x^3+1)\big((x+1)(x^2-x+1) + 2x\,(x+1)\big)\\ &= (x+1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1).\end{aligned}$$

Kao što se vidi, $(x+1)^2(x^2-x+1)$ je najveći zajednički delilac polinoma P i Q.

NAPOMENA. Zadatak se može jednostavno rešiti primenom Euklidovog algoritma.

193. Rešenje. Uslov a) je ispunjen za svako x ako je

(1) $\quad a^2 + c^2 = 1,\qquad$ (2) $\quad ab + cd = 0,\qquad$ (3) $\quad b^2 + d^2 = 1,$

dok zamenom $x = 2$ u b dobijamo

(4) $$(2\,a + b)(2\,c + d) = 2.$$

Ispitajmo najpre trivijalne slučajeve.

1° $a = 0$. Tada se jednačina (2) svodi na $cd = 0$, odakle je $d = 0$, jer c ne može biti nula zbog (1). Za $a = 0$ i $d = 0$ jednačina (4) glasi $bc = 1$. To je ispunjeno za $b = 1$ i $c = 1$, ili $b = -1$, $c = -1$. Dakle, jedno rešenje zadatka je $a = 0$, $d = 0$, $b = 1$, $c = 1$, a drugo $a = 0$, $d = 0$, $b = -1$, $c = -1$.

2° $b = 0$. Analognim postupkom dobijamo još dva rešenja: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ i $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -1$.

Posmatrajmo sada slučajeve kada su a, b, c, d različiti od nule. Prikažimo jednačinu (2) u obliku

$$\frac{a}{c} = -\frac{d}{b} = t.$$

Odavde je $a = ct$, $d = -bt$. Zamenom a i d u (1) i (3) dobijamo

$$c^2(1+t^2) = 1, \quad b^2(1+t^2) = 1.$$

Iz ovih jednačina izlazi $c = b$, ili $c = -b$.

Za $c = b$ iz (2) je $d = -a$. Jednačina (4) se svodi na

$$(2a+b)(2b-a) = 2, \text{ tj. } 3ab + 2b^2 - 2a^2 = 2,$$

a jednačina (1) na $a^2 + b^2 = 1$.

Rešimo sistem

$$3ab + 2b^2 - 2a^2 = 2, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa -2 i saberemo sa prvom, dobijamo

$$3ab - 4a^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{4}{3}a \qquad (\text{jer je } a \neq 0).$$

Tada je

$$a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{3}{5}.$$

Odavde izlaze dva rešenja

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{4}{5}, \quad c = \frac{4}{5}, \quad d = -\frac{3}{5};$$
$$a = -\frac{3}{5}, \quad b = -\frac{4}{5}, \quad c = -\frac{4}{5}, \quad d = \frac{3}{5}.$$

Sličnim postupkom, za $c = -b$, $d = a$ imamo još dva rešenja

$$a = \frac{4}{5}, \quad b = -\frac{3}{5}, \quad c = \frac{3}{5}, \quad d = \frac{4}{5};$$
$$a = -\frac{4}{5}, \quad b = \frac{3}{5}, \quad c = -\frac{3}{5}, \quad d = -\frac{4}{5}.$$

194. Rešenje. Ako je takvo razlaganje mogućno, onda je ono oblika

$$f(x) = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

Do njega dolazimo na potpuno isti način kao što se razlaže kvadratni trinom. Prikažimo $f(x)$ u obliku

$$f(x) = 2x^2 - (3y + 1)x - 2y^2 + 7y - 3.$$

Koreni jednačine $f(x) = 0$ su

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{3y + 1 \pm \sqrt{(3y + 1)^2 - 8(-2y^2 + 7y - 3)}}{4} \\ &= \frac{3y + 1 \pm 5(y - 1)}{4}. \end{aligned}$$

Dakle, $x_1 = 2y - 1$, $x_2 = -\frac{y}{2} + \frac{3}{2}$ pa je

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 2\big(x - (2y - 1)\big)\left(x - \left(-\frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)\right) \\ &= (x - 2y + 1)(2x + y - 3). \end{aligned}$$

195. Dokaz. Za $x \leq 0$ dati polinom je pozitivan jer je $-x^9 \geq 0$ i $-x \geq 0$.

Prikažimo polinom u obliku

$$x^{12} + (x^4 - x^9) + (1 - x).$$

Za $0 < x < 1$ je $x^4 > x^9$ i $1 > x$, pa je polinom pozitivan. Najzad, za $x \geq 1$ napišimo polinom u drugom obliku

$$(x^{12} - x^9) + (x^4 - x) + 1,$$

iz koga se vidi da je polinom opet pozitivan, s obzirom da je $x^{12} \geq x^9$, $x^4 \geq x$.

196. Dokaz. Najpre ćemo dokazati da $P(x) = A\,(x^3 - x)$ zadovoljava jednakost (1). Imamo

$$\begin{aligned} P(x + 1) &= A\left((x + 1)^3 - (x + 1)\right) = A\,(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x - 1) \\ &= A\,(x^3 + 3x^2 + 2x), \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} (x - 1)P(x + 1) &= A\,(x - 1)(x^3 + 3x^2 + 2x) = A\,(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x^3 - 3x^2 - 2x) \\ &= A\,(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x) = A\left(x^3(x + 2) - x\,(x + 2)\right) \\ &= (x + 2)A\,(x^3 - x) = (x + 2)P(x). \end{aligned}$$

Sada ćemo dokazati da važi i obrnuto, tj. ako polinom P zadovoljava jednakost (1), on mora biti datog oblika.

Stavljajući u (1) $x = 1$, dobijamo $0 \cdot P(2) = 3P(1)$, tj. $P(1) = 0$. Ako se stavi $x = 0$, dobija se $-1P(1) = 2P(0)$. Kako je $P(1) = 0$, nalazimo da je i $P(0) = 0$. Najzad, za $x = -1$ jednakost (1) postaje $-2P(0) = P(-1)$ pa je i $P(-1) = 0$.

Dakle, $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$ su nule polinoma P koji zadovoljava jednakost (1). Prema tome, traženi polinom P je deljiv sa $x(x+1)(x-1)$, tj. sa $x^3 - x$, pa se može napisati

$$P(x) = (x^3 - x)\, Q(x),$$

gde je Q polinom.

Zamenom u (1), posle skraćivanja, dobijamo

$$Q(x) = Q(x+1),$$

odakle je $Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots$, što znači da je $Q(x) = A = \text{const}$, pa je

$$P(x) = A(x^3 - x).$$

197. Rešenje. Neka je $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + cx + d$. Kako je

$$\begin{aligned} P(1) &= a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d, \\ P(2) &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d, \\ &\;\vdots \\ P(n) &= a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d, \end{aligned}$$

sabiranjem ovih jednačina dobijamo

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = a \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 + b \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + c \cdot \sum_{k=1}^{n} k + d \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \equiv n^4.$$

Koristeći se formulama

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2,$$

gornja jednakost se svodi na

$$a \cdot \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} + c \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + d \cdot n \equiv n^4,$$

ili posle sređivanja na

$$3\,an^4 + (6\,a + 4\,b)\,n^3 + (3\,a + 6\,b + 6\,c)\,n^2 + (2\,b + 6\,c + 12\,d)\,n \equiv 12\,n^4.$$

Da bi ovaj identitet važio, moraju biti ispunjene jednakosti

$$3\,a = 12, \quad 6\,a + 4\,b = 0, \quad 3\,a + 6\,b + 6\,c = 0, \quad 2\,b + 6\,c + 12\,d = 0,$$

iz kojih dobijamo $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$.

Prema tome, traženi polinom je $P(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 4\,x - 1$.

198. Dokaz 1. Iz uslova zadatka dobijamo

(1) $\quad P_n(0) = a_n = 2k+1,$

(2) $\quad P_n(1) = 1 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 2\ell + 1,$

gde su k i ℓ celi brojevi.

Ispitajmo da li $P_n(x)$ može biti jednako nuli za neku celu vrednost x. Posmatrajmo dva slučaja:

1° x je parno. Tada je $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$ paran broj, pa je, s obzirom na (1), $P_n(x)$ neparan, tako da ne može da bude jednak nuli.

2° x je neparno. Tada se x^n, $x^{n-1}, \ldots, x$ mogu izraziti kao zbir parnog broja i jedinice, pa se $P_n(x)$ može prikazati u obliku zbira parnog broja i izraza

$$1 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

S obzirom na (2) $P_n(x)$ je i u ovom slučaju neparan, čime je dokaz završen.

Dokaz 2. Neka je $x = x_1$, gde je x_1 ceo broj, koren jednačine $P_n(x) = 0$. Tada se iz $P_n(x)$ može izvući faktor $x - x_1$, pa je

(3) $$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x),$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa celobrojnim koeficijentima.

Kako je

$$P_n(0) = -x_1Q_{n-1}(0)$$

neparan broj, izlazi da je x_1 neparan broj. S druge strane, prema tekstu zadatka,

$$P(1) = (1 - x_1)Q_{n-1}(1)$$

je neparan broj, a to je ispunjeno ako je x_1 paran broj. Pošto x_1 ne može istovremeno da bude neparan i paran broj, zaključujemo da $P_n(x)$ ne može biti jednako nuli za ceo broj x.

199. Rešenje. Ako se $x^m + a^m$ podeli sa $(x+b)(x+c)$, dobijamo polinom stepena $m-2$ i ostatak $px+q$, tj.

$$\frac{x^m + a^m}{(x+b)(x+c)} = P_{m-2}(x) + \frac{px+q}{(x+b)(x+c)},$$

odakle je

(1) $$x^m + a^m = (x+b)(x+c)P_{m-2}(x) + px + q.$$

Posmatrajmo dva slučaja:

1° $b \neq c$. Zamenom $x = -b$ i $x = -c$ u jednakost (1) dolazimo do sistema linearnih jednačina

$$-pb + q = (-b)^m + a^m, \quad -pc + q = (-c)^m + a^m,$$

čije je rešenje

(2) $$p = (-1)^{m-1}\frac{b^m - c^m}{b-c}, \qquad q = a^m + (-1)^m\frac{bc^m - cb^m}{b-c}.$$

Prema tome, traženi ostatak je $px+q$, gde su p i q dati jednakostima (2).

2° $b = c = a$. Za ovaj specijalan slučaj jednakost (1) postaje

(3) $$x^m + a^m = (x+a)^2 P_{m-2}(x) + px + q.$$

Diferenciranjem leve i desne strane ove jednakosti dobijamo

(4) $$mx^{m-1} = 2\,(x+a)P_{m-2}(x) + (x+a)^2 P'_{m-2}(x) + p.$$

Zamenom $x = -a$ u (3) i (4) dolazimo do sistema

$$(-a)^m + a^m = -pa + q, \quad m\,(-a)^{m-1} = p.$$

Rešenje ovog sistema je

$$p = m\,(-1)^{m-1}a^{m-1}, \quad q = \big(1 + (-1)^{m-1}(m-1)\big)a^m.$$

U ovom slučaju je

$$x^m + a^m = (x+a)^2 P_{m-2}(x) + m\,(-1)^{m-1}a^{m-1}x + \big(1 + (-1)^{m-1}(m-1)\big)a^m.$$

Za $x = 12$ i $a = 1$ ova jednakost se svodi na

$$12^m + 1 = 169\,P_{m-2}(12) + 12m \cdot (-1)^{m-1} + 1 + (-1)^{m-1}(m-1),$$

tj. na

$$12^m + (-1)^m(13m-1) = 169\,P_{m-2}(12),$$

što znači da je leva strana jednakosti deljiva sa 169, što je trebalo dokazati.

NAPOMENA. Jednostavno se dokazuje da je $P_{m-2}(12)$ ceo broj.

200. Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma f. Tada je

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Pošto su nule $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivne, vodeći računa o uslovu $|f(0)| = f(1)$, u VIÈTE-ovom pravilu za proizvod nula, imamo

$$x_1 x_2 \cdots x_n = |f(0)| = f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_n).$$

Iz uslova da svi koreni pripadaju intervalu $(0,1)$ izlazi

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^2 = x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)\cdots x_n(1 - x_n).$$

Primetimo da je na desnoj strani ove jednakosti proizvod $2n$ činilaca čiji je zbir n. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\sqrt[2n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^2} \le \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

odakle je $x_1 x_2 \cdots x_n \le 1/2^n$.

201. Dokaz. Posmatrajmo polinom n-tog stepena:

(1) $$P(x) = (x + b_1)(x + b_2) \cdots (x + b_n) - \alpha.$$

S obzirom da je

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n) = \alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zaključujemo da su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nule polinoma $P(x)$, što znači se polinom $P(x)$ može napisati u obliku

(2) $$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

Prema tome, važi jednakost

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = (x + b_1)(x + b_2) \cdots (x + b_n) - \alpha.$$

Stavljajući u ovu jednakost $x = -b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ dobijamo

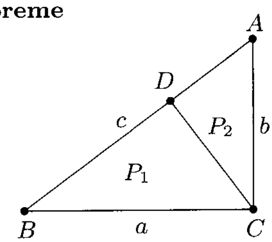
$$(-b_j - a_1)(-b_j - a_2) \cdots (-b_j - a_n) = -\alpha,$$

tj.

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots ((a_n + b_j) = (-1)^{n-1}\alpha = \beta,$$

što je trebalo dokazati.

Ajnštajnov dokaz Pitagorine teoreme



Više puta se čulo da je Albert Ajnštajn bio slab matematičar i da je čak imao i slabe ocene iz tog predmeta. To naročito vole da govore slabi đaci. Međutim, to je zabluda. Ajnštajn je pokazao talenat za matematiku još kao đak osnovne škole. Zapisano je kako je on kao jedanaestogodišnjak dokazao Pitagorinu teoremu. Evo tog dokaza:

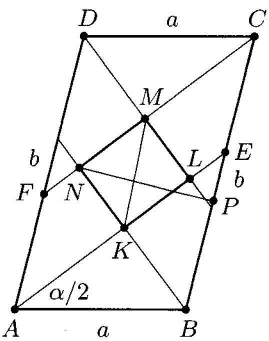
Posmatrajmo pravougli trougao ABC u kome je iz temena pravog ugla C povučena visina na hipotenuzu AB. Imamo tri slična pravougla trougla: ABC, CBD i ACD. Površine P, P_1 i P_2 sličnih trouglova odnose se kao kvadrati odgovarajućih stranica. Primetimo da su hipotenuze navedenih trouglova c, a i b. Prema tome, važi

$$\frac{P}{c^2} = \frac{P_1}{a^2} = \frac{P_2}{b^2} = m \Rightarrow P = mc^2,\ P_1 = ma^2,\ P_2 = mb^2,$$

gde je m konstanta proporcionalnosti. Ako dobijene površine zamenimo u jednakost $P_1 + P_2 = P$, posle skraćivanja sa m izlazi $a^2 + b^2 = c^2$.

NAPOMENA. Zbog poznatog izraza za energiju čestice u stanju mirovanja, mc^2, autori ove knjige sumnjaju da je mali Ajnštajn upotrebio baš slovo m za konstantu proporcionalnosti.

VI. GEOMETRIJA. ANALITIČKA GEOMETRIJA



202. Rešenje 1. 1° Ako konstruišemo simetrale unutrašnjih uglova paralelograma, dobijamo pravougaonik $KLMN$, prikazan na slici. Stranice ovog pravougaonika su

$$\begin{aligned} KL = AL - AK &= b\cos\frac{\alpha}{2} - a\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= (b-a)\cos\frac{\alpha}{2}, \\ KN = BN - BK &= b\sin\frac{\alpha}{2} - a\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= (b-a)\sin\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili uslov $a \le b$.

Odavde dobijamo dijagonalu

$$d = \sqrt{KL^2 + KN^2} = b - a.$$

2° Uslov da se pravougaonik nalazi u paralelogramu svodi se na to da tačke N i L ne mogu biti izvan paralelograma, tj. da visina NP trougla BCN ne bude veća od visine h paralelograma, koja je spuštena iz tačke B na stranicu AD.

Kako je $NP = NC \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, $NC = b\cos\frac{\alpha}{2}$, imamo $NP = b\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2}\sin\alpha$. S druge strane je $h = a\sin\alpha$, odakle se dobija traženi uslov

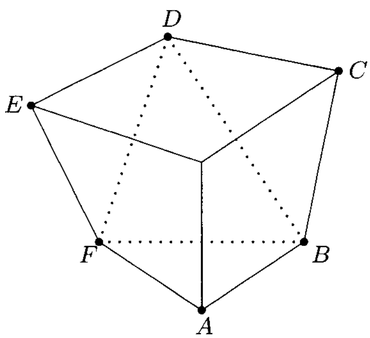
$$NP \le h \Rightarrow \frac{b}{2}\sin\alpha \le a\sin\alpha \Rightarrow b \le 2a.$$

Rešenje 2. Kako je $\sphericalangle EAB = \alpha/2$ i $\sphericalangle ABE = \pi - \alpha$, dobijamo

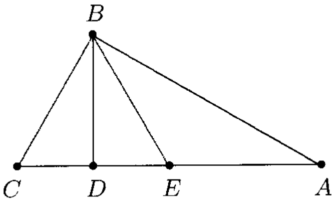
$$\sphericalangle BEA = \pi - (\sphericalangle EAB + \sphericalangle ABE) = \alpha/2.$$

Dakle, trougao ABE je jednakokrak, pri čemu je $BE = AB = a$. U ovom trouglu BK je visina, odakle sleduje $KE = KA = AE/2$. Trougao FCD je podudaran sa trouglom ABE, pri čemu je $FC \parallel AE$. Prema tome, $KE \parallel MC$ i $KE = MC$, što znači da je četvorougao $KECM$ paralelogram. Na osnovu toga imamo $KM = EC = BC - BE = b - a = d$.

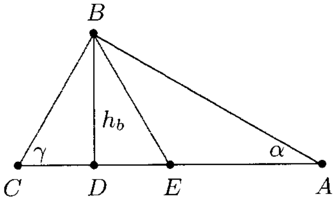
2° Uslov da je pravougaonik $KLMN$ u paralelogramu svodi se na $NL = d \le a$, tj. $b - a \le a$, odakle je $b \le 2a$. Ovde smo vodili računa da je $NL \parallel AB$.



203. Rešenje. Primetimo da su simetrale uglova $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle E$ simetrale stranica FB, BD i DF trougla BDF, pa se zbog toga sve tri simetrale uglova seku u jednoj tački.



204. Rešenje. Na prvoj slici je prikazan jednakostranični trougao CEB, kome je dodat trougao EAB, pri čemu je $EA = CE$. Zaista, BE je medijana trougla koja zaklapa sa stranicom AB ugao od 30° i visina BD polovi ugao EBC, tako da su uglovi DBC i EBD jednaki 30°. Uglovi trougla su $30^\circ, 90^\circ$ i 60°.



NAPOMENA. Postavimo pitanje da li je ovo jedino rešenje. Na drugoj slici je skiciran trougao ABC, kod koga je ugao β kod temena B visinom BD i medijanom BE podeljen na tri jednaka dela $\beta/3$. Kako je $CE = EA = b/2$, $CD = DE = b/4$, zatim

$$\alpha = 90^\circ - \frac{2\beta}{3}, \quad \sphericalangle DEB = 90^\circ - \frac{\beta}{3},$$

imamo

$$\frac{h_b}{DE} = \frac{4h_b}{b} = \operatorname{tg}\Big(90^\circ - \frac{\beta}{3}\Big), \quad \frac{h_b}{DA} = \frac{4h_b}{3b} = \operatorname{tg}\Big(90^\circ - \frac{2\beta}{3}\Big),$$

tj.

$$\frac{4h_b}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta/3)}, \quad \frac{4h_b}{3b} = \frac{1}{\operatorname{tg}(2\beta/3)}.$$

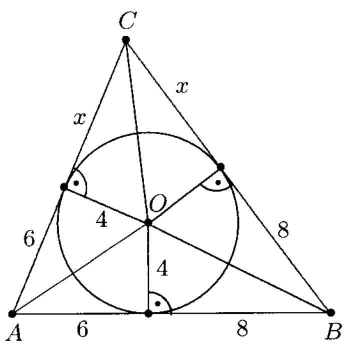
Deljenjem levih i desnih strana ovih jednakosti, dobijamo

$$\operatorname{tg}\frac{2\beta}{3} = 3\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}.$$

Ako uvedemo smenu $t = \operatorname{tg}(\beta/3)$, imamo

$$\frac{2t}{1-t^2} = 3t \Rightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\beta}{3} = 30^\circ.$$

Prema tome, $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, i to je jedinstveno rešenje.



205. Rešenje 1. Neka je dat trougao ABC čiji su uglovi $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ i $\sphericalangle C = \gamma$. Imamo

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{x}{4}.$$

Kako je $90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, važi jednakost

$$\operatorname{tg}\Big(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\Big) = \operatorname{tg}\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\Big),$$

odnosno

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Ako (1) zamenimo u (2), nalazimo

$$\frac{x}{4} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 7,$$

pa su stranice trougla 14, 15 i 13.

Rešenje 2. Poluprečnik upisanog kruga je

$$\text{(3)} \qquad r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

gde je

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(14+8+x+6+x) = 14+x,\\
s-a &= 14+x-(8+x) = 6,\\
s-b &= 14+x-(x+6) = 8,\\
s-c &= 14+x-14 = x.
\end{aligned}$$

Jednakost (3) postaje $4 = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 8 \cdot x}{14+x}} \Rightarrow x = 7$.

206. Rešenje 1 (trigonometrijsko). Neka je $AH = x$ i $BH = y$. Važe jednakosti

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ}, \quad y = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}, \quad x + y = 2h.$$

Zamenom x i y u treću jednačinu dobijamo

$$\text{(1)} \qquad \frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ} + \frac{h}{\operatorname{tg}\beta} = 2h \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} 75^\circ}{2\operatorname{tg} 75^\circ - 1}.$$

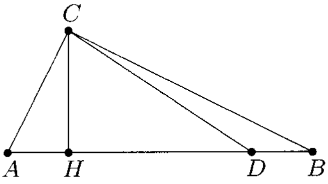
Kako je

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}},$$

zamenom u (1) dobijamo

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}{2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} - 1} = \frac{3+\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Prema tome, $\beta = 30^\circ$.

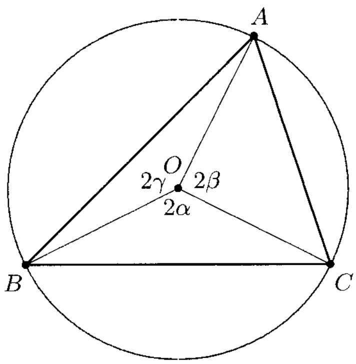


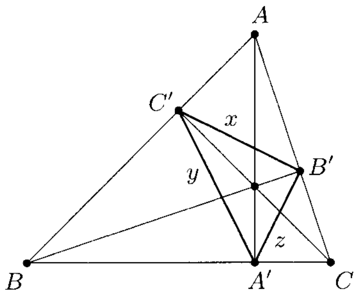
Rešenje 2 (geometrijsko). Neka je na stranici AB postavljena tačka D takva da je $\sphericalangle HDC = 60^\circ$. To znači da je trougao HDC polovina jednakostraničnog trougla, odakle zaključujemo da je

$$CD = 2 \cdot HC = AB. \tag{2}$$

S druge strane, pošto je $\sphericalangle HCA = 15^\circ$, izlazi $\sphericalangle DCA = 75^\circ$, što znači da je trougao ADC jednakokrak, pri čemu je $AD = CD$. S obzirom na (2), dobijamo $AD = AB$, tj. tačka D se poklapa sa B, odakle je $\sphericalangle B = 30^\circ$.

207. **Dokaz.** Na prvoj slici je prikazan oštrougli trougao ABC sa opisanim krugom poluprečnika R. Stranice trougla su $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Dužima OA, OB, OC trougao je podeljen na tri trougla, gde je O centar opisanog kruga.





Pošto je $\sphericalangle BOC = 2\alpha$, $\sphericalangle AOC = 2\beta$, $\sphericalangle AOB = 2\gamma$, površina trougla ABC jednaka je

$$P = P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OCA} + P_{\triangle OAB} = \frac{R^2}{2}\sin 2\alpha + \frac{R^2}{2}\sin 2\beta + \frac{R^2}{2}\sin 2\gamma,$$

tj.

$$P = \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma). \tag{1}$$

Na drugoj slici je dat isti trougao ABC sa povučenim visinama AA', BB' i CC'. Tačke A', B' i C' su ortogonalne projekcije ortocentra na stranice trougla. Neka su stranice trougla $A'B'C'$ jednake $x = B'C'$, $y = A'C'$, $z = A'B'$.

Iz pravouglih trouglova $BB'A$ i $AC'C$, čiji je zajednički ugao α (kod temena A), nalazimo

$$AB' = c\cos\alpha, \ AC' = b\cos\alpha.$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao $AC'B'$ imamo

$$\begin{aligned} x^2 &= AB'^2 + AC'^2 - 2\,AB' \cdot AC' \cdot \cos\alpha = c^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - 2\,bc\cos^3\alpha \\ &= (c^2 + b^2 - 2\,bc\cos\alpha)\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Kako je $c^2 + b^2 - 2\,bc\cos\alpha = a^2$, iz poslednje jednakosti dobijamo $x = a\cos\alpha$.

Slično je $y = b\cos\beta$, $z = c\cos\gamma$. Poluobim trougla $A'B'C'$ iznosi

$$s' = \frac{x+y+z}{2} = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{2}.$$

Na osnovu sinusne teoreme je $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, tj. $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, pa je

$$s' = \frac{R}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta + 2\sin\gamma\cos\gamma) = \frac{R}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Primenom ove jednakosti imamo $s'R = \dfrac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$, a to je površina trougla ABC, data jednakošću (1).

208. Rešenje. Neka su $b-d$, b, $b+d$ stranice trougla ABC. Poluobim trougla je $s = 3b/2$. Iz jednakosti $\rho = P/s$, gde je

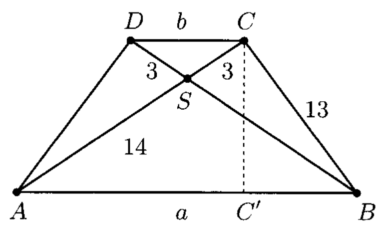
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \left(\frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}+d\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-d\right)\right)^{1/2},$$

dobijamo $\rho^2 = \dfrac{P^2}{s^2} = \dfrac{b^2-4d^2}{12}$.

Ako uvedemo $\rho = 4d$, iz poslednje jednakosti dobijamo $12\cdot 16d^2 = b^2 - 4d^2 \Rightarrow b = 14d$.

Prema tome, stranice trougla su $13\,d$, $14\,d$, $15\,d$ i važi proporcija $a : b : c = 13 : 14 : 15$.

209. Rešenje. Visina trapeza je $h = CC'$. Tačkom C', koja je projekcija tačke C na osnovicu, podeljena je osnovica $AB = a$ na odsečke



$$AC' = \frac{a+b}{2}, \qquad BC' = \frac{a-b}{2}.$$

Primenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove $AC'C$ i BCC' dobijamo

$$AC'^2 + C'C^2 = AC^2, \qquad BC'^2 + CC'^2 = BC^2,$$

tj.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = 17^2, \qquad \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = 13^2.$$

Oduzimanjem levih i desnih strana ovih jednakosti, dolazimo do jednačine $ab = 17^2 - 13^2 = 120$. Na osnovu sličnosti jednakokrakih trouglova ABS i CDS važi jednakost $a/14 = b/3$, tako da iz sistema

$$ab = 120, \qquad \frac{a}{14} = \frac{b}{3}$$

nalazimo $a = 4\sqrt{35}$ i $b = 6\sqrt{35}/7$ (u cm).

Ugao između dijagonala ($\sphericalangle CSB = \beta$) možemo odrediti primenom kosinusne teoreme na trougao BCS, tj.

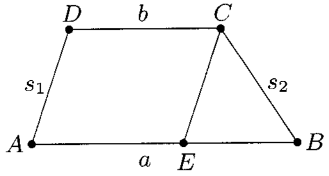
$$13^2 = 14^2 + 3^2 - 2\cdot 14\cdot 3\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{7}.$$

Odavde je $\beta = \arccos(3/7)$.

Ugao na osnovici ($\sphericalangle C'BC = \alpha$) nalazimo iz jednakosti

$$\cos\alpha = \frac{C'B}{BC} = \frac{\frac{a-b}{2}}{13} = \frac{\frac{11}{7}\sqrt{35}}{13} = \frac{11\sqrt{35}}{91} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{11\sqrt{35}}{91}.$$

210. Rešenje. Posmatrajmo trapez $ABCD$ čije su paralelne stranice a i b, a neparalelne stranice s_1 i s_2. Povucimo iz temena C duž CE paralelnu stranici DA. Trougao EBC ima stranice $a-b$, s_1 i s_2, tj. 4, 5 i 7. Poluobim tog trougla je $s = \dfrac{4+5+7}{2} = 8$, pa je primenom Heronovog obrasca njegova površina



$$P = \sqrt{8\cdot4\cdot3\cdot1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Kako je visina trougla EBC jednaka visini trapeza, imamo

$$P = \frac{(b-a)h}{2} \Rightarrow h = \frac{2P}{b-a} = \frac{2\cdot4\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6}.$$

NAPOMENA. Rešenje ovog zadatka pokazuje kako se jednostavno izvodi sledeća konstrukcija: Konstruisati trapez čije su stranice date.

211. Rešenje. Neka su P_1 i P_2 površine krugova čiji su poluprečnici redom 15 i 20 i neka je x površina njihove zajedničke oblasti (dva kružna odsečka). Imamo

$$(P_2 - x) - (P_1 - x) = P_2 - P_1 = \pi\,(20^2 - 15^2) = 175\pi.$$

Iz Adamardovog eseja[1]

Kada su Grci, otprilike četiri veka pre naše ere, proučavali elipsu i otkrili njene mnogobrojne i važne osobine, oni nisu mogli misliti ni na najmanju upotrebu navedenih otkrića. Međutim, bez ovih rezultata o elipsi dve hiljade godina kasnije Kepler (1571–1630) ne bi mogao otkriti zakone kretanja planeta, a Njutn (1642–1727) ne bi mogao otkriti opšti zakon privlačenja.

Ali treba dodati da je, obrnuto, primena korisna i važna za teoriju zato što ona teoriji postavlja nova pitanja. Može se reći da su primena i teorija kao list i stablo: Stablo nosi list, ali ovaj hrani stablo.

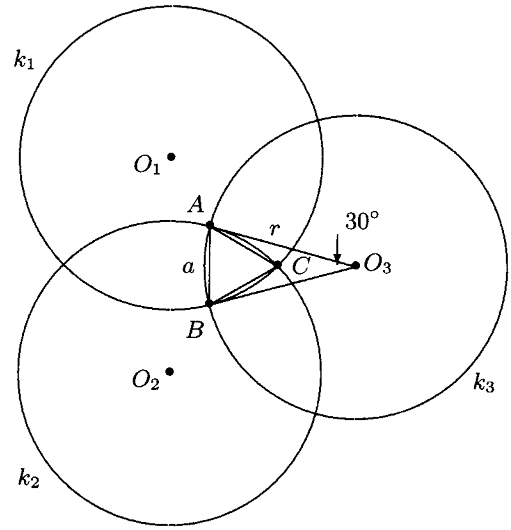
Od otkrića u teorijskim naukama do njegovih primena često prolazi dugi period vremena. Taj vremenski razmak u novije doba sve je manji.

Retki su slučajevi da su važna matematička istraživanja preduzimana direktno u cilju jedne unapred date primene. Ona su inspirisana po pravilu željom, koja je uostalom zajednički povod za svaki naučni rad, da se nešto sazna i shvati.

---

[1] J. Hadamard: *Essai sur la psycologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris 1959, pp. 115–116.

212. Rešenje. Na slici su prikazana tri kruga poluprečnika r koji se seku uzajamno pod pravim uglom. Centri O_1, O_2, O_3 krugova k_1, k_2, k_3 su temena jednakostraničnog trougla čija je stranica $r\sqrt{2}$. Centralni ugao kruga k_3 koji odgovara luku AB jednak je 30°. Do ovog rezultata dolazimo na sledeći način: Krivolinijski trougao ABC ima tri prava ugla u temenima A, B, C. To su uglovi koje zaklapaju tangente u presečnim tačkama. Ako na krivolinijski trougao postavimo tangentu i pomeramo je po celom trouglu, ona će se obrnuti za 360°. Na tri prava ugla otpada 270°, tako da lukovi AB, BC i CA imaju centralne uglove 30°.



Neka je a stranica jednakostraničnog trougla ABC i P_1 njegova površina, P_2 površina trougla ABO_3 i P_3 površina kružnog isečka ABO_3. Tada je tražena površina P jednaka

$$P = P_1 + 3\,(P_3 - P_2). \tag{1}$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao ABO_3 imamo

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 30^\circ = (2 - \sqrt{3}\,)r^2,$$

pa je

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2-\sqrt{3}\,)\sqrt{3}}{4}\,r^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}\,r^2.$$

Površina trougla ABO_3 jednaka je

$$P_2 = \frac{r \cdot r}{2}\,\sin 30^\circ = \frac{r^2}{4},$$

a površina isečka

$$P_3 = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\,r^2.$$

Prema tome, na osnovu (1) dobijamo

$$P = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}\,r^2 + 3\left(\frac{\pi}{12}\,r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{2\sqrt{3}+\pi-6}{4}\,r^2.$$

213. Dokaz. Unutrašnji ugao pravilnog petougla je

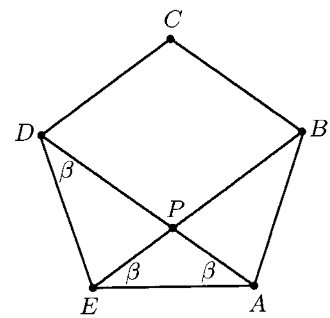
$$\alpha = \frac{(5-2)\,180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Za jednakokraki trougao ADE imamo

$$2\beta + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 36^\circ.$$

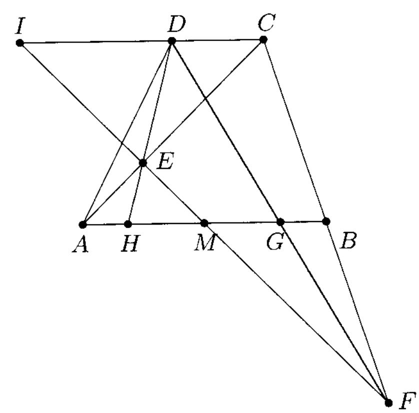
Dalje je

$$\sphericalangle DEP = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ,$$
$$\sphericalangle EPD = 2\beta = 72^\circ,$$



jer je $\sphericalangle EPD$ spoljašnji ugao trougla APE, koji je jednak zbiru nesusednih unutrašnjih uglova. Pošto je $\sphericalangle DEP = \sphericalangle EPD$, trougao DEP je jednakokrak, pa je $DP = DE$, što je trebalo dokazati.

214. Dokaz. Neka prava ME seče pravu na kojoj leži osnovica CD u tački I. Ako iskoristimo činjenicu da su prave na kojima leže osnovice AB i CD paralelne i sličnost trouglova ECI i AME, imamo sledeće proporcije:



$$(1)\ \frac{MG}{DI} = \frac{FM}{FI}, \qquad (2)\ \frac{MH}{DI} = \frac{ME}{IE},$$
$$(3)\ \frac{FM}{FI} = \frac{MB}{IC}, \qquad (4)\ \frac{ME}{IE} = \frac{MA}{IC}.$$

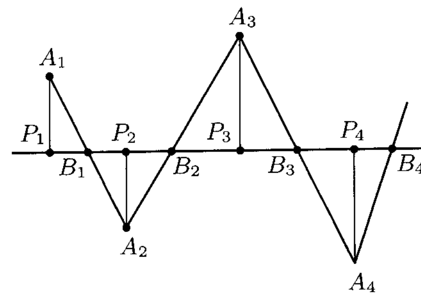
Vodeći računa da je $MA = MB$, iz (3) i (4) sleduje

$$(5) \qquad \frac{FM}{FI} = \frac{ME}{IE}.$$

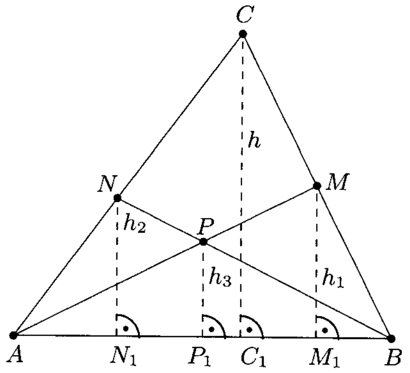
Sada iz jednakosti (1), (2) i (5) nalazimo $\dfrac{MG}{DI} = \dfrac{MH}{DI}$, tj. $MG = MH$.

Napomena. Primenom ove osobine trapeza možemo rešiti sledeći konstruktivni zadatak: Date su dve paralelne prave p i q i na pravoj p duž AB i tačka G. Ako je poznato da je tačka M sredina duži AB, koristeći se samo lenjirom, konstruisati tačku H simetričnu tački G u odnosu na tačku M.

215. Dokaz. Na slici je prikazan deo zatvorene izlomljene linije, presečen ravni Π. Neka su $P_1, P_2, \dots$ projekcije tačaka $A_1, A_2, \dots$ na ravan Π. Uvedimo oznake $A_1P_1 = h_1$, $A_2P_2 = h_2, \dots$ Iz sličnosti trouglova $A_1P_1B_1$ i $A_2P_2B_1$ izlazi $\dfrac{A_1B_1}{h_1} = \dfrac{B_1A_2}{h_2}$, iz sličnosti trouglova $A_2B_2P_2$ i $A_3B_2P_3$ imamo $\dfrac{A_2B_2}{h_2} = \dfrac{B_2A_3}{h_3}$, itd. i na kraju $\dfrac{A_nB_n}{h_n} = \dfrac{B_nA_1}{h_1}$.



Množenjem ovih jednakosti nalazimo $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdots A_nB_n = B_1A_2 \cdot B_2A_3 \cdots B_nA_1$, odakle je $\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}\,\dfrac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdots \dfrac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$



216. Dokaz. Neka je $AB = c$, $MM_1 = h_1$, $NN_1 = h_2$, $PP_1 = h_3$, $CC_1 = h$.

Primenom Talesove teoreme imamo

$$\frac{AN_1}{h_2} = \frac{AC_1}{h}, \quad \frac{BM_1}{h_1} = \frac{BC_1}{h}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$\frac{AN_1}{h_2} + \frac{BM_1}{h_1} = \frac{c}{h}, \tag{1}$$

gde smo koristili jednakost $AC_1 + BC_1 = c$.

Slično je $\dfrac{BN_1}{h_2} = \dfrac{BP_1}{h_3}$, $\dfrac{AM_1}{h_1} = \dfrac{AP_1}{h_3}$, odakle je

$$\frac{BN_1}{h_2} + \frac{AM_1}{h_1} = \frac{c}{h_3}, \tag{2}$$

jer je $AP_1 + BP_1 = c$.

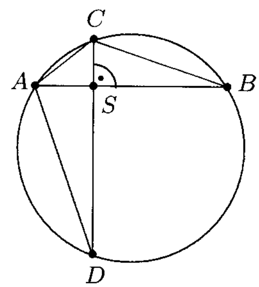
Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo

$$\left(\frac{AN_1}{h_2} + \frac{BN_1}{h_2}\right) + \left(\frac{BM_1}{h_1} + \frac{AM_1}{h_1}\right) = \frac{c}{h} + \frac{c}{h_3}.$$

Pošto je $AN_1 + BN_1 = c$ i $AM_1 + BM_1 = c$, sleduje

$$\frac{c}{h_1} + \frac{c}{h_2} = \frac{c}{h_3} + \frac{c}{h}, \text{ tj. } \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h},$$

što je trebalo dokazati.



217. Dokaz 1. Označimo sa $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $SD = d$ i neka je R poluprečnik kruga. Tada iz trougla ABC sleduje

$$R = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{4P_{\Delta ABC}} = \frac{\sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2} \cdot (a+b)}{4 \cdot \frac{1}{2}(a+b)\,c},$$

tj.

$$4R^2c^2 = (a^2+c^2)(b^2+c^2). \tag{1}$$

Isto tako iz trougla ACD sleduje

$$R = \frac{AC \cdot AD \cdot CD}{4P_{\Delta ACD}} = \frac{\sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{a^2+d^2} \cdot (c+d)}{4 \cdot \frac{1}{2}(c+d)\,a},$$

tj.

$$4R^2a^2 = (a^2+c^2)(a^2+d^2). \tag{2}$$

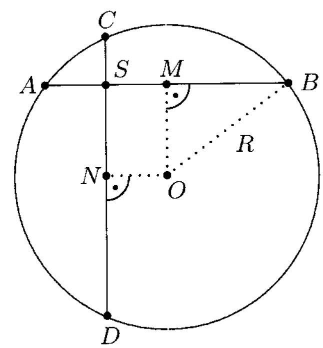
Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo

$$4R^2(a^2+c^2)=(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

odakle je $R^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$, pa je površina kruga jednaka

$$P=\pi R^2=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Dokaz 2. Neka je $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, $SD=d$. Tada je $MB=\frac{a+b}{2}$ i $OM=NS=NC-SC=\frac{c+d}{2}-c=\frac{d-c}{2}$.



Primenom Pitagorine teoreme na trougao OBM imamo

$$R^2=MB^2+OM^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

gde smo iskoristili da je $a\cdot b=c\cdot d$, pa je

$$P=\pi R^2=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

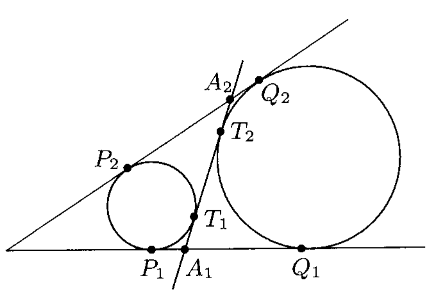
218. Dokaz. 1° Kako je $A_1Q_1=A_1T_1+T_1T_2$ i $A_1P_1=A_1T_1$ sleduje

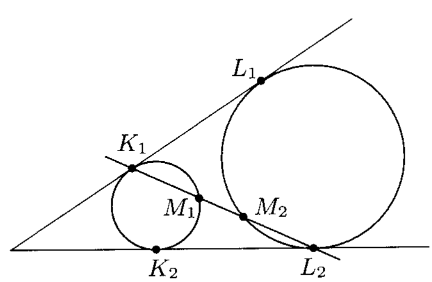
$$P_1Q_1=P_1A_1+A_1Q_1=A_1T_1+A_1T_1+T_1T_2=2A_1T_1+T_1T_2. \tag{1}$$

Isto tako imamo

$$P_2Q_2=2A_2T_2+T_1T_2. \tag{2}$$

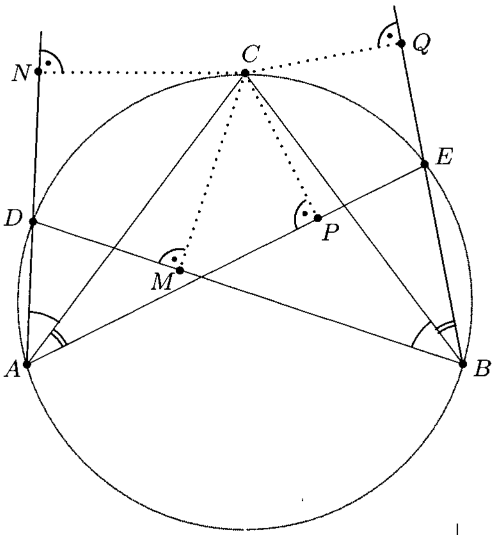
S obzirom da je $P_1Q_1=P_2Q_2$ iz (1) i (2) nalazimo da je $A_1T_1=A_2T_2$.





2° Kako je $(K_1L_1)^2=K_1M_2\cdot K_1L_2$, $(L_2K_2)^2=L_2M_1\cdot L_2K_1$ i $K_1L_1=K_2L_2$, imamo $K_1M_2\cdot K_1L_2=L_2M_1\cdot L_2K_1$, tj. $K_1M_2=L_2M_1$ ili $K_1M_1+M_1M_2=L_2M_2+M_1M_2$, a odatle je $K_1M_1=L_2M_2$.

219. Dokaz. Pošto je $AC=BC$, $\measuredangle NAC=\measuredangle MBC$ (jednakost uglova nad istim lukom CD) i $\measuredangle ANC=\measuredangle BMC=90°$, sleduje



(1) $\Delta ANC \cong \Delta BMC \Rightarrow AN = BM.$

Na sličan način dokazujemo

(2) $\Delta APC \cong \Delta BQC \Rightarrow AP = BQ.$

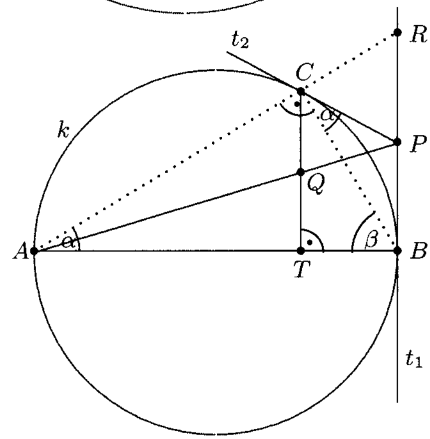
Iz jednakosti $\sphericalangle NAC = \sphericalangle MBC$ i $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBQ$ (jednakost uglova nad istim lukom CE) sleduje

(3) $\sphericalangle NAP = \sphericalangle MBQ.$

Iz (1), (2) i (3) nalazimo da je

$\Delta ANP \cong \Delta BMQ \Rightarrow NP = MQ,$

što je trebalo dokazati.



220. Dokaz. Označimo $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, preseke AP i CT sa Q, AC i t_1 sa R. Sada imamo $\alpha + \beta = 90°$, $\sphericalangle BCP = \alpha$, $\sphericalangle BCR = 90°$, pa je

(1) $\sphericalangle PCR = \beta.$

Kako je

(2) $\sphericalangle CRP = \sphericalangle CBA = \beta,$

jer su to uglovi sa normalnim kracima, iz (1) i (2) izlazi $\sphericalangle PCR = \sphericalangle CRP \Rightarrow PC = PR$. Kako je $PC = PB$, dobijamo

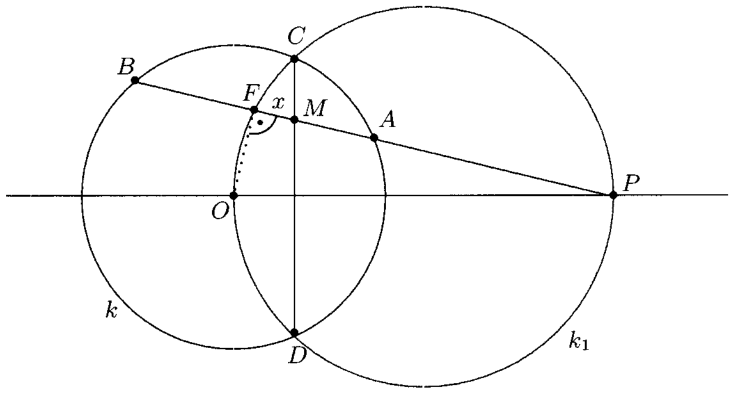
(3) $PB = PR.$

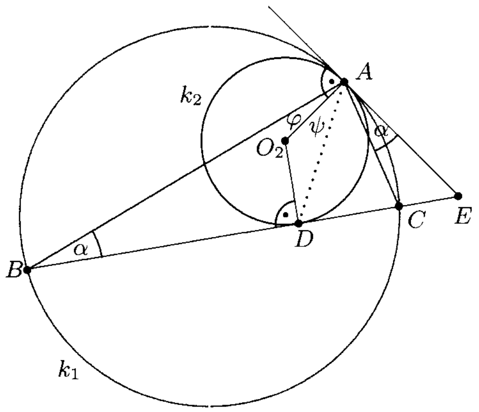
Sada primenom Talesove teoreme imamo $\dfrac{QT}{PB} = \dfrac{AQ}{AP}$, $\dfrac{QC}{PR} = \dfrac{AQ}{AP}$ i na osnovu (3) zaključujemo da je $QT = QC$.

221. Rešenje. Neka je tačka O centar datog kruga k. Označimo sa k_1 krug koji je određen sa OP kao svojim prečnikom. Tačka F je presek kruga k_1 i prave PB. Kako su CD i AB tetive kruga k, a CD i PF tetive kruga k_1, tada je $MC \cdot MD = MA \cdot MB$ i $MC \cdot MD = MF \cdot MP$, a odatle je

(1) $$MA \cdot MB = MF \cdot MP.$$

Ako stavimo $MF = x$, tada je $MA = AF - MF = \dfrac{1}{2} - x$, $MB = BF + FM = \dfrac{1}{2} + x$, $MP = AP + AF - FM = 1 + \dfrac{1}{2} - x = \dfrac{3}{2} - x$. Zamenom ovih jednakosti u (1) dobijamo $\left(\dfrac{1}{2} - x\right)\left(\dfrac{1}{2} + x\right) = x\left(\dfrac{3}{2} - x\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$, pa je $PM = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{3}$.





222. **Dokaz.** Neka je O_2 centar kruga k_2 i $\sphericalangle ABC = \alpha$, $\sphericalangle BAO_2 = \varphi$, $\sphericalangle O_2AD = \psi$. Tada je

(1) $\sphericalangle BAD = \varphi + \psi.$

Zajednička tangenta krugova k_1 i k_2 u tački A preseca pravu BC u tački E. Tada je $\sphericalangle CAE = \alpha$, pa je

(2) $\sphericalangle DAC = 90^\circ - (\alpha + \psi).$

Kako je $\sphericalangle ADC = \alpha + \varphi + \psi$ (kao spoljašnji ugao trougla BAD) i $\sphericalangle O_2AD = \psi$, imamo

$$180^\circ = \sphericalangle BDC = 90^\circ + \psi + (\alpha + \varphi + \psi)$$

pa sleduje

(3) $$90^\circ - (\alpha + \psi) = \varphi + \psi.$$

Iz jednakosti (1), (2) i (3) dobijamo $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$, što je trebalo dokazati.

223. **Dokaz.** Označimo sa O centar kruga. Tada je na osnovu uslova zadatka $FA = FC$ pa je

(1) $$\sphericalangle FAC = \sphericalangle FCA$$

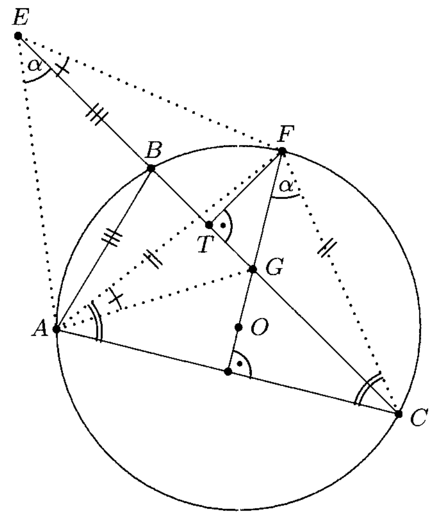
i $\sphericalangle AFO = \sphericalangle CFO = \alpha$. Ako sa G označimo presek pravih OF i BC, tada je

(2) $$\sphericalangle GAC = \sphericalangle GCA.$$

Iz (1) i (2) sleduje

(3) $$\sphericalangle FAG = \sphericalangle FCG.$$

Na produžetku duži BC izvan kruga odredimo tačku E tako da je $BE = BA$. Tada je $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle AEB$ (jer je $\sphericalangle ABC$ spoljašnji ugao trougla AEB). Međutim, kako je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AFC = 2\alpha$ (kao uglovi nad istom tetivom) izlazi da je $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFG = \alpha$. Stoga tačke A, E, F, G pripadaju jednom krugu, a odatle dolazimo do jednakosti



(4) $$\sphericalangle FAG = \sphericalangle FEG.$$

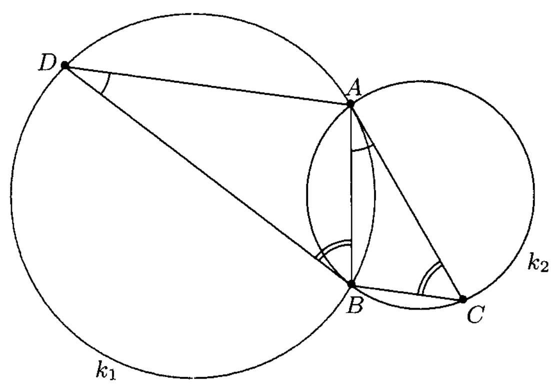
Iz jednakosti (3) i (4) imamo $\sphericalangle FEG = \sphericalangle FCG$, tj. trougao EFC je jednakokrak, pa je $ET = TC$. Kako je

$$ET = EB + BT = AB + BT,$$

dobijamo $AB + BT = TC$, što je trebalo dokazati.

224. Dokaz 1. Pošto je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAC$, izlazi $\Delta ABD \sim \Delta ACB$, pa je

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{BD}{AC} = \frac{AD}{AB}.$$



Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{AD}{BC},$$

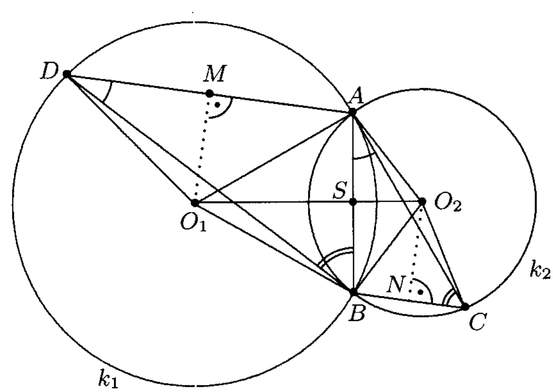
tj.

$$BD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot AD.$$

Dokaz 2. Centre i poluprečnike krugova k_1 i k_2 označimo redom sa O_1, O_2, r_1 i r_2. Pošto je $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BDA = \sphericalangle AO_1S$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle NO_2C \Rightarrow \sphericalangle AO_1S = \sphericalangle CO_2N \Rightarrow \Delta AO_1S \sim \Delta CO_2N \Rightarrow \frac{AS}{CN} = \frac{AO_1}{CO_2}$, tj.

(1) $$\frac{AB}{BC} = \frac{r_1}{r_2},$$

jer je $AB = 2 \cdot AS$ i $BC = 2 \cdot CN$.



Analogno se dokazuje da je

$$\Delta AO_2S \sim DO_1M \Rightarrow \frac{AS}{DM} = \frac{AO_2}{DO_1}, \text{ tj.}$$

(2) $$\frac{AB}{AD} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Iz (1) i (2) sledeje

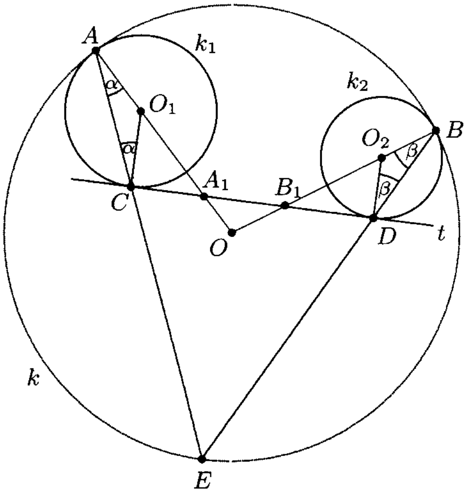
(3) $$\frac{AD}{BC} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Kako je $\Delta O_1AO_2 \cong \Delta O_1BO_2 \Rightarrow \sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_1BO_2$, a s obzirom da je $\sphericalangle O_1AC = \sphericalangle O_2BD = 90^\circ$, sleduje da je $\sphericalangle O_2AC = \sphericalangle O_1BD$, a odatle je $\Delta AO_2C \sim \Delta BO_1D \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AO_2}{BO_1}$, tj.

(4) $$\frac{AC}{BD} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Iz (3) i (4) nalazimo $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{AD}{BC}$, tj. $BD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot AD$.

225. Dokaz. Označimo sa O_1 i O_2 centre krugova k_1 i k_2, $\sphericalangle CAO_1 = \sphericalangle ACO_1 = \alpha$, $\sphericalangle DBO_2 = \sphericalangle BDO_2 = \beta$. Tada je



$$\begin{aligned} \sphericalangle O_1CA_1 &= \sphericalangle O_2DB_1 = 90^\circ, \\ \sphericalangle ECD &= 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle EDC &= 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta, \end{aligned}$$

pa je

(1) $\sphericalangle AEB = 180^\circ - (\sphericalangle ECD + \sphericalangle EDC) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta) = \alpha + \beta.$

Takođe je

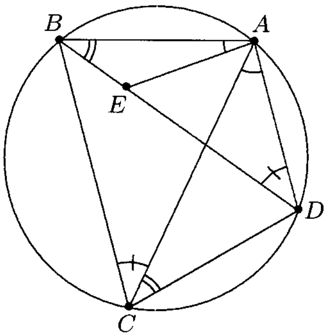
$$\begin{aligned}\sphericalangle OA_1B_1 &= \sphericalangle CA_1A = 180^\circ - (\alpha + \alpha + 90^\circ) = 90^\circ - 2\alpha,\\ \sphericalangle OB_1A_1 &= \sphericalangle DB_1B = 180^\circ - (\beta + \beta + 90^\circ) = 90^\circ - 2\beta,\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}(2)\qquad \sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1 &= 180^\circ - (\sphericalangle OA_1B_1 + \sphericalangle OB_1A_1)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha + 90^\circ - 2\beta) = 2(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Iz (1) i (2) sleduje $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle AEB$ a odatle $E \in k$.

226. Dokaz 1. Na slici je prikazan tetivni četvorougao $ABCD$ sa dijagonalama AC i BD. Iz temena A povučena je duž AE, gde tačka E pripada dijagonali BD, takva da je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$. Kako je $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ACD$ (periferijski uglovi nad lukom AD), zaključujemo da su trouglovi ABE i ACD slični. Jednostavno se dokazuje da su trouglovi AED i ABC slični, jer je $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle EAC + \sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB$ (periferijski uglovi nad lukom AB). Iz navedenih sličnosti izlazi



$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE}, \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED},$$

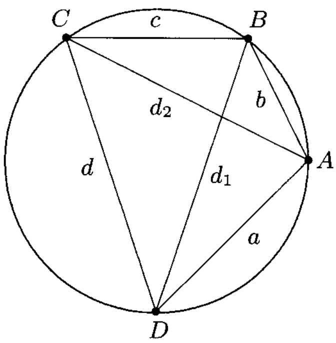
tj. $AC \cdot BE = AB \cdot CD$, $AC \cdot ED = AD \cdot BC$.

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$AC\,(BE + ED) = AB \cdot CD + AD \cdot BC \Rightarrow AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz 2. U tetivnom četvorouglu su naspramni uglovi suplementni, tj.



$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ.$$

Neka je $\sphericalangle A = \alpha$ i $\sphericalangle B = \beta$. Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABD i BCD, imamo

$$\begin{aligned}d_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,\\ d_1^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \alpha).\end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa cd i druge sa ab i sabiranjem tako dobijenih jednačina nalazimo

$$(1)\qquad (cd + ab)\,d_1^2 = cd\,(a^2 + b^2) + ab\,(c^2 + d^2) = (ac + bd)(ad + bc).$$

S druge strane, primenom kosinusne teoreme na trouglove ABC i ACD dolazimo do jednakosti

$$d_2^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta, \qquad d_2^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\pi - \beta).$$

Eliminacijom $\cos\beta$ nalazimo

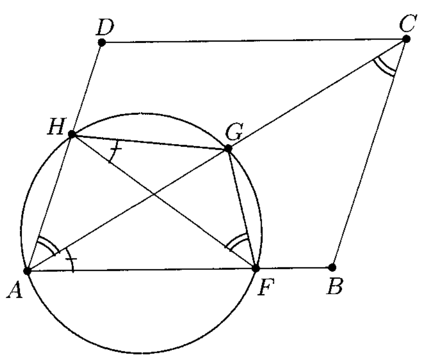
$$(2) \qquad (ad + bc)\,d_2^2 = ad\,(b^2 + c^2) + bc\,(a^2 + d^2) = (ac + bd)(ab + cd).$$

Množenjem levih i desnih strana jednakosti (1) i (2) dobijamo

$$d_1^2 d_2^2 = (ac + bd)^2 \Rightarrow d_1 d_2 = ac + bd,$$

čime je dokaz završen.

227. Dokaz. Imamo $\sphericalangle GFH = \sphericalangle HAG$ (periferijski uglovi nad lukom GH), $\sphericalangle HAG = \sphericalangle ACB$ (kao naizmenični), pa je



$$(1) \qquad \sphericalangle GFH = \sphericalangle ACB;$$

$$\sphericalangle GHF = \sphericalangle GAF$$

(periferijski uglovi nad lukom GF), odnosno

$$(2) \qquad \sphericalangle GHF = \sphericalangle CAB.$$

Iz (1) i (2) sleduje

$$\Delta FGH \sim \Delta CAB \Rightarrow (3) \quad \frac{HG}{HF} = \frac{AB}{AC}, \quad (4) \quad \frac{FG}{FH} = \frac{CB}{CA}.$$

Primenom Ptolomejeve teoreme na tetivni četvorougao $AFGH$ imamo

$$AG \cdot HF = AF \cdot HG + FG \cdot AH,$$

tj.

$$(5) \qquad AG = AF \cdot \frac{HG}{HF} + AH \cdot \frac{FG}{FH}.$$

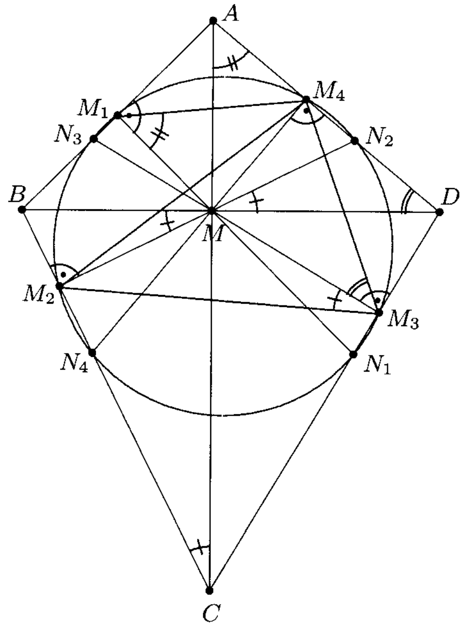
Ako (3) i (4) zamenimo u (5), dobijamo

$$AG = AF \cdot \frac{AB}{CA} + AH \cdot \frac{CB}{CA} \Rightarrow AG \cdot AC = AF \cdot AB + AH \cdot AD,$$

gde smo iskoristili da je $CB = AD$.

228. Dokaz. Ortogonalne projekcije tačke M na stranice AB, BC, CD, DA označimo redom sa M_1, M_2, M_3, M_4. Prave MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 seku stranice CD, DA, AB, BC redom u tačkama N_1, N_2, N_3, N_4.

Četvorougao MM_1AM_4 je tetivan ($\sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_4 = 90^\circ$) pa je $\sphericalangle MM_1M_4 = \sphericalangle MAD$. Četvorougao MM_3DM_4 je tetivan pa je $\sphericalangle MM_3M_4 = \sphericalangle MDA$. Stoga je $\sphericalangle MM_1M_4 + \sphericalangle MM_3M_4 = \sphericalangle MAD + \sphericalangle MDA$, a pošto je trougao AMD pravougli, tj. $\sphericalangle MAD + \sphericalangle MDA = 90^\circ$, sleduje $\sphericalangle MM_1M_4 + \sphericalangle MM_3M_4 = 90^\circ$. Slično, posmatranjem tetivnih četvorouglova MM_1BM_2 i MM_2CM_3, dobijamo $\sphericalangle MM_1M_2 + \sphericalangle MM_3M_2 = 90^\circ$.



Sada je

$$\begin{aligned}\sphericalangle M_2M_1M_4 + \sphericalangle M_2M_3M_4 &= \sphericalangle MM_1M_2 + \sphericalangle MM_1M_4 \\ &\quad + \sphericalangle MM_3M_2 + \sphericalangle MM_3M_4 \\ &= \underbrace{\sphericalangle MM_1M_2 + \sphericalangle MM_3M_2}_{90^\circ} \\ &\quad + \underbrace{\sphericalangle MM_1M_4 + \sphericalangle MM_3M_4}_{90^\circ} \\ &= 180^\circ,\end{aligned}$$

pa sleduje da je četvorougao $M_1M_2M_3M_4$ tetivan. Ako sa k označimo krug opisan oko trougla $M_2M_3M_4$, time smo dokazali da $M_1 \in k$.

Imamo $\sphericalangle MM_3M_2 = \sphericalangle MCM_2$ (jer je četvorougao MM_2CM_3 tetivan), $\sphericalangle MCM_2 = \sphericalangle M_2MB$ (kao uglovi sa normalnim kracima), $\sphericalangle M_2MB = \sphericalangle N_2MD$ (kao unakrsni) pa je

$$\sphericalangle MM_3M_2 = \sphericalangle N_2MD. \tag{1}$$

Kako je četvorougao MM_3DM_4 tetivan, nalazimo

$$\sphericalangle MM_3M_4 = \sphericalangle MDM_4. \tag{2}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\sphericalangle M_2N_2M_4 &= \sphericalangle N_2MD + \sphericalangle MDM_4 \\ &= \sphericalangle MM_3M_2 + \sphericalangle MM_3M_4 \quad \text{(na osnovu (1) i (2))} \\ &= \sphericalangle M_2M_3M_4,\end{aligned}$$

odakle sleduje da tačka N_2 pripada krugu k. Analogno dokazujemo da tačke N_1, N_3, N_4 pripadaju krugu k. Time je dokaz završen.

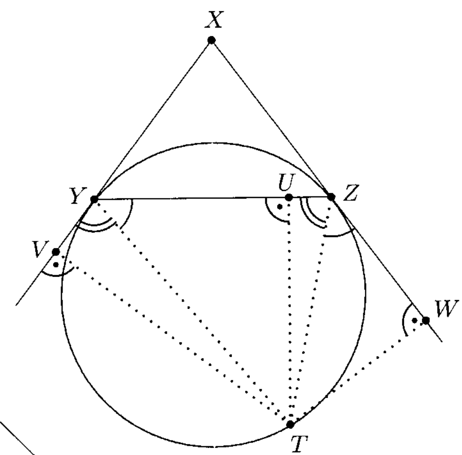
229. Dokaz. Dokažimo najpre sledeću lemu: *Neka su iz tačke X povučene na krug tangente XY i XZ. Iz proizvoljne tačke T na krugu povučene su redom normale TU, TV, TW na prave YZ, XY i XZ. Tada je $TU^2 = TV \cdot TW$.*

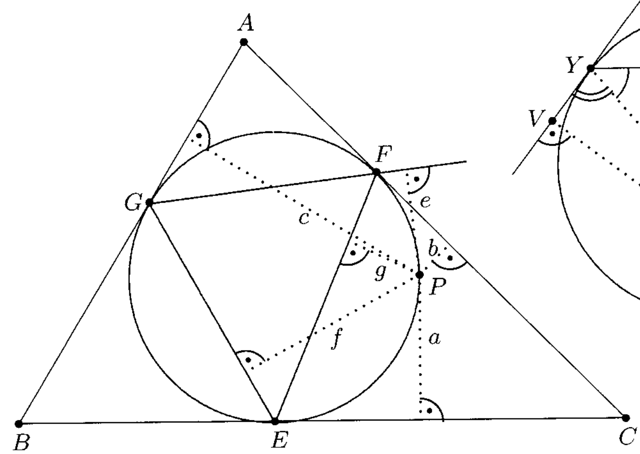
Trouglovi TYV i TZU su pravougli ($\sphericalangle U = \sphericalangle V = 90^\circ$) i kako je $\sphericalangle TYV = \sphericalangle TZU$ sleduje da je $\Delta TYV \sim \Delta TZU$, odakle je

(1) $$\frac{TV}{TU} = \frac{TY}{TZ}.$$

Slično $\Delta TYU \sim \Delta TZW$ povlači

(2) $$\frac{TU}{TW} = \frac{TY}{TZ}.$$

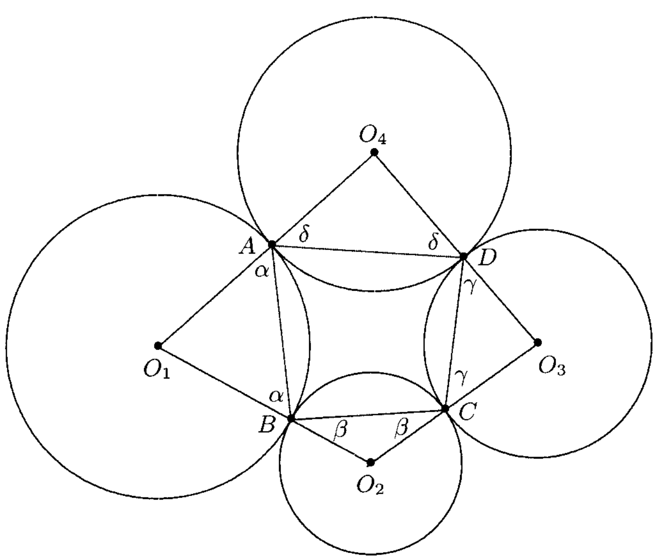




Iz (1) i (2) nalazimo $\frac{TV}{TU} = \frac{TU}{TW} \Rightarrow TU^2 = TV \cdot TW$.

Sada dokazujemo traženo tvrđenje. Rastojanja tačke P od stranica BC, CA i AB redom su a, b i c. Na osnovu dokazane leme imamo $e^2 = bc$, $f^2 = ca$, $g^2 = ab \Rightarrow e^2f^2g^2 = bc \cdot ca \cdot ab$, tj. $abc = efg$, što je trebalo dokazati.

230. Dokaz. Na slici su prikazana četiri kruga od kojih se svaki dodiruje spolja sa dva kruga.



Posmatrajmo četvorougao $ABCD$ čija su temena dodirne tačke krugova. Unutrašnji uglovi tog četvorougla su $180^\circ - (\alpha+\delta)$, $180^\circ - (\alpha+\beta)$, $180^\circ - (\beta+\gamma)$, $180^\circ - (\gamma+\delta)$. Zbirovi suprotnih uglova su međusobno jednaki $\big(360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\big) = 180^\circ$. To znači da je četvorougao $ABCD$ tetivan, pa se oko njega može opisati krug, što je trebalo dokazati.

231. Rešenje. Neka je pravougaonik $ABCD$ postavljen u Dekartov pravougli koordinatni sistem, tako da se stranica AB poklapa sa x-osom, a AD sa y-osom. Ako su x i y koordinate tačke G, površina pravougaonika $GJCH$ je

$$P = (a-x)(b-y). \tag{1}$$

Koordinate x i y zadovoljavaju jednačinu prave

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \tag{2}$$

pri čemu je $0 \le x \le p \le a$, $0 \le y \le q \le b$.

Ako jednačinu (2) rešimo po y i rešeno y zamenimo u (1), dobijamo

$$P = (a-x)\Big(b - q\Big(1 - \frac{x}{p}\Big)\Big) = -\frac{q}{p}\,x^2 + \Big(a\,\frac{q}{p} - b + q\Big)x + a(b-q).$$

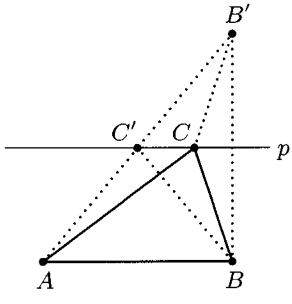
Iz uslova $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -2\,\dfrac{q}{p}\,x + a\,\dfrac{q}{p} - b + q = 0$ dobijamo

$$x = \frac{1}{2q}\,(aq - bp + qp), \tag{3}$$

i to je apscisa tačke G za koju je površina pravougaonika $GJCH$ maksimalna.

Ovaj rezultat ima smisla ako x, dato jednakošću (3), ispunjava uslov $0 < x \le p$. Ako x ne ispunjava taj uslov, tada se maksimalna vrednost P dobija ako se tačka poklapa sa F ili sa E.

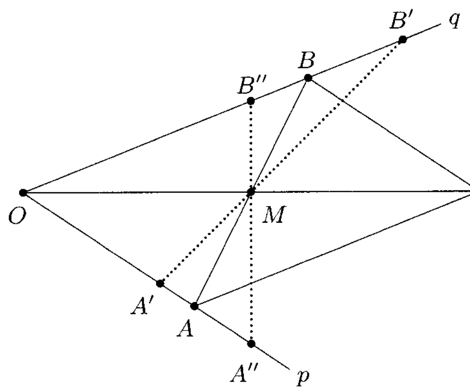
232. Dokaz. Pošto je pored osnovice trougla data i njegova površina, to znači da je data visina koja odgovara osnovici AB.



Treće teme C trougla pripada pravoj p koja je paralelna osnovici. Postavlja se pitanje kako treba izabrati teme C da zbir $AC + BC$ bude minimalan (AB je fiksno). Konstrukcija optimalne tačke C' prikazana je na slici tačkastom linijom. Tačka B' je simetrična tački B u odnosu na pravu p, tako da je $BC = B'C$.

Kako je $AC + BC = AC + B'C$, najmanji zbir se postiže ako C pripada pravoj koja spaja tačke A i B'. Tada je $BC' = AC'$, što znači da je trougao ABC' jednakokrak.

233. Rešenje. Neka je tačka M presek dijagonala paralelograma $OACB$ čije stranice OA i OB pripadaju kracima p i q.



Dokažimo da je prava koja prolazi kroz tačke A i B tražena prava koja od ugla pOq odseca trougao najmanje površine. Ako ta prava rotira oko tačke M tako da prođe kroz tačke A' i B', površina trougla OAB se povećava za razliku površina trouglova $MB'B$ i $MA'A$.

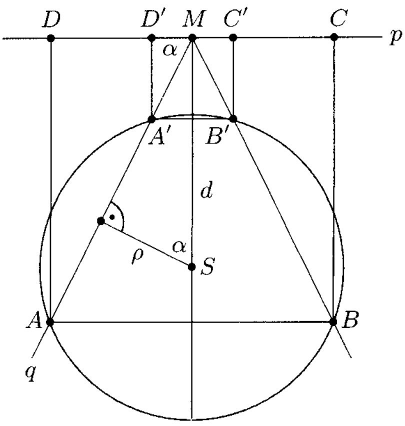
Kako je

$$P_{MB'B} = \frac{1}{2} MB \cdot MB' \cdot \sin(\sphericalangle BMB'), \quad P_{MA'A} = \frac{1}{2} MA \cdot MA' \cdot \sin(\sphericalangle AMA'),$$

a pošto važe relacije $\sphericalangle BMB' = \sphericalangle AMA'$, $MA = MB$, $MB' > MA'$, zaključujemo da je površina trougla $OA'B'$ veća od površine trougla OAB. Na potpuno isti način dokazujemo da je površina trougla $OA''B''$ veća od površine trougla OAB. Prema tome, trougao OAB ima najmanju površinu.

234. Rešenje. Svaka prava koja prolazi kroz presek dijagonala pravougaonika deli pravougaonik na dva dela jednakih površina. Svaka prava koja prolazi kroz centar kruga polovi površinu kruga. Prema tome, prava koja prolazi kroz centar pravougaonika i centar kruga deli prikazani komad papira na dva dela jednakih površina.

235. Rešenje. Sredina M stranice kvadrata koja leži na pravoj p, pripada normali povučenoj iz centra kruga S na pravu p. Pošto je



$$A'D' : MD' = AD : MD = 2 : 1,$$

temena A' i A, tj. B' i B pripadaju pravama koje sa p zaklapaju ugao α čiji je tangens jednak 2. Na taj način dobijamo dva kvadrata, $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

Za rastojanje ρ tačke S od prave q važi jednakost

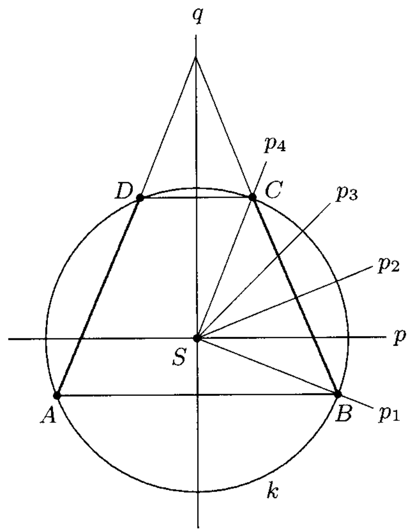
$$\rho = d \cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{d}{\sqrt{5}}.$$

Ako je $\rho > r$, tj. $d > r\sqrt{5}$, prava q ne seče krug, pa zadatak nema rešenja. Ako prava p dodiruje krug, tj. kada je $d = r$, ili kada prava q dodiruje krug, tj. $d = r\sqrt{5}$, zadatak ima jedno rešenje. Ako je $\rho < r$, tj. $d < r\sqrt{5}$ $(d \neq r)$, zadatak ima dva rešenja.

236. Rešenje. Na slici je prikazana konstrukcija traženog trapeza. Najpre kroz centar S kruga k povučemo dve ortogonalne prave p i q. Zatim ugao pSq podelimo na četiri jednaka ugla, tako je ugao između susednih pravih 22.5°. Konstruišimo pravu p_1 koja sa p zaklapa ugao ud 22.5°.

Prave p_1 i p_4 seku krug k u tačkama B i C. Ove tačke su temena trapeza, tj. pripadaju kraku trapeza. Ovaj krak se vidi iz S pod uglom od 90° $(= 4 \cdot 22.5^\circ)$. S druge strane, kako je $BC \perp p_2$, ugao koji zaklapa produženi krak sa pravom q jednak je 22.5°, pa produženi kraci zaklapaju ugao od 45°.

Tačke C i D su simetrične tačkama B i C u odnosu na pravu q.

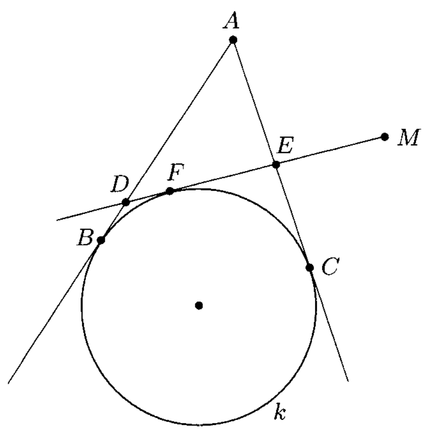


237. Rešenje. Na slici je prikazana konstrukcija tražene prave. Na kracima ugla se fiksiraju tačke B i C, takve da je $AB = AC = s$. Zatim se konstruiše kružnica k koja dodiruje krake u tačkama B i C. Tražena prava je tangenta kružnice, tj. luka BFC, koja prolazi kroz tačku M.

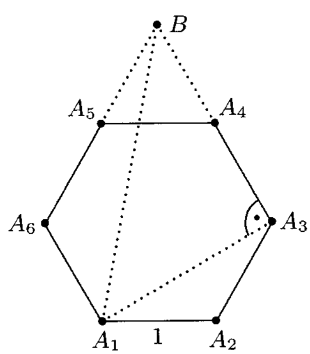
Zaista, vodeći računa da je $DF = DB$ i $EF = EC$, obim trougla ADE jednak je

$$\begin{aligned} O &= AD + DE + EA \\ &= AD + DF + FE + AE \\ &= AD + BD + EC + AE \\ &= s + s = 2s. \end{aligned}$$

Dakle, svaka tangenta luka BFC odseca od ugla trougao čiji je obim konstantan i jednak $2s$.



238. Rešenje. Konstrukcija je prikazana na slici. Produžeci stranica A_3A_4 i A_6A_5 seku se u tački B. Jednostavno se dokazuje da je trougao A_1A_3B pravougli. Njegove katete su $A_1A_3 = \sqrt{3}$ i $A_3B = 2$, tako da je hipotenuza $A_1B = \sqrt{7}$.



239. Rešenje. Neka je $PQ \parallel m$. Primenimo Talesovu teoremu i sličnost trouglova. Imamo

$$(1)\quad \frac{OP}{MN}=\frac{BO}{BN},\qquad (2)\quad \frac{OQ}{MN}=\frac{AO}{AM}.$$

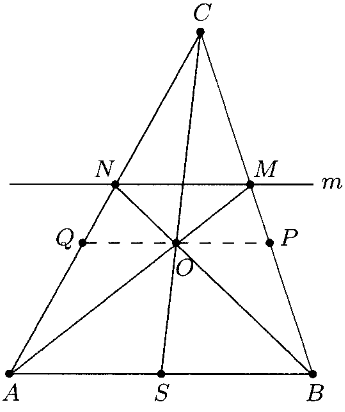
Kako je

$$\frac{NO}{BO}=\frac{MO}{AO}\Rightarrow \frac{NO+BO}{BO}=\frac{MO+AO}{BO},$$

dobijamo

$$(3)\qquad \frac{BN}{OB}=\frac{AM}{AO}.$$

Na osnovu (1), (2) i (3) sleduje $OP=OQ$.

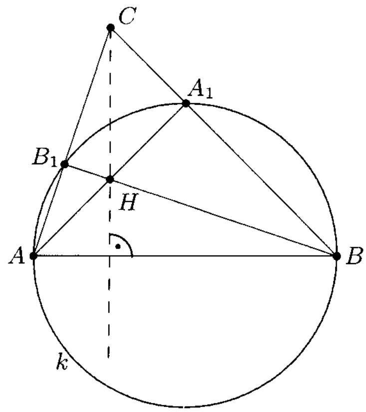


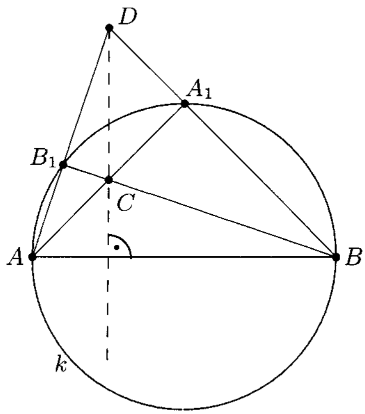
Pošto je $\dfrac{AS}{OQ}=\dfrac{CS}{CO}$, $\dfrac{BS}{OP}=\dfrac{CS}{CO}$ i $OP=OQ$, dobijamo $AS=BS$.

Sada možemo izvesti konstrukciju. Neka je tačka C u ravni određenoj pravom m i duži AB i ne pripada duži AB ni pravoj m, tako da je prava m između duži AB i tačke C. Prave CA i CB seku pravu m u tačkama N i M. Duži AM i BN seku se u tački O. Prava CO seče duž AB u tački S i to je sredina duži AB.

240. Rešenje. U konstrukciji i dokazu primenjujemo osobine da se visine trougla seku u jednoj tački i da je periferijski ugao iznad prečnika prav.

1° Prave određene tačkama CA i CB seku krug k redom u tačkama B_1 i A_1. Duži AA_1 i BB_1 seku se u tački H koja je ortocentar trougla ABC. Prava CH je tražena normala na prečnik AB.

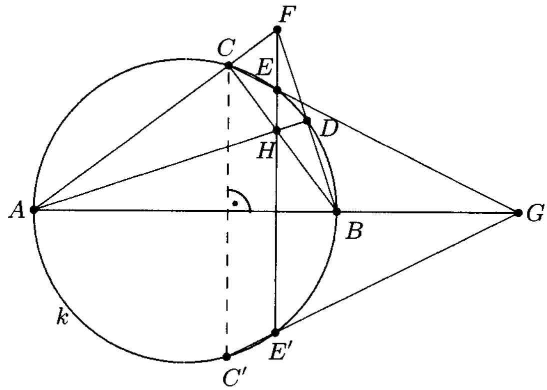




2° Prave CA i CB seku krug k redom u tačkama A_1 i B_1. Prave AB_1 i BA_1 seku se u tački D. Tada je C ortocentar trougla ABD. Prava DC je tražena normala na prečnik AB.

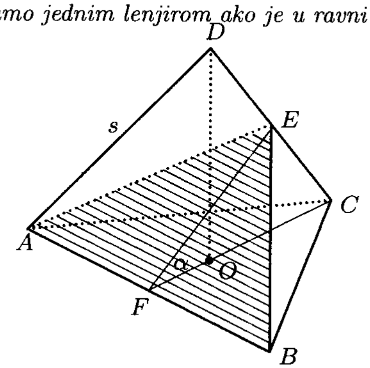
3° Konstruisaćemo normalu iz tačke C na prečnik AB ako na krugu k odredimo tačku C' simetričnu tački C u odnosu na prečnik AB.

Neka je D proizvoljna tačka na manjem luku BC polukruga ACB. Prave AC i BD seku se u tčki F, a prave AD i BC u tački H. Tačka H je ortocentar trougla ABF. Prava FH je normalna na prečnik AB i seče krug k u tačkama E i E' koje su simetrične u odnosu na prečnik AB. Prava CE seče pravu AB u tački G. Prava GE' seče krug k u tački C'. Tražena normala je prava CC'.



NAPOMENA. Postoji teorema Jakoba Štajnera[3]: *Svaka geometrijska konstrukcija koja može da se reši šestarom i lenjirom može biti rešena samo jednim lenjirom ako je u ravni crteža konstruisan krug i njegov centar.*

241. Rešenje. 1° Na slici je prikazana pravilna trostrana piramida. Osnova piramide je jednakostranični trougao ABC, vrh piramide je tačka D, a visina $H = \overline{OD}$. Tačka E je presek ravni Π sa bočnom ivicom CD. Kako je $DC \perp \Pi$, zaključujemo da je piramida $ABCD$ podeljena sa ravni Π na dve piramide $ABEC$ i $ABED$, koje imaju zajedničku osnovu ABE. Visine ovih piramida su redom $\overline{EC}$ i $\overline{ED}$. Na osnovu toga dobijamo zapreminu piramide



(1) $$V = \frac{1}{3}\,S\cdot\overline{EC} + \frac{1}{3}\,S\cdot\overline{ED} = \frac{1}{3}\,Ss.$$

2° Za $a = s\sqrt{3}/3$, primenom Pitagorine teoreme na trougao AOD, nalazimo

$$\frac{a^2}{3} + H^2 = s^2 \Rightarrow H = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,s.$$

Pomoću a i H možemo odrediti zapreminu V, tj.

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{s^2}{3}\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\,s = \frac{\sqrt{6}}{54}\,s^3.$$

Neka je $h = \overline{FE}$ visina trougla ABE. Kako je na osnovu (1) $V = Ss/3$, dobijamo $S = \dfrac{\sqrt{6}}{18}\,s^2$.

Na kraju, iz jednakosti $\dfrac{ah}{2} = S$ nalazimo $h = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{s\sqrt{2}}{3}$, pa je iz trougla EFC :

[3] Jakob Štajner (Jacob Steiner (1796–1863)) švajcarski matematičar, publikovao je navedenu teoremu 1833. godine.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = \frac{\frac{s\sqrt{2}}{3}}{\frac{s\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Napomena. Izračunavanje $\cos\alpha$ može se izvesti direktno. S obzirom da je trougao ABE projekcija trougla ABC na ravan Π, imamo

$$\cos\alpha = \frac{\text{površina trougla } ABE}{\text{površina trougla } ABC} = \left(\frac{\sqrt{6}}{18}s^2\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{12}s^2\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

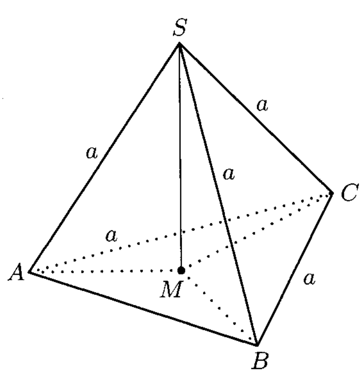
Primetimo da se $\sin\alpha$ može jednostavno izračunati na sledeći način: Ugao između dve ravni jednak je uglu koga zaklapaju njihove normale. Kako je visina OD normalna na osnovu piramide i $CD \perp \Pi$, zaključujemo da je $\sphericalangle ODC = \alpha$. Prema tome,

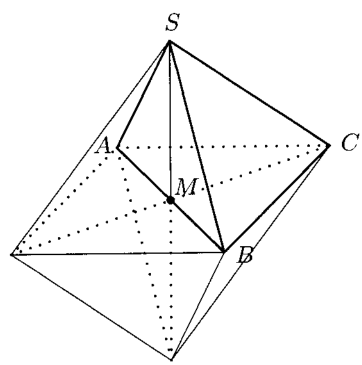
$$\sin\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{s} = \frac{\frac{s\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{s} = \frac{1}{3}.$$

242. Rešenje. Na slici je prikazana skica tetraedra $SABC$. S obzirom da su CSA i BSC jednakostranični trouglovi, imamo

$$AS = BS = CS = AC = a.$$

S druge strane, pošto su ABS i ABC jednakokraki pravougli trouglovi, čiji su kraci (katete) a, zaključujemo da je $AB = a\sqrt{2}$.





Neka je M podnožje visine tetraedra, spuštene iz S. Primetimo da su trouglovi AMS, BMS i CMS podudarni, jer su pravougli sa hipotenuzom a i katetom $H = SM$. Na osnovu toga izlazi jednakost drugih kateta, tj. $AM = BM = CM$.

To znači da je tačka M centar opisanog kruga oko trougla, i kako je ABC pravougli trougao sa hipotenuzom AB, tačka M se nalazi na sredini duži AB. Prema tome,

$$SM = H = a\sqrt{2}/2.$$

1° Pošto je površina osnove ABC jednaka $a^2/2$, imamo

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

2° Površina tetraedra je

$$P = 2\cdot\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}(2+\sqrt{3}).$$

Ako centar upisane sfere spojimo sa temenima A, B, C i S, dobijamo četiri tetraedra, čije su visine, spuštene iz tog centra, jednake poluprečniku sfere r. Na osnovu toga imamo

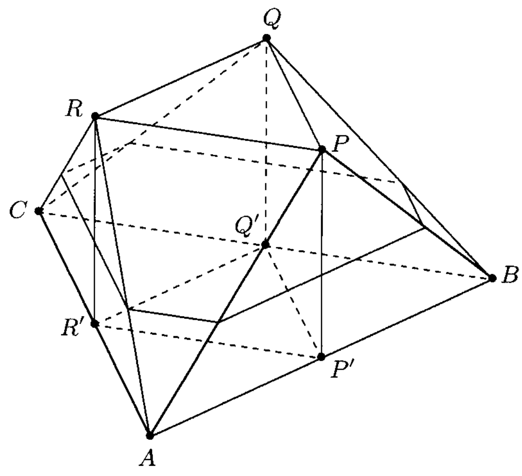
$$\frac{1}{3}P_{ABC}\cdot r + \frac{1}{3}P_{ABS}\cdot r + \frac{1}{3}P_{BCS}\cdot r + \frac{1}{3}P_{CAS}\cdot r = V,$$

tj. $\frac{1}{3}P\cdot r = V$, odakle je

$$r = \frac{3V}{P} = 3\,\frac{a^3\sqrt{2}/12}{a^2(2+\sqrt{3})/2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\,a = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(2-\sqrt{3})\,a.$$

NAPOMENA. Primetimo da je tetraedar $SABC$ u stvari četvrtina pravilnog oktaedra, prikazanog na drugoj slici.

243. Rešenje. Dobijeni poliedar je prikazan na slici. Mreža poliedra sastoji se iz jednakostraničnog trougla ABC, jednakostraničnog trougla PQR, tri podudarna jednakokraka trougla ABP, BCQ, CAR i tri podudarna jednakokraka trougla PQB, QRC, RPA.



Površine trouglova ABC i PQR su redom

$$a^2\sqrt{3}/4 \text{ i } (a/2)^2\sqrt{3}/4.$$

Visina trougla ABP je $a/2$, pa je njegova površina $a^2/4$.

Pošto je $RP = a/2$ osnovica jednakokrakog trougla RPA i njegov krak $AP = a\sqrt{2}/2$, primenom Pitagorine teoreme dobijamo visinu

$$h = \sqrt{AP^2 - (RP/2)^2} = a\sqrt{7}/4.$$

Na osnovu toga površina ovog trougla iznosi $a^2\sqrt{7}/16$, pa je površina poliedra

$$\begin{aligned} P &= a^2\sqrt{3}/4 + (a/2)^2\sqrt{3}/4 + 3\cdot a^2/4 + 3\cdot a^2\sqrt{7}/16 \\ &= \big(12 + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{7}\big)a^2/16. \end{aligned}$$

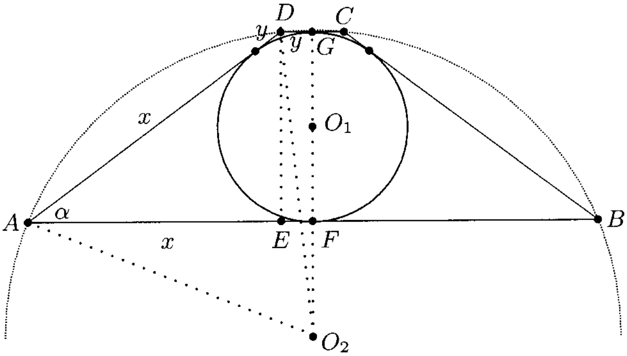
Zapremina datog poliedra sastoji se iz zapremine prizme $P'Q'R'PQR$ koja je jednaka $(a/2)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{2}$, jer je bazis ove prizme jednakostranični trougao stranice $a/2$ a visina prizme je $a/2$, kao i tri jednake piramide $PRR'P'A$, $QPP'Q'B$, $RQQ'R'C$. Osnova piramide je kvadrat stranice $a/2$ a visina je $(a/2)\sqrt{3}/2$, jer je jednaka visini jednakostraničnog trougla $AP'R'$. Prema tome, zapremina piramide je $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \dfrac{a}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, odakle dobijamo zapreminu poliedra

$$V = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{32}\, a^3\sqrt{3}.$$

2° U preseku ravni i poliedra dobijamo šestougao. Ako ovaj šestougao projektujemo na osnovu ABC poliedra, zaključujemo da je površina S_1 šestougla jednaka površini trougla ABC umanjenoj za tri površine jednakostraničnih trouglova stranice d. Prema tome,

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(a^2 - 3d^2).$$

244. Rešenje. Ako zarubljenu kupu sa upisanom i opisanom loptom presečemo sa ravni koja sadrži osovinu kupe, dobijamo jednakokraki trapez $ABCD$ sa upisanim i opisanim krugovima čiji su centri u tačkama O_1 i O_2, poluprečnika R i $R\sqrt{30}$. Poluprečnike osnova kupe označimo sa x i y $(x > y)$. Primenom Pitagorine teoreme na trougao ADE imamo



$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = (2R)^2 \quad \Rightarrow \quad (1) \quad xy = R^2.$$

Isto tako, primenom Pitagorine teoreme na trouglove DGO_2 i AFO_2 nalazimo

$$(2) \qquad \sqrt{(R\sqrt{30}\,)^2 - y^2} \pm \sqrt{(R\sqrt{30}\,)^2 - x^2} = 2R,$$

gde znak plus uzimamo ako je tačka O_2 unutar kupe, a znak minus ako je tačka O_2 izvan kupe.

Kvadriranjem i transformacijom jednačine (2) dobijamo

$$\begin{aligned}
&4\,(30R^2 - x^2)(30R^2 - y^2) = (x^2 + y^2 - 56R^2)^2,\\
&4\,\big(900R^4 - 30R^2(x^2 + y^2) + x^2y^2\big) = (x^2 + y^2 - 56R^2)^2,\\
&4\,\big(900R^4 - 30R^2(x+y)^2 + 30R^2 \cdot 2xy + (xy)^2\big) = \big((x+y)^2 - 2xy - 56R^2\big)^2.
\end{aligned}$$

Ako u poslednju jednačinu stavimo $xy = R^2$ i $x + y = s$, imamo

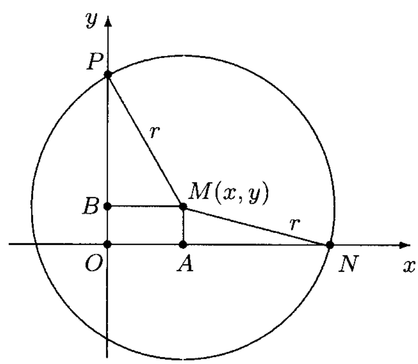
$$s^4 - 44R^2s^2 - 480R^4 = 0 \Rightarrow s = 2\sqrt{5}R, \quad \text{tj.} \quad (3) \quad x + y = 2\sqrt{5}R.$$

Označimo sa α ugao između izvodnice i veće osnove kupe. Tada je

$$\sin\alpha = \frac{ED}{AD} = \frac{2R}{x+y} = \frac{2R}{2\sqrt{5}R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arcsin(1/\sqrt{5}).$$

Napomena. Rešavanjem sistema (1) i (3) dobijamo da su poluprečnici osnova kupe $x = (\sqrt{5}+2)R$ i $y = (\sqrt{5}-2)R$. Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (2) zaključujemo da uzimamo znak minus. Prema tome, tačka O_2 je izvan zarubljene kupe.

245. Rešenje. Neka je $M(x, y)$ centar kruga. Tada iz pravouglog trougla MAN imamo $MN^2 = AM^2 + AN^2$, odnosno



$$(1) \qquad r^2 = y^2 + a^2.$$

Isto tako iz pravouglog trougla BMP izlazi $MP^2 = BM^2 + BP^2$, tj.

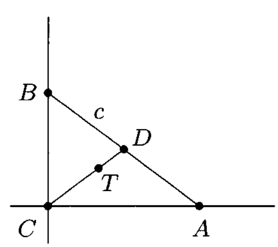
$$(2) \qquad r^2 = x^2 + b^2.$$

Iz jednačina (1) i (2) dobijamo

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2.$$

Ako je $a \neq b$, traženi skup tačaka je jednakostranična hiperbola, a ako je $a = b$, skup tačaka obrazuju dve prave $y = \pm x$.

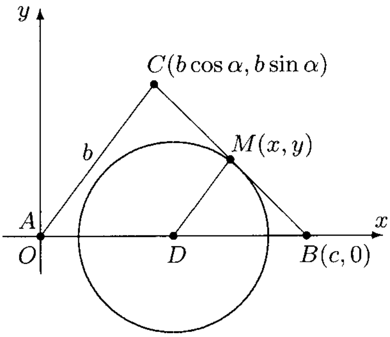
246. Rešenje. Posmatrajmo dve uzajamno normalne prave i odsečak dužine c koji klizi po ovim pravama. Pravougli trougao ABC ima hipotenuzu c. Kako je dužina težišne linije CD jednaka poluprečniku opisanog kruga, tj. $c/2$, imamo



$$CT = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{2} = \frac{c}{3}.$$

Prema tome, pošto je rastojanje težišta do temena C konstantno, težište opisuje kružnicu poluprečnika $c/3$ sa centrom u C.

247. Rešenje. Postavimo koordinatni sistem kao na slici. Tačka $M(x,y)$ je sredina duži BC. Neka je $\alpha = \sphericalangle CAB$. Tada je



$$x = \frac{b\cos\alpha + c}{2}, \quad y = \frac{b\sin\alpha + 0}{2}.$$

Odavde dobijamo

$$(2x-c)^2 + (2y)^2 = b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha),$$

odnosno

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Prema tome, skup sredina stranice BC je krug sa centrom u sredini stranice AB (tačka D), poluprečnika $r = b/2$.

248. Dokaz 1. Primenimo metod koordinata. Neka su tačke $A(-u,0)$, $B(u,0)$ i $C(v,w)$ temena trougla ABC u xy-ravni. Tada je $T(v/3, w/3)$ težište trougla i jednačina kruga k je

$$\left(x - \frac{v}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{w}{3}\right)^2 = r^2, \tag{1}$$

gde je $r \geq 0$. Ako je $P(x,y)$ proizvoljna tačka na krugu k, onda je

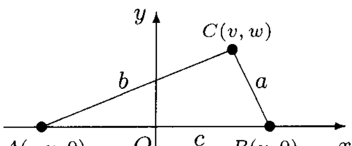
$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= (x+u)^2 + y^2 + (x-u)^2 + y^2 + (x-v)^2 + (y-w)^2 \\ &= 3\left(\left(x - \frac{v}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{w}{3}\right)^2\right) + 2u^2 + \frac{2}{3}v^2 + \frac{2}{3}w^2 \end{aligned}$$

i primenom jednakosti (1) dobijamo

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3r^2 + 2u^2 + \frac{2}{3}v^2 + \frac{2}{3}w^2 = \text{const}, \tag{2}$$

što je trebalo dokazati.

Izrazimo dobijeni rezultat pomoću stranica trougla a, b, i c. Kako je



$$2u = c, \quad (v+u)^2 + w^2 = b^2, \quad (v-u)^2 + w^2 = a^2,$$

sabiranjem dve zadnje jednačine nalazimo

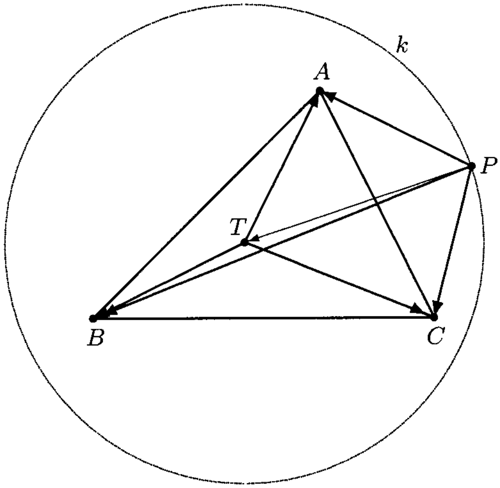
$$2u^2 + 2v^2 + 2w^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow v^2 + w^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - 2u^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

pa jednakost (2) dobija sledeći oblik:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3r^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Dokaz 2. Primenimo metod vektorske algebre. Na slici je prikazan trougao ABC čije je težište u tački T. Tačka P pripada krugu k proizvoljnog poluprečnika r, sa centrom u T. Važe sledeće vektorske jednakosti:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TA}, \quad \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TB}, \quad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TC}.$$



Kavadriranjem levih i desnih strana ovih jednakosti i njihovim sabiranjem, dobijamo

$$(3) \quad \overrightarrow{PA}^{\,2} + \overrightarrow{PB}^{\,2} + \overrightarrow{PC}^{\,2} = 3\,\overrightarrow{PT}^{\,2} + \overrightarrow{TA}^{\,2} + \overrightarrow{TB}^{\,2} + \overrightarrow{TC}^{\,2} + 2\,\overrightarrow{PT}\cdot(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}).$$

Jednostavno se dokazuje da važi $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0}$. Kako je $\overrightarrow{PA}^{\,2} = \overline{PA}^{\,2}$, $\overrightarrow{PB}^{\,2} = \overline{PB}^{\,2}$, $\overrightarrow{PC}^{\,2} = \overline{PC}^{\,2}$, $\overrightarrow{PT}^{\,2} = r^2$, zatim $\overrightarrow{TA}^{\,2} = \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2$, $\overrightarrow{TB}^{\,2} = \left(\frac{2}{3}t_b\right)^2$, $\overrightarrow{TC}^{\,2} = \left(\frac{2}{3}t_c\right)^2$, jednakost (3) postaje

$$\begin{aligned}\overline{PA}^{\,2} + \overline{PB}^{\,2} + \overline{PC}^{\,2} &= 3r^2 + \frac{4}{9}\left(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2\right)\\ &= 3r^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}\right)\\ &= 3r^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},\end{aligned}$$

a to je isti rezultat dobijen u Dokazu 1.

249. Rešenje. Neka su u koordinatnoj xy-ravni date tačke $A(v, w)$, $B(-u, 0)$, $C(u, 0)$ i tačka $P(x, y)$ koja zadovoljava uslov $PA^2 = PB^2 + PC^2$. Iz datog uslova izlazi

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 = (x + u)^2 + y^2 + (x - u)^2 + y^2.$$

Posle sređivanja ove jednačine dobijamo

$$(1) \qquad (x + v)^2 + (y + w)^2 = r^2, \text{ gde je } r = \sqrt{2(v^2 + w^2 - u^2)}.$$

Kako je $t_a^2 = OA^2 = v^2 + w^2$, gde je t_a dužina težišne duži i $u^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2$, imamo da je

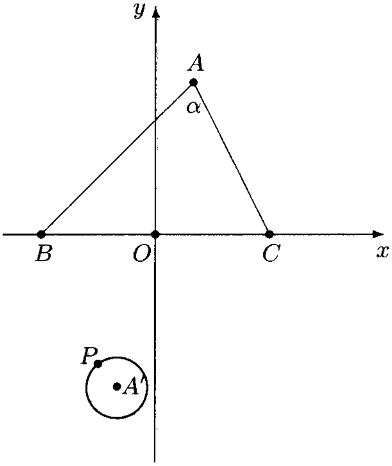
$$(2) \qquad r = \sqrt{2\left(t_a^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2\right)}.$$

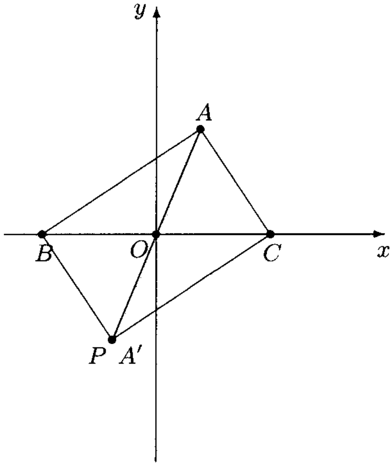
Posmatranjem jednakosti (1) i (2) dolazimo do sledećih zaključaka:

1° Ako je $t_a > \frac{1}{2}\overline{BC}$, traženo geometrijsko mesto tačaka je krug poluprečnika r sa centrom u tački $A'(-v, -w)$, koja je simetrična tački A u odnosu na tačku O (sredina duži BC).

2° Ako je $t_a = \frac{1}{2}\overline{BC}$, geometrijsko mesto se svodi na tačku $(-v, -w)$.

3° Ako je $t_a < \frac{1}{2}\overline{BC}$, geometrijsko mesto tačaka ne postoji.





NAPOMENA. Ako su a, b, c stranice trougla ABC, primenom formule

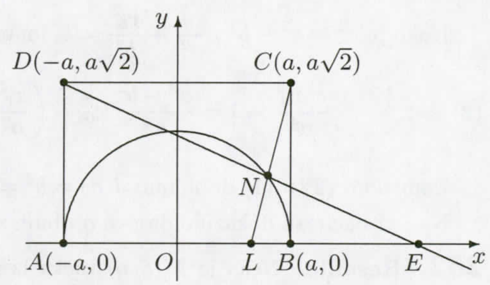
$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

nalazimo

$$r^2 = 2\left(t_a^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2\right) = 2\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{1}{4}a^2\right) = b^2 + c^2 - a^2.$$

Traženo geometrijsko mesto postoji pod uslovom $r^2 \geq 0$, tj. $b^2 + c^2 \geq a^2$. Za slučaj stroge nejednakosti (slučaj 1°) ugao α je oštar. Ako je α tup ugao, onda je $b^2 + c^2 < a^2$ (slučaj 3°), pa geometrijsko mesto tačaka ne postoji. Najzad, ako je $b^2 + c^2 = a^2$, trougao ABC je pravougli i geometrijsko mesto se svodi na jednu tačku $P(-v, -w)$ (slučaj 2°). Taj slučaj je prikazan na drugoj slici. Pošto je trougao ABC pravougli, četvorougao $ABA'C$ je pravougaonik. Zaista, kvadrat dijagonale jednak je zbiru kvadrata stranica pravougaonika.

250. Dokaz. Primenimo metod koordinata. Neka je $A(-a,0)$ i $B(a,0)$. Na osnovu uslova zadatka je $C(a,a\sqrt{2})$, $D(-a,a\sqrt{2})$. Ako je $N(\xi,\eta)$ proizvoljna tačka kruga nad prečnikom AB, imamo



$$(1)\qquad \xi^2+\eta^2=a^2.$$

Prava određena tačkama C i N ima jednačinu $y-a\sqrt{2}=\dfrac{\eta-a\sqrt{2}}{\xi-a}\,(x-a)$

i seče x-osu u tački L čija je apscisa x_1 jednaka $x_1=a\,\dfrac{\eta-\xi\sqrt{2}}{\eta-a\sqrt{2}}$. Isto tako prava određena tačkama D i N ima jednačinu $y-a\sqrt{2}=\dfrac{\eta-a\sqrt{2}}{\xi+a}\,(x+a)$ i seče x-osu u tački E čija je apscisa x_2 jednaka $x_2=-a\,\dfrac{\eta+\xi\sqrt{2}}{\eta-a\sqrt{2}}$. Na osnovu ovih podataka imamo

$$\begin{aligned}
AL^2+BE^2&=|a+x_1|^2+|a-x_2|^2\\
&=a^2\left|1+\frac{\eta-\xi\sqrt{2}}{\eta-a\sqrt{2}}\right|^2+a^2\left|1+\frac{\eta+\xi\sqrt{2}}{\eta-a\sqrt{2}}\right|^2\\
&=4a^2\,\frac{(\eta\sqrt{2}-a)^2+\xi^2}{(\eta-a\sqrt{2})^2}=4a^2\,\frac{2\eta^2-2a\eta\sqrt{2}+a^2+\xi^2}{(\eta-a\sqrt{2})^2}.
\end{aligned}$$

Pošto je $\xi^2+\eta^2=a^2$, dobijamo

$$AL^2+BE^2=4a^2\,\frac{\eta^2-2a\eta\sqrt{2}+2a^2}{(\eta-a\sqrt{2})^2}=4a^2\,\frac{(\eta-a\sqrt{2})^2}{(\eta-a\sqrt{2})^2}=4a^2=AB^2.$$

251. Rešenje. Neka je data elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ i njene žiže $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$, gde je $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Jednačina tangente t u proizvoljnoj tački $M_0(x_0,y_0)$ na elipsi glasi:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Odstojanja tačaka F_1 i F_2 od t jednaka su

$$d_1=d(F_1,t)=\frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}},\qquad d_2=d(F_2,t)=\frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Tada je

$$(1)\qquad d_1d_2=\frac{\left|\dfrac{c^2x_0^2}{a^4}-1\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}.$$

Kako je $c^2 = a^2 - b^2$, $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, imamo

$$\frac{c^2 x_0^2}{a^4} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_0^2 - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = -b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right). \tag{2}$$

Zamenom (2) u (1) dobijamo $d_1 d_2 = b^2 = \text{const}$.

Na isti način se dokazuje da ova osobina važi i kod hiperbole.

252. Rešenje. Neka je $M(\xi, \eta)$ tačka iz koje se data elipsa vidi pod pravim uglom. Prave $y - \eta = k(x - \xi)$ $(k \in \mathbb{R})$ koje prolaze kroz tačku M su tangente date elipse ako je $a^2k^2 + b^2 = (-k\xi + \eta)^2$, tj.

$$(a^2 - \xi^2)k^2 + 2\xi\eta k + b^2 - \eta^2 = 0. \tag{1}$$

Na osnovu VIÈTE-ove formule iz (1) izlazi da je $k_1 k_2 = \dfrac{b^2 - \eta^2}{a^2 - \xi^2}$. Pošto tangente koje prolaze kroz tačku M zaklapaju prav ugao, dobijamo da je $k_1 k_2 = -1$, pa je na osnovu toga $\dfrac{b^2 - \eta^2}{a^2 - \xi^2} = -1$, tj. $\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2$.

Kako je $\xi = x$ i $\eta = y$, dobijamo da je krug $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ traženo geometrijsko mesto tačaka.

NAPOMENA. U zadatku se primenjuje osobina da je prava $y = kx + n$ tangenta elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ako i samo ako je $a^2k^2 + b^2 = n^2$.

253. Rešenje. Neka je data tačka $P(t, 0)$ koja pripada x-osi. Prava $y = x - t$ prolazi kroz tačku P i zaklapa ugao $\pi/4$ sa x-osom. Odredimo najpre skup vrednosti parametra t za koje prava seče hiperbolu.

Ako eliminišimo y iz sistema

$$y = x - t, \quad x^2 - 4y^2 = 16,$$

dobijamo kvadratnu jednačinu po x

$$3x^2 - 8tx + 16 + 4t^2 = 0. \tag{1}$$

Jednačina ima realna rešenja ako je

$$64t^2 - 4 \cdot 3 \cdot (16 + 4t^2) \geq 0 \Rightarrow |t| \geq 2\sqrt{3}.$$

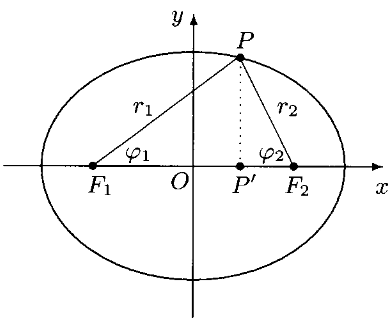
Ako su $M_1(x_1, x_2)$ i $M_2(x_2, y_2)$ presečne tačke prave i hiperbole, onda je sredina tetive M_1M_2 tačka $S(x, y)$, tj. $S\Big(\dfrac{x_1 + y_1}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\Big)$. Primenom VIÈTE-ovog pravila iz jednačine (1) dobijamo $x_1 + x_2 = \dfrac{8t}{3}$.

Kako je $y = x - t$, imamo $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 - 2t = \dfrac{8t}{3} - 2t = \dfrac{2t}{3}$. Prema tome, iz jednačina $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{4t}{3}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{t}{3}$, eliminacijom t, nalazimo $y = \dfrac{1}{4}x$. Za $t = -2\sqrt{3}$ i $t = 2\sqrt{3}$ dobijamo dve tačke $K_1\Big(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Big)$ i $K_2\Big(\dfrac{8\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Big)$.

Dakle, traženo geometrijsko mesto su dve poluprave:

$$y = \frac{1}{4}x \quad \left(x \leq -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right), \qquad y = \frac{1}{4}x \quad \left(x \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}\right).$$

254. Dokaz. Neka je data elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ i njene žiže $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2})$. Neka je $P(x, y)$ proizvoljna tačka na elipsi $(x \neq \pm a)$ i P' njena projekcija na x-osu.



Označimo sa $\sphericalangle PF_1F_2 = \varphi_1$, $\sphericalangle PF_2F_1 = \varphi_2$, $PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$. Tada je

$$(1) \qquad \begin{aligned} &r_1 + r_2 = 2a, \quad r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ &r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Odavde izlazi

$$r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - \left((x-c)^2 + y^2\right) \Rightarrow (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx,$$

tj.

$$(2) \qquad r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a}.$$

Iz (1) i (2) dobijamo $r_1 = a + \frac{cx}{a}$ i $r_2 = a - \frac{cx}{a}$. Iz pravouglog trougla $P'PF_1$ imamo $\cos\varphi_1 = \frac{c+x}{r_1}$, a kako je $\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi_1}{1+\cos\varphi_1}}$ $(0 < \varphi_1 < \pi)$, nalazimo

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{c+x}{r_1}}{1 + \frac{c+x}{r_1}}} = \sqrt{\frac{r_1 - (c+x)}{r_1 + (c+x)}} = \sqrt{\frac{a + \frac{cx}{a} - (c+x)}{a + \frac{cx}{a} + (c+x)}},$$

odnosno

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{(a-c)\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{(a+c)\left(1 + \frac{x}{a}\right)}}.$$

Na sličan način iz trougla $PP'F_2$ imamo $\cos\varphi_2 = \frac{c-x}{r_2}$, a kako je $r_2 = a - \frac{cx}{a}$, dobijamo

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{(a-c)\left(1 + \frac{x}{a}\right)}{(a+c)\left(1 - \frac{x}{a}\right)}}.$$

Iz (3) i (4) izlazi $\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} = \frac{a-c}{a+c}$ $(= \text{const})$.

255. Dokaz. Neka je koordinatni početak $O(0, 0)$ centar opisanog kruga oko datog petougla. Koordinate tačaka A_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ označimo sa (x_i, y_i) i tada je $x_i^2 + y_i^2 = r^2$. Ako usvojimo oznake iz Napomene, imamo

$$M_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right),\quad M_2\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right),$$
$$M_3\left(\frac{x_3+x_4}{2},\frac{y_3+y_4}{2}\right),\quad M_4\left(\frac{x_4+x_1}{2},\frac{y_4+y_1}{2}\right).$$

Sredina duži M_1M_3 ima koordinate

$$\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2},\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}}{2}\right)$$

tj.

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right).$$

Isto tako sredina duži M_2M_4 ima iste koordinate kao sredina duži M_1M_3. Prema tome, duži M_1M_3 i M_2M_4 se polove u težištu

$$T_5\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right).$$

Neka tačka S ima koordinate $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{4}\right)$. Tada je

$$ST_5^{\,2}=\left(\frac{x_5}{4}\right)^2+\left(\frac{y_5}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\,(x_5^2+y_5^2)=\frac{r^2}{16}\Rightarrow ST_5=\frac{r}{4}\,.$$

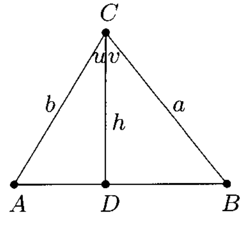
Slično dokazujemo da je $ST_i=\frac{r}{4}$ $(i=1,2,3,4)$.

Jednostavno izvođenje adicione teoreme

Kao što je poznato, *površina trougla je jednaka poluproizvodu stranica i sinusa zahvaćenog ugla.* Posmatrajmo trougao ABC u kome je povučena visina h iz temena C. Neka je P površina trougla ABC, P_1 površina prougla DCA i P_2 površina trougla BCD.

Važi jednakost (1) $P=P_1+P_2$, gde je

$$P=\frac{ab}{2}\sin(u+v),\quad P_1=\frac{ah}{2}\sin u,\quad P_2=\frac{bh}{2}\sin v.$$



Kako je $h=a\cos v$, $h=b\cos u$, dobijamo $P_1=\frac{ab}{2}\sin u\cos v$, $P_2=\frac{ab}{2}\sin v\cos u$, što smenom u (1) i skraćivanjem sa $ab/2$ daje

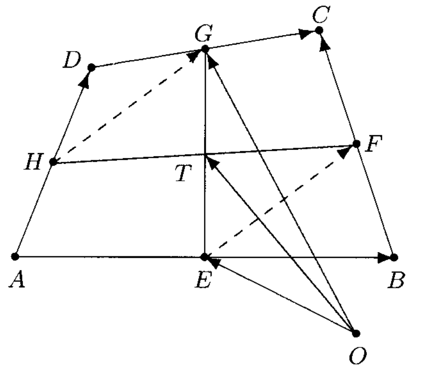
$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\sin v\cos u.$$

VII. VEKTORI

256. Dokaz. Dokažimo najpre lemu: *Neka su A, B, C, D proizvoljne tačke i neka su E, F, G, H redom sredine duži AB, BC, CD i DA. Ako je T presečna tačka duži EG i FH, tada je*

(1) $\quad \overrightarrow{OT}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})/4,$

gde je O proizvoljna tačka.



Zaista sa slike imamo

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}, \quad \overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})/2.$$

Isto tako je $\overrightarrow{HG}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})/2$. Kako je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, dobijamo da je $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, pa je četvorougao $EFGH$ paralelogram. Prema tome, tačka T polovi duži EG i FH.

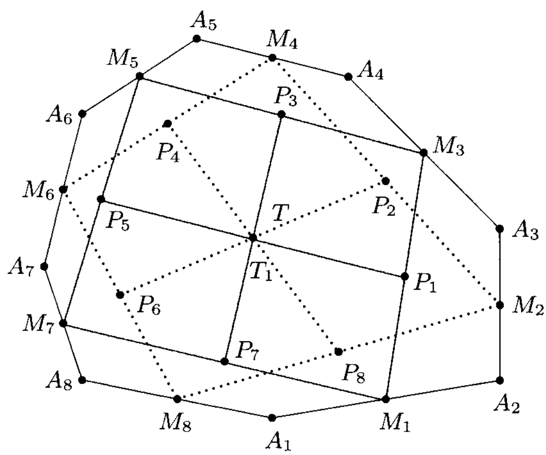
Dakle, imamo

(2) $$\overrightarrow{OT}=(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG})/2,$$

a kako je

(3) $$\overrightarrow{OE}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})/2, \qquad \overrightarrow{OG}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})/2,$$

zamenom (3) u (2) dobijamo jednakost (1).



Izvedimo sada tvrđenje u zadatku. Označimo sa T presek duži P_1P_5 i P_3P_7, a sa T_1 presek duži P_2P_6 i P_4P_8. Treba da dokažemo da je $T\equiv T_1$. Da bismo ovo dokazali, dovoljno je dokazati da je $\overrightarrow{OT}\equiv\overrightarrow{OT_1}$, gde je O proizvoljna tačka.

Posmatrajmo tačke M_1, M_3, M_5, M_7. Na osnovu leme imamo

$$\overrightarrow{OT}=(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_3}+\overrightarrow{OM_5}+\overrightarrow{OM_7})/4.$$

Kako je

$$\overrightarrow{OM_1}=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})/2, \quad \overrightarrow{OM_3}=(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})/2,$$
$$\overrightarrow{OM_5}=(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6})/2, \quad \overrightarrow{OM_7}=(\overrightarrow{OA_7}+\overrightarrow{OA_8})/2,$$

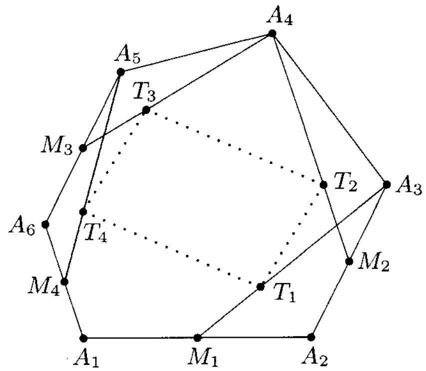
dobijamo

$$\overrightarrow{OT} = (\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_8})/8.$$

Ako posmatramo tačke M_2, M_4, M_6, M_8, analogno dobijamo

$$\overrightarrow{OT_1} = (\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_8})/8.$$

Time smo dokazali da je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1}$, tj. $T \equiv T_1$.



257. Dokaz. Označimo sa M_1, M_2, M_3 i M_4 redom sredine duži A_1A_2, A_2A_3, A_5A_6 i A_6A_1. Tada je

$$(2) \qquad \overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1M_1} + \overrightarrow{M_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4T_2},$$

$$(3) \qquad \overrightarrow{T_1M_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_3M_1} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{A_2A_3} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}\right) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{A_1A_2} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_3},$$

$$(4) \qquad \overrightarrow{A_4T_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_4M_2} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{A_3A_4} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{A_3A_4} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_3},$$

$$(5) \qquad \overrightarrow{M_1A_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Ako (2), (3) i (4) zamenimo u jednakost (1), dobijamo

$$(5) \qquad \overrightarrow{T_1T_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right).$$

Istim postupkom dokazuje se da je

$$(6) \qquad \overrightarrow{T_4T_3} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_1}\right).$$

Kako je $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_1} = 0$, tada iz(5) i (6) imamo $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_4T_3}$ a odatle sleduje traženo tvrđenje.

Primetimo da nismo koristili uslov da su tačke $A_1, A_2, \ldots, A_6$ komplanarne.

258. Dokaz. Uvedimo vektore $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{d}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a} + \lambda_1 \vec{d},\\
\vec{c} &= \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{b} - \lambda_2 \vec{a} = (1-\lambda_2)\vec{a} + \lambda_1 \vec{d},\\
\vec{d} &= \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4} = \vec{c} - \lambda_3 \vec{b} = (1-\lambda_2-\lambda_3)\vec{a} + \lambda_1(1-\lambda_3)\vec{d}.
\end{aligned}$$

Pošto su vektoru $\vec{a}$ i $\vec{d}$ linearno nezavisni, iz poslednje jednakosti sleduje

$$1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \text{ i } \lambda_1(1-\lambda_3) = 1,$$

tj.

$$(1) \quad 1 - \lambda_2 = \lambda_3, \qquad (2) \quad \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_3.$$

Neka je

$$(3) \qquad \overrightarrow{OB} = -\mu \overrightarrow{a} \quad (\mu > 0).$$

Onda je $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{A_4B}$, odnosno

$$-\mu\overrightarrow{a} = \overrightarrow{d} - \lambda_4\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{d} - \lambda_4\big((1-\lambda_2)\overrightarrow{a} + \lambda_1\overrightarrow{d}\big) = -\lambda_4(1-\lambda_2)\overrightarrow{a} + (1-\lambda_1\lambda_4)\overrightarrow{d},$$

pa dobijamo $\mu = \lambda_4(1-\lambda_2)$ i $1 - \lambda_1\lambda_4 = 0$, a odatle je

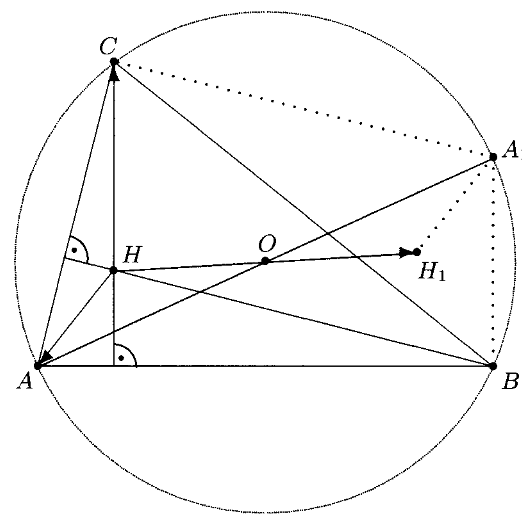
$$(4) \qquad \mu = \frac{1}{\lambda_1}(1-\lambda_2).$$

Ako (1) i (2) zamenimo u (4), dobijamo

$$(5) \qquad \mu = \lambda_3(1-\lambda_3) \leq \frac{1}{4}.$$

Primenom nejednakosti (5) iz jednakosti (3) imamo $|\overrightarrow{OB}| = \mu|\overrightarrow{a}| \Rightarrow OB \leq \frac{1}{4}OA_1$.

259. Dokaz. Odredimo tačke A_1 i H_1 koje su simetrične tačkama A i H u odnosu na tačku O. Kako je $BH \perp AC$, jer je H ortocentar i $CA_1 \perp CA$ jer je $\sphericalangle ACA_1$ periferijski nad prečnikom, sleduje $BH \parallel A_1C$. Analogno se dokazuje da je $CH \parallel A_1B$. Prema tome, A_1BHC je paralelogram pa je



$$(1) \qquad \overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}.$$

Pošto su duži AH i A_1H_1 simetrične u odnosu na tačku O, to je četvorougao HAH_1A_1 paralelogram. Stoga je

$$(2) \qquad 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA_1}.$$

Zamenom (1) u (2) dobijamo

$$(3) \qquad 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}.$$

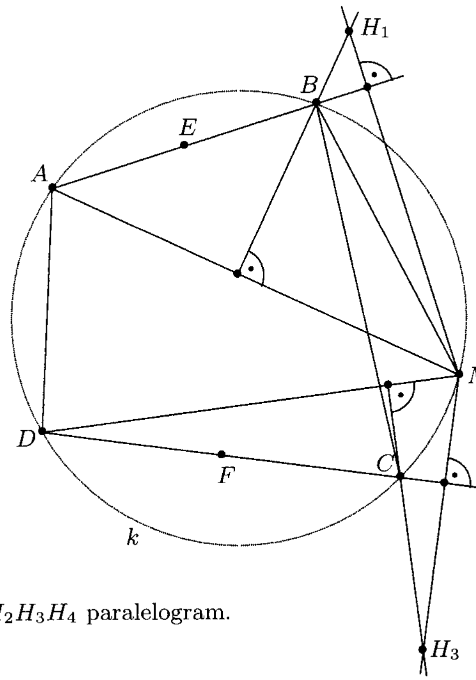
Kako je $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}$ jednakost (3) se svodi na $2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}$, odakle je

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

što je trebalo dokazati.

260. Dokaz. Ako primenimo Hamiltonovu teoremu na trouglove MAB, MBC, MCD, MDA upisane u krugu K sa centrom O, imamo

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD},$$
$$\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.$$



Tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H_1H_2} &= \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1}\\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\\ &\qquad -(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\\ &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\\ &\qquad -(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})\\ &= \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{H_4H_3}.\end{aligned}$$

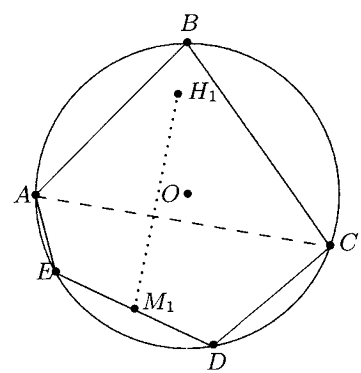
Iz poslednje jednakosti sleduje da je $H_1H_2H_3H_4$ paralelogram.

Dalje je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H_1H_3} &= \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\\ &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 2 \cdot \overrightarrow{OF} - 2 \cdot \overrightarrow{OE} = 2 \cdot \overrightarrow{EF},\end{aligned}$$

a odatle izlazi $H_1H_3 = 2 \cdot EF$.

261. Dokaz. Označimo sa O centar opisanog kruga oko datog petougla, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$. Primenom Hamiltonove teoreme na trougao ABC, imamo



$$\overrightarrow{OH_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Ako je M_1 sredina duži ED, tada je $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{\vec{d} + \vec{e}}{2}$. Ako sa P označimo presečnu tačku duži H_1M_1 i H_2M_2, tada je

$$\overrightarrow{OP} = (1 - t_1)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + t_1 \frac{\vec{d} + \vec{e}}{2}. \tag{1}$$

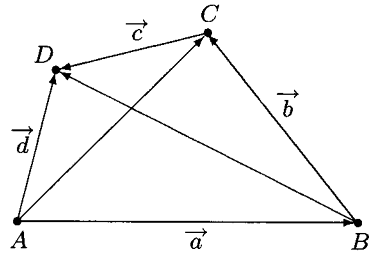
Kako je $P \in H_2M_2$, analogno je

$$\overrightarrow{OP} = (1 - t_2)(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + t_2 \frac{\vec{e} + \vec{a}}{2}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) sleduje $1 - t_1 = \frac{1}{2} t_2$ i $1 - t_1 = 1 - t_2$, pa je $t_1 = t_2 = 2/3$. Zamenom $t_1 = 2/3$ u (1), imamo

$$\text{(3)} \qquad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}).$$

Na osnovu (3) zaključujemo da je vektor $\overrightarrow{OP}$ nezavisan od izbora dve prave iz skupa pravih $\{H_1M_1, H_2M_2, \dots, H_5M_5\}$. Prema tome, sve prave prolaze kroz istu tačku P.



262. Dokaz. Ako stavimo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, onda je $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$ i

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2. \end{aligned}$$

Iz uslova $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ imamo $|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, i posle kvadriranja i sređivanja dobijamo

$$\text{(2)} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2 = 0.$$

Iz (1) i (2) izlazi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, tj. $AC \perp BD$.

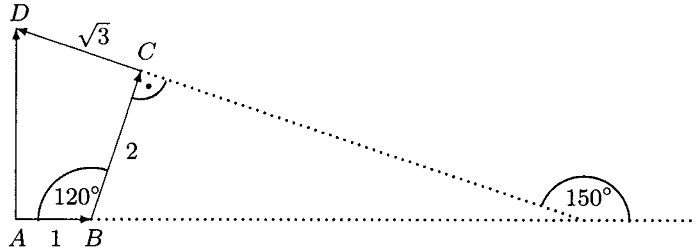
NAPOMENA. Važi i obrnuto, tj. $AC \perp BD \Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

263. Rešenje. Sa slike se vidi da je

$$\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ, \quad \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 150^\circ, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Kvadriranjem poslednje jednakosti dobijamo

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}).$$



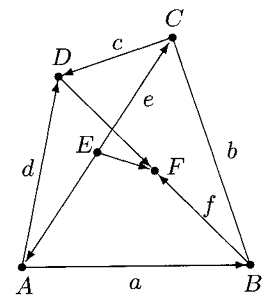
Kako je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} &= 0 \quad (\text{jer je } \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}), \\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} &= |\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

imamo

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = 1^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\left(1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = 7 \Rightarrow AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{7}.$$

264. Dokaz. 1° Na osnovu definicije sabiranja vektora imamo



$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}, \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$2\,\overrightarrow{EF} = (\,\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\,) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\,\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF}\,).$$

Kako je $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = 0$ i $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} = 0$, izlazi $2\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ i kvadriranjem dobijamo

$$4\,|\overrightarrow{EF}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}, \text{ ili}$$

(1) $$4\,EF^2 = a^2 + c^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Primenom definicije skalarnog proizvoda i kosinusne teoreme imamo

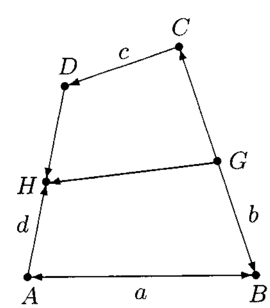
$$\begin{aligned}
2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= 2\,\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\
&= -\,2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\
&= -\,2\,|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + 2\,|\overrightarrow{AB}\,|\overrightarrow{AD}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\\
&= -\,2ae\cos\sphericalangle BAC + 2ad\cos\sphericalangle BAD\\
&= -\,(a^2 + e^2 - b^2) + (a^2 + d^2 - f^2).
\end{aligned}$$

Prema tome,

(2) $$2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = b^2 + d^2 - e^2 - f^2.$$

Ako (2) zamenimo u (1), dobijamo jednakost 1°.

2° Na sličan način nalazimo



$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}, \; \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$2\,\overrightarrow{GH} = (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\,) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DH}\,).$$

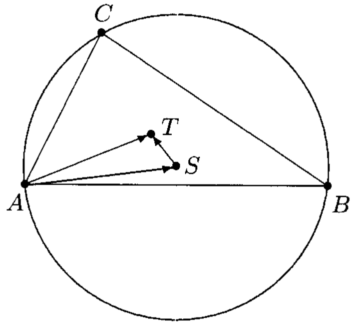
Pošto je $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$, $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DH} = 0$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, imamo $2\,\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, i kvadriranjem dobijamo

$$4\,|\overrightarrow{GH}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}, \text{ tj.}$$

(3) $$4\,GH^2 = a^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Ako (2) zamenimo u (3) dobijamo traženu jednakost 2°.

265. Dokaz. Primenićemo vektorsku metodu. Važe jednakosti



$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST},\ \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{ST},\ \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{ST}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + 3\cdot\overrightarrow{ST}.$$

Koristeći se poznatom osobinom težišta trougla

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{0},$$

gornja jednakost se svodi na

$$-3\cdot\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS},$$

a kvadriranjem ove jednakosti imamo

(1) $$9\,|\overrightarrow{ST}|^2 = |\overrightarrow{AS}|^2 + |\overrightarrow{BS}|^2 + |\overrightarrow{CS}|^2 + 2\left(\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AS}\right).$$

Pošto je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS} &= |\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{BS}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS})\\ &= R^2\cos 2\gamma \quad (\text{jer je } |\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| = R,\ \sphericalangle(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS}) = 2\gamma)\\ &= R^2(1 - 2\sin^2\gamma)\\ &= R^2 - \frac{1}{2}(2R\sin\gamma)^2,\end{aligned}$$

primenom sinusne teoreme nalazimo

(2) $$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS} = R^2 - \frac{1}{2}c^2.$$

Istim postupkom se nalaze jednakosti

(3) $$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CS} = R^2 - \frac{1}{2}a^2,\quad \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AS} = R^2 - \frac{1}{2}b^2.$$

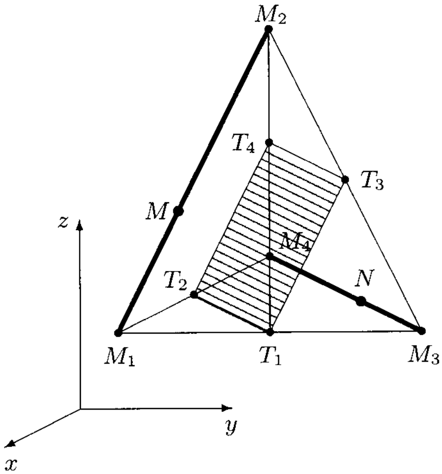
Ako (2) i (3) zamenimo u (1), vodeći računa da je $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| = |\overrightarrow{CS}| = R$, $|\overrightarrow{ST}| = ST$, dobijamo

$$9\,ST^2 = 3R^2 + 2\left(R^2 - \frac{1}{2}c^2 + R^2 - \frac{1}{2}a^2 + R^2 - \frac{1}{2}b^2\right),$$

tj.

$$ST^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

266. Rešenje. Neka su date dve mimoilazne duži M_1M_2 i M_3M_4, gde su krajevi duži M_1, M_2, M_3, M_4 dati redom vektorima položaja $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, $\vec{r}_4$.



Vektori položaja tačaka M i N su

$$\vec{r}_M = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,\lambda,$$
$$\vec{r}_N = \vec{r}_3 + (\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\,t,$$

gde $\lambda \in [0,1]$ i $t \in [0,1]$. Sredina S duži MN data je vektorom položaja

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_M + \vec{r}_N}{2},$$

tj.

$$(1) \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2} + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{2}\,\lambda + \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{2}\,t.$$

Kao što je poznato, ovo je vektorska jednačina ravni u parametarskom obliku. Međutim, pošto λ i t pripadaju segmentu $[0,1]$, traženo geometrijsko mesto je četvorougao u ravni (1) (na slici je ta oblast šrafirana), čija su temena:

$$T_1\left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2}\right) \quad - \text{ sredina duži } M_1M_3 \text{ za } \lambda = 0 \text{ i } t = 0,$$
$$T_2\left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_4}{2}\right) \quad - \text{ sredina duži } M_1M_4 \text{ za } \lambda = 0 \text{ i } t = 1,$$
$$T_3\left(\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{2}\right) \quad - \text{ sredina duži } M_2M_3 \text{ za } \lambda = 1 \text{ i } t = 0,$$
$$T_4\left(\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_4}{2}\right) \quad - \text{ sredina duži } M_2M_4 \text{ za } \lambda = 1 \text{ i } t = 1.$$

Pošto je

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_3T_4} = \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{2}, \quad \overrightarrow{T_1T_3} = \overrightarrow{T_2T_4} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{2},$$

dobijeni četvorougao je paralelogram.

267. Rešenje. Neka su dve strane roglja date jediničnim vektorima $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$, pošto je ugao između njih $90°$. Pretpostavimo da je treća strana roglja jedinični vektor

$$\vec{c} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}.$$

Kako je $\vec{a} \cdot \vec{c} = p = \cos 60° = 1/2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = q = \cos 60° = 1/2$, iz uslova $|\vec{c}| = 1$, tj. $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = 1$, dobijamo $r = 1/\sqrt{2}$, pa je

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ obrazuju ravan čiji je vektor normale

$$\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.$$

Na sličan način dobijamo

$$\overrightarrow{N}_2 = \vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\,\vec{k},$$

$$\overrightarrow{N}_3 = \vec{c}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} - \frac{1}{2}\,\vec{k}.$$

Pošto je $|\overrightarrow{N}_2| = |\overrightarrow{N}_3| = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, jedinični vektori ovih normala su

$$\vec{n}_2 = \frac{\overrightarrow{N}_2}{|\overrightarrow{N}_2|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}, \quad \vec{n}_3 = \frac{\overrightarrow{N}_3}{|\overrightarrow{N}_3|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}.$$

Skalarni proizvodi $-\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2$, $-\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3$, $-\vec{n}_3\cdot\vec{n}_1$ su kosinusi uglova diedara roglja. Imamo

$$-\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3 = -\frac{1}{3}, \quad -\vec{n}_3\cdot\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

tako da za uglove α, β, γ koje obrazuju diedri roglja važi

$$\cos\alpha = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{3},$$

odakle je

$$\alpha = \gamma \approx 54^\circ\, 44'\, 8'', \quad \beta \approx 109^\circ\, 28'\, 16''.$$

Mistični broj sedam

U staroj Mesopotamiji Zemlja je bila – verovalo se – nosilac makrokosmosa – sveta, svemira, vasione te da je sve na Zemlji bilo udešeno prema broju 7. Mesopotamski astronomi su znali za 7 planeta (Sunce, Merkur, Venera, Mesec, Mars, Jupiter i Saturn) što se, inače, dugo održalo u antičkom svetu. U astrološke svrhe naročito je korišćen broj 7 (7 gradova koji su tvrdili da su rodno mesto čuvenog pesnika Homera, 7 vrata prastarog grada Tebe, 7 svetskih čuda, 7 rimskih kraljeva, 7 brežuljaka starog Rima, 7 grčkih mudraca, 7 dana u nedelji, 7 hebdomada (podela ljudskog života, razvojnih faza – 7 plus 7 itd, sve do 70. godine života koja je označavala prirodni kraj). Ovo mesopotamsko verovanje u broj 7 prenelo se preko stare Atine i Rima i u rano hrišćanstvo (7 smrtnih grehova, 7 tajni, 7 darova svetog duha) što je predstavljalo mistično nastojanje da se u svakoj pojavi nađe neka vrsta harmonije, najviše u astrologiji, muzici i matematici. U starom Rimu se verovalo da je i čuveni pesnik Vergilije, u skladu sa harmonijom brojeva, napisao svoje pastirske pesme, idile (Ekloga IV).

VIII. NEJEDNAKOSTI. GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI

268. Dokaz. Pođimo od poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \qquad (a \neq b,\ a > 0,\ b > 0),$$

tj.

$$a + b > 2\sqrt{ab}.$$

Logaritmovanjem ove nejednakosti za osnovu 2, dobijamo

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}\left(\log_2 a + \log_2 b\right),$$

a to je nejednakost koju je trebalo dokazati.

269. Dokaz. Primenom formule $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ data nejednakost postaje

$$\log_\pi 2 + \log_\pi 5 > 2, \quad \text{tj.} \quad \log_\pi 10 > 2.$$

Ova nejednakost je tačna jer je $\pi^2 < 10$. Uzimajući da je $\pi = 3.14\ldots < 3.15$, a $3.15^2 = 9.9225 < 10$, zaključujemo da je $\pi^2 < 10$.

270. Dokaz. Sabiranjem levih i desnih strana nejednakosti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2} &< \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},\\
\frac{1}{3^2} &< \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\\
&\vdots\\
\frac{1}{(n-1)^2} &< \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1},\\
\frac{1}{n^2} &< \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

271. Dokaz. 1° Primenom nejednakosti $(1+x)^2 > 1 + 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ imamo

$$\begin{aligned}
\log_{10}^2 9 + \log_{10}^2 11 &= \left(1 + \log_{10} 0.9\right)^2 + \Big(1 + \log_{10} 1.1\Big)^2\\
&> 1 + 2\log_{10} 0.9 + 1 + 2\log_{10} 1.1\\
&= 1 + \log_{10} 0.81 + 1 + \log_{10} 1.21\\
&= \log_{10} 8.1 + \log_{10} 12.1\\
&= \log_{10}(8.1\cdot 12.1)\\
&= \log_{10} 98.1 > \log_{10} 98.
\end{aligned}$$

2° Polazeći od nejednakosti $e^{2x} > e^{2x} - 1$, dobijamo

$$2x > \ln(e^{2x} - 1) = \ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) \qquad (x > 0),$$

tj.

$$4x^2 > \Big(\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1)\Big)^2 > 4\ln(e^x - 1)\ln(e^x + 1),$$

odakle je

$$x^2 > \ln(e^x - 1) \cdot \ln(e^x + 1).$$

272. Dokaz. Primetimo da je zadata nejednakost simetrična u odnosu na x, y, z. Zbog toga možemo pretpostaviti da je $|x| \geq |y| \geq |z|$.

Za $x = 0$ nejednakost se svodi na jednakost. Pretpostavimo da je $x \neq 0$. Deljenjem date nejednakosti sa $|x|$ dobijamo

$$1 + \left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| - \left|1 + \frac{y}{x}\right| - \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| - \left|\frac{z}{x} + 1\right| + \left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| \geq 0.$$

Polazeći od uslova $|x| \geq |y| \geq |z|$, imamo

$$\left|1 + \frac{y}{x}\right| = 1 + \frac{y}{x}, \quad \left|1 + \frac{z}{x}\right| = 1 + \frac{z}{x},$$

pa gornja nejednakost postaje

(1) $$\left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| - \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| + \left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| - \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) \geq 0.$$

Kako je

$$\left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| \leq \left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| \quad \text{i} \quad \left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| \geq \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right),$$

nejednakost (1), odnosno data nejednakost, je tačna.

273. Dokaz. Transformacijom izraza $A = \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c} - \dfrac{a}{1+a}$ dobijamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b) - a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{abc + 2bc + b + c - a}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &> \frac{abc + 2bc}{(1+a)(1+b)(1+c)} > 0, \end{aligned}$$

odakle izlazi data nejednakost.

274. Dokaz. Levu stranu nejednakosti možemo prikazati u obliku

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\right) \\ &= 3 - (a+b+c)^2, \end{aligned}$$

pri čemu smo vodili računa o uslovu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Kao što se vidi, važi nejednakost

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leqq 3,$$

gde znak jednakosti važi ako je $a+b+c=0$ (na primer, $a=1/\sqrt{2}$, $b=-1/\sqrt{2}$, $c=0$).

NAPOMENA. Primenom metoda ovog dokaza jednostavno se dokazuju sledeća tvrđenja:

1° Ako je $a^2+b^2=1$, dokazati da je $(a-b)^2 \leq 2$.

2° Ako je $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, dokazati da je

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \leq 4.$$

Uopštenje:

3° Ako je $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, dokazati da je $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_i-a_j)^2 \leq n$.

275. Rešenje. Data nejednakost je simetrična u odnosu na a, b, c. Zbog toga možemo pretpostaviti da je $c \geq b \geq a$. Sabiranjem nejednakosti

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0, \quad (c^2-b^2)(c-a) \geq 0$$

dobijamo

$$a^3+b^3-b^2a-a^2b+c^3-b^2c-c^2a+b^2a \geq 0,$$

tj.

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a.$$

Znak jednakosti važi ako je $a=b=c$.

276. Dokaz. Za tri pozitivna broja p, q i r važi nejednakost

$$\frac{p+q+r}{3} \geq \sqrt[3]{pqr}, \tag{1}$$

a to je odnos između aritmetičke i geometrijske sredine. Znak jednakosti važi ako je $p=q=r$.

Za $p=a/b$, $q=b/c$, $r=c/a$ nejednakost (1) se svodi na

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3.$$

Druga nejednakost se dokazuje na sledeći način: Kako je

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\\ &\geq 3+2+2+2=9,\end{aligned}$$

jer se u zagradama nalazi zbir nekog broja i njegove recipročne vrednosti, a on je uvek veći ili jednak 2, dobijamo

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Znak jednakosti važi za $a=b=c$.

277. Dokaz 1. Pozitivni brojevi a i b koji su manji od 1 mogu se prikazati u obliku

$$a=u^2, \quad b=v^2 \qquad ((u,v \in (0,1)).$$

Zamenom u datu nejednakost dobijamo

$$1+u^2+v^2 > 3\,uv \Rightarrow 1-uv+(u-v)^2 > 0.$$

Ova nejednakost je tačna jer je $uv < 1$, tj. $0 < 1-uv < 1$ i $(u-v)^2 \geq 0$. Ovim je dokaz završen.

Dokaz 2. Polazeći od poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine tri pozitivna broja p, q, r

$$\frac{p+q+r}{3} \geq \sqrt[3]{pqr},$$

u kojoj znak jednakosti važi za $p=q=r$, za $p=1$, $q=a$, $r=b$, dobijamo

(1) $$1+a+b > 3\,\sqrt[3]{ab}.$$

Ovde imamo strogu nejednakost jer su a i b manji od 1. Pošto je $ab < 1$, važi $\sqrt[3]{ab} > \sqrt{ab}$, pa se (1) svodi na

$$1+a+b > 3\sqrt{ab}.$$

278. Dokaz. Nejednakost $(a-b)^2 \geq 0$ se može prikazati u obliku

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2\,(a^2+b^2) \geq a^2+b^2+2ab \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2\,(a^2+b^2).$$

Kvadriranjem ove nejednakosti dobijamo

(1) $$(a+b)^4 \leq 4\,(a^4+2a^2b^2+b^4).$$

Na kraju, iz $(a^2-b^2)^2 \geq 0$ nalazimo

$$2a^2b^2 \leq a^4+b^4,$$

pa se nejednakost (1) svodi na

$$(a+b)^4 \leq 8\,(a^4+b^4),$$

pri čemu jednakost važi ako je $a=b$.

279. Rešenje. Stepenovanjem desne strane, dobijamo

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8},$$

odakle, posle sređivanja, imamo

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0.$$

Izraz na levoj strani možemo faktorisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}&(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab\,(a+b)\\ &\quad=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2,\end{aligned}$$

a to je zaista veće ili jednako nuli jer je $a>0$ i $b>0$. Znak jednakosti važi samo za $a=b$.

280. Dokaz 1. Iz nejednakosti

$$(a-m)^2+(b-n)^2+(c-p)^2 \geq 0, \quad (a+m)^2+(b+n)^2+(c+p)^2 \geq 0,$$

koristeći se uslovima $a^2+b^2+c^2=1$, $m^2+n^2+p^2=1$, dobijamo

$$am+bn+cp \leq 1, \quad am+bn+cp \geq -1,$$

odnosno

$$|am+bn+cp| \leq 1.$$

Dokaz 2. Posmatrajmo vektore

$$\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}, \quad \vec{B}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}.$$

Skalarni proizvod ovih vektora je

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B})=am+bn+cp.$$

Iz ove jednakosti izlazi

$$|am+bn+cp|=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\,|\cos(\vec{A},\vec{B})| \leq |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|.$$

Kako je $|\vec{A}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$, $|\vec{B}|=\sqrt{m^2+n^2+p^2}=1$, dolazimo do nejednakosti

$$|am+bn+cp| \leq 1.$$

281. Dokaz. Primetimo najpre da a, b, c moraju biti veći ili jednaki $-1/4$. Imamo

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} &< \sqrt{4a^2+4a+1}+\sqrt{4b^2+4b+1}+\sqrt{4c^2+4c+1}\\ &= 2a+1+2b+1+2c+1\\ &= 2(a+b+c)+3=2\cdot 1+3=5.\end{aligned}$$

282. Dokaz. Pođimo od nejednakosti

$$\begin{array}{llll}(a_1-a_2)^2 \geq 0, & (a_1-a_3)^2 \geq 0, & (a_1-a_4)^2 \geq 0,\ldots, & (a_1-a_m)^2 \geq 0,\\ & (a_2-a_3)^2 \geq 0, & (a_2-a_4)^2 \geq 0,\ldots, & (a_2-a_m)^2 \geq 0,\\ & & (a_3-a_4)^2 \geq 0,\ldots, & (a_3-a_m)^2 \geq 0,\\ & & \vdots & \\ & & & (a_{m-1}-a_m)^2 \geq 0.\end{array}$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

$$(m-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2)-2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_m+\cdots+a_{m-1}a_m) \geq 0.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2 &+ 2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{m-1}a_m)\\ &\leq m(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2),\end{aligned}$$

tj.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^2 \leq m\,(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2).$$

283. Dokaz. Iz uslova $a_i > 0 \wedge a_i c_i - b_i^2 > 0,\ i - 1, 2, \ldots, n,$ proizilazi da je

$$a_i x^2 + 2b_i x + c_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \text{ za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Sabiranjem ovih n nejednakosti dobijamo da nejednakost

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)x + \sum_{i=1}^{n} c_i > 0$$

važi za svako $x \in \mathbb{R}$, odakle imamo da je

$$4\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\Big) < 0,$$

tj. dobijamo traženu nejednakost.

284. Dokaz. Ako primenimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\log_\alpha(\alpha+1)} \cdot \log_{\alpha+1}(\alpha+2)} &< \frac{1}{\log_\alpha(\alpha+1)} + \log_{\alpha+1}(\alpha+2) \\ &= \log_{\alpha+1}\alpha + \log_{\alpha+1}(\alpha+2) = \log_{\alpha+1}(\alpha^2 + 2\alpha) \\ &< \log_{\alpha+1}(\alpha+1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Odatle izlazi $\log_\alpha(\alpha+1) > \log_{\alpha+1}(\alpha+2)$.

Višestrukom primenom poslednje nejednakosti dobijamo

$$\log_\alpha(\alpha+1) > \log_{\alpha+1}(\alpha+2) > \log_{\alpha+2}(\alpha+3) > \cdots > \log_{\alpha+n}(\alpha+n+1),$$

što je trebalo dokazati.

285. Rešenje. Označimo sa L izraz na levoj strani date nejednakosti. Pošto je $xy = 2$, imamo

$$\begin{aligned} L &= \frac{(x^2 + y + 2xy - 6)(x^2 + y^2 - 2xy + 8)}{x^2 + y^2 - 2xy} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 - 2)(x^2 + y^2 + 4)}{x^2 + y^2 - 4}. \end{aligned}$$

Uvedimo smenu $t = x^2 + y^2 - 4$. Tada je $t > 0$. Zaista

$$x \neq y \Rightarrow (x - y)^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy > 0 \Rightarrow t = x^2 + y^2 - 4 > 0,\quad xy = 2.$$

Stoga je

$$L = \frac{(t+2)(t+8)}{t} = t + \frac{16}{t} + 10, \quad t > 0.$$

Ako primenimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo

$$t + \frac{16}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{16}{t}} = 8,$$

pa dobijamo da je $L \geq 18$. Prema tome, $\max C = 18$, a ovo je ispunjeno ako je $t = \dfrac{16}{t}$, tj. $t = 4$ $(t > 0)$, odnosno ako je $x^2 + y^2 - 4 = 4$. S obzirom na uslov $xy = 2$ dobijamo sistem jednačina $x^2 + y^2 = 8$, $xy = 2$ i njegova rešenja su

$$(1 \pm \sqrt{3},\ -1 \pm \sqrt{3}), \quad (-1 \pm \sqrt{3},\ 1 \pm \sqrt{3})$$

za koje važi znak jednakosti u zadatoj nejednakosti.

286. Rešenje. Rešavanjem sistema

$$4x + y + 2z = 4, \quad 3x + 6y - 2z = 6$$

po x i z dobijamo

$$x = \frac{10}{7} - y, \quad z = \frac{3}{2}y - \frac{6}{7}. \tag{1}$$

Da bi x i z bili nenegativni, y mora da ispunjava uslov

$$\frac{10}{7} - y \geq 0, \quad \frac{3}{2}y - \frac{6}{7} \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{7} \leq y \leq \frac{10}{7}.$$

Zamenom x i z iz (1) u izraz za K imamo

$$\begin{aligned} K &= 5x - 6y + 7z = 5\left(\frac{10}{7} - y\right) - 6y + 7\left(\frac{3}{2}y - \frac{6}{7}\right) \\ &= \frac{8}{7} - \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $y \in [4/7, 10/7]$, minimalno K se dobija za maksimalno y, i obratno, tj.

$$K_{\min} = \frac{8}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7} = \frac{3}{7}, \quad K_{\max} = \frac{8}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{7}.$$

287. Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_{100} > 0$. Ako je $C_1 \geq 100$, tada je $C_1 + C_2 + C_3 > 100$, i tvrđenje je dokazano. Neka je $C_1 < 100$. Tada je $100 - C_1 > 0$, $100 - C_2 > 0$, $C_1 - C_3 \geq 0$, $C_2 - C_3 \geq 0$, pa imamo

$$\begin{aligned} 100(C_1 + C_2 + C_2) &\geq 100(C_1 + C_2 + C_3) - (100 - C_1)(C_1 - C_3) - (100 - C_2)(C_2 - C_3) \\ &= C_1^2 + C_2^2 + C_3(300 - C_1 - C_2) \\ &> C_1^2 + C_2^2 + C_3(C_3 + C_4 + \cdots + C_{100}) \\ &\qquad\qquad (\text{jer je } 300 - C_1 - C_2 > C_3 + \cdots + C_{100}) \\ &= C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_3C_4 + C_3C_5 + \cdots + C_3C_{100} \\ &\geq C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_5^2 + \cdots + C_{100}^2 \\ &> 10\,000. \end{aligned}$$

Odavde je definitivno $C_1 + C_2 + C_3 > 100$, što je trebalo dokazati.

288. Dokaz. Iz nejednakosti $(x - y)^2 \geq 0$ za $x, y > 0$ izlazi elementarna nejednakost

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \qquad (x, y > 0),$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $x = y$. Primenom ove nejednakosti imamo

(1) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b},$$

(2) $$\frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{(a+b)+c},$$

(3) $$\frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{(a+b+c)+d}.$$

Sabiranjem (1), (2) i (3) dobijamo zadatu nejednakost.

Znak jednakosti u zadatoj nejednakosti važi ako znak jednakosti važi i u (1), (2) i (3), tj. ako je $a = b$, $c = a + b$, $d = a + b + c$, ili $b = a$, $c = 2a$, $d = 4a$.

289. Dokaz. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, za izraz na desnoj strani pod kubnim korenom važi sledeća procena:

$$\begin{aligned}\frac{abc + abd + acd + bcd}{4} &= \frac{ab\,(c+d) + cd\,(a+b)}{4}\\ &\leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (c+d) + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 (a+b)\right)\\ &= \frac{1}{16}\,(a+b)(c+d)(a+b+c+d)\\ &\leq \frac{1}{16}\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 (a+b+c+d) = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.\end{aligned}$$

Prema tome, važi nejednakost

(1) $$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}.$$

Ostaje da se dokaže da je ispunjena nejednakost (odnos između aritmetičke i kvadratne sredine)

(2) $$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

Kvadriranjem leve i desne strane dobijamo $(a+b+c+d)^2 \leq 4\,(a^2+b^2+c^2+d^2)$, tj.

$$4\,(a^2+b^2+c^2+d^2) - (a+b+c+d)^2 \geq 0.$$

Sređivanjem ove nejednakosti nalazimo

$$3\,(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd \geq 0,$$

odakle je

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0.$$

Dobijena nejednakost je tačna, pa je tačna i (2). Na osnovu (1) i (2) dobijamo

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}},$$

što je trebalo dokazati. Znak jednakosti važi ako je $a = b = c = d$.

NAPOMENA. Data nejednakost važi i kada nije uvedeno ograničenje da su a, b, c i d pozitivni brojevi.

290. Rešenje. Označimo dati izraz sa S. Smenom $b + 2c = A$, $c + 2a = B$, $a + 2b = C$, za koju je

$$a = \frac{1}{9}(-2A + 4B + C), \quad b = \frac{1}{9}(A - 2B + 4C), \quad C = \frac{1}{9}(4A + B - 2C),$$

dati izraz postaje

$$S = \frac{1}{9}\left(\frac{C}{A} + \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + 4\frac{B}{A} + 4\frac{C}{B} + 4\frac{A}{C}\right) - \frac{6}{9}.$$

Ako $4\frac{B}{A}$ napišemo u obliku $\frac{B}{A} + \frac{B}{A} + \frac{B}{A} + \frac{B}{A}$, i slično $4\frac{C}{B}$ i $4\frac{A}{C}$, u zagradi imamo 15 sabiraka. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, dobijamo

$$S \geq \frac{15}{9}\sqrt[15]{\frac{C}{A} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^4 \cdot \left(\frac{C}{B}\right)^4 \cdot \left(\frac{A}{C}\right)^4} - \frac{6}{9} = 1.$$

Dakle, najmanja vrednost izraza je 1 i dobija se za $a = b = c$.

291. Dokaz 1. Ako je $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ i $a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, zadata nejednakost je trivijalno zadovoljena. Neka je $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Posmatrajmo funkciju $t \mapsto f(t)$, definisanu sa

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i t - b_i)^2 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

tj.

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Najmanja vrednost ovog kvadratnog trinoma je

$$\min f(t) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Pošto je $f(t) \geq 0$ za svako $t \in \mathbb{R}$, sleduje da je $\min f(t) \geq 0$, a odavde odmah dobijamo zadatu nejednakost (1).

Ako u zadatoj nejednakosti (1) važi znak jednakosti, to znači da je $\min f(t) = f(t_0) = 0$ za neko $t_0 \in \mathbb{R}$. Prema tome, imamo

$$f(t_0) = \sum_{i=1}^{n}(a_i t_0 - b_i)^2 = 0 \Rightarrow a_i t_0 - b_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \frac{b_i}{a_i} = t_0 = \text{const}.$$

Ako je $b_i/a_i = k = \text{const}$, zamenom $b_i = k a_i$ u (1) neposredno sleduje da važi znak jednakosti u (1).

Dokaz 2. Polazeći od Lagranžovog[1] identiteta

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \ge 0$$

koji važi za proizvoljne realne brojeve, dobijamo (1). Identitet se dokazuje matematičkom indukcijom po n.

NAPOMENA. U matematičkoj literaturi nejednakost (1) poznata je kao Košijeva[2] ili Koši–Švarcova[3] nejednakost.

292. Dokaz. 1° Primenom Košijeve nejednakosti imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\cdot\sqrt{y_i}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{y_i})^2\right)$$

tj.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \Rightarrow 1^\circ.$$

Iz Košijeve nejednakosti zaključujemo da znak jednakosti u 1° važi ako i samo ako je $\dfrac{x/\sqrt{y_i}}{\sqrt{y_i}} = \text{const}$, tj. $\dfrac{x_i}{y_i} = \text{const} \quad (i = 1,\dots,n)$.

2° Nejednakost je ekvivalentna sa $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$, koja je direktna posledica nejednakosti 1° ako stavimo $x_i = a_i$, $y_i = n$ $(i = 1,\dots,n)$. Znak jednakosti važi ako je $a_i = \text{const} \quad (i = 1,\dots,n)$.

3° Označimo sa L izraz na levoj strani zadate nejednakosti. Tada je na osnovu nejednakosti 1°

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{sa_i - a_i^2} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(sa_i - a_i^2)},$$

pa je

$$L \ge \frac{s^2}{s^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2}. \tag{1}$$

Primenom jednakosti 2° imamo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} \ge \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{s^2}{n} \Leftrightarrow s^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le s^2 - \frac{s^2}{n},$$

[1]Lagranž (LAGRANGE JOSEPH LOUIS (1736–1813)), veliki francuski matematičar.
[2]Koši (CAUCHY AUGUSTIN LOUIS (1789–1857)), veliki francuski matematičar.
[3]Švarc (SCHWARZ HERMANN AMANDUS (1843–1921)), poznati nemački matematičar.

a poslednja nejednakost je ekvivalentna sa

$$\text{(2)} \qquad \frac{s^2}{s^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geq \frac{n}{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

Iz (1) i (2) dobijamo traženu nejednakost. Znak jednakosti važi ako je $a_i = \text{const} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

NAPOMENA. 2° se naziva nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine.

293. Dokaz. U dokazu ovih nejednakosti primenjujemo specijalan slučaj nejednakosti[1]

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}, \quad x_i \in \mathbb{R},\ y_i > 0\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tj.

$$\text{(1)} \qquad \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ y_1, y_2, y_3 > 0,$$

pri čemu znak jednakosti važi ako je $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3}$.

Označimo sa L izraze na levim stranama zadatih nejednakosti.

1° Primenom (1) imamo

$$\begin{aligned} L &= \frac{a^2}{a(b + \lambda c)} + \frac{b^2}{b(c + \lambda a)} + \frac{c^2}{c(a + \lambda b)} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a(b + \lambda c) + b(c + \lambda a) + c(a + \lambda b)} \\ &= \frac{(a + b + c)^2}{(1 + \lambda)(ab + bc + ca)} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{(1 + \lambda)(ab + bc + ca)} = \frac{3}{1 + \lambda}, \end{aligned}$$

pošto je

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Znak jednakosti važi ako je $a = b = c$.

2° Na osnovu (1) je

$$\text{(2)} \qquad L = \frac{(a^2)^2}{b + c} + \frac{(b^2)^2}{c + a} + \frac{(c^2)^2}{a + b} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a + b + c)}.$$

Ako upotrebimo nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2,$$

imamo

$$\text{(3)} \qquad \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a + b + c} \geq \frac{1}{9}(a + b + c)^3.$$

Iz (2) i (3) dobijamo traženu nejednakost. Znak jednakosti važi ako je $a = b = c$.

---

[1] Videti predhodni zadatak.

3° Koristeći se nejednakošću (1) imamo

$$L=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\geq\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

U poslednjoj nejednakosti primenili smo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Znak jednakosti u 3° važi ako je $a=b=c$.

4° Imamo

$$L=\left(\frac{1^2}{1-a^2}+\frac{1^2}{1-b^2}+\frac{1^2}{1-c^2}\right)+\left(\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{b^2}{1-b^2}+\frac{c^2}{1-c^2}\right)$$
$$\geq\frac{9}{3-(a^2+b^2+c^2)}+\frac{(a+b+c)^2}{3-(a^2+b^2+c^2)}.$$

Nejednakost (1) smo primenili na prvi i drugi sabirak u izrazu L. Dakle,

$$L\geq\frac{9+(a+b+c)^2}{3-(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{9+(a+b+c)^2}{3-\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{9+1^2}{3-\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{15}{4}.$$

Primetimo da je poslednja nejednakost

$$\frac{1}{3-(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{1}{3-\frac{1}{3}(a+b+c)^2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

Znak jednakosti važi ako je $a=b=c=1/3$.

294. Dokaz. Stavimo $\dfrac{1}{x_i+1}=y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Tada je $0<y_i<1$,

$$(1)\qquad y_1+y_2+\cdots+y_n\leq 1,$$

$x_i=\dfrac{1-y_i}{y_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Ako primenimo uslov (1) i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo

$$x_1x_2\cdots x_n=\frac{1-y_1}{y_1}\cdot\frac{1-y_2}{y_2}\cdots\frac{1-y_n}{y_n}$$
$$\geq\frac{y_2+y_3+\cdots+y_n}{y_1}\cdot\frac{y_1+y_3+\cdots+y_n}{y_2}\cdots\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}}{y_n}$$
$$=(n-1)\frac{1}{y_1}\sqrt[n-1]{y_2\cdot y_3\cdots y_n}\cdots(n-1)\frac{1}{y_n}\sqrt[n-1]{y_1\cdot y_2\cdots y_{n-1}}$$
$$=(n-1)^n\frac{\sqrt[n-1]{(y_1\cdot y_2\cdots y_n)^{n-1}}}{y_1\cdot y_2\cdots y_n}=(n-1)^n.$$

Znak jednakosti važi ako je $y_1=y_2=\cdots=y_n$ i $y_1+y_2+\cdots+y_n=1$, tj. kada je $y_i=1/n$ odnosno $x_i=n-1$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

295. Dokaz. S obzirom da je $a+b+c=1$ i $a>a^2$, jer je $0<a<1$, dobijamo

$$a+\frac{1}{a}=a+\frac{a+b+c}{a}>a^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1.$$

Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$a^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1>4\sqrt[4]{a^2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot 1}=4\sqrt[4]{bc},$$

pri čemu u poslednjoj nejednakosti ne može da stoji znak jednakosti jer je $a<1$. Prema tome, došli smo do nejednakosti $a+\frac{1}{a}>\sqrt[4]{bc}$. Važe i analogne nejednakosti $b+\frac{1}{b}>\sqrt[4]{ca}$ i $c+\frac{1}{c}>\sqrt[4]{ab}$.

Množenjem ovih nejednakosti dobijamo

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)>4\sqrt[4]{bc}\cdot 4\sqrt[4]{ca}\cdot 4\sqrt[4]{ab}=64\sqrt{abc},$$

a to je zadata nejednakost.

296. Dokaz. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine izlazi

$$\begin{aligned}3=(a^2+3b^2)+(a^2+3c^2)+a^2&\geq 2\sqrt{a^2\cdot 3b^2}+2\sqrt{a^2\cdot 3c^2}+a^2\\&=2\sqrt{3}\,a(b+c)+1-b^2-c^2.\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo nejednakost $2\sqrt{3}\,a(b+c)\leq 2+(b^2+c^2)$. Upotrebom elementarne nejednakosti $2+b^2+c^2<2+(b+c)^2$ imamo

$$2\sqrt{3}\,a(b+c)<2+(b+c)^2\ \Rightarrow\ 2\sqrt{3}\,a<\frac{2}{b+c}+b+c.$$

Analogno dobijamo

$$2\sqrt{3}\,b<\frac{2}{c+a}+c+a,\qquad 2\sqrt{3}\,c<\frac{2}{a+b}+a+b.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti nalazimo

$$2\sqrt{3}\,(a+b+c)<\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+2(a+b+c),$$

tj.

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>(\sqrt{3}-1)(a+b+c).$$

297. Dokaz. Označimo sa L izraz na levoj strani zadate nejednakosti. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\begin{aligned}L&=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1\\&\geq(a+b+c)\cdot 3\,\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}-1=2\,\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-1\\&\geq 2\,\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}}-1\\&=2\,\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+2=2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right),\end{aligned}$$

što je trebalo dokazati. Znak jednakosti važi ako je $a = b = c$.

298. Dokaz. Primetimo najpre jednu interesantnu osobinu ove nejednakosti: Ako je nejednakost tačna za $x, y, z > 0$, ona je tačna ako umesto x, y, z uzmemo kx, ky, kz $(k > 0)$. Zbog toga je dovoljno dokazati nejednakost za one x, y, z za koje je, na primer, $x + y + z = 1$. U tom slučaju za prvi sabirak u datoj nejednakosti imamo

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned}\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} &= \frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{4x+1}{3x^2-2x+1}\\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,(4x+1) = \frac{4}{3} + 4x,\end{aligned}$$

jer je

$$3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3x^2-2x+1} \leq \frac{3}{2},$$

pri čemu jednakost važi za $x = 1/3$.

Analogno dobijenom rezultatu imamo

$$\text{(2)}\qquad \frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2} \leq \frac{4}{3} + 4y, \qquad \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \leq \frac{4}{3} + 4z.$$

Sabiranjem nejednakosti (1) i (2) dobijamo

$$L \leq 3\cdot\frac{4}{3} + 4(\underbrace{x+y+z}_{=1}) = 4 + 4\cdot 1 = 8.$$

Znak jednakosti važi ako je $x = y = z = 1/3$, odnosno ako je $x = y = z$.

299. Dokaz. Označimo sa L izraz na levoj strani zadate nejednakosti. Kako je

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^3 - a_2^3}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2} + \frac{a_2^3 - a_3^3}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \cdots + \frac{a_n^3 - a_1^3}{a_n^2 + a_na_1 + a_1^2}\\ &\qquad = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_1) = 0,\end{aligned}$$

izlazi

$$L = \frac{a_2^3}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2} + \frac{a_3^3}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \cdots + \frac{a_1^3}{a_n^2 + a_na_1 + a_1^2},$$

pa je

$$\text{(1)}\qquad 2L = \frac{a_1^3 + a_2^3}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2} + \frac{a_2^3 + a_3^3}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \cdots + \frac{a_n^3 + a_1^3}{a_n^2 + a_na_1 + a_1^2}.$$

Ako primenimo nejednakost

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}\,(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (x, y > 0),$$

u kojoj znak jednakosti važi ako je $x = y$, na svaki sabirak desne strane izraza (1), imamo

$$2L \geq \frac{1}{3}\,(a_1 + a_2) + \frac{1}{3}\,(a_2 + a_3) + \cdots + \frac{1}{3}\,(a_n + a_1),$$

tj.

$$L \geq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

300. Dokaz. Pretpostavimo da za uglove α, β, γ oštrouglog trougla važe nejednakosti

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma, \quad \alpha < 90^\circ.$$

Neka važi suprotno tvrđenje, tj. da trougao ne sadrži dva ugla čija je razlika manja od 30°, odnosno da je

$$\alpha - \beta \geq 30^\circ, \quad \beta - \gamma \geq 30^\circ.$$

Ako nejednakosti

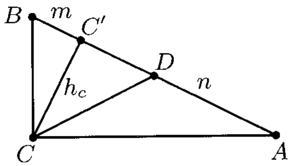
$$2\alpha - 2\beta \geq 60^\circ, \quad \beta - \gamma \geq 30^\circ$$

saberemo sa jednakošću $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dobijamo

$$3\alpha \geq 270^\circ \Rightarrow \alpha \geq 90^\circ,$$

a to je suprotno pretpostavci da je $\alpha < 90^\circ$. Prema tome, tačan je iskaz dat u zadatku.

301. Rešenje. Posmatrajmo pravougli trougao ABC čija je hipotenuza $AB = c$. Hipotenuzina visina je $CC' = h_c$. Tačka D je sredina hipotenuze AB. S obzirom da je D centar opisanog kruga, njegov poluprečnik je $R = c/2 = CD$. U pravouglom trouglu $DC'C$ stranica CD je hipotenuza, pa važi nejednakost $CC' \leq CD$, tj. $h_c \leq c/2$.



Tačkom C' hipotenuza je podeljena na dva odsečka m i n, za koje je $m+n = c$. Kako je na osnovu Euklidovog stava $h_c = \sqrt{mn}$, poslednju nejednakost možemo prikazati u obliku $\sqrt{mn} \leq (m+n)/2$.

Za $m = 1/\alpha$ i $n = 1/\beta$ ova nejednakost se svodi na

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} \leq \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Stavljajući m umesto α i n umesto β, dobijamo traženu nejednakost

$$\sqrt{mn} \geq \frac{2mn}{m+n}.$$

Napomena. Razlomak $\frac{2mn}{m+n}$ je harmonijska sredina pozitivnih brojeva m i n, dok su $\sqrt{mn}$ i $\frac{m+n}{2}$ redom njihova geometrijska i aritmetička sredina. Kao što se vidi, važe nejednakosti

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn} \geq \frac{2mn}{m+n}.$$

302. Dokaz. Neka je $a \geq b \geq c$. Pošto naspram veće stranice leži veći ugao, važe nejednakosti $A \geq B \geq C$.

Množenjem nejednakosti $A \geq B$, $A \geq C$, $B \geq C$ redom sa $a-b$, $a-c$, $b-c$, dobijamo

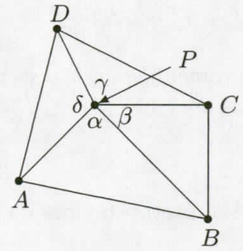
$$Aa - Ab \geq Ba - Bb, \quad Aa - Ac \geq Ca - Cc, \quad Bb - Bc \geq Cb - Cc.$$

Sabiranjem levih i desnih strana ovih nejednakosti, imamo

$$2\,Aa + Bb - Ab - Ac - Bc \geq Ba + Ca + Cb - Bb - 2\,Cc,$$

odakle je

$$Aa + Bb + Cc \geq \frac{1}{2}\,(Ab + Ba + Ac + Ca + Bc + Cb).$$



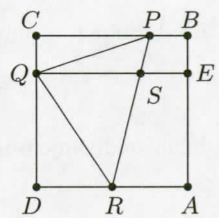
303. Dokaz. Na slici je prikazan četvorougao $ABCD$. Tačka P je spojena dužima sa temenima četvorougla, tako da je četvorougao podeljen na četiri trougla. Za njegovu površinu važi:

$$\begin{aligned} \operatorname{area} ABCD &= \frac{1}{2}\,(AP \cdot BP \sin\alpha + BP \cdot CP \sin\beta + CP \cdot DP \sin\gamma + DP \cdot AP \sin\delta) \\ &\leq \frac{1}{2}\,(AP \cdot BP + BP \cdot CP + CP \cdot DP + DP \cdot AP). \end{aligned}$$

Iz nejednakosti $(a-b)^2 \geq 0$ izlazi $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, pa se gornja nejednakost svodi na

$$\begin{aligned} \operatorname{area} ABCD &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{AP^2+BP^2}{2} + \frac{BP^2+CP^2}{2} + \frac{CP^2+DP^2}{2} + \frac{DP^2+AP^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(AP^2+BP^2+CP^2+DP^2), \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati. Znak jednakosti važi ako je $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ i $AP = BP = CP = DP$, tj. ako je četvorougao kvadrat.

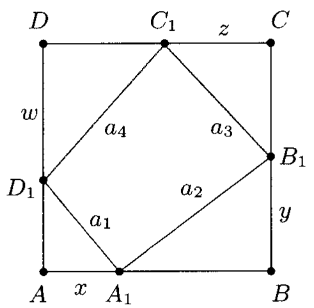


304. Dokaz. Konstruišimo iz tačke P duž QE koja je normalna na stranicu AB. Ova duž deli trougao PQR na dva trougla, QRS i PQS, koji imaju zajedničku stranicu QS. Ako ovu stranicu uzmemo za osnovice ova dva trougla, odgovarajuće visine su BE i AE. Dakle,

$$\begin{aligned} \operatorname{area} PQR &= \operatorname{area} QRS + \operatorname{area} PQS = \frac{1}{2}\,QS \cdot AE + \frac{1}{2}\,QS \cdot BE \\ &= \frac{1}{2}\,QS \cdot (AE + BE) = \frac{1}{2}\,QS, \end{aligned}$$

jer je stranica kvadrata 1. Kako je $QS \leq 1$, izlazi da je $\operatorname{area} PQR \leq \dfrac{1}{2}$.

305. Dokaz. Na slici je prikazan jedinični kvadrat $ABCD$ u koji je upisan četvorougao $A_1B_1C_1D_1$, takav da je $AA_1 = x$, $BB_1 = y$, $CC_1 = z$, $DD_1 = w$. Stranice tog četvorougla su a_1, a_2, a_3, a_4. Primenom Pitagorine teoreme imamo



$$a_1^2 = x^2 + (1-w)^2, \quad a_2^2 = y^2 + (1-x)^2,$$
$$a_3^2 = z^2 + (1-y)^2, \quad a_4^2 = w^2 + (1-z)^2.$$

Sabiranjem levih i desnih strana ovih jednakosti dobijamo

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = x^2 + (1-x)^2 + y^2 + (1-y)^2 + z^2 + (1-z)^2 + w^2 + (1-w)^2.$$

Promenljive x, y, z, w pripadaju segmentu $[0,1]$. Kako, na primer, za $x \in [0,1]$ važi $1/2 \le x^2 + (1-x)^2 \le 1$, nalazimo

$$(1) \qquad 2 \le a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \le 4.$$

Ako pretpostavimo da je $a_i < \sqrt{2}/2$ za svako $i = 1, 2, 3, 4$. Tada je

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 < 2,$$

što je u kontradikciji sa relacijom (1). Dakle, postoji bar jedna stranica četvorougla koja je $\ge \sqrt{2}/2$.

306. Dokaz. Kako je $\dfrac{a}{c} < 1$ i $\dfrac{b}{c} < 1$, tada je za $\alpha > 2$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^\alpha < \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ i } \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha < \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Sabiranjem nejednakosti dobijamo

$$\left(\frac{a}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \qquad (a^2 + b^2 = c^2),$$

tj. nejednakost $a^\alpha + b^\alpha < c^\alpha$.

Pošto je $\dfrac{c}{a} > 1$ i $\dfrac{c}{b} > 1$, tada je

$$\left(\frac{c}{a}\right)^\alpha > \left(\frac{c}{a}\right)^2 \text{ i } \left(\frac{c}{b}\right)^\alpha > \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Sabiranjem nejednakosti dobijamo

$$\left(\frac{c}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{b}\right)^\alpha > \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

odakle sređivanjem nalazimo

$$c^\alpha \frac{a^\alpha + b^\alpha}{a^\alpha b^\alpha} > c^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^4}{a^2 b^2} \qquad (a^2 + b^2 = c^2),$$

odnosno imamo

$$a^\alpha + b^\alpha > c^2 \left(\frac{ab}{c}\right)^{\alpha - 2}.$$

307. Dokaz. Uvedimo oznake $\sphericalangle A = A$, $\sphericalangle B = B$, $\sphericalangle C = C$. Vodeći računa da je $B + C = \pi/3$, imamo

$$\begin{aligned}
4 \le \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} &\Leftrightarrow 4\sin B \sin C \le \sin B + \sin C \\
&\Leftrightarrow 2\big(\cos(B-C) - \cos(B+C)\big) \le 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\left(\cos(B-C) - \cos\frac{\pi}{3}\right) \le 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{B-C}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\cos(B-C) - 1 \le 2\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) - 1 \le \cos\frac{B-C}{2} \\
&\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{B-C}{2} \le \cos\frac{B-C}{2} + 3.
\end{aligned}$$

Poslednja nejednakost je tačna, što sleduje iz

$$4\cos^2\frac{B-C}{2} = \cos^2\frac{B-C}{2} + 3\cos^2\frac{B-C}{2} \le \cos\frac{B-C}{2} + 3.$$

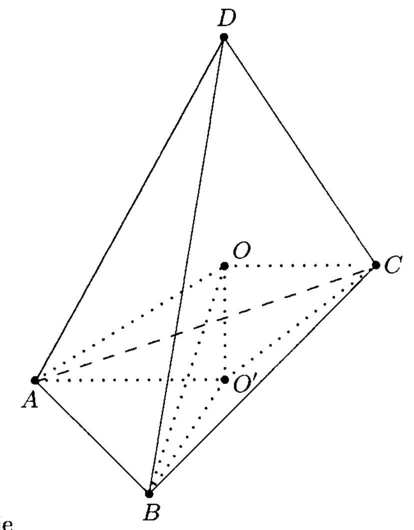
Znak jednakosti važi ako i samo ako je $\cos\dfrac{B-C}{2} = 1$, tj. $B = C$. Kako je $B + C = \pi/3$, imamo $B = C = \pi/6$. Dalje je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \le 4 + \frac{49}{16}\cdot\frac{1}{\sin B\sin C} \\
&\Leftrightarrow \sin B + \sin C \le 4\sin B\sin C + \frac{49}{16} \\
&\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\big(\cos(B-C) - \cos(B+C)\big) + \frac{49}{16} \\
&\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\left(\cos(B-C) - \cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{49}{16} \\
&\Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\cos(B-C) - 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{49}{16} \\
&\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} \le 2\left(2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) + \frac{33}{16} \\
&\Leftrightarrow 0 \le \left(2\cos\frac{B-C}{2} - \frac{1}{4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $2\cos\dfrac{B-C}{2} - \dfrac{1}{4} = 0$. Pošto je $B + C = \pi/3$, dobijamo

$$\cos\frac{B - \left(\frac{\pi}{3} - B\right)}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow B = \frac{\pi}{6} + \arccos\frac{1}{8}$$

i tada je $C = \dfrac{\pi}{6} - \arccos\dfrac{1}{8}$. Kako je $\cos\dfrac{C-B}{2} = \cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{1}{8}$, dobijamo drugu mogućnost $B = \dfrac{\pi}{6} - \arccos\dfrac{1}{8}$, $C = \dfrac{\pi}{6} + \arccos\dfrac{1}{8}$. Prema tome, znak jednakosti važi ako je $B = \dfrac{\pi}{6} \pm \arccos\dfrac{1}{8}$, $C = \dfrac{\pi}{6} \mp \arccos\dfrac{1}{8}$.



308. Dokaz. Označimo sa O centar opisane sfere i sa O' njenu ortogonalnu projekciju na ravan bočne strane ABC. Tada su pravougli trouglovi AOO', BOO', COO' podudarni ($OA = OB = OC = R$, pri čemu je OO' zajednička stranica), pa je $AO' = BO' = CO'$. Dakle, O' je centar opisanog kruga oko trougla ABC. Tada je $OO' = \sqrt{R^2 - r_4^2}$, gde je r_4 poluprečnik opisanog kruga oko trougla ABC. Analogno ovome dobijamo da je rastojanje tačke O od bočnih strana BCD, CAD, ABD jednako redom

$$\sqrt{R^2 - r_1^2},\ \sqrt{R^2 - r_2^2},\ \sqrt{R^2 - r_3^2},$$

gde su r_1, r_2, r_3 poluprečnici krugova opisanih oko trouglova BCD, CAD, ABD.

Ako sa V označimo zapreminu tetraedra, tada je

$$V = \frac{1}{3} P_1\sqrt{R^2 - r_1^2} + \frac{1}{3} P_2\sqrt{R^2 - r_2^2} + \frac{1}{3} P_3\sqrt{R^2 - r_3^2} + \frac{1}{3} P_4\sqrt{R^2 - r_4^2},$$

gde su P_1, P_2, P_3, P_4 redom površine troulova BCD, CAD, ABD, ABC.

Pošto je

$$r_1 = \frac{ab_1c_1}{4P_1}, \quad r_2 = \frac{a_1bc_1}{4P_2}, \quad r_3 = \frac{a_1b_1c}{4P_3}, \quad r_4 = \frac{abc}{4P_4},$$

dobijamo

$$P_1\sqrt{R^2 - \left(\frac{ab_1c_1}{4P_1}\right)^2} + P_2\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_1bc_1}{4P_2}\right)^2} + P_3\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_1b_1c}{4P_3}\right)^2} + P_4\sqrt{R^2 - \left(\frac{abc}{4P_4}\right)^2} = 3V,$$

tj.

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\left(P_1 + \frac{ab_1c_1}{4R}\right)^{1/2}\left(P_1 - \frac{ab_1c_1}{4R}\right)^{1/2} + \left(P_2 + \frac{a_1bc_1}{4R}\right)^{1/2}\left(P_2 - \frac{a_1bc_1}{4R}\right)^{1/2} \\ &+ \left(P_3 + \frac{a_1b_1c}{4R}\right)^{1/2}\left(P_3 - \frac{a_1b_1c}{4R}\right)^{1/2} + \left(P_4 + \frac{abc}{4R}\right)^{1/2}\left(P_4 - \frac{abc}{4R}\right)^{1/2} = \frac{3V}{R}.\end{aligned}$$

Ako na jednakost (1) primenimo Košijevu nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$

dobijamo

$$\left(\frac{3V}{R}\right)^2 \le \left(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \frac{ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + abc}{4R}\right)\left(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - \frac{ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + abc}{4R}\right).$$

Pošto je $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P$, sleduje

$$\left(\frac{3V}{R}\right)^2 \leq P^2 - \left(\frac{ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + abc}{4R}\right)^2,$$

tj.

$$ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + abc \leq 4R\sqrt{P^2 - \left(\frac{3V}{R}\right)^2}.$$

Kako je $3V = r \cdot P$, dobijamo traženu nejednakost

$$ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + abc \leq 4P\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Znak jednakosti važi onda kada važi znak jednakosti u Košijevoj nejednakosti, tj. kada je

$$\frac{P_1 + \dfrac{ab_1c_1}{4R}}{P_1 - \dfrac{ab_1c_1}{4R}} = \frac{P_2 + \dfrac{a_1bc_1}{4R}}{P_2 - \dfrac{a_1bc_1}{4R}} = \frac{P_3 + \dfrac{a_1b_1c}{4R}}{P_3 - \dfrac{a_1b_1c}{4R}} = \frac{P_4 + \dfrac{abc}{4R}}{P_4 - \dfrac{abc}{4R}}.$$

O Denkovom problemu

F. Denk je postavio sledeći problem:

Neka su $A_\nu B_\nu$ luci direktne orijentacije istog kruga, kojima odgovaraju centralni uglovi veličine $\pi/3$, i neka je C_1 sredina tetive B_1A_2, C_2 sredina tetive B_2A_3, C_3 sredina tetive B_3A_1. Dokazati da je $C_1C_2C_3$ jednakostraničan trougao.

U knjizi *Uvođenje mladih u naučni rad* II, serije Matematička biblioteka 19 (1961), D. Đ. Tošić i D. Ž. Đoković, u članku *Denkov problem i neke njegove generalizacije*, jednostavno su rešili ovaj problem primenom kompleksnih brojeva.

Ovaj problem je ranije rešen primenom vektorske algebre, ali je dokaz bio veoma komplikovan. U pomenutom članku, inspirisani efikasnom primenom kompleksnih brojeva, autori su dali i dokazali sledeća proširenja Denkovog problema:

1° Isti tekst kao gore navedeni Denkov problem, pri čemu luci A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 pripadaju različitim koncentričnim krugovima.

2° Neka su $A_\nu B_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ luci direktne orijentacije istog kruga kojima odgovaraju centralni uglovi $\pi/2$. Ako su C_1, C_2, C_3, C_4 redom sredine duži B_1A_2, B_2A_3, B_3A_4, B_4A_1, dokazati da je četvorougao $C_1C_2C_3C_4$ direktno orijentisan i ima normalne i jednake dijagonale.

Preporučuje se čitaocima da pokušaju da nađu još neko proširenje Denkovog problema.

IX. TRIGONOMETRIJA. PRIMENA TRIGONOMETRIJE

309. Dokaz. Jednakost $\sin 2(a+c) = n \sin 2b$, rešimo po n, tj.

$$n = \frac{\sin 2(a+c)}{\sin 2b},$$

odakle je

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\dfrac{\sin 2(a+c)}{\sin 2b} + 1}{\dfrac{\sin 2(a+c)}{\sin 2b} - 1} = \frac{\sin 2(a+c) + \sin 2b}{\sin 2(a+c) - \sin 2b}.$$

Primenom formula

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

dobijamo

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{2\sin(a+b+c)\cos(a-b+c)}{2\sin(a-b+c)\cos(a+b+c)} = \frac{\operatorname{tg}(a+b+c)}{\operatorname{tg}(a-b+c)}.$$

Odavde je

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c),$$

što je trebalo dokazati.

310. Rešenje. Koristeći se formulom $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, data suma se može prikazati u obliku

$$S_n = \frac{1}{2}(n + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx).$$

Sumu

$$\sigma_n = \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx \tag{1}$$

možemo dobiti na sledeći način: Pomnožimo jednačinu (1) sa $\sin x$. Imamo

$$\sigma_n \cdot \sin x = \cos 2x \sin x + \cos 4x \sin x + \cdots + \cos 2nx \sin x.$$

Pretvaranjem proizvoda kosinusa i sinusa u proizvod, nalazimo

$$\begin{aligned}\sigma_n \sin x &= \frac{1}{2}\big(\sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \cdots + \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\sin(2n+1)x - \sin x\big),\end{aligned}$$

odakle je

$$\sigma_n = \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x}.$$

Na osnovu toga dobijamo

$$S_n = \frac{\sin(2n+1)x + (2n-1)\sin x}{4\sin x},$$

pri čemu je $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Za $x = k\pi$ zbir S_n je jednak n.

311. Rešenje. Kako je $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{\cos 3t}{\cos t} - \frac{\cos 6t}{\cos 2t} &= \frac{4\cos^3 t - 3\cos t}{\cos t} - \frac{4\cos^3 2t - 3\cos 2t}{\cos 2t} \\ &= 4\cos^2 t - 4\cos^2 2t = 2(1+\cos 2t) - 2(1+\cos 4t) \\ &= 2(\cos 2t - \cos 4t),\end{aligned}$$

a to je desna strana identiteta.

Ovde isključujemo slučaj kada je $\cos t = 0$ ili $\cos 2t = 0$, tj. kada je

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ili} \quad t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Na osnovu dokazanog identiteta jednačina

$$\frac{\cos 3t}{\cos t} = \frac{\cos 6t}{\cos 2t}$$

svodi se na jednačinu

$$\cos 2t - \cos 4t = 0, \quad \text{tj.} \quad \sin t \sin 3t = 0,$$

iz koje je

a) $\sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$, ili b) $\sin 3t = m\pi \Rightarrow t = m\pi/3$, gde su k i m celi brojevi.

Primetimo da se među rešenjima pod a) i b) ne nalaze isključene vrednosti, za koje identitet ne važi. Pored toga, rešenje pod b) obuhvata rešenje pod a) za $m = 3k$, što znači da se rešenje jednačine može dati samo pod b).

312. Rešenje. Koristeći se identitetima

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t, \quad \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t,$$
$$2\sin^2 t = 1 - \cos 2t, \quad 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin 3t}{\sin t}\right)^3 + \left(\frac{\cos 3t}{\cos t}\right)^3 &= (3 - 4\sin^2 t)^3 + (4\cos^2 t - 3)^3 \\ &= (2\cos 2t + 1)^3 + (2\cos 2t - 1)^3 = 16\cos^3 2t + 12\cos 2t,\end{aligned}$$

pri čemu smo pretpostavili da je $\sin t \neq 0$ i $\cos t \neq 0$, tj. da je $t \neq k\pi/2$, gde je k ceo broj.

Iz jednakosti $\cos 6t = 4\cos^3 2t - 3\cos 2t$ nalazimo

$$16\cos^3 2t = 4\cos 6t + 12\cos 2t,$$

te je

$$16\cos^3 2t + 12\cos 2t = 4\cos 6t + 24\cos 2t.$$

Prema tome, jednakost (1) važi za sve vrednosti t osim za $t = k\pi/2$, gde je k ceo broj.

Za rešavanje jednačine

$$\cos 6t + 6\cos 2t = 0 \tag{2}$$

možemo koristiti ekvivalentnu jednačinu

$$4\cos 6t + 24\cos 2t = 0,$$

tj. na osnovu (1)

$$\left(\frac{\sin 3t}{\sin t}\right)^3 + \left(\frac{\cos 3t}{\cos t}\right)^3 = 0.$$

Iz ove jednačine izlazi $\dfrac{\sin 3t}{\sin t} + \dfrac{\cos 3t}{\cos t} = 0$, odakle je

$$\sin 3t \cos t + \cos 3t\ \sin t = 0 \Rightarrow \sin 4t = 0,$$

pri čemu ponovo pretpostavljamo da je $\sin t \neq 0$, tj. $t \neq k\pi/2$.

Iz jednačine $\sin 4t = 0$ dobijamo $t = m\pi/4$ ($m \in \mathbb{Z}$), međutim, kako su vrednosti $t = k\pi/2$ isključene, ostaje $t = m\pi/4$, gde je m neparan broj.

Prema tome, $t = (2n-1)\pi/4$ ($n \in \mathbb{Z}$), i to je rešenje date jednačine.

Napomena. Jednačina $\cos 6t + 6\cos 2t = 0$ može se rešiti i na sledeći način: Koristeći se identitetom $\cos 6t = 4\cos^3 2t - 3\cos 2t$, imamo

$$\cos 6t + 6\cos 2t = \cos 2t\,(3 + 4\cos^2 2t).$$

Ova jednačina je ispunjena za

$$\cos 2t = 0 \Rightarrow t = (2n-1)\pi/4 \ (n \in \mathbb{Z}).$$

313. Rešenje. Dati izraz $A = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} 3x$ možemo transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 3\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x}{\cos x\cos 2x} - 3\operatorname{tg} 3x \\ &= \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} - 3\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x\left(\frac{\cos 3x}{\cos x\cos 2x} - 3\right). \end{aligned}$$

Kako je

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

izraz A postaje

$$A = \operatorname{tg} 3x\left(\frac{4\cos^2 x - 3}{\cos 2x} - 3\right) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}\Big(4\cos^2 x - 3 - 3\,(2\cos^2 x - 1)\Big) = -2\cdot\frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}\cos^2 x.$$

314. Rešenje. Ako primenimo osobinu proporcija

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{m+n}{m-n} = \frac{a+b}{a-b},$$

imamo

$$\frac{\sin(t-x) + \sin(t-y)}{\sin(t-x) - \sin(t-y)} = \frac{a+b}{a-b},$$

tj.

$$(1)\qquad \frac{2\sin\left(t-\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\dfrac{y-x}{2}}{2\cos\left(t-\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\dfrac{y-x}{2}}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Na sličan način imamo

$$(2)\qquad \frac{2\cos\left(t-\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\dfrac{y-x}{2}}{-2\sin\left(t-\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\dfrac{y-x}{2}}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Ako pomnožimo jednakosti (1) i (2), posle skraćivanja dobijamo

$$-\frac{\cos^2\dfrac{y-x}{2}}{\sin^2\dfrac{y-x}{2}}=\frac{(a+b)(c+d)}{(a-b)(c-d)},\ \text{tj.}\ \frac{\cos^2\dfrac{x-y}{2}}{\sin^2\dfrac{x-y}{2}}=\frac{(b+a)(c+d)}{(b-a)(c-d)}.$$

Sada je

$$\frac{\cos^2\dfrac{x-y}{2}-\sin^2\dfrac{x-y}{2}}{\cos^2\dfrac{x-y}{2}+\sin^2\dfrac{x-y}{2}}=\frac{(b+a)(c+d)-(b-a)(c-d)}{(b+a)(c+d)+(b-a)(c-d)}$$

i posle sređivanja dobijamo

$$\cos(x-y)=\frac{ac+bd}{ad+bc}.$$

315. Dokaz. Iz datih uslova imamo $-\sin z=\sin x+\sin y\ \wedge\ -\cos z=\cos x+\cos y$. Kako je $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, sleduje da je

$$\begin{aligned}
&(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=1,\\
&(\sin^2 x+\cos^2 x)+(\sin^2 y+\cos^2 y)+2\,(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=1,\\
&1+1+2\cos(x-y)=1\ \Rightarrow\ \cos(x-y)=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x-y=\pm\,\frac{2\pi}{3}+2k\pi,
\end{aligned}$$

tj. $x=y\pm\,\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, pa imamo

$$3\cdot 2^n x=3\cdot 2^n y+(2^{n+1}\cdot 3k\pm\,2^{n+1})\pi,$$

i na kraju

$$\operatorname{tg}(3\cdot 2^n x)=\operatorname{tg}(3\cdot 2^n y).$$

Na isti način dokazujemo $\operatorname{tg}(3\cdot 2^n y)=\operatorname{tg}(3\cdot 2^n z)$.

316. Rešenje. Primetimo najpre da je 4α oštar ugao, što znači da su 2α i α oštri uglovi. Kako je

$$4\alpha=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

imamo

$$\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{239}\right)=\frac{1+\dfrac{1}{239}}{1-1\cdot\dfrac{1}{239}}=\frac{240}{238}=\frac{120}{119}.$$

Iz jednakosti
$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$
izlazi kvadratna jednačina
$$60 \operatorname{tg}^2 2\alpha + 119 \operatorname{tg} 2\alpha - 60 = 0.$$

Njeno pozitivno rešenje (jer je 2α oštar ugao, tj. $\operatorname{tg} 2\alpha > 0$) jednako je
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-119 + \sqrt{119^2 + 4 \cdot 60^2}}{120} = \frac{-119 + \sqrt{28561}}{120} = \frac{-119 + 169}{120} = \frac{5}{12}.$$

Dalje je
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12},$$
tj.
$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 24 \operatorname{tg} \alpha - 5 = 0.$$

Pozitivno rešenje ove jednačine je
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 5^2}}{5} = \frac{-12 + 13}{5} = \frac{1}{5}.$$

317. Rešenje. Iz uslova $\alpha + \beta = \pi/3$ imamo $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$, tj.

(1)
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \sqrt{3}.$$

Kako su $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$ koreni jednačine $x^2 + px + q = 0$, primenom VIÈTE-ovih[1] pravila dobijamo $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = -p$ i $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = q$, te uslov (1) postaje
$$-\frac{p}{1-q} = \sqrt{3},$$
tj.

(2)
$$p = (q - 1)\sqrt{3}.$$

Pored ovog uslova, diskriminanta kvadratne jednačine mora biti nenegativna, tj. $p^2 - 4q \geq 0$. Ako u ovaj uslov uvedemo p iz (2), dobijamo $3q^2 - 10q + 3 \geq 0$, odakle je $q \leq 1/3$ ili $q \geq 3$. Prema tome, p i q moraju zadovoljavati uslov (2), pri čemu je $q \leq 1/3$ ili $q \geq 3$.

318. Dokaz. Primenom poznatih trigonometrijskih formula prikažimo dati izraz u obliku:
$$\begin{aligned} E &= \frac{m(1 - \cos 4x) + \cos 2x + \cos 4x}{m \sin^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} = \frac{m(1 - \cos 4x) + \cos 2x + \cos 4x}{m\,\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= 4\,\frac{(1 - \cos 4x)\,m + \cos 2x + \cos 4x}{2(1 - \cos 2x)\,m + 2\cos 2x - 1}. \end{aligned}$$

[1] Viète (Francois Viète (1540–1603)) veliku francuski matematičar; prvi je brojeve predstavio slovima 1591. godine.

Razlomak $\dfrac{am+b}{cm+d}$, gde su a, b, c, d funkcije od x, ne zavisi od m ako je

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

Ispitajmo da li je ovaj uslov ispunjen, tj. da li je

$$(1-\cos 4x)(2\cos 2x-1)=2\,(\cos 2x+\cos 4x)(1-\cos 2x)\,?$$

Posle množenja izraza na levoj i desnoj strani, i sređivanjem, dobijamo identitet

$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1.$$

Prema tome, dati izraz ne zavisi od m. To znači da je njegova vrednost ista za bilo koje m. U našem slučaju je pogodno da se uzme $m=1$. Tada je

$$E=4\,\frac{a+b}{c+d}=4\,\frac{1-\cos 4x+\cos 2x+\cos 4x}{2-2\,\cos 2x+2\,\cos 2x-1}=4\,(1+\cos 2x)=8\cos^2 x.$$

NAPOMENA. Preporučuje se čitaocu da proveri jednakost $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}=0$.

319. Rešenje. Iz uslova $\operatorname{tg}2x:\operatorname{tg}x=4:1$ izlazi

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}:\operatorname{tg}x=4:1\ \Rightarrow\ \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2x}=4\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Prema tome, $\operatorname{tg}2x=4\cdot\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\pm2\sqrt{2}$. Pošto je

$$\operatorname{tg}4x=\frac{2\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{2\cdot(\pm2\sqrt{2})}{1-(\pm2\sqrt{2})^2}=\mp\frac{4\sqrt{2}}{7},$$

imamo

$$\operatorname{tg}2x:\operatorname{tg}4x=4:y\ \Rightarrow\ (\pm2\sqrt{2}):\Big(\mp\frac{4\sqrt{2}}{7}\Big)=4:y\ \Rightarrow\ y=-\frac{8}{7}.$$

320. Dokaz. Iz datog uslova izlazi

(1) $$\sin(x+y)=-\sin y\cos y.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}A&=\frac{\cos^3y}{\cos x}+\frac{\sin^3y}{\sin x}-1=\frac{\sin x\cos^3y+\cos x\sin^3y}{\sin x\cos x}-1\\&=\frac{\sin x\cos y(1-\sin^2y)+\cos x\sin y(1-\cos^2y)}{\sin x\cos x}-1\\&=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y-\sin y\cos y(\sin x\sin y+\cos x\cos y)}{\sin x\cos x}-1\\&=\frac{\sin(x+y)-\sin y\cos y\cos(x-y)}{\sin x\cos x}-1\end{aligned}$$

Primenom jednakosti (1) nalazimo

$$\begin{aligned}A &= \frac{-\sin y\cos y - \sin y\cos y\cos(x-y) - \sin x\cos x}{\sin x\cos x}\\ &= \frac{-\dfrac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y) - \sin y\cos y\cos(x-y)}{\sin x\cos x}\\ &= \frac{-\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin(x+y)\cos(x-y) - \sin y\cos y\cos(x-y)}{\sin x\cos x}\\ &= \frac{-\cos(x-y)\big(\sin(x+y)+\sin y\cos y\big)}{\sin x\cos x}.\end{aligned}$$

Najzad, iz jednakosti (1) dobijamo $\sin(x+y)+\sin y\cos y = 0$, tako da je $A = 0$. Time smo dokazali jednakost

$$\frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\sin^3 y}{\sin x} = 1.$$

321. Rešenje. Stavimo

$$(1-\sin t)(1-\cos t) = A, \tag{1}$$

$$(1+\sin t)(1+\cos t) = \frac{5}{4}. \tag{2}$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$\sin t\cos t = \frac{A}{2} - \frac{3}{8}, \tag{3}$$

a množenjem levih i desnih strana

$$(1-\sin^2 t)(1-\cos^2 t) = \frac{5}{4}A,$$

tj.

$$\sin^2 t\,\cos^2 t = \frac{5}{4}A. \tag{4}$$

Ako (3) zamenimo u (4), dobijamo jednačinu $\left(\frac{A}{2}-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{5}{4}A$ i njena rešenja su $A_1 = \frac{13}{4}+\sqrt{10}$ ili $A_2 = \frac{13}{4}-\sqrt{10}$. Kako je na osnovu (1) $A < 4$, u obzir dolazi samo rešenje A_2. Prema tome,

$$(1-\sin t)(1-\cos t) = \frac{13}{4} - \sqrt{10}.$$

322. Dokaz. Označimo sa L levu strane date jednakosti. Ako primetimo da je

$$\sin\frac{3\pi}{14} = \cos\frac{4\pi}{14}, \quad \sin\frac{5\pi}{14} = \cos\frac{2\pi}{14},$$

imamo

$$\begin{aligned}
L &= \sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14} = \frac{2\cos\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}\\
&= \frac{2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14}}{4\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{2\sin\frac{4\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}}\\
&= \frac{\sin\frac{8\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{14}\right)}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

323. Dokaz. Označimo sa L izraz na levoj strani date jednakosti. Primenom trigonometrijskih transformacija dobijamo

$$\begin{aligned}
L &= \frac{2\sin 80^\circ + 2\sin 50^\circ\cos 70^\circ}{2\sin 50^\circ\sin 70^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ + \sin 120^\circ - \sin 20^\circ}{2\sin 50^\circ\sin 70^\circ}\\
&= \frac{(\sin 80^\circ + \sin 60^\circ) + (\sin 80^\circ - \sin 20^\circ)}{2\sin 50^\circ\sin 70^\circ} \quad (\text{jer je } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ)\\
&= \frac{2\sin 70^\circ\cos 10^\circ + 2\cos 50^\circ\sin 30^\circ}{2\sin 50^\circ\sin 70^\circ}\\
&= \frac{2\cos 20^\circ\cos 10^\circ + 2\sin 40^\circ\cdot\frac{1}{2}}{2\sin 50^\circ\cos 20^\circ} \quad (\text{jer je } \sin 70^\circ = \cos 20^\circ,\ \cos 50^\circ = \sin 40^\circ)\\
&= \frac{2\cos 20^\circ\cos 10^\circ + 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{2\sin 50^\circ\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}\\
&= \frac{\sin 80^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} \quad (\text{jer je } \cos 10^\circ = \sin 80^\circ)\\
&= \frac{2\sin 50^\circ\cos 30^\circ}{\sin 50^\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

324. Rešenje. Primenom trigonometrijskih transformacija imamo

$$\begin{aligned}
4\sin 10^\circ + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^\circ &= \frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= \frac{2\sin 20^\circ + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ) + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= \frac{2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\sin 10^\circ) + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right) + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

325. Dokaz. Sa L i D označimo izraze na levoj i desnoj strani date jednakosti. Tada je

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} + 3\left(\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)\\
&= \frac{\sin 40^\circ \sin 10^\circ - \cos 40^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 40^\circ} + 3\,\frac{\sin 10^\circ \sin 40^\circ - \cos 10^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ \sin 40^\circ}\\
&= \frac{-\cos 50^\circ}{\sin 10^\circ \cos 40^\circ} + 3\,\frac{-\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ \sin 40^\circ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos 50^\circ\,\frac{(\sin 40^\circ \cos 10^\circ + \cos 40^\circ \sin 10^\circ) + 2\sin 10^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin 40^\circ \cos 40^\circ}\\
&= -\cos 50^\circ\,\frac{\sin 50^\circ + 2\sin 10^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin 40^\circ \cos 40^\circ},
\end{aligned}$$

pošto je $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$, $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$.

Dalje je

$$L = -\frac{2\left(\frac{1}{2} + \sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = -4\,\frac{\sin 30^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = -4\,\frac{2\sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} = -8\cos 10^\circ.$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - 3\,\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ - 3\cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}\\
&= \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ) - \frac{3}{2}(1+\cos 40^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 40^\circ} = -4\,\frac{\frac{1}{2} + \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\\
&= -4\,\frac{\cos 60^\circ + \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = -4\,\frac{2\cos 50^\circ \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} = -8\cos 10^\circ.
\end{aligned}$$

Pošto je $L = D$, dokazana je data jednakost.

326. Dokaz. Leve strane jednakosti 1° i 2° označimo sa A i B.

$$\begin{aligned}
1^\circ\quad A &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right)\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right).
\end{aligned}$$

Kako je $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}$, imamo

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.$$

$$2^\circ \quad B^2 = \Big(-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\Big)^2$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} - 2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{2\pi}{7}\Big) + \frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{4\pi}{7}\Big) + \frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{6\pi}{7}\Big) - \Big(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\Big) + \Big(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}\Big) - \Big(\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7}\Big).$$

Kako je $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$, imamo

$$B^2 = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\Big) + \frac{3}{2},$$

i tada je na osnovu 1°

$$B^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (\text{pošto je } B > 0).$$

$$3^\circ \quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{7} - 4\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}}\Big(\sin\frac{3\pi}{7} - 4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\Big)$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}}\Big(\sin\frac{3\pi}{7} - 2\Big(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\Big)\Big)$$

(1)
$$= \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}}\Big(2\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\Big) \quad \Big(\text{jer je } \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}\Big).$$

Ako stavimo $E = 2\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}$, imamo

$$E^2 = 4\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} - 4\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$$

$$= 4\cdot\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{6\pi}{7}}{2} - 2\Big(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}\Big)$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{7} - 2\underbrace{\Big(-\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\Big)}_{-1/2} - 4\cos\frac{\pi}{7}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{7} - 2\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big) - 4\Big(-\cos\frac{6\pi}{7}\Big)$$

$$= 7\cdot\frac{1+\cos\frac{6\pi}{7}}{2} = 7\cos^2\frac{3\pi}{7}.$$

S obzirom da je

$$E = 2\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{7}\right) > 0,$$

dobijamo

(2) $$E = \sqrt{7}\cos\frac{3\pi}{7}\,.$$

Ako (2) zamenimo u (1) dobijamo jednakost 3°.

327. Dokaz. 1° Pošto je $A = \cos\frac{\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{5\pi}{21} > 0$, onda je

$$A^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21}\right) - \left(\cos\frac{\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{5\pi}{21}\right) - \left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right).$$

Ako stavimo $B = \cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21}$ i primenimo jednakost $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$, dobijamo $A^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}B - A - \frac{1}{2}$, tj.

(1) $$A^2 = 1 - A + \frac{1}{2}B.$$

Iz jednakosti

$$\cos\frac{\pi}{21} - \cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{3\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{5\pi}{21} - \cos\frac{6\pi}{21} + \cos\frac{7\pi}{21} - \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{9\pi}{21} - \cos\frac{10\pi}{21} = \frac{1}{2}$$

nalazimo

$$\cos\frac{\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{5\pi}{21} - \left(\cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21}\right) + \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

tako da je $A - B + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, tj.

(2) $$A - B = -\frac{1}{2}\,.$$

Iz (1) i (2) izlazi

$$A = \frac{\sqrt{21}-1}{4},$$

$$B = \frac{\sqrt{21}+1}{4}$$ (rezultat koji je dao M. Rosenberg, Kvant No. 3/1980).

2° Neka je $M = -\sin\frac{\pi}{21} + \sin\frac{4\pi}{21} + \sin\frac{5\pi}{21}$. Imamo

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21}\Big) + \cos\frac{\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{5\pi}{21} \\ &\quad - \Big(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\Big), \\ M^2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}B + A - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Iz 1° dobijamo

$$M^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{21}+1}{4} + \frac{\sqrt{21}-1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}.$$

3° Dokaz je analogan dokazu jednakosti 2°.

$$\begin{aligned} 4^\circ \quad \cos\frac{\pi}{21}\cdot\cos\frac{4\pi}{21}\cdot\cos\frac{5\pi}{21} &= \frac{1}{4}\Big(1 + \cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{\sqrt{21}+1}{4}\Big) = \frac{5+\sqrt{21}}{16}. \\ 5^\circ \quad \cos\frac{2\pi}{21}\cdot\cos\frac{8\pi}{21}\cdot\cos\frac{10\pi}{21} &= \frac{1}{4}\Big(1 - \Big(\cos\frac{\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{5\pi}{21}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{\sqrt{21}-1}{4}\Big) = \frac{5-\sqrt{21}}{16}. \\ 6^\circ \quad \sin\frac{\pi}{21}\cdot\sin\frac{4\pi}{21}\cdot\sin\frac{5\pi}{21} &= \frac{1}{4}\Big(\sin\frac{2\pi}{21} + \sin\frac{8\pi}{21} - \sin\frac{10\pi}{21}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}. \end{aligned}$$

328. Dokaz. Za dokazivanje ovih jednakosti primenićemo formule za tangens zbira i razlike uglova i formulu za tangens trostrukog ugla

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}. \tag{1}$$

Sa A i B označimo leve strane jednakosti 1° i 2°.

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad A &= \operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}(60^\circ - 10^\circ) + \operatorname{tg}(60^\circ + 10^\circ) \\ &= \operatorname{tg}10^\circ - \frac{\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{tg}10^\circ}{1 + \operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}10^\circ} + \frac{\operatorname{tg}60^\circ + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}10^\circ} \\ &= \operatorname{tg}10^\circ - \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}10^\circ}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ} + \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ} \\ &= 3\,\frac{3\operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}^3 10^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^\circ} = 3\operatorname{tg}(3\cdot 10^\circ) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2^\circ \quad B &= \operatorname{tg}10^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 10^\circ) + \operatorname{tg}(60^\circ - 10^\circ)\operatorname{tg}(60^\circ + 10^\circ) \\
&\qquad - \operatorname{tg}(60^\circ + 10^\circ)\operatorname{tg}10^\circ \\
&= \operatorname{tg}10^\circ \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}10^\circ}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ} + \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}10^\circ}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ} \cdot \operatorname{tg}10^\circ \\
&= 3 \cdot \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^\circ} = 3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3^\circ \quad (\operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}50^\circ + \operatorname{tg}70^\circ)^2 &= \operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ \\
&\quad - 2(\operatorname{tg}10^\circ \operatorname{tg}50^\circ + \operatorname{tg}50^\circ \operatorname{tg}70^\circ - \operatorname{tg}70^\circ \operatorname{tg}10^\circ).
\end{aligned}
$$

Ako primenimo jednakosti 1° i 2°, dobijamo

$$
(\sqrt{3})^2 = \operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ - 2 \cdot 3 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ = 9.
$$

4° Na osnovu formule (1) imamo

$$
\operatorname{tg}^3 x = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}3x + 3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}3x. \tag{2}
$$

Ako u (2) stavimo redom $x = 10^\circ$, $x = 50^\circ$, $x = 70^\circ$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^3 10^\circ - \operatorname{tg}^3 50^\circ + \operatorname{tg}^3 70^\circ &= \sqrt{3}(\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ) \\
&\qquad + 3(\operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}50^\circ + \operatorname{tg}70^\circ) - \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3} \cdot 9 + 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 11\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

5° Iz formule (1) nalazimo

$$
\operatorname{tg}^4 x = 3\operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}3x + 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}3x. \tag{3}
$$

Ako u (3) stavimo redom $x = 10^\circ$, $x = 50^\circ$, $x = 70^\circ$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^4 10^\circ + \operatorname{tg}^4 50^\circ + \operatorname{tg}^4 70^\circ &= \sqrt{3}(\operatorname{tg}^3 10^\circ - \operatorname{tg}^3 50^\circ + \operatorname{tg}^3 70^\circ) \\
&\qquad + 3(\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ) \\
&\qquad - \frac{\sqrt{3}}{3}(\operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}50^\circ + \operatorname{tg}70^\circ) \\
&= \sqrt{3} \cdot 11\sqrt{3} + 3 \cdot 9 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 59.
\end{aligned}
$$

NAPOMENA. Ako nastavimo isti postupak, može se dokazati da je

$$
\operatorname{tg}^6 10^\circ + \operatorname{tg}^6 50^\circ + \operatorname{tg}^6 70^\circ = 433.
$$

329. Rešenje. Imamo sledeće implikacije:

$$
(1) \Rightarrow \frac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}} = a \Rightarrow \quad (3) \quad \frac{\cos\dfrac{x-y}{2}}{\cos\dfrac{x+y}{2}} = a,
$$

$$(2) \Rightarrow \frac{-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}}{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-2}{a} \Rightarrow \quad (4)\ \frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{a}.$$

Ako pomnožimo (3) i (4), dobijamo $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} = 2-\sqrt{3}$. Tada je

$$\cos(x+y) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x+y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x+y}{2}} = \frac{1-(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

tj. $x+y=\dfrac{\pi}{6}$.

330. Dokaz. Pretpostavimo da važi suprotno tvrđenje, tj. da postoje realni brojevi x i y takvi da je

$$(1) \qquad \cos(x^2)+\cos(y^2)-\cos(xy) \geq 3.$$

Kako je $-1 \leq \cos t \leq 1$ za svako $t \in \mathbb{R}$, onda iz (1) izlazi

$$\cos(x^2)=1, \qquad \cos(y^2)=1, \qquad \cos(xy)=-1,$$

a odavde je

$$(2) \qquad x^2 = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0),$$

$$(3) \qquad y^2 = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0),$$

$$(4) \qquad xy = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ako eliminišemo x i y iz (2), (3) i (4), posle skraćivanja sa π^2, dobijamo

$$4mn = (2k+1)^2,$$

što je nemoguće pošto je na levoj strani jednakosti paran broj a na desnoj neparan. Dakle, došli smo do kontradikcije, čime smo dokazali zadatu nejednakost.

331. Rešenje. Imamo sledeće mogućnosti:

1° $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A \Rightarrow -1 < \cos(A-B) < 1$, $-1 < \cos(B-C) < 1$,
$-1 < \cos(C-A) < 1 \Rightarrow -1 < \cos(A-B)\cdot\cos(B-C)\cdot\cos(C-A) < 1$,
što je nemoguće s obzirom na uslov (1).

2° $A = B \neq C$, tada se jednakost (1) svodi na $\cos^2(A-C) = 1 \Rightarrow A-C = 0 \vee A-C = \pm\pi$, što je nemoguće s obzirom na pretpostavku da je $A \neq C$ i da su A, C uglovi trougla.

3° $A = B = C$. To je trivijalan slučaj kada je jednakost (1) zadovoljena.

Prema tome, jednakost (1) važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

332. Dokaz. Na osnovu nejednakosti $|x+y| \leq |x|+|y|$ izlazi sledeća nejednakost

$$\begin{aligned}|\sin(a+b)| &= |\sin a\cos b + \cos a \sin b| \leq |\sin a \cos b| + |\cos a \sin b| \\ &= |\sin a|\,|\cos b| + |\cos a|\,|\sin b| \leq |\sin a| + |\sin b|,\end{aligned}$$

jer je $|\cos a| \le 1$, $|\cos b| \le 1$.

Za $a = b = x$ poslednja nejednakost se svodi na

$$|\sin 2x| \le 2\,|\sin x|. \tag{1}$$

Pretpostavimo da važi nejednakost

$$|\sin kx| \le k\,|\sin x| \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Primenom ove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}|\sin(k+1)x| &= |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x| \le |\sin kx| + |\sin x| \\ &\le k\,|\sin x| + |\sin x| = (k+1)\,|\sin x|.\end{aligned}$$

Prema tome, nejednakost (2) je ispunjena ako umesto k stavimo $k+1$. Za $k = 1$ u (2) važi znak jednakosti, dok se za $k = 2$ dobija (1). Na taj način je nejednakost (2) dokazana matematičkom indukcijom.

333. Dokaz. Pošto je

$$\begin{aligned}(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha - \beta),\end{aligned}$$

i $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{8}{5}$, $\quad \alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, dobijamo

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2\cos(\alpha-\beta) - \frac{14}{25}}\,. \tag{1}$$

Kako je $\cos(\alpha - \beta) \le 1$, iz (1) imamo

$$\cos\alpha + \cos\beta \le \sqrt{2\cdot 1 - \frac{14}{25}} = \frac{6}{5}\,.$$

Znak jednakosti važi ako je $\cos(\alpha - \beta) = 1$. S obzirom da $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, sleduje $\alpha = \beta$. Sada imamo da je $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{8}{5}$ i $\alpha = \beta$, pa je $\alpha = \beta = \arcsin\dfrac{4}{5}$.

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $0 \le \beta \le \alpha \le \pi/2$. Tada je

$$\frac{8}{5} = \sin\alpha + \sin\beta \le 1 + \sin\beta \Rightarrow \sin\beta \ge \frac{3}{5} \Rightarrow \beta \ge \arcsin\frac{3}{5}\,,$$

pa imamo $\arcsin\dfrac{3}{5} \le \beta \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, odakle je

$$0 \le \alpha - \beta \le \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{5}\,. \tag{2}$$

Sada je

$$\cos(\alpha - \beta) \ge \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\,. \tag{3}$$

Iz (1) i (3) izlazi

$$\cos\alpha + \cos\beta \geq \sqrt{2 \cdot \frac{3}{5} - \frac{14}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Znak jednakosti važi ako je $\cos(\alpha - \beta) = 3/5$, a na osnovu (2) i (3) to je ispunjeno ako je $\alpha = \pi/2$ i $\beta = \arcsin(3/5)$. Ako je $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$, znak jednakosti važi ako je $\alpha = \arcsin(3/5)$ i $\beta = \pi/2$.

334. Rešenje. Neka je $\sin\alpha = 0.17$. Tada je

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3 \cdot \frac{17}{10^2} - 4 \cdot \left(\frac{17}{10^2}\right)^3 = \frac{495261}{10^6} \\ &< \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.\end{aligned}$$

Imamo sledeće implikacije:

$$\sin 3\alpha < \sin 30^\circ \Rightarrow 3\alpha < 30^\circ \Rightarrow \alpha < 10^\circ \Rightarrow \sin\alpha < \sin 10^\circ \Rightarrow 0.17 < \sin 10^\circ.$$

Slično, ako stavimo $\sin\beta = 0.18$, onda je

$$\sin 3\beta = \frac{507052}{10^6} > \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$

Prema tome,

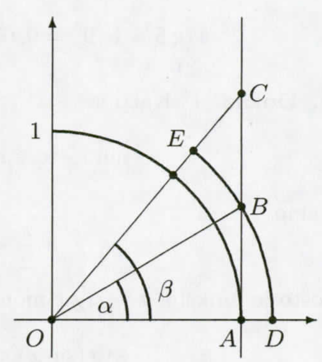
$$\sin 30^\circ < \sin 3\beta \Rightarrow 10^\circ < \beta \Rightarrow \sin 10^\circ < \sin\beta \Rightarrow \sin 10^\circ < 0.18.$$

335. Dokaz. Imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 11^\circ < 0.2 &\Leftrightarrow 5\sin 11^\circ < \cos 11^\circ \Leftrightarrow 25\sin^2 11^\circ < \cos^2 11^\circ \\ &\Leftrightarrow 25\,\frac{1-\cos 22^\circ}{2} < \frac{1+\cos 22^\circ}{2} \Leftrightarrow \frac{12}{13} < \cos 22^\circ \\ &\Leftrightarrow \frac{144}{169} < \cos^2 22^\circ \Leftrightarrow \frac{144}{169} < \frac{1+\cos 44^\circ}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos 44^\circ > \frac{119}{169}.\end{aligned}$$

Međutim, kako je $\cos 44^\circ > \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \dfrac{119}{169}$, sleduje data nejednakost.

336. Dokaz 1. Na slici je prikazan deo trigonometrijskog kruga u prvom kvadrantu sa uglovima α i β. Prava kojoj pripadaju tačke A, B, C je tzv. tangentna linija. Površina trougla OAB i kružnog isečka ODB su redom



$$P_1 = \frac{1 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2}, \quad P_2 = \frac{OB^2}{2} \cdot \alpha.$$

S druge strane, površine trougla OBC i isečka OBE su

$$P_3 = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{2}, \quad P_4 = \frac{OB^2}{2}(\beta - \alpha).$$

Kako je $P_1 < P_2$ i $P_4 < P_3$, iz ovih nejednakosti dobijamo

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < OB^2, \qquad OB^2 < \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\beta - \alpha},$$

odakle je definitivno

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

Dokaz 2. Posmatrajmo funkciju $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, gde je $0 < x < \pi/2$. Prvi izvod ove funkcije je

$$y' = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Za $0 < x < \pi/2$ važi nejednakost $x > \sin x$. Zbog toga je $x > \sin x \cos x$, pa je $y' > 0$. To znači da je funkcija rastuća, pa nejednakost $\alpha < \beta$ implicira

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} \qquad (0 < \alpha < \beta < \pi/2).$$

337. Rešenje. Primenom zadatka 336 imamo

$$\frac{\pi}{2} > \beta > \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{\beta}{\alpha},$$

pa je

$$\frac{\operatorname{tg} 6^\circ}{\operatorname{tg} 5^\circ} = \frac{\operatorname{tg}\left(6 \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)}{\operatorname{tg}\left(5 \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)} > \frac{6 \cdot \dfrac{\pi}{180}}{5 \cdot \dfrac{\pi}{180}} = \frac{6}{5},$$

$$\frac{\operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 9^\circ} = \frac{\operatorname{tg}\left(10 \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)}{\operatorname{tg}\left(9 \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)} > \frac{10 \cdot \dfrac{\pi}{180}}{9 \cdot \dfrac{\pi}{180}} = \frac{10}{9}.$$

Stoga je

$$\frac{\operatorname{tg} 6^\circ}{\operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 9^\circ} > \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{9} \Rightarrow 3 \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ > 4 \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 9^\circ.$$

NAPOMENA. Pomoću kalkulatora dobijamo

$$4 \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 9^\circ = 0,05542\ldots, \qquad 3 \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 0,05559\ldots$$

338. Dokaz. 1° Kako je

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

dobijamo

$$-\frac{\pi}{2} < \sin x < \frac{\pi}{2} - \cos x < \frac{\pi}{2}.$$

Pošto je funkcija $x \longmapsto \operatorname{tg} x$ monotono rastuća na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, sleduje

$$\operatorname{tg}(\sin x) < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) = \operatorname{ctg}(\cos x).$$

2° Pošto je

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}\geq 2>\frac{\pi}{2},$$

imamo $\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg} x<\operatorname{tg} x$.

Kako je $x<\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\Rightarrow\operatorname{tg} x<\frac{\pi}{2}$ i

$$\operatorname{arcctg}\pi<x\Rightarrow\pi>\operatorname{ctg} x\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg} x>-\frac{\pi}{2},$$

dobijamo

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg} x<\operatorname{tg} x<\frac{\pi}{2}.$$

Konačno nalazimo da je

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg} x\right)<\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x),$$

odnosno

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg} x)<\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x).$$

339. Dokaz. Imamo

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{1}{\underbrace{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}_{=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta},$$

tj.

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}. \tag{2}$$

Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}{3}>\sqrt[3]{1\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Iz ove nejednakosti i (1) izlazi

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta>\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta},$$

odnosno

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}<\frac{1}{3\sqrt{3}}. \tag{3}$$

Tada iz (2) i (3) dobijamo

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}\Rightarrow|\cos\alpha\cdot\cos\beta|<\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3}}}.$$

NAPOMENA. Primetimo da u nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine važi samo stroga nejednakost, jer ako bi važila jednakost, tada bi bilo $1=\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\beta$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom (1).

340. Rešenje. Za rešavanje ovog zadatka primenićemo poznate nejednakosti:

$$-\sqrt{A^2+B^2} \leq A\cos\alpha + B\sin\alpha \leq \sqrt{A^2+B^2}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} E &= a\cos^2 x + 2bc\cos x\sin x + c\sin^2 x \\ &= a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + bc\sin 2x + c\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{a-c}{2}\cos 2x + bc\sin 2x + \frac{a+c}{2}, \end{aligned}$$

važe nejednakosti

$$\frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + (bc)^2} \leq E \leq \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + (bc)^2}.$$

341. Dokaz. Jednačina $\cos\alpha + \cos\beta = 0$ je ispunjena ako je

(1) $\quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ ili (2) $\quad \alpha = \pi + \beta + 2m\pi$,

gde su k i m celi brojevi.

U našem zadatku je $\alpha = \frac{n\pi}{6} - \frac{55\pi}{72}$, $\quad \beta = \frac{5n\pi}{6} + \frac{\pi}{72} \qquad (n \in \mathbb{Z})$.

Za ove vrednosti α i β jednakost (1) se svodi na

$$\frac{n\pi}{6} - \frac{55\pi}{72} = \pi - \frac{5n\pi}{6} - \frac{\pi}{72} + 2k\pi, \text{ tj. na } n = 2k + 1 + \frac{3}{4}.$$

Kao što se vidi, n nije ceo broj.

Jednakost (2) za navedene vrednosti α i β glasi

$$\frac{n\pi}{6} - \frac{55\pi}{72} = \pi + \frac{5n\pi}{6} + \frac{\pi}{72} + 2m\pi, \text{ tj. } n = -3m - \frac{8}{3}.$$

Dakle, i u ovom slučaju n ne može biti ceo broj.

342. Rešenje. Kako je $\beta = 90^\circ - \alpha$, dati uslov je ekvivalentan sa

(1) $$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha} = 70.$$

Uvedimo smenu $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = t$. Tada je

(2) $$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

(3) $$\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha} = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left(\operatorname{tg}^2\alpha - 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = t^3 - 3t.$$

Ako (2) i (3) zamenimo u (1), dolazimo do jednačine

$$t^3 + t^2 - 2t - 72 = 0, \text{ tj. } (t-4)(t^2+5t+18) = 0.$$

Jedino realno rešenje je $t = 4$. Prema tome, imamo

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 4 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 2 - \sqrt{3} \vee \operatorname{tg}\alpha = 2 + \sqrt{3}.$$

Iz jednakosti

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

dobijamo $2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$.

Ako je $\operatorname{tg}\alpha = 2 + \sqrt{3}$, onda je $\alpha = 75^\circ$. Prema tome, uglovi trougla su 15°, 75° i 90°.

343. Rešenje. 1° Neka je $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Tada je $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i

$$\operatorname{sgn}(\sin\alpha) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\alpha), \ \cos\alpha > 0,$$

pa je

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2° Stavimo $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \beta$. Tada je $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pa je

$$\alpha + \beta \in (-\pi, \pi). \tag{1}$$

Imamo

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\\ &= \sin(\operatorname{arctg} x)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) + \cos(\operatorname{arctg} x)\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Ako primenimo rezultate iz 1°, imamo

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{x\,|x|}{1+x^2} + \frac{|x|}{x(1+x^2)} = \operatorname{sgn} x \quad (\text{jer je } |x| = x\operatorname{sgn} x).\end{aligned}$$

Razmotrimo sledeće slučajeve:

a) $x < 0$. Tada je $\sin(\alpha+\beta) = -1 \Rightarrow \alpha+\beta = -\pi/2$ zbog uslova (1).

b) $x > 0$. Tada je $\sin(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \alpha+\beta = \pi/2$, s obzirom na uslov (1).

Prema tome, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$, što je trebalo dokazati.

344. Dokaz. Neka je $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg} y = \beta$. Imamo $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, gde je $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Za $\alpha+\beta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$ imamo $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{x+y}{1-xy}$, pa je

(1) $$\alpha+\beta=\varphi+\varepsilon\pi \qquad (\varepsilon\in\mathbb{Z}),$$

gde je $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ i

(2) $$\varphi\in\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big).$$

Razmotrimo sledeće mogućnosti:

i) $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}\wedge-\dfrac{\pi}{2}<\beta\le0\Leftrightarrow x\ge0\wedge y\le0\;\Rightarrow\;xy\le0$. Tada je $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, pa na osnovu (1) i (2) nalazimo da je $\alpha+\beta=\varphi$.

ii) $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0\wedge0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Isto kao pod i) zaključujemo da je $\alpha+\beta=\varphi$ za $xy<0$.

iii) $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}\wedge0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\ge0\wedge y>0$ i $0<\alpha+\beta<\pi$. Imamo dva slučaja:

1° $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Na osnovu (1) i (2) nalazimo da je $\alpha+\beta=\varphi$, uz uslove

$$0\le\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\beta\Big)\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\Leftrightarrow x<\frac{1}{y}\Leftrightarrow xy<1,$$

2° $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$. Na osnovu (1) i (2) nalazimo da je $\alpha+\beta=\varphi+\pi$, uz uslove

$$0<\frac{\pi}{2}-\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\beta\Big)<\operatorname{tg}\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}<\operatorname{tg}\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{y}<x\Leftrightarrow xy>1.$$

iv) $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0\wedge-\dfrac{\pi}{2}<\beta\le0\Leftrightarrow x<0\wedge y\le0$ i $-\pi<\alpha+\beta<0$, pa imamo dva slučaja:

1° $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<0$. Tada na osnovu (1) i (2) nalazimo da je $\alpha+\beta=\varphi$, uz uslove

$$0<-\alpha<\frac{\pi}{2}-(-\beta)<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\operatorname{tg}(-\alpha)<\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-(-\beta)\Big)\Leftrightarrow\operatorname{tg}(-\alpha)<\frac{1}{\operatorname{tg}(-\beta)}$$
$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\beta)<1\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1\Leftrightarrow xy<1.$$

2° $-\pi<\alpha+\beta<-\dfrac{\pi}{2}$. Tada na osnovu (1) i (2) nalazimo da je $\alpha+\beta=\varphi-\pi$ uz uslove

$$0<\frac{\pi}{2}-(-\beta)<-\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-(-\beta)\Big)<\operatorname{tg}(-\alpha)\Leftrightarrow\frac{1}{\operatorname{tg}(-\beta)}<\operatorname{tg}(-\alpha)$$
$$\Leftrightarrow1<\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\beta)\Leftrightarrow1<\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\Leftrightarrow1<xy.$$

Na osnovu ove analize zaključujemo da je

$\alpha+\beta=\varphi$, za $xy<1$ (slučajevi i), ii), iii) 1°, iv) 1°),

$\alpha+\beta=\varphi+\pi$, za $x>0$ i $xy>1$ (slučaj iii) 2°),

$\alpha+\beta=\varphi-\pi$, za $x<0$ i $xy>1$ (slučaj iv) 2°),

što je trebalo dokazati.

345 Rešenje. Neka su brojevi a i b pozitivni i neka je $A = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b$. Tada je

$$\operatorname{tg} A = \frac{a-b}{1+ab} \Rightarrow A = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}.$$

Za $a = \dfrac{1}{2k-1}$ i $b = \dfrac{1}{2k+1}$ imamo

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2k-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1} = \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}}{1 + \dfrac{1}{2k-1} \cdot \dfrac{1}{2k+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2k-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \\ &\qquad + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

346. Dokaz. Neka je $\arccos x = \alpha$, $\arccos y = \beta$. Onda je $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$ i $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, tako da je $\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\sin\beta = \sqrt{1-y^2}$. Imamo

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2},$$

odakle je

$$\alpha + \beta = \pm\varphi + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

gde je $\varphi = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\,\right)$ i

$$\varphi \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Razmotrimo sledeće mogućnosti:

i) $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \wedge 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \alpha+\beta \le \pi$, pa je na osnovu (1) i (2) $\alpha + \beta = \varphi$, uz uslove

$$\begin{aligned}0 \le \alpha \le \pi - \beta \le \pi &\Leftrightarrow \cos\alpha \ge \cos(\pi-\beta) \Leftrightarrow \cos\alpha \ge -\cos\beta \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta \ge 0 \Leftrightarrow x + y \ge 0.\end{aligned}$$

ii) $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \wedge \dfrac{\pi}{2} < \beta \le \pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta \le \dfrac{3\pi}{2}$, pa imamo dva slučaja:

1° $\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta \le \pi$, pa je na osnovu (1) i (2) $\alpha+\beta = \varphi$ uz uslove date u i).

2° $\pi < \alpha + \beta \le \dfrac{3\pi}{2}$. Tada je na osnovu (1) i (2) $\alpha+\beta = -\varphi + 2\pi$, uz uslove

$$\begin{aligned}0 \le \pi - \alpha < \beta \le \pi &\Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha) > \cos\beta \Leftrightarrow -\cos\alpha > \cos\beta \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta < 0 \Leftrightarrow x + y < 0.\end{aligned}$$

iii) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \wedge 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$. Analogno kao slučaj ii).

iv) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \wedge \dfrac{\pi}{2} < \beta \le \pi \Rightarrow \pi < \alpha + \beta \le 2\pi$, pa na osnovu (1) i (2) imamo $\alpha + \beta = -\varphi + 2\pi$, uz uslove date u ii) 2°.

Prema tome, možemo zaključiti da je

$\alpha + \beta = \varphi$, za $x + y \ge 0$ (slučajevi i), ii) 1°, iii) 1°),

$\alpha + \beta = -\varphi + 2\pi$, za $x + y < 0$ (slučajevi ii) 2°, iii) 2°, iv)), što je trebalo dokazati.

347. Dokaz. Neka je $\arcsin x = \alpha$, $\arcsin y = \beta$. Onda je $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = y$ i $\alpha, \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$, pa je $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$. Tada je

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Stoga je

$$\alpha + \beta = \varphi + 2k\pi \vee \alpha + \beta = -\varphi + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

gde je

$$\varphi = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

i

$$\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]. \tag{2}$$

Razmotrimo sledeće mogućnosti:

i) $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha < 0 \wedge -\dfrac{\pi}{2} \le \beta < 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge y < 0 \wedge -\pi \le \alpha + \beta < 0$. Imamo dva slučaja:

1° $-\pi \le \alpha + \beta < -\dfrac{\pi}{2}$ Tada je na osnovu (1) i (2) $\alpha + \beta = -\varphi - \pi$ uz uslove

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha < -\frac{\pi}{2} - \beta \le 0 \Leftrightarrow \sin\alpha < \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Leftrightarrow \sin\alpha < -\cos\beta$$
$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow -x > \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 > 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1.$$

2° $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha + \beta < 0$. Tada je na osnovu (1) i (2) $\alpha + \beta = \varphi$ uz uslove

$$0 < -\alpha \le \frac{\pi}{2} - (-\beta) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin(-\alpha) \le \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\beta)\right) \Leftrightarrow -\sin\alpha \le \cos\beta$$
$$\Leftrightarrow -x \le \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 \le 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1.$$

ii) $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha < 0 \wedge 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x < 0 \wedge y \ge 0 \wedge -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha + \beta \le \dfrac{\pi}{2}$. Tada na osnovu (1) i (2) imamo $\alpha + \beta = \varphi$.

iii) $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \wedge -\dfrac{\pi}{2} \le \beta < 0$. Isto kao pod ii) imamo $\alpha + \beta = \varphi$, za $x \ge 0 \wedge y < 0$.

iv) $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \wedge 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le \alpha + \beta \le \pi$. Imamo dva slučaja:

1° $0 \le \alpha + \beta \le \dfrac{\pi}{2}$. Tada je na osnovu (1) i (2) $\alpha + \beta = \varphi$, uz uslove

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} - \beta \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha \le \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Leftrightarrow \sin\alpha \le \cos\beta$$
$$\Leftrightarrow x \le \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1.$$

2° $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta \le \pi$. Tada je na osnovu (1) i (2) $\alpha + \beta = -\varphi + \pi$, uz uslove

$$0 \le \frac{\pi}{2} - \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < \sin\beta \Leftrightarrow \cos\alpha < \sin\beta$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} < y^2 \Leftrightarrow 1 < x^2 + y^2.$$

Na kraju, zaključujemo da je:
$\alpha + \beta = \varphi$, za $x^2 + y^2 \le 1$ (slučajevi i) 2° i iv) 1°)$\vee xy \le 0$ (slučajevi ii) i iii)),
$\alpha + \beta = -\varphi - \pi$, za $x^2 + y^2 > 1 \wedge x < 0$ (slučaj i) 1°),
$\alpha + \beta = -\varphi + \pi$, za $x^2 + y^2 > 1 \wedge x > 0$ (slučaj iv) 2°),
što je trebalo dokazati.

348. Rešenje. Primenom jednakosti

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

data jednačina se svodi na

$$\frac{1}{32}\left((1 - \cos 2x)^5 + (1 + \cos 2x)^5\right) = \frac{1}{5},$$

a posle sređivanja na

$$25\cos^4 2x + 50\cos^2 2x - 11 = 0.$$

Smenom $\cos 2x = t$ dobijamo bikvadratnu jednačinu $25t^4 + 50t^2 - 11 = 0$, čija su realna rešenja $\sqrt{5}/5$ i $-\sqrt{5}/5$. Kako je $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$, imamo četiri vrednosti $\sin x$:

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}}.$$

349. Rešenje. Neka je $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Tada je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

pa data jednačina postaje

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1.$$

Posle sređivanja dobijamo jednačinu četvrtog stepena

$$t^4 + t^2 - 2t = 0.$$

Pošto je $t = 0$ jedno a $t = 1$ drugo rešenje ove jednačine, ona se može napisati u obliku

$$t(t-1)(t^2 + t + 2) = 0.$$

Realna rešenja su $t = 0$ i $t = 1$. Jednačina $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ ima rešenja

$$\frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Jednačina $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ je zadovoljena za

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \ell\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\,\ell\pi \qquad (\ell \in \mathbb{Z}).$$

350. Rešenje. 1° Ovo je zadatak 349. Dato je rešavanje na drugi način. Ako uvedemo smenu $\sin x + \cos x = t$, na osnovu koje je

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2,$$

tj.

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2},$$

data jednačina postaje

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Koreni ove jednačine su $t_1 = 1$, $t_2 = -3$. Međutim, jednačina $\sin x + \cos x = -3$ nema realna rešenja. Ostaje

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Ako levu i desnu stranu ove jednačine pomnožimo sa $\sqrt{2}/2$, dobijamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}.$$

Ova jednačina je zadovoljena za $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, tj. $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ili za $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2m\pi$, tj. $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$.

2° Kako je $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}$, imamo

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Prema tome, data jednačina je ekvivalentna jednačini $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0$.

Iz ove jednačine izlazi

$$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad \operatorname{tg} 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{m\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3},$$

gde su k, m, n celi brojevi. Međutim, drugo rešenje za neparno m otpada, jer tada $\operatorname{tg} x$ nema smisla. Za m parno, rešenje druge jednačine svodi se na rešenje prve. Pošto rešenja treće jednačine obuhvataju rešenja prve jednačine, traženo rešenje je

$$x = \frac{n\pi}{3} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

351. Rešenje. Prikažimo datu jednačinu u obliku

$$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right). \tag{1}$$

Primenom formule

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

jednačina (1) se svodi na

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right).$$

Kako je

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right),$$

jednačina (2) postaje

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)-1\right) = 0.$$

Ova jednačina je zadovoljena za

1° $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right) = 0$ ili 2° $\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}$.

Iz 1° izlazi

$$\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2} = -k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{5}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}),$$

a iz 2°

$$x-\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{6}+2m\pi \Rightarrow x = \frac{4}{15}\pi+2m\pi \quad (m\in\mathbb{Z});$$

$$x-\frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{6}+2n\pi \Rightarrow x = \frac{14}{15}\pi+2n\pi \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

352. Rešenje. 1° Kako je $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, jednačina se može prikazati u obliku

$$p\,(3\sin x - 4\sin^3 x) + \sin^3 x + p\sin x = 0,$$

tj

$$\sin x\,\left((4p-1)\sin^2 x - 4p\right) = 0.$$

Jedno rešenje je $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ i to za svako p.

Drugo rešenje se dobija iz jednačine $(4p-1)\sin^2 x - 4p = 0$, tj. iz

(1) $$\sin x = \pm\sqrt{\frac{4p}{4p-1}}.$$

Ova jednačina ima smisla ako je $0 \le \frac{4p}{4p-1} \le 1$, tj. ako je $p \le 0$.

Za $p = 0$ polazna jednačina se svodi na $\sin^3 x = 0$, odakle je $x = k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, pri čemu su ovo trostruki koreni. Za $p < 0$ iz (1) dobijamo sledeća rešenja:

$$x = \pm\arcsin\sqrt{\frac{4p}{4p-1}} + 2m\pi \quad (m\in\mathbb{Z}),$$

$$x = \pi \mp \arcsin\sqrt{\frac{4p}{4p-1}} + 2n\pi \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

Ova rešenja se mogu prikazati u jedinstvenom obliku

$$x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{4p}{4p-1}} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

pri čemu ovo rešenje obuhvata i slučaj $p = 0$.

2° Za $p = -\dfrac{1}{12}$ imamo $\sqrt{\dfrac{4p}{4p-1}} = \dfrac{1}{2}$, tako da su rešenja

$$x = k\pi, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + m\pi \qquad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

353. Rešenje. Skup dopustivih rešenja date jednačine zadovoljava uslove:

$$(1)\ \cos x \geq 0, \quad (2)\ \sin x + \cos x \geq 0, \quad (3)\ \sin x \geq 0, \quad (4)\ \sin x \geq \sqrt{\sin x + \cos x}\,.$$

Kvadriranjem uslova (4) dobijamo $\sin^2 x \geq \sin x + \cos x$. Iz (1) imamo da je $\sin x + \cos x \geq \sin x$, pa je $\sin^2 x \geq \sin x$. Iz (3) sleduje $\sin x \geq \sin^2 x$. Odavde zaključujemo da je $\sin^2 x = \sin x + \cos x$ i $\sin^2 x = \sin x$. Tada je $\cos x = 0$ pa je $\sin x = \pm 1$. Kako je $\sin x \geq 0$ (uslov (3)), dobijamo da je $\sin x = 1$, tj. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Neposrednom zamenom uveravamo se da je ovo zaista rešenje date jednačine.

354. Rešenje. Na osnovu osobine uzastopnih članova geometrijske progresije imamo

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12},$$

tj.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right)} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}.$$

Primenom jednakosti $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ i formula za transformaciju proizvoda sinusa i kosinusa, dobijamo

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x\right)} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}},$$

odakle izlazi $\cos 2x = 1 \Rightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

355. Rešenje. Pošto je $a^2 + b^2 = c^2$, deljenjem date jednačine sa c^2, dobijamo

$$4 \sin(x + B) \sin(x + A) = 1 + 4\, \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}\,.$$

Stavimo $a/c = \sin A$, $b/c = \cos A$. Pretvaranjem proizvoda sinusa u zbir, imamo

(1) $$2\left(\cos(B - A) - \cos(A + B + 2x)\right) = 1 + 4 \sin A \cos A.$$

Uglovi A i B su komplementni, tj. $A + B = \pi/2$, tako da je

$$\cos(B - A) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2A\right) = \sin 2A,$$

$$\cos(A + B + 2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x.$$

Na osnovu toga jednačina (1) se svodi na

$$2\sin 2A + 2\sin 2x = 1 + 2\sin 2A \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Rešenja ove jednačine su

$$2\,x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad 2\,x = \frac{5\pi}{6} + 2\,\ell\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \ell\pi,$$

gde su k i ℓ celi brojevi.

356. Rešenje. Iz prve jednačine imamo

$$\frac{\sin x}{\sin(y-z)} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{\sin x - \sin(y-z)}{\sin x + \sin(y-z)} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\dfrac{x+y-z}{2}\ \sin\dfrac{x-y+z}{2}}{2\sin\dfrac{x+y-z}{2}\ \cos\dfrac{x-y+z}{2}} = \frac{a-1}{a+1},$$

odakle je

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x-y+z}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x+y-z}{2}} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Slično ovom postupku dobijamo

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x+y-z}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{-x+y+z}{2}} = \frac{b-1}{b+1}, \quad \frac{\operatorname{tg}\dfrac{-x+y+z}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x-y+z}{2}} = \frac{c-1}{c+1}.$$

Množenjem jednakosti (1) i (2) dobijamo

$$1 = \frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{b-1}{b+1}\cdot\frac{c-1}{c+1} \Rightarrow ab+bc+ca = -1.$$

357. Rešenje. Ako je x rešenje nejednačine (1), njeno rešenje je i $x+2k\pi$, gde je k ceo broj. Nejednačina (1) ima smisla ako je $\sin x \geq 0$ i $1+2\cos x \geq 0$. Iz ovih nejednačina dobijamo $0 \leq x \leq 2\pi/3$. Za te vrednosti x možemo kvadrirati levu i desnu stranu nejednačine (1). Na taj način dobijamo

$$1 + 2\cos x \leq \sin^2 x \Leftrightarrow \cos x\,(2+\cos x) \leq 0.$$

Kako je za svako x ispunjena nejednakost $2+\cos x > 0$, iz poslednje nejednačine imamo $\cos x \leq 0 \Rightarrow \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$.

Na osnovu ove analize dolazimo do zaključka da je rešenje nejednačine (1): $\pi/2 \leq x \leq 2\pi/3$, ili uopšte

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \text{ ceo broj}),$$

jer je period funkcije $f(x) = \sqrt{1+2\cos x} - \sin x$ jednak 2π.

Jednakost u (1) važi za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

358. Rešenje. Uvodeći $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ nejednačinu možemo prikazati u obliku:

$$\sqrt{3}\sin^2 x - \cos^2 x + (\sqrt{3}-1)\sin x \cos x \leq 0.$$

Ako podelimo ovu nejednačinu sa $\cos^2 x$ i uzmemo $\operatorname{tg} x = t$, dobijamo

(1) $$\sqrt{3}t^2 + (\sqrt{3}-1)t - 1 \leq 0.$$

Koreni jednačine $\sqrt{3}t^2 + (\sqrt{3}-1)t - 1 = 0$ su $t_1 = -1$ i $t_2 = \sqrt{3}/3$, pa je rešenje nejednačine (1)

$$-1 \leq t \leq \sqrt{3}/3.$$

Prema tome, zadatu nejednačinu zadovoljavaju uglovi x za koje je

(2) $$-1 \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}/3.$$

Pošto je $0^\circ \leq x < 360^\circ$, iz (2) izlazi

$$(0 \leq x \leq 30^\circ) \vee (135^\circ \leq x \leq 210^\circ) \vee (315^\circ \leq x < 360^\circ).$$

359. Rešenje. Ako je $\cos\alpha = 1/2$, jednačina se svodi na linearnu jednačinu $4x+4=0$. Pošto je njeno rešenje $x=-1$, ovaj slučaj odbacujemo jer jednačina mora imati pozitivan koren. S druge strane, ako je $\cos\alpha = -1/2$, tj. $\alpha = 120^\circ$ ili $\alpha = 240^\circ$, jednačina postaje $-2x^2 + 4x = 0$. Jedan koren je $x = 2$, a drugi $x = 0$, što ispunjava uslove zadatka.

Koreni su različitog znaka ako je

$$\frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1} < 0, \text{ tj. } \frac{2\cos\alpha + 1}{2\cos\alpha - 1} < 0.$$

Ova nejednačina je ekvivalentna sa

$$(2\cos\alpha + 1)(2\cos\alpha - 1) < 0 \Rightarrow 4\cos^2\alpha - 1 < 0.$$

Rešenje ove nejednačine je

$$-\frac{1}{2} < \cos\alpha < \frac{1}{2},$$

odakle je $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ ili $240^\circ < \alpha < 300^\circ$.

Prema tome, uslove zadatka zadovoljavaju one vrednosti α koje pripadaju intervalima $(60^\circ, 120^\circ]$, $[240^\circ, 300^\circ)$.

360. Rešenje. Nejednačina ima smisla ako je $x > 0$, $x \neq 1$ i $0 < \sin x < 1$. Prikažimo datu nejednačinu u obliku $2\log_x \sin x \geq 3 - \log_{\sin x} x$. Smenom $t = \log_x \sin x$ i primenom jednakosti $\log_{\sin x} x = \dfrac{1}{\log_x \sin x} = \dfrac{1}{t}$ dobijamo nejednačinu

$$2t \geq 3 - \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{t} \geq 0$$

i njeno rešenje je $0 < t \leq 1/2 \vee t \geq 1$, tj. $0 < \log_x \sin x \leq 1/2 \vee \log_x \sin x \geq 1$. Ovo rešenje možemo napisati u obliku

(1) $$\log_x 1 < \log_x \sin x \leq \log_x \sqrt{x} \vee \log_x \sin x \geq \log_x x.$$

Razmotrimo slučajeve:

1° $0 < x < 1$. Tada se nejednačine (1) svode na

$$(2) \quad 1 > \sin x \geq \sqrt{x} \quad \vee \quad (3) \quad \sin x \leq x,$$

pri čemu se znak nejednakosti promenio u odnosu na (1), jer je osnova logaritma $x < 1$. U rešavanju ovih nejednačina primenjujemo poznatu nejednakost

$$(4) \qquad \sin x < x \qquad (x > 0).$$

Ako kvadriramo desnu stranu nejednačine (2), dobijamo $\sin^2 x \geq x$, a kako je $\sin x \geq \sin^2 x$ (za $\sin x \geq 0$), izlazi da je $\sin x \geq x$, što je nemogućno zbog (4). Prema tome, rešenje nejednačine (2) je prazan skup. Za $x \in (0,1)$ nejednačina (3) je uvek ispunjena (zbog(4)), kao i uslov $0 < \sin x < 1$. Stoga je $x \in (0,1)$ rešenje disjunkcije nejednačina (2) i (3).

2° $x > 1$. Tada se nejednačine (1) svode na

$$(5) \quad 1 < \sin x \leq \sqrt{x} \quad \vee \quad (6) \quad \sin x \geq x,$$

pri čemu je znak nejednakosti ostao isti kao u (1), jer je osnova logaritma $x > 1$. Primetimo da su obe nejednačine nemogućne. Zaista, nejednačina (5) zbog uslova $1 < \sin x$, a nejednačina (6) zbog (4), dovode do toga da je disjunkcija rešenja nejednačina (5) i (6) prazan skup.

Na osnovu 1° i 2° zaključujemo da je $x \in (0,1)$ rešenje date nejednačine.

361. Dokaz. Ako u datu jednakost uvedemo $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, dobijamo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha) + \sin(\alpha + \beta)}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{2 \sin \beta \cos \alpha}.$$

S obzirom da α ne može biti jednak $\pi/2$, pošto polazna jednakost ne bi imala smisla, poslednju jednakost možemo skratiti sa $1/\cos \alpha$. Na taj način dobijamo $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha)$.

Primenom adicione teoreme na $\cos(\beta - \alpha)$, poslednja jednakost se svodi na $\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha = 0$, tj. $\cos(\alpha + \beta) = 0$, odakle je $\alpha + \beta = \pi/2$. Prema tome, $\gamma = \pi/2$ i trougao je zaista pravougli.

362. Rešenje. Neka je $\cos A = 2t$, $\cos B = 9t$, $\cos C = 12t$. Odavde zaključujemo da su svi uglovi trougla ABC oštri jer t ne može biti negativno ili nula. Zbog toga je $\sin A = \sqrt{1 - 4t^2}$, $\sin B = \sqrt{1 - 81t^2}$.

Iz jednakosti $A + B + C = 180°$, tj. $A + B = 180° - C$, dobijamo

$$\cos(A + B) = -\cos C, \quad \text{tj.} \quad \cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C.$$

Zamenom vrednosti za kosinuse i sinuse dolazimo do iracionalne jednačine

$$18t^2 - \sqrt{(1 - 4t^2)(1 - 81t^2)} = -12t,$$

odnosno

$$(18t^2 + 12t)^2 = (1 - 4t^2)(1 - 81t^2).$$

Sređivanjem dobijamo kubnu jednačinu

$$432t^3 + 229t^2 - 1 = 0,$$

čije je jedno rešenje $t_1 = 1/16$. Ostala dva rešenja $t_{2/3} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{37}}{27}$ su negativna i ne dolaze u obzir. Za nađenu vrednost t imamo

$$\sin A = \frac{6\sqrt{7}}{16}, \quad \sin B = \frac{5\sqrt{7}}{16}, \quad \sin C = \frac{4\sqrt{7}}{16},$$

odakle izlazi traženi odnos $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$.

363. Dokaz. Označimo sa a, b, c dužine stranica trougla i sa α, β, γ naspramne uglove. Primenom sinusne i kosinusne teoreme, imamo

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b}{2R}} \cdot \frac{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2}.$$

Analogno ovoj jednakosti je

$$\operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$

Prema tome, dobijamo

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$

Pošto je na osnovu uslova zadatka $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3$, imamo da je

$$(1)\quad b^2+c^2-a^2 = \frac{k}{1}, \quad (2)\quad c^2+a^2-b^2 = \frac{k}{2}, \quad (3)\quad a^2+b^2-c^2 = \frac{k}{3},$$

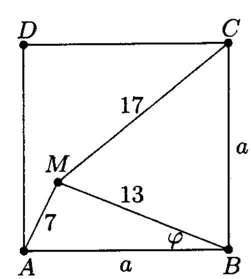
gde je k realan broj, različit od nule. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$(4) \qquad a^2+b^2+c^2 = \frac{11k}{6}.$$

Ako od (4) oduzmemo redom (1), (2) i (3), nalazimo

$$a^2 = \frac{5k}{12}, \quad b^2 = \frac{8k}{12}, \quad c^2 = \frac{9k}{12} \Rightarrow a^2 : b^2 : c^2 = 5 : 8 : 9 \Rightarrow a : b : c = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3.$$

364. Rešenje. Neka je $AB = a$, $\measuredangle ABM = \varphi$. Primenimo kosinusnu teoremu redom na trouglove ABM i MBC:



$$7^2 = a^2 + 13^2 - 2a \cdot 13 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a^2+120}{26a};$$

$$17^2 = a^2 + 13^2 - 2a \cdot 13 \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{a^2-120}{26a}.$$

S obzirom da je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, imamo

$$\left(\frac{a^2+120}{26a}\right)^2 + \left(\frac{a^2-120}{26a}\right)^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 288.$$

Površina kvadrata je 288.

365. Dokaz. Pošto su katete drugog trougla $2t$ i $1-t^2$, zaključujemo da je $0<t<1$. To znači da je dužina druge katete prvog trougla manja od 1, tj. manja od prve katete, pa je naspram nje najmanji ugao Neka je taj ugao α. Za njega je $\operatorname{tg}\alpha = t$. Neka je δ ugao u drugom trouglu naspram katete $2t$. Za njega je

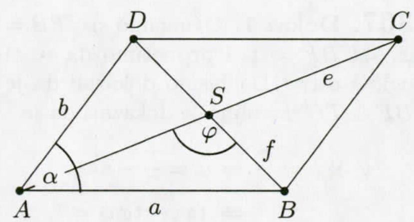
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Stavljajući $t=\operatorname{tg}\alpha$, ova jednakost postaje

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha,$$

odakle je $\delta = 2\alpha$, što je trebalo dokazati.

366. Dokaz 1. Neka je dat paralelogram $ABCD$ u kome je $AB=a$ i $AD=b$. Dijagonale $AC=e$ i $BD=f$ seku se u tački S. Označimo sa $\sphericalangle ASB=\varphi$ i $\sphericalangle DAB=\alpha$. Tada je



$$(1)\qquad P = 2P_{\Delta ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha = ab\sin\alpha,$$

$$(2)\qquad P = 4P_{\Delta ABS} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\,\sin\varphi = \frac{1}{2}\,ef\sin\varphi.$$

Iz (1) i (2) dobijamo $ab\sin\alpha = \frac{1}{2}\,ef\sin\varphi$, odakle izlazi

$$(3)\qquad ab = \frac{1}{2}\,ef\,\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABS i ASD dobijamo redom

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\,\frac{e}{2}\,\frac{f}{2}\,\cos\varphi \Rightarrow 4a^2 = e^2+f^2-2ef\cos\varphi,$$
$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\,\frac{e}{2}\,\frac{f}{2}\,\cos(\pi-\varphi) \Rightarrow 4b^2 = e^2+f^2+2ef\cos\varphi.$$

Množenjem levih i desnih strana poslednjih jednakosti dobijamo

$$(4)\qquad 16a^2b^2 = (e^2+f^2)^2 - 4e^2f^2\cos^2\varphi.$$

Ako (3) zamenimo u (4), imamo

$$16\left(\frac{1}{2}\,ef\,\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)^2 = e^4+2e^2f^2+f^4-4e^2f^2(1-\sin^2\varphi),$$
$$4e^2f^2\sin^2\varphi\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right) = (e^2-f^2)^2$$
$$4e^2f^2\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = (e^2-f^2)^2,$$

odakle je

$$(5)\qquad ef\sin\varphi = \frac{1}{2}\,|e^2-f^2|\operatorname{tg}\alpha.$$

Ako (5) zamenimo u (2), dobijamo $P = \frac{1}{4}\left|e^2 - f^2\right| \operatorname{tg}\alpha$.

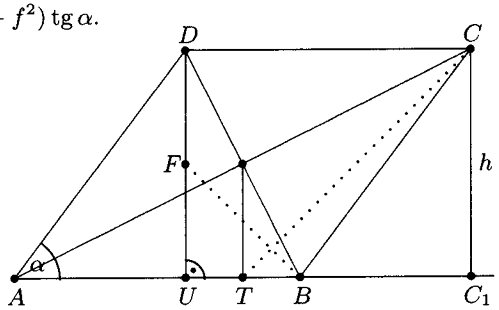
Dokaz 2. Pretpostavimo da je $e > f$. Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABD i ABC nalazimo

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \quad e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Ako od druge jednakosti oduzmemo prvu, dobijamo

$$e^2 - f^2 = 4ab\cos\alpha \Rightarrow ab\sin\alpha = \frac{1}{4}(e^2 - f^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

Kako je $P = ab\sin\alpha$, imamo $P = \frac{1}{4}(e^2 - f^2)\operatorname{tg}\alpha$.



367. Dokaz 1. Označimo $\sphericalangle CTB = \varphi$, $\sphericalangle UBF = \psi$ i primetimo da su ti uglovi oštri. Da bismo dokazali da je $BF \perp TC$ dovoljno je dokazati da je

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \psi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = 1.$$

Trouglovi ADU i BCC_1 su podudarni. Stoga je $AU = BC_1$. Kako je $UT = TB = \frac{1}{2}BU$, imamo $AT = TC_1$, tj.

$$TC_1 = AU + \frac{1}{2}BU. \tag{1}$$

Iz pravouglog trougla ADU nalazimo $h = a\sin\alpha$,

$$AU = a\cos\alpha, \tag{2}$$

pa je

$$BU = a - AU = a(1 - \cos\alpha). \tag{3}$$

Ako (2) i (3) zamenimo u (1), dobijamo

$$TC_1 = \frac{a}{2}(1 + \cos\alpha) = a\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Iz pravouglog trougla TCC_1 imamo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{CC_1}{TC_1} = \frac{h}{a\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sin\alpha}{a\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Iz pravouglog trougla BUF imamo

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{UF}{BU} = \frac{\frac{1}{2}h}{BU} = \frac{\frac{1}{2}a\sin\alpha}{a(1 - \cos\alpha)} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Na kraju dobijamo $\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 1$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 2. Primenimo metodu vektora. Jedinične vektore na $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ označimo sa $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Imamo $\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{v}$. S obzirom da je $AU = a\cos\alpha$, sleduje

$$\overrightarrow{AU} = a\cos\alpha\cdot\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{UB} = a(1-\cos\alpha)\cdot\overrightarrow{u}.$$

Polazeći od jednakosti $\overrightarrow{UD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AU} = -a\cos\alpha\cdot\overrightarrow{u} + a\,\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{UF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{UD}$, izlazi $\overrightarrow{UF} = -\frac{a}{2}\cos\alpha\cdot\overrightarrow{u} + \frac{a}{2}\overrightarrow{v}$. Pošto je $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UF}$, nalazimo

$$\overrightarrow{BF} = -a(1-\cos\alpha)\overrightarrow{u} + \Big(-\frac{a}{2}\cos\alpha\cdot\overrightarrow{u} + \frac{a}{2}\overrightarrow{v}\Big),$$

tj.

$$\overrightarrow{BF} = a\Big(-1 + \frac{1}{2}\cos\alpha\Big)\overrightarrow{u} + \frac{a}{2}\overrightarrow{v},$$

$$\overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{UB} + \overrightarrow{AD} = \frac{a}{2}(1-\cos\alpha)\overrightarrow{u} + a\,\overrightarrow{v}.$$

Sada je

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{TC} = \left(a\Big(-1+\frac{1}{2}\cos\alpha\Big)\overrightarrow{u} + \frac{a}{2}\overrightarrow{v}\right)\Big(\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)\overrightarrow{u} + a\,\overrightarrow{v}\Big) = 0,$$

gde smo primenili jednakosti $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = 1$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \cos\alpha$, pa je $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{TC}$.

368. Dokaz. Imamo

$$3\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow 2\alpha = \gamma - \beta,$$

odakle je

$$\sin 2\alpha = \sin(\gamma - \beta) \Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta.$$

Primenom sinusne i kosinusne teoreme dobijamo

$$2\cdot\frac{a}{2R}\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{c}{2R}\,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,\frac{b}{2R}$$

i posle sređivanja

$$a^4 - (b^2+c^2)a^2 + bc(c^2-b^2) = 0.$$

Rešenja ove jednačine su $a_1^2 = c^2 - bc$ i $a_2^2 = b^2 + bc$. Primetimo da drugo rešenje ne dolazi u obzir. Zaista, ako fiksiramo stranicu a i pustimo da $\alpha \to 0$, tada zbog jednakosti $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$ sleduje da $\beta \to 90^\circ$, a tada i $\gamma \to 90^\circ$ pa b, $c \to +\infty$, što je nemoguće zbog uslova $a^2 = b(b+c)$. Prema tome, imamo samo prvo rešenje $a^2 = c^2 - bc$.

369. Rešenje. Ako izraze za stranice prikažemo u obliku

$$a = p^2 - p + 2p + 1,\quad b = p^2 - 1 + 2p + 1,\quad c = 2p + 1,$$

dolazimo do sledećeg zaključka:

1° za $0 < p < 1$ važe nejednakosti $b < a < c$;

2° za $p > 1$ imamo $c < a < b$;

3° za $p = 1$ trougao je jednakostraničan sa stranicom 3.

Kao što se vidi, a je srednja po veličini stranica trougla, pa to važi i za ugao α. Primenom kosinusne teoreme, dobijamo $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Zamenom izraza za a, b, c nalazimo $\cos\alpha = 1/2$, tj. $\alpha = 60^\circ$.

NAPOMENA. Prethodno se može dokazati da za $p > 0$ važe nejednakosti $|a-b| < c < a+b$, tj. da se dati trougao može uvek konstruisati. Međutim, ako ove nejednakosti ne bi bile ispunjene, tada bi $\cos\alpha$ po modulu bio jednak ili veći od 1.

370. Rešenje. Neka su a, b, c, d stranice tetivnog četvorougla. Ako je α ugao koji zaklapaju stranice a i b, stranice c i d zaklapaju suplementan ugao $\pi - \alpha$. Neka se nad stranicama a, b i c, d nalazi dijagonala d_1. Primenom kosinusne teoreme imamo

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\alpha, \qquad d_1^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd\cos(\pi - \alpha).$$

Množenjem prve jednačine sa cd i druge sa ab i sabiranjem tako dobijenih jednačina, nalazimo

$$d_1 = \sqrt{\frac{cd\,(a^2+b^2) + ab\,(c^2+d^2)}{cd+ab}} = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

Analogno ovom postupku imamo

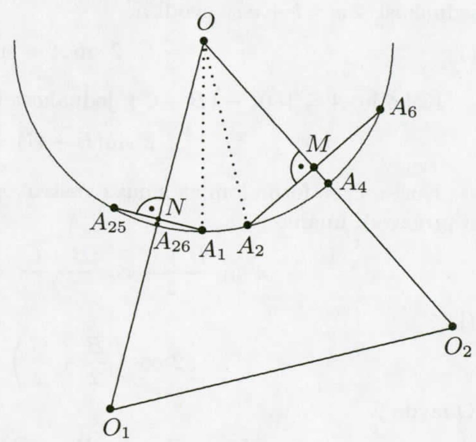
$$d_2 = \sqrt{\frac{bc\,(a^2+d^2) + ad\,(b^2+c^2)}{ad+bc}} = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

371. Rešenje. Kako je $\cos 5^\circ > \cos 35^\circ > \cos 50^\circ$, najveći ugao trougla je naspram stranice trougla dužine $\cos 5^\circ$. Ako taj ugao označimo sa α, na osnovu kosinusne teoreme imamo:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\cos^2 50^\circ + \cos^2 35^\circ - \cos^2 5^\circ}{2\cos 50^\circ \cos 35^\circ} \\
&= \frac{\sin^2 40^\circ + \frac{1}{2}(1+\cos 70^\circ) - \frac{1}{2}(1+\cos 10^\circ)}{2\sin 40^\circ \cos 35^\circ} \qquad (\text{jer je } \cos 50^\circ = \sin 40^\circ) \\
&= \frac{\sin^2 40^\circ - \frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)}{2\sin 40^\circ \cos 35^\circ} \\
&= \frac{\sin^2 40^\circ - \frac{1}{2}\cdot 2\sin 40^\circ \sin 30^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 30^\circ}{2\cos 35^\circ} \\
&= \frac{2\cos 35^\circ \sin 5^\circ}{2\cos 35^\circ} = \sin 5^\circ = \cos 85^\circ.
\end{aligned}$$

Prema tome, iz jednakosti $\cos\alpha = \cos 85^\circ$ dobijamo $\alpha = 85^\circ$.

372. Dokaz. Neka je poluprečnik kruga k jednak 1. Primetimo da su $\sphericalangle A_{26}OA_1 = \pi/13$, $\sphericalangle A_2OA_4 = 2\pi/13$, $\sphericalangle O_1OO_2 = 4\pi/13$. Tada se iz pravouglih trouglova OA_1N i OA_2M dobijamo



$$OO_1 = 2 \cdot ON = 2\cos\frac{\pi}{13},$$
$$OO_2 = 2 \cdot OM = 2\cos\frac{2\pi}{13}.$$

Ako primenimo kosinusnu teoremu na trougao O_1OO_2, imamo

$$\begin{aligned} O_1O_2^{\,2} &= 4\cos^2\frac{\pi}{13} + 4\cos^2\frac{2\pi}{13} \\ &\quad -2 \cdot 2\cos\frac{\pi}{13} \cdot 2\cos\frac{2\pi}{13} \cdot \cos\frac{4\pi}{13}. \end{aligned}$$

Stavimo $\theta = \pi/13$. Primenom formule $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, dobijamo

$$O_1O_2^{\,2} = 4 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta - 8\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta,$$

ili

$$\begin{aligned} O_1O_2^{\,2} \cdot \sin\theta &= 4\sin\theta + 2\sin\theta\cos 2\theta + 2\sin\theta\cos 4\theta - 8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta \\ &= 4\sin\theta + \sin 3\theta - \sin\theta + \sin 5\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta \\ &= 3\sin\theta, \end{aligned}$$

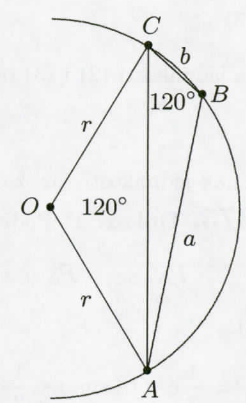
pri čemu smo upotrebili transformaciju

$$8\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta = 4\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta = 2\sin 4\theta\cos 4\theta = \sin 8\theta = \sin 5\theta.$$

Prema tome,

$$O_1O_2^{\,2}\sin\theta = 3\sin\theta \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{3}.$$

373. Rešenje. Pošto postoje tri stranice šestougla koje imaju dužinu a i tri stranice koje imaju dužinu b, moraju postojati bar dva temena šestougla u kojima se spajaju stranice dužina a i b. Kako je luk ABC trećina obima kruga, izlazi da je $\sphericalangle COA = 120^\circ$. Ugao ABC je periferijski ugao nad dužim lukom AC, pa je i $\sphericalangle ABC = 120^\circ$. U temenu B se spajaju stranice dužina a i b. Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABC i OAC imamo



$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ \\ &= r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120^\circ, \end{aligned}$$

odakle je

$$3r^2 = a^2 + ab + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

374. Dokaz. Primenom sinusne teoreme

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

jednakost $2a = b + c$ se svodi na

$$2\sin A = \sin B + \sin C. \tag{1}$$

Kako je $A = 180^\circ - (B + C)$, jednakost (1) postaje

$$2\sin(B + C) = \sin B + \sin C.$$

Koristeći se formulom za sinus dvostrukog ugla i formulom za pretvaranje zbira sinusa u proizvod, imamo

$$4\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

tj.

$$2\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right).$$

Odavde je

$$2\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

odnosno

$$3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

Imamo

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}} \tag{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}.$$

Kako je $\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2 \geq 4\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 4\cdot\frac{1}{3}$, nalazimo

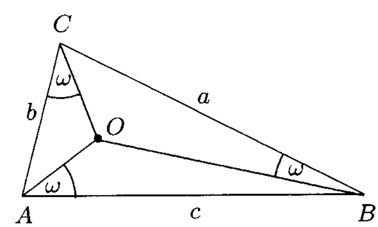
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{3}$$

Iz jednakosti (2) i (3) dobijamo

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \leq \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow A \leq \frac{\pi}{3}.$$

Znak jednakosti važi za jednakostraničan trougao.

375. Dokaz. 1° Pođimo od jednakosti



$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOB} + P_{\triangle BOC} + P_{\triangle COA},$$

tj.

$$P = \frac{1}{2}c\cdot OA\sin\omega + \frac{1}{2}a\cdot OB\sin\omega + \frac{1}{2}b\cdot OC\sin\omega$$

Tada je

$$c\cdot OA + a\cdot OB + b\cdot OC = \frac{2P}{\sin\omega}. \tag{1}$$

Primenom kosinusne teoreme na trouglove OAB, OBC, OCA dobijamo redom

$$\begin{aligned} OB^2 &= c^2 + OA^2 - 2 \cdot c \cdot OA \cos\omega, \\ OC^2 &= a^2 + OB^2 - 2 \cdot a \cdot OB \cos\omega, \\ OA^2 &= b^2 + OC^2 - 2 \cdot b \cdot OC \cos\omega. \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednakosti nalazimo

$$c \cdot OA + a \cdot OB + b \cdot OC = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\cos\omega}. \tag{2}$$

Izjednačavanjem desnih strana jednakosti (1) i (2) dolazimo do jednakosti

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4P}. \tag{3}$$

Kako je

$$\begin{aligned} 4P(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) &= 4P\operatorname{ctg}\alpha + 4P\operatorname{ctg}\beta + 4P\operatorname{ctg}\gamma \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}bc\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha + 4 \cdot \frac{1}{2}ca\sin\beta\operatorname{ctg}\beta + 4 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\gamma\operatorname{ctg}\gamma \\ &= 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta + 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao ABC imamo dalje

$$\begin{aligned} 4P(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) &= (b^2+c^2-a^2) + (c^2+a^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2) \\ &= a^2+b^2+c^2, \end{aligned}$$

odakle je

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4P}. \tag{4}$$

Najzad, iz (3) i (4) dobijamo jednakost koju je trebalo dokazati.

2° Imamo

$$P(\Delta AOB) = \frac{1}{2}c \cdot OA\sin\omega, \quad P(\Delta AOB) = \frac{1}{2}OA \cdot OB\sin\sphericalangle AOB. \tag{5}$$

Kako je $\sphericalangle AOB = \pi - (\beta - \omega + \omega) = \pi - \beta$ (iz ΔAOB), nalazimo

$$P(\Delta AOB) = \frac{1}{2}OA \cdot OB\sin\omega. \tag{6}$$

Stoga iz (5) i (6) sleduje

$$OB = \frac{c}{\sin\beta}\sin\omega. \tag{7}$$

Analogno dokazujemo jednakosti

$$OA = \frac{b}{\sin\alpha}\sin\omega, \quad OC = \frac{a}{\sin\gamma}\sin\omega. \tag{8}$$

Ako jednakosti (7) i (8) zamenimo u (1), dobijamo

$$\frac{2P}{\sin\omega} = c\,\frac{b}{\sin\alpha}\,\sin\omega + a\,\frac{c}{\sin\beta}\,\sin\omega + b\,\frac{a}{\sin\gamma}\,\sin\omega,$$

$$\frac{2P}{\sin^2\omega} = \frac{bc\sin\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{ca\sin\beta}{\sin^2\beta} + \frac{ab\sin\gamma}{\sin^2\gamma},$$

$$\frac{2P}{\sin^2\omega} = \frac{2P}{\sin^2\alpha} + \frac{2P}{\sin^2\beta} + \frac{2P}{\sin^2\gamma}$$

i deljenjem sa $2P$ izlazi jednakost 2°.

3° Imamo

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \alpha+\beta=\pi-\gamma \Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}(\pi-\gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha} = -\operatorname{ctg}\gamma \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

Iz 1° nalazimo

$$\operatorname{ctg}^2\omega = \operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma+2(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha)$$

i pošto je

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma \ge \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha,$$

imamo

$$\operatorname{ctg}^2\omega \ge 3(\underbrace{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha}_{=1}) \Rightarrow \operatorname{ctg}\omega \ge \sqrt{3} \Rightarrow \omega \le \pi/6.$$

Znak jednakosti važi ako je trougao ABC jednakostraničan.

NAPOMENA. Može se dokazati da je $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$. Zaista

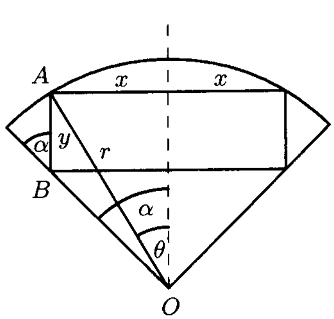
$$1^\circ \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2\omega = \operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma+2(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha)$$
$$(\text{jer je } 0<\omega<\pi/2)$$

$$\Leftrightarrow 1+\operatorname{ctg}^2\omega = (1+\operatorname{ctg}^2\alpha)+(1+\operatorname{ctg}^2\beta)+(1+\operatorname{ctg}^2\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Ugao ω naziva se Brocardov ugao (Henri Brocard (1845–1922) francuski matematičar).

376. Rešenje. Ako su $2x$ i y stranice upisanog pravougaonika, njegova površina je



(1) $$S = 2xy.$$

Imamo $x = r\sin\theta$, dok iz trougla ABO, primenom sinusne teoreme, izlazi

$$\frac{y}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{r}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

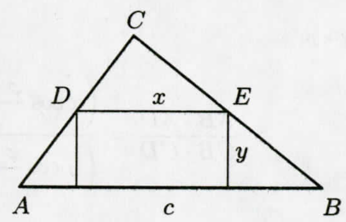
Zamenom x i y u (1) dobijamo

$$S = 2r^2\,\frac{\sin(\alpha-\theta)\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{r^2}{\sin\alpha}\big(\cos(\alpha-2\theta)-\cos\alpha\big).$$

Maksimalno S dobijamo za $\alpha - 2\theta = 0$, tj. za $\theta = \alpha/2$:

$$S_{\max} = \frac{r^2}{\sin\alpha}\,(1-\cos\alpha) = r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

377. Rešenje. Na slici je prikazan trougao ABC sa upisanim pravougaonikom, čije su stranice x i y. Neka je c dužina stranice AB i h visina trougla koja odgovara stranici AB. Iz sličnosti trouglova DEC i ABC dobijamo



$$\frac{x}{h-y} = \frac{c}{h} \Rightarrow x = c - \frac{c}{h}\,y.$$

Kvadrat dijagonale pravougaonika jednak je

$$d^2 = x^2 + y^2 = \left(c - \frac{c}{h}\,y\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c^2}{h^2}+1\right)y^2 - \frac{2c^2}{h}\,y + c^2.$$

Kao što se vidi, d^2 je kvadratni trinom po y oblika $\alpha y^2 - \beta y + \gamma$, gde je $\alpha > 0$. Trinom ima minimalnu vrednost za $y = \beta/(2\alpha)$.

U našem slučaju je $\beta = \dfrac{2c^2}{h}$ i $\alpha = \dfrac{c^2}{h^2} + 1$, tako da se najmanja dijagonala dobija za

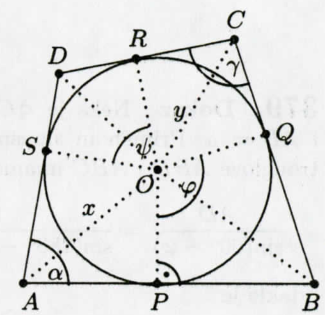
$$y = \frac{\dfrac{2c^2}{h}}{2\left(\dfrac{c^2}{h^2}+1\right)} = \frac{c^2 h}{c^2+h^2}.$$

Tada je

$$x = c - \frac{c}{h}\,y = c - \frac{c}{h}\,\frac{c^2 h}{c^2+h^2} = \frac{ch^2}{c^2+h^2},$$

tako da je $x : y = h : c$.

378. Dokaz. Neka je $OA = x$, $OC = y$, $\measuredangle BAD = \alpha$, $\measuredangle BCD = \gamma$, $\measuredangle POQ = \varphi$, $\measuredangle ROS = \psi$ i r poluprečnik upisanog kruga. Tada iz pravouglog trougla AOP imamo



$$AP = x\cos\frac{\alpha}{2}, \quad r = x\sin\frac{\alpha}{2},$$

a iz pravouglog trougla BOP :

$$BP = r\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = x\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

pa je

$$AB = AP + BP = x\cos\frac{\alpha}{2} + x\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = x\,\frac{\cos\dfrac{\varphi-\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}.$$

Analogno dobijamo

$$AD = x\,\frac{\cos\dfrac{\psi-\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\psi}{2}}, \quad BC = y\,\frac{\cos\dfrac{\varphi-\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}, \quad CD = y\,\frac{\cos\dfrac{\psi-\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\psi}{2}}.$$

Stoga je

(1)
$$\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD} = \frac{\left(x\cos\dfrac{\varphi-\alpha}{2}\Big/\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(x\cos\dfrac{\psi-\alpha}{2}\Big/\cos\dfrac{\psi}{2}\right)}{\left(y\cos\dfrac{\varphi-\gamma}{2}\Big/\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(y\cos\dfrac{\psi-\gamma}{2}\Big/\cos\dfrac{\psi}{2}\right)}.$$

Iz četvorouglova $APOS$ i $CQOR$ je $\sphericalangle POS = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle QOR = 180^\circ - \gamma$, a kako je $\varphi + \psi + \sphericalangle POS + \sphericalangle QOR = 360^\circ$, imamo $\varphi + \psi + 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \gamma = 360^\circ$, tj. $\varphi + \psi = \alpha + \gamma$, pa je

(2) $$\varphi - \alpha = \gamma - \psi$$

i

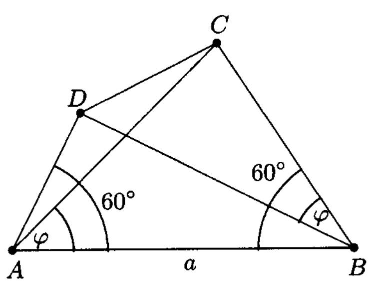
(3) $$\gamma - \varphi = \psi - \alpha.$$

Ako iskoristimo (2) i (3) u jednakosti (1), dobijamo $\dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD} = \dfrac{x^2}{y^2}$, što je trebalo dokazati.

Napomena. Ako je O centar upisanog kruga u četvorougao $ABCD$, tada je $\dfrac{AO\cdot BO}{CO\cdot DO} = \dfrac{AB}{CD}$. Zaista, neka je $BO = u$, $DO = v$. Tada je

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}, \quad \frac{u^2}{v^2} = \frac{AB\cdot CB}{CD\cdot AD} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{u^2}{v^2} = \frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}\cdot\frac{AB\cdot CB}{CD\cdot AD}$$
$$\Rightarrow \frac{x\cdot u}{y\cdot v} = \frac{AB}{CD}.$$

379. Dokaz. Neka je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBD = \varphi$ i $AB = a$. Primenom sinusne teoreme redom na trouglove ABD i ABC imamo



$$\frac{AD}{\sin(60^\circ - \varphi)} = \frac{a}{\sin(180^\circ - 60^\circ - (60^\circ - \varphi))},$$

odakle je

(1) $$AD = a\cdot\frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin(60^\circ + \varphi)};$$

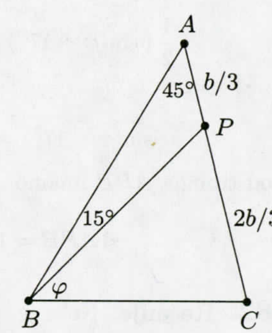
$$\frac{BC}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin(180^\circ - (60^\circ + \varphi))} \Rightarrow \quad (2)\quad BC = a\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)}.$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$\begin{aligned} AD + BC &= a \cdot \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin(60^\circ + \varphi)} + a \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} = a \cdot \frac{\sin(60^\circ - \varphi) + \sin\varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \\ &= a \cdot \frac{2\sin 30^\circ \cos(30^\circ - \varphi)}{\sin(60^\circ + \varphi)}. \end{aligned}$$

Pošto je $\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos(30^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$, iz poslednje jednakosti izlazi $AD + BC = a$, što je trebalo dokazati.

380. Rešenje. Neka je $AC = b$, $\sphericalangle PBC = \varphi$. Tada je $AP = \frac{1}{3}b$, $PC = \frac{2}{3}b$ i $\sphericalangle ACB = 120^\circ - \varphi$. Primenom sinusne teoreme redom na trouglove ABP i BPC imamo



$$\frac{BP}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{3}b}{\sin 15^\circ} \Rightarrow (1)\ BP = \frac{1}{3}b \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$\frac{BP}{\sin(120^\circ - \varphi)} = \frac{\frac{2}{3}b}{\sin\varphi} \Rightarrow (2)\ BP = \frac{2}{3}b \cdot \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Iz (1) i (2) sleduje

$$\frac{2}{3}b \cdot \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{1}{3}b \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}$$

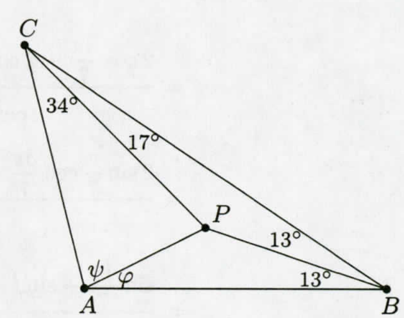
$$2 \cdot \frac{\sin 120^\circ \cos\varphi - \cos 120^\circ \sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{3\sin 15^\circ - 4\sin^3 15^\circ}{\sin 15^\circ}, \text{ tj.}$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi + \frac{1}{2}\right) = 3 - 4\sin^2 15^\circ \Rightarrow \sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi + 1 = 3 - 4\,\frac{1 - \cos 30^\circ}{2},$$

odakle je $\operatorname{ctg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Prema tome, $\sphericalangle ACB = 120^\circ - \varphi = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

381. Rešenje. Označimo sa $\sphericalangle PAB = \varphi$, $\sphericalangle PAC = \psi$. Tada je $\varphi + \psi = 103^\circ$. Ako primenimo sinusnu teoremu redom na trouglove PAB, PBC i PCA, imamo



$$\frac{PA}{\sin 13^\circ} = \frac{PB}{\sin\varphi}, \quad \frac{PB}{\sin 17^\circ} = \frac{PC}{\sin 13^\circ},$$

$$\frac{PC}{\sin\psi} = \frac{PA}{\sin 34^\circ}.$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$\frac{PA}{\sin 13^\circ} \cdot \frac{PB}{\sin 17^\circ} \cdot \frac{PC}{\sin\psi} = \frac{PB}{\sin\varphi} \cdot \frac{PC}{\sin 13^\circ} \cdot \frac{PA}{\sin 34^\circ},$$

odakle je

$$\frac{1}{\sin 17^\circ \sin\psi} = \frac{1}{\sin\varphi \sin 34^\circ} \Rightarrow \sin 34^\circ \sin\varphi = \sin 17^\circ \sin\psi.$$

Pošto je $\psi = 103^\circ - \varphi$, sleduje

$$2\sin 17^\circ \cos 17^\circ \sin\varphi = \sin 17^\circ \sin(103^\circ - \varphi) \Rightarrow \cos 17^\circ \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(103^\circ - \varphi).$$

Kako je $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ i $\sin(103^\circ - \varphi) = \cos(13^\circ - \varphi)$, imamo

$$\cos 17^\circ \sin\varphi = \sin 30^\circ \cos(13^\circ - \varphi).$$

Transformacijom proizvoda sinusa i kosinusa u zbir sinusa dobijamo

$$\frac{1}{2}\big(\sin(\varphi + 17^\circ) + \sin(\varphi - 17^\circ)\big) = \frac{1}{2}\big(\sin(43^\circ - \varphi) + \sin(17^\circ + \varphi)\big),$$

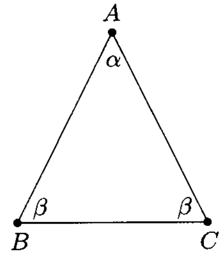
tj.

$$\sin(\varphi - 17^\circ) = \sin(43^\circ - \varphi) \Rightarrow \varphi - 17^\circ = 43^\circ - \varphi \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Kod trougla APB imamo

$$\measuredangle APB = 180^\circ - (\varphi + 13^\circ) = 180^\circ - (30^\circ + 13^\circ) = 137^\circ.$$

382. Rešenje. Neka je $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \measuredangle C = \beta$. Primenom sinusne teoreme imamo



$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi - 2\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin 2\beta} = \frac{\sin\beta}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{1}{2\cos\beta}.$$

Na osnovu uslova zadatka dobijamo

$$\frac{1}{2\cos\beta} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{2\cos\frac{3\pi}{7} + 2\cdot 2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{3\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{3\pi}{7} + 2\cos\frac{5\pi}{7} + 2\cos\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{3\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\frac{6\pi}{7} + \sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}$$

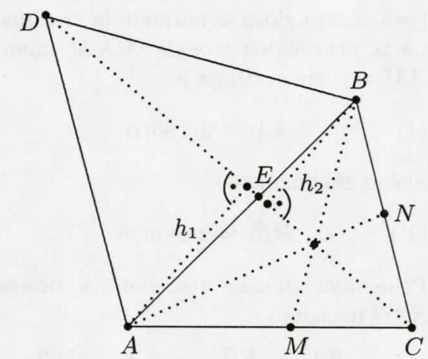
$$= \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}.$$

Na kraju, primenom jednakosti $\sin\dfrac{6\pi}{7} = \sin\dfrac{\pi}{7}$, nalazimo

$$\frac{1}{2\cos\beta} = \frac{1}{2\cos\dfrac{3\pi}{7}} \Rightarrow \cos\beta = \cos\frac{3\pi}{7} \Rightarrow \beta = \frac{3\pi}{7}.$$

Prema tome, uglovi trougla su $\dfrac{\pi}{7}$, $\dfrac{3\pi}{7}$, $\dfrac{3\pi}{7}$.

383. Rešenje. Na osnovu teoreme o simetrali ugla imamo



$$\text{(1)}\qquad \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}.$$

Kako je

$$P_1 = P(\Delta ACD) = \frac{1}{2}\, CD\cdot h_1,$$

$$P_2 = P(\Delta CBD) = \frac{1}{2}\, CD\cdot h_2,$$

sleduje

$\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{h_2}{h_1}$. Pošto je $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{h_2}{h_1}$, dobijamo

$$\text{(2)}\qquad \frac{P_2}{P_1} = \frac{BE}{EA}.$$

Ako iskoristimo činjenicu da je trougao ABD jednakostraničan, a zatim primenimo sinusnu teoremu na trougao ABC, nalazimo

$$\text{(3)}\qquad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}\, BC\cdot BD\,\sin 120^\circ}{\frac{1}{2}\, AC\cdot AD\,\sin 105^\circ} = \frac{BC}{AC}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{BC}{AC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle B}{\sin\sphericalangle C}$$

$$= \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}.$$

Iz jednakosti (2) i (3) sleduje

$$\text{(4)}\qquad \frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AB}.$$

Sada imamo

$$\text{(5)}\qquad \frac{AM}{MC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BE}{EA} = \frac{AB}{BC}\cdot\frac{\frac{1}{2}\,BC}{\frac{1}{2}\,BC}\cdot\frac{BC}{AB} = 1,$$

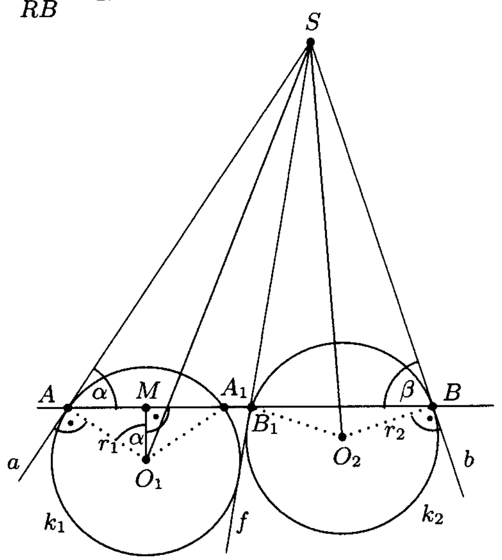
gde smo iskoristili (1), (4) i činjenicu da je AN težišna duž. Primenom Čevijeve[1] teoreme iz (5) sleduje tvrđenje zadatka.

[1] Đovani Čeva (Giovanni Ceva (1648–1734)), italijanski matematičar.

NAPOMENA. Čevijeva teorema glasi: *Ako su P, Q, R tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC, tada se prave AP, BQ, CR seku u jednoj tački ako je i samo ako*

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

384. Dokaz. Označimo sa $\measuredangle SAB = \alpha$, $\measuredangle SBA = \beta$. Tada je $\measuredangle AO_1M = \alpha$ (jednakost uglova sa normalnim kracima), pa iz pravouglog trougla AO_1M imamo $AM = r_1 \sin\alpha$. Stoga je



(1) $\qquad AA_1 = 2r_1 \sin\alpha.$

Slično zaključujemo

(1′) $\qquad BB_1 = 2r_2 \sin\beta.$

Primenom sinusne teoreme na trougao SAB nalazimo

(2) $\qquad \dfrac{SA}{\sin\beta} = \dfrac{SB}{\sin\alpha} \Rightarrow \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$

Pošto je $\measuredangle ASO_1 = \measuredangle BSO_2$, tada je

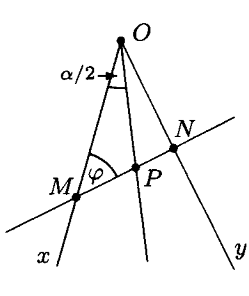
(3) $$\Delta SAO_1 \sim \Delta SBO_2 \Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Iz (2) i (3) sleduje

(4) $$r_1 \sin\alpha = r_2 \sin\beta$$

i najzad iz (1), (1′) i (4) dobijamo $AA_1 = BB_1$.

385. Dokaz. Dokažimo najpre pomoćno tvrđenje. Neka je dat $\measuredangle xOy = \alpha$. Proizvoljna prava seče Ox, Oy i simetralu datog ugla u tačkama M, N i P. Tada je



$$\frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}=\frac{2\cos(\alpha/2)}{OP}.$$

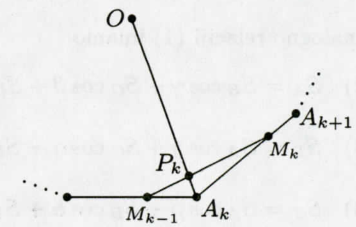
Primenom sinusne teoreme na trouglove OMN i ONP imamo

$$\frac{OP}{\sin\varphi}=\frac{OM}{\sin\left(\pi-\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)} \quad\Rightarrow\quad (1)\quad \frac{1}{OM}=\frac{\sin\varphi}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{1}{OP},$$

$$\frac{OP}{\sin\left(\pi-(\varphi+\alpha)\right)}=\frac{ON}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)} \quad\Rightarrow\quad (2)\quad \frac{1}{ON}=\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{1}{OP}.$$

Sabiranjem (1) i (2) dobijamo

$$\frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}=\frac{\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{1}{OP}$$
$$=\frac{2\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{1}{OP}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{OP}.$$



Ako primenimo pomoćno tvrđenje na $\sphericalangle M_{k-1}A_kM_k=\dfrac{n-2}{n}\pi$, nalazimo

$$\frac{1}{A_kM_{k-1}}+\frac{1}{A_kM_k}=\frac{2\cos\dfrac{n-2}{2n}\pi}{A_kP_k},$$

gde je $k=1,2,\dots,n;\ M_0\equiv M_n$.

Pošto je $\cos\dfrac{n-2}{2n}\pi=\sin\dfrac{\pi}{n}$, sabiranjem ovih n jednakosti dobijamo

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{A_kM_{k-1}}+\frac{1}{A_kM_k}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_kP_k}.$$

Sada je

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{A_kM_{k-1}}+\frac{1}{A_kM_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{A_kM_k}+\frac{1}{A_{k+1}M_k}\right)\quad (A_{n+1}\equiv A_1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_kM_k+A_{k+1}M_k}{A_kM_k\cdot A_{k+1}M_k}$$
$$=a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_kM_k\cdot A_{k+1}M_k},$$

jer je $A_kM_k+A_{k+1}M_k=a$.

Ako (4) zamenimo u (3) i dobijenu jednakost podelimo sa a, nalazimo traženu jednakost.

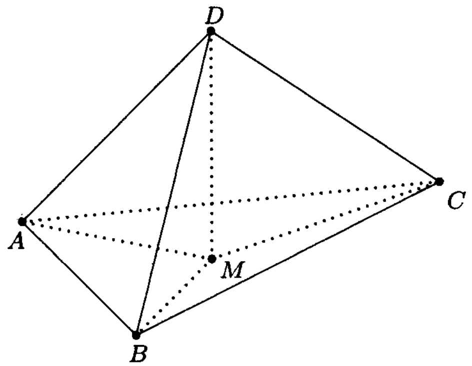
386. Dokaz. 1° Primenimo teoremu: *Ako u ortogonalnoj projekciji neke ravni π na neku ravan π' poligonalnoj površi $\omega\subset\pi$ odgovara poligonska površ $\omega'\subset\pi'$, i ako se pri tome ravni π i π' seku pod oštrim uglom θ, tada je $S(\omega')=S(\omega)\cos\theta$, gde su $S(\omega)$ i $S(\omega')$ površine poligonskih površi ω i ω'.*

Neka je tačka M ortogonalna projekcija tačke D na na ravan osnove ABC datog tetraedra. Tada je

$$S_D=S(\Delta AMB)+S(\Delta BMC)+S(\Delta CMA).$$

Pošto je na osnovu navedene teoreme

$$S(\Delta AMB) = S_C \cos\gamma',$$
$$S(\Delta BMC) = S_A \cos\alpha',$$
$$S(\Delta CMA) = S_B \cos\beta',$$



dobijamo

(1) $S_D = S_A \cos\alpha' + S_B \cos\beta' + S_C \cos\gamma'.$

Analogno relaciji (1) imamo

(2) $S_A = S_B \cos\gamma + S_C \cos\beta + S_D \cos\alpha' \Rightarrow$ (2') $\cos\alpha' = \dfrac{S_A - S_B\cos\gamma - S_C\cos\beta}{S_D}$,

(3) $S_B = S_A \cos\gamma + S_C \cos\alpha + S_D \cos\beta' \Rightarrow$ (3') $\cos\beta' = \dfrac{S_B - S_A\cos\gamma - S_C\cos\alpha}{S_D}$,

(4) $S_C = S_A \cos\beta + S_B \cos\alpha + S_D \cos\gamma' \Rightarrow$ (4') $\cos\gamma' = \dfrac{S_C - S_A\cos\beta - S_B\cos\alpha}{S_D}$.

Kada (2'), (3') i (4') zamenimo u (1) dobijamo traženu jednakost 1°.

2° Ako jednakosti (1), (2), (3) i (4) podelimo redom sa S_D, S_A, S_B i S_C i saberemo dobijene jednakosti, imamo

$$4 = \left(\frac{S_B}{S_C} + \frac{S_C}{S_B}\right)\cos\alpha + \left(\frac{S_A}{S_C} + \frac{S_C}{S_A}\right)\cos\beta + \left(\frac{S_A}{S_B} + \frac{S_B}{S_A}\right)\cos\gamma$$
$$+ \left(\frac{S_A}{S_D} + \frac{S_D}{S_A}\right)\cos\alpha' + \left(\frac{S_B}{S_D} + \frac{S_D}{S_B}\right)\cos\beta' + \left(\frac{S_C}{S_D} + \frac{S_D}{S_C}\right)\cos\gamma'.$$

Kako je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ $(a, b > 0)$, a svi kosinusi su pozitivni, dobijamo

$$4 \geq 2\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma + 2\cos\alpha' + 2\cos\beta' + 2\cos\gamma'$$

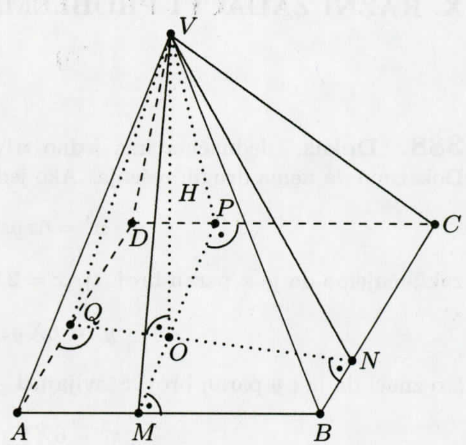
i posle deljenja sa 2 sleduje tražena nejednakost. Znak jednakosti važi za tetraedar koji ima jednake površine bočnih strana.

NAPOMENA. Jednakost (1) važi ne samo kada su uglovi α', β', γ' oštri, već i kada među njima postoji diedar čiji je ugao tup, što se jednostavno dokazuje.

387. Rešenje. Neka je O ortogonalna projekcija vrha piramide V na ravan osnove.

Ortogonalne projekcije tačke O na stranice AB, BC, CD, DA paralelograma $ABCD$ označimo redom sa M, N, P, Q. Tada su $\sphericalangle VMO$, $\sphericalangle VNO$, $\sphericalangle VPO$, $\sphericalangle VQO$ uglovi koje bočne strane ABV, BCV, CDV, DAV grade sa ravni osnove. Iz datih uslova imamo da je $\sphericalangle VMO = \alpha$, $\sphericalangle VNO = 2\alpha$, $\sphericalangle VPO = 4\alpha$, $\sphericalangle VQO = 2\alpha$.

Iz pravouglih trouglova VMO, VNO, VPO i VQO imamo



$$(1)\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\sphericalangle VMO = \frac{OM}{H},$$

$$(2)\qquad \operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\sphericalangle VNO = \frac{ON}{H},$$

$$(3)\qquad \operatorname{ctg}4\alpha = \operatorname{ctg}\sphericalangle VPO = \frac{OP}{H},$$

$$(4)\qquad \operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\sphericalangle VQO = \frac{OQ}{H},$$

gde je H visina piramide.

Iz (1) i (3) nalazimo

$$(5)\qquad \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}4\alpha = \frac{OM}{H} + \frac{OP}{H} = \frac{MP}{H},$$

a isto tako iz (2) i (4)

$$(6)\qquad \operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{ON}{H} + \frac{OQ}{H} = \frac{NQ}{H}.$$

Pošto je $AB \cdot MP = BC \cdot NQ = S$, gde je S površina paralelograma $ABCD$, dobijamo $AB : BC = NQ : MP$, a kako je $AD : BC = 16 : 19$, izlazi

$$(7)\qquad NQ : MP = 16 : 19.$$

Ako (5) i (6) zamenimo u (7), dobijamo

$$2\operatorname{ctg}2\alpha : (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}4\alpha) = 16 : 19 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha} = \frac{19}{8},$$

ili

$$\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\dfrac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{18}{9} \Rightarrow \frac{4}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2 2\alpha = \frac{15}{4},$$

odakle je

$$\frac{4}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 = \frac{15}{4}.$$

Smenom $x = \operatorname{tg}^2\alpha$ dobijamo jednačinu

$$\frac{4}{1-x} - \frac{4x}{(1-x)^2} = \frac{15}{4} \Rightarrow 15x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5} \vee x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Kako je $x > 0$, izlazi $x = 1/5$, odakle je $\operatorname{tg}^2\alpha = 1/5 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{5}$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, pa je $\alpha = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{5})$.

X. RAZNI ZADACI I PROBLEMI

388. Dokaz. Jednačina ima jedno trivijalno celobrojno rešenje: $x = y = z = 0$. Dokažimo da nema drugih rešenja. Ako jednačinu prikažemo u obliku

$$x^3 = 6xyz - 2y^3 - 4z^3,$$

zaključujemo da je x paran broj, tj. $x = 2X$. Data jednačina postaje

$$y^3 = 6Xyz - 4X^3 - 2z^3,$$

što znači da je i y paran broj. Stavljajući $y = 2Y$ imamo

$$z^3 = 6XYz - 2X^3 - 4Y^3,$$

pa je i z paran broj. Najzad, za $z = 2Z$ dobijamo početnu jednačinu

$$X^3 + 2Y^3 + 4Z^3 - 6XYZ = 0.$$

Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do toga da su i X, Y, Z parni brojevi, itd. do beskonačnosti, što je nemogućno.

389. Rešenje. Ako datu jednačinu napišemo u obliku

$$x^3 = 2\,y^3 + 4\,z^3, \tag{1}$$

zaključujemo da je x parno, tj. $x = 2x_1$. Tada je $8\,x_1^3 = 2\,y^3 + 4\,z^3$, tj.

$$y^3 = 4\,x_1^3 - 2\,z^3.$$

Odavde se vidi da je i y parno. Stavljajući $y = 2\,y_1$, iz poslednje jednačine dobijamo

$$z^3 = 2\,x_1^3 - 4\,y_1^3.$$

Pošto je z parno, smenom $z = 2\,z_1$ dolazimo do jednačine

$$x_1^3 = 2\,y_1^3 + 4\,z_1^3,$$

a to je jednačina (1). Na osnovu toga zaključujemo da ako su parni brojevi x, y, z rešenja jednačine (1), tada su i njihove polovine x_1, y_1, z_1, koje su parni brojevi, takođe rešenja jednačine (1). Rešenja su i njihove četvrtine, osmine, itd. Takvu osobinu imaju jedino brojevi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

390. Rešenje 1. Neka su x_1, x_2 i x_3 koreni date jednačine. Na osnovu VIÈTE-ovih pravila imamo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1. \tag{1}$$

Iz jednakosti

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

primenom (1) dobijamo

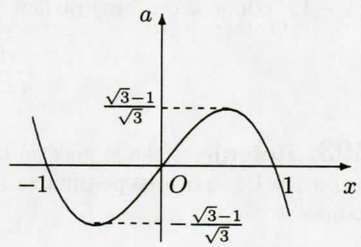
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2.$$

Pošto su koreni celi brojevi, a zbir njihovih kvadrata je 2, jedan koren mora biti jednak nuli, odakle izlazi $a = 0$. Zaista, za $a = 0$ jednačina ima tri celobrojna korena, $-1, 0, 1$.

Rešenje 2. Prikažimo datu jednačinu u obliku

$$a = -x^3 + x = -x\,(x-1)(x+1),$$

i nacrtajmo grafik ove funkcije. Iz uslova



$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = -3x^2 + 1 = 0$$

dobijamo $x = \pm\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Za $x = -1/\sqrt{3}$ funkcija ima lokalni minimum $a_{\min} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ a za $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ lokalni maksimum $a_{\max} = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Za $a = 0$ (x-osa) dobijamo 3 korena. Ako je $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}} < a < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ jednačina ima 3 realna korena, ali nijedan nije ceo broj. Za $|a| = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ imamo jedan dvostruk koren i još jedan realan, ali svi su iracionalni brojevi. Najzad, za $|a| > \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ jednačina ima samo jedan realan koren. Prema tome, samo za $a = 0$ jednačina ima 3 celobrojna rešenja.

391. Dokaz. Deljenjem polinoma $3\,n^4 + 6\,n^3 - 2\,n^2 - 3\,n + 3$ sa $n^2 + 3\,n + 2$, dobijamo

$$\frac{3\,n^4 + 6\,n^3 - 2\,n^2 - 3\,n + 3}{n^2 + 3\,n + 2} = 3\,n^2 - 3\,n + 1 + \frac{1}{n^2 + 3\,n + 2}.$$

Razlomak se može skratiti ako se ostatak $\dfrac{1}{n^2 + 3\,n + 2}$ može skratiti, što je nemoguće. To znači da dati izraz ne može biti ceo broj.

Glavni deo decimalnog broja u_ν jednak je

$$u_\nu^* = 3\,\nu^2 - 3\,\nu + 1,$$

pa je tražena suma

$$\sum_{\nu=1}^{k} u_\nu^* = \sum_{\nu=1}^{k} (3\,\nu^2 - 3\,\nu + 1) = 3\sum_{\nu=1}^{k} \nu^2 - 3\sum_{\nu=1}^{k} \nu + \sum_{\nu=1}^{k} 1$$

$$= 3 \cdot \frac{k\,(k+1)(2\,k+1)}{6} - 3 \cdot \frac{k\,(k+1)}{2} + k = k^3.$$

392. Rešenje. Posmatrajmo razlomak $\dfrac{x}{y}$, gde su x i y celi brojevi, pri čemu je $y \neq 0$. Prema tekstu zadatka važi jednakost

$$\frac{x - 27}{y} = \frac{x}{y + 12}.$$

Odavde je

$$-9y+4x-108=0 \Rightarrow y=\frac{4x}{9}-12.$$

Pošto je y ceo broj različit od nule, zaključujemo da je x oblika $x=9k$, pa je $y=4k-12$, gde je k ceo broj različit od nule. Prema tome, opšti oblik traženog razlomka je

$$\frac{9k}{4k-12} \qquad (k\in\mathbb{Z}\setminus\{3\}).$$

393. Rešenje. Neka je početni trenutak 00 : 00 časova, kada su se kazaljke poklopile na broju 12. Ugao α u stepenima za koji se obrne mala kazaljka (satna) za vreme t u satima jednak je

$$\alpha=\frac{360}{12}t=30t,$$

dok se za vreme t velika (minutna) kazaljka obrne za ugao

$$\beta=360t.$$

Razlika ovih uglova jednaka je $\beta-\alpha=360t-30t=330t$.

Od 00 : 00 do 24 : 00 ova razlika se promeni od 0 do $330\cdot 24=7920$ (stepeni). Kazaljke zaklapaju prav ugao ako je razlika uglova $90,\ 3\cdot 90,\ 5\cdot 90,\dots,\ (2n-1)\cdot 90$. Iz jednačine

$$(2n-1)90=7920$$

dobijamo $n=44.5$, odakle zaključujemo da će kazaljke u toku 24 časa zaklapati prav ugao 44 puta.

394. Rešenje 1. Neka je $CD=x$, tj. $BD=2m+n-x$. Primenom Pitagorine teoreme na trouglove ABD i ADC imamo

$$(1)\qquad \begin{aligned} n^2&=(m+n)^2-x^2,\\ n^2&=(3m+n)^2-(2m+n-x)^2,\end{aligned}$$

tj.

$$(m+n)^2-x^2=(3m+n)^2-(2m+n-x)^2,$$

Iz ove jednačine izlazi $x=\dfrac{n-2m}{2}$. Zamenom x u prvu jednačinu sistema (1) dobijamo $n=12m$. Pošto su m i n uzajamno prosti brojevi, ostaje jedina mogućnost $m=1$, $n=12$.

Rešenje 2. Površinu trougla možemo izračunati na dva načina: $P=\dfrac{1}{2}n(2m+n)$ ili primenom Heronovog obrasca. Kako je

$$s=\frac{1}{2}(2m+n+m+n+3m+n)=\frac{1}{2}(6m+3n),$$

površina je

$$P=\sqrt{s\big(s-(2m+n)\big)\big(s-(m+n)\big)\big(s-(3m+n)\big)}=\frac{2m+n}{4}\sqrt{3n(4m+n)}.$$

Izjednačavanjem dobijenih izraza za površinu, dobijamo $n=12m$.

395. Dokaz. Kvadriranjem jednakosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

dobijamo

(1) $$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2 + 2\,(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_9a_{10}) = 0.$$

Kako je izraz u zagradi jednak nuli, jednakost (1) postaje

(2) $$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2 = 0.$$

Pošto su $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ realni brojevi, iz (2) izlazi da je

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{10} = 0,$$

tako da je

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{10}^3 = 0.$$

396. Dokaz. Ne umanjujići opštost dokaza pretpostavimo da je

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{21}.$$

Na osnovu teksta zadatka važi nejednakost

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21},$$

a pošto je po pretpostavki $a_{12} \geq a_2$, $a_{13} \geq a_3, \ldots, a_{21} \geq a_{11}$ izlazi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} > a_2 + a_3 + \cdots + a_{11},$$

pa je $a_1 > 0$, što znači da su i ostali brojevi pozitivni.

397. Rešenje. Neka je r poluprečnik kruga. Površina pravilnog poligona od k $(k \geq 3)$ stranica jednaka je

$$P_k = k \cdot \frac{r^2}{2} \sin \frac{2\pi}{k}.$$

Iz uslova zadatka izlazi

$$\frac{P_m}{P_n} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \frac{\sin \dfrac{2\pi}{m}}{\sin \dfrac{2\pi}{n}} \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{m} = \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Ova jednačina je zadovoljena ako je $\dfrac{2\pi}{m} = \dfrac{2\pi}{n}$, tj. $m = n$, ili

$$\frac{2\pi}{m} = \pi - \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{2}{m} = 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow (m-2)(n-2) = 4.$$

Ova jednačina ima 3 rešenja, $m = 6, n = 3$; $m = 3, n = 6$; $n = m = 4$, pri čemu se treće rešenje već nalazi u rešenju $m = n$.

398. Rešenje. Stranica c mora zadovoljavati nejednakost

$$|a - b| < c < a + b \Rightarrow 8 < c < 50.$$

Pošto c uzima celobrojne vrednosti, c pripada skupu $\{9, 10, \ldots, 49\}$.

Za $c = 9, 10, \ldots, 29$ najveća je stranica a, pa je najveći ugao α. Na osnovu kosinusne teoreme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

zaključujemo da je α oštar ugao ako je $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, tup ako je $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ i pravougli ako je $b^2 + c^2 - a^2 = 0$.

Za $c = 9, 10, \ldots, 19$ trougao je tupougli jer je $\cos\alpha < 0$. Za $c = 20$ trougao je pravougli jer je $21^2 + 20^2 - 29^2 = 0$. Za $c = 21, 22, \ldots, 29$ je $\cos\alpha > 0$ pa je trougao oštrougli. Za $c > 29$ najveći ugao je γ. Sada treba posmatrati znak $\cos\gamma$. Kako je

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab},$$

za $c = 30, 31, \ldots, 35$ je $\cos\gamma > 0$, tj. trougao je oštrougli, ali za $c = 36, 37, \ldots, 49$ je $\cos\gamma < 0$, pa je trougao tupougli.

Prema tome, postoji 25 tupouglih, 15 oštrouglih i jedan pravougli trougao.

399. Dokaz. Kako je prema uslovu zadatka broj

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c} = \frac{(a\sqrt{3} + b)(b\sqrt{3} - c)}{(b\sqrt{3} + c)(b\sqrt{3} - c)} = \frac{3ab - bc}{3b^2 - c^2} + \frac{b^2 - ac}{3b^2 - c^2}\sqrt{3}$$

racionalan broj, tada je $\dfrac{b^2 - ac}{3b^2 - c^2} = 0 \Rightarrow b^2 = ac$. Na osnovu toga imamo

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} &= \frac{a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2}{a + b + c} = \frac{(a^2 + 2ac + c^2) - b^2}{a + b + c} \quad (\text{jer je } b^2 = ac)\\ &= \frac{(a + c)^2 - b^2}{a + b + c} = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{a + b + c} = a + c - b,\end{aligned}$$

čime je dokaz završen jer su a, b, c celi brojevi.

400. Dokaz. Iz datog uslova

(1) $$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = -c,$$

množenjem leve i desne strane sa $\sqrt[3]{2}$, imamo

(2) $$b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{2} = -2a.$$

Ako iz (1) i (2) eliminišemo $\sqrt[3]{4}$, dobijamo

(3) $$(b^2 - ac)\sqrt[3]{2} = 2a^2 - bc.$$

Ako bi bilo $b^2 - ac \neq 0$, tada iz (3) sleduje $\sqrt[3]{2} = \dfrac{2a^2 - bc}{b^2 - ac} \in Q$, što je nemogućno, pa je

(4) $$b^2 - ac = 0.$$

Tada iz (3) izlazi

(5) $$2a^2 - bc = 0.$$

Prema tome, imamo sistem (4) i (5). Ako je $a \neq 0$, tada iz (4) sleduje $c = \dfrac{b^2}{a}$, pa zamenom u (5) imamo $2a^2 - b \cdot \dfrac{b^2}{a} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, što je nemogućno, pa je $a = 0$. Ako $a = 0$ zamenimo u (4), dobijamo $b = 0$, a tada iz (1) nalazimo $c = 0$, što je trebalo dokazati.

401. Dokaz. Imamo implikacije

$$\sqrt{3} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,n - m > 0 \Rightarrow (\sqrt{3}\,n)^2 - m^2 \geq 1,$$

gde poslednja nejednakost izlazi iz $(\sqrt{3}\,n)^2 - m^2 \in \mathbb{N}$ i pošto ne može biti $(\sqrt{3}\,n)^2 - m^2 = 0$ jer bi tada bilo $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Iz poslednje nejednakosti nalazimo

$$\sqrt{3}\,n - m \geq \frac{1}{\sqrt{3}\,n + m}. \tag{1}$$

Međutim, kako je

$$\frac{1}{\sqrt{3}\,n + m} > \frac{1}{4n} \Leftrightarrow 4 - \sqrt{3} > \frac{m}{n}, \tag{2}$$

poslednja nejednakost je tačna jer je $4 - \sqrt{3} > \sqrt{3} > \dfrac{m}{n}$.

Iz nejednakosti (1) i (2) nalazimo

$$\sqrt{3}\,n - m > \frac{1}{4n} \Rightarrow \sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{4n^2},$$

što je trebalo dokazati.

402. Rešenje. Data jednačina ima smisla ako je $x \geq 1$ ili $x \leq -1$. Za $x \geq 1$ ona se svodi na

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Za $x \leq -1$ data jednačina postaje identitet

$$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} = 0,$$

pa je zadovoljena za svako $x \leq -1$.

Prema tome, rešenja jednačina su $x = 1$ ili $x \in (-\infty, -1]$.

403. Rešenje. Prikažimo datu nejednačinu u obliku

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} > 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{x - a}{ax} > 0.$$

Ako je $a > 0$, nejednačina je ekvivalentna sa $\dfrac{x - a}{x} > 0$, i zadovoljena je za $x > a$ ili $x < 0$.

Ako je $a < 0$, nejednačina je ekvivalentna sa $\dfrac{x - a}{x} < 0$, i njeno rešenje je $a < x < 0$.

404. Dokaz. Koristeći se jednakošću $\log_b a = 1/\log_a b$ imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log_a B} + \frac{1}{\log_{a^2} B} + \cdots + \frac{1}{\log_{a^n} B} &= \log_B a + \log_B a^2 + \cdots + \log_B a^n \\
&= \log_B a + 2\log_B a + \cdots + n \log_B a \\
&= (1 + 2 + \cdots + n) \log_B a = \frac{n(n+1)}{2} \log_B a,
\end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

405. Rešenje. a) Pošto je $0 < m < 1$, iz ove nejednačine izlazi

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-2} > 2 \Rightarrow \sqrt{2x-3} > 2 + \sqrt{x-2}.$$

Za $x \geq 2$ kvadriranjem leve i desne strane dobijamo

$$2x - 3 > 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2,$$

tj.

$$x - 5 > 4\sqrt{x-2}.$$

Pod uslovom $x > 5$ ovu nejednačinu možemo kvadrirati. Imamo

$$x^2 - 10x + 25 > 16x - 32 \Rightarrow x^2 - 26x + 57 > 0.$$

Nule trinoma $x^2 - 26x + 57 = 0$ su $x_{1/2} = 13 \pm 4\sqrt{7}$. Zbog uslova $x > 5$ rešenje nejednačine je $x > 13 + 4\sqrt{7}$.

b) Uočimo najpre da je $168 = 24 \cdot 7$. Transformišimo logaritme sa osnovom 168 na logaritme sa osnovom 24. Imamo

$$\text{(1)} \qquad \frac{\log_{24} 3}{\log_{24} 168} = a, \quad \frac{\log_{24} 7}{\log_{24} 168} = b.$$

S obzirom da je $\log_{24} 168 = \log_{24}(24 \cdot 7) = 1 + \log_{24} 7$, jednakosti postaju

$$\frac{\log_{24} 3}{1 + \log_{24} 7} = a, \quad \frac{\log_{24} 7}{1 + \log_{24} 7} = b.$$

Ove jednakosti rešavamo po $\log_{24} 7$ i $\log_{24} 3$, pa dobijamo

$$\log_{24} 7 = \frac{b}{-b+1}, \quad \log_{24} 3 = \frac{a}{1-b}.$$

Napišimo drugu jednakost u obliku

$$\log_{24} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 24} = \frac{\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{a}{1-b},$$

odakle je

$$\text{(2)} \qquad \log_2 3 = \frac{3a}{1-b-a}.$$

Na kraju, $\log_{24} 2$ prebacimo na osnovu 2, tj.

$$\log_{24} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 24} = \frac{1}{3 + \log_2 3},$$

tako da primenom (2) nalazimo

$$\log_{24} 2 = \frac{1}{3 + \dfrac{3a}{1-b-a}} = \frac{1-b-a}{3(1-b)}.$$

406. Rešenje. Primenom binomnog obrasca imamo

$$(1) \qquad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k.$$

Pretpostavimo da je $n > 2$. Diferenciranjem leve i desne strane jednakosti (1) dobijamo

$$-n\,(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k\, x^{k-1}.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa x i ponovo diferenciramo levu i desnu stranu, nalazimo

$$-n(1-x)^{n-1} + n(n-1)\,x(1-x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2 x^{k-1}.$$

Vodeći računa da je $n > 2$, za $x = 1$ ova jednakost se svodi na

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k\, k^2 = 0.$$

Za $n = 1$ i $n = 2$ imamo

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1, \qquad \sum_{k=1}^{2} (-1)^k k^2 = -1 + 4 = 3.$$

407. Rešenje. Primenom binomnog obrasca imamo

$$(1+\sqrt{2})^{20} = 1 + \binom{20}{1}\sqrt{2} + \binom{20}{2}(\sqrt{2})^2 + \cdots + \binom{20}{k}(\sqrt{2})^k + \cdots + (\sqrt{2})^{20}.$$

Neka je $a_k = \binom{20}{k}(\sqrt{2})^k$. Posmatrajmo količnik dva uzastopna člana a_{k+1} i a_k, tj.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\binom{20}{k+1}(\sqrt{2})^{k+1}}{\binom{20}{k}(\sqrt{2})^k} = \frac{\dfrac{20!}{(k+1)!(20-k-1)!}}{\dfrac{20!}{k!(20-k)!}} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{20-k}{k+1}\sqrt{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 19).$$

Treba odrediti one vrednosti k za koje je $a_{k+1} > a_k$, tj. $a_{k+1}/a_k > 1$. Nejednakost

$$\frac{20-k}{k+1}\sqrt{2} > 1$$

svodi se na

$$k < \frac{20\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (20\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 41 - 21\sqrt{2} \approx 11.30.$$

Prema tome, za $k \leq 11$ je $a_{k+1} < a_k$, što znači da a_{12} ima najveću vrednost. Dakle, najveći član u razvoju izraza $(1+\sqrt{2})^{20}$ po binomnom obrascu je

$$a_{12} = \binom{20}{12}(\sqrt{2})^{12} = \frac{20 \cdot 19 \cdots 9}{12!} \cdot 2^6 = 8\,062\,080.$$

408. Rešenje. Označimo sa a_n broj n-tocifrenih nizova koji ne sadrže dve uzastopne nule. Posmatrajmo dva slučaja:

1° Prva cifra niza je nula. Tada druga cifra ne sme biti nula, tj. može biti 9 cifara od 1 do 9. To znači da je ukupan broj takvih nizova $9 \cdot a_{n-2}$.

2° Prva cifra niza nije nula, tj. na prvom mestu može biti 9 cifara, od 1 do 9. Prema tome, takvih nizova ima $9 \cdot a_{n-1}$.

Na osnovu posmatranja ova dva slučaja zaključujemo da je

$$a_n = 9 \cdot a_{n-2} + 9a_{n-1}. \tag{1}$$

Jednocifrenih nizova ima 10 i u njima se ne pojavljuju dve uzastopne nule (jer su jednocifreni), a dvocifrenih nizova u kojima se ne pojavljuju dve uzastopne nule ima 99 (to su $01, 12, \ldots, 99$). Dakle, $a_1 = 10$ i $a_2 = 99$. Primenom rekurentne formule (1), za $n = 3, 4, 5$ dobijamo

$$\begin{aligned} a_3 &= 9 \cdot 10 + 9 \cdot 99 = 981, \\ a_4 &= 9 \cdot 99 + 9 \cdot 981 = 9720, \\ a_5 &= 9 \cdot 981 + 9 \cdot 9720 = 96\,309. \end{aligned}$$

Dakle, traženi broj nizova je 96 309.

409. Rešenje. U tabelu $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ sa šest kvadratića u svaki kvadratić upisujemo brojeve 0, 1, 2, …, 9, koji se mogu ponavljati. Takvih brojeva ima 10^6 jer je najmanji broj $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$, a najveći $\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}$.

Zatim upisujemo brojeve 0, 2, 3, …, 9, dakle bez jedinice, pri čemu je obuhvaćen i broj $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$. Takvih brojeva ima 9^6 (to je broj varijacija šeste klase sa ponavljanjem od 9 elemenata). Prema tome, prirodnih brojeva, sa najviše šest cifara, u kojima se javlja cifra 1 ima

$$10^6 - 9^6 = 468\,559.$$

410. Rešenje. 1° Uokvireni elementi PASCAL-ovog trougla obrazuju niz

$$\binom{2}{0}, \binom{3}{1}, \binom{4}{2}, \ldots, \binom{n}{n-2}, \binom{n+1}{n-1}, \ldots \tag{1}$$

Opšti član ovog niza $\binom{n}{n-2}$, primenom osobine simetrije binomnih koeficijenata $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, možemo prikazati u obliku

$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-(n-2)} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Razlika kvadrata dva uzastopna člana niza (1) iznosi

$$(2) \qquad \binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2}^2 = \left(\frac{(n+1)\,n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\,(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

2° Ako jednakost (2) napišemo za $n = 2, 3, \ldots, n$, dobijamo

$$2^3 = \binom{3}{1}^2 - \binom{2}{0}^2,\ 3^3 = \binom{4}{2}^2 - \binom{3}{1}^2, \ldots,\ n^3 = \binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2}^2.$$

Sabiranjem levih i desnih strana ovih jednakosti nalazimo

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{2}{0}^2 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - 1,$$

tj.

$$T_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 = S_n^2,$$

jer je $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Kao što se vidi, imamo $f(x) = x^2$.

411. Dokaz. Množenjem leve i desne strane jednakosti sa $n!$ dobijamo

$$n!\,(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n = 2^n n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)(2n-1).$$

Leva strana se svodi na $(2n)!$, a desna na

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-1)\,2n = (2n)!,$$

čime je jednakost dokazana.

412. Dokaz. Za $n = 2$ data nejednakost je tačna jer je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} > 0.$$

Pretpostavimo da je za $n > 1$ nejednakost (1) tačna. Kako je

$$\frac{1}{2\,n+1} + \frac{1}{2\,n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2\,n+1)(2\,n+2)},$$

tj.

$$(2) \qquad \frac{1}{2\,n+1} + \frac{1}{2\,n+2} - \frac{1}{n+1} > 0,$$

sabiranjem nejednakosti (1) i (2) dobijamo

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2\,n+1} + \frac{1}{2\,n+2} - \frac{1}{2} > 0,$$

a to je nejednakost (1) u kojoj smo umesto n uzeli $n+1$. Ovim je induktivni dokaz završen.

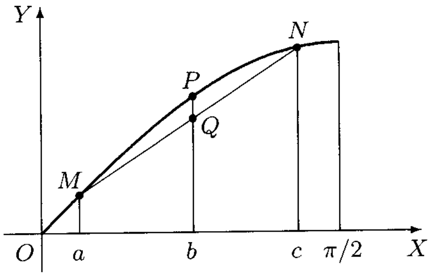
NAPOMENA. Dokaz se može jednostavnije sprovesti na sledeći način:

Suma $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ ima n sabiraka, a najmanji sabirak je $\dfrac{1}{2n}$. Na osnovu toga za $n>1$ važi nejednakost

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

a to je nejednakost (1).

413. Dokaz. Funkcija $y=\sin x$ je konkavna u intervalu $(0,\pi/2)$. To znači da se za svako a, b, c, za koje je $0<a<b<c<\pi/2$, tačka Q na sečici MN nalazi se ispod tačke P. Jednačina sečice kroz tačke $M(a,\sin a)$, $N(b,\sin b)$ glasi



$$Y-\sin a=\frac{\sin c-\sin a}{c-a}\,(X-a).$$

Ordinata tačke P je $\sin b$, a tačke Q

$$\sin a+\frac{\sin c-\sin a}{c-a}\,(b-a).$$

Prema tome, za konkavnu funkciju $y=\sin x$ u intervalu $(0,\pi/2)$ važi nejednakost

(1) $$\sin b>\sin a+\frac{\sin c-\sin a}{c-a}\,(b-a).$$

U specijalnom slučaju $a=0$, $b=x/n$, $c=x$, gde je $n>1$, iz (1) izlazi

$$\sin\frac{x}{n}>\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{n}\ \Rightarrow\ \sin x<n\sin\frac{x}{n},$$

što je trebalo dokazati.

414. Rešenje. Ako stavimo $z=\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{\pi}{2n+1}$, imamo

$$\begin{aligned}S+iT&=z+z^3+\cdots+z^{2n-1}=z\,(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n-2})\\&=z\cdot\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}=\frac{z-z^{2n+1}}{1-z^2}.\end{aligned}$$

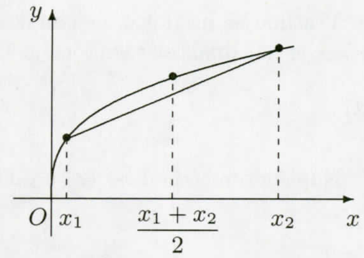
Kako je $z^{2n+1}=-1$, dobijamo

$$\begin{aligned}S+iT&=\frac{z-(-1)}{1-z^2}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\cos\dfrac{\pi}{2n+1}-i\sin\dfrac{\pi}{2n+1}}\\&=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(2n+1)},\end{aligned}$$

pa je $S=\dfrac{1}{2}$, $T=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$.

415. Rešenje. Na slici je prikazan grafik funkcije $y=\sqrt[3]{x}$ u oblasti $x \geq 0$. Funkcija $y=\sqrt[3]{x}$ za $x \geq 0$ spada u tzv. konkavne funkcije. Konkavna funkcija ima osobinu

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$



Ovo je JENSEN-ova[1] nejednakost.

Primenom te nejednakosti na funkciju $f(x)=\sqrt[3]{x}$ za $x_1=7$ i $x_2=8$ dobijamo $\sqrt[3]{\frac{15}{2}} > \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{8}}{2}$, tj. $2+\sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{\frac{15}{2}} \Rightarrow 2+\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{60}$.

416. Rešenje. Dokažimo nejednakost

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n. \tag{1}$$

Izvedimo najpre jednu pomoćnu nejednakost. Primenom binomnog obrasca za $n \geq 2$ imamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!\,n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\ &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\ &= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.\end{aligned}$$

Dakle, važi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Ona se može prikazati u obliku

$$\frac{(n+1)^n}{3n^n} < 1 \Rightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{3n^n} < n+1,$$

odakle je

$$\frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{3}\right)^n} < n+1. \tag{2}$$

[1] Jensen (J. L. W. V. Jensen (1859–1925)) danski matematičar, prvi je definisao konveksne funkcije pomoću nejednakosti 1905. godine.

Vratimo se na dokaz nejednakosti (1). Primenimo metod matematičke indukcije. Za $n = 1$ je nejednakost tačna jer je $1 > 1/3$. Pretpostavimo da je (1) tačno, tj.

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n. \tag{3}$$

Napišimo nejednakost (2) u obliku

$$n + 1 > \frac{\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n}{3}\right)^n} \tag{4}$$

Množenjem levih i desnih strana nejednakosti (3) i (4) dobijamo

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1},$$

a to je nejednakost (1) kada umesto n stavimo $n + 1$. Prema tome, induktivni dokaz je završen.

Za $n = 300$ nejednakost (1) postaje $300! > 100^{300}$.

417. Dokaz 1. Ako stepenujemo levu i desnu stranu date nejednakosti sa $\sqrt{5}$, dobijamo $7^5 > 5^{\sqrt{35}}$. Kako je $7^5 = 16807$, a $5^{\sqrt{35}} < 5^{\sqrt{36}} = 5^6 = 15625$, zaključujemo da je

$$7^5 > 5^{\sqrt{36}} \Rightarrow 7^5 > 5^{\sqrt{35}},$$

čime je dokaz završen.

Dokaz 2. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, koja je definisana za $x > 0$. Kako je $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, u intervalu $(0, e^2)$ funkcija raste, a u intervalu $(e^2, +\infty)$ opada. Pošto je $5 < 7 < e^2$, važi nejednakost $f(7) > f(5)$, tj.

$$\frac{\ln 7}{\sqrt{7}} > \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}\ln 7 > \sqrt{7}\ln 5 \Rightarrow \ln 7^{\sqrt{5}} > \ln 5^{\sqrt{7}} \Rightarrow 7^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{7}}.$$

418. Dokaz. Neka je

$$a = 0.12345678910111213 14 \ldots 4748495051,$$
$$b = 0.5150494847 \ldots 1413121110987654321.$$

Pošto je $0.515 < b < 0.5151$, za dati razlomak važi procena $\dfrac{a}{0.5151} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{a}{0.515}$. Kako je

$$\frac{a}{0.5151} = 0.2396\ldots, \qquad \frac{a}{0.515} = 0.2397\ldots,$$

vrednost datog razlomka je $\dfrac{a}{b} = 0.239\ldots$

419. Rešenje. Posmatranjem (1) zaključujemo da su rešenja datog sistema realni brojevi istog znaka. Ako je (x_0, y_0, z_0) rešenje sistema, iz (1) ili (2) izlazi da je rešenje i $(-x_0, -y_0, -z_0)$. Zbog toga je dovoljno da nađemo rešenje (x_0, y_0, z_0), pri čemu je $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$.

Ako uvedemo smene $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $z = \operatorname{tg}\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$, onda je

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

tj.

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\big(-(\alpha+\beta)\big) \Rightarrow \gamma = -(\alpha+\beta) + k\pi \text{ ili } \alpha+\beta+\gamma = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

S obzirom da $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$, tada $\alpha + \beta + \gamma \in (0, 3\pi/2)$, pa dobijamo da je $k = 1$. Dakle,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2). \tag{3}$$

Uvođenjem smena u (1) imamo

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} = \frac{1}{\sin\beta}, \quad \frac{\sqrt{z^2+1}}{z} = \frac{1}{\sin\gamma},$$

pa se (1) transformiše na

$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin\beta} = \frac{6}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = 4m, \ \sin\beta = 5m, \ \sin\gamma = 6m \quad (m > 0).$$

Na osnovu (3) α, β i γ su uglovi trougla naspram stranica $a, b,$ i c pa primenom kosinusne i sinusne teoreme, nalazimo

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma} = \frac{(5m)^2+(6m)^2-(4m)^2}{2\cdot 5m \cdot 6m} = \frac{3}{4}$$

i

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(3/4)^3} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

pa je $x_0 = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{7}/4}{3/4} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$. Na isti način dobijamo $y_0 = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{5\sqrt{7}}{9}$, $z_0 = \operatorname{tg}\gamma = 3\sqrt{7}$. Prema tome, rešenja datog sistema su

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{5\sqrt{7}}{9}, 3\sqrt{7}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, -\frac{5\sqrt{7}}{9}, -3\sqrt{7}\right).$$

420. Rešenje. Jednačina ima smisla za $x \geq 0$ i $2 - \sqrt{2+x} \geq 0$, tj. za $x \in [0, 2]$. U tom slučaju možemo uvesti smenu $x = 2\cos t$, gde $t \in [0, \pi/2]$. Tada je

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2+2\cos t} = 2\cos\frac{t}{2},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = \sqrt{2-2\cos\frac{t}{2}} = 2\sin\frac{t}{4},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = \sqrt{2+2\sin\frac{t}{4}} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{4}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}\right),$$

gde smo sve vreme imali u vidu da $t \in [0, \pi/2]$.

Prema tome, zadata jednačina se svodi na trigonometrijsku jednačinu

$$2\cos t = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{8}\right)$$

čije je jedino rešenje u intervalu $[0, \pi/2]$ jednako $2\pi/9$. Dakle, rešenje date jednačine je $x = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$.

421. Dokaz. Imamo dve mogućnosti:

i) $a^2 + b^2 = 0 \lor c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow (a = b = 0) \lor (c = d = 0)$ i neposrednom zamenom se proverava da je u ovom trivijalnom slučaju zadata nejednakost zadovoljena.

ii) $a^2 + b^2 \neq 0 \land c^2 + d^2 \neq 0$. Tada je na osnovu uslova zadatka $0 < a^2 + b^2 \leq 1$ i $0 < c^2 + d^2 \leq 1$. Pošto je $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, možemo staviti

$$a = r_1 \sin\varphi,\ b = r_1\cos\varphi, \quad \text{gde je } r_1 = \sqrt{a^2+b^2} \in (0,1]. \tag{1}$$

Na sličan način je

$$c = r_2 \sin\psi,\ d = r_2\cos\psi, \quad \text{gde je } r_2 = \sqrt{c^2+d^2} \in (0,1]. \tag{2}$$

Ako (1) i (2) zamenimo u zadatu nejednakost, nalazimo

$$(r_1\sin\varphi - r_2\sin\psi)^2 + (r_1\cos\varphi - r_2\cos\psi)^2 \geq (r_1\sin\varphi\cdot r_2\cos\psi - r_1\cos\varphi\cdot r_1\sin\psi)^2$$

i posle sređivanja dobijamo

$$\left(1 - r_2^2\sin^2(\varphi-\psi)\right)r_1^2 - \left(2r_2\cos(\varphi-\psi)\right)r_1 + r_2^2 \geq 0. \tag{3}$$

Izraz L na levoj strani nejednakosti (3) možemo shvatiti kao kvadratni trinom po promenljivoj r_1. Kako je $1 - r_2^2\sin^2(\varphi-\psi) > 0$ i diskriminanta Δ trinoma L jednaka

$$\begin{aligned}\Delta &= 4r_2^2\cos^2(\varphi-\psi) - 4r_2^2\left(1 - r_2^2\sin^2(\varphi-\psi)\right)\\ &= -4r_2^2(1-r_2^2)\sin^2(\varphi-\psi) \leq 0,\end{aligned}$$

zaključujemo da je $L \geq 0$.

Ako je $1 - r_2^2\sin^2(\varphi-\psi) = 0$, vodeći računa da je $r_2^2 \leq 1$, sleduje da je $\sin^2(\varphi-\psi) = 1$ i $r_2^2 = 1$ i u tom slučaju je $L = r_2^2 = 1 > 0$.

Time je dokazana data nejednakost.

NAPOMENA. Iz dokaza vidimo da nejednakost važi ako je $c^2 + d^2 \leq 1,\ a, b \in \mathbb{R}$.

422. Rešenje. Primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$2^{-\sin^2x} + 2^{-\cos^2x} \geq 2\sqrt{2^{-\sin^2x}\cdot 2^{-\cos^2x}} = 2\sqrt{2^{-(\sin^2x+\cos^2x)}} = 2\sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2}, \tag{1}$$

gde jednakost važi ako je $2^{-\sin^2x} = 2^{-\cos^2x}$.

S druge strane, važi nejednakost

$$\sin y + \cos y = \sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}. \tag{2}$$

Polazeći od (1) i (2) zaključujemo da se zadata jednačina razlaže na dve jednačine, $2^{-\sin^2 x} = 2^{-\cos^2 x}$, $\sin y + \cos y = \sqrt{2}$. Iz ovih jednačina dobijamo

$$-\sin^2 x = -\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},$$

$$\sin y + \cos y = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + 2m\pi,$$

gde su k i m celi brojevi.

423. Rešenje. Primenom formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{8} + x\cos x + 2\cos^2 x - 1 \\ &= \frac{1}{8}\left((x^2 + 2\cdot x \cdot 4\cos x + 16\cos^2 x) - 16\cos^2 x + 8(2\cos^2 x - 1)\right) \\ &= \frac{1}{8}\left((x + 4\cos x)^2 - 8\right) \\ &= \frac{1}{8}(x + 4\cos x)^2 - 1, \end{aligned}$$

pa je najmanja vrednost funkcije $f_{\min} = -1$.

424. Rešenje. Pošto su $x > 0$ i $y > 0$, uvedimo smenu $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, gde $(\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$. Data funkcija postaje

$$f(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\beta)} = \cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha + \beta).$$

Primenom nejednakosti između aritmetičke u geometrijske sredine

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha + \beta)} \leq \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sin(\alpha + \beta)}{3}$$

imamo

$$f(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) \leq \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sin(\alpha + \beta)}{3}\right)^3,$$

gde znak jednakosti važi samo ako je $\cos\alpha = \cos\beta = \sin(\alpha + \beta)$, tj. $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$ za $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$. Odavde sleduje da je $\alpha = \beta = \pi/6$.

Prema tome, zaključujemo da je

$$\max f(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) = \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sin(\alpha + \beta)}{3}\right)^3 \quad \text{za } \alpha = \beta = \pi/6,$$

odnosno

$$\max f(x, y) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{za } x = y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

425. Dokaz. Označimo sa L levu stranu date nejednakosti. Ako uvedemo smene

$$x = \sin^2\alpha,\ y = \sin^2\beta,\ z = \sin^2\gamma \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in [0, \pi/4]),$$

nalazimo

$$L = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Primenom transformacije $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)$, $\operatorname{tg}\varphi = b/a$, imamo

$$L = \sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma}\ \sin(\alpha+\varphi) \qquad (\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma),$$

pa je

$$\begin{aligned} L &\le \sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\gamma}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\gamma}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta\cos 2\gamma}{2}} \\ &\le \sqrt{\frac{1+\cos 2\gamma}{2}} \quad (\text{jer je } 0 \le \cos 2\beta \le 1) \\ &= \cos\gamma. \end{aligned}$$

Dakle, $L \le \cos\gamma$. Analogno dokazujemo $L \le \cos\alpha$, $L \le \cos\beta$. Stoga je

$$L \le \min\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}, \text{ tj. } L \le \min\left\{\sqrt{1-x},\ \sqrt{1-y},\ \sqrt{1-z}\right\}.$$

U zadatoj nejednakosti znak jednakosti važi ako je $x = y = z = 1/2$.

426. Dokaz. Pošto su $x, y, z \in (0,1)$, možemo staviti $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \sin\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$. Tada je

$$\begin{aligned} (J_1) &\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi, \text{ jer } \alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi/2). \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (J_2) &\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\sin(\beta+\gamma) - \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1 \\ &\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi, \text{ jer } \alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi/2). \end{aligned} \tag{2}$$

Iz (1) i (2) sleduje $(J_1) \Leftrightarrow (J_2)$.

427. Dokaz. 1° Ako date nejednakosti prikažemo u obliku $a_1 - a_2 \ge 0$, $b_1 - b_2 \ge 0$, dobijamo $(a_1-a_2)(b_1-b_2) \ge 0$, tj. $a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$.

Dodavanjem izraza $a_1b_1 + a_2b_2$ levoj i desnoj strani ove nejednakosti, imamo $2(a_1b_1 + a_2b_2) \ge (a_1+a_2)(b_1+b_2)$, a odavde

$$\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2} \le \frac{a_1b_1+a_2b_2}{2}.$$

2° Slično gornjem postupku, iz nejednakosti $a_2 - a_1 \ge 0$, $b_1 - b_2 \ge 0$ nalazimo $a_2b_1 + a_1b_2 \ge a_1b_1 + a_2b_2$. Ako levoj i desnoj strani dodamo $a_1b_1 + a_2b_2$, dobijamo $(a_1+a_2)(b_1 + b_2) \ge 2(a_1b_1 + a_2b_2)$, tj.

$$\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{b_1+b_2}{2} \ge \frac{a_1b_1+a_2b_2}{2}.$$

428. Rešenje. Dopunjavanjem leve strane do potpunog kvadrata, jednačinu transformišemo na sledeći način:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{5x}{x-5} + \left(\frac{5x}{x-5}\right)^2 = 11 + 2x \cdot \frac{5x}{x-5},$$

$$\left(x + \frac{5x}{x-5}\right)^2 = 11 + 10 \cdot \frac{x^2 - 5x + 5x}{x-5},$$

$$\left(x + \frac{5x}{x-5}\right)^2 = 11 + 10\left(x + \frac{5x}{x-5}\right).$$

Smenom $x + \dfrac{5x}{x-5} = t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 = 11 + 10t$ i njena rešenja su $t_1 = -1$ ili $t_2 = 11$.

$$\text{Za } t_1 = -1 \Rightarrow x + \frac{5x}{x-5} = -1 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2},$$

$$\text{Za } t_2 = 11 \Rightarrow x + \frac{5x}{x-5} = 11 \quad \Rightarrow x_{3/4} = \frac{11 \pm i\sqrt{199}}{2}.$$

429. Rešenje. Ako uvedemo smene $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $z = \operatorname{tg}\gamma$, imamo

$$|x| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \operatorname{tg}\alpha \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_0,$$

$$|y| \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\beta_0 \le \beta \le \beta_0,$$

$$|z| \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\gamma_0 \le \gamma \le \gamma_0,$$

gde su $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\beta_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$, $\gamma_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$.

Sada je

$$-(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) \le \alpha + \beta + \gamma \le \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0,$$

$$(1) \qquad -\operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) \le \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) \le \operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0),$$

što se može ispuniti jer je

$$(2) \qquad 0 < \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Zaista, kako je

$$\operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_0 + \operatorname{tg}\beta_0}{1 - \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\beta_0} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \alpha_0 + \beta_0 = \frac{\pi}{4}$$

i $\operatorname{tg}\gamma_0 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 < \gamma_0 < \dfrac{\pi}{4}$, izlazi (2).

Iz (1) nalazimo

$$-\frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0) + \operatorname{tg}\gamma_0}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0)\operatorname{tg}\gamma_0} \le \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\gamma} \le \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0) + \operatorname{tg}\gamma_0}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0)\operatorname{tg}\gamma_0},$$

tj.

$$-\frac{1+\frac{1}{4}}{1-1\cdot\frac{1}{4}} \leq \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha} \leq \frac{1+\frac{1}{4}}{1-1\cdot\frac{1}{4}}.$$

Vraćanjem na stare promenljive dobijamo traženu nejednakost

$$-\frac{5}{3} \leq \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} \leq \frac{5}{3}$$

Znak jednakosti važi ako je $(x, y, z) = (\pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/4)$.

430. Rešenje. Imamo

$$\begin{aligned} 1-12\sqrt[3]{65^2}+48\sqrt[3]{65} &= 65-12\sqrt[3]{65^2}+48\sqrt[3]{65}-64 \\ &= \left(\sqrt[3]{65}\right)^3-3\cdot\left(\sqrt[3]{65}\right)^2\cdot 4+3\cdot\sqrt[3]{65}\cdot 4^2-4^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{65}-4\right)^3, \end{aligned}$$

pa je $A = \sqrt[3]{65}$. Slično ovom postupku dobijamo

$$\begin{aligned} 1-48\sqrt[3]{63}+36\sqrt[3]{147} &= 4^3-3\cdot 4^2\cdot\sqrt[3]{63}+3\cdot 4\cdot\left(\sqrt[3]{63}\right)^2-\left(\sqrt[3]{63}\right)^3 \\ &= \left(4-\sqrt[3]{63}\right)^3, \end{aligned}$$

odakle nalazimo $B = 4$.

Kako je $\sqrt[3]{65} > 4$, izlazi $A > B$.

431. Rešenje. Pretpostavimo da date jednačine imaju bar jedno rešenje. U tom slučaju date jednačine možemo shvatiti kao linearni sistem po $\sin x$ i $\cos x$. Rešavanjem sistema dobijamo $\sin x = \frac{5}{2a+1}$, $\cos x = \frac{a-2}{2a+1}$. Zamenom u identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nalazimo

$$\left(\frac{5}{2a+1}\right)^2 + \left(\frac{a-2}{2a+1}\right)^2 = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{14}{3} \vee a_2 = 2.$$

432. Dokaz. $\sin 23^\circ > \sin 22^\circ 30' = \sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} > \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$

433. Rešenje. Ako datu jednačinu napišemo u obliku

$$\cos^2 x - \cos 11^\circ \cdot \cos x + \cos^2 11^\circ - \frac{3}{4} = 0$$

i rešimo kao kvadratnu jednačinu po $\cos x$, dobijamo

$$\cos x = \frac{1}{2}\cos 11^\circ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 11^\circ \Rightarrow \cos x = \cos 60^\circ \cos 11^\circ \pm \sin 60^\circ \sin 11^\circ,$$

odakle izlazi

$$\cos x = \cos(60^\circ \mp 11^\circ).$$

Opšte rešenje date jednačine je $x = \pm(60^\circ \mp 11^\circ) + k\cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

434. Rešenje. Iz date formule izlazi $a_{n+1}a_n - 3a_{n+1} + 3a_n - 1 = 0$. Ako stavimo $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, nalazimo

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} + (\lambda - 3)\,\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} + (\lambda + 3)\,\frac{b_{n+1}}{b_n} + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Ako uzmemo $\lambda = 3$, imamo $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + 3$ i dolazimo do diferencne jednačine

$$b_{n+2} + 6b_{n+1} + 8b_n = 0,$$

čije je opšte rešenje $b_n = (-1)^n \cdot 2^n(C_1 2^n + C_2)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. U početni uslov $a_1 = \dfrac{b_2}{b_1} + 3$ možemo staviti $b_1 = 1$. Onda je $b_2 = a_1 - 3$, pa iz linearnog sistema

$$(-1)^1 2^1(2^1 C_1 + C_2) = 1, \quad (-1)^2 2^2(2^2 C_1 + C_2) = a_1 - 3$$

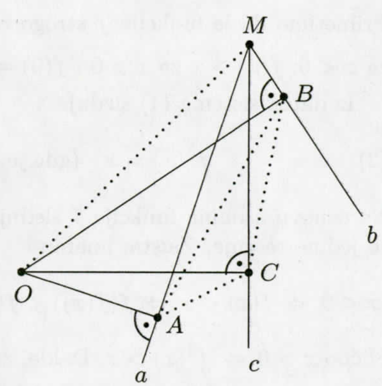
dobijamo $C_1 = 2^{-3}(a_1 - 1)$, $C_2 = -2^{-2}(a_1 + 1)$. Stoga je

$$b_n = (-1)^n 2^{n-3}\big((2^n - 2)a_1 - (2^n + 2)\big).$$

Pošto je $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + 3$, nalazimo da je $a_n = \dfrac{(2^{n-1}+1)a_1 - (2^{n-1} - 1)}{2^{n-1} + 1 - (2^{n-1} - 1)a_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, odnosno

$$a_n = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)a_1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 + \dfrac{1}{2^{n-1}} - \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)a_1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = -1.$$

435. Dokaz. Primetimo da tačke A, B, C pripadaju krugu čiji je prečnik OM. Ako primenimo Ptolomejevu teoremu na tetivne četvorouglove $MOAB$, $MOCB$ i $MOAC$, nalazimo redom



$$MA \cdot OB = OA \cdot MB + OM \cdot AB$$

(2) $$\Rightarrow AB = \frac{MA \cdot OB - MB \cdot OA}{OM},$$

$$MC \cdot OB = OC \cdot MB + OM \cdot BC$$

(3) $$\Rightarrow BC = \frac{MC \cdot OB - MB \cdot OC}{OM},$$

$$MA \cdot OC = OA \cdot MC + OM \cdot AC$$

(4) $$\Rightarrow AC = \frac{MA \cdot OC - MC \cdot OA}{OM}.$$

Iz (3) i (4) zamenom u levu stranu zadate jednakosti (1), dobijamo desnu stranu ako iskoristimo (2).

436. Dokaz.[1] Data nejednakost je ekvivalentna sa $L = x(1 - y - z) + y + z - yz \leq 1$.

Razmotrimo slučajeve:

1° $1 - y - z \leq 0 \Rightarrow x(1 - y - z) \leq 0$, pa je

$$L \leq y + z - yz = y(1 - z) + z \leq 1 \cdot (1 - z) + z = 1;$$

[1] U časopisu Tangenta, 15 (1998/99)–3, str. 45, dat je drugi dokaz nejednakosti.

2° $1-y-z>0$, onda je

$$L = 1\cdot(1-y-z)+y+z-yz = 1-yz \le 1.$$

NAPOMENA. Ako stavimo $x=\sin^2(\alpha/2)$, $y=\sin^2(\beta/2)$, $z=\sin^2(\gamma/2)$, data nejednakost je ekvivalentna sa

$$1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha \ge 0 \quad (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}).$$

437. Rešenje. Tri puta ćemo primeniti identitet $1+q+\cdots+q^k = \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
1+x^2+x^4+\cdots+x^{4n} &= 1+x^2+(x^2)^2+\cdots+(x^2)^{2n}\\
&= \frac{1-(x^2)^{2n+1}}{1-x^2} = \frac{1-(x^{2n+1})^2}{1-x^2}\\
&= \frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\cdot\frac{1-(-x)^{2n+1}}{1-(-x)}\\
&= (1+x+x^2+\cdots+x^{2n})(1-x+x^2-\cdots+x^{2n}).
\end{aligned}$$

438. Rešenje. Ako uvedemo funkciju $x\mapsto f(x)=x+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ dati sistem možemo prikazati u obliku

$$(1) \qquad f(x)=y,\quad f(y)=z,\quad f(z)=x.$$

Primetimo da je funkcija f strogo rastuća $\left(f'(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0\right)$ i da je $f(x)<x$ za $x<0$; $f(x)>x$ za $x>0$ i $f(0)=0$.

Iz datog sistema (1) sleduje

$$(2) \qquad f^3(x)=x \quad (\text{gde je } f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))).$$

Na osnovu osobine funkcije f sleduje da je $x=0$ rešenje jednačine (2). Dokažimo da je to jedino rešenje. Zaista, imamo

$$x<0 \Rightarrow f(x)<x \Rightarrow f(f(x))<f(x) \Rightarrow f^2(x)<x \Rightarrow f(f^2(x))<f(x) \Rightarrow f^3(x)<x.$$

Slično $x>0 \Rightarrow f^3(x)>x$. Dakle, za $x\ne 0 \Rightarrow f^3(x)\ne x$.

Sada za $x=0$ iz sistema (1) dobijamo $y=0$ i $z=0$, pa je $(0,0,0)$ jedino rešenje datog sistema.

439. Dokaz. Ako uvedemo smenu $x=2\cos t$, jednačina se transformiše na

$$2\,(4\cos^3 t-3\cos t)=1,\quad \text{tj.}\ \cos 3t=\frac12 \Rightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \quad (k=0,\pm1,\ldots),$$

pa imamo tri rešenja date jednačine

$$x=2\cos\frac{\pi}{9},\quad x=2\cos\frac{7\pi}{9}=-2\cos\frac{2\pi}{9},\quad x=2\cos\frac{13\pi}{9}=-2\cos\frac{4\pi}{9}.$$

Kako je $-2\cos\frac{2\pi}{9} < -2\cos\frac{4\pi}{9} < 0 < 2\cos\frac{\pi}{9}$, sleduje $x_1 = -2\cos\frac{2\pi}{9}$, $x_2 = -2\cos\frac{4\pi}{9}$, $x_3 = 2\cos\frac{\pi}{9}$. Sada je

$$\begin{aligned}
{x_3}^2 - {x_2}^2 &= 4\cos^2\frac{\pi}{9} - 4\cos^2\frac{4\pi}{9} = 4\cdot\frac{1+\cos\frac{2\pi}{9}}{2} - 4\cdot\frac{1+\cos\frac{8\pi}{9}}{2} \\
&= 2\Big(\cos\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{8\pi}{9}\Big) = 4\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}, \\
x_3 - x_1 &= 2\cos\frac{\pi}{9} + 2\cos\frac{2\pi}{9} = 4\cos\frac{3\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18} \\
&= 4\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{18}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\Big) = 4\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9} \\
&= 4\sin\frac{3\pi}{9}\sin\Big(\pi - \frac{4\pi}{9}\Big) = 4\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{9}.
\end{aligned}$$

Kao što se vidi, važi jednakost ${x_3}^2 - {x_2}^2 = x_3 - x_1$.

440. Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
1 + \big(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\big)^2 &= 1 + x^2(1+y^2) + 2xy\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} + y^2(1+x^2) \\
&= (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} + x^2y^2 \\
&= \big(\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} + xy\big)^2.
\end{aligned}$$

Slično je

$$1 + \big(x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2}\big)^2 = \big(\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} - xy\big)^2.$$

Ako sa L označimo levu stranu date jednakosti, dobijamo

$$L = \big|\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} + xy\big| - \big|\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} - xy\big|.$$

Međutim, kako je $\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} > |xy| \Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 > 0$, dobijamo

$$L = \sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} + xy - \big(\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2} - xy\big) = 2xy.$$

441. Rešenje. Najpre ćemo objasniti šta se traži u ovom zadatku. Dati su nizovi

$$|\sin\alpha|,\ |\sin 2\alpha|,\ |\sin 3\alpha|, \ldots$$

za različite vrednosti $\alpha \in (0,\pi)$. Pošto je $|\sin p\alpha|$ ograničena funkcija, za neku vrednost α ovaj niz ima supremum, tj. najveći član. Dakle, u zadatku se traži onaj niz čiji je supremum najmanji (inf). Na primer, za $\alpha = \pi/2$ dobijamo niz $1, 0, 1, 0, \ldots$, pa je supremum ovog niza 1. Za $\alpha = \pi/4$ imamo niz

$$\frac{\sqrt2}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt2}{2}, 0,\ \frac{\sqrt2}{2}, 1,\ \frac{\sqrt2}{2},\ 0, \ldots$$

Njegov supremum je takođe 1. Za $\alpha = \pi/3$ imamo niz

$$\frac{\sqrt3}{2},\ \frac{\sqrt3}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt3}{2},\ \frac{\sqrt3}{2},\ 0, \ldots$$

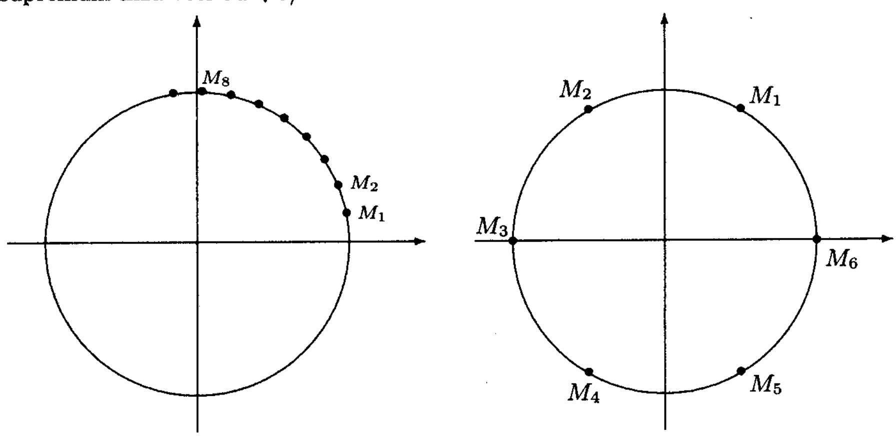
Supremum ovog niza je $\sqrt3/2$. Dokažimo da je ovaj supremum najmanji.

Posmatrajmo trigonometrijski krug. Neka je α neki mali ugao (uzmimo, na primer, 11°). Za uglove $p \cdot 11^\circ$ dobijamo tačke $M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots$ (prva slika).

Ordinate ovih tačaka su $|\sin(p \cdot 11^\circ)|$. Vidi se, na primer, da je tačka M_8 dobijena za $p \cdot 11^\circ = 88^\circ$, i njena ordinata je bliska jedinici.

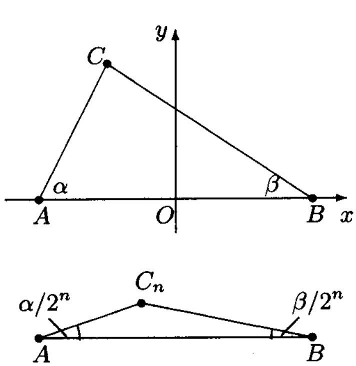
Na drugoj slici je nacrtan trigonometrijski krug sa tačkama $M_1, M_2, \ldots$, koje odgovaraju uglovima $p \cdot \pi/3$, gde je $p = 1, 2, \ldots$

Odavde se jasno vidi zašto se rešenje zadatka dobija za $\alpha = \pi/3$. Ako ovaj ugao malo smanjimo, tačka M_1 se malo spusti, ali se zbog toga tačka M_2 podigne, pa je supremum veći od $\sqrt{3}/2$. S druge strane, ako se tačka M_1 podigne, tj. ugao $\alpha = \pi/3$ povećamo, onda je supremum niza veći od $\sqrt{3}/2$.



442. Rešenje. Posmatrajmo trougao ABC u Dekartovom pravouglom sistemu, čija stranica AB pripada x-osi, pri čemu je $A(-c/2, 0)$ i $B(c/2, 0)$. Pošto se centar upisanog kruga nalazi u preseku simetrala uglova, zaključujemo da se tačka $C_n(x_n, y_n)$ nalazi u preseku stranica AC_n i BC_n, tj. u preseku pravih

$$y = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\left(x + \frac{c}{2}\right), \quad y = -\operatorname{tg}\frac{\beta}{2^n}\left(x - \frac{c}{2}\right).$$



Iz ovog sistema dobijamo $x = x, y = y_n$, gde su

$$(1) \quad x_n = \frac{c}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2^n} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2^n} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}}, \quad y_n = c\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2^n} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}}$$

i to su koordinate tačke C_n. Ostaje da se izračuna $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n$.

Pođimo od granične vrednosti $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Odavde je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Važi opštija granična vrednost

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(tx)}{x}=t\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(tx)}{tx}=t\cdot 1=t. \tag{2}$$

Ako jednakost (1) prikažemo u obliku

$$x_n=\frac{c}{2}\cdot\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}-\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}}{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}+\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}},$$

primenom (2) dobijamo $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{c}{2}\,\dfrac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$, imamo

$$\lim_{n\to+\infty}C_n=M\Big(\frac{c}{2}\,\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha},0\Big).$$

NAPOMENA. Ako je, na primer, trougao ABC jednakokrak, pri čemu je $\alpha=\beta$, onda su sve tačke C_n na y-osi, tj. na visini iz tačke C. Tada je $\lim\limits_{n\to+\infty}C_n=(0,0)$.

443. Dokaz. Izraz (1) je tzv. harmonijski red koji divergira, tj. njegova suma je beskonačno velika. Postoji mnogo dokaza ove činjenice. Ovde ćemo izneti dokaz zasnovan na metodu svođenja na apsurdum. Neka je

$$s=1+\frac12+\frac13+\frac14+\frac15+\frac16+\cdots \tag{2}$$

Dokažimo da ova jednakost nema smisla, tj. da zbiru (1) ne možemo pripisati zbir s. Ako u (2) umesto $1,\ \frac13,\ \frac15,\ldots$ stavimo redom $\frac12,\ \frac14,\ \frac16,\ldots$, dakle uvećamo zbir (1), dobijamo

$$s<\underbrace{\frac12+\frac12}_{1}+\underbrace{\frac14+\frac14}_{1/2}+\underbrace{\frac16+\frac16}_{1/3}+\cdots=s.$$

Dakle, izlazi da je $s<s$, što je apsurd.

444. Rešenje. Identitet (1) važi za $x=1$, pa levu i desnu stranu možemo podeliti sa $x-1$. Dobijamo

$$(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)P(x)+(x^4+x^3+x^2+x+1)Q(x)=1. \tag{2}$$

Primenimo Euklidov algoritam. Imamo

$$\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=x^3+\frac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}, \tag{3}$$

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=x^2+\frac{x+1}{x^2+x+1}, \tag{4}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}. \tag{5}$$

Sada se "vraćamo nazad". Iz jednakosti (5), (4) i (3) izlazi

$$
\begin{aligned}
&(6) \qquad & 1 &= x^2+x+1-x(x+1),\\
&(7) \qquad & x+1 &= x^4+x^3+x^2+x+1-x^2(x^2+x+1),\\
&(8) \qquad & x^2+x+1 &= x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1-x^3(x^4+x^3+x^2+x+1).
\end{aligned}
$$

Zamenom x^2+x+1 iz (8) u (7) i $x+1$ iz (7) u (6) dobijamo

$$
\begin{aligned}
1 &= x^2+x+1-x\big((x^4+x^3+x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)\big)\\
&= -x(x^4+x^3+x^2+x+1)+(1+x^3)(x^2+x+1)\\
&= -x(x^4+x^3+x^2+x+1)(1+x^3)\big((x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
&\qquad -x^3(x^4+x^3+x^2+x+1)\big)
\end{aligned}
$$

i na kraju

$$1=(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(1+x^3)-(x^4+x^3+x^2+x+1)(x+x^3+x^6).$$

Poređenjem ove jednakosti sa (2) nalazimo

$$P(x)=1+x^3, \qquad Q(x)=-(x+x^3+x^6).$$

Zaista, važi identitet

$$(x^8-1)(1+x^3)-(x^5-1)(x+x^3+x^6)\equiv x-1.$$

445. Dokaz. *Polinom P je deljiv polinomom Q ako nule polinoma Q pripadaju skupu nula polinoma P, računajući i njihovu višestrukost.*

U ovom zadatku polinom x^2+1 ima dve nule $x=i$ i $x=-i$. Primenom Moivreove formule

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin\theta$$

imamo

$$
\begin{aligned}
P_n(i) &= (\cos\theta+i\sin\theta)^n-\cos n\theta-i\sin n\theta\\
&= \cos n\theta+i\sin n\theta-\cos n\theta-i\sin n\theta=0,\\
P_n(-i) &= (\cos\theta-i\sin\theta)^n-\cos n\theta+i\sin n\theta\\
&= \cos n\theta-i\sin n\theta-\cos n\theta+i\sin n\theta=0.
\end{aligned}
$$

Pošto je $P_n(i)=P_n(-i)=0$, polinom P_n je deljiv sa x^2+1.

446. Dokaz. Neka je S skup realnih brojeva k,ℓ,m gde $k,\ell,m\in\{0,1,2,\dots,10^6-1\}$, i neka je broj p definisan sa $p=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot 10^6$.

Podelimo segment $[0,p]$ na $10^{18}-1$ segmenata iste širine. Širina takvog segmenta je $\varepsilon=\dfrac{p}{10^{18}-1}$. Ukupan broj uređenih trojki (k,ℓ,m) je $10^6\cdot10^6\cdot10^6=10^{18}$. Pošto ima 10^{18} trojki i $10^{18}-1$ segmenata, na osnovu Dirichlet-ovog principa postojaće dve trojke (k_1,ℓ_1,m_1) i (k_2,ℓ_2,m_2) koje pripadaju istom segmentu. Razlika ovih trojki je trojka (a,b,c), za koju je

$$|a+b\sqrt{3}+c\sqrt{3}|<\frac{10^6}{10^{18}-1}<10^{-11}.$$

447. Dokaz. Kako je $91 = 7 \cdot 13$, broj N se može prikazati u obliku

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{13}\underbrace{11\ldots1}_{13}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{13},$$

gde imamo 7 istih blokova. Kao što se vidi, broj N je jednak

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{13} \cdot (1 + 10^{13} + 10^{26} + 10^{39} + 10^{52} + 10^{65} + 10^{78}).$$

Prema tome, N je složen broj.

448. Dokaz. Neka je $z = a + ib$, gde je i imaginarna jedinica. Važi jednakost

$$(a^2 + b^2)^n = (|z|^2)^n = (|z|^n)^2.$$

Ako uzmemo da je $z^n = x + iy$, onda su x i y celi brojevi, što je posledica činjenice da su a i b prirodni brojevi. Prema tome

$$(a^2 + b^2)^n = (|z|^n)^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2.$$

449. Dokaz 1. Neka je $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} = \alpha$ i $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239} = \beta$. Jednakost (1) postaje $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$. Treba dokazati da je $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = 1$. Imamo

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Dalje je

$$\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = 1.$$

Dokaz 2. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 5 - i$ i $z_2 = 1 + i$, za koje je $\arg z_1 = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$ i $\arg z_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Izračunajmo proizvod $z_1^4 \cdot z_2$. Imamo

$$z_1^4 \cdot z_2 = (5 - i)^4 \cdot (1 + i) = (476 - i\,480)(1 + i) = 4 \cdot (239 - i).$$

Polazeći od jednakosti

$$\arg(z_1^4 \cdot z_2) = 4\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(239 - i),$$

dobijamo

$$-4 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \frac{\pi}{4} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

odakle izlazi jednakost (1).

450. Rešenje. Neka je $z_1 = m + in$, $z_2 = k + i\ell$. Kako je $|z_1|^2 = m^2 + n^2 = A$ i $|z_2|^2 = k^2 + \ell^2 = B$, zatim $z_1 z_2 = mk - n\ell + i(m\ell + kn)$, imamo

$$A \cdot B = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2 = (mk - n\ell)^2 + (m\ell + kn)^2.$$

451. Jednostavno se proverava da su

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b}, \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b}$$

koreni kvadratne jednačine $bx^2 - ax - \dfrac{b}{2} = 0$. Kako je $x_1 x_2 = -\dfrac{1}{2}$, tj. $|x_1| \cdot |x_2| = \dfrac{1}{2}$, ne mogu oba činioca biti veći ili jednaki 1.

NAPOMENA. Naravno, oba korena mogu biti po modulu manja od 1. Na primer, za $a = \sqrt{3}$ i $b = 6$ koreni su $\sqrt{3}/2$ i $-\sqrt{3}/3$.

452. Rešenje 1. Pretpostavimo da je $\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}$. Ako levu i desnu stranu kubiramo, izlazi

$$60 > 8 + 12\sqrt[3]{7} + 6\sqrt[3]{49} + 7,$$

odakle je posle sređivanja

(1) $$2\sqrt[3]{49} + 4\sqrt[3]{7} - 15 < 0.$$

Ponovnim stepenovanjem, pri pokušaju da nestanu koreni, pojavile bi se komplikacije. Zbog toga ćemo primeniti drugi metod. Posmatrajmo nejednakost (1). Pridružićemo ovoj nejednakosti nejednačinu

(2) $$2x^2 + 4x - 15 < 0.$$

Rešenje nejednačine (2) je $\dfrac{-2 - \sqrt{34}}{2} < x < \dfrac{-2 + \sqrt{34}}{2}$. Ostaje da se ispita da li $\sqrt[3]{7}$ pripada rešenju nejednačine (2). Iz nejednakosti $\sqrt[3]{7} < \dfrac{\sqrt{34} - 2}{2}$ kubiranjem dobijamo

$$7 < \frac{34\sqrt{34} - 3 \cdot 2 \cdot 34 + 12\sqrt{34} - 8}{8} \Rightarrow 7 < \frac{46\sqrt{34} - 212}{8}$$
$$\Rightarrow 268 < 46\sqrt{34} \Rightarrow 71824 < 71944.$$

Prema tome, $\sqrt[3]{7}$ zadovoljava nejednačinu (2), pa je tačna i nejednakost (1), a time i pretpostavka da je $\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}$.

Rešenje 2. Neka su x i y nenegativni brojevi. Dokažimo nejednakost

(3) $$\sqrt[3]{4\,(x + y)} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}.$$

Smenom $x = a^3$, $y = b^3$ nejednakost (3) se svodi na

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{4\,(a^3 + b^3)} \geq (a + b) &\Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \\
&\Leftrightarrow 4\,(a^3 + b^3) \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \\
&\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo tačnu nejednakost, odakle zaključujemo da je tačna i nejednakost (3). Ako u (3) stavimo $x = 8$ i $y = 7$, dobijamo $\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}$, što je trebalo dokazati.

453. Rešenje. Izračunajmo najpre sumu $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k\,x^k$, gde je $x \neq 1$. Imamo

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=1}^{n}(k-1+1)x^k = \sum_{k=1}^{n}(k-1)x^k + \sum_{k=1}^{n} x^k \\ &= x\,(\sigma_n - nx^n) + x\,\frac{x^n-1}{x-1}\,.\end{aligned}$$

Rešimo ovu jednačinu po σ_n. Dobijamo

(2) $$\sigma_n = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}\,.$$

Opšti član zbira (1) možemo prikazati u obliku

$$k(\underbrace{111\ldots1}_{k}) = k(1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}) = \frac{k}{9}\,(10^k-1),$$

pa je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{9}\,(10^k-1) = \frac{1}{9}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} k\cdot 10^k - \sum_{k=1}^{n} k\Bigr).$$

Primenom jednakosti (2) za $x = 10$ i $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ nalazimo

$$s_n = \frac{1}{9}\Bigl(\frac{n\cdot 10^{n+2}-(n+1)\,10^{n+1}+10}{81} - \frac{n(n+1)}{2}\Bigr)$$

i to je traženi rezultat.

454. Pošto je $x > 0$ i $y > 0$ možemo staviti

(1) $$x = 4u, \quad y = 36v \qquad (u, v > 0)$$

i zamenom dobijamo sistem

$$1 - \frac{1}{u+3v} = \frac{1}{\sqrt{u}}\,, \quad 1 + \frac{1}{u+3v} = \frac{1}{\sqrt{v}}\,.$$

Uvođenjem smene

(2) $$z = \frac{1}{u+3v} > 0$$

nalazimo $\dfrac{1}{\sqrt{u}} = 1 - z$, $\dfrac{1}{\sqrt{v}} = 1 + z$, gde je $0 < z < 1$ (jer je $1 - z = 1/\sqrt{u} > 0$), pa je

(3) $$u = \frac{1}{(1-z)^2}\,, \quad v = \frac{1}{(1+z)^2}\,.$$

Ako (3) zamenimo u (2), dobijamo $z^4 - 4z^3 + 2z^2 - 4z + 1 = 0$, odnosno

$$(z^2 - 4z + 1)(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 2 - \sqrt{3}$$

(drugo realno rešenje $z_2 = 2 + \sqrt{3} > 1$ ne dolazi u obzir). Na kraju, iz (1) i (3) izlazi

$$x_1 = \frac{4}{(1 - z_1)^2} = 2\,(2 + \sqrt{3}\,), \quad y_1 = \frac{36}{(1 - z_1)^2} = 6\,(2 + \sqrt{3}\,).$$

MIRKO JOVANOVIĆ
DOBRILO TOŠIĆ

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA I PROBLEMA
IZ MATEMATIKE
za učenike srednjih škola

Prvo izdanje 2010. godina

Izdavač
ZAVOD ZA UDŽBENIKE
Beograd, Obilićev venac 5, Beograd

www.zavod.co.rs

Likovni urednik
TIJANA RANČIĆ

Korice
TIJANA RANČIĆ

Grafički urednik
MILAN BJELANOVIĆ

Korektor
KOREKTURA ZAVODA ZA UDŽBENIKE

Obim: 17,5 štamparskih tabaka
Format: $16,5 \times 23,5$ cm

Rukopis predat u štampu juna 2010. godine.
Štampanje završeno jula 2010. godine.
Štampa PLANETA PRINT, Beograd