Dragomir M.Simeunović

M A G I S T A R S K I R A D

- Lokalizacija nula polinoma -

B E O G R A D 1967

LOKALIZACIJA NULA POLINOMA

U V O D

Posle Gaussovog dokaza osnovne teoreme algebre da polinom stepena n ima bar jednu nulu, odlučan korak u daljem razvoju algebre bio je dokaz Abela i Galoisa o nemogućnosti rešenja jednačine petog i višeg stepena pomoću radikala. U vezi s tim pojavljuje se nova grana izmedju algebre i matematičke analize koja se bavi odredjivanjem oblasti u kojima se nalaze sve nule datog polinoma ili samo pojedine od njih. Ova grana razvila se u naučnu disciplinu u kojoj postoji čitav niz teorema koje se često i ne mogu uporediti, ali koje daju razmak, odnosno odredjuju oblast u kojima se nalaze nule datog polinoma. Rezultati ove oblasti - geometrije nula polinoma - mogu se primeniti i na funkcije predstavljene Taylorovim redom, što predstavlja poseban interes u teoriji funkcija.

Ovaj rad sastoji se iz tri dela. Prvi deo obuhvata pregled i dokaz osnovnih nejednakosti koje se koriste za odredjivanje oblasti u kojima se nalaze nule datog polinoma i za odredjivanje granica modula nula polinoma. U drugom delu navode se sa dokazom klasični rezultati iz oblasti geometrije nula polinoma koji su vezani za imena Cauchya, Gauss-Lucasa, Rouchéa, Jensena, Laguerrea, Gracea, Descartesa, Budan-Fouriera, Sturma, Hurwitza, Landaua, Montela, D. Markovića i drugih. U trećem delu ukazuje se na mogućnost proširenja postupka D. Markovića za odredjivanje granica modula nula polinoma i daju se neke druge granice za module nula kako polinoma, tako i funkcija predstavljenih Taylorovim redom.

Na kraju se daje osnovni pregled literature koja je u neposrednoj vezi sa ovim radom.

I DEO

NEJEDNAKOSTI

U ispitivanju lokalizacije nula polinoma važnu ulogu imaju nejednakosti. Zato ovde prvo dajemo pregled onih nejednakosti koje su nam potrebne u toku daljeg izlaganja.

1.1. Jedna dvostruka nejednakost

T e o r e m a. Neka su α_ν realni brojevi, β_ν i λ_ν realni i pozitivni brojevi. Neka je

(1) $$S = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \lambda_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \lambda_\nu}.$$

Tada važe nejednakosti

(2) $$\min_{1\le\nu\le n}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right) \le S \le \max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right).$$

D o k a z. Neka je

(3) $$m = \min_{1\le\nu\le n}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right), \quad M = \max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right).$$

Tada je

$$m \le \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \le M \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n),$$

odakle se posle množenja sa $\beta_\nu \lambda_\nu$ dobija

$$m\beta_\nu\lambda_\nu \le \alpha_\nu\lambda_\nu \le M\beta_\nu\lambda_\nu.$$

Sabiranjem po ν (ν=1, 2, ... , n) dobija se

$$m\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu\lambda_\nu \le \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\lambda_\nu \le M\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\lambda_\nu,$$

što posle deljenja sa $\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\lambda_\nu$ daje

$$m \le \frac{\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\lambda_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\lambda_\nu} \le M,$$

čime je teorema dokazana.

1.2. Nejednakost Jensen-a

D e f i n i c i j a 1. Za funkciju $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, kaže se da je konveksna na $[\alpha, \beta]$ u smislu Jensen-a ako za svako a, $b \in [\alpha, \beta]$, važi nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1}$$

T e o r e m a. Ako je funkcija $f(x)$ za $x \in [\alpha, \beta]$ konveksna u smislu Jensen-a, tada za $a_1, a_2, \dots, a_n \in [\alpha, \beta]$ važi nejednakost

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_\nu) \tag{2}$$

koja se zove nejednakost Jensen-a.

D o k a z. Dokaz ćemo izvesti metodom matematičke indukcije. Pretpostavićemo da za $n = 2^k$ (k neki prirodni broj) važi nejednakost

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}. \tag{3}$$

Posmatrajmo sada

$$f\left(\frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{n}}{2}\right).$$

Na osnovu definicije konveksne funkcije i nejednakosti (3) dobijamo

$$f\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{2n} a_\nu}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) + f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{2n} a_\nu\right)}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} f(a_\nu) + \sum_{\nu=n+1}^{2n} f(a_\nu)}{2n} = \frac{\sum_{\nu=1}^{2n} f(a_\nu)}{2n}.$$

Nejednakost (2) je dakle tačna za $n = 2^{k+1}$, ako je tačna za $n = 2^k$, i kako je ona tačna za $n = 2$ ($k = 1$), zaključujemo da je ona tačna za svaki prirodni broj $n = \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$.

Sada ćemo dokazati da iz pretpostavke da je nejednakost (2) tačna za neko n, proizilazi da je ona tačna i za $n - 1$.

Pretpostavimo da je nejednakost (2) tačna za neki prirodni broj n i za svako $a_\nu \in [\alpha, \beta]$ i u (2) zamenimo a_n sa $\frac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$.

Tada iz (2) dobijamo

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n}\right)\leq\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{n-1})+f\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)}{n},$$

što posle sredjivanja daje

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)\leq\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{n-1})}{n-1}+\frac{1}{n}f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)$$

odakle je

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)\leq\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{n-1})}{n-1}.$$

Prema tome, iz pretpostavke da je nejednakost (2) tačna za neki prirodni broj n, proizilazi da je ona tačna i za n - 1.

Na ovaj način smo dokazali nejednakost (2).

D e f i n i c i j a 2. Za funkciju f(x) definisanu na segmentu $[\alpha,\beta]$ kaže se da je konveksna na $[\alpha,\beta]$ ako za svako a, b $\in[\alpha,\beta]$ važi nejednakost

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\leq\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}, \tag{4}$$

gde su p i q ma kakvi pozitivni brojevi.

Za konveksne funkcije f važi nejednakost

$$f\left(\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu a_\nu\right)\leq\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu f(a_\nu)\quad\left(\alpha<a_\nu<\beta;\ q_\nu>0,\ \sum_{\nu=1}^{n}q_\nu=1\right). \tag{5}$$

Isto tako može se pokazati da za konveksne funkcije f važi nejednakost

$$f\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu a_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu}\right)\leq\frac{\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(a_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu} \tag{6}$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in[\alpha,\beta]$ i $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$.

Ako stavimo $q_\nu=\dfrac{p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), onda je $\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu=1$ i na osnovu definicije 2 nejednakost (6) dobija oblik (5).

Za funkciju f koja je konveksna u smislu definicije 2 može se pokazati da je ona konveksna i u smislu Jensen-a.

Ovde navodimo i jedan kriterijum za konveksnost.

Ako funkcija f(x) ima drugi izvod u intervalu (α, β), tada je uslov $f''(x) \geq 0$ $(x \in (\alpha, \beta))$ potreban i dovoljan da bi funkcija f(x) bila konveksna u (α, β).

D e f i n i c i j a 3. Za funkciju f(x) definisanu na segmentu $[\alpha, \beta]$ kazaćemo da je konkavna na $[\alpha, \beta]$ ako je $-f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, konveksna funkcija.

Za konkavne funkcije važe odgovarajuće nejednakosti kao (2) i (5) samo u obrnutom smeru.

P r i m e r 1. Funkcija $f(x) = \ln x$ je konkavna funkcija za $x > 0$, pošto je $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Zato je za $a, b > 0$ i $p > 0$ i $q > 0$, pri čemu je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b = \ln ab$$

odakle se dobija

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \left(p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{7}$$

Kao što ćemo videti, nejednakost (7) pokazaće se veoma korisnom za izvodjenje važnih opštijih nejednakosti.

1.3. O sredinama $M_t(a, \alpha)$ i $S_t(a)$

Za proizvoljan niz pozitivnih brojeva

$$(a) \overset{\text{def}}{=} (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

i niz pozitivnih brojeva

$$(\alpha) \overset{\text{def}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 1 \tag{2}$$

i ma koji realni broj $t \neq 0$ uvedimo sredinu reda t

$$M_t(a, \alpha) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu^t\right)^{\frac{1}{t}}. \tag{3}$$

U posebnom slučaju kada je $\alpha_\nu = \frac{1}{n}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), sredine reda -1, 1 i 2 su redom harmonijska, aritmetička i kvadratna sredina.

Primenom pravila L'Hospital-a može se ustanoviti da je

(4) $$\lim_{t\to 0} M_t(a,\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\alpha_\nu},$$

tj. dobija se geometrijska sredina niza (1). Dalje, ako je $a_k = \max(a)$ očigledno je za $t > 0$

$$\alpha^{\frac{1}{t}} a_k \leq M_t(a,\alpha) \leq a_k,$$

odakle izlazi da je

(5) $$\lim_{t\to\infty} M_t(a,\alpha) = \max(a).$$

Medjutim, iz

$$M_{-t}(a,\alpha) = \frac{1}{M_t(\frac{1}{a},\alpha)}$$

izlazi da je

(6) $$\lim_{t\to-\infty} M_t(a,\alpha) = \min(a)$$

Na osnovu (4), (5) i (6) stavljamo

$$M_0(a,\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\alpha_\nu},$$

$$M_\infty(a,\alpha) = \max(a),$$

$$M_{-\infty}(a,\alpha) = \min(a).$$

Pokazaćemo sada da je $M_t(a,\alpha)$ neopadajuća funkcija od t za $-\infty \leq t \leq \infty$.

Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x \ln x, \quad x > 0.$$

Za nju je $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, pa je ona konveksna i zbog toga važi nejednakost

(7) $$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu \ln a_\nu \geq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu\right) \ln\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu a_\nu\right).$$

Kako je

$$M_t(a,\alpha) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu^t\right)^{\frac{1}{t}},$$

to je odavde

$$\frac{1}{M_t(a,\alpha)}\cdot\frac{dM_t(a,\alpha)}{dt}=\frac{1}{t}\,\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t \ln a_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t}-\frac{1}{t^2}\ln\left(\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t\right),$$

što posle sredjivanja daje

$$\frac{t^2}{M_t(a,\alpha)}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t\cdot\frac{dM_t(a,\alpha)}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t\ln a_\nu^t-\left(\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t\right)\ln\left(\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu a_\nu^t\right).$$

Ako u nejednakosti (7) umesto a_ν uzmemo a_ν^t, iz poslednje relacije zaključujemo da je

$$\frac{dM_t(a,\alpha)}{dt}\geq 0,$$

što znači da je funkcija $M_t(a, \alpha)$ neopadajuća za $-\infty\leq t\leq\infty$.

Ako brojevi a_ν nisu jednaki medju sobom, onda je $M_t(a, \alpha)$ strogo rastuća funkcija od t.

Za niz (1) uvedimo sada još jednu sredinu reda t

(8) $$S_t(a)=\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^t\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Kako je

$$S_t(a)=n^{\frac{1}{t}}M_t\left(a,\frac{1}{n}\right),\ \alpha_\nu=\frac{1}{n}\ (\nu=1,2,\ldots,n),$$

odavde i iz (5) dobijamo da je

$$\lim_{t\to\infty}S_t(a)=\lim_{t\to\infty}n^{\frac{1}{t}}M_t\left(a,\frac{1}{n}\right)=max(a)$$

tj.

(9) $$S_\infty(a)=max(a).$$

Sada ćemo pokazati da je

(10) $$S_{t_2}(a)\leq S_{t_1}(a),\quad 0<t_1<t_2.$$

Iz

$$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^{t_2}\right)^{\frac{1}{t_2}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^{t_1}\right)^{\frac{1}{t_1}}}=\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu^{t_2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^{t_1}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}}\right]^{\frac{1}{t_2}}=\left[\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{a_\nu^{t_1}}{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^{t_1}}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}\right]^{\frac{1}{t_2}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu^{t_1}}{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^{t_1}}\right)^{\frac{1}{t_1}}=1$$

dobijamo

što pretstavlja relaciju (10).

1.4. Nejednakost Hölder-a

T e o r e m a 1. Za dva niza nenegativnih brojeva
$$(a)=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad i \quad (b)=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
važi nejednakost
$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leq \Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad p>1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$
koja se zove nejednakost Hölder-a.

D o k a z. Ako u nejednakosti (7) paragrafa 1.2. a i b smenimo sa
$$a = \frac{a_\nu}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{b_\nu}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}}$$
dobijamo
$$\frac{a_\nu b_\nu}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_\nu^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{b_\nu^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}$$

Posle sabiranja po ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) iz poslednje nejednakosti dobijamo
$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu}{\Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu^q\Big)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$
odnosno
$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leq \Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

U (1) važi znak jednakosti ako i samo ako je $b_\nu = a_\nu^{p-1}$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$

Za $p=q=2$ (1) se svodi na
$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leq \Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

koja se zove nejednakost Cauchy - Bunjakovski - Schwarz-a.

Ako su $(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dva niza kompleksnih brojeva, onda važi nejednakost

(3) $$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p>1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

pošto je $$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right| \le \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|\,|b_\nu| .$$

Nejednakost Hölder-a (1) ima svoj integralni analogon koji ćemo sada navesti.

Pretpostavlja se da su funkcije o kojima je ovde reč integrabilne na segmentu $[\alpha, \beta]$, gde je $\alpha < \beta$.

T e o r e m a 2. Neka je $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada važi nejednakost

(4) $$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx\right| \le \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

koja se zove nejednakost Hölder-a.

D o k a z. Ako u nejednakosti (7) paragrafa 1.2. stavimo

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}, \quad p>1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

dobićemo

$$\frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\, \frac{|f(x)|^p}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)} + \frac{1}{q}\, \frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)},$$

odakle posle integracije dobijamo dalje

$$\frac{\int_\alpha^\beta |f(x)|\,|g(x)|\, dx}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Prema tome je

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^{q} dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

a to je nejednakost Hölder-a.

Za $p = q = 2$ iz (4) se dobija nejednakost Schwarz-a

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^{2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^{2} dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

II DEO

OPŠTE TEOREME O NULAMA POLINOMA

Ovaj deo obuhvata neke opšte teoreme o nulama datog polinoma. Pored toga ovde se iznose i važnije teoreme o granicama modula nula polinoma.

2.1. Polinom, njegove nule i načini njegovog predstavljanja

Izraz oblika

(1) $$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad a_n \neq 0$$

gde su a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$) realni ili kompleksni brojevi naziva se algebarski p o l i n o m stepena n.

Kompleksan ili realan broj t za koji je $P(t) = 0$ naziva se n u l a polinoma $P(z)$.

Kao što je poznato, polinom (1) može se predstaviti u obliku

(2) $$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

gde su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ njegove nule. Ako je $z_1 = z_2 = \ldots = z_p$, $p \leq n$, nula z_p polinoma $P(z)$ je njegova nula reda p.

Upoređjujući oblike (1) i (2) polinoma $P(z)$ dolazi se do veza izmedju njegovih nula i koeficijenata

(3) $$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_k}; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

gde $\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}$ označava da se sabiranje vrši po svim kombinacijama bez ponavljanja klase k skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Relacije (3) nazivaju se formule Viète-a.

2.2. Osnovne teoreme o nulama datog polinoma

P r i n c i p a r g u m e n t a. Neka je C jednostavno zatvorena kriva u kompleksnoj ravni. Sa C_i označimo unutrašnju, a sa C_e spoljašnju oblast kompleksne ravni, kojima je C zajednički rub. Na ovaj način kompleksna ravan je podeljena na disjunktne skupove C_i, C, C_e.

Neka je z_0 odredjena tačka kompleksne ravni. Tada za svaku drugu tačku z kompleksne ravni razlika $z - z_0$ jednaka je vektoru $\overrightarrow{z_0 z}$, dok $\arg(z - z_0)$ pretstavlja ugao što ga vektor $z_0 z$ zaklapa sa osom OX. Kada z proputuje u pozitivnom smeru nekom jednostavno zatvorenom krivom C u kompleksnoj ravni na kojoj ne leži tačka z_0, tada se arg $(z - z_0)$ vrati na svoju polaznu vrednost ili se uveća za 2π, prema tome da li z_0 leži u C_e ili u C_i.

Posmatrajmo polinom P(z) i neka je $P(z) \neq 0$ za $z \in C \cup C_i$. U tom slučaju P(z) je neki kompleksan broj različit od nule. Kada z proputuje krivom C počev od neke tačke $z' \in C$, P(z) opiše neku jednostavno zatvorenu krivu koja ne obuhvata koordinatni početak, a arg P(z) se vrati na svoju početnu vrednost arg P(z').

Promenu argumenta kada z proputuje po krivoj C obeležimo sa $\Delta \arg P(z)$.

T e o r e m a (princip argumenta). Broj nula polinoma P(z) koje se nalaze u unutrašnjosti neke zatvroene krive C dobija se kada se sa 2π podeli povećanje arg P(z) kada z proputuje krivom C u pozitivnom smeru. Pri ovome se uzima da je $P(z) \neq 0$ za svako $z \in C$.

D o k a z. Neka $z_1, z_2, \ldots, z_k \in C_i$ i neka je polinom P(z) pretstavljen u obliku

(1) $$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_k)\, Q(z),$$

gde je $Q(z) \neq 0$ za svako $z \in C_i$. Iz (1) se dobija

$$\arg P(z) = \sum_{\nu=1}^{k} \arg(z - z_\nu) + \arg Q(z).$$

Kada z proputuje krivom C u pozitivnom smeru, dobiće se

(2) $$\Delta \arg P(z) = 2\pi \cdot k,$$

pošto je promena arg Q(z) pri tome jednaka nuli.

Iz (2) se dobija da je

$$K = \frac{\Delta \arg P(z)}{2\pi},$$

što je i trebalo dokazati.

T e o r e m a (Rouché). Neka je C jednostavno zatvorena kriva u kompleksnoj ravni i $P(z)$ i $Q(z)$ polinomi sa osobinom $|P(z)| < |Q(z)|$ za svako $z \in C$. Tada polinom

$$S(z) = P(z) + Q(z)$$

ima u C_i isti broj nula kao i $Q(z)$.

D o k a z. Iz

$$S(z) = P(z) + Q(z) = Q(z)\left[1 + \frac{P(z)}{Q(z)}\right]$$

imamo

$$\arg S(z) = \arg Q(z) + \arg\left(1 + \frac{P(z)}{Q(z)}\right).$$

odakle se, kada z proputuje krivom C u pozitivnom smeru, dobija

$$\Delta \arg S(z) = \Delta \arg Q(z)$$

pošto je $\Delta \arg\left(1 + \frac{P(z)}{Q(z)}\right) = 0$, jer kada tačka z proputuje krivom C odgovarajuća tačka $1 + \frac{P(z)}{Q(z)}$ opisivaće zbog $|P(z)| < |Q(z)|$ ~~krivu~~ krivu sadržanu u jediničnom krugu sa središtem u 1. Kako je pri ovome varijacija argumenta polinoma $S(z)$ jednaka varijaciji argumenta polinoma $Q(z)$, na osnovu principa argumenta, ova dva polinoma imaju jednak broj nula u C_i.

O s n o v n a t e o r e m a a l g e b r e. Svakom algebarskom polinomu $P(z)$ sa kompleksnim koeficijentima može se naći kompleksan broj za koji taj polinom dobija vrednost 0. Tačnije: svaki algebarski polinom stepena n sa kompleksnim koeficijentima ima n nula. Pri tome se svaka višestruka nula uzima onoliko puta, koliki je njen red.

D o k a z. Neka je

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0.$$

Tada je

$$(3) \qquad P(z) = a_n z^n\left(\frac{a_0}{a_n} z^{-n} + \frac{a_1}{a_n} z^{-n+1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + 1\right).$$

Kada $|z| \to \infty$ onda $z^{-k} \to 0$ za svaki prirodni broj k. Zato se u zagradi (3) svaki član $\neq 1$ može po apsolutnoj vrednosti učiniti proizvoljno malim, za dovoljno veliko $|z|$, što znači da će za dovoljno veliko r i $|z| > r$ zbir modula prvih n članova u zagradi (3) biti manji od 1, a tim pre će biti

$$\left|\frac{a_0}{a_n} z^{-n} + \frac{a_1}{a_n} z^{-n+1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1}\right| < 1$$

odnosno

$$\left|\frac{P(z) - a_n z^n}{a_n z^n}\right| < 1$$

odakle

(4) $$|P(z) - a_n z^n| < |a_n z^n| \quad za \ |z| > r.$$

Zato će za svaku kružnu liniju $C(0, R)$ za $R > r$ biti ispunjeno (4), odakle na osnovu Rouché-ove teoreme sledi da polinom $P(z) = (P(z) - a_n z^n) + a_n z^n$ i $a_n z^n$ imaju u C isti broj nula, dakle n nula.

T e o r e m a o n e p r e k i d n o j z a v i s n o s t i n u l a p o l i n o m a o d n j e g o v i h k o e f i c i j e n a t a. Ako se koeficijenti polinoma $P(z)$ menjaju na neprekidan način, tada se i njegove nule takodje menjaju na neprekidan način.

D o k a z. Neka je $P(z_0) = 0$ i neka je K kružna linija sa centrom u z_0, tako da je z_0 jedina nula polinoma $P(z)$ u krugu K. Ovakav krug postoji, jer $P(z)$ ima konačno mnogo nula. Neka se koeficijenti polinoma $P(z)$ promene tako da nastane polinom $Q(z)$ sa osobinom

(5) $$|Q(z) - P(z)| < |P(z)| \quad za \quad z \in K.$$

Ovakav polinom $Q(z)$ postoji, jer ako je $\rho = \min_{z \in K} |P(z)|$ tada je $\rho > 0$ jer je $P(z) \neq 0$ za $z \in K$. Ako sada koeficijente polinoma $P(z)$ promenimo tako da nastane polinom $Q(z)$ sa osobinom $|Q(z) - P(z)| < \varepsilon < \rho$ za $z \in K$, tada će važiti i (5). Sada, na osnovu Rouché-ove teoreme funkcija $Q(z) = (Q(z) - P(z)) + P(z)$ ima u K isti broj nula kao i $P(z)$, ima dakle jednu jedinu nulu u K.

T e o r e m a H u r w i t z - a. Neka je $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ niz analitičkih funkcija u oblasti R koji uniformno konvergira ka $f(z) \not\equiv 0$ u svakoj zatvorenoj podoblasti od R. Neka je ζ unutrašnja tačka od R. Ako je ζ tačka nagomilavanja nula niza $f_n(z)$, tada je ζ nula od $f(z)$. Ako je ζ nula reda m od $f(z)$, svaka dovoljno mala okolima K od ζ sadrži tačno m nula (računata svojim redom) svake funkcije $f_n(z)$ za $n \geq N(K)$.

D o k a z. Neka je $f(\zeta) \neq 0$. Pošto je $f(z)$ analitička funkcija u R, ona može imati samo konačan broj nula u R. Izaberimo pozitivan broj ρ tako da bude $f(z) \neq 0$ u i na krugu $K: |z-\zeta| = \rho$. Neka je $\varepsilon = \min_{z \in K} |f(z)|$. Pošto $f_n(z)$ konvergira ka $f(z)$ uniformno u i na K, može se izabrati broj $N = N(K)$, tako da bude na K $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$. Na osnovu Rouché-ove teoreme sada zbir funkcija $\big(f_n(z) - f(z)\big) + f(z) = f_n(z)$ ima isti broj nula u K kao i $f(z)$. Pošto je $f_n(z) \neq 0$ u K za svako $n \geq N$, tačka ζ za koju je $f(\zeta) \neq 0$ ne može biti tačka nagomilavanja nula za $f_n(z)$.

Ako se uzme da je ζ nula reda m za $f(z)$, može se izabrati pozitivan broj ρ tako da je $f(z) \neq 0$ na K. Rezonujući kao i u prethodnom slučaju, zaključujemo na osnovu Rouché-eove teoreme da svaka funkcija $f_n(z)$, $n \geq N$, ima tačno m nula u K.

2.3. O nulama izvoda datog polinoma

G a u s s - L u c a s - o v a   t e o r e m a. Neka je $P(z)$ algebarski polinom sa kompleksnim koeficijentima. Svaki konveksni skup koji obuhvata nule polinoma $P(z)$ obuhvata i nule njegovih izvoda $P'(z)$ $P''(z), \ldots, P^{(n-1)}(z)$.

D o k a z. Navedena teorema biće posledica l e m e :

Ako neka zatvorena poluravan obuhvata nule $P(z)$, obuhvata ona i nule $P'(z)$.

Svaki konveksan skup S koji sadrži sve nule $P(z)$ sadrži i minimalni poligon p u kome leže nule $P(z)$. Zato je dovoljno da pokažemo da poligon p sadrži nule polinoma $P'(z)$; poligon p se dobija kao presek odredjenog broja zatvorenih poluravni $R_1, R_2, \ldots, R_k$, tj.

$$p = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_k .$$

Neka zatvorena poluravan R pretstavlja gornju poluravan R_0 kompleksnih brojeva $x + iy$, za koje je $y \geq 0$. Neka su nule polinoma $P(z)$

(1) $$z_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gde je

(2) $$\beta_\nu \geq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Ako je $P'(z) = 0$, $P(z) \neq 0$, tada je $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = 0.$ Pošto je $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$, to je

(3) $$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = 0 .$$

Ako se stavi

(4) $$z = \alpha + i\beta$$

tada će se iz (3) dobiti

(5) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\beta - \beta_\nu}{(\alpha - x_\nu)^2 + (\beta - \beta_\nu)^2} = 0 .$$

Zbog (2) ne može biti $\beta < 0$, jer bi tada izraz na levoj strani (5) bio negativan. Dakle, mora biti $\beta \geq 0$, što znači da i nule izvoda polinoma $P(z)$, tj. nule $P'(z)$ leže u gornjoj poluravni R_0.

Ako data poluravan R nije R_0, ~~znači da će nule P'(z)~~ transformacijom $z = ku + \ell$ ona se prevodi u R_0. Pri tome polinom $P(z)$ prelazi u $P(ku + \ell) = Q(u)$, pa je

$$Q'(u) = k\, P'(z).$$

Pošto nule $Q'(u)$ leže u R_0, znači da će nule $P'(z)$ ležati u odgovarajućoj poluravni R. Ovim je lema dokazana.

P o s l e d i c a. Ako nule polinoma $P(z)$ leže na pravoj, tada nule $P'(z)$ leže takodje na istoj pravoj.

T e o r e m a J e n s e n - a. Svaka imaginarna nula izvoda polinoma $P(z)$ sa realnim koeficijentima leži u ili na bar jednom od Jensen-ovih krugova polinoma $P(z)$.

Pod Jensen-ovim krugovima polinoma $P(z)$ podrazumevamo najmanje krugove od kojih svaki prolazi kroz par konjugovano kompleksnih tačaka kompleksne ravni koje pretstavljaju nule datog polinoma $P(z)$.

D o k a z. Za dokaz teoreme Jensen-a posmatrajmo

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z - z_\nu} .$$

Zbir članova $w_1 = \dfrac{1}{x + iy - x_1 - iy_1}$ i $w_2 = \dfrac{1}{x + iy - x_1 + iy_1}$

odgovara par nula $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_1 - iy_1$ čiji je imaginarni deo

$$\Im(w_1+w_2) = \frac{-2y\left[(x-x_1)^2 + y^2 - y_1^2\right]}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\left[(x-x_1)^2+(y+y_1)^2\right]},$$

dok članu $w_3 = \dfrac{1}{x+iy-x_3}$ odgovara nula $z_3 = x_3$ polinoma $P(z)$ za koji je imaginarni deo

$$\Im(w_3) = \frac{-y}{(x-x_3)^2+y^2}.$$

Ovde je $\operatorname{sg}\Im(w_1+w_2) = -\operatorname{sg} y$ za svaku tačku z izvan svih Jensen-ovih krugova i $\operatorname{sg}\Im(w_3) = -\operatorname{sg} y$ za svaku tačku z. Drugim rečima, izvan svakog Jensen-ovog kruga je

$$\operatorname{sg}\Im\left[\frac{P'(z)}{P(z)}\right] = -\operatorname{sg} y.$$

Posebno, ako je z tačka izvan svih Jensen-ovih krugova, a ne leži na realnoj osi, tada je $P'(z) \neq 0$. Ovaj rezultat ustvari i dokazuje teoremu Jensen-a.

2.4. Teorema Laguerre-a

Neka je $P(z)$ polinom stepena $n \geq 1$ i neka je α bilo kakav kompleksan broj takav da je

$$P(\alpha) \neq 0, \quad P'(\alpha) \neq 0.$$

Neka je K kružna linija kompleksne ravni na kojoj leže brojevi

$$\alpha \quad i \quad \alpha - n\frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)},$$

Tada odgovarajući zatvoreni krug za K sadrži bar jednu ~~xxxx~~ nulu polinoma P(z). Ako sve nule polinoma P(z) ne leže na K, tada P(z) ima nula i u unutrašnjosti i u spoljašnjosti kruga K.

D o k a z. Da bismo dokazali teoremu Laguerre-a, dokazaćemo prvo sledeće dve teoreme.

T e o r e m a. Svaka prava p koja prolazi kroz tačku

(1) $$\mathfrak{J} = -\frac{1}{n}\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

sadrži sve nule polinoma P(z) ili ih razdvaja (sve nule polinoma su ili sve na pravoj p, ili se nalaze i u jednoj i u drugoj otvorenoj poluravn koje ograničava prava p).

U prvom slučaju nule polinoma su $\{\zeta\}$ ili one pripadaju i jednoj i drugoj polupravoj prave p kojima je ζ granična tačka.

Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nule polinoma $P(z)$. Tada je prema formulama Viète-a

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Zato (1) daje

$$\zeta = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n),$$

što znači da je ζ težište skupa $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Zbog toga ζ leži u minimalnom konveksnom skupu C koji obuhvata sve nule polinoma $P(z)$ pa tačka ζ ne može biti na rubu C, sem ako su sve nule od skupa $\{\zeta\}$, a ovo i tvrdi teorema.

Posle uvodjenja smene $z = u^{-1}$ polinom $P(z)$ postaje $P(z) = P(u^{-1}) = z^n(a_n + a_{n-1}u + \ldots + a_1u^{n-1} + a_0u^n) = z^nP^*(u)$. Ako je $a_0 \neq 0$, tada je novi polinom $P^*(u)$ stepena n. Težište njegovih nula je $-\frac{1}{n}\frac{a_1}{a_0} = \zeta$ i svaka prava p koja prolazi kroz ovu tačku ima osobine iz prethodne teoreme u odnosu na polinom $P^*(u)$. Pri transformaciji $z = u^{-1}$ prava p prelazi u odredjenu kružnu liniju kroz tačke 0, $\zeta^{-1} = -n\frac{a_0}{a_1}$ (zato smo pretpostavili da je $a_1 \neq 0$). Sada otvorenim poluravnima u vezi sa pravom p odgovaraju unutrašnjost i spoljašnjost kruga za K. Ovim smo dokazali <u>teoremu</u>:

Ako je u polinomu $a_0 + a_1u + \ldots + a_nu^n$, $n \geq 1$, $a_0a_1 \neq 0$, tada svaka kružna linija K kroz tačke 0, $-n(a_0 : a_1)$ sadrži sve nule polinoma $P(z)$ ili polinom $P(z)$ ima nula i u unutrašnjosti i u spoljašnjosti kruga K. U prvom slučaju nule su $\{-n\frac{a_0}{a_1}\}$ ili polinom $P(z)$ ima nula i oba otvorena luka kružne linije K, kojima su 0, $-n\frac{a_0}{a_1}$ zajednički krajevi.

D o k a z   t e o r e m e   L a g u e r r e - a. Neka je $P(\alpha) \neq 0$, $P'(\alpha) \neq 0$. Tada smena $z = u + \alpha$ daje

$$P(z) = P(u+\alpha) = Q(u) = P(\alpha) + P'(\alpha)u + \frac{P''(\alpha)}{2!}u^2 + \ldots$$

Primenom prethodne teoreme na $Q(u)$ dobija se Laguerre-ova teorema, pošto sada tačkama 0, $-n\frac{a_0}{a_1}$ odgovaraju tačke α, $\alpha - n\frac{a_0}{a_1}$.

2.5. Teorema Grace-a

Neka konačan niz kompleksnih brojeva

(1)
$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

leži u kružnoj oblasti K_0. Neka su $\sigma_0 = 1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elementarne simetrične funkcije niza (1) i neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uslov

(2)
$$a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n = 0.$$

Tada polinom

(3)
$$P(z) = a_0 + \binom{n}{1}a_1 z + \binom{n}{2}a_2 z^2 + \cdots + \binom{n}{n}a_n z^n$$

ima bar jednu nulu u K_0.

D o k a z. Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom uz pomoć teoreme Laguerre-a. Teorema očigledno važi za n = 1. Pretpostavimo da je ona tačna za n = s - 1 i dokažimo je za n = s.

Posmatrajmo pomoćni polinom

(4)
$$Q(z) = a_0 + \binom{s}{1}a_1 z + \cdots + \binom{s}{s}a_s z^s.$$

Odavde je

$$Q'(z) = s\left[a_1 + \binom{s-1}{1}a_2 z + \cdots + \binom{s-1}{s-1}a_s z^{s-1}\right],$$

zbog čega je

$$zQ'(z) - sQ(z) = -s\left[a_0 + \binom{s-1}{1}a_1 z + \cdots + \binom{s-1}{s-1}a_{s-1} z^{s-1}\right],$$

odakle se posle deljenja sa Q'(z) dobija

(5)
$$z - s\frac{Q(z)}{Q'(z)} = -\frac{a_0 + \binom{s-1}{1}a_1 z + \cdots + \binom{s-1}{s-1}a_{s-1} z^{s-1}}{a_1 + \binom{s-1}{1}a_2 z + \cdots + \binom{s-1}{s-1}a_s z^{s-1}}.$$

Stavimo

(6)
$$z_s = z - s\frac{Q(z)}{Q'(z)},$$

odakle se, s obzirom na (5), dobija polinom

(7)
$$(a_0 + a_1 z_s) + \binom{s-1}{1}(a_1 + a_2 z_s)z + \cdots + \binom{s-1}{s-1}(a_{s-1} + a_s z_s)z^{s-1} = 0,$$

koji je oblika (3).

Kako izmedju elementarnih simetričnih funkcija $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ veličina $z_1, z_2, \ldots, z_s$ i $\sigma_0' = 1, \sigma_1', \ldots, \sigma_{s-1}'$ veličina $z_1, z_2, \ldots, z_{s-1}$ važe relacije

$$z_s \sigma_{s-1}' = \sigma_s \ , \ \sigma_v' + z_s \sigma_{v-1}' = \sigma_v \quad (v = 1, 2, \ldots, s-1),$$

iz (7) se dobija

$$(a_0 + a_1 z_s)\sigma_0' + (a_1 + a_2 z_s)\sigma_1' + \cdots + (a_{s-1} + a_s z_s)\sigma_{s-1}' = a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + \cdots + a_s\sigma_s = 0,$$

(po uslovu (2)). Znači da se na polinom (7) prema indukcijskoj hipotezi može primeniti teorema.

Neka je $\zeta = \zeta_s$. Tada iz (6) izlazi $Q(\zeta) = 0$, tj. $\zeta \in K_0$ i odgovarajući broj ζ_s takodje pripada K_0. Ako je $\zeta \neq \zeta_s$ tada je prema (6) $\zeta_s - \zeta \neq 0$, pa iz (6) imamo da je $s \dfrac{Q(\zeta)}{Q'(\zeta)} \neq 0$. Na osnovu teoreme Laguerre-a sledi sada da krug kroz tačke $\zeta = \alpha$ i $\alpha - s\dfrac{Q(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ sadrži bar jednu nulu polinoma $Q(z)$.

Pošto je teorema tačna za $n = 1$ i iz pretpostavke da ona važi za $n = s - 1$, dokazali smo njenu tačnost za $n = s$, to je ona tačna za svaki prirodni broj $n = 1, 2, \ldots$, čime je dokaz završen.

Pod kružnom oblašću ovde se podrazumeva zatvoreni deo ravni podeljen kružnom linijom, a kome pripada i kružna linija.

2.6. Polinomi sa realnim koeficijentima

Ovde ćemo posmatrati polinom $P(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v x^v$ čiji su svi koeficijenti realni brojevi i iznećemo neke njegove opšte osobine koje će nam biti potrebne u toku daljeg izlaganja.

Kao što znamo, ako je nula polinoma $P(x)$ sa realnim koeficijentima kompleksan broj oblika $a + bi$, njegova nula je takodje i broj oblika $a - bi$.

Ako su svi koeficijenti datog polinoma istoga predznaka, ovaj očigledno ne može imati pozitivnih nula. Medjutim, polinom može imati pozitivnih nula, ako ima koeficijenata različitih predznaka. Descartes je našao teoremu koja daje vezu izmedju broja pozitivnih nula datog polinoma i broja varijacija predznaka njegovih koeficijenata.

O mogućem broju nula nekog polinoma u intervalu (a, b) govori toorema Boudan - Fourier-a, dok se stvarni broj nula datog polinoma u intervalu (a, b) odredjuje teoremom Sturm-a.

Za dati polinom

(1) $$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

posmatrajmo niz

(2) $$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

obrazovan od njegovih koeficijenata. Za svaki par susednih članova niza (2) sa suprotnim predznacima rećićemo da daje jednu varijaciju predznaka u nizu (2). Broj svih ovih varijacija predznaka zove se broj varijacija predznaka niza (2). Ako su u nizu (2) neki članovi jednaki nuli, tada se pri dobijanju broja varijacija niza (2) ovi članovi izostavljaju.

T e o r e m a   D e s c a r t e s -a. Broj pozitivnih nula polinoma (1), svaka računata svojim redom, jednak je broju varijacija predznaka niza (2) ili je za paran broj manji od ovoga (broj negativnih nula polinoma (1) jednak je broju pozitivnih nula polinoma $P(-x)$, koji nastaje kad se u (1) umesto x stavi $-x$).

Teorema Descartes-a javlja se kao specijalni slučaj teoreme Boudan - Fourier-a.

Niz obrazovan od datog polinoma i njegovih izvoda do reda n, tj. niz

(3) $$P(x),\ P'(x),\ P''(x), \dots,\ P^{(n)}(x)$$

naziva se Boudan - Fourier-ov niz datog polinoma $P(x)$. Posmatraćemo kako se menja broj varijacije $V(x)$ niza (3) kada x prolazi brojnom linijom. $V(x)$ se menja jedino kada x prolazi preko nule z nekog člana u (3).

T e o r e m a   B o u d a n - F o u r i e r -a. Za algebarski polinom $P(x)$ stepena n u nizu

$$P(x),\ P'(x),\ P''(x), \dots,\ P^{(n)}(x)$$

prelaskom od $x = a$ na veći broj $x = b$ broj varijacija $V(x)$ u tom nizu ne povećava se, već ostaje bez promena ili se umanjuje, tj. $V(a) \geq$

$\geq V(b)$. Razlika $V(a) - V(b)$ je jednaka broju s nula polinoma $P(x)$ sadržanih u (a, b) ili je za paran broj veća od broja s; ustvari $V(a) - V(b) - s$ je paran broj ≥ 0.

D o k a z   t e o r e m e   D e s c a r t e s -a. Za dokaz teoreme Descartesa primenimo teoremu Boudan - Fourier-a na interval $(0, \infty)$. Za $x = 0$ Boudan - Fourier-ov niz polinoma (1) glasi

$$P(0) = a_0,\ P'(0) = a_1,\ P''(0) = 2!\,a_2, \ldots, P^{(n)}(0) = n!\,a_n .$$

Znači, $V(0)$ je jednak broju varijacija koeficijenata u nizu (2) polinoma (1). Medjutim, svi članovi Boudan - Fourier-ovog niza za $x = \infty$ imaju isti predznak kao i a_n, što znači da je $V(\infty) = 0$. Zato je $V(0) - V(\infty) = V(0) =$ broj pozitivnih nula polinoma (1) + paran broj, a to je teorema Descartes-a.

Odgovor na pitanje koliko polinom (1) ima nula u (a, b) daje teorema Sturm-a.

Pretpostavimo prvo da polinom $P(x)$ nema višestrukih nula, tako da su $P(x)$ i $P'(x)$ relativno prosti polinomi. Označimo $P(x)$ sa ϑ_0, a $P'(x)$ sa ϑ_1.

Ako na ϑ_0 i ϑ_1 primenimo Euklidov algoritam, poslednji delitelj biće konstantan. Ovde ćemo ostatke uzimati sa negativnim predznakom.

Neka je

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= \vartheta_1 q_1 - \vartheta_2\\
\vartheta_1 &= \vartheta_2 q_2 - \vartheta_3\\
&\text{- - - - - - - -}\\
\vartheta_{k-1} &= \vartheta_k q_k - \vartheta_{k+1}\\
&\text{- - - - - - - -}\\
\vartheta_{s-2} &= \vartheta_{s-1} q_{s-1} - \vartheta_s\\
\vartheta_{s-1} &= \vartheta_s q_s .
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci, ϑ_s je konstanta. Na ovaj način dobija se niz polinoma

(4) $\qquad \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k, \ldots, \vartheta_{s-1}, \vartheta_s$

koji se zovu lanac ili niz Sturm-a za polinom ϑ_0.

T e o r e m a   S t u r m -a. Za polinom $P(x)$ i broj a označimo sa $V(P; a)$ broj varijacija predznaka što se iz niza Sturm-a (4) dobija za $x = a$. Ako polinom $P(x)$ nema višestrukih nula, tada je broj njegovih nula u intervalu (a, b) jednak razlici $V(P; a) - V(P; b)$ varijacija što ih niz Sturm-a pokazuje na početku a i na kraju b posmatranog intervala.

U slučaju da $P(x)$ ima višestrukih nula važi teorema:

Neka su α i β dva realna broja i $\alpha < \beta$. Tada je broj nula polinoma $P(x)$ koje se nalaze izmedju a i b, svaka računata kao prosta nula, jednak broju gubitaka varijacija predznaka niza Sturm-a polinoma $P(x)$ pri prelazu promenljive x od α na β.

2.7. Teoreme o granicama modula nula polinoma

A. L. Cauchy izveo je prsten u kome se nalaze sve nule polinoma

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad a_0 a_n \neq 0. \tag{1}$$

T e o r e m a (Cauchy). Svaka nula polinoma (1) leži u krugu

$$|z| \leq r_2,$$

gde je r_2 pozitivna nula polinoma

$$Q_2(z) = -|a_0| - |a_1| z - \cdots - |a_{n-1}| z^{n-1} + |a_n| z^n.$$

D o k a z. Polinom $Q_2(z)$ ima bar dva koeficijenta različita od nule i pokazuje jednu varijaciju predznaka koeficijenata, što prema teoremi Descartes-a znači da polinom $Q_2(z)$ ima samo jednu pozitivnu nulu r_2. Pokazaćemo da iz $P(\zeta) = 0$ sledi $|\zeta| \leq r_2$. Pretpostavimo da je $|\zeta| > r_2$. Ne može biti $Q_2(|\zeta|) = 0$, jer bi tada $Q_2(z)$ imao dve pozitivne nule r_2 i $|\zeta|$. Ne može biti ni $Q_2(|\zeta|) < 0$, jer je vodeći koeficijent od $Q_2(z)$ pozitivan, pa bi za neki dovoljno veliki broj $R > r_2$ bilo $Q_2(R) > 0$ i prema teoremi Bolzano-a postojao bi neki realni broj x_0 izmedju $|\zeta|$ i R, tako da bi bilo $Q_2(x_0) = 0$, što znači da bi $Q_2(z)$ imao dve pozitivne nule, što je nemoguće. Ne može, dakle, biti ni $Q_2(|\zeta|) \leq 0$. Medjutim, poslednja relacija napisana u obliku

$$|a_n||\zeta|^n \leq |a_0| + |a_1||\zeta| + \cdots + |a_{n-1}||\zeta|^{n-1}$$

je ispunjena i proizilazi iz $P(\zeta) = 0$. Dakle, $|\zeta| > r_2$ je nemoguće, što znači da je $|\zeta| \leq r_2$, što je i trebalo dokazati.

Na sličan način se dokazuje da sve nule polinoma (1) leže izvan kruga $|z| < r_1$, gde je r_1 pozitivna nula polinoma

$$Q_1(z) = -|a_0| + |a_1| z + \cdots + |a_{n-1}| z^{n-1} + |a_n| z^n.$$

Odavde proizilazi Cauchy-ev rezultat:

Sve nule algebarskog polinoma (1), gde su a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) kompleksni ili realni koeficijenti nalaze se u prstenu

(2) $$r_1 \leq |z| \leq r_2$$

gde su r_1 i r_2 pozitivne nule polinoma $Q_1(z)$, odnosno $Q_2(z)$.

T e o r e m a (Pellet). Ako za polinom

(3) $$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p + \cdots + a_n z^n, \quad a_p \neq 0,$$

polinom

(4) $$Q_p(z) = |a_0| + |a_1| z + \cdots + |a_{p-1}| z^{p-1} - |a_p| z^p + |a_{p+1}| z^{p+1} + \cdots + |a_n| z^n$$

ima dve pozitivne nule r i R, $r < R$, tada $P(z)$ ima tačno p nula u ili na krugu $|z| \leq r$ i nema nula u kružnom prstenu $r < |z| < R$.

D o k a z. Neka je ρ pozitivan broj takav da je $r < \rho < R$. Za $0 < z < r$ je $Q_p(z) > 0$, a za $R < z < \infty$ je $Q_p(z) > 0$, dok je za dovoljno mali pozitivni broj ε

(5) $$Q_p(\rho) < 0, \quad r + \varepsilon \leq \rho \leq R - \varepsilon,$$

što s obzirom na (4) daje

(6) $$|a_p| \rho^p > \sum_{\nu=0}^{p-1} |a_\nu| \rho^\nu + \sum_{\nu=p+1}^{n} |a_\nu| \rho^\nu.$$

Posmatrajmo sada polinome

(7) $$f(z) = \sum_{\nu=0, \nu\neq p}^{n} a_\nu z^\nu, \quad F(z) = a_p z^p.$$

Iz (7), a prema (6), imamo na krugu $|z| = \rho$

$$|f(z)| \leq \sum_{\nu=0, \nu\neq p}^{n} |a_\nu| \rho^\nu < |a_p| \rho^p = |F(z)|,$$

odakle na osnovu teoreme Rouché-a sledi da polinomi $f(z) + F(z) = P(z)$ i $F(z) = a_p z^p$ imaju u krugu $|z| = \rho$ isti broj nula, dakle tačno p nula. Kako je ρ proizvoljan pozitivan broj takav da je $r < \rho < R$, to znači da $P(z)$ ima tačno p nula u krugu $|z| \leq r$, a nema nula u oblasti $r < |z| < R$, čime je teorema dokazana.

2.3. Granice modula nula polinoma u zavisnosti od njegovih koeficijenata

Teorema (Cauchy). Sve nule polinoma

(1) $$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad a_n \neq 0$$

leže u krugu

$$|z| \leq 1 + M,$$

gde je

$$M = \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \left(\left| \frac{a_\nu}{a_n} \right| \right).$$

Dokaz. Neka je $M = \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \left(\left| \frac{a_\nu}{a_n} \right| \right)$ i neka je $|z| > 1$. Tada je

$$|P(z)| \geq |a_n| |z|^n \left\{ 1 - \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \frac{1}{|z|} + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^2} + \cdots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^n} \right) \right\} \geq$$

$$\geq |a_n| |z|^n \left\{ 1 - M \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^\nu} \right\} = |a_n| |z|^n \left\{ 1 - \frac{M}{|z| - 1} \right\} =$$

$$= |a_n| |z|^n \cdot \frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1}.$$

Ako je $|z| > 1 + M$, tada je $|P(z)| > 0$, što znači da su nule polinoma $P(z)$ sadržane u krugu

$$|z| \leq 1 + M.$$

Drugim rečima, gornja granica modula nula polinoma (1) data je izrazom

(2) $$1 + M, \quad M = \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \left(\left| \frac{a_\nu}{a_n} \right| \right).$$

Teorema (Montel). Sve nule polinoma (1) leže u krugu

(3) $$|z| \leq \left\{ 1 + \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{a_\nu}{a_n} \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Za $p = q = 2$, iz (3) se dobija

(4) $$|z| \leq \frac{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2}}{|a_n|}$$

D o k a z. Neka je $z = |z|e^{\theta i}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, nula polinoma (1), što znači da je

(5) $$a_n e^{n\theta i}|z|^n + a_{n-1}e^{(n-1)\theta i}|z|^{n-1} + \dots + a_1 e^{\theta i}|z| + a_0 = 0,$$

odakle sledi nejednačina

(6) $$1 \leq \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{a_{n-\nu}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^\nu}.$$

Primenom nejednakosti Hölder-a sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ i $|z| > 1$, na desnu stranu (5) dobija se

$$1 \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{a_{n-\nu}}{a_n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|z|^{\nu q}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{a_{n-\nu}}{a_n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^{\nu q}}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{a_{n-\nu}}{a_n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|z|^q}{|z|^q - 1}\right)^{\frac{1}{q}},$$

a odavde

$$|z| \leq \left\{1 + \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \left|\frac{a_\nu}{a_n}\right|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

T e o r e m a (D. Marković). Polinom (1) nema nula u krugu

(7) $$|z| < \frac{|a_0|t}{\left\{|a_0|^q + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p t^{p\nu}\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}}}, \quad a_0 \neq 0;\ |z| < t;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1.$$

D o k a z. Iz jednačine (5) sledi nejednačina

$$|a_0| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \, |z|^\nu,$$

koja se može napisati u obliku

$$|a_0| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| t^\nu \left(\frac{|z|}{t}\right)^\nu, \quad t > 0.$$

Ako na desnu stranu poslednje nejednačine primenimo nejednakost

Hölder-a sa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$ i $|z|<t$, dobićemo

$$|a_0| \leq \left(\sum_{v=1}^{n}|a_v|^p t^{pv}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{|z|}{t}\right)^{qv}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{v=1}^{n}|a_v|^p t^{pv}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{t}\right)^{qv}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{v=1}^{n}|a_v|^p t^{pv}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|z|^q}{t^q-|z|^q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

a odavde

$$|z| \geq \frac{|a_0|\,t}{\left\{|a_0|^q+\left(\sum\limits_{v=1}^{n}|a_v|^p t^{pv}\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}}}.$$

čime je dokazana relacija (7).

T e o r e m a K a k e y a -a. Ako su koeficijenti polinoma

$$P(z)=a_0+a_1 z+\dots+a_n z^n$$

pozitivni realni brojevi koji monotono opadaju ($a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$), tada sve njegove nule leže izvan kruga $|z|=1$; ako je $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$, tada sve njegove nule leže u krugu $|z|<1$.

D o k a z. Posmatrajmo prvo slučaj kada je

$$a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0.$$

Tada je

$$(1-z)P(z) = a_0-(a_0-a_1)z-(a_1-a_2)z^2-\dots-(a_{n-1}-a_n)z^n-a_n z^{n},$$

odakle se za $|z|\leq 1$ i $z\neq 1$ dobija

$$|(1-z)P(z)| > a_0-\left[(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\dots+(a_{n-1}-a_n)+a_n\right]=0$$

i pošto pri tome svi argumenti od $z, z^2, \dots, z^{n+1}$ nisu medjusobno jednaki, izlazi odavde da polinom $P(z)$ nema nula u krugu $|z|\leq 1$, čime je prvi deo teoreme dokazan.

Za dokaz drugog dela teoreme, tj. kada je $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$ uvedimo smenu $z=\frac{1}{t}$. Tada polinom

$$t^n P\left(\frac{1}{t}\right) = a_n+a_{n-1}t+\dots+a_1 t^{n-1}+a_0 t^n = P^*(t),$$

prema prvom delu teoreme, nema nula u krugu $|t|\leq 1$, što znači da sada sve nule polinoma $P(z)$ leže u krugu $|z|<1$.

T e o r e m a (Hurwitz). Ako su koeficijenti polinoma $P(z)$ realni pozitivni brojevi, tada sve njegove nule leže u prstenu

$$m \le |z| \le M,$$

gde m, odnosno M, označava najmanji odnosno najveći član niza

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

D o k a z. Uvedimo smenu $z = \frac{u}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$. Tada je

$$P(z) = a_0 + \frac{a_1}{\lambda} u + \frac{a_2}{\lambda^2} u^2 + \cdots + \frac{a_n}{\lambda^n} u^n = Q(u).$$

Izaberimo λ tako da bude

$$a_0 > \frac{a_1}{\lambda} > \frac{a_2}{\lambda^2} > \cdots > \frac{a_n}{\lambda^n} > 0.$$

Poslednji uslovi biće ispunjeni kada je $\lambda = \max\limits_{0 \le \nu \le n-1} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$. Pri tome, na osnovu prethodne teoreme Kakeya-a, sledi da polinom $Q(u)$ nema nula u krugu $|u| \le 1$, odnosno da polinom $P(z)$ nema nula u krugu $|z| < \frac{1}{\lambda}$, što znači da sve nule polinoma $P(z)$ leže u krugu $|z| \le M$.

Slično se dokazuje da polinom $P(z)$ nema nula u krugu $|z| < m$. Ova i prethodna činjenica dokazuju navedenu teoremu.

2.9. Jedna teorema Montel-a

Neka je dat polinom

(1) $$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad a_0 a_n \neq 0$$

i neka je

(2) $$M_s(P) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\varphi})|^s d\varphi\right)^{\frac{1}{s}}, \quad 0 \le s \le \infty.$$

Za $M_s(P)$ važe relacije:

(3) $$M_r(P) \le M_t(P), \quad 0 < r < t < \infty,$$

(4) $$M_0(P) = \lim_{s \to 0} M_s(P) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln|P(e^{i\varphi})| d\varphi\right),$$

(5) $$M_\infty(P) = \lim_{s \to \infty} M_s(P) = \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

T e o r e m a M o n t e l - a. Sve nule polinoma (1) leže u prstenu

$$\frac{|a_0|}{M_s(P)} \leq |z| \leq \frac{M_s(P)}{|a_n|}. \tag{6}$$

Svoju teoremu Montel je dokazao na osnovu jedne Jensen-ove teoreme iz teorije funkcija kompleksne promenljive, koju ovde navodimo bez dokaza. Jensen-ova teorema glasi:

Neka je f(z) analitička funkcija za $|z| < R$. Pretpostavimo da je $f(0) \neq 0$ i neka su $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ moduli nula od f(z) u krugu $|z| < R$, uredjenih u neopadajući niz. Ako je $r_n \leq r \leq r_{n+1}$, tada je

$$\ln \frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \cdots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi. \tag{7}$$

D o k a z Montel-ove teoreme. Za dokaz Montel-ove teoreme (6) dovoljno je dokazati da sve nule polinoma (1) leže u prstenu

$$\frac{|a_0|}{M_0(P)} \leq |z| \leq \frac{M_0(P)}{|a_n|}, \tag{8}$$

gde je $M_0(P)$ dato u (4).

Označimo sa r_1 najmanji moduo nule polinoma (1). Tada za $r_1 < r$ na osnovu (7) imamo

$$\ln \frac{r|a_0|}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |P(re^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

gde je $|a_0| = |P(0)|$, odakle se dobija

$$\frac{r|a_0|}{r_1} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |P(re^{i\varphi})| \, d\varphi\right). \tag{9}$$

Kako je za $r \leq 1$

$$\frac{r|a_0|}{r_1} \leq \frac{|a_0|}{r_1} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |P(e^{i\varphi})| \, d\varphi\right) = M_0(P),$$

dobijamo odavde

$$r_1 \geq \frac{|a_0|}{r M_0(P)},$$

što za $r = 1$ daje

(10) $$r_1 \geq \frac{|a_0|}{M_0(P)} .$$

Da bi se dobila gornja granica modula nula polinoma (1), uvedimo smenu $z = \frac{1}{t}$. Tada je

(11) $$P_1(t) = t^n P\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} t^{\nu} .$$

Neka je ρ_1 najmanji moduo nule polinoma (11) i neka je $\rho_1 < \rho \leq 1$. Tada, na osnovu (10), u ovom slučaju dobijamo da je

(12) $$\rho_1 \geq \frac{|a_n|}{M_0(P)} ,$$

pošto je $M_0(P_1) = M_0(P)$. Kako je $|z| = \frac{1}{|t|}$ i ρ_1 najmanji moduo nule polinoma (11), to je $\frac{1}{\rho_1} = r_n$ najveći moduo nule polinoma (1), pa se iz (12) dobija da je

(13) $$r_n \leq \frac{M_0(P)}{|a_n|} ,$$

Iz nejednačina (10) i (13) sledi (8), a odatle i Montel-ova teorema (6).

Za $s = 2$, na osnovu formule Parseval-a, Montel-ov prsten glasi

(14) $$\frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2}} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2}}{|a_n|} .$$

2. 10. Postupak D. Markovića za odredjivanje granica modula nula polinoma

Za odredjivanje granica modula nula polinoma, D. Marković u svojim radovima koristi dvostruku nejednakost (2) paragrafa 1.1. Pri tome dokazuje više teorema o gornjoj i donjoj granici modula nula polinoma, odakle slede i neke poznate teoreme, kao Cauchy-a, Walsh-a, Birkhoff-a, Landau-a i drugih.

Ovde ćemo sada izneti postupak i neke rezultate D. Markovića u vezi odredjivanja granica modula nula polinoma.

Neka je dat polinom

$$(1)\qquad P(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu ,\quad a_0a_n\neq 0$$

i neka je $z=\rho e^{\theta i}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ jedna njegova nula. Tada iz jednačine

$$(2)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}a_\nu e^{\nu\theta i}\rho^\nu=0$$

sledi nejednačina

$$|a_n|\rho^n\leq\sum_{\nu=1}^{n}|a_{n-\nu}|\rho^{n-\nu},$$

koja se može napisati u obliku

$$(3)\qquad |a_n|\leq\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|a_{n-\nu}|}{\rho^\nu}.$$

Uzmimo sada funkciju

$$(4)\qquad Q_1(\rho)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_{n-\nu}}{\rho^\nu},\quad c_{n-\nu}>0\ (\nu=1,2,\dots,n)$$

i ovom podelimo nejednačinu (3). Tada se na osnovu nejednakosti (2) paragrafa 1.1. dobija

$$\frac{|a_n|}{Q_1(\rho)}\leq M,$$

odnosno

$$(5)\qquad |a_n|\leq M\,Q_1(\rho),$$

gde je

$$(6)\qquad M=\max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{|a_{n-\nu}|}{c_{n-\nu}}\right).$$

Ako se u funkciji $Q_1(\rho)$ uzme naprimer da je $c_{n-\nu}=t^\nu$ $(t>0)$ $(\nu=1,2,\dots,n)$, iz (5) imamo

$$|a_n|\leq M(t)\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{t}{\rho}\right)^\nu$$

što za $\rho>t$ daje

$$|a_n| \leq M(t) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{t}{\rho}\right)^{\nu},$$

odakle se dobija

(7) $$\rho \leq t\left(1+\frac{M(t)}{|a_n|}\right),$$

gde je

(8) $$M(t) = \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{|a_{n-\nu}|}{t^{\nu}}\right)$$

Za $t = 1$ iz (7) se dobija

(9) $$\rho \leq 1+\frac{\bar{M}}{|a_n|}, \quad \bar{M} = \max_{1\leq\nu\leq n}\left(|a_{n-\nu}|\right),$$

a to je resultat Cauchy-a za module nula polinoma (1), koji je izveden u paragrafu 2.8.

Iz jednačine (2) sledi i nejednačina

(10) $$|a_0| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \rho^{\nu}.$$

Ako nejednačinu (10) podelimo funkcijom

(11) $$Q_2(\rho) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \rho^{\nu}, \quad c_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

prema nejednakosti (2) paragrafa 1.1. imaćemo sada

$$\frac{|a_0|}{Q_2(\rho)} \leq \mu$$

odakle

(12) $$|a_0| \leq \mu Q_2(\rho),$$

gde je

(13) $$\mu = \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{|a_\nu|}{c_\nu}\right).$$

Uzimajući, naprimer, u funkciji $Q_2(\rho)$ da je $c_\nu = \frac{1}{t}$ $(\nu =$

$= 1, 2, \ldots, n$), iz (12) imamo

$$|a_0| \leq \mu(t) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\rho}{t}\right)^{\nu},$$

što za $\rho < t$ daje

$$|a_0| \leq \mu(t) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{t}\right)^{\nu},$$

odakle se dobija

$$\rho \geq \frac{|a_0| t}{|a_0| + \mu(t)}, \quad \mu(t) = \max_{1 \leq \nu \leq n} \left(|a_\nu| t^{\nu}\right), \tag{14}$$

a to je rezultat E. Landau-a.

Dajući druge oblike komparativnim funkcijama $Q_1(\rho)$ i $Q_2(\rho)$ mogu se dobiti i razne druge granice za module nula datog polinoma, u čemu se i sastoji opšti značaj navedenog postupka D. Markovića.

III DEO

O NEKIM GRANICAMA MODULA NULA POLINOMA I FUNKCIJA PRETSTAVLJENIH TAYLOR-OVIM REDOM

U ovom delu ukazaćemo na mogućnost proširenja postupka D. Markovića za odredjivanje granica modula nula polinoma. Pored toga izvešćemo i neke druge granice za module nula kako polinoma, tako i funkcija pretstavljenih Taylor-ovim redom.

3.1. Proširenje postupka D. Markovića za odredjivanje granica modula nula polinoma

Kao što smo videli u paragrafu 1.1., za izraz

$$S = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \lambda_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \lambda_\nu}, \tag{1}$$

gde su α_ν realni brojevi, a β_ν i λ_ν realni i pozitivni brojevi, važe nejednakosti

$$\min_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right) \leq S \leq \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right). \tag{2}$$

U slučaju kada koeficijenti λ_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) monotono opadaju, granice nejednakosti (2) mogu biti uže. Da bismo ovo pokazali, primenimo na brojilac i imenilac izraza (1) Abel-ovu transformaciju oblika

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \lambda_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(c)\Delta\lambda_\nu + s_n(c)\lambda_n, \tag{3}$$

gde je

$$s_\nu(c) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k, \quad \Delta\lambda_\nu = \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1} \quad (\nu=1, 2, \ldots, n-1), \tag{4}$$

Tada imamo

$$S = \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(\alpha)\Delta\lambda_\nu + s_n(\alpha)\lambda_n}{\sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(\beta)\Delta\lambda_\nu + s_n(\beta)\lambda_n},$$

odakle je na osnovu (2) za $\Delta\lambda_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$(5) \qquad \min_{1\le\nu\le n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \le S \le \max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right).$$

Prema (2), za $\lambda_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, je

$$\min_{1\le\kappa\le\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right) \le \frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}, \quad \frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} \le \max_{1\le\kappa\le\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

a odavde je očigledno

$$\min_{1\le\kappa\le\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right) \le \min_{1\le\nu\le n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right), \quad \max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \le \max_{1\le\kappa\le\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right),$$

što zajedno sa (5) daje

$$(6) \quad \min_{1\le\kappa\le\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right) \le \min_{1\le\nu\le n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \le S \le \max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \le \max_{1\le\kappa\le\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right).$$

Granice za S mogu biti i uže od (6), u slučaju da koeficijenti λ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ višestruko monotono opadaju, što ovde nećemo dokazivati.

Neka je $z = \rho e^{\theta i}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ nula polinoma

$$(7) \qquad P(z) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu, \quad a_0 a_n \ne 0,$$

tj.

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i} \rho^\nu = 0.$$

Otuda sledi nejednačina (Cauchy)

$$|a_0| \le \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \rho^\nu,$$

koju možemo napisati u obliku

$$(9)\qquad |a_0| \le \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| t^\nu \left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu, \quad t>0$$

gde brojevi $\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu$ monotono opadaju ako je $\rho < t$.

Ako na desnu stranu nejednačine (9) primenimo Abel-ovu transformaciju oblika (3) dobićemo, vodeći računa o oznakama (4), da je

$$(10)\qquad |a_0| \le \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(|a|t)\,\Delta\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu + s_n(|a|t)\left(\frac{\rho}{t}\right)^n,$$

što posle deljenja sa

$$(11)\qquad Q_1(\rho) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(b)\,\Delta\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu + s_n(b)\left(\frac{\rho}{t}\right)^n, \quad b_\nu>0 \ (\nu=1,2,\dots,n)$$

na osnovu (2) i (6) daje

$$(12)\qquad \frac{|a_0|}{Q_1(\rho)} \le \mu_1 \le \mu_2,$$

gde je

$$\mu_1 = \max\left(\frac{s_\nu(|a|t)}{s_\nu(b)}\right), \quad \mu_2 = \max_{1\le k\le n}\left(\frac{|a_k|t^k}{b_k}\right).$$

Iz (12) neposredno izvodimo teoremu:

Donja granica modula nula polinoma (7) pretstavlja pozitivni koren ρ_1 jednačine

$$(13)\qquad \frac{|a_0|}{\mu_1} = Q_1(\rho).$$

Ovaj koren zbog (12) nije manji od pozitivnog korena ρ_2 jednačine

$$\frac{|a_0|}{\mu_2} = Q(\rho).$$

P r i m e r 1. Ako u (9) stavimo $b_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), što znači da je sada

$$Q_1(\rho) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu,$$

na osnovu (12) dobijamo

$$\frac{|a_0|}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\rho}{t}\right)^{\nu}} \leq \mu_1(t) \leq \mu_2(t),$$

odnosno

$$\frac{|a_0|}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{t}\right)^{\nu}} \leq \mu_1(t) \leq \mu_2(t), \tag{14}$$

gde je

$$\mu_1(t) = \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{\nu}|a_k|t^k}{\nu}\right), \quad \mu_2(t) = \max_{1\leq k\leq n}\left(|a_k|t^k\right).$$

Iz (14) dobijamo

$$\rho \geq \frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_1(t)} \geq \frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_2(t)}. \tag{15}$$

Izraz

$$\frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_2(t)}, \tag{16}$$

kao donju granicu modula nula polinoma (7), dobili su E. Landau i D. Marković.

Prema (15) zaključujemo da donja granica modula nula polinoma (7), data sa

$$\frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_1(t)} \tag{17}$$

nije manja od donje granice modula njegovih nula date sa (16).

Za odredjivanje gornje granice modula nula polinoma (7) podjimo od nejednačine

$$|a_n| \leq \sum_{\nu=1}^{n}\frac{|a_{n-\nu}|}{\rho^{\nu}}, \tag{18}$$

koja se dobija iz jednačine (8).

Nejednačinu (18) možemo napisati u obliku

$$|A_0| \leq \sum_{\nu=1}^{n}\frac{|A_\nu|}{\alpha^{\nu}}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu\left(\frac{|A|}{\alpha}\right)\Delta\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\nu} + s_n\left(\frac{|A|}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{n}, \tag{19}$$

gde su $A_\nu = a_{n-\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ i gde je $\rho > \alpha$, pa brojevi $\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^\nu$ sada monotono opadaju.

Ako nejednačinu (19) podelimo sa

(20) $$Q_2(\rho) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(b)\Delta\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^\nu + s_n(b)\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^n, \quad b_\nu > 0 \ (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

dobićemo

(21) $$\frac{|A_0|}{Q_2(\rho)} \le M_1 \le M_2,$$

gde je

$$M_1 = \max_{1 \le \nu \le n} \left(\frac{s_\nu\left(\frac{|A|}{\alpha}\right)}{s_\nu(b)} \right), \quad M_2 = \max_{1 \le k \le n} \left(\frac{\frac{|A_k|}{\alpha^k}}{b_k} \right).$$

Iz (21) izvodimo teoremu:

Gornja granica modula nula polinoma (7) pretstavlja pozitivni koren ρ_1 jednačine

(22) $$\frac{|A_0|}{M_1} = Q_2(\rho).$$

Zbog (21) koren ρ_1 nije veći od pozitivnog korena ρ_2 jednačine

$$\frac{|A_0|}{M_2} = Q_2(\rho).$$

P r i m e r 2. Ako u (20) uzmemo $b_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$, što znači da je sada

$$Q_2(\rho) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^\nu,$$

za $\rho > \alpha$ iz (21) dobijamo pri tome

$$\frac{|A_0|}{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^\nu} \le M_1(\alpha) \le M_2(\alpha),$$

odnosno

(23) $$\frac{|A_0|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^\nu} \le M_1(\alpha) \le M_2(\alpha),$$

gde je

$$M_1(\alpha)=\max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu}\frac{|A_k|}{\alpha^k}}{\nu}\right),\quad M_2(\alpha)=\max_{1\le k\le n}\left(\frac{|A_k|}{\alpha^k}\right).$$

Zbog $A_{n-k}=a_k$ $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ iz (23) se dobija

$$\rho\le\alpha\left(1+\frac{M_1(\alpha)}{|a_n|}\right)\le\alpha\left(1+\frac{M_2(\alpha)}{|a_n|}\right), \tag{24}$$

odakle, naprimer, za $\alpha=1$ imamo

$$\rho\le 1+\frac{\overline{M}_1}{|a_n|}\le 1+\frac{\overline{M}_2}{|a_n|}, \tag{25}$$

gde je sada

$$\overline{M}_1=\max_{1\le\nu\le n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu}|a_{n-k}|}{\nu}\right),\quad \overline{M}_2=\max_{0\le k\le n-1}\left(|a_k|\right)$$

Iz (25) zaključujemo da izraz

$$1+\frac{\overline{M}_1}{|a_n|}, \tag{26}$$

kao gornja granica modula nula polinoma (7) nije veći od izraza

$$1+\frac{\overline{M}_2}{|a_n|},$$

koji pretstavlja klasični oblik (Cauchy-a) za gornju granicu modula nula polinoma (7).

Napomenimo da se na ovaj način mogu dobiti i razne druge procene za module nula polinoma.

3.2. O granicama modula nula polinoma i Taylor-ovog reda

Za polinome kao i za funkcije pretstavljene Taylor-ovim redom postoji čitav niz izraza koji pretstavljaju donju i gornju granicu modula njihovih nula. Te granice su izražene preko koeficijenata polinoma, odnosno Taylor-ovog reda. Jedan od prvih rezultata takvog oblika izveo je M. Petrović. Na probleme takve vrste kasnije su ukazali naročito E. Landau i P. Montel.

Ovde se daje jedna nejednačina i granica za module nula polinoma i funkcija pretstavljenih Taylor-ovim redom. Ova granica ima osobinu da važi i u nekim slučajevima kada poznate granice koje su dali M. Petrović, E. Landau, P. Montel i D. Marković prestaju da imaju svoj smisao.

U paragrafu 2.7. smo izveli prsten Cauchy-a za nule polinoma, a u paragrafu 2.9. odgovarajući prsten Montel-a.

Služeći se samo Hölder-ovom nejednakošću i formulom Parseval-a možemo izvesti jedan prsten u kome se nalaze sve nule polinoma

(1) $$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad a_0 a_n \neq 0.$$

Neka je $\rho e^{\theta i}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ nula polinoma (1), odakle se dobija jednačina

$$|a_0| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i} \rho^\nu \right|,$$

koju možemo napisati u obliku

$$|a_0| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} e^{\nu\varphi i} \right) \left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e^{\nu(\theta-\varphi)i} \rho^\nu \right) d\varphi \right|.$$

Odavde sledi nejednačina

(2) $$|a_0| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} e^{\nu\varphi i} \right| \left| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e^{\nu(\theta-\varphi)i} \rho^\nu \right| d\varphi,$$

gde su λ_ν ma koji realni ili kompleksni brojevi različiti od nule.

Ako na desnu stranu (2) primenimo nejednakost Hölder-a sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, imaćemo

(3) $$|a_0| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} e^{\nu\varphi i} \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e^{\nu(\theta-\varphi)i} \rho^\nu \right|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}},$$

odakle očigledno sledi i nejednačina

(4) $$|a_0| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} e^{\nu\varphi i} \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_\nu| \rho^\nu \right).$$

Iz (4) se, naprimer, za $\lambda_\nu = \nu i$ $\rho < 1$ dobija

$$|a_0| \leq M_p(P_1)\frac{\rho}{(1-\rho)^2}, \tag{5}$$

gde je

$$M_p(P_1) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{\nu}e^{\nu\varphi i}\right|^p d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Nejednačina (5) zadovoljena je za

$$\rho \geq \frac{|a_0|}{2|a_0| + M_p(P_1)}. \tag{7}$$

Desna strana (7) pretstavlja jednu od donjih granica modula nula polinoma (1).

Stavljajući u (1) $z = \frac{1}{t}$, dobićemo

$$t^n P\left(\frac{1}{t}\right) = P^*(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} t^\nu.$$

Neka je $re^{\alpha i}$ $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ nula polinoma P (t). Prema (7), za $r < 1$ je tada

$$r \geq \frac{|a_n|}{2|a_n| + M_p(P_2)}, \tag{8}$$

gde je sada

$$M_p(P_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{n-\nu}}{\nu}e^{\nu\alpha i}\right|^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Nula $re^{\alpha i}$ polinoma $P^*(t)$ najmanjeg modula je nula $\rho\, e^{\theta i}$ polinoma (1) najvećeg modula, pa se zbog $z = \frac{1}{t}$ dobija $\rho = \frac{1}{r}$, što prema (8) daje

$$\rho \leq \frac{2|a_n| + M_p(P_2)}{|a_n|}. \tag{10}$$

Na osnovu (7) i (10) dolazimo do zaključka:

Sve nule polinoma (1) nalaze se u prstenu

$$\frac{|a_0|}{2|a_0| + M_p(P_1)} \leq |z| \leq \frac{2|a_n| + M_p(P_2)}{|a_n|}. \tag{11}$$

Za s = 2, na osnovu formule Parseval-a, prema (2) paragrafa 2.9. Montel-ov prsten (6) postaje

(12) $$\frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|^2}} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|^2}}{|a_n|}$$

dok se prema (11), s obzirom na (6) i (9), za p = 2 svodi na

(13) $$\frac{|a_0|}{2|a_0|+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{|a_\nu|}{\nu}\right)^2}} \leq |z| \leq \frac{2|a_n|+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{|a_{n-\nu}|}{\nu}\right)^2}}{|a_n|}.$$

Montel-ov prsten (12) može se dobiti iz nejednakosti (3) za p = = q = 2 i $\lambda_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

Iz nejednakosti (3), odnosno (4), mogu se dobiti i drugi prsteni u kojima se nalaze sve nule polinoma (1).

Za polinome velikog stepena n, granice prstena (13) mogu biti preciznije od granica prstena (12). Procena (13) naročito dolazi do izražaja pri odredjivanju donje granice modula nula funkcija pretstavljenih Taylor-ovim redom.

Donja granica modula nula funkcija pretstavljenih Taylor-ovim redom $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ prema M. Petroviću, E. Landau-u, P. Montel-u i D. Markoviću odredjena je izrazom

(14) $$\frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2}},$$

dok je u našem slučaju prema (13) ova granica izražena sa

(15) $$\frac{|a_0|}{2|a_0|+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{|a_\nu|}{\nu}\right)^2}}.$$

Pošto je $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{|a_\nu|}{\nu}\right)^2 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2$, to (15) ima smisla kad god ima smisla (14). Medjutim, može da bude $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{|a_\nu|}{\nu}\right)^2 < \infty$, a $\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2 = \infty$, što pokazuje primer funkcije

$$f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x_\nu}{\ln(1+\nu)}z^\nu, \qquad |x_\nu| = 1,$$

za koju je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(1+\nu)} = \infty, \quad \text{dok je} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \ln^2(1+\nu)} < \infty,$$

pa za nju izraz (14) nema smisla, jer postaje nula, a izraz (15), kao donja granica modula njenih nula, različit je od nule.

L I T E R A T U R A

1. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya :
   Inequalities (Ruski prevod, Moskva 1948)

2. E.Bekenbach, R.Bellman :
   Inequalities (Ruski prevod, Moskva 1965)

3. D.S.Mitrinović :
   Nejednakosti, Gradjevinska knjiga, Beograd 1965

4. L.Bieberbach, L.Bauer :
   Vorlesungen über Algebra, Leipzig-Berlin 1928

5. G.Polya, G.Szegö :
   Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I,II, Berlin 1925
   (Ruski prevod, Moskva 1956)

6. Б. Я. Левин :
   Распределение корней целых функций, Москва 1956

7. E.C.Titchmarsh :
   The theory of functions, Oxford Univ. press 1952

8. M.Marden :
   The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, American Mathematical Society, New York 1949

9. N.Obreschkoff :
   Verteilung und Berechnung der Nullsteller reeller Polynome, Berlin 1963

10. Dj.Kurepa :
   Viša algebra I,II, Školska knjiga, Zagreb 1965

11. M.Petrovitch :
   Remarqué sur les zéros des séries de Taylor, Bull. Soc. Math. France vol. 29(1901)

12. E.Landau :
   Ueber eine Aufgabe aus der Funktionentheorie, Tôhoku Math. J. vol. 5(1914)

13. P.Montel :
Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes, Comm. Math. Helv. vol.7(1934-1935)

14. D.Marković :
O razmacima realnih korena algebarskih jednačina, Srpska Akademija Nauka, Glas CLXXV,1937

Granice korena algebarskih jednačina, Srpska Akademija Nauka, Glas CLXXXI,1939

Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme, Acad. Serb. Sci. Publ. Inst. Math.vol 2(1948)

Une application de la méthode des polynômes comparatifs, Matematički Vesnik 1(16) Sv.4,1964

15. J.Karamata :
O donjoj granici modula nula analitičkih funkcija, Srpska Akademija Nauka, Glas CXXVII,1927

16. S.Raljević :
O izvjesnim klasama polinoma i o rasporedu njihovih nula, Srpska Akademija Nauka, Zbornik radova, Mat. Inst. knj.5, 1956

17. Т.Т. Тонков: Об одной оценке модулей корней полиномов, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, № 135(1965)

18. С.Б. Стечкин:
О расположении нулей полиномов, Математические заметки, Том I, Выпуск 4, 1967, (Акад. Наук СССР)