PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU

LUČIĆ P. BLAGOTA

# VREMENSKA ANALIZA UOPŠTENIH SLUČAJNIH PROCESA

(Doktorska disertacija)



Beograd, 1985.

# P R E D G O V O R

U ovom radu dati su rezultati proučavanja vremenske analize slučajnih procesa. U radu smo koristili dosadašnje rezultate iz ove oblasti objavljene u našoj i svjetskoj literaturi.

Posebnu pažnju smo posvetili nelinearnoj analizi stacionarnih procesa.

U glavi I, koristeći Kramerovu reprezentaciju slučajnog procesa drugog reda, odredjen je spektralni tip takvog procesa posmatranog od konačnog trenutka i izvršena konkretizacija na stacionarni Markovski proces reda N.

U glavi II je odredjen inovacioni proces u nelinearnoj analizi stacionarnog Gausovog procesa i inovacioni proces u nelinearnoj analizi stacionarnog Markovskog procesa od konačnog trenutka.

U glavi III definisana je nelinearna vremenska analiza uopštenih procesa. Odredjen je inovacioni proces u nelinearnoj analizi M-dimenzionalnih i uopštenih stacionarnih procesa u smislu Rozanova.

Posebnu zahvalnost odajem svom mentoru, prof. Dr Zoranu Ivkoviću, na pomoći pri izradi rada.

S A D R Ž A J

GLAVA I

# LINEARNA VREMENSKA ANALIZA SLUČAJNIH PROCESA

## 1.1. Slučajni procesi i Hilbertov prostor

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor vjerovatnoća i T skup vrijednosti parametra. Slučajnim procesom nazivamo konačnu realnu funkciju $\xi(t,\omega)$, koja pri svakom fiksiranom $t \in T$ je $\mathcal{F}$ mjerljiva funkcija od $\omega \in \Omega$, ili slučajni proces $\{\xi(t), t \in T\}$ je familija slučajnih promjenljivih koje zavise od parametra t i koje su definisane na prostoru vjerovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Prostor slučajnih promjenljivih $\xi$, sa konačnim momentom drugog reda ($E\xi^2 < \infty$), definisanih na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označavamo sa $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \mathcal{H}$. Aako se u $\mathcal{H}$ definiše skalarni proizvod

$$(\xi, \eta) = E\xi\eta, \text{ za svako } \xi, \eta \in \mathcal{H} \quad \text{i}$$

$$\text{norma } \|\xi\| = (\xi, \xi), \ \forall \xi \in \mathcal{H},$$

tada je $\mathcal{H}$-Hilbertov prostor slučajnih promjenljivih.

Za element $\xi \in \mathcal{H}$ kažemo da je ortogonalan na skup $S \subset \mathcal{H}$ ako je $(\xi, \eta) = 0$, za svako $\eta \in S$.

Za skupove $S_1, S_2 \subset \mathcal{H}$ kažemo da su medjusobno ortogonalni ako je

$$(\xi, \eta) = 0, \ \forall \xi \in S_1 \text{ i } \eta \in S_2.$$

Niz slučajnih promjenljivih $\xi_n$, $n=1,2,\ldots$ iz $\mathcal{H}$ konvergira srednjekvadratno ka $\xi \in \mathcal{H}$ ako $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Ako je $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, tada svako $\xi \in \mathcal{H}$ možemo napisati na jedinstven način u obliku

$\xi = \eta + \psi$ , gdje je $\eta \in \mathcal{H}_1$, a $\psi \perp \mathcal{H}_1$. Slučajna promjenljiva $\eta$ je ortogonalna projekcija $\xi$ na $\mathcal{H}_1$.

Neka je $\mathcal{H}_1$ podprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ koji je generisan konačnim brojem slučajnih promjenljivih $\xi_1, \dots, \xi_n$, tj. sastoji se iz svih linearnih kombinacija od $\xi_i$, $i=1,2,\dots,n$ i njihovih graničnih vrijednosti i neka je $\xi \in \mathcal{H}$ . Slučajna promjenljiva

$\hat{\xi} = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n$, za koju je kvadrat rastojanja

$$\| \xi - \sum_{i=1}^{n} c_j \xi_j \|^2 = E \,| \xi - \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j |^2$$

minimalan, je najbolja linearna ocjena $\xi \in \mathcal{H}$ pomoću $\xi_1, \dots, \xi_n$. Razlika $\xi - \hat{\xi}$ je nekolerirana sa svim $\xi_k$, $k=1,2,\dots,n$, tj.

$$E(\xi - \hat{\xi})\xi_k = (\xi - \hat{\xi}, \xi_k) = 0, \quad k=1,2,\dots,n.$$

1.1.1. Uslovno matematičko očekivanje

Neka je $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ proizvoljna $\sigma$-algebra dogadjaja, $\xi$ proizvoljna slučajna promjenljiva sa $E\,\xi < \infty$ .

Uslovno matematičko očekivanje slučajne promjenljive $\xi$ , u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$ , nazivamo slučajnu promjenljivu $E(\xi/\mathcal{B})$ koja je mjerljiva u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$ i pri tome, za svako $B \in \mathcal{B}$ zadovoljava jednakost

$$\int_B E(\xi/\mathcal{B}) P(d\omega) = \int_B \xi P(d\omega).$$

Osnovne osobine uslovnog očekivanja su:

1. Ako je $\xi \le \eta$ , s.i., tada je $E(\xi/\mathcal{B}) \le E(\eta/\mathcal{B})$, s.i.,
2. $|E(\xi/\mathcal{B})| \le E(|\xi|/\mathcal{B})$, s.i.,

3. Ako su a i b konstante i $aE\xi + bE\eta$ definisano, tada je

$E(a\xi + b\eta/\mathcal{B}) = aE(\xi/\mathcal{B}) + bE(\eta/\mathcal{B})$, s.i.,

4. Ako je $\xi$ mjerljiva u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$, tada je

$E(\xi/\mathcal{B}) = \xi$, s.i.,

5. $E(E(\xi/\mathcal{B})) = E\xi$,

6. Ako je $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, tada je $E(E(\xi/\mathcal{B}_2)/\mathcal{B}_1) = E(\xi/\mathcal{B}_1)$, s.i.,

7. Ako su slučajna promjenljiva $\xi$ i $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ nezavisne, tada je $E(\xi/\mathcal{B}) = E\xi$,

8. Ako je $\eta$ $\mathcal{B}$ mjerljiva slučajna promjenljiva, $E\eta < \infty$ i $E(\xi\eta) < \infty$, tada je $E(\xi\eta/\mathcal{B}) = \eta E(\xi/\mathcal{B})$, s.i.,

9. Ako je f neprekidna, konveksna funkcija jedne realne promjenljive, tada je $f(E(\xi/\mathcal{B})) \leq E(f(\xi)/\mathcal{B})$ i

10. Za $\xi \geqslant 0$ je $E(\xi/\mathcal{B}) \geqslant 0$, s.i. .

Ako je $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ generisana slučajnim promjenljivim $\eta_1, \eta_2, \ldots$ pisaćemo

$$E(\xi/\mathcal{B}) = E(\xi/\eta_1, \eta_2, \ldots).$$

Neka su $\xi$ i $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ takve slučajne promjenljive da postoji uslovno očekivanje $E(\xi/\eta)$.

Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i $L^2$ skup svih slučajnih promjenljivih $\varphi(\eta)$, $E\varphi^2(\eta) < \infty$, $E\varphi(\eta) = 0$.

Najbolja ocjena slučajne promjenljive $\xi$, pomoću $\eta$, je $\hat{\xi} = E(\xi/\eta)$. Ona je najbolja u smislu da je

$$\inf_{\varphi} \| \xi - \varphi(\eta) \|^2 = \| \xi - \hat{\xi} \|^2 .$$

## 1.2. Razlaganje jedinice

Neka je u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zadan potpuno neprekidan samokonjugovani operator A. Prostor $\mathcal{H}$ razložimo na orto-

3. Ako su a i b konstante i $aE\xi+bE\eta$ definisano, tada je

$E(a\xi+b\eta/\mathcal{B}) = aE(\xi/\mathcal{B}) + bE(\eta/\mathcal{B})$, s.i.,

4. Ako je $\xi$ mjerljiva u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$, tada je

$E(\xi/\mathcal{B}) = \xi$ , s.i.,

5. $E(E(\xi/\mathcal{B})) = E\xi$,

6. Ako je $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, tada je $E(E(\xi/\mathcal{B}_2)/\mathcal{B}_1) = E(\xi/\mathcal{B}_1)$, s.i.,

7. Ako su slučajna promjenljiva $\xi$ i $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ nezavisne, tada je $E(\xi/\mathcal{B}) = E\xi$ ,

8. Ako je $\eta$ $\mathcal{B}$ mjerljiva slučajna promjenljiva, $E\eta<\infty$ i $E(\xi\eta)<\infty$ , tada je $E(\xi\eta/\mathcal{B}) = \eta E(\xi/\mathcal{B})$, s.i.,

9. Ako je f neprekidna, konveksna funkcija jedne realne promjenljive, tada je $f(E(\xi/\mathcal{B})) \le E(f(\xi)/\mathcal{B})$ i

10. Za $\xi \geq 0$ je $E(\xi/\mathcal{B}) \geq 0$, s.i. .

Ako je $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ generisana slučajnim promjenljivim $\eta_1, \eta_2, \ldots$ pisaćemo

$$E(\xi/\mathcal{B}) = E(\xi/\eta_1, \eta_2, \ldots).$$

Neka su $\xi$ i $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ takve slučajne promjenljive da postoji uslovno očekivanje $E(\xi/\eta)$.

Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i $L^2$ skup svih slučajnih promjenljivih $\varphi(\eta)$, $E\varphi^2(\eta)<\infty$ , $E\varphi(\eta)=0$.

Najbolja ocjena slučajne promjenljive $\xi$, pomoću $\eta$, je $\hat{\xi} = E(\xi/\eta)$. Ona je najbolja u smislu da je

$$\inf_{\varphi} \| \xi - \varphi(\eta) \|^2 = \| \xi - \hat{\xi} \|^2 .$$

## 1.2. Razlaganje jedinice

Neka je u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zadan potpuno neprekidan samokonjugovani operator A. Prostor $\mathcal{H}$ razložimo na ortogonalnu sumu

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \ldots$$

konačno dimenzionalnih podprostora $\mathcal{H}_k$, $k=0,1,2,\ldots$, gdje $\mathcal{H}_0$ može biti ne separabilno. Svakom podprostoru $\mathcal{H}_k$ odgovara realan broj $\lambda_k$, gdje je $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k \neq \lambda_i$, za $k \neq i$. Razlaganje prostora $\mathcal{H}$ je takvo da u svakom podprostoru $\mathcal{H}_k$ djelovanje operatora A se svodi na umnožak elementa sa odgovarajućim brojem $\lambda_k$, tj.

$$Af = \lambda_k f, \quad f \in \mathcal{H}_k.$$

Označimo operator projektovanja na $\mathcal{H}_k$ sa $P_k$. Važi

$$I = P_0 + P_1 + \ldots \tag{1}$$

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots \tag{2}$$

Neka je $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, za svako realno t, generisan sa svim sopstvenim vektorima odgovarajućih vrijednosti manjih od t. Pri tome nula takodje se smatra kao sopstvena vrijednost u odnosu na $\mathcal{H}_0$. Neka je $E_t$ operator projektovanja na $\mathcal{H}_t$. $E_t$ je neprekidna s lijeva operatorna funkcija od t. Ako je $\lambda_k$ sopstvena vrijednost, tada je

$$E_{\lambda k+0} - E_{\lambda k} = P_k$$

operator projektovanja na odgovarajući podprostor $\mathcal{H}_k$. Izraze (1) i (2) možemo napisati u obliku

$$f = I f I = \int_{\alpha}^{\beta} dE_t f, \quad Af = \int_{\alpha}^{\beta} tE_t f \ ,$$

gdje su integrali uzeti nad $[\alpha,\beta]$ koji sadrži sve sopstvene vrijednosti potpuno neprekidnog samokonjugovanog operatora A.

Familija operatora $E_t$, koja je zadata u konačnom ili beskonačnom intervalu $[\alpha,\beta]$ i zadovoljava uslove:

a) $E_v E_u = E_s$, $s = \min\{u,v\}$;

b) U smislu jake konvergencije $E_{t-0} = E_t$, $\alpha < t < \beta$ ;

c) $E_\alpha = 0$, $E_\beta = I$

naziva se razlaganje jedinice. Odavde slijedi da za svako h veličina $(E_t h,h) = \sigma(t)$ je neprekidna s lijeva, neopadajuća funkcija ograničene varijacije, za koju je $\sigma(\alpha) = 0$, $\sigma(\beta) = (h,h)$.

Neka je $\Delta = [t',t''] \subset [\alpha,\beta]$ i $E_{t''} - E_{t'} = E(\Delta)$. Za intervale $\Delta_1$ i $\Delta_2$, na osnovu a), je $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta)$, gdje je $\Delta$ presjek intervala $\Delta_1$ i $\Delta_2$. Ako su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ disjunktni, tada $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = 0$, tj. podprostori na koje $E(\Delta_1)$, $E(\Delta_2)$ projektuju su ortogonalni. Na osnovu ovoga, uslov a) se naziva svojstvom ortogonalnog razlaganja jedinice.

U opštem slučaju, razlaganje jedinice je svaka familija operatora $F_t$ koja zadovoljava uslove:

a') Za $t_2 > t_1$, $F_{t_2} - F_{t_1}$ je ograničeni pozitivni operator,

b') $F_{t-0} = F_t$ ,

c') $F_{-\infty} = 0$, $F_\infty = I$ .

Neka je $E_t$ - ortogonalno razlaganje jedinice prostora $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}_1$ podprostor prostora $\mathcal{H}$; P operator projektovanja na $\mathcal{H}_1$. Uzmimo da je $F_t = PE_t$ operator koji djeluje u $\mathcal{H}_1$ i zadovoljava uslove a'), b'), c'). U tom slučaju $F_t$ je ne ortogonalno razlaganje jedinice prostora $\mathcal{H}_1$.

Ako je A - simetrični operator, $F_t$ uopšteno razlaganje jedinice takvo da za svako $f \in \mathcal{D}_A$ i $g \in \mathcal{H}$ je

$$(Af,g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(F_t f,g) \quad \text{i} \quad \| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f,f),$$

tada razlaganje jedinice $F_t$ nazivamo spektralnom funkcijom operatora A.

Podprostor $\mathcal{H}_1$ ortogonalno svodi operator A, ako je $\mathcal{H}_1$ i njegova ortogonalna dopuna $\mathcal{H}_2$ u $\mathcal{H}$ invarijantni za A. (Podprostor $\mathcal{H}_1$ je invarijantno za A ako je $A\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$).

## 1.2.1. Ciklički podprostori

Neka je A samokonjugovani operator u $\mathcal{H}$ i $h \in \mathcal{H}$ proizvoljni element.

Cikličkim podprostorom $\mathcal{M}(h)$ sa generatornim elementom h, $h \in \mathcal{H}$, nazivamo linearnu zatvorenost nad $\{E_t h, -\infty < t < \infty\}$, gdje je $E_t$ razlaganje jedinice koje odgovara operatoru A. Očigledno, $\mathcal{M}(h)$ svodi A.

Ciklički podprostor $\mathcal{M}(h)$ operatora A, generisan elementom $h \in \mathcal{H}$, poklapa se skupom svih elemenata oblika

$$Y = \int_a^b f(t)\, E(dt)h \,, \tag{1}$$

gdje je f(t) kvadratno integrabilna funkcija u odnosu na mjeru $d\rho_h$, $\rho_h(t) = (E_t h, h)$. Pridruživanje $f(t) \leftrightarrow y$ je izomorfizam izmedju $\mathcal{L}_2(\rho_h)$ i $\mathcal{M}(h)$.

<u>Teorema 1.</u> [13] Ako je A-operator u $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ možemo razložiti u ortogonalnu sumu podprostora, cikličkih u odnosu na A.

Dokaz se zasniva na formiranju familije $\mathcal{H}'$ uzajamno ortogonalnih podprostora prostora $\mathcal{H}$, cikličkih u odnosu na A. Uvodjenjem poretka u $\mathcal{H}'$, postoji maksimalni lanac $\mathcal{N}$ u $\mathcal{H}'$. Označimo sa $\mathcal{M}$ familiju podprostora koji ulaze u $\mathcal{N}$, a sa $\mathcal{H}_1$ ortogonalnu sumu svih podprostora iz $\mathcal{M}$. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$, tada postoji $h^* \in \mathcal{H}, h^* \neq 0$ i $h^* \perp \mathcal{H}_1$. Podprostor

$\mathcal{H}_1$ i njegovu ortogonalnu dopunu $\mathcal{H}'_1$ svodi A.

Pošto je $h^* \in \mathcal{H}'_1$, to je $\mathcal{H}(h^*) \subset \mathcal{H}'_1$. Slijedi, podprostor $\mathcal{H}(h^*)$ ortogonalan je na sve podprostore iz $\mathfrak{N}$, što je suprotno maksimalnosti lanca $\mathcal{N}$ pa je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ i $\mathcal{H}$ se razlaže u ortogonalnu sumu cikličkih podprostora.

Operator A je ciklički ako je prostor $\mathcal{H}$ cikličan.

## 1.2.2. Spektralni tip samokonjugovanih operatora

Neka je $\{E_t\}$, $t \in [a,b]$ - konačan, ili beskonačan interval, razlaganje u $\mathcal{H}$ i M-Borelov skup. Ortogonalna mjera E(M) je definisana sa

$$E(M) = \int_M E(dt) \text{ .}$$

Stavimo $\rho_h(M) = \| E(M)h \|^2$, za svako $h \in \mathcal{H}$. Označimo sa $\mathcal{M}$ skup svih mjera $\rho_h(\cdot)$, $h \in \mathcal{H}$ : $\mathcal{M} = \{ \rho_h(\cdot),\ h \in \mathcal{H} \}$. U $\mathcal{M}$ uvedimo poredak pišući da je $\rho_1(M) \prec \rho_2(M)$ ako je mjera $\rho_1(M) = \| E(M)h_1 \|^2$ apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru $\rho_2(M) = \| E(M)h_2 \|^2$. Tada za mjeru $\rho_1(M)$ kažemo da je podčinjena mjeri $\rho_2(M)$.

Mjere $\rho_1(M)$ i $\rho_2(M)$ su ekvivalentne ( $\rho_1(M) \sim \rho_2(M)$) ako je istovremeno $\rho_1(M) \prec \rho_2(M)$ i $\rho_2(M) \prec \rho_1(M)$. Relacija " $\sim$ " je relacija ekvivalencije te razbija skup $\mathcal{M}$ na disjunktne klase ekvivalentnih mjera koje nazivamo spektralnim tipovima, ili tipovima Helingera. Označavaćemo sa $\rho$ spektralni tip koji je odredjen mjerom $\rho(M)$, a za mjeru $\rho(M)$ kažemo da pripada spektralnom tipu $\rho$. Spektralni tip $\rho$ jedinstveno odredjuje svoju familiju nultih skupova $\mathcal{N}_\rho$ i obratno. Spektralni tip $\rho_1$ je podčinjen spektralnom tipu $\rho_2$ ako i samo ako je $\mathcal{N}_{\rho_2} \subset \mathcal{N}_{\rho_1}$. Ovo nam omogućava da za dva spektralna tipa $\rho_1$ i $\rho_2$ na jedinstven način možemo odrediti supremum $\rho = \rho_1 + \rho_2 = \sup\{\rho_1, \rho_2\}$ koji je definisan $\rho(M) = \rho_1(M) + \rho_2(M)$. Znači da je $\mathcal{N}_\rho = \mathcal{N}_{\rho_1} \cap \mathcal{N}_{\rho_2}$ pa je $\rho$ jedinstveno odredjeno. U svakom prebrojivom nizu $\{\rho_1, \rho_2, \dots\}$ spektralnih tipova iz $\mathcal{M}$ postoji supremum. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da $\sum_i \rho_i(M) < \infty$ za svaki Borelov skup M. Neka mjere $\rho_i(M)$ pripadaju spektralnim tipovima $\rho_i$. Tada za $\rho(M) = \sum_i \rho_i(M)$ je $\mathcal{N}_\rho = \bigcap_i \mathcal{N}_{\rho_i}$ i spektralni tip $\rho = \sup\{\rho_1, \rho_2, \dots\}$ je jedinstveno odredjen. Označimo sa $\inf\{\rho_1, \rho_2, \dots\}$ maksimalni spektralni tip podčinjen $\rho_i$, $i=1,2,\dots$ .

Najmanji element u $\mathcal{M}$ je spektralni tip 0 identično jednak nuli na intervalu $[a,b]$ .

Spektralni tipovi $\rho_1$ i $\rho_2$ su nezavisni, ili ortogonalni, ili uzajamno singularni ako nemaju podčinjenih tipova različitih od nule, tj. iz $\sigma \prec \rho_1$ i $\sigma \prec \rho_2$ slijedi $\sigma = 0$, ili $\inf\{\rho_1, \rho_2\} = 0$.

Spektralni tip $\rho_h$ spektralne mjere $\rho_h(M)$ u odnosu na A naziva se spektralnim tipom elementa $h \in \mathcal{H}$ .

Neka je $h \in \mathcal{H}$ proizvoljni generatorni element i $\rho_h(M)$ njegova spektralna mjera. Mjera $\sigma(M)$ pripada A ako i samo ako je $\sigma \preceq \rho_h$.

Operator A je operator sa maksimalnim spektralnim tipom ako postoji maksimalni spektralni tip izmedju tipova koji pripadaju A. Bilo koji element, koji generiše maksimalni spektralni tip, naziva se elementom sa maksimalnim spektralnim tipom. Unitarno ekvivalentni ciklički operatori imaju jedinstven spektralni tip. Svaki samokonjugovani operator u separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ može biti razložen u ortogonalnu sumu cikličkih operatora $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ spektralnih tipova $\rho_1, \rho_2, \ldots$ koji zadovoljavaju uslov $\rho^{(1)} \geqslant \rho^{(2)} \geqslant \ldots$ .

Tipovi $\rho^{(n)}$ obrazuju potpun sistem unitarnih invarijanti operatora A.

Ortogonalni djelovi cikličkog operatora imaju nezavisne spektralne tipove.

Ako su $\mathfrak{M}(x_1)$ i $\mathfrak{M}(x_2)$ ciklički podprostori operatora A sa generatornim elementima $x_1$ i $x_2$, koji imaju uzajamno singularne spektralne tipove, tada je prostor $\mathfrak{M}(x_1) \oplus \mathfrak{M}(x_2)$ cikličan, a njegov generatorni element $x = x_1 + x_2$ ima spektralni tip $\rho_x = \rho_{x_1} + \rho_{x_2}$ .

Na osnovu Lebegove teoreme o aditivnoj dekompoziciji datih mjera $\rho_2(M)$ na apsolutno neprekidnu $\rho_1(M)$ i singularnu mjeru $\tau(M)$ imamo da ako su dati spektralni tipovi $\rho_1$ i $\rho_2$ takvi da je $\rho_2 = \inf\{\rho_1, \rho_2\} + \tau$ , onda su spektralni tipovi $\rho_1$ i $\tau$ ortogonalni.

<u>Lema 1.</u> [7] Neka su $\mathfrak{M}(x)$ i $\mathfrak{M}(y)$ uzajamno ortogonalni ciklični podprostori. Tada postoje elementi $z_1$ i $z_2$ u $\mathfrak{M}(x) \oplus \mathfrak{M}(y)$ takvi da je

$$\mathfrak{M}(x) \oplus \mathfrak{M}(y) = \mathfrak{M}(z_1) \oplus \mathfrak{M}(z_2)$$

i spektralni tip $\rho_{z_1} > \rho_{z_2}$ .

Dokaz: Na osnovu Lebegove teoreme o aditivnoj dekompoziciji mjera, postoji jednistveno odredjen spektralni tip $\tau$ takav da je

$$\rho_y = \inf\{\rho_x, \rho_y\} + \tau \quad \text{i} \quad \inf\{\rho_x, \tau\} = 0 .$$

Pošto je $\tau < \rho_y$, postoji element u, $u \in \mathfrak{M}(y)$ čiji je $\tau$ spektralni tip. Neka je $z_1 = x + u$. Zbog ortogonalnosti spektralnih tipova $\rho_x$ i $\rho_y = \mathcal{E}$ imamo

$$\rho_{z_1} = \rho_x + \mathcal{E} \quad \text{i} \quad \mathcal{M}(z_1) = \mathcal{M}(x) \oplus \mathcal{M}(u) .$$

U $\mathcal{M}(y)$ postoji element $z_2$, čiji je spektralni tip

$$\rho_{z_2} = \inf \{ \rho_x, \rho_y \} .$$

Pošto je $\rho_{z_1} > \rho_x$ i $\rho_x > \rho_{z_2}$, slijedi $\rho_{z_1} > \rho_{z_2}$.

Odatle je

$$\inf \{ \rho_{z_2}, \mathcal{E} \} = 0 \quad \text{i} \quad \mathcal{M}(y) = \mathcal{M}(z_2) \oplus \mathcal{M}(u) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{M}(z_2) = \mathcal{M}(y) \ominus \mathcal{M}(u) .$$

Na osnovu izloženog, slijedi da je

$$\mathcal{M}(z_1) \oplus \mathcal{M}(z_2) = \mathcal{M}(x_1) \oplus \mathcal{M}(y) .$$

Koristeći rezultate Leme 1. može se pokazati da za svaki samokonjugovani operator A iz separabilnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ postoji reprezentacija

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{N} \oplus \mathcal{M}(z_k) \tag{2}$$

takva da je

$$\rho_{z_1} > \rho_{z_2} > \cdots > \rho_{z_N} , \tag{3}$$

gdje N može biti i beskonačno.

Reprezentacija (2) sa uslovom (3) se naziva kanoničkom reprezentacijom prostora $\mathcal{H}$ u odnosu na operator A.

Reprezentacija operatora A, kao sume njegovih djelova definisanih na podprostorima od $\mathcal{H}$, nazivamo kanoničkom reprezentacijom operatora A čiji je spektralni tip (3).

## 1.3. Stohastički procesi kao krive u Hilbertovom prostoru

### Kramerova reprezentacija

Neka je $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ realni stohastički proces sa konačnim momentom drugog reda $E\,\xi^2(t) < \infty$, $E\xi(t) = 0$.

Neka je $\xi(t) \in \mathcal{H}$, za svako t. Tada se $\{\xi(t)\}$ može posmatrati kao proces sa neprekidnim vremenom, ili kao kriva C u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

U [8] Kramer je posmatrao regularni slučajni proces $\xi(t)$ sa konačnim momentom drugog reda metodom Hilbertovih prostora definišući podprostore od $\mathcal{H}$ sa

$$\mathcal{H}(\xi) = \mathcal{H}(\{\xi(t), -\infty < t < \infty\})$$
$$\mathcal{H}(\xi;t) = \mathcal{H}(\{\xi(u), u \leq t\})$$
$$\mathcal{H}(\xi;-\infty) = \bigcap_t \mathcal{H}(\xi;t),$$

gdje je $\mathcal{H}(\xi)$ najmanji podprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži krivu C generisanu procesom $\{\xi(t)\}$, dok je $\mathcal{H}(\xi;t)$ najmanji podprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži luk krive C, što odgovara tačkama $\{\xi(u), u \leq t\}$. $\mathcal{H}(\xi;t)$ je skup svih slučajnih promjenljivih koje se dobijaju pomoću linearnih operacija i graničnih prelaza (u srednje kvadratnom) od vrijednosti procesa, ako su nam ove poznate do momenta t zaključno.

Ako je parametar t vrijeme, tada $\mathcal{H}(\xi;t)$ je prošlost i sadašnjost procesa $\xi(t)$.

Pretpostavimo da stohastički proces $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ zadovoljava uslove:

A) Proces $\{\xi(t)\}$ je neprekidan u srednjekvadratnom,

B) $\bigcap_t \mathcal{H}(\xi;t) = 0$.

Uslov A) može biti zamijenjen (slabijim) uslovom da je

$\{\xi(t)\}$ neprekidan u srednjekvadratnom sa lijeve (desne) strane za svako t.

Uslov B) znači da je proces $\{\xi(t)\}$ regularan, ili čisto nedeterministički.

Neka je $E(t)$ ($E_\xi(t)$) operator projektovanja iz $\mathcal{H}(\xi)$ na $\mathcal{H}(\xi;t)$. $E(t)$ ima osobine:

$E(u) \leq E(t)$ za $u \leq t$; $E(t-0) = E(t)$ za svako t i

$E(-\infty) = 0$; $E(\infty) = I$.

U skladu sa teorijom samokonjugovanih operatora u separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, postoje elementi $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathcal{H}(\xi)$ takvi da je

$$\mathcal{H}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \oplus \mathfrak{M}(z_k) \tag{1}$$

i

$$\rho_{z_1} > \rho_{z_2} > \dots > \rho_{z_N}, \tag{2}$$

gdje N može biti beskonačno.

Broj N je minimalan u smislu da za svaki niz elemenata $y_1, y_2, \dots, y_M$ u $\mathcal{H}(\xi)$, za koje je $\mathcal{H}(\xi) = \sum_{k=1}^{M} \oplus \mathfrak{M}(y_k)$, važi $N \leq M$.

Za slučajnu promjenljivu $z \in \mathcal{H}(\xi)$ definišimo slučajni proces $z(t) = E(t)z, -\infty < t < \infty$. Proces $z(t)$ je proces sa ortogonalnim priraštajima koji zadovoljava uslove A) i B). Funkcija distribucije $F_z(t) = E|z(t)|^2 = \|z(t)\|^2, -\infty < t < \infty$, je takva da je $F_z(t-0) = F_z(t)$, za svako t. Funkcija distribucije odredjuje mjere koje pripadaju spektralnom tipu $\rho_z$ elemenata z pa ćemo mjesto $\rho_z$ koristiti $F_z$.

Na osnovu rezultata u [2] (425-428) prostor $\mathcal{H}(z;t)$ se poklapa sa skupom svih slučajnih promjenljivih oblika

$$\int_{-\infty}^{t} f(u) z(du),$$

gdje je $\{z(t),-\infty < t < \infty\}$ proces sa ortogonalnim priraštajima i $f \in \mathcal{L}_2(F_z)$. Iz $z(du) = E(du)z$ proizilazi da se prostor $\mathcal{H}(z)$ poklapa sa cikličkim podprostorom $\mathfrak{M}(z)$ koji je generisan sa $z$.

U [15] je pokazano da za svaki proces sa ortogonalnim priraštajima $\{z(t),-\infty < t < \infty\}$ postoji $z_0 \in \mathcal{H}(z)$ takav da je $\mathcal{H}(z) = \mathfrak{M}(z_0)$.

Jednakost (1) može biti napisana u obliku

$$\mathcal{H}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \oplus \mathcal{H}(z_k), \tag{3}$$

gdje su $\{z_k(t),-\infty < t < \infty\}$, $k=1,2,\ldots,N$, uzajamno ortogonalni procesi sa ortogonalnim priraštajima. Oni se nazivaju inovacionim procesom procesa $\xi(t)$.

Primjenjujući $E(t)$ na (3), dobijamo

$$\mathcal{H}(\xi;t) = \sum_{k=1}^{N} \oplus \mathcal{H}(z_k;t), \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{4}$$

Odavde slijedi da se proces $\{\xi(t),-\infty < t < \infty\}$ može predstaviti u obliku

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} g_k(t,u) z_k(du), -\infty < t < \infty \quad ,(5)$$

gdje su $g_k(t,u)$, $u \leq t$, funkcije takve da je

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} | g_k(t,u) |^2 F_{z_k}(du) < \infty \quad \text{za } t \in (-\infty, \infty).$$

Reprezentacija (5) se naziva Kramerovom reprezentacijom slučajnog procesa $\{\xi(t),-\infty < t < \infty\}$.

Niz (2) je spektralni tip procesa $\{\xi(t)\}$. Broj $N$ se naziva multiplicitetom procesa $\{\xi(t)\}$.

Za stacionarne procese u širem smislu $\{\xi(t),-\infty < t < \infty\}$ Kramerova reprezentacija naziva se Woldovom reprezentacijom [2] i ona je

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u) z(du), -\infty < t < \infty \ ,$$

$$\mathcal{H}(\xi;t) = \mathcal{H}(z;t), \; E|z(dt)|^2 = dt \,.$$

$\{z(t), -\infty < t < \infty\}$ je proces sa ortogonalnim priraštajima, a $g(t) \in \mathcal{L}_2(F_z)$.

Multiplicitet stacionarnog procesa je N=1, a spektralni tip je ekvivalentan Lebegovoj mjeri na $(-\infty, \infty)$.

Rešavajući problem Woldove reprezentacije, u opštem slučaju, primjenjujući teoremu o kompletnom sistemu unitarnih invarijanti samokonjugovanih operatora u separabilnom Hilbertovom prostoru, Kramer je pokazao da mjere distributivnih funkcija

$$F_n(t) = E\,|z_n(t)|^2, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad n=1,2,\dots,N$$

mogu biti poredjane po apsolutnoj neprekidnosti

$$F_1 > F_2 > \dots > F_N \;,$$

a klase ekvivalencija $\rho_n$, $n=1,2,\dots,N$, mjera su jedinstveno odredjene korelativnom funkcijom $r(s,t)$. Za svaki dati niz

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_N$$

postoji stohastički proces $\{\xi(t)\}$, neprekidan u srednjekvadratnom, čiji spektralni tip je taj niz. Jednakost (4) pokazuje da je svaki proces $\{z_k(t),\ k=1,\dots,N\}$ odredjen procesom $\{\xi(t)\}$ i obratno: $\{\xi(t)\}$ je odredjeno inovacionim procesom $\{z_k(t), k=1,\dots,N\}$.

## 1.4. Kramerova reprezentacija procesa drugog reda od konačnog trenutka $t_o$

Neka je $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ slučajni proces drugog reda sa Kramerovom reprezentacijom

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} g_n(t,u)dz_n(u), \quad t \geq to.$$

Za $t > to$, proces $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ se može napisati u obliku

$$\xi(t) = \xi(t) - E_{to}\xi(t) + E_{to}\xi(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{to} g_n(t,u)dz_n(u) + \sum_{n=1}^{N} \int_{to}^{t} g_n(t,u)dz_n(u) \text{ i}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{to} g_n(t,u)dz_n(u) \in \mathcal{H}_{to}(\xi) .$$

Neka je $\mathcal{H}_{to}(\xi)$ ortonormirana baza

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M, \text{ (M može biti i } \infty \text{ ).}$$

U tom slučaju $E_{to}(\xi) = \sum_{k=1}^{M} h_k(t)\eta_k$.

Stavimo

$$\eta_k(t) = \begin{cases} \eta_k, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}$$

Tada su procesi $\eta_k(t)$ uzajamno ortogonalni sa ortogonalnim priraštajima.

Spektralni tip procesa je

$$F_{\eta_k}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq to \\ 0,, & t < to . \end{cases}$$

Označimo sa $\tilde{z}_n(t) = z_n(t) - z_n(to)$, $t > to$, čiji je spektralni tip

$$F_{\tilde{z}_n}(t) = \begin{cases} t-to, & t \geq to \\ 0, & t < to \end{cases}$$

Tada za svako $t > to$

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{to}^{t} g_n(t,u)dz_n(u) + \sum_{k=1}^{M} h_k(t)\eta_k .$$

Inovacioni proces procesa $\{\xi(t), t \geq to\}$ je

$$X_1(t) = \tilde{z}_1(t) + \eta_1(t)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_{\min\{N,M\}}(t) = \tilde{z}_{\min\{N,M\}}(t) + \eta_{\min\{N,M\}}(t) \quad \text{i}$$

dalje, ako je $M < N$

$$X_{M+1}(t) = \tilde{z}_{M+1}(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_N(t) = \tilde{z}_N(t),$$

a ako je $N < M$, tada je

$$X_{N+1}(t) = \eta_{N+1}(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_M(t) = \eta_M(t) .$$

Prema tome, spektralni tip procesa $\{\xi(t), t > to\}$ je

$$F_{z_1} + F_{\eta_1} > F_{z_2} + F_{\eta_2} > \ldots > F_{z_M} + F_{\eta_M} > F_{z_{M+1}} > \ldots > F_{z_N} \quad \text{za}$$

$M < N$,

za $M > N$

$$F_{z_1} + F_{\eta_1} > F_{z_2} + F_{\eta_2} > \ldots > F_{z_N} + F_{\eta_N} > F_{\eta_{N+1}} > \ldots > F_{\eta_M} .$$

1.4.1. Konkretizacija na stacionarni Markovski proces reda N (N konačno)

Slučajni proces $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ je Markovski proces (u širem smislu) ako za svako $s, t \in (-\infty, \infty)$, $s \leq t$ projekcija od $\xi(t)$ na $\mathcal{H}(\xi; s)$ je definisana sa

$$P_{\mathcal{H}(\xi;s)} \xi(t) = g(t,s)\, \xi(s), \quad s \leq t,$$

gdje je funkcija $g(t,s)$ definisana za svako $s, t \in (-\infty, \infty)$ i $s \leq t$ sa

$$g(t,s) = \frac{r(t,s)}{r(s,s)}, \quad s \leq t .$$

$r(s,t)$ je korelaciona funkcija procesa $\{\xi(t)\}$.

Prema Hidi [2], slučajni proces $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ je Markovski reda N, $N \geqslant 1$, ako je

$$P_{\mathcal{H}(\xi;s)}\xi(t) = \sum_{n=1}^{N} g_k(s,t)\,\xi^{(k-1)}(s) \;.$$

Ako korelaciona funkcija $r(t,s)$ zavisi samo od razlike $(t-s)$, tj. $r(t,s) = r(t-s)$, slučajni proces $\{\xi(t)\}$ je stacionaran.

Neka je $\{\xi(t), t > -\infty\}$ stacionarni Markovski proces sa čisto kanoničkom reprezentacijom u obliku Haner-Karuhne reprezentacije

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)dz(u) \;,$$

gdje je $\|dz(t)\|^2 = dt, t > -\infty$.

Proces $\{\xi(t), t > to\}$ možemo napisati u obliku

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)dz(u) = \int_{-\infty}^{to} g(t-u)dz(u) + \int_{to}^{t} g(t-u)dz(u),$$

pri čemu je $E_{to}\xi(t) = \int_{-\infty}^{to} g(t-u)dz(u)$ .

Za Markovski proces $\{\xi(t), t > to\}$ , reda N, je

$$E_{to}\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} g_k(t,to)\,\xi^{(k-1)}(to), \text{ pa je}$$

$$\xi(t) = \int_{to}^{t} g(t-u)dz(u) + \sum_{k=1}^{N} g_k(t,to)\,\xi^{(k-1)}(to), t > to.$$

Izvršimo ortonormiranje u skupu

$$\mathcal{L}\{\xi^{(0)}(to), \xi^{(1)}(to), \dots, \xi^{(N-1)}(to)\} = \mathcal{L}\{z^{(0)}, \dots, z^{(N-1)}\},$$

$$\|z^{(N-1)}\| = 1.$$

U tom slučaju

$$E_{to}\,\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} h_k(t,to)z^{(k-1)} \;, \quad \text{a}$$

$$\xi(t) = \int_{to}^{t} g(t-u)dz(u) + \sum_{k=1}^{N} h_k(t,to)z^{(k-1)}, \; t > to \;.$$

Inovacioni proces procesa $\{\xi(t), t \geq to\}$ ćemo odrediti formiranjem cikličkih podprostora od prostora

$$\mathcal{H}(\xi;t) = \mathcal{L}(z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N-1)};\ z(u),\ to < u \leq t)$$

Za $t > to$

$$\mathcal{M}(z) = \left\{ \int_{to}^{t} \varphi(t-u)dz(u),\ \varphi \in \mathcal{L}_2 \right\}$$

$$\mathcal{M}(z^{(0)}) = \left\{ \alpha_0(t) z^{(0)} \right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{M}(z^{(N-1)}) = \left\{ \alpha_{N-1}(t) z^{(N-1)} \right\} \quad \text{i}$$

$$z_1(t) = \begin{cases} z(t), & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}, \quad \| dz_1(t) \| = dt, \ \text{a} \ F_1(t) = \begin{cases} t, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}$$

$$z_2(z) = \begin{cases} z^{(1)}, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$z_N(t) = \begin{cases} z^{(N-1)}, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases} \quad \text{sa funkcijom distribucije}$$

$$F_k(t) = \begin{cases} 1, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}, \quad k = 2,3,\dots,N .$$

Uredjujući spektralne tipove prema relaciji $>$, dobijamo da je spektralni tip $\{E_t,\ t > to\}$ procesa $\{\xi(t), t > to\}$ u $\mathcal{H}(\xi)$

$$dF_1 > dF_2 \sim dF_3 \sim \dots \sim dF_N , \quad \text{a}$$

$$F_1(t) = F_z(t) + F_{z_1}(t) .$$

Kramerova reprezentacija procesa $\{\xi(t), t > to\}$ je

$$\xi(t) = \int_{to}^{t} g(t-u)dz(u) + \sum_{k=2}^{N} g_k(t,to) z_k .$$

## 1.5. Kramerova reprezentacija uopštenih procesa

Neka je $\vec{\xi}(t) = \{\xi_i(t)\}_{i=1}^{m}$, $-\infty < t < t$, višedimenzionalni slučajni proces sa konačnim momentom drugog reda $E|\xi_i(t)|^2 < \infty$, $E\xi_i(t) = 0$, (m može biti i beskonačno).

Neka su $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi})$ $(\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi};t))$ linearna zatvorenja slučajnih promjenljivih $\{\xi_i(s), s > -\infty\}$ $(\{\xi_i(s), -\infty < s \leq t\})$, $i=1,2,\ldots,m$.

Neka je $\{E_t\}$ operator ortogonalnog projektovanja na $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi};t)$.

Odredjivanje inovacionog procesa za slučajni proces $\{\vec{\xi}(t)\}$ sastoji se u konstrukciji medjusobno ortogonalnih procesa $z(t) = \{z_k(t)\}_{k=1}^{m}$, $-\infty < t < \infty$, sa ortogonalnim priraštajima takvih da je

$$\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi};t) = \mathcal{H}(z;t), \quad -\infty < t < \infty .$$

Podprostor $\mathcal{H}(\vec{\xi})$ $(\mathcal{H}(\vec{\xi};t))$ se može napisati u obliku ortogonalnih suma

$$\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi}) = \sum_{k=1}^{m} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(z_k) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi};t) = \sum_{k=1}^{m} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(z_k;t).$$

Kako $\mathcal{H}(\xi_i;t) \subset \mathcal{H}^{(1)}(\xi;t)$ i $\mathcal{H}(\xi_i)$ svodi $\{E_t\}$, imamo reprezentaciju

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} g_{ik}(t,u)\,dz_k(u), \quad i = 1,2,\ldots,m .$$

m-dimenzionalni proces $z(t) = \{z_k(t)\}_{k=1}^{m}$ sa

$$dF_{z_1} > dF_{z_2} > \ldots > dF_{z_m} \tag{1}$$

je inovacioni proces za $\vec{\xi}(t)$ i (1) je spektralni tip za $\vec{\xi}(t)$.

### 1.5.1. Reprezentacija uopštenih stacionarnih procesa

U [17] Rozanov je uveo uopštene stacionarne procesa na sledeći način.

U Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}(\tilde{\xi})$ zadata je grupa unitarnih operatora $U_t, -\infty < t < \infty$ u podprostoru $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}(\tilde{\xi})$ čije translacije $\mathcal{H}_t = U_t \mathcal{H}_0$ generišu prostor $\mathcal{H}(\tilde{\xi})$: $\mathcal{H}(\tilde{\xi}) = \overline{U_t \mathcal{H}}$.

Ukupnost stacionarno vezanih procesa, definisanih relacijom

$$\{\xi(t), x\} = U_t x, \ -\infty < t < \infty \ , \ x \in \mathcal{H}_0$$

je uopšteni stacionarni proces $\tilde{\xi}(t), -\infty < t < \infty$ .

Uopšteni stacionarni proces $\tilde{\xi}(t), -\infty < t < \infty$ , možemo definisati i kao ukupnost stacionarno vezanih komponenti $\{\xi(t), x\}$ , $x \in R$, $R$ je proizvoljni Hilbertov prostor. Ako stavimo

$$U_t\{\xi(s), x\} = \{\xi(s+t), x\} \ , -\infty < t < \infty \ , \ x \in R \ ,$$

tada $U_t$, $-\infty < t < \infty$ je grupa $(U_s U_t = U_{s+t})$ unitarnih operatora u $\mathcal{H}(\tilde{\xi})$.

Kako $\mathcal{H}_0$ možemo uzeti $\{\xi(0), x\}$, $x \in R$. U [17] je pokazano da postoji inovacioni proces

$$\tilde{X}(t) = \{X_j(t)\}_{j=1}^{M} \ , \quad (M \text{ može biti i } \infty), \text{ gdje}$$

1. $X_j(t)$, $j=1,2,\ldots,M$ su uzajamno ortogonalni procesi,

2. $X_j(t)$ je proces sa ortogonalnim priraštajima za koji važi
$$U_t[X_j(b) - X_j(a)] = X_j(b+t) - X_j(a+t) \ ,$$

3. $\|X_j(b) - X_j(a)\|^2 = b-a$ i

4. $$\mathcal{H}(\tilde{\xi}; t) = \sum_{j=1}^{M} \oplus \mathcal{H}(X_j; t), \ \forall t \ .$$

Odavde slijedi reprezentacija komponenti $\{\xi(t),x\}$, $x \in R$ uopštenog procesa $\tilde{\xi}(t)$.

$$\{\xi(t),x\} = U_t\{\xi(0),x\} = \sum_{j=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} g_j^{(x)}(t-u)\,dX_j(u).$$

Prema tome, spektralni tip uopštenog procesa $\tilde{\xi}(t)$ je

$$\underbrace{dt \sim dt \sim \ldots \sim dt}_{M\ \text{puta}}.$$

GLAVA II

# NELINEARNA VREMENSKA ANALIZA GAUSOVIH PROCESA

## 2.1. Gausovi procesi

Slučajna promjenljiva $\xi$ je Gausova ako joj je funkcija raspodjele

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}\right\} dt \quad ,$$

gdje $m = E\xi \in R$, $\sigma^2 = D\xi \in R$, $\sigma^2 > 0$ su parametri raspodjele $\xi \sim N(m, \sigma^2)$.

Gustina raspodjele slučajne promjenljive $\xi(t)$ je funkcija

$$\varphi_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) \; ,$$

a karakteristična funkcija je

$$f_{\xi}(t) = \exp\left\{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\} \; , \; t \in R \; .$$

Slučajna promjenljiva $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, slučajni vektor, u n-dimenzionalnom prostoru $R^n$ je Gausov, ima Gausovu n-dimenzionalnu raspodjelu, ako je funkcija raspodjele vjerovatnoća oblika

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(Y-m), \; Y-m)\right\} dY_1 \dots dY_n \quad ,$$

pri čemu je $m=(m_1, \dots, m_n) \in R^n$ očekivana vrijednost za $\xi$, $m_k = E\xi_k$, $k=1,2,\dots,n$; $B = [B_{ij}]^n$, $i,j=1,2,\dots,n$ realna, pozitivno definisana, simetrična matrica reda nxn čiji su elementi covarijanse

$$B_{ij} = E\,\xi_i\,\xi_j - E\xi_i E\xi_j,\quad i,j = 1,2,\dots,n\ ,$$

$(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$ je skalarni proizvod.

Gustina raspodjele slučajnog vektora $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ je
$\varphi_\xi(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{\partial^n F_\xi}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

Karakteristična funkcija n-dimenzionalne Gausove raspodjele vjerovatnoća je

$$f_\xi(t) = \exp\left\{ i(t,m) - \frac{1}{2}(Bt,t) \right\},\ t \in R^n\ .$$

Ako je karakteristična funkcija

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t),\quad t = (t_1,t_2,\dots,t_n) \in R^n\ ,$$

tada su komponente slučajnog vektora $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ nezavisne.

Familija realnih slučajnih promjenljivih $\xi(t)$, $t \in T$ - proizvoljan skup, definisanih na prostoru vjerovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je Gausova ako za svaku konačnu kolekciju $t_1,t_2,\dots,t_n \in T$ slučajne promjenljive $\xi(t_1), \xi(t_2),\dots, \xi(t_n)$ imaju zajedničku Gausovu raspodjelu, ili konačno dimenzionalna raspodjela slučajne funkcije $\xi(t)$, $t \in T$ je Gausova.

Ako se Gausove promjenljive posmatraju kao elementi Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$, tada je ortogonalnost Gausovih promjenljivih jednaka njihovoj nezavisnosti.

Slučajni proces $\{\xi(t), t \in T\}$ je Gausov ako je skup $\{\xi(t), t \in T\}$ Gausov.

Osnovne osobine Gausovog sistema su:

1. Ako je $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha \in T}$ Gausov sistem, tada je svaki njegov podsistem $\xi' = (\xi'_{\alpha'})_{\alpha' \in T'}$, $T' \subset T$, Gausov;

2. Ako su $\xi_\alpha$, $\alpha \in T$ nezavisne Gausove promjenljive, tada sistem $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha \in T}$ je Gausov.

3. Linearno zatvorenje $\mathcal{H}(\xi)$ Gausovog sistema $(\xi_\alpha)_{\alpha \in T}$, koje se sastoji iz linearnih kombinacija oblika

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha_i} \xi_{\alpha_i}, \quad n=1,2,\ldots, \quad c_{\alpha_i} \in R, \quad \xi_{\alpha_i} \in \{\xi_\alpha\}_{\alpha \in T}$$

i njegovih graničnih vrijednosti u srednjekvadratnom, obrazuju Gausov sistem.

Neka je $\{\xi(t), t \in T\}$ Gausov slučajni proces kod koga je $E\xi(t) = 0$, $t \in T$. Opšta formula za momenat Gausovog slučajnog procesa je

$$E\,\xi(t_1)\,\xi(t_2)\ldots\xi(t_n) = \sum \prod B(t_i, t_j),$$

gdje se sumiranje vrši po svim podjelama skupa $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in T$ na parove $\{t_i, t_j\}$, a proizvod je po svim parovima $\{t_i, t_j\}$ odgovarajućeg sabiranja.

Ako je $\{\xi(t), t \in T\}$ Gausov slučajni proces i $S \subset T$, uslovna raspodjela slučajnog vektora $\xi(t) = (\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, u koliko je data $\mathcal{F}(S)$, $\sigma$-algebra generisana slučajnim promjenljivim $\xi(t), t \in S$, je Gausova i odredjena je uslovnim očekivanjem

$$E(\xi/\mathcal{F}(S)) = (E/\xi(t_1)/\mathcal{F}(S)), \ldots, E(\xi(t_n)/\mathcal{F}(S))) =$$
$$(\hat{\xi}(t_1), \ldots, \hat{\xi}(t_n))$$

i kovarijansnom matricom $B = B(t_i, t_j)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$

$$B(t_i, t_j) = E((\xi(t_i) - \hat{\xi}(t_i))(\xi(t_j) - \hat{\xi}(t_j))/\mathcal{F}(S)) .$$

Elementi matrice $B(t_i, t_j)$ su konstante (neslučajne veličine), jer su $\xi(t_i) - \hat{\xi}(t_i)$ nezavisne od $\sigma$-algebre $\mathcal{F}(S)$.

Označimo sa

$\mathcal{H}(S) = L^2(\Omega, \mathcal{F}(S), P)$

Hilbertov prostor kvadratno integrabilnih funkcija mjerljivih u odnosu na $\mathcal{F}(S)$. Skalarni proizvod je

$$(\varphi, \psi) = E\varphi\psi; \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{H}(S).$$

Neka je $E\varphi = 0$, $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ i $\mathcal{H}^{(1)}(S)$ linearno zatvorenje svih slučajnih promjenljivih $\xi(t)$, $t \in S$.

Uslovno očekivanje

$$\hat{\xi}(t) = E(\xi(t)/\mathcal{F}(S)), S \subset T, \xi(t) \in \mathcal{H}^{(1)}(T),$$

je projekcija slučajne promjenljive $\xi(t)$ na prostor $\mathcal{H}^{(1)}(S)$.

## 2.1.1. Polinomi Gausovih slučajnih promjenljivih

Neka je $\{\xi(t), t \in T\}$ proizvoljna familija Gausovih promjenljivih na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Za $S \subset T$ je

$$\mathcal{H}(S) = L^2(\Omega, \mathcal{F}(S), P).$$

Označimo sa $\mathcal{H}^n(S)$ linearno zatvorenje svih polinoma stepena ne većeg od n promjenljivih $\xi(t), t \in S$. Svaki od tih polinoma je linearna kombinacija slučajnih promjenljivih

$$\eta = \xi(t_1)\xi(t_2) \ldots \xi(t_k), \quad k \leq n, \ t_1, t_2, \ldots, t_k \in S.$$

Neka je $P(dx)$ Gausova mjera u n-dimenzionalnom prostoru $R^n$ vektora $X = (X_1, \ldots, X_n)$ i $\mathcal{H}$ - Hilbertov prostor svih realnih, kvadratno integrabilnih funkcija $\varphi = \varphi(X)$, $X \in R^n$ sa skalarnim proizvodom

$$(\varphi, \psi) = \int_{R^n} \varphi(x)\psi(x)P(dx).$$

Skup svih polinoma $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ od promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$

je svuda gust u $\mathcal{H}$ .

Svaki polinom $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ stepena p, ortogonalan na sve polinome stepena q, $q < p$, nazivamo polinomom Ermita.

Neka je $\{\xi(t), t \in T\}$ realan Gausov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $E\,\xi(t) = 0, t \in T$, $B(t,s) = E\,\xi(t)\,\xi(s)$, $s,t \in T$, $\mathcal{F}(T)$ $\sigma$-algebra generisana sa $\xi(t), t \in T$.

$\mathcal{H}(T) = L^2(\Omega, \mathcal{F}(T), P)$ je Hilbertov prostor funkcija na $\Omega$ , mjerljivih u odnosu na $\mathcal{F}(T)$ sa $E\phi^2 < \infty$ , $E\phi = 0$, $\phi \in \mathcal{H}(T)$.

Eksplicitni oblik [4] Ermitskog polinoma stepena n, promjenljivih $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ , je

$$H_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n - \sum B_{i_1 j_1} \alpha_{i_1 j_1} (\xi_1, \dots, \xi_n) +$$

$$+ \sum B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \alpha_{i_1 j_1 i_2 j_2} (\xi_1, \dots, \xi_n) + \dots +$$

$$+ (-1)^k \sum B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \cdots B_{i_k j_k} \alpha_{i_1 j_1 i_2 j_2 \cdots i_k j_k} (\xi_1, \dots, \xi_n) +$$

$$+ (-1)^{[\frac{n}{2}]} \prod B_{ij} \; ,$$

gdje je

$$\xi_i = \xi(t_i), \quad B_{i_v j_v} = B(t_{i_v}, t_{j_v}), \; i_v, j_v \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Za $i_v < j_v$ ,

$$\alpha_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_k j_k} (\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i, \; i \neq i_v, \; i \neq j_v \; ,$$

$$v = 1, 2, \dots, k \; ; \quad k = 1, 2, \dots, [\tfrac{n}{2}] \; .$$

U [4] i [15] su pokazane osobine Ermitskih polinoma

1. Broj Ermitskih polinoma stepena n, od k+1 promjenljive je $\binom{n+k}{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

2. Ako su $\xi(t), t \in T$ nezavisne slučajne promjenljive, tada

$$H_n(\xi_1,\dots,\xi_n) = H_{n_1}(\xi_1)H_{n_2}(\xi_2),\dots,H_{n_k}(\xi_k),$$

$k \leq n$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. $H_{n_i}(\xi_i)$, $i = 1,2,\dots,k$

su Ermitski polinomi jedne promjenljive,

3. $EH_n(\xi_1,\dots,\xi_n) = 0$

4. Neka je $S \subset T$. $E^S \xi(t) = E(\xi(t)/\mathcal{F}(S)), t \in T$, $\mathcal{F}(S)$ je $\sigma$-algebra generisana sa $\xi(t), t \in S$.

$E^S H_n(\xi_1,\dots,\xi_m) = H_n(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_n)$, $\hat{\xi}_i = E(\xi(t_i)/\mathcal{F}(S))$,

$i = 1,2,\dots,n$.

Neka je $\{\xi(t), t \in T\}$ realan Gausov proces i $S \subset T$. Označimo sa $\mathcal{H}_p(S)$ skup svih Ermitskih polinoma

$$\eta = \varphi(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n))$$

stepena n u prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}(S), P)$. Kako polinomi obrazuju potpun sistem u prostom $L^2(R_n, \mathcal{B}(R_n), P)$, onda se Hilbertov prostor $\mathcal{H}(S)$ može predstaviti u obliku ortogonalnih suma podprostora $\mathcal{H}_p(S)$, $p = 1,2,\dots$

$$\mathcal{H}(S) = \sum_{p=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_p(S) .$$

Neka je $\mathcal{H}^n(S)$ linearno zatvorenje svih polinoma stepena manjeg, ili jednakog n, promjenljivih $\xi(t), t \in S$, tada je

$$\mathcal{H}^n(S) = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}_p(S)$$

## 2.2. Nelinearna vremenska analiza stacionarnih Gausovih procesa

Neka je $\{\xi(t), t > 0\}$ Gausov proces sa Kramerovom reprezentacijom

$$\xi(t) = \int_0^t g(t,u)d\eta(u), \quad t \geq 0$$

i inovacionim procesom $\{\eta(u), u \geq 0\}$ i

$$\|\eta(t)\|^2 = E\eta^2(t) = F(t) = \int_0^t f(u)du, \quad f(u) \geq 0, \text{ g.s.}$$

Neka je $\mathcal{H}_n(\mathcal{H}_n(t))$ Hilbertov prostor nad linearnom zatvorenošću svih polinoma stepena ne većeg od n, $n \geq 2$, od slučajnih promjenljivih $\{\xi(u), u > 0\}$ $(\{\xi(u), u \leq t\})$.

Uslovno očekivanje $\{E_t, t \geq 0\}$, kao operator u $\mathcal{H}_n$, je projekcija na $\mathcal{H}_n(t)$ pa je $\{E_t, t \geq 0\}$ razlaganje jedinice u $\mathcal{H}_n$.

Nelinearna vremenska analiza je odredjivanje spektralnog tipa $\{E_t, t \geq 0\}$ u $\mathcal{H}_n$.

<u>Teorema 1.</u> [5] Spektralni tip $\{E_t, t \geq 0\}$ u $\mathcal{H}_n$ je

$$dF \geq dF \geq \ldots$$

U dokazu Teoreme efektivno se konstruiše inovacioni proces, tj. ortogonalni martingali $\{\eta_k(t), t \geq 0\}$ takvi da

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\eta_k; t), \quad t \geq 0,$$

gdje je $\mathcal{H}^{(1)}(\eta_k; t)$ linearna zatvorenost od $\{\eta_k(t), 0 \leq u \leq t\}$ i $\|\eta_k(t)\|^2 = F(t), t \geq 0$.

Ako vrijeme t prolazi beskonačnim intervalom $(-\infty, \infty)$ i ako je $F(-\infty) = -\infty$, onda se konstrukcija izložena u [5] ne može direktno provesti. Može se postupiti tako da se mjera dF zamijeni ekvivalentnom (po apsolutnoj neprekidnosti) mjerom $dF^*$ za koju je $F^*(-\infty)$ konačno (na primer 0).

Ako je

$$\frac{dF^*(t)}{dF(t)} = \varphi(t), \quad \varphi(t) > 0$$

skoro svuda u odnosu na $dF$, onda je

$$d\eta^*(t) = \sqrt{\varphi(t)}\, d\eta(t)$$

i čisto kanonička reprezentacija procesa $\{\xi(t), t > -\infty\}$ je

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} g^*(t,u)\, d\eta^*(u), \quad g^*(t,u) = g(t,u)\sqrt{\varphi(u)} \; .$$

Posmatrajmo stacionarni Gausov proces $\{\xi(t), t > -\infty\}$ sa čisto kanoničkom Hanner-Karhunen reprezentacijom

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, d\eta(u), \ldots \qquad (1)$$

i

$$\| d\eta(t) \|^2 = dt.$$

Prirodno je očekivati da konstrukcija inovacionog procesa $\{\eta_n(t), t > -\infty, \; n=1,2,\ldots\}$ u $\mathcal{H}_n$, polaznog oblika (1), je jednostavnija od konstrukcije u [5] s obzirom na invarijantnost mjere $\| d\eta(t)\|^2 = dt$ u odnosu na translaciju.

Ovde se daje jedna takva konstrukcija.

Neka je $\mathcal{H}^{(p)}(\xi)$ $(\mathcal{H}^{(p)}(\xi;t))$ linearna zatvorenost Ermitskih polinoma

$$\{H_p(\xi(u_1),\ldots,\xi(u_p))\} \quad (\{ H_p(\xi(u_1),\ldots,\xi(u_p)), \; u_k \leq t \; , \; k = 1,2,\ldots,p \}).$$

Pošto $\mathcal{H}_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}^{(p)}(\xi;t)$ i $\mathcal{H}^{(p)}(\xi)$

svodi $\{E_t\}$, dovoljno je konstruisati inovacioni proces

$\{\eta_n(t), t > -\infty\}$, $n = 1,2,\dots$ u $\mathcal{H}^{(p)}(\xi)$.

Radi jednostavnosti, posmatraćemo slučaj $p=3$.

U skladu sa [9], prostor $\mathcal{H}^{(3)}(\xi)$ poklapa se sa stohastičkim integralom

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u_1,u_2,u_3)d\eta(u_1)d\eta(u_2)d\eta(u_3),$$

$$\| I(\varphi) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(u_1,u_2,u_3)du_1du_2du_3 < \infty .$$

Posmatraćemo $I(\varphi)$ nad intervalom

$$\Delta = \{ (u_1,u_2,u_3) : -\infty < u_1 < u_2 < u_3 \} ,$$

jer je Ermitov polinom simetrična funkcija.

Neka je

$$S_{n,j_1,j_2}(0) = \left\{(u_1,u_2,0): \frac{j_1}{2^n} \le u_1 \le \frac{j_1+1}{2^n} ; \frac{j_2}{2^n} \le u_2 \le \frac{j_2+1}{2^n}\right\} \subset \Delta ,$$

$n = 0,1,2,\dots,$ $j_1, j_2 = \dots -1,0,$ a

$$S_{n,j_1,j_2}(x) = \left\{(u_1+x,u_2+x,x):(u_1,u_2,0) \in S_{n,j_1,j_2}(0)\right\}$$

Razbijmo $S_{0,j_1,j_2}(0)$ na

$$S'_{0,j_1,j_2}(0) = \left\{(u_1,u_2,0): \frac{j_1}{2^0} \le u_1 \le \frac{2j_1+1}{2^0} ; \frac{j_2}{2^0} \le u_2 \le \frac{j_2+1}{2^0}\right\}$$

$$S''_{0,j_1,j_2}(0) = \left\{(u_1,u_2,0): \frac{2j_1+1}{2^0} \le u_1 \le \frac{j_1+1}{2^0}; \frac{j_2}{2^0} \le u_2 \le \frac{j_2+1}{2^0}\right\}$$

jednakih mjera:

$$m(S'(0)) = \iint_{S'(0)} du_1du_2 = m(S''(0)) = \frac{1}{2}\, m(S(0)) = \frac{1}{2} .$$

Takodje, razbijmo $S'(0)$ na $S'_1(0)$ i $S'_2(0)$:

$$S'_1(0) = \left\{ (u_1,u_2,0):\ \frac{j_1}{2^0} \le u_1 \le \frac{2j_1+1}{2};\ \frac{j_2}{2^0} \le u_2 \le \frac{2j_2+1}{2} \right\},$$

$$S'_2(0) = \left\{ (u_1,u_2,0):\ \frac{j_1}{2^0} \le u_1 \le \frac{2j_1+1}{2};\ \frac{2j_2+1}{2} \le u_2 \le \frac{j_2+1}{2^0} \right\} \quad \text{i}$$

$$m(S'_1(0)) = m(S'_2(0)) = \frac{1}{2}\, m(S'(0)).$$

Istim postupkom $S''(0)$ razbijamo na $S''_1(0)$ i $S''_2(0)$:

$$S''_1(0) = \left\{ (u_1,u_2,0):\ \frac{2j_1+1}{2} \le u_1 \le \frac{j_1+1}{2^0};\ \frac{j_2}{2^0} \le u_2 \le \frac{2j_2+1}{2} \right\},$$

$$S''_2(0) = \left\{ (u_1,u_2,0):\ \frac{2j_1+1}{2} \le u_1 \le \frac{j_1+1}{2^0};\ \frac{2j_2+1}{2} \le u_2 \le \frac{j_2+1}{2} \right\} \quad \text{i}$$

$$m(S''_1(0)) = m(S''_2(0)) = \frac{1}{2}\, m(S''(0)) .$$

Definišimo procese sa ortogonalnim priraštajima

$$\left\{ \eta^{(k)}_{0,j_1,j_2}(t),\ t > -\infty \right., \quad k = 1,2,3,4$$

tako da je

$$\eta^{(1)}_{0,j_1,j_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\Big( \iint_{S^{(u_3)}_{0,j_1,j_2}} d\eta(u_1)\,d\eta(u_2)\Big)\,d\eta(u_3)$$

$$\eta^{(2)}_{0,j_1,j_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\left\{ \Big( \iint_{S'(u_3)} - \iint_{S''(u_3)} \Big) d\eta(u_1)\,d\eta(u_2) \right\} d\eta(u_3)$$

$$\eta^{(3)}_{0,j_1,j_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\left\{ \Big( \iint_{S'_1(u_3)} - \iint_{S'_2(u_3)} \Big)\ d\eta(u_1)\,d\eta(u_2) \right\} d\eta(u_3)$$

$$\eta^{(4)}_{0,j_1,j_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\Big\{\Big(\iint_{S_1''(u_3)} - \iint_{S_2''(u_3)}\Big)d\eta(u_1)d\eta(u_2)\Big\}d\eta(u_3) .$$

(Funkcija $h(\cdot) > 0$ obezbjedjuje konačnost od $\|\eta^{(k)}_{0,j_1,j_2}(t)\|^2$ ).

Ovi procesi su uzajamno ortogonalni po samoj konstrukciji. Nastavimo tu konstrukciju u svakom od četiri kvadrata u kvadratu $S_{0,j_1,j_2}(0)$ i dobijamo procese

$$\eta^{(1)}_{1,j_1',j_2'}(t) , \quad \eta^{(2)}_{1,j_1'',j_2''}(t), \ldots$$

U prebrojivom skupu procesa sa ortogonalnim priraštajima

$$\{\eta^{(k)}_{n,j_1,j_2}(t), t > -\infty, \ k=1,2,3,4; \ n=0,1,2,\ldots,j_1,j_2=\ldots,-1,0.$$

promijenimo indekse: $\{\eta_n(t), t > -\infty\}$, $n=1,2,\ldots$.

Procesi $\{\eta_n(t), t > -\infty, n=1,2,\ldots\}$ su uzajamno ortogonalni po konstrukciji. Pokazaćemo da su oni inovacioni procesi u $\mathcal{H}^{(3)}(\xi)$.

Uočimo kvadrat $S_{n,j_1,j_2}(0)$ i proces

$$\zeta_{S_{n,j_1,j_2}(0)}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\Big(\iint_{S_{n,j_1,j_2}(u_3)} d\eta(u_1)d\eta(u_2)\Big)d\eta(u_3), t > -\infty$$

Nije teško pokazati da su $\zeta_{S_{n,j_1,j_2}}(t)$ konačne linearne kombinacije od $\eta_n(t)$, $n=1,2,\ldots$

Na primjer: Iz $S_{n,j_1,j_2}(0) = S_1'(0)$ je

$$\zeta_{S_1'(0)}(t) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\big(\eta^{(1)}_{0,j_1,j_2}(t) + \eta^{(2)}_{0,j_1,j_2}(t)\big) + \eta^{(3)}_{0,j_1,j_2}(t)\Big].$$

Tako, ako je $T(0)$ mjerljiv podskup od sečenja $\Delta$ u $u_3=0$, onda, na osnovu standardnog graničnog postupka, zaključujemo da

$$\zeta_T(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\Big(\iint_{T(u_3)} d\eta(u_1)d\eta(u_2)\Big)d\eta(u_3) \text{ je}$$

granica od $\sum_{k=1}^{n} a_{n_k}\eta_k(t)$, kad $n \to \infty$ , ili

$$\zeta_T(t) \in \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n;t), t > -\infty .$$

Neka je $D$ mjerljiv, ograničen podskup od $\Delta$ , neka je

$s = \inf\{u_3 : (u_1,u_2,u_3) \in D\}$ ,

$t = \sup\{u_3 : (u_1,u_2,u_3) \in D\}$ i neka

$s = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t$ jepodjela od $[s,t]$.

Označimo sa $T_j$ sječenje od $D$ u $u_3=s_j$. Uočimo proces sa ortogonalnim priraštajima $\{\zeta_j(t), t > -\infty\}$ :

$$\zeta_j(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u_3)\Big(\iint_{T_j(u_3)} d\eta(u_1)d\eta(u_2)\Big)d\eta(u_3)$$

Imamo

$$\zeta_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left[\zeta_j(s_j+1) - \zeta_j(s_j)\right] \to \iiint_D h(u_3)d\eta(u_1)d\eta(u_2)d\eta(u_3)$$

kad $\max\limits_{0\le j\le k-1}(s_{j+1} - s_j) \to 0$, ili

$$\iiint_D h(u_3)d\eta(u_1)d\eta(u_2)d\eta(u_3) \in \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n;t), t > -\infty .$$

Konačno, zaključujemo da

$$\iiint_D \varphi(u_1,u_2,u_3)d\eta(u_1)d\eta(u_2)d\eta(u_3) \in \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n;t), \text{ ili}$$

$$\mathcal{H}^{(3)}(\xi;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n;t), \quad t > -\infty .$$

Mjera

$$\| d\eta_n(t)\|^2 = h^2(t)\Big[ \iint_{S^{(t)}_{\ell,j_1,j_2}} du_1du_2 + \iint_{S^{(t)}_{\ell,j_1',j_2'}} du_1du_2 \Big] dt =$$

$$= h^2(t)m(S^{(t)}_{j+1,j_1'',j_2''})dt = \frac{1}{2(\ell+1)} h^2(t)dt$$
$$2$$

je ekvivalentna sa mjerom dt.

## 2.2.1. Nelinearna vremenska analiza stacionarnog Markovskog procesa od konačnog trenutka to

Neka je $\{\xi(t), t > to\}$ stacionarni Markovski proces sa Kramerovom reprezentacijom

$$\xi(t) = \int_{to}^{t} g(t-u)d\eta(u) + \sum_{k=2}^{N} g_k(t,to)\eta_k$$

i spektralnim tipom

$$dF_1 > dF_2 \sim dF_3 \sim \dots \sim dF_N \quad .$$

Da bi izbjegli skok od $dF_1$ u tački to, posmatrajmo proces $\{\xi(t), t > to\}$ u obliku

$$\xi(t) = \int_{to}^{t} g(t-u)d(\eta(t)-\eta(to)) + \sum_{k=1}^{N} g_k(t,to)\eta_k =$$

$$= \int_{to}^{t} g(t-u)d\eta_c(t) + \sum_{k=1}^{N} g_k(t,to)\eta_k = \xi_1(t) + \sum_{k=1}^{N} g_k(t,to)\eta_k,$$

gdje je

$$\eta(t) - \eta(to) = \eta_c(t);\ \xi_1(t) = \int_{to}^{t} g(t-u)d\eta_c(t) .$$

Označimo sa $\mathcal{H}_n(\mathcal{H}_n(t))$ Hilbertov prostor nad linearnom zatvorenošću svih polinoma stepena ne većeg od n, $n \geqslant 2$ slučajnih promjenljivih $\{\xi(u), u \geqslant to\}$ $(\{\xi(u_k),\ 0 \leq to < u_k \leq t\})$

$$\mathcal{H}_n(t) = \mathcal{L}\{P_n(\xi(u_1),\dots,\xi(u_k)),\ u_k \leq t\} \quad \text{i}$$

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}_t^{(p)} .$$

Operator $\{E_t\}$ svodi $\mathcal{H}_n$ $(E_t\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(t))$ [15] .

Nelinearna vremenska analiza procesa $\{\xi(t), t > to\}$ sastoji se u odredjivanju spektralnog tipa $\{E_t, t > to\}$ u $\mathcal{H}_n$.

Radi jednostavnosti posmatraćemo slučaj za p=2 uz pretpostavku da su sve slučajne promjenljive centrirane u očekivanju.

Za $to < u,\ v \leq t$ ,

$$\xi(u)\xi(v) = \xi_1(u)\xi_1(v) + \left(\sum_{k=1}^{N} g_k(u)\eta_k\right)\left(\sum_{j=1}^{N} g_k(v)\eta_j\right) +$$

$$+ \left[\xi_1(u)\left(\sum g_k(v)\eta_k + \xi_1(v)\right)\left(\sum_{k=1}^{N} g_k(u)\eta_k\right)\right] .$$

Očigledno je

$$\mathcal{H}^{(2)}(\xi) \subset \mathcal{H}_c^{(2)}(\xi_1) \oplus \mathcal{H}_d^{(2)}(\eta_{k,j\geq 1}) \oplus \mathcal{H}_{cd}^{(2)}(\xi_1\ \eta_{k\geq 1})$$

Kako $\eta_i \in \mathcal{H}^{(1)}(\xi)$ povlači $\eta_i\eta_j \in \mathcal{H}^{(2)}(\xi)$, onda je

$$\mathcal{H}^2(\xi;t) = \mathcal{H}_c^{(2)}(\xi_1;t) \oplus \mathcal{H}_d^{(2)}(\eta_{k,j\geq 1};t) \oplus$$

$$\oplus\ \mathcal{H}_{cd}^{(2)}(\xi_1 \eta_{k\geq 1};t) .$$

Svaki od prostora $\mathcal{H}_c^{(2)}$, $\mathcal{H}_d^{(2)}$, $\mathcal{H}_{cd}^{(2)}$ svodi operator $\{E_t\}$.

Inovacioni proces u $\mathcal{H}^2(\xi_1;t)$ je

$$\eta_1(t) = \begin{cases} \eta(t)-\eta(to), & t > to \\ 0 & , t \leq to \end{cases}$$

Spektralni tip $dF_c$ je odredjen funkcijom raspodjele

$$F_c(t) = \|\eta_1(t)\|^2 = \begin{cases} t-to, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases} ,$$

te je $dF_c \sim dt$, $t > to$.

Spektralni tip $\{E_t, t > to\}$ u $\mathcal{H}_c^{(2)}(\xi_1)$ je, prema [6],

$$dF_c \sim dF_c \sim \dots$$

Da bi odredili spektralni tip u $\mathcal{H}_d^{(2)}(\eta;t)$, formirajmo uzajamno ortogonalne martingale

$$\eta_k^{(d)}(t) = \begin{cases} \eta_i \eta_j, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases} , \quad i \geq j, \quad k=1,2,\dots,\binom{N-1}{2}$$

tako da je, na primjer,

$$\eta_1^{(d)}(t) = \begin{cases} \eta_1 \eta_1, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}$$

$$\eta_2^{(d)}(t) = \begin{cases} \eta_2 \eta_1, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}$$

i tako dalje.

$$\mathcal{H}_d^{(2)}(\eta;t) = \mathcal{L}(\eta_i\ \eta_j,\ 1 \leq i,j \leq N),\ t > to \quad i$$

$$\mathcal{H}_d^{(2)}(\eta;t) = \sum_{k=1}^{\binom{N-1}{2}} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\eta_k;t), t > to$$

Spektralni tip martingala $\left\{\eta_k^{(d)}(t)\right\}, k = 1,2,\ldots,M$ ($M = \binom{N-1}{2}$) je

$$F_k^{(d)}(t) = \|\eta_k^{(d)}(t)\|^2 = \begin{cases} \|\eta_i\ \eta_j\|^2, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases}$$

Spektralni tip $\{E_t, t > to\}$ u $\mathcal{H}_d^{(2)}$ je

$$\underbrace{dF_1^{(d)} \sim dF_1^{(d)} \sim \ldots \sim dF_1^{(d)}}_{M \text{ puta}} .$$

Za odredjivanje spektralnog tipa $\{E_t, t \geq to\}$ u $\mathcal{H}_{cd}^{(2)}$ konstruisaćemo uzajamno ortogonalne martingale

$$\eta_k^{(cd)}(t), \quad k=1,2,\ldots,N \text{ , takve da je}$$

$$\eta_k^{(cd)}(t) = \begin{cases} (\eta(t)-\eta(to))\eta_k, & t > to \\ 0, & t \leq to . \end{cases}$$

Neposredno slijedi da je

$$\mathcal{H}_{cd}^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{N} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\eta_k^{(cd)};t), \ t > to.$$

Funkcija raspodjele za $\eta_k^{(cd)}(t)$ je

$$F_k^{(cd)}(t) = \|\eta_k^{(cd)}(t)\|^2 = \begin{cases} (t-to)\|\eta_k\|^2, & t > to \\ 0, & t \leq to \end{cases},$$

$k=1,2,\ldots,N.$

Spektralni tip $\{E_t, t > to\}$ u $\mathcal{H}_{cd}^{(2)}$ je

$$\underbrace{dF_1^{(cd)} \sim dF_1^{(cd)} \sim \dots \sim dF_1^{(cd)}}_{N \text{ puta}}$$

Najzad, uredjujući spektralne tipove prema relaciji $>$ dobijamo da je spektralni tip $\{E_t\}$ u $\mathcal{H}^{(2)}(\xi)$

$$\underbrace{dF_c + dF_d \sim \dots \sim dF_c + dF_d}_{M \text{ puta}} > dF_c \sim dF_c \sim \dots$$

GLAVA III

# NELINEARNA VREMENSKA ANALIZA UOPŠTENIH GAUSOVIH PROCESA

## 3.1. Nelinearna vremenska analiza M-dimenzionalnog Gausovog procesa

Za obične Gausove procese $\{\xi(t), t \geq 0\}$ nelinearna vremenska analiza je definisana u [5] i [6].

Neka je $\mathcal{H}_n(\mathcal{H}_n(t))$ linearna zatvorenost svih polinoma stepena ne većeg od n slučajnih promjenljivih $\{\xi(u), u \geq 0\}$ ($\{\xi(u), 0 < u \leq t\}$) i neka je $E_t$ uslovno očekivanje u odnosu na $\sigma$-algebru nad $\{\xi(u), u \leq t\}$. $\mathcal{H}_n$ svodi $\{E_t, t \geq 0\}$ ($E_t \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(t)$).

Nelinearna vremenska analiza procesa $\{\xi(t), t \geq 0\}$ je odredjivanje spektralnog tipa $\{E_t, t > 0\}$ u $\mathcal{H}_n$, $n \geq 2$ [6].

Označimo sa $\mathcal{H}^{(p)}$ ($\mathcal{H}_t^{(p)}$) linearnu zatvorenost Ermitovih polinoma stepena p, $p \leq n$ od slučajnih promjenljivih $\{\xi(u), u \geq 0\}$ ($\xi(u), 0 \leq u \leq t\}$).
Prostor $\mathcal{H}^{(p)}$ svodi $\{E_t, t \geq 0\}$ i

$$\mathcal{H}_n = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}^{(p)} \quad \left( \mathcal{H}_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}^{(p)}(t) \right).$$

Prema tome, nelinearna vremenska analiza se sastoji u odredjivanju spektralnog tipa $\{E_t, t \geq 0\}$ u $\mathcal{H}^{(p)}$ [5].

Posmatrajmo M-dimenzionalni Gausov proces $\vec{\xi}(t) = \left\{ \xi_n(t) \right\}_{n=1}^{N}$ sa Kramerovom reprezentacijom

$$\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{N} \int_0^t g_{nk}(t,u)d\eta_k(u)$$

i inovacionim procesom $\left\{\eta_n(t)\right\}_{n=1}^{N}$.

Neka je $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi})(\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi};t))$ linearna zatvorenost slučajnih promjenljivih $\{\xi_n(u), u \geqslant 0,\ n=1,2,\dots,N$ $(\{\xi_n(u), 0 \leqslant u \leqslant t\},$ $n=1,2,\dots,N)$. $\{E_t, t \geqslant 0\}$ je operator projektovanja iz $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi})$ u $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi};t)$. $\{E_t\}$ svodi $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi})$.

Odredjivanje spektralnog tipa $\{E_t, t \geqslant 0\}$ u $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\xi})$ je linearna vremenska analiza procesa $\vec{\xi}(t)$.

Pošto nijesu definisani polinomi od $\vec{\xi}(t)$, nelinearnu vremensku analizu procesa $\vec{\xi}(t)$ ćemo definisati na sledeći način

## 3.1°. DEFINICIJA

Nelinearna vremenska analiza procesa (stepena $n \geqslant 2$) $\vec{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^{N}$, je odredjivanje spektralnog tipa $\{E_t, t \geqslant 0\}$ u $\mathcal{H}_n(\vec{\xi})$ gdje je $\mathcal{H}_n(\vec{\xi})$ $(\mathcal{H}_n(\vec{\xi};t)$ linearna zatvorenost polinoma stepena ne većeg od n od inovacionog procesa $\{\eta_1(u), \eta_2(u), \dots, \eta_N(u),\ u \geqslant 0\}$ $(\{\eta_1(u), \dots, \eta_N(u),$ $0 \leqslant u \leqslant t\})$.

Koristeći definiciju, odredićemo spektralni tip $\{E_t, t \geqslant 0\}$ u $\mathcal{H}_n(\vec{\xi})$.

Neka je $\mathcal{H}^{(p)}(q) = \mathcal{L}\{H_p(\eta_{q_1}(t_1), \dots, \eta_{q_p}(t_p)),$

$t_1, \dots, t_p \geqslant 0\}$

$$\mathcal{H}^{(p)}(q;t) = \mathcal{L}\{H_p(\eta_{q_1}(t_1),\ldots,\eta_{q_p}(t_p)), 0 \le t_1,\ldots,t_p \le t\},$$

gdje su $q = (q_1, q_2, \ldots, q_p) \in Q$ linearne kombinacije sa ponavljanjem dužine p od elemenata $\{1,\ldots,N\}$, a Q prebrojiv skup svih kombinacija q.

Na ovaj način

$$\mathcal{H}_n(\vec{\xi}) = \sum_{q \in Q} \oplus \mathcal{H}^{(p)}(q) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{H}_n(\vec{\xi};t) = \sum_{q \in Q} \mathcal{H}^{(p)}(q;t) \quad .$$

Operator $\{E_t, t \geq 0\}$ svodi prostor $\mathcal{H}^{(p)}(q)$ $(E_t \mathcal{H}^{(p)}(q) = \mathcal{H}^{(p)}(q;t))$ pa je dovoljno odrediti spektralni tip $\{E_t\}$ u $\mathcal{H}^{(p)}(q)$, $p \geq 2$. Neka je $F_1(t) = E\,\|\eta_1(t)\|^2, t > 0$, neprekidna funkcija.

<u>Teorema</u> [6] Spektralni tip $\{E_t, t \geq 0\}$ u $\mathcal{H}_n$ je

$$dF_1 \sim dF_1 \sim \ldots$$

tj. $dF_1$ je uniformni maksimalni spektralni tip beskonačnog multipliciteta u $\mathcal{H}_n$, $n \geq 2$.

Da bi odredili spektralni tip $\{E_t\}$ u $\mathcal{H}^{(p)}(q)$, $p \geq 2$, potrebno je konstruisati uzajamno ortogonalne martingale $\{\zeta_n(t), t \geq 0\}$, n=1,2,... u $\mathcal{H}^{(p)}(q)$, tako da je

$$\mathcal{H}^{(p)}(q;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\zeta_n;t), \; t \geq 0$$

Hilbertov prostor $\mathcal{H}^{(p)}(q)$ poklapa sa skupom $\{I_p\}$ - Itovih višestrukih stohastičkih integrala [15] ,

$$I_p = \int_0^{\infty}\int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{p-1}} \varphi(t_1,\ldots,t_p)\, d\eta_{q_1}(t_1)\ldots d\eta_{q_p}(t_p),$$

$$\| I_p \|^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{p-1}} \varphi^2(t_1,\dots,t_p) dF_{q_1}(t_1)\dots dF_{q_p}(t_p).$$

Dalji postupak konstrukcije inovacionog procesa $\{\zeta_n(t), t \geq 0\}$, $n = 1,2,\dots$ se svodi na konstrukciju iz dokaza teoreme [6] .

### 3.1.1. Nelinearna vremenska analiza stacionarnih M-dimenzionih Gausovih procesa

Neka je $\xi(t) = \{\xi_m(t)\}_{m=1}^{M}, -\infty < t < \infty$, neprekidan, nedeterministički M-dimenzionalni stacionarni Gausov proces sa Hanerovom reprezentacijom

$$\xi_m(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} g_{mn}(t-u) d\eta_n(u), m=1,2,\dots,M, \quad \text{i}$$

$$\| d\eta_n(t) \|^2 = dt, \; n=1,2,\dots,N, \; t > -\infty \; .$$

Označimo sa $\mathcal{H}_n$ $(\mathcal{H}_n(t))$ linearnu zatvorenost svih polinoma stepena ne većeg od n, $n \geq 2$, od inovacionog procesa $\{\eta_n(u), u \geq 0, n=1,2,\dots,N\}$ $(\{\eta_n(u), 0 \leq u \leq t, n=1,2,\dots,N\})$ i

$$\mathcal{H}_n = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}^{(p)}, \; (\mathcal{H}_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \oplus \mathcal{H}_t^{(p)}) \; ,$$

gdje je $\mathcal{H}^{(p)}$ $(\mathcal{H}_t^{(p)})$ linearna zatvorenost Ermitovih polinoma stepena p, $p \leq n$, tj.

$$\mathcal{H}^{(p)} = \mathcal{L}\{ H_p(\eta_{q_1}(t_1),\dots,\eta_{q_p}(t_p)), \; t_1,t_2,\dots,t_p > -\infty \}$$

$$(\mathcal{H}_t^{(p)} = \mathcal{L}\{H_p(\eta_{q_1}(t_1),\dots,\eta_{q_p}(t_p)), t_1,\dots,t_p \leq t \} \;) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{H}^{(p)} = \sum_{q\in Q} \oplus \mathcal{H}^{(p)}(q), \quad (\mathcal{H}_t^{(p)} = \sum_{q\in Q} \oplus \mathcal{H}^{(p)}(q;t)) ,$$

pri čemu je $q = (q_1, q_2, \ldots, q_p)$ kombinacija sa ponavljanjem dužine p od elemenata $\{1,2,\ldots,N\}$, a Q prebrojiv skup svih kombinacija q.

Operator $\{E_t\}$ svodi prostor $\mathcal{H}^{(p)}(q)$ $(E_t \mathcal{H}^{(p)}(q) = \mathcal{H}^{(p)}(q;t))$ pa ćemo odrediti inovacioni proces u $\mathcal{H}^{(p)}(q)$.

Radi jednostavnije konstrukcije, posmatrajmo slučaj kada je p=3.

Prostor $\mathcal{H}^{(3)}(q)$ se poklapa sa skupom $\{I_3\}$ - Itovih integrala

$$I_3 = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t_1,t_2,t_3)d\eta_{q_2}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)d\eta_{q_3}(t_3) ,$$

$$\| I_3\|^2 = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \varphi^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 < \infty .$$

(Ovdje je integracija nad skupom

$$\mathop{\times}_{i=1}^{3}(-\infty,\infty)\setminus \bigcup_{i\neq j} \{t_i=t_j\} ,$$ odakle je EI = 0 ) .

U opštem slučaju, posmatrajmo $I_p$ nad oblašću

$$\Delta = \{ (t_1,t_2,\ldots,t_p); t_1,t_2,\ldots,t_p > -\infty \}$$

koju ćemo podijeliti na p! podoblasti.

$$\Delta^{(j)} = \{ (t_1,t_2,\ldots,t_p): -\infty < t_{j_1} < t_{j_2} < \ldots < t_{j_p} ;\ j=1,2,\ldots,p! \} ,$$

gdje je $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$ j-ta permutacija od $(1,2,\ldots,p)$.

Ne umanjujući opštost, uzmimo $(\Delta^{(1)} = \Delta_1)$ da je

$$\Delta_1 = \{ (t_1,t_2,t_3) : -\infty < t_1 < t_2 < t_3 \} .$$

Neka je

$$S_{n,i_1,i_2}(0) = \left\{ (t_1,t_2,0):\ \frac{i_1}{2^n} \le t_1 \le \frac{i_1+1}{2^n};\ \frac{i_2}{2^n} \le t_2 \le \frac{i_2+1}{2^n} \right\} \subset \triangle_1 ,$$

$n=0,1,2,\ldots,\quad i_1,i_2 = \ldots -1,0.$

Stavimo

$$S_{n,i_1,i_2}(x) = \left\{ (t_1+x,t_2+x,x):(t_1,t_2,0) \in S_{n,i_1,i_2}(0) \right\}$$

Uočimo proces $\left\{ \eta_{0,i_1,i_2}(t), t > -\infty \right\}$ sa ortogonalnim priraštajima

$$\eta_{0,i_1,i_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big( \iint\limits_{S_{0,i_1,i_2}(t_3)} d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)\Big)d\eta_{q_3}(t_3) \quad ,$$

gdje funkcija $h(\bullet)$ obezbjedjuje konačnost od

$$\| \eta_{0,i_1,i_2}(t) \|^2 = \int_{-\infty}^{t} h^2(t_3)\Big( \iint\limits_{S_{0,i_1,i_2}(t_3)} dt_1dt_2\Big)dt_3, \ \forall\, t.$$

Podijelimo $S_{0,i_1,i_2}(0)$ na:

$$S'_{0,i_1,i_2}(0) = \left\{ (t_1,t_2,0):\frac{i_1}{2^0} \le t_1 \le \frac{2i_1+1}{2^0};\ \frac{i_2}{2^0} \le t_2 \le \frac{i_2+1}{2^0} \right\} \quad \text{i}$$

$$S''_{0,i_1,i_2}(0) = \left\{ (t_1,t_2,0):\frac{2i_1+1}{2^0} \le t_1 \le \frac{i_1+1}{2^0};\ \frac{i_2}{2^0} \le t_2 \le \frac{i_2+1}{2^0} \right\}$$

jednakih mjera

$$m(S'(0)) = \iint\limits_{S(0)} dt_1dt_2 = m(S''(0)) = \frac{1}{2}\, m(S(0)) = \frac{1}{2} \quad .$$

Podijelimo $S'(0)$ na:

$$S_1'(0) = \left\{ (t_1,t_2,0) \ : \ \frac{i_1}{2^0} \leq t_1 \leq \frac{2i_1+1}{2};\ \frac{i_2}{2^0} \leq t_2 \leq \frac{2i_2+1}{2} \right\} \qquad \text{i}$$

$$S_2'(0) = \left\{ (t_1,t_2,0) \ : \ \frac{i_1}{2^0} \leq t_1 \leq \frac{2i_1+1}{2};\ \frac{2i_2+1}{2} \leq t_2 \leq \frac{i_2+1}{2^0} \right\}$$

jednakih mjera

$$m(S_1'(0)) = m(S_2'(0)) = \frac{1}{2}\, m(S'(0)).$$

Podijelimo $S''(0)$ na:

$$S_1''(0) = \left\{ (t_1,t_2,0) \ : \ \frac{2i_1+1}{2} \leq t_1 \leq \frac{i_1+1}{2^0};\ \frac{i_2}{2^0} \leq t_2 \leq \frac{2i_2+1}{2} \right\} \qquad \text{i}$$

$$S_2''(0) = \left\{ (t_1,t_2,0) \ : \ \frac{2i_1+1}{2} \leq t_1 \leq \frac{i_1+1}{2^0};\ \frac{2i_2+1}{2} \leq t_2 \leq \frac{i_2+1}{2^0} \right\}$$

jednakih mjera

$$m(S_1''(0)) = m(S_2''(0)) = \frac{1}{2}\, m(S''(0)).$$

Definišimo procese $\left\{ \eta^{(k)}_{0,i_1,i_2}(t), t > -\infty \right.$, $k=1,2,3,4$

sa ortogonalnim priraštajima

$$\eta^{(1)}_{0,i_1,i_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big( \iint_{S^{(t_3)}_{0,i_1,i_2}} d\eta_{q_1}(t_1)\, d\eta_{q_2}(t_2)\Big)\, d\eta_{q_3}(t_3),$$

$$\eta^{(2)}_{0,i_1,i_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big[\Big( \iint_{S'(t_3)} - \iint_{S''(t_3)} \Big) d\eta_{q_1}(t_1)\, d\eta_{q_2}(t_2)\Big]\, d\eta_{q_3}(t_3),$$

$$\eta^{(3)}_{0,i_1,i_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big[\Big( \iint_{S_1'(t_3)} - \iint_{S_2'(t_3)} \Big) d\eta_{q_1}(t_1)\, d\eta_{q_2}(t_2)\Big]\, d\eta_{q_3}(t_3),$$

$$\eta^{(4)}_{0,i_1,i_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big[\Big(\iint_{S_1''(t_3)} - \iint_{S_2''(t_3)}\Big)d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)\Big]d\eta_{q_3}(t_3).$$

Procesi $\{\eta^{(k)}_{0,i_1,i_2}(t), t > -\infty\}$, $k=1,2,3,4$ su medjusobno ortogonalni po konstrukciji.

Funkcija $h(\cdot)$ obezbjedjuje konačnost $\|\eta^{(k)}_{0,i_1,i_2}(t)\|^2$.

Nastavljamo tu konstrukciju u svakom od kvadrata u kvadratu $S_{0,i_1,i_2}(0)$ i dobijamo procese

$$\eta^{(1)}_{1,i_1',i_2'}(t), \quad \eta^{(2)}_{1,i_1'',i_2''}(t), \ \ldots$$

U prebrojivom skupu procesa sa ortogonalnim priraštajima $\{\eta^{(k)}_{n,i_1,i_2}(t), t > -\infty\}$, $k=1,2,3,4$; $n=0,1,2,\ldots,i_1,i_2=\ldots-1,0$.

promijenimo indekse:

$$\{\eta_n(t), t > -\infty, \ n=1,2,\ldots\}.$$

Procesi $\{\eta_n(t), t > -\infty, n=1,2,\ldots\}$ su uzajamno ortogonalni po konstrukciji.

Pokazaćemo da su oni inovacioni proces u $\mathcal{H}^{(3)}(q)$.

Uočimo kvadrat $S_{n,i_1,i_2}(0)$ i proces

$$\zeta_{S_{n,i_1,i_2}(0)}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big(\iint_{S_{n,i_1,i_2}(t_3)} d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)\Big)d\eta_{q_3}(t_3) \quad .$$

Nije teško pokazati da $\zeta_{S_{n,i_1,i_2}}(t)$ su konačne linearne kombinacije od nekih $\eta_n(t), t > -\infty$, $n=1,2,\ldots$ .

Na primjer, za $S_{n,i_1,i_2}(0) = S_1'(0)$ je

$$\zeta_{s_1'(0)}(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\eta^{(1)}_{0,i_1,i_2}(t) + \eta^{(2)}_{0,i_1,i_2}(t)) + \eta^{(3)}_{0,i_1,i_2}(t)\right].$$

Ako je $T(0)$ mjerljiv podskup sječenja $\Delta_1$ u $t_3=0$, onda, na osnovu standardnog graničnog postupka, zaključujemo da

$$\zeta_T(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big(\iint_{T(t_3)} d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)\Big)d\eta_{q_3}(t_3)$$

je granica od $\sum_{k=1}^{n} a_{n_k}\eta_k(t)$, kada $n\to\infty$ , ili

$$\zeta_T(t) \in \sum_{n=1}^{\infty} \oplus\, \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n;t), t>-\infty \quad .$$

Neka je $D$ proizvoljan, mjerljiv i ograničen podskup od $\Delta_1$. Neka je

$$s = \inf\{t_3 : (t_1,t_2,t_3)\in D\},$$

$$t = \sup\{t_3 : (t_1,t_2,t_3)\in D\} \text{ i}$$

neka je $s = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t$ podjela od $[s,t]$.

Označimo sa $T_i$ sječenje $D$ u $t_3=s_i$. Uočimo proces sa ortogonalnim priraštajima $\{\zeta_i(t), t>-\infty\}$

$$\zeta_i(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t_3)\Big(\iint_{T_i(t_3)} d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)\Big)d\eta_{q_3}(t_3).$$

Imamo

$$\xi_k = \sum_{i=0}^{k-1}\left[\zeta_i(s_{i+1}) - \zeta_i(s_i)\right] \to \iiint_D h(t_3)d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)d\eta_{q_3}(t_3)$$

kada $\max\limits_{0\le i\le k-1}(s_{i+1}-s_i)\to 0$, ili

$$\iiint_D h(t_3)d\eta_{q_1}(t_1)d\eta_{q_2}(t_2)d\eta_{q_3}(t_3) \in \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n;t), t > -\infty .$$

Za svaki $\Delta^{(j)}$, $j=1,2,\dots,P$; $P = \frac{p!}{q_1!\dots q_N!}$

uzajamno ortogonalni procesi $\{\eta_n^{(j)}(t), t>-\infty, n=1,2,\dots\}$

su

$$\{\eta_1^{(1)}(t)\}, \{\eta_2^{(1)}(t)\}, \{\eta_3^{(1)}(t)\}, \dots$$

$$\{\eta_1^{(2)}(t)\}, \{\eta_2^{(2)}(t)\}, \{\eta_3^{(2)}(t)\}, \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\{\eta_1^{(P)}(t)\}, \{\eta_2^{(P)}(t)\}, \{\eta_3^{(P)}(t)\}, \dots$$

Tako da je

$$\mathcal{H}^{(3)}(q;t) = \sum_{j=1}^{P} \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n^{(j)};t), t>-\infty, \quad \text{tj.}$$

$$\mathcal{H}^{(p)}(q;t) = \sum_{j=1}^{P} \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \eta^{(1)}(\eta_n^{(j)};t), t>-\infty .$$

Ako posmatramo procese $\{\eta_n^{(j,q)}(t), t>-\infty\}$, $q \in Q$, $n=1,2,\dots$, tada je

$$\mathcal{H}_t^p = \sum_{q\in Q} \sum_{j=1}^{P} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(1)}(\eta_n^{(j,q)};t), \ t>-\infty \quad \text{i}$$

$$\|\eta_n^{(j,q)}(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{t} h^2(t_{j_3})\Big(\iint_{T(t_3)} dt_{j_1}\, dt_{j_2}\Big)dt_{j_3} ,$$

Kako je $h^2(u) > 0$ i $\iint_{T(u)} dt_{j_1}\ dt_{j_2} > 0$ , slijedi da je

$d\|\eta_n^{(j,q)}(t)\|^2 \sim dt$, za svako $j,q$, čime je dokaz završen.

### 3.1.2. Nelinearna vremenska analiza uopštenih, u smislu Rozanova, stacionarnih procesa

U 1.5.1 uveli smo uopštene stacionarne procese u smislu Rozanova

$\{\xi(t),x\}$, $x \in R$, gdje je parametarski skup Hilbertov prostor $R$. Vidjeli smo da postoji inovacioni proces $\{X^j(t)\}_{j=1}^{M}$, $M$ može biti i $\infty$, tako da je za $x$-ta komponentu, $x \in R$

$$\{\xi(t),x\} = \sum_{j=1}^{M} \int_{-\infty}^{t} g_j^{(x)}(t-u)dX_j(u), t>-\infty$$

<u>Definicija:</u> Nelinearna vremenska analiza stepena $n$, $n \geqslant 2$, uopštenog procesa $\{\xi(t),x\}$ je odredjivanje spektralnog tipa $E_t$ u linearnoj zatvorenosti nad polinomima stepena ne većeg od $n$ od promjenljivih

$$X_j(t), t > -\infty, \; j=1,2,\ldots,M .$$

U 3.1.1 odredili smo inovacioni proces i spektralni tip upravo u takvom prostoru $\mathcal{H}_n(X)$.

Prema tome, već smo dokazali

<u>Teorema:</u> Spektralni tip od $E_t$ u $\mathcal{H}_n(X)$, $n \geqslant 2$ je

$$dt \sim dt \sim \ldots$$

# L I T E R A T U R A


[1] Ahiezer I.,Glazman M.; Teorija linearnih operatora u Hilbertovom prostoru (Russian), Moskva, 1966.

[2] J.L. Doob: Stochastic Processes, Wiley, N.Y.,1953.

[3] Z.A. Ivković: Spectral type of Hermite polynomial of a Wiener processes, (Moscow)

[4] Ivković,Z. and Lozanov,Z.: Hermite polynomials of Gaussian processes, Review of Research, Math.ser.Fac. of Sci., Vol. 12(1982), 105-115 (Novi Sad)

[5] Z.Ivković: Spectral type of polynomials of Gaussian process, Review of Research, Mat.ser. Fac. of Sci., Vol 13 (1983), 211-218 (Novi Sad)

[6] Z.A.Ivković: Non-linear time - domain analysis of Gaussian process, Bulletin T. LXXXVIII de l' Académie Serbe des Sciences et des Arts - 1985.

[7] Z.Ivković, J.Bulatović, J.Vukmirović,S.Živanović: Application of spectral multiplicity in separable Hilbert space to stochastic processes, Math.Inst. (Belgrade), Special Edition, 12(1974)

[8] H.Cramer: Stochastic Processes as Curves in Hilbert Space, Probability Theory and its Applications, Vol. 9(1964), 195-204 (Moscow)

[9] H.Cramer: On some classes of non-stationary stochastic processes, Proc. 4-th Berkeley Sympos. Math. statist. and Prob., II, 1961, pp 57-77

[10] H.Cramer: On the structure of purely non-deterministic stochastic processes, Arkiv Math., 4, 1961, pp. 249-266

[11] G.Kallianpur, V.Mondrenar: Multiplicity and representation theory of purcly non-deterministic stochastic processes, Teorija vjerovatnoće i njena primjena, 10,4(1965), 614-644

[12] Kristof Moren: Metodi Hilbertova prostora (Ruski), Moskva, 1965.

[13] A.I. Plesner: Spectral theory of linear operators (Russian), Moscow, 1965.

[14] J.A.Rozanov: Stacionarni slučajni procesi (Ruski) Moskva, 1963.

[15] J.A. Rozanov: Markovska slučajna polja, (Ruski) "Nauka", Moskva, 1981.

[16] J.A. Rozanov, I.A. Ibragimov: Gausovski slučajni procesi, (Ruski) "Nauka", Moskva 1970.

[17] J.A. Rozanov: Teorija obnavljajućih procesa (Ruski) "Nauka", Moskva, 1974.

[18] M.H. Stone: Linear transformations in Hilbert space, American Math. Soc. N.Y., 1932

[19] Hida, T.: Canonical Representations of Gaussian processes and their applicationss, Mem.Coll.Sci.Univ. Kyoto, Sekt, 33(1960), 109-155 .

[20] T.Schwartz, H. Danford: Linear operators, New York, 1963.