УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ЈОВАН П. ЛАЗОВИЋ

ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ КРЕТАЊА ЗЕМЉИНИХ ВЕШТАЧКИХ САТЕЛИТА

Научна књига

БЕОГРАД, 1976.

САДРЖАЈ

I. ЛАПЛАСОВА ЈЕДНАЧИНА. СФЕРНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. ЛАПЛАСОВ ОПЕРАТОР У ОРТОГОНАЛНИМ КООРДИНАТАМА

Испитивање кретања Земљиних вештачких сателита је условљено познавањем Земљиног гравитационог потенцијала у спољнем простору. Он се може одредити помоћу одговарајућих решења Лапласове парцијалне диференцијалне једначине другога реда скраћено написане

$$\Delta U = 0. \tag{1}$$

Функција U, у нашем разматрању, представља функцију силе, јер је њен градијент сила

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U. \tag{2}$$

Негативна вредност функције силе је потенцијална функција или потенцијал

$$\Pi = -U. \tag{3}$$

Међутим, данас је уобичајено да се и U назива потенцијалом, па ћемо и ми тако даље узимати.

Лева страна једначине (1) представља примену Лапласовог оператора на функцију U. Лапласијан је његов скраћени назив, а најпростији и симетричан облик за његов симбол је у правоуглим координатама

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4}$$

тј. линеарни диференцијални оператор (диференцијатор) другога реда.

Нека је вектор положаја тачке P у простору $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$, где су q_i $(i = 1, 2, 3)$ њене ортогоналне генералисане координате, којима одговара ортогоналан триједар оса. Правоугле координате x, y, z те тачке преко претходних координата нека су дате једначинама

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{5}$$

Ламеови коефицијенти су изрази

$$A_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Елементарни лукови дуж координатних линија q_i су $ds_i = A_i\, dq_i$, $i = 1, 2, 3$, па је елемент запремине

$$dV = ds_1\, ds_2\, ds_3 = A_1 A_2 A_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \tag{7}$$

Потребан и довољан услов ортогоналности општих координата q_i је да квадрат елемента лука или метричка форма садржи само чланове с квадратима диференцијала ds_i, тј. с dq_i^2, када је

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} A_i^2\, dq_i^2. \tag{8}$$

Лапласов оператор у ортогоналним генералисаним координатама[1] је

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2 A_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{A_2 A_3}{A_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{A_3 A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{A_1 A_2}{A_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{9}$$

Лапласијан је инваријантан оператор, који не зависи од избора координата.

Ми ћемо се користити сферним координатама $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \lambda$, па једначине (5) постају

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi; \tag{10}$$

а једначине (6) дају

$$A_1 = A_r = 1, \quad A_2 = A_\varphi = r, \quad A_3 = A_\lambda = r\cos\varphi. \tag{11}$$

Онда, из једначина (7) и (11), добијамо елемент запремине у сферним координатама

$$dV = r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi\, d\lambda, \tag{12}$$

а из (8) и (11) имамо метричку форму

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\, d\lambda^2. \tag{13}$$

Из (9) и (11) Лапласов оператор у сферним координатама је

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right]. \tag{14}$$

2. ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ. ЛАПЛАСОВА ЈЕДНАЧИНА

Класична небеска механика у многим случајевима разматра кретања небеских тела замењујући њихове масе материјалним тачкама. Ово је могуће када су димензије тих тела врло мале у поређењу са растојањима која их раздвајају и практично се не одражавају у нашем праћењу њихових кретања. Тако, ако бисмо Земљу могли да сматрамо хомогеном лоптом, константне густине, или материјалном тачком, онда би вектор $\vec{g}$ убрзања Земљиног

[1] Види нпр.: Т. П. Анђелић — Теорија вектора, Београд, 1947, стр. 304, 309, 310, 312, 334, 339; Р. Кашанин — Виша математика II, књ. друга, Београд, 1950, стр. 342, 351, 360, 377, 380, 381; В. И. Смирнов — Курс высшей математики, Т. II, Москва, 1965, стр. 377—381.

привлачења на геоцентричном растојању r увек био усмерен ка Земљином центру и његова апсолутна вредност била би

$$g = \frac{\mu}{r^2}, \tag{15}$$

где је

$$\mu = fM = GE = 398603 \cdot 10^9\ \mathrm{m^3\, s^{-2}} \tag{16}$$

геоцентрична гравитациона константа (укључујући и атмосферу); $f = G$ је константа гравитације, $M = E$ је маса Земље. Дакле, тада би Земља имала централно гравитационо поље.

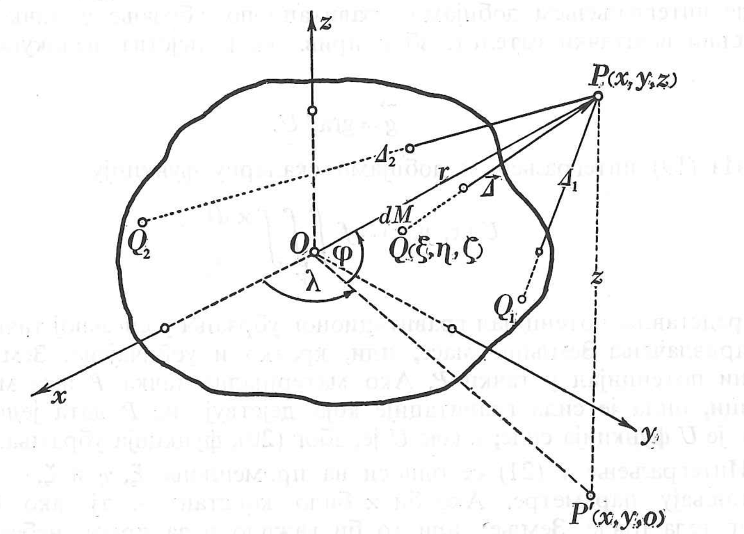
Међутим, већ код стварања тачне теорије кретања Земљиног природног сателита — Месеца (средња вредност Месечевог геоцентричног растојања је приближно 60 Земљиних екваторских полупречника) маса Земље није могла да се замени материјалном тачком, па је морала да се узме у обзир њена запремина, тј. облик. У теорији кретања Земљиних вештачких сателита поремећаји због Земљине спљоштености практично долазе до изражаја, па се за Земљин облик мора усвојити боља апроксимација. А то је да њу можемо представити као сфероид или ротациони елипсоид. Уствари, потребно нам је познавање гравитационог потенцијала Земљине масе, која не може да се представи материјалном тачком.

Полазимо од две претпоставке за Земљу:

1) да је апсолутно чврсто тело, које се не деформише, тј. које има особину да растојање између сваке две његове тачке остаје исто, дакле, да је Земља недеформабилна, и

2) да се мало разликује од лопте с радијалном расподелом густине.

Узмимо да се у некој тачки O оваквог тела налази почетак правоуглог Декартовог система, чије су осе дуж главних оса елипсоида инерције[1] тела (сл. 1). Вектор $\vec{\Delta} = \overrightarrow{QP}$ је вектор положаја спољне тачке $P(x, y, z)$,



Сл. 1

[1] Т. Анђелић, Р. Стојановић — Рационална механика, Београд, 1966, стр. 340 — 341.

која ће у нашем разматрању представљати Земљин вештачки сателит, у односу на текућу тачку $Q(\xi, \eta, \zeta)$ Земље као чврстог тела.

Вештачки сателит ћемо заменити материјалном тачком P врло мале масе у поређењу са Земљином масом запремине V. Убрзање тачке P, због гравитационог привлачења Земљине масе, можемо узети као збир убрзања од привлачења елемената њене масе, чији је збир Земљина маса. По Њутновом закону гравитације вектор гравитационог убрзања $d\vec{g}$ тачке P због привлачног дејства елемента Земљине масе dM са тачком Q и густином $\varkappa(\xi, \eta, \zeta)$ је

$$d\vec{g} = -f\frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3}\,dM, \tag{17}$$

где је

$$\Delta = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \tag{18}$$

Уведимо функцију

$$dU = \frac{f\cdot dM}{\Delta} = \frac{f\varkappa\, dV}{\Delta}, \tag{19}$$

где је dV елемент запремине чврстог тела, тј. Земље како смо је ми узели. Како је из (19), с оазиром на (18) и (17), нпр.

$$\frac{\partial}{\partial x}\,dU = f\,dM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -f\frac{x-\xi}{\Delta^3}\,dM = dg_x,$$

онда је

$$d\vec{g} = \operatorname{grad}(dU) = d(\operatorname{grad} U).$$

Одавде интеграљењем добијамо гравитационо убрзање $\vec{g}$ тачке P, у којој је Земљин вештачки сателит, због привлачног дејства целокупне Земљине масе

$$\vec{g} = \operatorname{grad} U. \tag{20}$$

Из (19) интеграљењем добијамо скаларну функцију

$$U(x, y, z) = f\iiint_V \frac{\varkappa\, dV}{\Delta}, \tag{21}$$

која представља потенцијал гравитационог убрзања у спољној тачки $P(x, y, z)$ због привлачења Земљине масе, или, кратко и уобичајено, Земљин гравитациони потенцијал у тачки P. Ако материјална тачка P има масу једнаку јединици, онда је сила гравитације која дејствује на P дата једначином (2) и тада је U функција силе; иначе U је, због (20), функција убрзања.

Интеграљење у (21) се односи на променљиве ξ, η и ζ, док x, y и z представљају параметре. Ако би $\varkappa$ било константно, тј. ако би густина чврстог тела (овде Земље; али то би важило и за друга небеска тела са просторним димензијама, код разматрања њиховог потенцијала) била иста у свакој његовој тачки, тело би било хомогено.

Ако се материјална тачка, у којој замишљамо вештачки сателит, налази на бесконачно великом растојању од тела, овде Земље, чија је укупна маса

$$M = \int dM, \tag{22}$$

онда су

$$\lim_{\Delta\to\infty} U = 0, \quad \lim_{\Delta\to\infty} \Delta\cdot U = fM. \tag{23}$$

Ове једнакости се могу доказати на овај начин. Из (19) је гравитациони потенцијал масе M у тачки P

$$U = f\int\frac{dM}{\Delta}.$$

Онда је

$$\lim_{\Delta\to\infty} U = f\cdot\lim_{\Delta\to\infty}\int\frac{dM}{\Delta} = f\cdot\lim_{\Delta\to\infty}\frac{\int dM}{\Delta} = f\cdot\lim_{\Delta\to\infty}\frac{M}{\Delta} = 0.$$

Претпоставимо ли да је укупна маса тела које привлачи сателит концентрисана: прво, у тачки Q_1 – најближе тачки P, а потом у тачки Q_2 – најдаље од тачке P. Одговарајућа растојања нека су Δ_1 и Δ_2, (в. сл. 1). Одговарајући потенцијали за ове две претпоставке били би

$$U_1 = f\int\frac{dM}{\Delta_1} = f\frac{M}{\Delta_1}, \quad U_2 = f\int\frac{dM}{\Delta_2} = f\frac{M}{\Delta_2},$$

с обзиром на (22) и да су Δ_1 и Δ_2 константне величине за Земљу и неку изабрану тачку P. За ова три случаја постоји очигледна неједнакост

$$f\int\frac{dM}{\Delta_2} < f\int\frac{dM}{\Delta} < f\int\frac{dM}{\Delta_1},$$

која, с обзиром на претходно, постаје

$$f\frac{M}{\Delta_2} < U < f\frac{M}{\Delta_1}.$$

Ако ову неједнакост помножимо с Δ и узмемо limes добијеног кад се тачка P удаљава у бесконачност, тј. кад $\Delta\to\infty$, водећи рачуна да је

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{\Delta}{\Delta_2} = \lim_{\Delta\to\infty}\frac{\Delta}{\Delta_1} = 1,$$

налазимо да је

$$\lim_{\Delta\to\infty}\Delta\cdot U = fM.$$

Нека је E_{AB} рад силе гравитације или енергија која се троши при прелазу вештачког сателита јединичне масе из тачке A у тачку B, онда је, с обзиром на (20),

$$E_{AB} = \int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \operatorname{grad} U\cdot d\vec{r} = \int_{U(A)}^{U(B)} dU = U(B) - U(A),$$

где је $\vec{g} \cdot d\vec{r}$ елементаран рад, а $d\vec{r}$ елементарно померање вештачког сателита. Дакле, тај рад не зависи од пута, већ само од почетног и крајњег положаја и једнак је разлици потенцијала у овим тачкама.

Из (20) и диференцирањем (21), с обзиром на (18), добијамо

$$\left.\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = -f \iiint_V \frac{x-\xi}{\Delta^3} \varkappa\, dV, \\ g_y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -f \iiint_V \frac{y-\eta}{\Delta^3} \varkappa\, dV, \\ g_z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -f \iiint_V \frac{z-\zeta}{\Delta^3} \varkappa\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Диференцирањем (24) добијамо делимичне изводе другога реда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= f \iiint_V \left[\frac{3(x-\xi)^2}{\Delta^5} - \frac{1}{\Delta^3}\right] \varkappa\, dV, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= f \iiint_V \left[\frac{3(y-\eta)^2}{\Delta^5} - \frac{1}{\Delta^3}\right] \varkappa\, dV, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= f \iiint_V \left[\frac{3(z-\zeta)^2}{\Delta^5} - \frac{1}{\Delta^3}\right] \varkappa\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Сабирањем израза (25) добијамо Лапласову једначину у правоуглим координатама

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{26}$$

а она представља примену Лапласовог оператора (4) на функцију $U(x, y, z)$ па се добијени израз изједначи са нулом.

Хармонијске функције су оне функције $U(x, y, z)$ које су у неком подручју простора $Oxyz$ непрекидне и имају непрекидне парцијалне изводе првог и другог реда и задовољавају Лапласову једначину (26). Треба их наћи, одн. треба решити Лапласову једначину и добити гравитациони потенцијал, али преко сферних функција као специјалних функција. Како желимо његов облик у сферним координатама, онда ћемо применити Лапласијан (14) на гравитациони потенцијал U и добити, после множења с r^2, Лапласову једначину у сферним координатама

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi \frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2} = 0. \tag{27}$$

Сферне функције су у тесној вези с Лапласовом једначином (27) и врло су погодне за израчунавање на савременим електронским рачунарима, па су зато корисне за изражавање Земљиног гравитационог потенцијала и испитивање поремећеног кретања вештачких сателита.

У разматрању кретања Земљиних вештачких сателита почетак координатног система је у геоцентру и за основну координатну раван обично се узима раван Земљиног екватора и у њој за основни правац (x-осу) онај одређен пресеком екваторске равни са равни гриничког меридијана, па су сферне координате вештачког сателита: r—геоцентрично растојање, φ—геоцентрична ширина и λ—географска дужина вештачког сателита. Међутим, ако би позитиван смер x-осе био смер ка пролећној еквинокцијској тачки и екваторска раван била основна, онда би, са сл. 1, λ представљало ректасцензију а φ деклинацију вештачког сателита.

3. СФЕРНЕ ФУНКЦИЈЕ. ЛЕЖАНДРОВИ ПОЛИНОМИ

Ми ћемо се користити развојем гравитационог потенцијала у ред преко сферних функција, које ћемо упознати овде.

Потражимо партикуларна решења Лапласове једначине (27) у сферним координатама у облику

$$U(r, \varphi, \lambda) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Lambda(\lambda). \tag{28}$$

Одређивање сваког множитеља на десној страни једначине (28) своди се, због раздвајања промењљивих у једначини (27), на интеграљење обичних диференцијалних једначина другога реда. Стварно, замењујући (28) у (27), после множења са $\cos^2\varphi$ и дељења са $R \cdot \Phi \cdot \Lambda$ и пребацивања члана који зависи од λ на десну страну, добијамо једначину

$$\cos^2\varphi \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Phi\cos\varphi} \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi}\right)\right] = -\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}. \tag{29}$$

Ова једначина може да постоји само при услову да су јој обе стране једнаке једној истој константи, коју ћемо означити са k^2, тј. узимамо да буде квадрат целог броја, како би функција Λ била линеарна комбинација косинуса и синуса мултипала (умножака) од λ, као што ћемо видети. Тако, због одређивања R, Φ и Λ, једначина (29) се распада на ове две диференцијалне једначине

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + k^2 \Lambda = 0, \tag{30}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = \frac{k^2}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\Phi\cos\varphi} \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi}\right). \tag{31}$$

Једначина (31), због истог разлога као малопре, може да постоји ако су јој обе стране једнаке истој константи, коју ћемо сад, због касније погодности, означити са $n(n+1)$. Сад се једначина (31), због одређивања R и Φ, раздвајањем промењљивих, јер је њена лева страна функција само од r а десна само од φ, распада на следеће две једначине

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - n(n+1) R = 0, \tag{32}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi}\right) + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{\cos^2\varphi}\right] \Phi = 0. \tag{33}$$

Дакле, решење (28), одн. факторе који у њему фигуришу, налазимо интеграљењем диференцијалних једначина (30), (32) и (33). При овоме избор констаната k и n неопходно је вршити тако да свако од нађених решења (28) представља хармонијску функцију, тј. да задовољава Лапласову једначину (27).

Једначина (30), као што је познато из теорије обичних диференцијалних једначина, има опште решење у облику

$$\Lambda = A\cos k\lambda + B\sin k\lambda, \tag{34}$$

где су A и B константе интеграљења.

Једначина (32) има[1] једно решење $R=r^n$ и друго решење $R=r^{-(n+1)}$. Ми ћемо користити ово друго решење, јер оно одговара одређивању хармонијске функције U изван сфере полупречника r_0, а та функција једнака је нули за тачку P у бесконачности.

У теорији потенцијала као решења једначине (33) користе се само она њена решења која одговарају природним бројевима за константе k и n, при чему треба да је $k \leqslant n$. Партикуларна решења једначине (33), која зависе од параметара k и n, означавају се са $P_n^k(\sin\varphi)$, као што ћемо видети.

Лаплас је први увео сферне функције. Опште сферне функције n-тога степена се називају комбинације тј. производи решења једначина (30) и (33) у облику

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k(\sin\varphi)\cdot(A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda), \tag{35}$$

где су A_{nk} и B_{nk} произвољне константе, n је степен сферне функције. Видимо да је (35) тригонометријски полином.

Испитајмо ближе за коју се једначину уводе опште сферне функције, које служе као њено решење. Ако је решење једначине (27) у облику[2]

$$U = R(r)\cdot Y(\varphi,\lambda) = r^{-(n+1)}\,Y(\varphi,\lambda), \tag{28'}$$

онда се из Лапласове једначине, после смене (28') и после множења са r^{n+1}, добија једначина

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} - \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial Y}{\partial\varphi} + \sec^2\varphi\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} + n(n+1)\,Y = 0. \tag{29'}$$

Ако је решење ове једначине у облику

$$Y(\varphi,\lambda) = \Phi(\varphi)\cdot\Lambda(\lambda), \tag{28''}$$

онда, после његове смене у (29'), добијамо једначину

$$\Lambda\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \Lambda\operatorname{tg}\varphi\,\frac{d\Phi}{d\varphi} + \Phi\sec^2\varphi\,\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + n(n+1)\,\Phi\,\Lambda = 0,$$

из које, после множења са $\cos^2\varphi/\Phi\Lambda$, добијамо

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Phi}\,\frac{d\Phi}{d\varphi} + \frac{1}{\Lambda}\,\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + n(n+1)\cos^2\varphi = 0,$$

[1] В. И. Смирнов — Курс высшей математики, Т. III, ч. II, Москва, 1969, стр. 499.

[2] Исто, стр. 477—496, 498—501.

одакле налазимо, после раздвајања промељивих,

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Phi}\,\frac{d\Phi}{d\varphi} + n(n+1)\cos^2\varphi = -\frac{1}{\Lambda}\,\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} = k^2.$$

Тако се једначина (29') распада на раздвојене једначине (30) и (33). Ова друга се добија из претходне једначине у облику

$$\cos^2\varphi\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{d\Phi}{d\varphi} + [n(n+1)\cos^2\varphi - k^2]\,\Phi = 0,$$

која, после дељења с $\cos^2\varphi$, даје

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \operatorname{tg}\varphi\,\frac{d\Phi}{d\varphi} + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{\cos^2\varphi}\right]\Phi = 0,$$

што је идентично са такозваном Лежандровом придруженом диференцијалном једначином (33).

Дакле, (28'') у облику (35) одређује да општа сферна функција n-тог степена, као специјални тригонометријски полином од сферних координата φ и λ, представља решење парцијалне диференцијалне једначине (29'), која се на описани начин добија из Лапласове једначине (27).

Нађимо решења једначине (33) прво за случај када је $k=0$.

Ако ставимо да је

$$y = \Phi(\varphi) \quad \text{и} \quad x = \sin\varphi,$$

једначина (33) добија облик

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\right]y = 0. \tag{36}$$

Ова једначина је позната као алгебарски облик Лежандрове асоциране (придружене) диференцијалне једначине.

За $k=0$ из (36) добијамо једначину

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)\,y = 0, \tag{37}$$

која представља Лежандрову диференцијалну једначину[1]. Партикуларно решење $P_n^0(x)$ диференцијалне једначине другога реда (37) даље ћемо означавати са $P_n(x)$ и оно представља један специјалан полином од x. Једно партикуларно решење једначине (37) можемо овако да нађемо. Уведимо помоћну функцију z као полином облика

$$z = (x^2-1)^n.$$

Лако се показује да ова функција задовољава следећу диференцијалну једначину првога реда, узимајући извод логаритма горњег израза,

$$(x^2-1)\,\frac{dz}{dx} - 2nxz = 0.$$

[1] Особине интеграла ове једначине изучавају се најпотпуније и строго у аналитичкој теорији диференцијалних једначина. Подробно излагање теорије сферних функција може се наћи нпр. у монографији: Е. Гобсон — Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.

Ову једначину по аргументу x диференцирајмо $n+1$ пута, n је цео позитиван број, коришћењем познате Лајбницове формуле за израчунавање виших извода производа двеју функција[1])

$$\frac{d^p(uv)}{dx^p}=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{d^{p-j}u}{dx^{p-j}}\frac{d^jv}{dx^j},$$

где су (биномни) коефицијенти

$$C_p^j=\binom{p}{j}=\frac{p!}{(p-j)!\,j!}.$$

Није тешко показати (довољно је за $j=0,\,1,\,2$) да тако можемо добити једначину

$$(1-x^2)\,z^{(n+2)}-2\,x\,z^{(n+1)}+n\,(n+1)\,z^{(n)}=0,$$

коју ћемо написати као

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dz^{(n)}}{dx}\right]+n\,(n+1)\,z^{(n)}=0, \tag{38}$$

при чему је n-ти извод $z^{(n)}=\dfrac{d^n z}{dx^n}$. Да бисмо ову једначину упоредили са једначином (37), ставимо да је $y=z^{(n)}$, онда једначина (38) постаје (37), па се из овога закључује да функција

$$y=\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n} \tag{39}$$

представља партикуларно решење диференцијалне једначине (37). Како је једначина (37) линеарна и хомогена, то је и производ функције (39) са сваком константом, тј. Cy такође решење једначине (37). За произвољну константу се узима да има овај погодан облик $C=\dfrac{1}{2^n\,n!}$, као што се то чини у теорији потенцијала, па једначина (37) има партикуларно решење

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{40}$$

које представља тзв. Лежандров полином n-тог степена по x. Израз (40) се назива Родриговом формулом. Из ње није тешко видети да полиномна функција $P_n(x)$ има само парне степене од x за n парно, а само непарне степене x-са ако је n непарни степен. Са Родриговом формулом, диференцирањем, можемо да израчунамо неколико првих Лежандрових полинома, који се налазе код изражавања развоја Земљиног гравитационог потенцијала при изучавању теорије кретања Земљиних вештачких сателита. Лежандров полином $P_n(x)$ степена $n>0$ има n различитих коренова[2]) у интервалу $(-1,\,+1)$.

[1]) Р. Кашанин — Виша математика I, Београд, 1946, стр. 418.
[2]) Р. Кашанин — Виша математика II, књ. друга, стр. 618.

У разматрању Земљиног потенцијала јавља се и функција $\Psi(x,\,\alpha)$, коју развијамо у степени ред по α помоћу Лежандрових полинома $P_n(x)$ као[1])

$$\Psi(x,\,\alpha)=(1-2\,x\,\alpha+\alpha^2)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k P_k(x). \tag{41}$$

$\Psi(x,\,\alpha)$ се назива функцијом генератрисом Лежандрових полинома, јер се изражава преко њих. С друге стране, из биномног развоја ове функције имамо

$$[1-(2\,\alpha\,x-\alpha^2)]^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k\end{pmatrix}(2\,x\,\alpha-\alpha^2)^k. \tag{42}$$

Како десне стране претходна два реда треба да буду истоветне, полином $P_n(x)$ налазимо као коефицијент уз α^n на десној страни (42), која се своди на двојни ред

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^k(-1)^j\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k\end{pmatrix}\binom{k}{j}2^{k-j}\,x^{k-j}\,\alpha^{j+k}.$$

Кад из овог двојног реда саберемо све коефицијенте уз α^n, где је $n=j+k$, добијамо и овај израз за Лежандров полином n-тог степена

$$P_n(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\,n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n\,(n-1)}{2\,(2\,n-1)}\,x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot4\cdot(2\,n-1)\,(2\,n-3)}\,x^{n-4}-\cdots\right]. \tag{43}$$

Из овог облика су очигледне напред наведене особине о парности и непарности степена с обзиром на n.

Трећи користан израз за Лежандрове полиноме добијамо ако уместо досадашњег x уведемо угао θ једначином

$$x=\cos\theta \tag{44}$$

и ставимо

$$\sigma=E^{i\,\theta},$$

где је E основа природних логаритама, а i имагинарна јединица. Онда је по познатом Ојлеровом изразу за косинус угла

$$2\,x=\sigma+\sigma^{-1},$$

а, даље,

$$2\cos n\,\theta=\sigma^n+\sigma^{-n},$$

$$1-2\,x\,\alpha+\alpha^2=1-\alpha\sigma-\alpha\sigma^{-1}+\alpha^2\,\sigma\sigma^{-1}=(1-\alpha\sigma)\,(1-\alpha\sigma^{-1}),$$

$$(1-2\,x\,\alpha+\alpha^2)^{-1/2}=(1-\alpha\sigma)^{-1/2}\,(1-\alpha\sigma^{-1})^{-1/2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k\end{pmatrix}\alpha^k\,\sigma^k\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ j\end{pmatrix}\alpha^j\,\sigma^{-j}. \tag{45}$$

[1]) Д. Брауэр, Дж. Клеменс — Методы небесной механики, ИЛ, Москва, 1964, стр. 108. Г. Н. Дубошин — Небесная механика. Основные задачи и методы, Москва, 1968, стр. 164.

Кад се изврши множење последња два реда, онда коефицијент уз α^n даје тражени нови облик за Лежандров полином n-тог степена, водећи рачуна о трансформацијама израженим Ојлеровим обрасцем који везује косинус са експоненцијалним функцијама (овде на разним степенима),

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot 2\cos(n\theta)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot 2\cos(n-2)\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2\cdot 4\cdots(2n-4)}\cdot 2\cos(n-4)\theta+\cdots. \tag{46}$$

Биномни редови који чине производ на десној страни (45) су апсолутно конвергентни за $|\alpha|<1$, пошто је $|\sigma|=1$. Из овога следи да је добијени двојни ред апсолутно конвергентан за $|\alpha|<1$.

Корисне су особине Лежандрових полинома

$$P_n(+1)=+1, \qquad P_n(-1)=(-1)^n, \tag{47}$$

што се доказује када се у леву страну (41) стави $x=+1$ и $x=-1$, па се добија $\Psi(1,\alpha)=\dfrac{1}{1-\alpha}$ и $\Psi(-1,\alpha)=\dfrac{1}{1+\alpha}$, а како су

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots$$

и

$$\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\cdots(-1)^n\alpha^n+\cdots,$$

онда, с обзиром на једнакост ових редова са десном страном из (41), следе вредности (47).

Изведимо сад рекурентну формулу за израчунавање Лежандрових полинома. Кад (41) диференцирамо по α, добијамо

$$(x-\alpha)(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-3/2}=\sum_{k=1}^{\infty}k\,\alpha^{k-1}P_k(x),$$

или, због (41),

$$(x-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k P_k(x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\,\alpha^{k-1}P_k(x),$$

где на десној страни сад k узима вредности почевши од 1 а не од нуле, јер би тада и десна страна била нула. Кад изједначимо коефицијенте уз α^n на десној и левој страни овако добијене једначине, добијамо тражени рекурентни образац

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)\,x\,P_n(x)+n\,P_{n-1}(x)=0. \tag{48}$$

На основи напред изложеног овако се изражавају прве просте сферне функције, како се још називају Лежандрови полиноми,

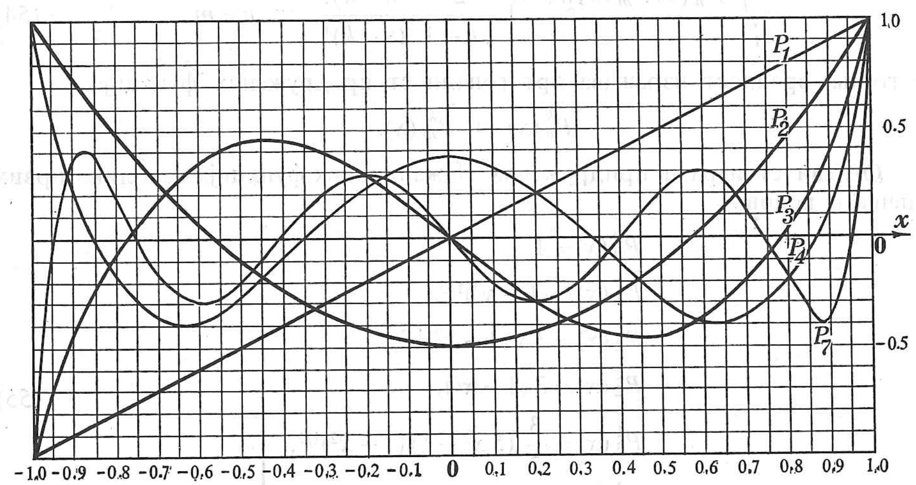
$$\left.\begin{aligned}
P_0(x)&=1,\\
P_1(x)&=x,\\
P_2(x)&=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\\
P_3(x)&=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\\
P_4(x)&=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8},\\
P_5(x)&=\frac{63}{8}x^5-\frac{35}{4}x^3+\frac{15}{8}x.
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Одговарајући тригонометријски облик добијамо кад се вратимо на ранију ознаку $x=\sin\varphi$.

Навешћемо само да се код развоја функција у редове по Лежандровим полиномима користе релације[1]

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{за}\quad m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{за}\quad m=n,\end{cases} \tag{50}$$

где прва представља ортогоналност Лежандрових полинома за $-1\leqslant x\leqslant +1$. На сл. 2 имамо графички приказ неких Лежандрових полинома[2].



Сл. 2

[1] Р. Кашанин — Виша математика II, књига друга, 1950, стр. 625.
[2] В. Я. Арсенин — Методы математической физики и специальные функции, Москва, 1974, стр. 344.

Размотримо сада општи случај за $k \neq 0$ и нађимо решење једначине (36). То решење је непрекидна функција $P_n^k(x)$ у интервалу $[-1, 1]$ која се назива придруженом (асоцираном) Лежандровом или придруженом сферном функцијом n-тог степена и k-тог реда (ранга) прве врсте (јер у математици постоје и придружене Лежандрове функције друге врсте)

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k} = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}}. \tag{51}$$

Да бисмо доказали ово решење извршимо смену функција[1)]

$$y = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} z \tag{52}$$

у једначини (36). Тада она добија облик

$$(1-x^2) z'' - 2x(k+1) z' + [n(n+1) - k(k+1)] z = 0. \tag{53}$$

Ову исту једначину добили бисмо кад бисмо (37) диференцирали k пута и у тако добијену једначину ставили $y^{(k)} = z$. Међутим, видели смо да једначина (37) има партикуларно решење $y = P_n(x)$, онда је $z = \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$ и, због (52), диференцијална једначина (36) заиста има решење облика (51), које повезује придружене сферне функције са Лежандровим полиномима на горе дати начин. Очевидно је $P_n^0(x) \equiv P_n(x)$.

У теорији потенцијала корисне су особине придружених Лежандрових функција[1)] за интервал $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(x) P_m^k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{за } n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1} \cdot \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{за } n = m, \end{cases} \tag{54}$$

где горња вредност изражава ортогоналност придружених функција

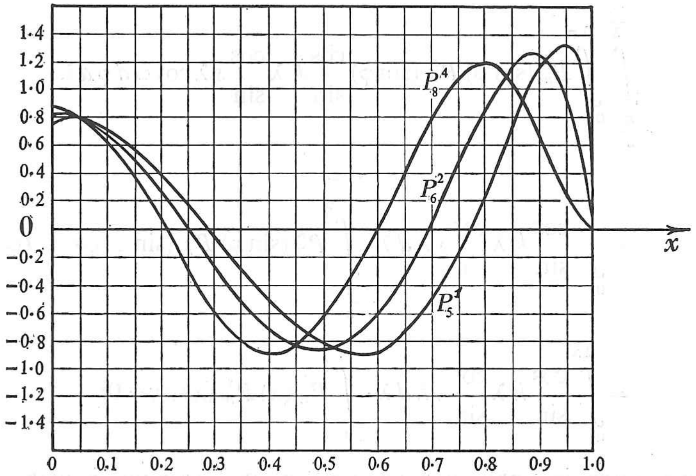
$$P_n^k(x) \quad \text{и} \quad P_m^k(x).$$

Овакви су изрази придружених Лежандрових функција неколико првих степена и редова

$$\left.\begin{aligned} P_0^0(x) &= 1, \\ P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2}, \\ P_2^1(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2}, \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2), \\ P_3^1(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}, \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2), \\ P_3^3(x) &= 15(1-x^2)^{3/2}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

[1)] В. Я. Арсенин — Методы математической физики и специальные функции, 1974, стр. 371—373.

На сл. 3 дат је графички приказ неких придружених Лежандрових функција.



Сл. 3

Када ставимо $x = \sin\varphi$ онда (51) и (35) дају овај експлицитан израз за општу сферну функцију n-тог степена

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) \cos^k\varphi \frac{d^k P_n(\sin\varphi)}{(d\sin\varphi)^k}. \tag{56}$$

Израз (56) показује да сферну функцију n-тог степена чине линеарне комбинације функција

$$\frac{d^k P_n(\sin\varphi)}{(d\sin\varphi)^k} \cos^k\varphi \cos k\lambda, \quad \frac{d^k P_n(\sin\varphi)}{(d\sin\varphi)^k} \cos^k\varphi \sin k\lambda, \tag{57}$$

које се називају елементарним сферним функцијама или сферним хармоницима. И ове функције представљају ортогоналан систем функција, због ортогоналности Лежандрових полинома и придружених Лежандрових функција. Сферни хармоници се деле на три категорије: за $k=0$ су зонални, за $k=n$ су секторски, и за $0<k<n$ су тесерални.

Ортогоналност елементарних сферних функција (или фундаменталних сферних функција, како се још називају) доказује се кад се, по површини јединичне сфере (сфере са полупречником једнаким јединици), интеграли производ два сферна хармоника који се разликују међусобно најмање у једном индексу

$$\iint_{S\ \text{јед.}} P_n^k(\sin\varphi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\lambda \cdot P_m^s(\sin\varphi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} s\lambda\, d\sigma,$$

ако $n \neq m$. На јединичној сфери S елемент њене површине је $d\sigma = \cos\varphi\, d\lambda \cdot d\varphi = d\sin\varphi\, d\lambda$, јер је елемент лука малог круга (паралела φ) $\cos\varphi\, d\lambda$. Онда горњи интеграл постаје, уводећи поново смену $x = \sin\varphi$ и узимајући одговарајући производ само синуса, или само косинуса, или синуса и косинуса целих мултипала угла λ,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\pi} P_n^k(\sin\varphi)\, P_m^s(\sin\varphi) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} k\lambda \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} s\lambda \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda = \\
&= \int_{0}^{2\pi} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} k\lambda \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} s\lambda\, d\lambda \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n^k(\sin\varphi)\, P_m^s(\sin\varphi) \cos\varphi\, d\varphi = \\
&= \int_{0}^{2\pi} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} k\lambda \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} s\lambda\, d\lambda \cdot \int_{-1}^{1} P_n^k(x)\, P_m^s(x)\, dx = 0;
\end{aligned} \tag{58}
$$

ако је $k \neq s$ онда је први интеграл на десној страни једнак нули, ако је $k = s$ или $n \neq m$ онда је други интеграл на десној страни једнак нули због (54)

4. РАЗВОЈ ФУНКЦИЈЕ НА СФЕРНОЈ ПОВРШИ У РЕД ПО СФЕРНИМ ФУНКЦИЈАМА

Претпоставимо да је дата коначна, непрекидна и једнозначна функција $f(\varphi, \lambda)$ на површи сфере S јединичног полупречника. Она зависи од две независне промењиве — сферних координата φ и λ произвољне тачке M те сфере. Ова функција се може представити редом у облику

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\varphi, \lambda), \tag{59}$$

чији су чланови опште сферне функције дефинисане са (35), па је

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} P_n^k(\sin\varphi)\,(A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda). \tag{60}$$

Лаплас је први увео ред (60), па је и назван његовим именом, а доказ његове униформне конвергенције на целој површини сфере потиче од Лежен-Дирихлеа. Његови коефицијенти A_{nk} и B_{nk} одређују се слично као у обичном Фуријеовом реду уз коришћење особина Лежандрових полинома и придружених Лежандрових функција.

Ред (60) напишимо као

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{no} P_n(\sin\varphi) + \sum_{k=1}^{n} (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda)\, P_n^k(\sin\varphi) \right]. \tag{60'}$$

Помножимо обе стране израза (60′) са $\cos s\lambda\, d\lambda$, па добијено интегралимо по λ у границама од 0 до 2π

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) \cos s\lambda\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg[& A_{n0} P_n(\sin\varphi) \int_0^{2\pi} \cos s\lambda\, d\lambda + \\
& + \sum_{k=1}^{n} \left(A_{nk} \int_0^{2\pi} \cos k\lambda \cos s\lambda\, d\lambda + B_{nk} \int_0^{2\pi} \sin k\lambda \cos s\lambda\, d\lambda \right) P_n^k(\sin\varphi) \Bigg],
\end{aligned}
$$

сетивши се да смо имали да је $P_n(\sin\varphi) = P_n^0(\sin\varphi)$. Како је $\int_0^{2\pi} \cos s\lambda\, d\lambda = 0$, онда је први члан на десној страни горњег израза једнак нули. За $s \neq 0$ и $s \neq k$ је $\int_0^{2\pi} \cos k\lambda \cos s\lambda\, d\lambda = 0$, а за $s \neq 0$ и $s = k$ је $\int_0^{2\pi} \cos k\lambda \cos s\lambda\, d\lambda = \int_0^{2\pi} \cos^2 k\lambda\, d\lambda = \pi$, па је други члан на десној страни различит од нуле само у случају када је $s = k$, када је и уз трећи члан $\int_0^{2\pi} \sin k\lambda \cos k\lambda\, d\lambda = 0$. Стога добијамо, за $s = k$,

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) \cos k\lambda\, d\lambda = \pi \sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} P_n^k(\sin\varphi).$$

Сад обе стране ове једначине помножимо са $P_n^k(\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = P_n^k(\sin\varphi)\, d\sin\varphi$ и интегралимо у границама за φ од $-\dfrac{\pi}{2}$ до $+\dfrac{\pi}{2}$, одн. у границама x-са од -1 до $+1$, ако ставимо да је $\sin\varphi = x$, па, кад узмемо у обзир (54), добијамо

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) \cos k\lambda\, P_n^k(x)\, dx\, d\lambda &= A_{nk}\, \pi \int_{-1}^{1} [P_n^k(x)]^2\, dx = \\
&= A_{nk}\, \pi \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!},
\end{aligned} \tag{61}
$$

одакле можемо да нађемо коефицијенте A_{nk} реда (60′). Израз за коефицијенте B_{nk} добија се по сличном поступку као за A_{nk}, само за њих сад треба (60′) прво помножити са $\sin s\lambda\, d\lambda$, па бисмо добили

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) \sin k\lambda\, P_n^k(x)\, dx\, d\lambda = B_{nk}\, \pi \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \tag{62}$$

За налажење коефицијената A_{n0} интегралимо (60′) по λ у границама од 0 до 2π. Како су $\int\limits_0^{2\pi} \cos k\lambda\, d\lambda = 0$ и $\int\limits_0^{2\pi} \sin k\lambda\, d\lambda = 0$, онда је

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} P_n(\sin\varphi) \int\limits_0^{2\pi} d\lambda = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} P_n(\sin\varphi).$$

Сад ову једначину помножимо са $P_n(\sin\varphi)\, d\sin\varphi$ и интегралимо је по φ у

не

границама од $-\dfrac{\pi}{2}$ до $+\dfrac{\pi}{2}$, или по $x = \sin\varphi$ од -1 до $+1$. Добићемо да је

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda)\, P_n(x)\, dx\, d\lambda = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} A_{n0} [P_n(x)]^2 dx = \frac{4\pi}{2n+1} A_{n0}, \tag{63}$$

због особина (50), јер је $\int\limits_{-1}^{1} P_n(\sin\varphi)\, P_m(\sin\varphi)\, d\sin\varphi = 0$ за $n \neq m$, па од A_{n0} под знаком Σ (кад индекс n код A узима вредности $n \neq m$) остаје само један коефицијент A_{n0}, који одређујемо из (63).

Вратимо се реду (60). На основи (61), (62) и (63) коефицијенте тога реда добијамо помоћу

за остале коефицијенте узећемо:

$$\left.\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{(2n+1)\,(n-k)!}{2\pi\,\delta_k\,(n+k)!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda)\, P_n^k(\sin\varphi) \cos k\lambda \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda, \\ B_{nk} &= \frac{(2n+1)\,(n-k)!}{2\pi\,\delta_k\,(n+k)!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda)\, P_n^k(\sin\varphi) \sin k\lambda \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где су: $\delta_0 = 2$, $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = 1$. Коефицијенти A_{nk} и B_{nk} су потпуно одређени задатом функцијом $f(\varphi, \lambda)$ и можемо их назвати Фуријеовим коефицијентима за ту функцију.

Због подробнијег упознавања са особеностима развоја задате функције $f(\varphi, \lambda)$ у ред по сферним функцијама ближе размотримо класе сферних хармоника, који улазе у састав тога реда.

не

1. За $k = 0$ имамо хармоник $P_n^0(\sin\varphi) = P_n(\sin\varphi)$, који представља Лежандров полином n-тог степена. Дакле, тада постојећи хармоници не зависе од дужине λ. Међутим, познато је да Лежандров полином $P_n(x)$, $x = \sin\varphi$, има n реалних коренова $x_1, x_2, \ldots, x_n$, који су симетрично распоређени према $x = 0$. Другим речима, функција P_n постаје једнака нули на n паралела сфере, при чему су ти паралели симетрично распоређени према екватору сфере ($\varphi = 0$). Тим паралелима цела сфера је подељена на $n+1$ сферних, ширинских појасева или зона и при прелазу из једне у другу зону функција

не

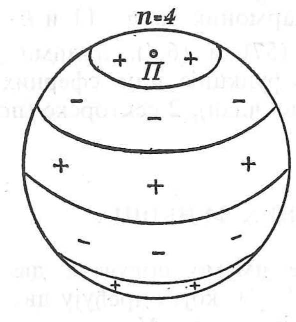
P_n мења знак. Тако Лежандрови полиноми у овако одређеним зонама имају наизменично позитивне и негативне вредности. Зато су сферни хармоници за $k = 0$, тј. Лежендрови полиноми и названи зоналним сферним функцијама или зоналним хармоницима (сл. 4 за $n = 4$, P_4 је парна функција!). Из (49), нпр., зонални хармоник трећега степена је непарна функција $P_3(x) = \dfrac{x}{2}(5x^2 - 3)$, која се анулира за коренове $x_1 = 0$, $x_2 = +\sqrt{3/5} = +0{,}77459$ и $x_3 = -\sqrt{3/5} = -0{,}77459$, тј. за вредности ширине $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = +50°\,46'$ и $\varphi_3 = -50°\,46'$, које одређују три круга на сфери. Овде су то екватор и два паралела и они деле сферу на четири зоне, у којима функција P_3 има знак као на сл. 5.

2. За $k = n$ изрази $\dfrac{d^n P_n(x)}{dx^n}$, $x = \sin\varphi$, постају константне величине, па се сферни хармоници (57) своде на

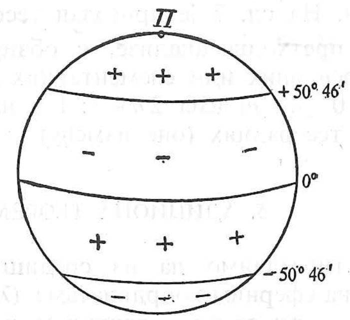
$$\cos^n\varphi \cos n\lambda, \quad \cos^n\varphi \sin n\lambda$$

помножене неким константама. Први множитељ $\cos^n\varphi$ ових функција анулира се само за $\varphi = \pm 90°$, тј. на половима сфере, па су претходни сферни хармоници једнаки нули на меридијанима сфере одређеним вредностима за λ које су решења једначина

$$\cos n\lambda = 0, \quad \sin n\lambda = 0.$$



Сл. 4

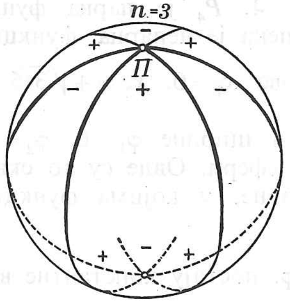


Сл. 5

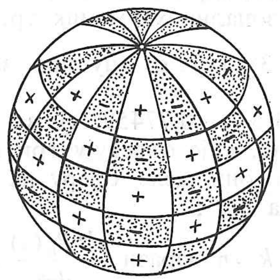
Ови меридијани су на међусобним размацима π/n и деле целу површину сфере на $2n$ сферних двоуглова или сферних сектора, у којима је сваки од два претходно наведена сферна хармоника наизменично позитиван и негативан (сл. 6 за $n = 3$). Због ове особине они су и названи секторским сферним функцијама или секторским хармоницима.

3. За $0 < k < n$, тј. за $k = 1, 2, \ldots, n-1$ сферни хармоници имају облик (57), па имамо $2n - 2$ елементарних сферних функција, кад k варирамо. Полином $\dfrac{d^k P_n(\sin\varphi)}{(d\sin\varphi)^k}$ има $n - k$ реалних коренова, којима одговарају $n - k$ вредности за φ (симетрично распоређених према екватору), тј. толико паралела који деле сферу на $n - k + 1$ зона. На тим паралелима сферни хармоници (57) постају једнаки нули, а при прелазу из једне у другу зону они наизменично мењају знак. Затим, сваки од множитеља из (57) $\cos k\lambda$ и $\sin k\lambda$ једнак је нули за $2k$ вредности дужине λ, тј. на $2k$ меридијана

сфере. Овим је сфера подељена на $2k$ сектора, који имају ширину π/k (дуж екватора). При прелазу из једног у други сектор сферне функције мењају знак.



Сл. 6



Сл. 7

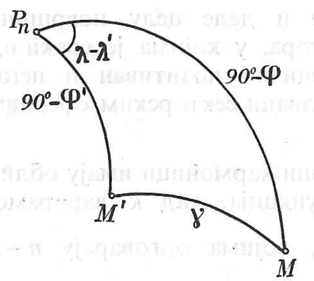
Узимајући сад заједно — мрежом претходно размотрених паралела и меридијана цела сфера је издељена на сферне четвороуглове, изузев поларних области сфере где се образују троуглови. Стога се функције, овде разматране, и називају тесералним сферним хармоницима (по грчком тесера = четири). У свака два суседна сферна четвороугла, одн. четвороугла и троугла, одн. троугла испитивани хармоник је наизменично позитиван и негативан. На сл. 7 је приказан тесерални хармоник за $n=11$ и $k=7$.

Из претходне анализе, с обзиром на (57) и (60′), видимо да n-тог степена основних или елементарних сферних функција или сферних хармоника (за $0\leqslant k\leqslant n$) има $2n+1$: 1 зонална (први члан), 2 секторске (последње) и $2n-2$ тесералних (оне између).

5. АДИЦИОНА ТЕОРЕМА СФЕРНИХ ФУНКЦИЈА

Претпоставимо да из средишта сфере имамо повучена два правца дефинисана сферним координатама (λ, φ) и (λ', φ'), које одређују две тачке M и M' на сфери са полупречником једнаким јединици. Угао γ између ова два правца или сферно растојање ових двеју тачака добијамо применом косинусног обрасца сферне тригонометрије на сферни троугао (сл. 8)

$$\cos\gamma = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda'). \quad (65)$$



Сл. 8

Напред смо видели да све елементарне сферне функције n-тог степена можемо изразити преко једне основне сферне функције — зоналног хармоника који представља Лежандров полином $P_n(x)$, где је $x=\sin\varphi$ или $x=\cos\theta$, $(\theta=90°-\varphi)$, па је он функција угла θ који заклапа позитиван правац z-осе (ка P_n полу!) с радијус-вектором тачке $M(\lambda, \varphi)$ јединичне сфере. Зато Лежандров полином има нарочито значајну улогу. Сад ћемо показати како се може наћи израз за $P_n(\cos\gamma)$ који представља важан образац, назван адиционом теоремом сферних функција.

Уведимо нови координатни систем чија оса z' пролази кроз тачку M'. Онда је у овом новом систему $P_n(\cos\gamma)$ основна сферна функција, слично претходно реченом. Међутим, ова функција је, и с обзиром на (65), сферна и у старом координатном систему, па се зато може да изрази преко елементарних сферних функција, по обрасцу (35), као

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k(\sin\varphi)\cdot(A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda), \quad (66)$$

где су коефицијенти A_{nk} и B_{nk} константни с обзиром на променљиве φ и λ али су функције од φ' и λ'. Како је $\cos\gamma$, према (65), симетрично у односу на координате тачака M и M', онда и десна страна једначине (66) такође мора да буде симетрична према овим координатама. Одавде излази да коефицијенти A_{nk} и B_{nk} треба да имају облик

$$\left.\begin{aligned} A_{nk} &= h_k P_n^k(\sin\varphi')\cos k\lambda', \\ B_{nk} &= h_k P_n^k(\sin\varphi')\sin k\lambda', \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

где h_k представља n нумеричких коефицијената. Онда (66), због (67), постаје

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} h_k P_n^k(\sin\varphi) P_n^k(\sin\varphi')\cos k(\lambda-\lambda'). \quad (68)$$

Да бисмо одредили коефицијенте h_k, размотрићемо специјалан случај једначине (68) када је $\varphi=\varphi'$, узимајући за $\cos\gamma$ одговарајући израз из (65). Због скраћеног писања ставимо да је

$$\sin\varphi = \sin\varphi' = x, \quad \lambda-\lambda' = \omega,$$

тада (68) постаје

$$P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega] = \sum_{k=0}^{n} h_k [P_n^k(x)]^2 \cos k\omega. \quad (69)$$

Међутим, за одређивање леве стране ове једначине искористићемо ранији образац (41) и применити га овде, при чему сад треба тамошње k заменити са овдашњим n, а тамошњи аргумент x замењујемо са овдашњим који фигурише у угластој загради. Тако добијамо једначину

$$\{1-2\alpha[x^2+(1-x^2)\cos\omega]+\alpha^2\}^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cdot P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega].$$

Интеграљење обе стране ове једначине по x у границама од -1 до $+1$ даје

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha(1-\cos\omega)}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_{-1}^{+1} P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx,$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos\omega}}\ \arcsin\sqrt{\frac{2\,\alpha\,(1-\cos\omega)}{1-2\,\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx.$$

Кад диференцирамо ову једначину, која представља идентичност, по α, после сређивања, добићемо

$$\frac{1+\alpha}{1-2\,\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx. \tag{70}$$

Да бисмо леву страну ове једначине развили у ред по растућим степенима величине α, узмимо у обзир да је (што се може доказати коришћењем Ојлеровог обрасца $2\cos\omega=e^{i\omega}+e^{-i\omega}$ и растављањем тако добијене рационалне функције по α на збир једноставних функција, тј. сабирака)

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\,\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha\,e^{i\omega}}+\frac{1}{1-\alpha\,e^{-i\omega}}-1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1}{n}\alpha^n e^{in\omega}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1}{n}\alpha^n e^{-in\omega}-1=$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(e^{in\omega}+e^{-in\omega})=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos n\,\omega=$$

$$=1+2\,\alpha\cos\omega+2\,\alpha^2\cos 2\,\omega+2\,\alpha^3\cos 3\,\omega+\ \ldots,$$

јер је $(-1)^n\binom{-1}{n}=+1$ и $e^{in\omega}+e^{-in\omega}=2\cos n\,\omega$. С обзиром на претходно, лева страна једначине (70) може се овако изразити

$$\frac{1+\alpha}{1-2\,\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\,\alpha\cos\omega+\alpha^2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1}{n}\alpha^n\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\,\alpha\cos\omega+\alpha^2}= \tag{71}$$

$$=(1+\alpha+\alpha^2+\cdots)\,(1+2\,\alpha\cos\omega+2\,\alpha^2\cos 2\,\omega+2\,\alpha^3\cos 3\,\omega+\cdots)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(1+2\cos\omega+2\cos 2\,\omega+2\cos 3\,\omega+\cdots+2\cos n\,\omega).$$

Упоређењем ове једначине са једначином (70), за неко изабрано n, добијамо

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx=1+2\cos\omega+2\cos 2\,\omega+2\cos 3\,\omega+$$

$$+\cdots+2\cos n\,\omega,$$

или

$$\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\cos k\,\omega, \tag{72}$$

где су δ_k као раније: $\delta_0=2,\ \delta_1=\delta_2=\cdots=1$.

Међутим, ако интегралимо једначину (69) по x у границама од -1 до $+1$, добићемо

$$\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx=\sum_{k=0}^{n}h_k\cos k\,\omega\int_{-1}^{+1}[P_n^k(x)]^2\,dx=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}h_k\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cos\omega, \tag{73}$$

кад искористимо одговарајућу релацију (54). Пошто су леве стране једначина (72) и (73) идентичне, морају и десне стране да им буду једнаке, тј. коефицијенти уз изабрано $\cos k\,\omega$, па се добија да је

$$h_k=\frac{2}{\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}. \tag{74}$$

Онда (68), због (74), постаје

$$P_n(\cos\gamma)=P_n[\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda')]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\,P_n^k(\sin\varphi)\,P_n^k(\sin\varphi')\cos k\,(\lambda-\lambda'), \tag{75}$$

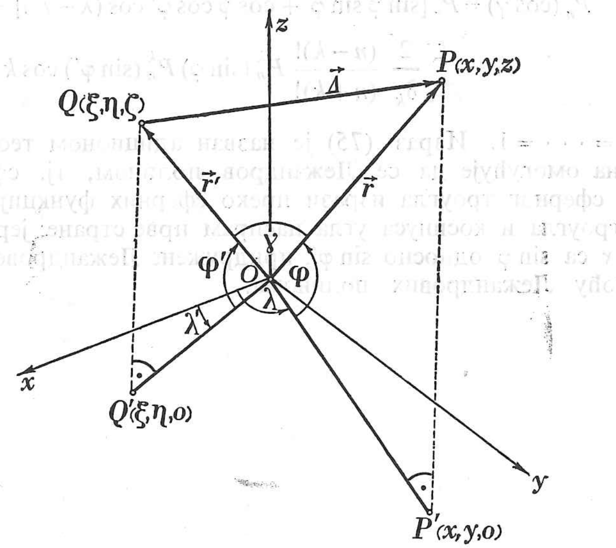
$\delta_0=2,\ \delta_1=\delta_2=\cdots=1$. Израз (75) је назван адиционом теоремом сферних функција. Она омогућује да се Лежандров полином, тј. сферна функција једне стране сферног троугла изрази преко сферних функција осталих двеју страна тог троугла и косинуса угла наспрам прве стране, јер се, према (51), замењујући x са $\sin\varphi$ односно $\sin\varphi'$, придружене Лежандрове функције могу добити помоћу Лежандрових полинома.

II. РАЗВОЈ ГРАВИТАЦИОНОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

6. РАЗВОЈ ПОТЕНЦИЈАЛА ЧВРСТОГ ТЕЛА У РЕД ПО СФЕРНИМ ФУНКЦИЈАМА

Гравитациони потенцијал U чврстог тела можемо да изразимо редом преко сферних функција кад пођемо од ранијег израза (21), при чему постоји (18), па са правоуглих екваторских координата тачака P и Q, као на сл. 1 и сл. 9, пређемо на њихове сферне координате (r, φ, λ) и (r', φ', λ'), а између којих постоје везе

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi\cos\lambda, & y&=r\cos\varphi\sin\lambda, & z&=r\sin\varphi,\\ \xi&=r'\cos\varphi'\cos\lambda', & \eta&=r'\cos\varphi'\sin\lambda', & \zeta&=r'\sin\varphi'. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$



Сл. 9

Онда је косинус угла γ између вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ и $\vec{r}\,'=\overrightarrow{OQ}$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{rr'}=\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{rr'}, \tag{77}$$

што је једнако са (65). Сада, уместо (18), за растојање Δ између текуће тачке Q чврстог тела и тачке P изван овог тела добијамо

$$\Delta=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}, \tag{78}$$

што може да се изрази преко φ, φ', λ, λ' с обзиром на (65).

У потенцијалу (21) израз $1/\Delta$ фигурише у подинтегралној функцији, па ћемо га развити у ред по Лежандровим полиномима. Како нас интересује кретање вештачких сателита, размотрићемо случај када је $r>r'$. Из (78) и израза (41) за развијање функције генератрисе (при чему ћемо сада узети да је промењљиви параметар n, уместо тамошњег k) добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}&=\frac{1}{r}\left[1-2\frac{r'}{r}\cos\gamma+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma),\end{aligned} \tag{79}$$

пошто је овде у односу на (41) $\alpha=\dfrac{r'}{r}$, $x=\cos\gamma$.

Изузмемо ли специјалан случај када је $x=\pm 1$, тј. $P_n(\pm 1)=(\pm 1)^n$, па узмемо да је[1)]

$$|P_n(x)|<1 \quad \text{за} \quad n>0 \quad \text{и} \quad |x|<1, \tag{80}$$

онда модул општег члана реда (79) задовољава неједнакост

$$\left|\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)\right|<\frac{r'^n}{r^{n+1}}.$$

На основи усвојене претпоставке $(\max r'\leqslant r^*<r)$ је $\dfrac{r'}{r}<q<1$ и због (80) претходни израз постаје

$$\left|\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)\right|<\frac{q^n}{r}. \tag{81}$$

Међутим, како је ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{r}$$

апсолутно конвергентан, онда је и ред (79) апсолутно конвергентан. Додајмо да је он и равномерно конвергентан. Његов остатак

$$R_m=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

задовољава неједнакост

$$|R_m|<\sum_{n=m}^{\infty}\frac{q^n}{r}=\frac{q^m}{r(1-q)},$$

1) Г. Н. Дубошин — Небесная механика, 1968, стр. 170—172, 207—208.

с обзиром на (80) и да је

$$(1-q)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{-1}{\nu}q^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{\nu},$$

јер је $(-1)^{\nu}\binom{-1}{\nu}=+1.$

Потенцијал (21), после смене (79) за $1/\Delta$, постаје

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\iiint\limits_{V} r'^{\,n}P_n(\cos\gamma)\,\varkappa\,dV. \tag{82}$$

Овај ред добија други облик после смене за Лежандров полином $P_n(\cos\gamma)$ помоћу адиционе теореме сферних функција, (75). Тако добијамо

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\,(n-k)!}{\delta_k\,(n+k)!}P_n^k(\sin\varphi)\Bigg[\cos k\lambda\int\limits_V r'^{\,n}P_n^k(\sin\varphi')\cdot$$

$$\cdot\cos k\lambda'\cdot\varkappa\,dV+\sin k\lambda\int\limits_V r'^{\,n}P_n^k(\sin\varphi')\sin k\lambda'\cdot\varkappa\,dV\Bigg],$$

где смо сада код интеграла по запремини V уместо троструког написали једноструки интеграл, што можемо због очигледности, а да бисмо скратили писање[1]. Уведимо ознаке

$$\left.\begin{aligned}C_{nk}&=\frac{1}{M r_0^n}\cdot\frac{2\,(n-k)!}{\delta_k\,(n+k)!}\int\limits_V r'^{\,n}P_n^k(\sin\varphi')\cos k\lambda'\cdot\varkappa\,dV,\\ D_{nk}&=\frac{1}{M r_0^n}\cdot\frac{2\,(n-k)!}{\delta_k\,(n+k)!}\int\limits_V r'^{\,n}P_n^k(\sin\varphi')\sin k\lambda'\cdot\varkappa\,dV,\end{aligned}\right\}\tag{83}$$

при чему ови коефицијенти зависе само од облика и распореда масе чврстог тела. Маса његова је

$$M=\int\limits_V\varkappa\,dV,$$

а r_0 је дужинска јединица. Онда претходни потенцијал постаје

$$U=\frac{fM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n}P_n^k(\sin\varphi)\,(C_{nk}\cos k\lambda+D_{nk}\sin k\lambda). \tag{84}$$

Међутим, ако заменимо линеарну комбинацију сферних хармоника у (84) са општом сферном функцијом, онда потенцијал можемо да представимо редом у облику

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\varphi,\lambda)}{r^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n. \tag{85}$$

[1] Р. Кашанин — Виша математика II, књ. друга, 1950, стр. 380

Израчунајмо прве чланове реда (85) за потенцијал чврстог тела, узимајући у обзир (84), (83), (49), (55), где је $x=\sin\varphi$, као и (76).

1. Ако је $n=0$, онда је $k=0$, па је

$$U_0=\frac{fM}{r}P_0^0\,C_{00}.$$

Из (49) је $P_0^0(\sin\varphi)=P_0(\sin\varphi)=1$, а из (83) је

$$C_{00}=\frac{1}{M}\int\limits_V\varkappa\,dV=\frac{1}{M}\int\limits_V dM=\frac{M}{M}=1,$$

те је први члан у реду (85)

$$U_0=\frac{fM}{r}, \tag{86}$$

што одговара гравитационом потенцијалу материјалне тачке, тј. кад би се целокупна маса чврстог тела могла концентрисати у једној тачки, која би била његов заступник.

2. Ако је $n=1$, онда је $k=0,\,1$, па је

$$U_1=\frac{fM}{r}\cdot\frac{r_0}{r}\,[P_1^0(\sin\varphi)\cdot C_{10}+P_1^1(\sin\varphi)\cdot(C_{11}\cos\lambda+D_{11}\sin\lambda)].$$

Из (49) и (55) имамо

$$P_1^0(\sin\varphi)=P_1(\sin\varphi)=\sin\varphi,\qquad P_1^1(\sin\varphi)=\cos\varphi,$$

а (83), с обзиром на (76), даје

$$\left.\begin{aligned}C_{10}&=\frac{1}{M r_0}\int\limits_V r'\sin\varphi'\cdot\varkappa\,dV=\frac{1}{M r_0}\int\limits_V\zeta\cdot\varkappa\,dV=\frac{z_c}{r_0},\\ C_{11}&=\frac{1}{M r_0}\int\limits_V r'\cos\varphi'\cos\lambda'\cdot\varkappa\,dV=\frac{1}{M r_0}\int\limits_V\xi\cdot\varkappa\,dV=\frac{x_c}{r_0},\\ D_{11}&=\frac{1}{M r_0}\int\limits_V r'\cos\varphi'\sin\lambda'\cdot\varkappa\,dV=\frac{1}{M r_0}\int\limits_V\eta\cdot\varkappa\,dV=\frac{y_c}{r_0},\end{aligned}\right\}\tag{87}$$

јер су $x_c,\,y_c,\,z_c$ координате центра масе (центра инерције) или тежишта тела дате изразима, као што је познато из рационалне механике[1],

$$x_c=\frac{\int\limits_V\xi\varkappa\,dV}{M},\qquad y_c=\frac{\int\limits_V\eta\varkappa\,dV}{M},\qquad z_c=\frac{\int\limits_V\zeta\varkappa\,dV}{M}. \tag{88}$$

Зато је

$$U_1=\frac{fM}{r^2}(\sin\varphi\cdot z_c+\cos\varphi\cos\lambda\cdot x_c+\cos\varphi\sin\lambda\cdot y_c).$$

[1] Т. Анђелић, Р. Стојановић — Рационална механика, 1966, стр. 311—312.

Како је, из (76),

$$\sin\varphi=\frac{z}{r}, \quad \cos\varphi\cos\lambda=\frac{x}{r}, \quad \cos\varphi\sin\lambda=\frac{y}{r},$$

онда је

$$U_1=\frac{fM}{r^3}(x\,x_c+y\,y_c+z\,z_c). \tag{89}$$

Ако би почетак координатног система био у центру инерције разматраног тела (када је $x_c=y_c=z_c=0$, па је и $C_{10}=C_{11}=D_{11}=0$), онда би други члан развоја његовог гравитационог потенцијала био једнак нули, $U_1=0$.

3. Ако је $n=2$, онда је $k=0, 1, 2$, па је

$$U_2=\frac{fM}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left[P_2^0(\sin\varphi)\cdot C_{20}+P_2^1(\sin\varphi)\cdot(C_{21}\cos\lambda+D_{21}\sin\lambda)+\right.$$
$$\left.+P_2^2(\sin\varphi)\cdot(C_{22}\cos 2\lambda+D_{22}\sin 2\lambda)\right].$$

Из (49) и (55), где треба узети $x=\sin\varphi$, налазимо

$$P_2^0(\sin\varphi)=P_2(\sin\varphi)=\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}, \quad P_2^1(\sin\varphi)=3\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$P_2^2(\sin\varphi)=3\cos^2\varphi;$$

док коефицијенти (83), с обзиром на (76) и изразе сличне претходним за $P_n^k(\sin\varphi')$, дају

$$\left.\begin{aligned}
C_{20}&=\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V r'^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi'-\frac{1}{2}\right)\varkappa\,dV=\\
&=\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V\left[\frac{2\zeta^2+\xi^2+\eta^2}{2}-(\xi^2+\eta^2)\right]\varkappa\,dV,\\
C_{21}&=\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V r'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\cos\lambda'\cdot\varkappa\,dV=\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V\xi\zeta\varkappa\,dV,\\
D_{21}&=\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V r'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\sin\lambda'\cdot\varkappa\,dV=\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V\eta\zeta\varkappa\,dV,\\
C_{22}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V r'^2\cos^2\varphi'\cos 2\lambda'\cdot\varkappa\,dV=\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V(\xi^2-\eta^2)\,\varkappa\,dV,\\
D_{22}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{M r_0^2}\int\limits_V r'^2\cos^2\varphi'\sin 2\lambda'\cdot\varkappa\,dV=\frac{1}{2M r_0^2}\int\limits_V\xi\eta\varkappa\,dV.
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Изрази (90) могу да се напишу у другом облику, ако уведемо аксијалне моменте инерције[1)] у односу на координатне осе Ox, Oy и Oz

$$A=\int\limits_V\varkappa(\eta^2+\zeta^2)\,dV, \quad B=\int\limits_V\varkappa(\xi^2+\zeta^2)\,dV, \quad C=\int\limits_V\varkappa(\xi^2+\eta^2)\,dV \tag{91}$$

и девијационе или центрифугалне моменте (производе инерције)

$$D=\int\limits_V\varkappa\,\eta\,\zeta\,dV, \quad E=\int\limits_V\varkappa\,\xi\,\zeta\,dV, \quad F=\int\limits_V\varkappa\,\xi\,\eta\,dV. \tag{92}$$

Онда изрази (90), због (91) и (92), постају

$$\left.\begin{aligned}
C_{20}&=\frac{1}{M r_0^2}\left(\frac{A+B}{2}-C\right), \quad C_{21}=\frac{E}{M r_0^2}, \quad D_{21}=\frac{D}{M r_0^2},\\
C_{22}&=\frac{B-A}{4M r_0^2}, \quad D_{22}=\frac{F}{2M r_0^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

После смене (93) и напред написаних Лежандрових придружених функција у израз за U_2 добијамо

$$U_2=\frac{f}{r^3}\left[\left(\frac{A+B}{2}-C\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)+(E\cos\lambda+D\sin\lambda)\,3\sin\varphi\cos\varphi+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{B-A}{4}\cos 2\lambda+\frac{F}{2}\sin 2\lambda\right)3\cos^2\varphi\right]. \tag{94}$$

Овај израз можемо да трансформишемо и напишемо у облику преко r и правоуглих координата тачке P изван чврстог тела, узимајући у обзир (76),

$$U_2=\frac{f}{2r^5}\left[(B+C-2A)\,x^2+(A+C-2B)\,y^2+\right.$$
$$\left.+(A+B-2C)\,z^2+6Dyz+6Exz+6Fxy\right]. \tag{95}$$

Ако координатне осе представљају главне осе инерције, онда су производи инерције једнаки нули, тј. $D=E=F=0$, одн. $C_{21}=D_{21}=D_{22}=0$ због (93), па у том случају из (94) и (95) добијамо једноставнији облик за U_2

$$U_2=\frac{f}{r^3}\left[\left(\frac{A+B}{2}-C\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}(B-A)\cos^2\varphi\cos 2\lambda\right], \tag{96}$$

односно

$$U_2=\frac{f}{2r^5}\left[(B+C-2A)\,x^2+(A+C-2B)\,y^2+\right.$$
$$\left.+(A+B-2C)\,z^2\right]. \tag{97}$$

Даље ћемо претпоставити, ако супротно није напоменуто, да су осе координатног система главне осе инерције чврстог тела[2)]. Са овим ограничењем

[1)] Т. Анђелић, Р. Стојановић — Рационална механика, 1966, стр. 332 — 333.

[2)] Исто, стр. 339.

3*

и нађеним првим члановима (86), (89), (96), одн. (97) добијамо овај приближан израз за гравитациони потенцијал

$$\begin{aligned} U &= \frac{fM}{r} + \frac{fM}{r^2}(x_c \cos\varphi \cos\lambda + y_c \cos\varphi \sin\lambda + z_c \sin\varphi) + \\ &+ \frac{f}{r^3}\left[\frac{A+B-2C}{2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}(B-A)\cos^2\varphi \cos 2\lambda\right] = \\ &= \frac{fM}{r}\left[1 + \frac{1}{r^2}(xx_c + yy_c + zz_c)\right] + \frac{f}{2r^5}[(B+C-2A)x^2 + \\ &+ (A+C-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2]. \end{aligned} \tag{98}$$

Ако је још почетак координатног система $Oxyz$ у центру инерције T чврстог тела, онда су координатне осе главне централне осе инерције, па из (98) добијамо још простији израз за потенцијал

$$\begin{aligned} U(r, \varphi, \lambda) &= \frac{fM}{r} + \frac{f}{r^3}\left[\frac{A+B-2C}{2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4}(B-A)\cos^2\varphi \cos 2\lambda\right] + \cdots, \end{aligned} \tag{99}$$

или

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^5}[(B+C-2A)x^2 + \\ &+ (A+C-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2] + \cdots, \end{aligned} \tag{100}$$

где је $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Дакле, општи израз за развој потенцијала силе привлачења чврстог тела када координатни систем има почетак у тежишту овог тела, с обзиром на (84) и претходне закључке, може да се напише у облику

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sum_{k=0}^{n}(C_{nk}\cos k\lambda + D_{nk}\sin k\lambda)\cdot P_n^k(\sin\varphi)\right], \tag{101}$$

или у другом одговарајућем облику, ако у (101) ставимо за $k=0$ да је $C_{n0} = -J_n = I_n = I_{n0}$ (све ознаке које се користе) онда је

$$\begin{aligned} U = \frac{fM}{r}&\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n (C_{nk}\cos k\lambda + \right. \\ &\left. + D_{nk}\sin k\lambda)\cdot P_n^k(\sin\varphi)\right]. \end{aligned} \tag{101'}$$

Међутим, ако уведемо још $J_{nk} = I_{nk}$ и λ_{nk} за $k \neq 0$ помоћу дефиниционих једначина

$$C_{nk} = J_{nk}\cos k\lambda_{nk}, \quad D_{nk} = J_{nk}\sin k\lambda_{nk},$$

при чему је

$$J_{nk} = I_{nk} = \sqrt{C_{nk}^2 + D_{nk}^2}, \quad \operatorname{tg} k\lambda_{nk} = \frac{D_{nk}}{C_{nk}}$$

и узмемо другу ознаку за Лежандрове придружене функције $P_n^k = P_{nk}$, онда добијамо и овај облик за потенцијал

$$\begin{aligned} U = \frac{fM}{r}&\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} J_{nk}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot \right. \\ &\left. \cdot P_{nk}(\sin\varphi)\cos k(\lambda - \lambda_{nk})\right], \end{aligned} \tag{101''}$$

или још краћи облик, који се исто често користи,

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} I_{nm}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_{nm}\left(\frac{z}{r}\right)\cdot \cos m(\lambda - \lambda_{nm})\right], \tag{101'''}$$

где је $\dfrac{z}{r} = \sin\varphi$, $m = k$.

Ако уведемо нове функције $P_n^{(k)}$ преко Лежандрових асоцираних функција

$$P_n^{(k)}(\sin\varphi) = \sqrt{\frac{2(n-k)!\,(2n+1)}{(n+k)!}}\,P_n^k(\sin\varphi)$$

и уведемо нове коефицијенте $\overline{C}_{nk}$ и $\overline{D}_{nk}$, који су са старим повезани изразима

$$\overline{C}_{nk} = C_{nk}\sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!\,(2n+1)}}, \quad \overline{D}_{nk} = D_{nk}\sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!\,(2n+1)}},$$

онда (101′) даје

$$\begin{aligned} U = \frac{fM}{r}&\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cdot \right. \\ &\left. \cdot(\overline{C}_{nk}\cos k\lambda + \overline{D}_{nk}\sin k\lambda)\right]. \end{aligned} \tag{101$^{\mathrm{IV}}$}$$

Из претходних различитих облика за U није тешко закључити да оно може да има и облик

$$U = \frac{a_{00}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda)\cdot P_n^k(\sin\varphi). \tag{102}$$

Тако смо изложили комплетно све значајне опште изразе за U. Међународна астрономска унија је препоручила да се за гравитациони потенцијал користи израз у облику (101′). У претходним изразима величине J_n, I_n, J_{nk}, I_{nk}, I_{nm}, C_{nk}, D_{nk} су константе без димензија и оне карактеришу облик разматраног тела.

Први члан у узразима за U од (101) до (102) даје потенцијал силе привлачења лоптастог тела, које може да се замени материјалном тачком. У обрасцима (101′), (101″) и (101$^{\mathrm{IV}}$) чланови са Лежандровим полиномима $P_n(\sin\varphi)$, тада је $k=0$, су зонални хармоници; чланови са придруженим Лежандровим функцијама за које $k \neq n$ су тесерални хармоници, а они чланови за које је $k=n$ су секторски хармоници. Како тесерални и секторски хармоници зависе од лонгитуде λ, они су карактеристични за разлику разматраног тела од тела са динамичком симетријом у односу на осу његове ротације.

7. ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ СФЕРОИДА

Размотримо сада како изгледа општи израз за гравитациони потенцијал чврстог тела ако оно има специјалан облик сфероида или ротационог спљоштеног елипсоида, чију површ добијамо ротацијом елипсе с полуосама a и b $(a>b)$ око њене мале осе. Овакво тело има геометријску симетрију у односу на осу ротације и у односу на екваторску раван, која пролази кроз центар елипсоида и нормална је на оси ротације. Узмимо да је координатни почетак у центру елипсоида, да се Oz оса поклапа са осом ротације ротационог елипсоида, па су друге две осе у екваторској равни нормалне једна на другу.

Без икакве претпоставке о структури или расподели масе овог тела функција силе његовог привлачења спољне материјалне тачке (r, φ, λ) или његов гравитациони потенцијал у спољној тачки можемо да изразимо, због (85), (84) и (83), у облику

$$U(r, \varphi, \lambda)=f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\varphi, \lambda)}{r^{n+1}}, \tag{103}$$

где су сферне функције $Y_n(\varphi, \lambda)$ дате изразом

$$Y_n(\varphi, \lambda)=\sum_{k=0}^{n}(A_{nk} \cos k\lambda+B_{nk} \sin k\lambda) \cdot P_n^k(\sin\varphi), \tag{104}$$

а коефицијенти у њима зависе од облика тела, његовог положаја у простору према систему $Oxyz$ и од његове структуре, тј. расподеле материје која га чини. Они су представљени изразима

$$A_{nk}=\frac{2}{\delta_k} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_V r'^n P_n^k(\sin\varphi') \cos k\lambda' \, dm, \tag{105}$$

$$B_{nk}=\frac{2}{\delta_k} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_V r'^n P_n^k(\sin\varphi') \sin k\lambda' \, dm, \tag{106}$$

где су: $\delta_0=2$, $\delta_1=\delta_2=\cdots=1$; V је запремина тела чији нас потенцијал интересује. Елемент масе сфероида је

$$dm=\varkappa\, dV=\varkappa(r', \varphi', \lambda')\, r'^2 \cos\varphi'\, dr'\, d\varphi'\, d\lambda', \tag{107}$$

где су r', φ', λ' сферне координате текуће тачке сфероида; $\varkappa$ је густина у тој тачки сфероида. Интеграљење се врши по целој запремини сфероида.

1. Сад уводимо даљу претпоставку за ово чврсто тело и размотримо простији случај. Нека његова структура буде таква да су површи једнаке густине у телу такође ротационе око осе ротације елипсоида. Онда ово тело има не само геометријску већ и механичку симетрију у односу на једну исту осу. Очигледно, тада густина не зависи од лонгитуде λ'. Дакле, густина у текућој тачки оваквог сфериода сад ће бити функција само од r' и φ'. Зато развој потенцијала (103) по сферним функцијама (104), због њихових коефицијената (105) и (106), а с обзиром на (107) и водећи рачуна да је сад $\varkappa=\varkappa(r', \varphi')$, добија једноставнији облик. Коефицијенти (105)

и (106) се добијају после интеграљења по целој запремини оваквог тела, што доводи до интеграла по λ'

$$\int_0^{2\pi} \cos k\lambda'\, d\lambda' \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \sin k\lambda'\, d\lambda',$$

који су сви једнаки нули за $k=1, 2, 3, \ldots$, а само је први интеграл једнак 2π за $k=0$. Према томе, за разматрани геометријски и механички осно-симетрични сфериод сви коефицијенти A_{nk} и B_{nk} су нуле изузев коефицијената A_{n0}, за $k=0$. Онда из реда (103) добијамо одговарајући потенцијал оваквог сфериода у спољној тачки

$$U(r, \varphi)=f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0} P_n(\sin\varphi)}{r^{n+1}}, \tag{108}$$

зато што је $P_n^0=P_{n0}=P_n$ Лежандров полином n-тог степена. Овај ред је униформно и апсолутно конвергентан у области $r>a$ и не зависи од лонгитуде λ спољне тачке P коју сфероид привлачи, што је последица наведене његове симетрије.

Одредимо коефицијенте A_{n0} реда (108). Како у овом случају густина $\varkappa$ не зависи од лонгитуде λ' текуће тачке Q сфероида, онда (105) за $k=0$ и (107) дају

$$A_{n0}=\int_V r'^n P_n^0(\sin\varphi')\, dm=\int_V r'^{n+2} P_n(\sin\varphi') \cdot \varkappa(r', \varphi') \cdot$$
$$\cdot \cos\varphi'\, dr'\, d\varphi'\, d\lambda',$$

одакле, после интеграљења по λ' у границама од 0 до 2π, добијамо

$$A_{n0}=2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n(\sin\varphi') \cos\varphi'\, d\varphi' \int_0^{R(\varphi')} \varkappa(r', \varphi')\, r'^{n+2}\, dr'. \tag{109}$$

Горња граница унутрашњег интеграла узима се из једначине спољне површи тела, односно из једначине елипсе изводнице коју можемо написати као

$$r=R(\varphi) \quad \text{или} \quad r=R(\nu),$$

где је $\nu=\sin\varphi$. Како густину $\varkappa(Q)$ можемо сматрати и као функцију од r' и $\nu'=\sin\varphi'$, онда уместо (109) можемо да напишемо

$$A_{n0}=2\pi \int_{-1}^{+1} P_n(\nu')\, d\nu' \int_0^{R(\nu')} \varkappa(r', \nu')\, r'^{n+2}\, dr'. \tag{110}$$

2. Ако чврст сфероид из претходне тачке има још и механичку симетрију према екваторској равни, тј. тело задовољава и допунски услов да густина има особину

$$\varkappa(r', -\nu')=\varkappa(r', \nu')$$

или

$$\varkappa(-\xi', \eta', \zeta') = \varkappa(\xi', -\eta', \zeta') = \varkappa(\xi', \eta', -\zeta') = \varkappa(\xi', \eta', \zeta'),$$

онда израз за развој његовог потенцијала има облик простији од претходног. Центар елипсоида је тада центар симетрије и центар инерције (центар масе) оваквог сфероида. Према томе, ако је у овом центру симетрије узет почетак координатног система, чија се Oz оса поклапа са осом ротације сфероида, а координатна раван xOy је екваторска раван и раван симетрије, и координатне осе, као осе симетрије, су главне централне осе инерције. Онда су сви коефицијенти A_{n0} с непарним индексом n једнаки нули[1]. Овај закључак се изводи што се тада интеграљење своди на интеграле који су једнаки нули. Тако се појављује, на пример, и интеграл облика

$$\int_V \Phi(Q)\,\zeta'\,dm = \int_{V_1} \Phi(Q)\,\zeta'\,dm + \int_{V_2} \Phi(Q)\,\zeta'\,dm,$$

где је $\Phi(Q)$ нека функција, која није негативна, текуће тачке $Q(\xi', \eta', \zeta')$ сфероида, при чему је његова запремина $V = 2V_1$, $V_1 = V_2$. Стављајући у другом интегралу да је $\zeta' = -z'$ (због симетрије према xOy равни) и водећи рачуна о симетрији области интеграљења и особини функције $\Phi(Q)$, за узети пример добијамо да је

$$\int_V \Phi(Q)\,\zeta'\,dm = \int_{V_1} \Phi(Q)\,\zeta'\,dm - \int_{V_2} \Phi(Q)\,z'\,dm = 0,$$

јер су последња два интеграла међусобно једнака.

За овде разматрани сфероид потенцијал има израз, кад у (108) уместо n уведемо парни индекс $2n$,

$$U(r, \varphi) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,0}\,P_{2n}(\sin\varphi)}{r^{2n+1}}, \tag{111}$$

где је, кад у (109) индекс n заменимо парним индексом $2n$,

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_{2n}(\sin\varphi')\cos\varphi'\,d\varphi' \int_0^{R(\varphi')} \varkappa(r', \varphi')\,r'^{2n+2}\,dr', \tag{112}$$

или

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_{2n}(\nu')\,d\nu' \int_0^{R(\nu')} \varkappa(r', \nu')\,r'^{2n+2}\,dr'. \tag{113}$$

3. Посебно је интересантан случај када је чврсто тело хомогени ротациони спљоштени елипсоид или сфероид са константном густином у свим његовим тачкама. Нађимо израз за његов гравитациони потенцијал. Тада се просто израчунавају интеграли за његове коефицијенте.

[1] Г. Н. Дубошин — Небесная механика, 1968, стр. 234.

Узимајући да је оса Oz оса ротационог елипсоида, онда је једначина спољне површи овога тела

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ако са правоуглих координата тачке на овој површи пређемо на њене сферне координате, помоћу једначина (10), добићемо одговарајућу једначину у сферним координатама

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1.$$

Уводећи смене $a^2 - b^2 = b^2 l^2$ и $\sin\varphi = \nu$ добијамо

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + l^2\nu^2}} = R(\nu).$$

Онда из (113) и претходног, стављајући да је $\varkappa = \text{const.}$, налазимо

$$A_{2n,0} = 2\pi\varkappa \int_{-1}^{+1} P_{2n}(\nu')\,d\nu' \int_0^{R(\nu')} r'^{2n+2}\,dr' =$$

$$= \frac{2\pi\varkappa}{2n+3} \int_{-1}^{+1} R^{2n+3}(\nu')\,P_{2n}(\nu')\,d\nu' =$$

$$= \frac{2\pi\varkappa\,a^{2n+3}}{2n+3} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(\nu')\,d\nu'}{(1 + l^2\nu'^2)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Интеграл у овом изразу налазимо по Лежандровој формули[1]

$$I_n(p) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(x)\,dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(-p)^n}{(1+p)^{n+1/2}},$$

где је $P_{2n}(x)$ Лежандров полином степена $2n$. Тако, стављајући да је $p = l^2$ и $x = \nu'$, добијамо

$$A_{2n,0} = \frac{4\pi\varkappa\,a^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(-l^2)^n}{(1+l^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

[1] Г. Н. Дубошин — Небесная механика, 1968, стр. 192—195. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик — Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва, 1962, стр. 836.

Овај израз можемо даље да трансформишемо, ако узмемо у обзир да је из смене $1+l^2=a^2/b^2$, и тако добијамо

$$A_{2n,0}=4\pi\varkappa a^2 b\frac{(-1)^n l^{2n} b^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}. \tag{114}$$

Маса M хомогеног спљоштеног ротационог елипсоида са полуосама a и b је $M=V\varkappa$, а његова запремина је $V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$ [1], па је

$$M=\frac{4}{3}\pi a^2 b\varkappa.$$

Зато добијамо да је

$$A_{2n,0}=3M\frac{(-1)^n l^{2n} b^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}. \tag{115}$$

Тако за хомогени сфероид потенцијал (111), због (115), у спољној тачки може да се напише у облику реда по Лежандровим полиномима парног степена

$$U(r,\varphi)=\frac{fM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{b}{r}\right)^{2n}\cdot P_{2n}(\sin\varphi), \tag{116}$$

који је апсолутно и равномерно конвергентан у области $r>a$, тј. изван сфере са полупречником једнаким великој полуоси сфероида и центром у његовом средишту.

Најзад, из (111) видимо да функцију силе привлачења или гравитациони потенцијал ротационог елипсоида са механичком симетријом према оси ротације и екваторској равни, у области $r>a$, можемо да изразимо у облику

$$U(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n,0}}{r^{2n+1}}P_{2n,0}(\sin\varphi), \tag{117}$$

где су $a_{2n,0}$ коефицијенти; уместо $P_{2n,0}$ могли смо да напишемо само P_{2n} за Лежандрове полиноме парног степена.

8. ПОТЕНЦИЈАЛ ЗЕМЉИНОГ ПРИВЛАЧЕЊА

Једначина (20) одређује гравитационо убрзање неке тачке $P(x, y, z)$ ка Земљи, ако познајемо њен гравитациони потенцијал $U(x, y, z)$. При овоме се појављује проблем познавања расподеле маса унутар Земље, што до сада практично не знамо. Међутим, извесно решење ипак можемо да нађемо помоћу Стоксове основне теореме[2] теорије потенцијала: за одређивање гравитационог потенцијала у целом спољнем простору који окружује неко тело, које привлачи и које ротира сталном угаоном брзином, довољно је познавати укупну масу M тог тела, угаону брзину његове ротације ω и облик

[1] Т. Пејовић — Математичка анализа II, Београд, 1956, стр. 268.
[2] Н. П. Грушинский — Теория фигуры Земли, Москва, 1963, стр. 19, 224.

његове површи. За неку тачку (x, y, z) површи тела, које привлачи и ротира, показује се да она задовољава ову једначину еквипотенцијалне површи[1]

$$U(x,y,z)+U_1(x,y,z)=\text{const}, \tag{118}$$

где је $U_1(x, y, z)$ аксифугални (центрифугални) потенцијал. Он је функција аксифугалног убрзања, које је једнако центрифугалној сили за јединичну масу и може се одредити из

$$U_1=\int\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1=\int F_1\,dr_1=\int f(r_1)\,dr_1=\int\omega^2 r_1\,dr_1=\frac{\omega^2 r_1^2}{2}, \tag{119}$$

где је угаона брзина $\omega=\text{const}$, а $r_1=\sqrt{x^2+y^2}$ је растојање тачке од осе ротације. $\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1$ је елементаран рад јединичне масе на елементарном померању $d\vec{r}_1$, а која има аксифугално убрзање

$$\vec{F}_1=\frac{V^2}{r_1}\vec{r}_{10}=\frac{(\omega r_1)^2}{r_1}\vec{r}_{10}=\omega^2 r_1\vec{r}_{10},$$

где је $\vec{r}_{10}=\frac{\vec{r}_1}{r_1}$ јединични вектор нормалан на осу ротације, а $F_1=|\vec{F}_1|=$ $=f(r_1)=\omega^2 r_1$. V је линеарна брзина тачке због ротације тела.

Приметимо да аксифугални потенцијал не зависи од масе и облика тела које нам представља Земљу. Тако, за еквипотенцијалну (изравнату) површ, због (118) и (119), можемо да напишемо једначину

$$U(x,y,z)=\text{const}-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2). \tag{120}$$

Потенцијал силе теже Ψ је збир гравитационог Земљиног потенцијала U и аксифугалног потенцијала U_1

$$\Psi=U+U_1, \tag{121}$$

па је убрзање силе Земљине теже

$$\text{grad}\,\Psi. \tag{122}$$

Због наведене теореме за израчунавање потенцијала Земљиног привлачења није неопходно познавање распореда масе у Земљиној унутрашњости, него је потребно знати облик њене површи. Дакле, одређеној површи Земље одговара одређено поље Земљиног привлачења, ако знамо укупну Земљину масу и угаону брзину њене ротације.

Тачна Земљина површ је она коју ми видимо. Она је врло сложена и неправилна, а обично се апроксимира геоидом — хипотетичном изравнатом (нивоском, еквипотенцијалном) површи која одговара потенцијалу силе Земљине теже. Ова се површ поклапа с површи мирног океана, продуженом испод континената, где би она била одређена нивоом воде у мрежи канала, који би били повезани с океаном, при услову да су сачуване све

[1] П. Е. Эльясберг — Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, Москва, 1965, стр. 311.

масе над њима. Геоид је неправилна површ и не може се просто математички изразити. Нормала у свакој тачки ове нивоске површи има правац силе теже. Одређивање геоида врши се помоћу упоређења са једном релативно блиском јој и једноставнијом површи, која се просто може изразити математички. То је површ референц елипсоида, или површ спљоштеног елипсоида ротације или површ сфероида, која представља површ упоређења.

Тачан рачун параметара путање Земљиног вештачког сателита захтева да се за Земљину површ узме геоид. Њему одговара потенцијал Земљиног привлачења у облику једног од редова: (84), (101), (101′), (101″), (101‴), (101^{IV}) или (102). И за гравитациони потенцијал Земље важи већ споменута препорука Међународне астрономске уније да се користи облик (101′), али се у радовима користе и други наведени облици. У њима M означава масу Земље, r_0 је средњи екваторски полупречник Земље, а C_{nk}, D_{nk} (без и са цртом), J_n, I_{nm}, λ_{nm}, a_{nk} и b_{nk} су константни коефицијенти (неименовани, сем последња три), који зависе од Земљиног облика и карактеришу Земљино гравитационо поље. У датим редовима сферне координате r, φ и λ су геоцентрични радијус-вектор, геоцентрична ширина (или деклинација) и географска дужина спољне тачке у којој се у датом тренутку налази тежиште Земљиног вештачког сателита. У овим редовима непарни зонални хармоници (чланови са непарним n у $P_n(\sin\varphi)$) и „дужински“ чланови (са λ) за које је $n+k$ непарно карактеришу Земљину асиметрију према екваторској равни.

Постоје гравиметријски и небеско-механички методи одређивања Земљиног гравитационог поља, односно наведених констаната. Гравиметријско одређивање Земљиног облика или њеног потенцијала врши се на основи мерења убрзања силе теже у различитим тачкама Земљине површи. Наведимо да је за ово И. Д. Жонголович располагао са 26 хиљада гравиметријских тачака за обраду. Ипак, из гравиметријских података добијају се мање уверљиве вредности коефицијената тесералних хармоника (са придруженим Лежандровим функцијама за $n \neq k$). Када је почетком XX века била обраћена пажња на могућност троосне Земље, више аутора су обрађивали овај проблем, али су добили различите резултате, јер се вредност географске дужине правца велике полуосе екваторске елипсе колебала у области од 38° источне до 25° западне дужине.[1] Два небеско-механичка метода су била примењивана пре избацивања вештачких сателита. Први се изводио на основи анализе периодичних неједнакости астрономске лонгитуде и латитуде Месеца, проузрокованих Земљином сфероидалношћу (с обзиром на неједнакости из Делонеове теорије Месечевог кретања). Други се вршио помоћу анализе особености Земљиног обртног кретања, тј. из прецесије Земљине осе ротације одређивала се такозвана динамичка спљоштеност $\dfrac{C-A}{C}$, а затим се са претпоставком да је Земља сфероид ($A=B$) могао одредити коефицијент другог зоналног хармоника Земљиног гравитационог потенцијала. A, B и C су моменти инерције у односу на координатне осе.

Међутим, споменути астрономски начини одређивања Земљиног потенцијала данас имају само историјски значај, јер се највећа тачност постиже одређивањем из података посматрања Земљиних вештачких сателита. Кое-

[1] Н. П. Грушинский — Теория фигуры Земли, Москва, 1963, стр. 21.

фицијенти зоналних и тесералних хармоника одређују се на основи опажања тзв. секуларних и дугопериодичних поремећаја у елементима путања Земљиних вештачких сателита, а обрада се изводи применом методе најмањих квадрата. Поменимо да су неки аутори заједно користили сателитске и гравиметријске податке за одређивање Земљиног потенцијала.[1] Доња таблица даје вредности коефицијената J_n зоналних хармоника, које је одредио Y. Kozai[2]

n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$
2	1082,628	9	−0,100	16	0,187
3	−2,538	10	−0,354	17	0,085
4	−1,593	11	0,202	18	−0,231
5	−0,230	12	−0,042	19	−0,216
6	0,502	13	−0,123	20	−0,005
7	−0,362	14	−0,073	21	0,144
8	−0,118	15	−0,174		

У следећој таблици имамо као илустрацију неколико првих вредности коефицијената секторских и тесералних хармоника потенцијала Земљиног привлачења, које су одредили Gaposchkin и Lambeck[3] ($m=k$, $\overline{D}_{nk}=\overline{S}_{nm}$, ознаке су другачије од раније наведених)

n	m	$\overline{C}_{nm}$	$\overline{S}_{nm}$
2	2	$2{,}4129 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}3641 \cdot 10^{-6}$
3	1	$1{,}9698 \cdot 10^{-6}$	$2{,}6015 \cdot 10^{-7}$
3	2	$8{,}9204 \cdot 10^{-7}$	$-6{,}3468 \cdot 10^{-7}$
3	3	$6{,}8630 \cdot 10^{-7}$	$1{,}4304 \cdot 10^{-6}$
4	1	$-5{,}2989 \cdot 10^{-7}$	$-4{,}8765 \cdot 10^{-7}$
4	2	$3{,}3024 \cdot 10^{-7}$	$7{,}0633 \cdot 10^{-7}$
4	3	$9{,}8943 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}5467 \cdot 10^{-7}$
4	4	$-7{,}9692 \cdot 10^{-8}$	$3{,}3928 \cdot 10^{-7}$
5	1	$-5{,}3816 \cdot 10^{-8}$	$-9{,}7905 \cdot 10^{-8}$
5	2	$6{,}1286 \cdot 10^{-7}$	$-3{,}5087 \cdot 10^{-7}$

Из добијених резултата за коефицијенте развоја потенцијала Земљиног привлачења у ред по сферним функцијама види се да се они врло споро смањују. Зато одређивање ових констаната остаје као један од најважнијих

[1] В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов — Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, Москва, 1971, стр. 434.

[2] Y. Kozai — Revised values for coefficients of zonal spherical harmonics in the geopotential, SAO Spec. Rep., 295, 1969.

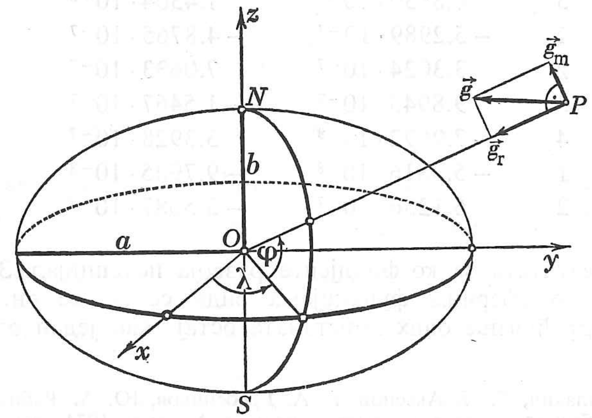
[3] E. M. Gaposchkin and K. Lambeck — 1969 Smithsonian Standard Earth II, SAO Spec. Rep., 315, 1970.

задатака савремене небеске механике и гравиметрије. Стога смањење амплитуда поремећаја у координатама или елементима путања Земљиних вештачких сателита може произићи углавном на рачун множитеља облика $\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$, тј. са порастом великих полуоса путања вештачких сателита. Тако се појавио и нови математички проблем изражавања Земљиног гравитационог потенцијала са брже конвергентним редовима, али радикална побољшања у том погледу нису постигнута до сада.

треба

9. ОПШТИ ЗЕМЉИН ЕЛИПСОИД. НОРМАЛНИ ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ЗЕМЉЕ

У пракси се често Земљина површ може представити с довољном тачношћу с површи сфероида, чији се центар маса поклапа с центром маса Земље, а његова мала оса се подудара са осом Земљине ротације. Овакав двоосни спљоштени елипсоид или ротациони елипсоид се назива општим Земљиним елипсоидом. Гравитационо поље општег Земљиног елипсоида назива се нормалним. Њему одговара потенцијал који је нормални гравитациони потенцијал Земље. Нормално поље Земљиног привлачења је симетрично према оси Земљине ротације и екваторској равни. Због тога је вектор убрзања такозваног „нормалног" привлачења $\vec{g}$ увек у равни меридијана тачке P у којој се у датом тренутку налази Земљин вештачки сателит, сл. 10. SN је оса Земљине ротације, λ је географска дужина, а φ је геоцентрична ширина (или деклинација) тачке P. Вектор $\vec{g}$ се може разложити на две компоненте: радијалну $\vec{g}_r$ у правцу геоцентричног радијус-вектора тачке P и меридијанску $\vec{g}_m$, која је у равни меридијана тачке P и нор-



Сл. 10

мална је на $\vec{g}_r$. Као позитивни смерови ових компонената узети су они ка геоцентру и према северу.

Нормални гравитациони потенцијал Земље може се изразити развојем у ред по простим сферним функцијама, тј. по Лежандровим полиномима или зоналним хармоницима помоћу (117) у облику

$$U(r,\varphi)=\frac{a_{00}}{r}+\frac{a_{20}}{r^3}P_2(\sin\varphi)+\frac{a_{40}}{r^5}P_4(\sin\varphi)+\cdots. \tag{123}$$

Довољно је ограничити се на два или три члана овог реда.[1] Коефицијенти a_{00}, a_{20}, a_{40} могу се овако изразити:[2]

$$\left.\begin{aligned}
a_{00}&=fM=\gamma_e a^2\left(1-\alpha+\frac{3}{2}m-\frac{15}{14}m\alpha+\cdots\right),\\
a_{20}&=-\gamma_e a^4\left(\frac{2}{3}\alpha-\alpha^2-\frac{1}{3}m+\frac{10}{7}m\alpha+\cdots\right),\\
a_{40}&=\frac{8}{35}\gamma_e a^6\left(\frac{7}{2}\alpha^2-\frac{5}{2}m\alpha+\cdots\right);\\
m&=\frac{\omega^2 a}{\gamma_e},\quad \alpha=\frac{a-b}{a},
\end{aligned}\right\} \tag{124}$$

где су: a и b—велика и мала полуоса општег Земљиног елипсоида, α—спљоштеност овог елипсоида, ω—угаона брзина Земљине ротације, γ_e—убрзање силе теже на екватору општег Земљиног елипсоида (такозвана екваторска константа убрзања силе теже), M—маса Земље, f—гравитациона константа. $P_2(\sin\varphi)$ и $P_4(\sin\varphi)$ су Лежандрови полиноми од $\sin\varphi$, познати из (49)

$$\left.\begin{aligned}
P_2(\sin\varphi)&=\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2},\\
P_4(\sin\varphi)&=\frac{35}{8}\sin^4\varphi-\frac{15}{4}\sin^2\varphi+\frac{3}{8}.
\end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Нормални гравитациони потенцијал Земље, као што се види из (123), зависи само од геоцентричног растојања r и геоцентричне ширине φ тачке P, а не зависи од њене географске дужине λ (или L).

Ми ћемо се ограничити само на прва три члана реда (123) и добити одговарајући трансформисани израз, ако уместо a_{00}, a_{20} и a_{40} уведемо константе

$$\mu=a_{00},\quad \varepsilon=-\frac{3}{2}a_{20},\quad \chi=\frac{35}{8}a_{40}. \tag{126}$$

---

[1] М. К. Тихонравов, И. К. Бажинов, О. В. Гурко, Г. Ю. Максимов, И. М. Яцунский — Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли, II изд., Москва, 1974, стр. 116.

[2] Редакция Г. С. Нариманов и М. К. Тихонравов — Основы теории полета космических аппаратов, Москва, 1972, стр. 35.

Онда из (123), (125) и (126) добијамо

$$U(r,\varphi)=\frac{\mu}{r}-\frac{\varepsilon}{r^3}\left(\sin^2\varphi-\frac{1}{3}\right)+\frac{\chi}{r^5}\left(\sin^4\varphi-\frac{6}{7}\sin^2\varphi+\frac{3}{35}\right)+\cdots. \tag{127}$$

Из претходног видимо да се нормални гравитациони потенцијал Земље у функцији од r и φ Земљиног вештачког сателита (који би се нашао у материјалној тачки P, види сл. 10) може одредити ако знамо величине a, α, γ_e и ω, као и Земљину масу. Оне су нам познате из гравиметријских мерења, посматрања сателита и астрономских мерења, те су њихове вредности:

$$\left.\begin{aligned} &a=6378{,}160\ \mathrm{km}, \quad \alpha=\frac{1}{298{,}25}=0{,}0033529,\\ &\gamma_e=9{,}78031\ \mathrm{m\ s^{-2}}, \quad \omega=0{,}000072921\ \mathrm{rad\ s^{-1}}.\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Нумеричке вредности коефицијената (124) су

$$a_{00}=3{,}98603\cdot10^5\ \mathrm{km^3\,s^{-2}}, \quad a_{20}=-1{,}756\cdot10^{10}\ \mathrm{km^5\,s^{-2}},$$

$$a_{40}=1{,}548\cdot10^{15}\ \mathrm{km^7\,s^{-2}}.$$

Онда изрази (126) добијају ове вредности:

$$\left.\begin{aligned} &\mu=3{,}98603\cdot10^5\ \mathrm{km^3\,s^{-2}}, \quad \varepsilon=2{,}634\cdot10^{10}\ \mathrm{km^5\,s^{-2}},\\ &\chi=6{,}773\cdot10^{15}\ \mathrm{km^7\,s^{-2}}.\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Због једначине (20) и напред реченог можемо гравитационо убрзање материјалне тачке P, због привлачног дејства општег Земљиног елипсоида, да разложимо помоћу радијалне и меридијанске компоненте

$$\vec{g}=\vec{g}_r+\vec{g}_m=-g_r\vec{r}_0+g_m\vec{m}_0=\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{\partial U}{\partial m}\vec{m}_0=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{m}_0, \tag{130}$$

где су $\vec{r}_0$ и $\vec{m}_0$ јединични вектори; први је у правцу геоцентричног вектора положаја тачке P (предзнак минус стоји јер је $\vec{g}_r$ усмерен ка геоцентру, тј. супротно од $\vec{r}_0$), а други је у равни меридијана тачке P, нормалан на првом вектору и са позитивним смером ка северу; $\partial m=r\,\partial\varphi$. Из (130), када се у (123) ограничимо само на прва три члана реда, и узмемо у обзир (125) и (126), можемо добити интензитете радијалне и меридијанске компоненте нормалног гравитационог убрзања

$$\left.\begin{aligned} g_r&=-\frac{\partial U}{\partial r}=g_r^{(0)}+g_r^{(2)}+g_r^{(4)},\\ g_m&=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=g_m^{(2)}+g_m^{(4)};\end{aligned}\right\} \tag{131}$$

$g_m^{(0)}=0$, јер први члан (са a_{00}) из (123) не зависи од φ. Чланови на десним странама (131), водећи рачуна о предзнаку минус испред $\dfrac{\partial U}{\partial r}$ и фактору $\dfrac{1}{r}$ испред $\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}$, имају ове изразе

$$\left.\begin{aligned}
g_r^{(0)}&=\frac{\mu}{r^2}=\frac{a_{00}}{r^2},\\
g_r^{(2)}&=-2\frac{\varepsilon}{r^4}P_2(\sin\varphi)=\frac{\varepsilon}{r^4}(1-3\sin^2\varphi)=3\frac{a_{20}}{r^4}P_{20}(\sin\varphi),\\
g_r^{(4)}&=\frac{8}{7}\frac{\chi}{r^6}P_4(\sin\varphi)=\frac{\chi}{r^6}\left(5\sin^4\varphi-\frac{30}{7}\sin^2\varphi+\frac{3}{7}\right)=5\frac{a_{40}}{r^6}P_{40}(\sin\varphi),\\
g_m^{(2)}&=-\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{r^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}P_2(\sin\varphi)=-2\frac{\varepsilon}{r^4}\sin\varphi\cos\varphi=-\frac{\varepsilon}{r^4}\sin2\varphi=\\
&=\frac{a_{20}}{r^4}3\sin\varphi\cos\varphi=\frac{a_{20}}{r^4}P_{21}(\sin\varphi),\\
g_m^{(4)}&=\frac{8}{35}\frac{\chi}{r^6}\frac{\partial}{\partial\varphi}P_4(\sin\varphi)=\frac{4}{7}\frac{\chi}{r^6}\sin\varphi\cos\varphi\,(7\sin^2\varphi-3)=\\
&=\frac{1}{14}\frac{\chi}{r^6}\sin2\varphi\,[14(1-\cos2\varphi)-12]=\\
&=\frac{1}{14}\frac{\chi}{r^6}(2\sin2\varphi-14\sin2\varphi\cos2\varphi)=\\
&=\frac{1}{14}\frac{\chi}{r^6}(2\sin2\varphi-7\sin4\varphi)=\frac{5}{16}\frac{a_{40}}{r^6}(2\sin2\varphi-7\sin4\varphi),
\end{aligned}\right\} \tag{132}$$

имајући у виду да је, с обзиром на (55), $3\sin\varphi\cos\varphi=P_{21}(\sin\varphi)$. Први израз из (132), $g_r^{(0)}$, представљао би интензитет убрзања силе Земљине теже кад би Земља била неротирајућа сфера и имала исту масу као реална Земља и могла да се замени материјалном тачком. Остале величине $g_r^{(2)}$, $g_r^{(4)}$, $g_m^{(2)}$, $g_m^{(4)}$ можемо сматрати поправкама претходног основног или главног и највећег убрзања, када се обрачунавају Земљина несферичност и њена ротација. Јер ове поправке убрзања зависе не само од r и φ, већ и од Земљине спљоштености α и њене ротационе брзине ω, а ове величине фигуришу у њиховим коефицијентима.

Проценимо односе ових корективних или пореметајних чланова према основном делу убрзања, коришћењем израза (132), (124) и (126). С обзиром да Земљина спљоштеност има малу вредност, обрачунаваћемо само чланове са малим величинама најнижег реда. Међутим, на основи упоређења нумерички добијених резултата, узимајући вредности (128), можемо да напишемо

$$m=\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}\approx\alpha. \tag{133}$$

За ову процену, користећи се релацијом (133), потребни су нам следећи изрази, које добијамо после одговарајућих замена и занемаривања малих величина вишег реда,

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\mu}&=-\frac{3\,a_{20}}{2\,a_{00}}\approx\frac{a^2\,(2\,\alpha-m)}{2\left(1-\alpha+\dfrac{3}{2}m\right)}\approx\frac{a^2\,\alpha}{2\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\approx\frac{a^2\,\alpha}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\approx\frac{a^2\,\alpha}{2},\\
\frac{\chi}{\mu}&=\frac{35\,a_{40}}{8\,a_{00}}\approx\frac{a^4\,(7\,\alpha^2-5\,m\,\alpha)}{2\left(1-\alpha+\dfrac{3}{2}m\right)}\approx\frac{a^4\,\alpha^2}{1+\dfrac{\alpha}{2}}\approx a^4\,\alpha^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\approx a^4\,\alpha^2.
\end{aligned}\right\}\tag{134}
$$

Даље, имајмо у виду познату особину Лежандрових полинома[1)]

$$|P_n(\sin\varphi)|\leqslant 1,\tag{135}$$

јер је $|\sin\varphi|\leqslant 1$, као и да су

$$|\sin 2\,\varphi|\leqslant 1,\qquad |2\sin 2\,\varphi-7\sin 4\,\varphi|<9.\tag{136}$$

Ако се вештачки сателит креће по путањи око Земље, за његов геоцентрични радијус-вектор можемо да напишемо

$$r>a.\tag{137}$$

Онда из (132), (135), (136), (134), (137) и (128) добијамо приближне максималне вредности модула односа чланова убрзања због Земљине несферичности и њене ротације према основном убрзању, које би једино постојало у односу на Земљу кад би се она могла свести на материјалну тачку. Како су

$$
\left.\begin{aligned}
|g_r^{(2)}|_{\max}&=\frac{2\,\varepsilon}{r^4}, & |g_m^{(2)}|_{\max}&=\frac{\varepsilon}{r^4},\\
|g_r^{(4)}|_{\max}&=\frac{8\,\chi}{7\,r^6}, & |g_m^{(4)}|_{\max}&=\frac{9\,\chi}{14\,r^6},
\end{aligned}\right\}\tag{138}
$$

онда су

$$
\left.\begin{aligned}
\left|\frac{g_r^{(2)}}{g_r^{(0)}}\right|_{\max}&=\frac{2}{r^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\approx\left(\frac{a}{r}\right)^2\alpha<\alpha\approx 0{,}003,\\
\left|\frac{g_m^{(2)}}{g_r^{(0)}}\right|_{\max}&=\frac{1}{r^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\approx\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}\approx 0{,}0015,\\
\left|\frac{g_r^{(4)}}{g_r^{(0)}}\right|_{\max}&=\frac{8}{7\,r^4}\,\frac{\chi}{\mu}\approx\frac{8}{7}\left(\frac{a}{r}\right)^4\alpha^2<\frac{8}{7}\,\alpha^2\approx 10^{-5},\\
\left|\frac{g_m^{(4)}}{g_r^{(0)}}\right|_{\max}&=\frac{9}{14\,r^4}\,\frac{\chi}{\mu}\approx\frac{9}{14}\left(\frac{a}{r}\right)^4\alpha^2<\frac{9}{14}\,\alpha^2\approx 0{,}6\cdot 10^{-5}.
\end{aligned}\right\}\tag{139}
$$

1) Р. Кашанин — Виша математика II, књ. друга, 1950, стр. 629.

Из (139) видимо да су поремећајна убрзања $g_r^{(2)}$, $g_m^{(2)}$, $g_r^{(4)}$ и $g_m^{(4)}$ мала у поређењу с основним убрзањем $g_r^{(0)}$, при чему се, с обзиром на изразе (132), њихове величине брзо смањују са повећањем геоцентричног растојања r вештачког сателита. Приметимо да чланове, одн. поправке $g_r^{(4)}$ и $g_m^{(4)}$ можемо сматрати малим величинама другога реда у поређењу са поправкама $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$.

10. АНОМАЛНИ ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ЗЕМЉЕ

Земљина спљоштеност је основни узрок нецентралности поља Земљине гравитације. Други узрок долази од аномалија силе теже, које потичу због неравномерне расподеле маса различите густине у Земљиној кори. Ове аномалије су одступања од оних вредности које би постојале кад би Земља стварно била сфероид. Та одступања могу да буду по интензитету и по правцу.

Општи Земљин елипсоид је једна апроксимација за приближно представљање Земљиног облика и ми ћемо се у нашим каснијим излагањима задовољити оваквим Земљиним моделом. Међутим, ако је потребно прецизније представљање Земљине површи и за њу се узме површ геоида, као боља апроксимација, онда површ општег Земљиног елипсоида служи као релативна површ, тј. као површ упоређења. Тада се површ геоида одређује преко својих тачака, а оне се одређују помоћу висинске разлике Δh у односу на одговарајуће тачке површи упоређења. Одступања геоида од општег Земљиног елипсоида достижу 160 метара[1)]. Ово је прилично мање у односу на 21,4 километара колико износи разлика између екваторског и поларног полупречника општег Земљиног елипсоида, или одступање Земљиног сфероида од сфере са полупречником једнаким Земљином екваторском полупречнику. Због неравномерности расподеле маса величина Δh је функција геоцентричне ширине и географске дужине тачке на геоиду и обично се одређује развојем у ред по сферним функцијама у облику[2)]

$$\Delta h=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos mL+\beta_{nm}\sin mL)\cdot P_{nm}(\sin\varphi),\tag{140}$$

где је

$$P_{nm}(\sin\varphi)=\cos^m\varphi\,\frac{d^m P_n(\sin\varphi)}{(d\sin\varphi)^m}\tag{141}$$

придружена Лежандрова функција n-тог степена и m-тог реда из (51), $x=\sin\varphi$, а $P_n(x)$ је Лежандров полином n-тог степена из (40); α_{nm} и β_{nm} су коефицијенти, а n и m су цели бројеви, L је географска дужина.

1) Редакция Г. С. Нариманов и М. К. Тихонравов — Основы теории полета космических аппаратов, 1972, стр. 37.

2) П. Е. Эльясберг — Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, 1965, стр. 318.

4*

Ако су гравитациони потенцијали на геоцентричном растојању r: U за Земљин геоид, а U_0 за општи Земљин елипсоид, онда је аномални гравитациони потенцијал разлика ова два потенцијала

$$\Delta U = U - U_0. \tag{142}$$

Дакле, аномални потенцијал је последица одступања геоида од површи Земљиног сфероида, па је, због (20) и (142), аномално гравитационо убрзање

$$\Delta \vec{g} = \operatorname{grad} \Delta U. \tag{143}$$

Аномални потенцијал ΔU изван Земље, тј. на геоцентричном растојању r (где би могао да се нађе Земљин вештачки сателит) може да се одреди ако се примени Брунсова лема, по којој је вредност аномалног потенцијала $\Delta \tilde{U}$ на површи упоређења (а не на растојању r, што смо истакли знаком тилде $\sim$) повезана с висинском разликом Δh геоида и површи упоређења обрасцем

$$\Delta \tilde{U} = \tilde{g} \cdot \Delta h, \tag{144}$$

где је $\tilde{g}$ вредност убрзања силе теже на површи упоређења. С обзиром да су аномалије Земљине теже мале, $\tilde{g}$ у (144) при рачунању може да се замени са неком средњом вредношћу убрзања силе теже на површи општег Земљиног елипсоида g_0, па (144), после смене из (140), постаје

$$\Delta \tilde{U} = g_0 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) \cdot P_{nm} (\sin \varphi). \tag{145}$$

Међутим, уместо вредности $\Delta \tilde{U}$ на површи упоређења, нас интересује да нађемо ΔU за цео спољни простор у којем може да се креће вештачки сателит око Земље. Стога ћемо да искористимо овај резултат из теорије потенцијала: нека је U_n неки потенцијал, чија се вредност на сфери полупречника R одређује обрасцем

$$\tilde{U}_n = \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos mL + b_{nm} \sin mL) \cdot P_{nm} (\sin \varphi), \tag{146}$$

онда израз за одређивање тог потенцијала изван уочене сфере, тј. за $r > R$ има облик

$$U_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos mL + b_{nm} \sin mL) \cdot P_{nm} (\sin \varphi). \tag{147}$$

Слично овоме имамо одговарајуће разматрање и код аномалног гравитационог потенцијала Земље. Како је ΔU мало, а облик Земљиног упоређења близак сфери са средњим Земљиним полупречником ($R = 6371$ км), онда помоћу (145) одређујемо вредност ΔU не на површи упоређења већ на овој сфери, па израз за аномални потенцијал Земље за тачке изван ове сфере (за $r > R$) има облик

$$\Delta U = g_0 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) \cdot P_{nm} (\sin \varphi). \tag{148}$$

Сад (143) и (148) омогућују да се добију координате Δg_r, Δg_m и Δg_L аномалног гравитационог убрзања дуж геоцентричног радијус-вектора r (са јединичним вектором $\vec{r}_0$), дуж нормале на њега у меридијанској равни (са јединичним вектором $\vec{m}_0$ у правцу тангенте на меридијан сателита) и дуж нормале на претходна два правца, која је нормала на раван меридијана сателита (са јединичним вектором $\vec{t}_0$ у правцу тангенте на паралел сателита). Напред смо видели да нормално убрзање лежи у меридијанској равни Земљиног вештачког сателита, док аномално убрзње $\Delta \vec{g} = \operatorname{grad} \Delta U$ уопште одступа, тј. скреће од меридијанске равни, јер аномални потенцијал зависи не само од r и φ, већ и од географске дужине L сателита. Имамо

$$\begin{aligned} \Delta \vec{g} &= \Delta \vec{g}_r + \Delta \vec{g}_m + \Delta \vec{g}_L = -\Delta g_r \vec{r}_0 + \Delta g_m \vec{m}_0 + \Delta g_L \vec{t}_0 = \\ &= \operatorname{grad} \Delta U = \frac{\partial \Delta U}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{\partial \Delta U}{\partial m} \vec{m}_0 + \frac{\partial \Delta U}{\partial t} \vec{t}_0 = \\ &= \frac{\partial \Delta U}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} \vec{m}_0 + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial L} \vec{t}_0, \end{aligned} \tag{149}$$

јер је $\partial m = r \partial \varphi$ и $\partial t = r \cos \varphi \partial L$. Предзнак минус испред Δg_r, слично ранијем, појављује зе зато што су $\Delta \vec{g}_r$ и $\vec{r}_0$ супротно усмерени вектори. Онда су координате аномалног убрзања

$$\Delta g_r = -\frac{\partial}{\partial r} \Delta U, \quad \Delta g_m = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta U, \quad \Delta g_L = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial L} \Delta U. \tag{150}$$

Ове изразе можемо да одредимо одговарајућим парцијалним диференцирањем израза (148). За други израз из (150) треба нам извод израза (141)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} P_{nm} (\sin \varphi) &= -m \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi \frac{d^m P_n (\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^m} + \\ &+ \cos^m \varphi \frac{d^{m+1} P_n (\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^{m+1}} \cdot \frac{d \sin \varphi}{d \varphi} = \\ &= -\frac{m \sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos^m \varphi \frac{d^m P_n (\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^m} + \cos^{m+1} \varphi \frac{d^{m+1} P_n (\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^{m+1}} = \\ &= -\frac{m \sin \varphi}{\cos \varphi} P_{nm} (\sin \varphi) + P_{n,m+1} (\sin \varphi), \end{aligned} \tag{151}$$

где се последњи други члан лако добија из (141), када тамо m заменимо са $m+1$. Тако налазимо, после диференцирања и множења нађених израза са $\dfrac{R}{R}$,

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta g_r &= \frac{g_0}{R}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos mL+\beta_{nm}\sin mL)\cdot P_{nm}(\sin\varphi),\\
\Delta g_m &= \frac{g_0}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos mL+\beta_{nm}\sin mL)\cdot\\
&\qquad\cdot\left[P_{n,m+1}(\sin\varphi)-\frac{m\sin\varphi}{\cos\varphi}P_{nm}(\sin\varphi)\right],\\
\Delta g_L &= \frac{g_0}{R\cos\varphi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}(-\alpha_{nm}\sin mL+\beta_{nm}\cos mL)\cdot mP_{nm}(\sin\varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{152}
$$

Дакле, да бисмо одредили аномално убрзање Земљиног привлачења (149), тј. његове координате (152) у функцији сферних координата (r, φ, L) материјалне тачке у којој би се нашао Земљин вештачки сателит потребно је да знамо коефицијенте α_{nm} и β_{nm} реда (140). Они се одређују на основи гравиметријских података и помоћу обраде резултата посматрања Земљиних вештачких сателита, али њихово прецизно одређивање је доста тешко и до краја није решено, што се може закључити из сазнања да су њихове вредности само нешто веће од њихове нетачности. Зато не знамо потпуне карактеристике Земљиног аномалног гравитационог поља. Ипак, процењено је да аномалије убрзања силе теже на Земљиној површи достижу 250 милигала[1)] (1 gal $= 1$ cm s^{-2}). Међутим, приметимо што је материјална тачка на већем растојању од Земљине површи да су координате аномалног убрзања мање, јер су обрнуто пропорционалне четвртом и вишим степенима од r, што се види из (152), $n \geqslant 2$.

Поменимо да су непосредна мерења на издвојеним тачкама Земљине површи, углавном на острвима окруженим дубоким океаном, показала да ове аномалије гравитационог убрзања могу да буду за ред веће, што, ипак, има само локални значај и нема практичног утицаја на кретање вештачких сателита[2)]. Утицај аномалне гравитације је мали у поређењу са утицајем због Земљине спљоштености, која долази до изражаја преко гравитације Земљиног сфероида. Поправке координата положаја сателита због обрачунавања аномалног гравитационог потенцијала Земље су реда величине неколико стотина метара, а поправке координата брзина су стоти, највише десети делови метра у секунди за време неколико облетања сателита око Земље[3)].

ga

Из досадашњег излагања можемо да закључимо да несферичност и ротација Земље могу да утичу на кретање Земљиних вештачких сателита углавном преко чланова $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$ нормалног гравитационог убрзања, а да чланови $g_r^{(4)}$ и $g_m^{(4)}$ овог убрзања, као и аномалије гравитационог убрзања Δg_r, Δg_m и Δg_L имају знатно мање вредности па и мањи утицај. Стога ћемо се у наредном излагању ограничити на испитивање утицаја основних поремећајних убрзања $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$.

[1)] Редакция Г. С. Нариманов и М. К. Тихонравов — Основы теории полета космических аппаратов, 1972, стр. 37.

[2)] П. Е. Эльясберг — Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, 1965, стр. 321.

[3)] М. К. Тихонравов и др. — Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли, II изд., 1974, стр. 132.

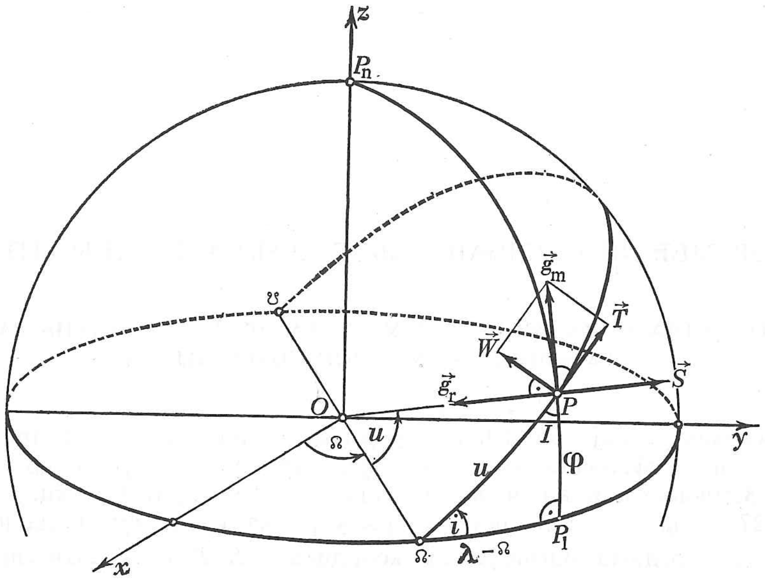
III. ПОРЕМЕЋАЈНО УБРЗАЊЕ ЗБОГ ЗЕМЉИНЕ СПЉОШТЕНОСТИ

ga 11. КООРДИНАТЕ ПОРЕМЕЋАЈНОГ УБРЗАЊА ОД ДРУГОГ ЧЛАНА РАЗВОЈА ЗЕМЉИНОГ НОРМАЛНОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

Основни утицај поремећајног убрзања у пољу Земљиног привлачења, а због њене несферичности и ротације, изражава се преко другог члана развоја Земљиног нормалног потенцијала у ред по сферним функцијама (123), одн. (127). Одатле потичу поремећајна убрзања $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$. Сада нас интересује да одредимо одговарајуће координате S, T и W овог поремећајног гравитационог убрзања $\vec{F}$ преко $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$, које ћемо сад краће писати само као g_r и g_m! S, T и W су координате у такозваном покретном координатном систему везаном са Земљиним вештачким сателитом, а који чини десни ортогоналан триједар оса с координатним почетком у центру маса сателита и осама одређеним јединичним векторима: $\vec{r}_0$ — у правцу од геоцентра ка сателиту, $\vec{t}_0$ — у правцу нормалном на претходни а који лежи у равни тренутне путање сателита и $\vec{n}_0$ — у правцу нормале на раван тренутне путање. Онда је

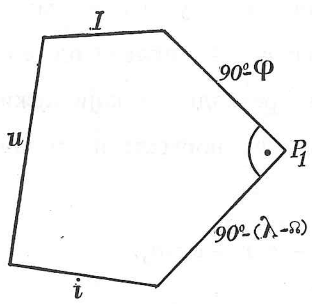
$$
\vec{F}=\vec{S}+\vec{T}+\vec{W}=S\vec{r}_0+T\vec{t}_0+W\vec{n}_0=\vec{g}_r+\vec{g}_m=-g_r\vec{r}_0+g_m\vec{m}_0. \tag{153}
$$

Нека је на слици 11 представљена геоцентрична полусфера која пролази кроз неки положај P Земљиног вештачког сателита. Основна координатна раван Oxy је екваторска, а лук великог круга $P_n P P_1$ припада меридијану тачке P у датом тренутку. Оскулаторна путања сателита, за изабрани тренутак, нека на овој полусфери има пројекцију чији је део представљен великим полукругом ☊P☋, при чему тачке ☊ и ☋ означавају пројекције узлазног и силазног чвора путање, а P_n је северни пол уочене сфере. На слици су представљене компоненте поремећајног гравитационог убрзања $\vec{g}_r$ и $\vec{g}_m$, као и $\vec{S}$, $\vec{T}$ и $\vec{W}$. I означава угао између равни меридијана и путање сателита, који се назива и азимутом вектора брзине, мереним од правца севера. Нагиб путање према екваторској равни је i, а u је аргумент латитуде или угаоно растојање сателита од узлазног чвора путање. Онда из једначине (153) и слике 11 добијамо тражене координате



Сл. 11

$$
\left.
\begin{aligned}
S &= -g_r, \quad T = g_m \vec{m}_0 \cdot \vec{t}_0 = g_m \cos I,\\
W &= g_m \vec{n}_0 \cdot \vec{m}_0 = g_m \sin I.
\end{aligned}
\right\} \quad (154)
$$



Сл. 12

Одавде треба да елиминишемо угао I и циљ је да леве стране изразимо преко u. Из правоуглог сферног троугла ☊ $P_1 P$ добијамо одговарајуће изразе за трансформацију, када применимо Неперово мнемонично правило да је косинус било којег елемента представљеног страном одговарајућег петоугаоника, сл. 12, једнак производу синуса наспрамних или производу котангенса суседних елемената,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi = \sin i \sin u,\\
&\cos I = \operatorname{ctg} u \operatorname{ctg}(90° - \varphi) = \frac{\cos u}{\sin u} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} =\\
&= \frac{\cos u}{\sin u} \cdot \frac{\sin i \sin u}{\cos\varphi} = \frac{\sin i \cos u}{\cos\varphi},\\
&\cos i = \sin I \sin(90° - \varphi) = \sin I \cos\varphi, \qquad \sin I = \frac{\cos i}{\cos\varphi}.
\end{aligned}
\right\} \quad (155)
$$

Кад из (132) сменимо $g_r^{(2)}$ и $g_m^{(2)}$ за g_r и g_m у (154) и употребимо (155), добијамо тражене координате гравитационог поремећајног убрзања због Земљине спљоштености

$$
\left.
\begin{aligned}
S &= \frac{\varepsilon}{r^4}(3\sin^2 i \sin^2 u - 1) =\\
&= \frac{\varepsilon}{r^4}\left(3\sin^2 i \frac{1-\cos 2u}{2} - 1\right) = -\frac{\varepsilon}{2r^4}(3\sin^2 i \cos 2u +\\
&+ 2 - 3\sin^2 i) = -\frac{\varepsilon}{2r^4}\left[3\sin^2 i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2u\right) + 2 - 3\sin^2 i\right] =\\
&= -\frac{\varepsilon}{2r^4}\left[3\sin^2 i \sin 2\left(u + \frac{\pi}{4}\right) + 2 - 3\sin^2 i\right],\\
T &= -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin^2 i \sin 2u,\\
W &= -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin 2i \sin u.
\end{aligned}
\right\} \quad (156)
$$

Оне ће нам бити потребне касније. За S је дата трансформација и за други користан облик.

IV. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОРЕМЕЋЕНОГ КРЕТАЊА

ње

12. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОРЕМЕЋЕНОГ КРЕТАЊА ЗЕМЉИНОГ ВЕШТАЧКОГ САТЕЛИТА

Ако на вештачки сателит не би деловале никакве друге силе осим централне, тј. ако би се он кретао само у пољу потенцијала $\frac{\mu}{r}$ без икаквих других дејстава, његово кретање би било непоремећено и једначина таквог кретања $\ddot{\vec{r}} = -\mu r^{-3} \vec{r}$ може да се интеграли до краја, као што знамо из проблема двају тела, а, у зависности од почетних услова кретања, за путању може да се добије једна од кривих у равни: круг, елипса, парабола или хипербола. Претпостављамо као познато кретање по Кеплеровим законима — по Кеплеровој (непроменљивој) елиптичној путањи.

Међутим, право кретање Земљиног вештачког сателита одступа од Кеплеровог — непоремећеног кретања, па је поремећено због дејства поремећајних сила од:

нецентралности гравитационог поља, због Земљине спљоштености и неравномерне расподеле њене масе,

отпора Земљине атмосфере,

гравитације Месеца и Сунца, а на већим даљинама и суседних планета,

притиска Сунчеве светлости.

На кретање сателита у тзв. његовом активном лету, када су укључени реактивни мотори, делују и реактивне силе. Пасиван лет, тј. кретање сателита без ових последњих сила је када су реактивни мотори искључени.

Интересује нас да напишемо векторску диференцијалну једначину поремећеног кретања Земљиног вештачког сателита, прво у покретном координатном систему, а затим у непокретном.

Покретни геоцентрични екваторски гринички координатни систем, одређен јединичним векторима $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ дуж оса, везан је за Земљу, при чему раван меридијана Гринича представља Oxz координатну раван. Овај систем ротира заједно са Земљом око Oz осе константном угаоном брзином $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ Земљине ротације. Онда, према теорији релативног кретања на

ње

вештачки сателит делују још две силе[1]: аксифугална и Кориолисова. Обе су увек нормалне на осу ротације Oz. Прва има убрзање

$$\vec{F}_1 = \omega^2 \vec{r}_1 = \omega^2 x \vec{i} + \omega^2 y \vec{j}, \tag{157}$$

јер је $\vec{r}_1 = x\vec{i} + y\vec{j}$, а друга има убрзање

$$\begin{aligned} \vec{K} &= -2\vec{\omega} \times \vec{V} = 2\vec{V} \times \vec{\omega} = 2(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) \times \omega \vec{k} = \\ &= 2\omega \dot{x}\, \vec{i} \times \vec{k} + 2\omega \dot{y}\, \vec{j} \times \vec{k} = -2\omega \dot{x} \vec{j} + 2\omega \dot{y} \vec{i}, \end{aligned} \tag{158}$$

где су $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ координате вектора брзине $\vec{V}$ сателита. Узимајући за Земљу њена поремећајна дејства само од другог члана развоја Земљиног нормалног потенцијала, кад искористимо (130), (131) и (132), као и (157) и (158), добијамо векторску диференцијалну једначину релативног кретања Земљиног вештачког сателита (у покретном систему)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{K} + \vec{F}' + \vec{R} = \\ &= -g_r \vec{r}_0 + g_m \vec{m}_0 + \omega^2 \vec{r}_1 + 2\vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{F}' + \vec{R} = \\ &= -(g_r^{(0)} + g_r^{(2)}) \frac{\vec{r}}{r} + g_m^{(2)} \vec{m}_0 + \omega^2 \vec{r}_1 + 2\vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{F}' + \vec{R}, \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = &-a_{00} \frac{\vec{r}}{r^3} - 3\frac{a_{20}}{r^5} P_{20}(\sin\varphi) \cdot \vec{r} + \frac{a_{20}}{r^4} P_{21}(\sin\varphi) \cdot \vec{m}_0 + \\ &+ \omega^2 \vec{r}_1 + 2\vec{V} \times \vec{\omega} + \vec{F}' + \vec{R}, \end{aligned} \tag{159}$$

где је $\vec{F}'$ резултанта убрзања поремећајних сила од привлачења других небеских тела, отпора ваздуха, притиска Сунчеве светлости и другог; $\vec{R}$ је убрзање реактивних сила, које могу бити придодате вештачком сателиту.

Из (76) налазимо

$$\cos\lambda = \frac{x}{r_1}, \quad \sin\lambda = \frac{y}{r_1}, \quad \sin\varphi = \frac{z}{r} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{r_1}{r}, \text{ јер је } r_1 = r\cos\varphi.$$

Онда је (види сл. 11)

$$\vec{i} \cdot \vec{m}_0 = \cos(90° + \varphi) \cdot \cos\lambda = -\sin\varphi \cos\lambda = -\frac{z}{r} \cdot \frac{x}{r_1},$$

$$\vec{j} \cdot \vec{m}_0 = \cos(90° + \varphi) \cdot \sin\lambda = -\sin\varphi \sin\lambda = -\frac{z}{r} \cdot \frac{y}{r_1},$$

$$\vec{k} \cdot \vec{m}_0 = \cos\varphi = \frac{r_1}{r},$$

[1] Т. Анђелић, Р. Стојановић — Рационална механика, 1966, стр. 293.

па ови изрази са (157) и (158) омогућују да се из векторске једначине (159) добије одговарајући систем скаларних диференцијалних једначина поремећеног кретања Земљиног вештачког сателита у гриничком координатном систему

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= -a_{00}\frac{x}{r^3} - 3\,a_{20}\frac{x}{r^5}P_{20}(\sin\varphi) + \omega^2 x - a_{20}\frac{xz}{r^5 r_1}P_{21}(\sin\varphi) + \\
&\qquad + 2\,\omega\,\dot{y} + F'_x + R_x, \\
\ddot{y} &= -a_{00}\frac{x}{r^3} - 3\,a_{20}\frac{y}{r^5}P_{20}(\sin\varphi) + \omega^2 y - a_{20}\frac{yz}{r^5 r_1}P_{21}(\sin\varphi) - \\
&\qquad - 2\,\omega\,\dot{x} + F'_y + R_y, \\
\ddot{z} &= -a_{00}\frac{z}{r^3} - 3\,a_{20}\frac{z}{r^5}P_{20}(\sin\varphi) + a_{20}\frac{r_1}{r^5}P_{21}(\sin\varphi) + F'_z + R_z,
\end{aligned}\right\} \tag{160}$$

при чему су $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ координате вектора убрзања у разматраном координатном систему; F'_x, F'_y и F'_z су координате убрзања поремећајних сила од гравитације других небеских тела, отпора ваздуха, притиска Сунчеве светлости и др.; R_x, R_y и R_z су координате убрзања реактивних сила, када оне дејствују.

Поменимо да у пракси једначине кретања ретко узимају у обзир све поремећајне силе једновремено. Тако, по правилу, за вештачке сателите блиске Земљи обрачунава се нецентралност поља сила и отпор ваздуха, а за космичке апарате у међупланетном лету узима се у обзир привлачење планета и њихових сателита[1].

Диференцијалне једначине (160) се интеграле нумерички, при чему се не може мимоићи нагомилавање грешака већ за релативно кратак временски интервал. Стога, да би се смањиле грешке оваквог интеграљења и добили приближни обрасци, употребљава се систем једначина са тренутним путањским елементима, који се узимају за променљиве величине због дејства поремећаја, тј. у разматрању поремећеног кретања вештачког сателита. За ове елементе се обично користе елиптични елементи, када се ради о поремећеном кретању које одступа од непоремећеног по елиптичној путањи, какво кретање нас интересује овде.

Оскулаторна елиптична путања неке материјалне тачке, у неком тренутку, је фиктивна елипса по којој би се даље кретала ова тачка, ако би поремећајне силе изненада престале да постоје у том тренутку.

Векторска диференцијална једначина поремећеног пасивног кретања Земљиног вештачког сателита у апсолутном, тј. непокретном координатном систему може да се напише у облику

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}, \tag{161}$$

[1] Редакция Г. С. Нариманов и М. К. Тихонравов — Основы теории полета космических аппаратов, 1972, стр. 109.

где је $\vec{r}$ геоцентрични вектор положаја материјалне тачке у којој замишљамо да се налази сателит, а $\vec{F}$ је резултанта убрзања свих поремећајних сила, које делују на сателит. Кад би изненада престао да постоји $\vec{F}$ једначина (161) би добила облик познат из проблема двају тела, тј. из непоремећеног кретања. Једначини (161) у непокретном координатном систему одговара овај систем скаларних диференцијалних једначина поремећеног кретања Земљиног вештачког сателита

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} + \mu\frac{x}{r^3} &= F_x, \\
\ddot{y} + \mu\frac{y}{r^3} &= F_y, \\
\ddot{z} + \mu\frac{z}{r^3} &= F_z.
\end{aligned}\right\} \tag{162}$$

Силе, чија убрзања фигуришу на десним странама система (162), мењају путању која би постојала у фиктивном проблему двају тела. Ако су ове силе у поређењу са основном централном силом (њено убрзање је први члан на десној страни (161)) мале, онда су и промене путање, као последица дејстава ових поремећајних сила, мале.

Систем (162), који изражава поремећено кретање сателита, математички решавамо методом варијације произвољних констаната. Тако добијамо систем од шест диференцијалних једначина првога реда за шест непознатих функција времена, које су у непоремећеном кретању биле константе, тј. путањски елементи. Ми ћемо разматрати поремећене елиптичне путање, па као бивше произвољне константе, познате из небеске механике, могу се узети елементи: Ω, i, ω, a, e, ε или неки други одговарајући елементи, који се варирају. И ових шест диференцијалних једначина првога реда, као и оне другога реда из (162) не могу да се интеграле у коначном облику. Међутим, преимућство овог новог система од шест једначина, за шест нових промељивих елемената путање, је што се за мале поремећајне силе нове променљиве мало мењају, па се нови систем једначина може решити методом узастопних апроксимација. Тако, решење система (162) са новим променљивим за сваки тренутак времена даје шест параметара или елемената, који одређују неку фиктивну елиптичну путању — „оскулаторну елипсу". Ако би у неком датом тренутку времена t_1 поремећајне силе изненада престале да делују, кретање би се даље наставило по елипси са оскулаторним елементима: $\Omega(t_1)$, $i(t_1)$, $\omega(t_1)$, $a(t_1)$, $e(t_1)$ и $\varepsilon(t_1)$. Дакле, у тренутку t_1 додира оскулаторне и праве — поремећене путање, оне имају једнаке векторе положаја и векторе брзина у тачки где су престала дејства сила поремећаја. Променљиви елементи путање $\Omega(t)$, $i(t)$, $\omega(t)$, $a(t)$, $e(t)$, $\varepsilon(t)$ називају се тренутним елементима. Права путања вештачког сателита је обвојница његових оскулаторних елиптичних путања, ако се разматра ова врста путања, што је случај овде.

Координате положаја и брзине вештачког сателита у правоуглом координатном систему одређују се по истим обрасцима као и код непоремећеног кретања, тј. као у проблему двају тела, што знамо одраније.

Међутим, у овим координатама за путањске елементе Ω, i, $\omega, \ldots$, који фигуришу у њиховим изразима, треба узети вредности што одговарају изабраном тренутку оскулације за који се траже положај и брзина сателита.

Значи, остаје нам проблем да видимо како можемо да нађемо путањске елементе за дати тренутак времена. За ово прво морамо да изведемо диференцијалне једначине тренутних елиптичних елемената.

13. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЕЛИПТИЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА ПУТАЊЕ ЗЕМЉИНОГ ВЕШТАЧКОГ САТЕЛИТА СА КООРДИНАТАМА ПОРЕМЕЋАЈНОГ УБРЗАЊА

Оскулаторна елиптична путања Земљиног вештачког сателита се одређује са шест одговарајућих независних параметара или путањских елемената. Уобичајено је да се за њих узимају елиптични елементи: Ω, p, i, e, ω, v или u (аргумент латитуде). Интересује нас да нађемо диференцијалне једначине ових елиптичних елемената, у којима ће фигурисати координате поремећајног убрзања. Оне се обично називају Ојлеровим, Гаусовим, или Њутновим[1] и имају општи небеско-механички значај. Диференцијалне једначине елиптичних елемената са парцијалним изводима функције поремећаја, за разлику од првих, називају се Лагранжевим[2].

Диференцијалне једначине елиптичних елемената, формално гледано, могле би да се добију кад би у једначинама поремећеног кретања (162) заменили решења за систем једначина непоремећеног кретања (без десних страна у (162)), сматрајући да су константе интеграљења функције времена. Али, то је сувише сложен и компликован пут. Зато ћемо на знатно простији начин извести тражене једначине.

14. ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ЛОНГИТУДУ УЗЛАЗНОГ ЧВОРА, ПАРАМЕТАР И НАГИБ ПУТАЊЕ

Ове једначине по облику имају општи значај, па ћемо за непокретни правоугли координатни систем узети систем $Oxyz$, који је у небеској механици и теоријској астрономији хелиоцентрични еклиптички, а у разматрању кретања Земљиних вештачких сателита узима се геоцентрични екваторски.

Из разматрања непоремећеног кретања материјалне тачке у небеској механици познат је интеграл површине или двоструке секторске брзине[3]

$$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{V}, \tag{163}$$

[1] М. Ф. Субботин — Введение в теоретическую астрономию, Москва, 1968, стр. 507, 513.

[2] Г. Н. Дубошин — Небесная механика. Основные задачи и методы, 1968, стр. 590, 616.

[3] М. Миланковић — Основи небеске механике, Београд, 1955 стр. 24, 27, 30, 43.

где су $\vec{r}$ и $\vec{V}$ вектори положаја и брзине материјалне тачке; за Земљине вештачке сателите они се узимају у односу на геоцентар. Координате вектора $\vec{C}$ одеђују се изразима

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C \sin \Omega \sin i, \\ C_2 &= -C \cos \Omega \sin i, \\ C_3 &= C \cos i, \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

где је

$$C = \sqrt{\mu p}\,; \tag{165}$$

μ је уопште $\mu = f(M+m) = k^2 (M+m)$; овде се може узети $\mu = fM$, M је маса Земље; p је параметар елиптичне путање. Једначина (163) може се добити из израза за кинетички момент или момент количине кретања материјалне тачке у односу на неки непокретни пол O, када извршимо дељење са масом m те материјалне тачке[1]. Због дејства поремећаја бивше константе — векторски и елиптични елементи се мењају и постају функције времена, па методом варијације произвољних констаната добијамо могућност за налажење временских извода елиптичних елемената, па и саме оскулаторне елиптичне елементе путање.

Кад узмемо извод по времену једначине (163), па извршимо замену помоћу (161), добијамо једначину

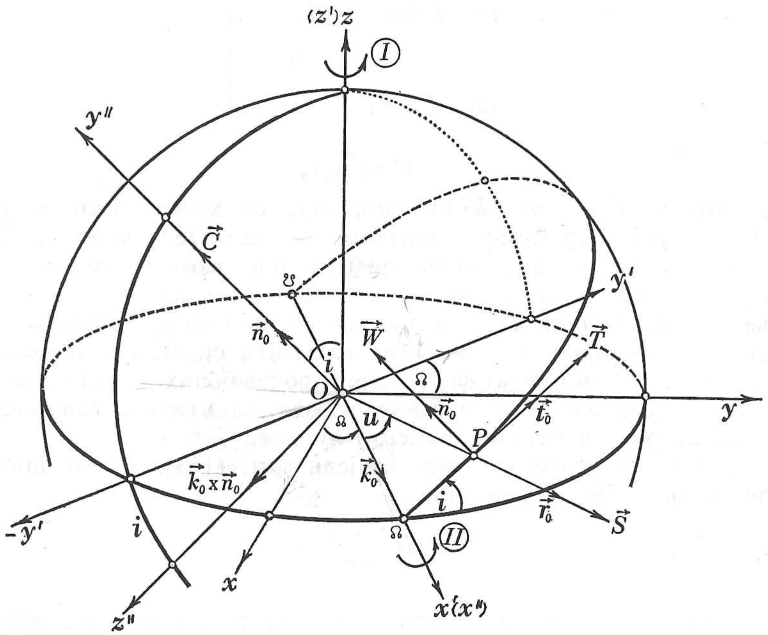
$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{166}$$

Она се може добити и из теореме кинетичког момента, по којој је временски извод кинетичког момента материјалне тачке у односу на неки пол једнак моменту резултанте сила које дејствују на уочену материјалну тачку у односу на исти пол, после дељења са масом те материјалне тачке[1]. Да бисмо даље наставили извођење, послужићемо се сликом 13, на којој је представљена замишљена сфера која у неком тренутку пролази кроз материјалну тачку P, на коју дејствују и компоненте поремећајног убрзања $\vec{F}$ у раније дефинисаном покретном координатном систему: $\vec{S}$ — дуж радијус-вектора, $\vec{T}$ — дуж трансверзале у путањској равни и $\vec{W}$ — дуж бинормале, која је нормална на путањску раван. $\vec{C}$ вектор је такође, као што знамо, вектор нормалан на путањску раван. Координате леве стране једначине (166) у $Oxyz$ систему налазимо диференцирањем по времену израза (164), тако добијамо

$$\left.\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{dC}{dt} \sin \Omega \sin i + C \cos \Omega \sin i \frac{d\Omega}{dt} + C \sin \Omega \cos i \frac{di}{dt}, \\ \frac{dC_2}{dt} &= -\frac{dC}{dt} \cos \Omega \sin i + C \sin \Omega \sin i \frac{d\Omega}{dt} - C \cos \Omega \cos i \frac{di}{dt}, \\ \frac{dC_3}{dt} &= \frac{dC}{dt} \cos i - C \sin i \frac{di}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

[1] Т. Анђелић, Р. Стојановић — Рационална механика, 1966, стр. 166, 167.

Обрнимо координатни систем $Oxyz$ око Oz осе за угао Ω, тако да се сад нови положај Ox осе поклопи са чворном линијом Ox'. Оса Oy је



Сл. 13

прешла у положај Oy'. Онда координате вектора $\dfrac{d\vec{C}}{dt}$ у новом координатном систему $Ox'y'z'$, с обзиром на изразе (167), постају

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dC_1'}{dt}&=\frac{dC_1}{dt}\cos\Omega+\frac{dC_2}{dt}\cos(90^\circ-\Omega)=C\sin i\,\frac{d\Omega}{dt},\\
\frac{dC_2'}{dt}&=\frac{dC_1}{dt}\cos(90^\circ+\Omega)+\frac{dC_2}{dt}\cos\Omega=-\frac{dC}{dt}\sin i-C\cos i\,\frac{di}{dt},\\
\frac{dC_3'}{dt}&=\frac{dC_3}{dt}=\frac{dC}{dt}\cos i-C\sin i\,\frac{di}{dt}.
\end{aligned}\right\}\tag{168}$$

Векторски израз поремећајног убрзања материјалне тачке P у покретном правоуглом координатном систему, везаном за њу и одређеном десним триједром са јединичним векторима $\vec{r}_0$, $\vec{t}_0$ и $\vec{n}_0$, је

$$\vec{F}=\vec{S}+\vec{T}+\vec{W}=S\,\vec{r}_0+T\,\vec{t}_0+W\,\vec{n}_0.\tag{169}$$

Онда је десна страна једначине (166)

$$\vec{r}\times\vec{F}=r\,T\,\vec{r}_0\times\vec{t}_0+r\,W\,\vec{r}_0\times\vec{n}_0=r\,T\,\vec{n}_0-r\,W\,\vec{t}_0,\tag{170}$$

јер је $\vec{r}=r\,\vec{r}_0$.

Нађимо пројекцију вектора (170) на правац чворне линије Ox', одређен јединичним вектором $\vec{k}_0$. Добијамо

$$\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{k}_0=rT\,\vec{k}_0\cdot\vec{n}_0-rW\,\vec{k}_0\cdot\vec{t}_0=-r\,W\cos(u+90^\circ)=r\,W\sin u,\tag{171}$$

пошто је $\vec{k}_0\cdot\vec{n}_0=0$, јер су та два вектора међусобно нормална. С обзиром на израз (166) и узимајући његову пројекцију на исти правац $\vec{k}_0$, тј. изједначујући први израз из (168) са (171) и водећи рачуна о (165), добијамо прву тражену диференцијалну једначину за лонгитуду узлазног чвора путање

$$\frac{d\Omega}{dt}=W\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\sin u}{\sin i}.\tag{172}$$

Извршимо сад другу ротацију и координатни систем $Ox'y'z'$ обрнимо око чворне линије Ox' за угао $90^\circ+i$, чиме ће оса Oy' сад доспети у положај колинеаран са вектором $\vec{C}$. Онда су координате вектора $\dfrac{d\vec{C}}{dt}$ у новом координатном систему $Ox''y''z''$, узимајући и (168),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dC_1''}{dt}&=\frac{dC_1'}{dt},\\
\frac{dC_2''}{dt}&=\frac{dC_2'}{dt}\cos(90^\circ+i)+\frac{dC_3'}{dt}\cos i=\frac{dC}{dt},\\
\frac{dC_3''}{dt}&=\frac{dC_2'}{dt}\cos[90^\circ+(90^\circ+i)]+\frac{dC_3'}{dt}\cos(90^\circ+i)=C\frac{di}{dt}.
\end{aligned}\right\}\tag{173}$$

Друга једначина овога система показује да је пројекција вектора $\dfrac{d\vec{C}}{dt}$ на осу колинеарну са вектором $\vec{C}$ једнака по апсолутној вредности временском изводу модула вектора $\vec{C}$.

Кад десну страну једначине (166), односно (170) пројектујемо на Oy'' осу, добићемо

$$\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{n}_0=(r\,T\,\vec{n}_0-r\,W\,\vec{t}_0)\cdot\vec{n}_0=r\,T,\tag{174}$$

јер је $\vec{n}_0\cdot\vec{t}_0=0$, пошто су ова два вектора међусобно нормална.

Сад изједначимо пројекције леве и десне стране једначине (166) на исту $\vec{n}_0$ осу, тј. изједначимо други израз из (173) са изразом (174) и нађимо одговарајући извод из (165). Тако добијамо

$$\frac{dC_2''}{dt}=\frac{dC}{dt}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{dp}{dt}=r\,T,$$

одакле налазимо другу тражену диференцијалну једначину за параметар путање

$$\frac{dp}{dt}=2\,r\,T\sqrt{\frac{p}{\mu}}. \tag{175}$$

Пројектујмо сада десну страну једначине (166), односно (170) на осу Oz'' одређену јединичним вектором $\vec{k}_0\times\vec{n}_0$, добићемо

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{k}_0\times\vec{n}_0&=(r\,T\vec{n}_0-r\,W\vec{t}_0)\cdot\vec{k}_0\times\vec{n}_0=\\ &=-rW\vec{t}_0\cdot\vec{k}_0\times\vec{n}_0=r\,W\,\vec{t}_0\cdot\vec{n}_0\times\vec{k}_0=r\,W\,\vec{t}_0\times\vec{n}_0\cdot\vec{k}_0=\\ &=r\,W\vec{r}_0\cdot\vec{k}_0=r\,W\cos u.\end{aligned} \tag{176}$$

После изједначења пројекција леве и десне стране једначине (166) на исту осу, тј. кад изједначимо израз из треће једначине система (173) са овим из (176) и узмемо у обзир израз за C из (165), добијамо

$$C\frac{di}{dt}=r\,W\cos u,$$

тј.

$$\frac{di}{dt}=\frac{r}{\sqrt{\mu\,p}}W\cos u, \tag{177}$$

а ово је трећа тражена диференцијална једначина за нагиб путање.

Из једначина (172) и (177) закључујемо да оријентација, тј. положај путањске равни (који се дорећује угловима Ω и i) зависи само од бочног убрзања W, јер су остала два T и S у тренутној путањској равни.

15. ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ЕКСЦЕНТРИЧНОСТ, ПРАВУ АНОМАЛИЈУ И АРГУМЕНТ ЛАТИТУДЕ ПЕРИЦЕНТРА (ПЕРИГЕЈА)

Из небеске механике за проблем двају тела, тј. за непоремећено кретање знамо да су радијална и нормална (трансверзална) брзина

$$V_r=\frac{dr}{dt}\quad\text{и}\quad V_n=r\frac{\partial v}{\partial t},$$

где смо сада намерно уместо тамошњег $\frac{dv}{dt}$ увели $\frac{\partial v}{\partial t}$, да бисмо означили временски извод праве аномалије v у непоремећеном кретању, при чему се путањски елементи не мењају. Јер, даље ћемо са $\frac{dv}{dt}$ означавати временски извод праве аномалије у поремећеном кретању, који треба да нађемо. Израчунајмо наведене брзине из првог и другог Кеплеровог закона

$$r=\frac{p}{1+e\cos v},\qquad r^2\frac{\partial v}{\partial t}=C. \tag{178}$$

Диференцирањем прве једначине по времену, узимајући је у облику

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos v}{p},$$

налазимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=\frac{e\sin v}{p}\frac{\partial v}{\partial t},$$

одакле је, с обзиром на (178) и (165),

$$V_r=\frac{dr}{dt}=r^2\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{e\sin v}{p}=C\frac{e\sin v}{p}=e\sin v\sqrt{\frac{\mu}{p}}, \tag{179}$$

Из једначина (178) и (165) добијамо и другу брзину

$$V_n=r\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{C}{r}=\frac{\sqrt{\mu\,p}}{r}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos v). \tag{180}$$

Одраније знамо[1] да су вектори положаја и брзина праве (поремећене) и оскулаторне (непоремећене) путање међусобно једнаки, тј.

$$\vec{\bar{r}}=\vec{r},\qquad \vec{\bar{V}}=\vec{V}, \tag{181}$$

где се први вектори односе на поремећено а други на непоремећено кретање. Значи, због друге једначине (181), и за поремећено кретање радијална и трансверзална брзина имају исти облик (179) и (180), само сад се елементи p и e односе на оскулаторну елипсу у разматраној тачки путање за коју се узимају ове брзине. Угаону брзину радијус-вектора r у непоремећеном кретању означили смо са $\frac{\partial v}{\partial t}$, а у поремећеном ћемо означити са $\frac{d\sigma}{dt}$, па је, с обзиром на (180) и (181), трансверзална брзина у поремећеном кретању

$$\bar{V}_n=r\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos v). \tag{182}$$

[1] М. Миланковић — Основи небеске механике, 1955, стр. 58.

*5

Угаона брзина $\frac{d\sigma}{dt}$ поремећеног кретања састоји се од два сабирка $\frac{du}{dt}$ и $\cos i\cdot\frac{d\Omega}{dt}$. Први сабирак $\frac{du}{dt}$ угаоне брзине потиче од кретања сателита у равни тренутне елиптичне путање без обрачунавања обртања саме путањске равни, док се други сабирак $\cos i\frac{d\Omega}{dt}$ појављује због обртања равни путање. Наиме, угаона брзина обртања чворне линије у екваторској равни је $\frac{d\Omega}{dt}$, па кад ову брзину узмемо у путањској равни сателита, која је према екваторској нагнута под углом i, добијамо одговарајућу компоненту $\frac{d\Omega}{dt}\cos i$. Тако се са ова два кретања одређује угаоно померање сателита за јединицу времена у његовом поремећеном кретању. Како је аргумент латитуде u повезан с аргументом латитуде перицентра (перигеја за Земљин вештачки сателит) ω и правом аномалијом v једначином

$$u=\omega+v, \tag{183}$$

имамо да је

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{du}{dt}+\cos i\frac{d\Omega}{dt}=\frac{d\omega}{dt}+\frac{dv}{dt}+\cos i\frac{d\Omega}{dt}, \tag{184}$$

Кад једначину (182) помножимо са првом једначином (178) и узмемо у обзир (165), добијамо

$$r^2\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{\mu p}=C, \tag{185}$$

што представља двоструку секторску брзину, која је изражена преко потпуне угаоне брзине $\frac{d\sigma}{dt}$ радијус-вектора r, а не преко $\frac{dv}{dt}$, за које смо овде у непоремећеном кретању усвојили ознаку $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Узмимо сад прву једначину (178) у облику $r(1+e\cos v)=p$, па је диференцирајмо по времену, водећи рачуна да су у поремећеном кретању путањски елементи променљиве величине. Добићемо

$$\frac{p}{r}\frac{dr}{dt}+r\cos v\frac{de}{dt}-r\,e\sin v\frac{dv}{dt}=\frac{dp}{dt}, \tag{186}$$

при чему смо извели трансформацију уз помоћ (178). Кад у (186) заменимо израз за $\frac{dr}{dt}$ из (179), добијамо

$$e\sin v\cdot\frac{p}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}+r\cos v\frac{de}{dt}-r\,e\sin v\frac{dv}{dt}=\frac{dp}{dt}\,. \tag{187}$$

Диференцирање по времену израза (179) даје

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{de}{dt}\sin v\cdot\sqrt{\frac{\mu}{p}}+e\cos v\frac{dv}{dt}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{p}}-\frac{1}{2}\frac{e}{p}\frac{dp}{dt}\sin v\cdot\sqrt{\frac{\mu}{p}}. \tag{188}$$

Из рационалне механике је познато да интензитет радијалне компоненте вектора убрзања (дуж радијус-вектора) има облик $\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$, па ако једначину поремећеног кретања Земљиног вештачког сателита у облику (161) пројектујемо на правац геоцентричног радијус-вектора сателита, узимајући у обзир (169), добијамо одговарајућу једначину кретања

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2=-\mu r^{-2}+S. \tag{189}$$

Кад овде заменимо вредности за $\frac{d^2r}{dt^2}$ и $\frac{d\sigma}{dt}$ из (188) и (185) добијамо

$$\frac{de}{dt}\sin v\cdot\sqrt{\frac{\mu}{p}}+e\cos v\frac{dv}{dt}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{p}}-\frac{1}{2}\frac{e}{p}\frac{dp}{dt}\sin v\cdot\sqrt{\frac{\mu}{p}}-\frac{\mu p}{r^3}=S-\frac{\mu}{r^2}. \tag{190}$$

Најзад, да бисмо дошли до диференцијалне једначине за ексцентричност, треба да елиминишемо $\frac{dv}{dt}$ из једначина (187) и (190), а то можемо ако прву једначину помножимо са $\frac{\cos v}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$ а другу са $\sin v$ па их саберемо, и у тако добијеном збиру заменимо вредност за $\frac{dp}{dt}$ из (175), онда ћемо добити

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}\sqrt{\frac{\mu}{p}}&=\frac{\mu p}{r^3}\sin v-\frac{\mu}{r^2}\sin v-e\frac{\mu}{r^2}\sin v\cos v+S\sin v+\\&+2T\cos v+e\frac{r}{p}T\sin^2 v=\frac{\mu}{r^2}\sin v\left(\frac{p}{r}-1-e\cos v\right)+\\&+S\sin v+T\cos v+T\cos v+e\frac{r}{p}T(1-\cos^2 v)=\\&=S\sin v+T\cos v+e\frac{r}{p}T+\frac{r}{p}T\cos v\left(\frac{p}{r}-e\cos v\right)=\\&=S\sin v+T\cos v+\frac{r}{p}T\cos v+e\frac{r}{p}T,\end{aligned}$$

јер је, из (178), $\frac{p}{r}=1+e\cos v$. Тако да тражена једначина за ексцентричност добија облик

$$\frac{de}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{S\sin v+T\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\frac{r}{p}\right]\right\}. \tag{191}$$

Диференцијалну једначину за праву аномалију добијамо кад $\frac{de}{dt}$ из (191) и $\frac{dp}{dt}$ из (175) заменимо у (187). Тако налазимо

$$e\sin v\frac{p}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}+r\cos v\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin v+\left(1+\frac{r}{p}\right)T\cos v+e\frac{r}{p}T\right]-$$

$$-r\,e\sin v\frac{dv}{dt}=2\,r\,T\sqrt{\frac{p}{\mu}},$$

одакле је

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}+\frac{\cos v}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}S+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{1-\sin^2 v}{e\sin v}T+\frac{\cos v}{\sin v}\frac{r}{p}\sqrt{\frac{p}{\mu}}T-$$

$$-\frac{2}{e\sin v}\sqrt{\frac{p}{\mu}}T=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}+\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\frac{\cos v}{e}S-\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin v}{e}T+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{T}{e\sin v}+\frac{\cos v}{\sin v}\frac{r}{p}T-\frac{2T}{e\sin v}\right].$$

Збир последња три члана у угластој загради даје

$$\frac{T}{e\sin v}\left[\frac{r}{p}(1+e\cos v)-1\right]=0,$$

када се замени $\frac{r}{p}$ из (178). Тако коначно добијамо тражену диференцијалну једначину за праву аномалију поремећеног кретања

$$\frac{dv}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\frac{\mu}{r^2}+S\frac{\cos v}{e}-T\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin v}{e}\right]. \tag{192}$$

Диференцијалну једначину за аргумент латитуде перицентра, одн. перигеја — овде, тј. угаону брзину ротације перицентра, одн. перигеја добијамо кад једначину (184) решимо по $\frac{d\omega}{dt}$ и заменимо вредности за $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\sigma}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ из (172), (185) и (192). Онда је тражена једначина

$$\frac{d\omega}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\frac{\cos v}{e}+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin v}{e}-W\frac{r}{p}\operatorname{ctg} i\sin u\right]. \tag{193}$$

Ако је ексцентричност мала, тј. ако је оскулаторна путања блиска кружној, онда је погодно заменити једначине (191) и (193) за $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\omega}{dt}$ са одговарајућим за $\frac{d\lambda_1}{dt}$ и $\frac{d\lambda_2}{dt}$. Нови елементи λ_1 и λ_2 су дефинисани једначинама

$$\lambda_1=e\sin\omega,\quad \lambda_2=e\cos\omega, \tag{194}$$

па се елементи e и ω одређују из једначина

$$e=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{195}$$

Диференцијалне једначине елемената λ_1 и λ_2 добијамо диференцирањем израза (194) и заменом вредности за $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\omega}{dt}$ из (191) и (193). Тако налазимо

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=\frac{de}{dt}\sin\omega+\frac{d\omega}{dt}e\cos\omega=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin\omega\sin v+\right.$$

$$+\left(1+\frac{r}{p}\right)T\sin\omega\cos v+\frac{r}{p}Te\sin\omega-S\cos\omega\cos v+$$

$$\left.+\left(1+\frac{r}{p}\right)T\cos\omega\sin v-\frac{r}{p}We\cos\omega\operatorname{ctg} i\sin u\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\cos(\omega+v)+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin(\omega+v)+\right.$$

$$\left.+\frac{r}{p}(Te\sin\omega-We\cos\omega\operatorname{ctg} i\sin u)\right],$$

одакле, после смена (194) и $u=\omega+v$, диференцијална једначина за λ_1 добија облик

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\cos u+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin u+\right.$$
$$\left.+\frac{r}{p}(T\lambda_1-W\lambda_2\operatorname{ctg} i\sin u)\right]. \tag{196}$$

За $\frac{d\lambda_2}{dt}$ имамо

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=\frac{de}{dt}\cos\omega-\frac{d\omega}{dt}e\sin\omega=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin v\cos\omega+\right.$$

$$+\left(1+\frac{r}{p}\right)T\cos\omega\cos v+\frac{r}{p}Te\cos\omega+S\cos v\sin\omega-$$

$$\left.-\left(1+\frac{r}{p}\right)T\sin\omega\sin v+\frac{r}{p}We\sin\omega\operatorname{ctg}i\sin u\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin(v+\omega)+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(\omega+v)+\right.$$

$$\left.+\frac{r}{p}(Te\cos\omega+We\sin\omega\operatorname{ctg}i\sin u)\right],$$

одакле добијамо другу тражену диференцијалну једначину

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin u+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos u+\frac{r}{p}(T\lambda_2+W\lambda_1\operatorname{ctg}i\sin u)\right]. \quad (197)$$

17. ЈЕДНАЧИНА ЗА АРГУМЕНТ ЛАТИТУДЕ

Из једначине (184) добијамо

$$\frac{du}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}-\cos i\frac{d\Omega}{dt},$$

па овде заменимо први члан на десној страни помоћу (185)

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$

Онда налазимо диференцијалну једначину за аргумент латитуде u

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}-\cos i\frac{d\Omega}{dt}, \quad (198)$$

или, кад сменимо $\dfrac{d\Omega}{dt}$ из (172),

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}-W\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\operatorname{ctg}i\sin u, \quad (199)$$

или, најкраће написано,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{\gamma r^2}, \quad (200)$$

где је

$$\gamma=\frac{1}{1-\dfrac{r^3}{\mu p}W\operatorname{ctg}i\sin u}. \quad (201)$$

18. РЕШАВАЊЕ ПРЕТХОДНОГ СИСТЕМА ЈЕДНАЧИНА МЕТОДОМ УЗАСТОПНИХ АПРОКСИМАЦИЈА

Напред изведене једначине (175), (191), (193), (172), (177) и (192) чине систем диференцијалних једначина за наше даље разматрање

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt}&=2rT\sqrt{\frac{p}{\mu}},\\
\frac{de}{dt}&=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{S\sin v+T\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\frac{r}{p}\right]\right\},\\
\frac{d\omega}{dt}&=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\frac{\cos v}{e}+T\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-W\frac{r}{p}\operatorname{ctg}i\sin u\right],\\
\frac{d\Omega}{dt}&=W\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i},\\
\frac{di}{dt}&=W\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\cos u,\\
\frac{dv}{dt}&=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\frac{\mu}{r^2}+S\frac{\cos v}{e}-T\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right],
\end{aligned}\right\} \quad (202)$$

где су

$$r=\frac{p}{1+e\cos v},\quad \frac{r}{p}=\frac{1}{1+e\cos v},\quad u=\omega+v. \quad (203)$$

При извођењу претходних једначина нигде се нисмо користили претпоставком о малености поремећајних убрзања S, T и W. Стога је (202) тачан систем диференцијалних једначина за налажење оскулаторних елемената путање при произвољним вредностима поремећајних убрзања.

Ако су поремећајна убрзања мала према основном убрзању $g_0=\dfrac{\mu}{r^2}$, тј. ако су мале вредности односа $\dfrac{S}{g_0}$, $\dfrac{T}{g_0}$ и $\dfrac{W}{g_0}$, онда систем (202) може да се реши методом узастопних апроксимација. Због тога ћемо претходно прећи на праву аномалију као независно променљиву, помоћу последње једначине из (202), а знајући да је нпр. $\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{dp}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dt}$, одакле се добија $\dfrac{dp}{dv}$. Тако налазимо следећи систем

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{dp}{dv}=2\,r\,Q\,T,\\
&\frac{de}{dv}=Q\left\{S\sin v+T\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\frac{r}{p}\right]\right\},\\
&\frac{d\omega}{dv}=Q\left[-S\frac{\cos v}{e}+T\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-W\frac{r}{p}\operatorname{ctg} i\sin u\right],\\
&\frac{d\Omega}{dv}=QW\frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i},\\
&\frac{di}{dv}=Q\,W\frac{r}{p}\cos u,\\
&\frac{dt}{dv}=Q\sqrt{\frac{\mu}{p}},
\end{aligned}
\right\}\tag{204}
$$

где је

$$
Q=\frac{1}{\dfrac{\mu}{r^2}+S\dfrac{\cos v}{e}-T\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin v}\,.\tag{205}
$$

Ми ћемо се ограничити на разматрање случајева када су поремећајна убрзања функције од вектора $\vec{r}$ и $\vec{V}$ и не зависе експлицитно од времена t. При овом је неопходно заједно решавати само првих пет једначина система (204), док се шеста једначина може искористити код одређивања времена лета сателита.

Да бисмо приступили методи приближног решавања система првих пет једначина (204), означимо са p_0, e_0, ω_0, Ω_0, i_0 вредности разматраних оскулаторних елемената за почетну тачку оскулације у тренутку t_0, када је $v=v_0$. Даље, означимо са $\Delta p(v)$, $\Delta e(v)$, $\Delta\omega(v)$, $\Delta\Omega(v)$, $\Delta i(v)$ поремећаје ових елемената у даљем кретању. Онда оскулаторне путањске елементе у неком тренутку t, када је права аномалија v, можемо представити изразима

$$
\left.
\begin{aligned}
p(v)=p_0+\Delta p(v),\ \ e(v)=e_0+\Delta e(v),\ \ \omega(v)=\omega_0+\Delta\omega(v),\\
\Omega(v)=\Omega_0+\Delta\Omega(v),\ \ i(v)=i_0+\Delta i(v).
\end{aligned}
\right\}\tag{206}
$$

С обзиром да су први чланови на десним странама ових једначина константе, онда првих пет једначина (204), после смена (206), дају

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d}{dv}(\Delta p)=2\,r\,Q\,T,\\
&\frac{d}{dv}(\Delta e)=Q\left\{S\sin v+T\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\frac{r}{p}\right]\right\},\\
&\frac{d}{dv}(\Delta\omega)=Q\left[-S\frac{\cos v}{e}+T\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-W\frac{r}{p}\operatorname{ctg} i\sin u\right],\\
&\frac{d}{dv}(\Delta\Omega)=Q\,W\frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i},\\
&\frac{d}{dv}(\Delta i)=Q\,W\frac{r}{p}\cos u.
\end{aligned}
\right\}\tag{207}
$$

При решавању система (207) користимо и једначине (203), (205) и (206).

Размотримо случај интеграљења наведеног система диференцијалних једначина за такав интервал промене аргумента v у којем су поремећаји Δp, Δe, $\Delta\omega$, $\Delta\Omega$ и Δi мали. Онда, у првој апроксимацији, можемо на десним странама једначина (207) ставити да је $p=p_0$, $e=e_0$, $\omega=\omega_0$, $\Omega=\Omega_0$, $i=i_0$. Тада се свака једначина овога система може да интеграли одвојено, тј. независно од осталих једначина из (207), па се сад величине такозваних поремећаја првог реда Δp, Δe, $\Delta\omega$, $\Delta\Omega$ и Δi одређују квадратурама. После замене тако нађених вредности у (206) добијамо нове вредности оскулаторних елемената путање, са којима поступак можемо да обновимо и израчунамо поремећаје другог реда, итд. док не добијемо потребну тачност.

За квалитативну анализу различитих малих поремећајних дејстава ограничићемо се на решавање постављеног задатка у првој рачунској апроксимацији. Затим, сматраћемо да су односи $\frac{S}{eg_0}$ и $\frac{T}{eg_0}$ мали, где имамо да је $g_0=\frac{\mu}{r^2}$, па (205) можемо да заменимо с приближним изразом

$$
Q\approx\frac{r^2}{\mu}=\frac{1}{g_0}\,.\tag{208}
$$

V. СЕКУЛАРНИ ПОРЕМЕЋАЈИ САТЕЛИТА

19. СЕКУЛАРНИ ПОРЕМЕЋАЈИ ЕЛИПТИЧНЕ ПУТАЊЕ ЗЕМЉИНОГ ВЕШТАЧКОГ САТЕЛИТА

При утицају малих поремећајних чинилаца на кретање Земљиног вештачког сателита основну улогу имају растући секуларни поремећаји елемената његове путање. Као што знамо из небеске механике секуларни поремећаји су пропорционални времену, а ми ћемо их израчунавати за узете елиптичне елементе сателитове путање за једно облетање вештачког сателита око Земље, што ћемо означити са δp, δe, $\delta\omega$, $\delta\Omega$, δi. Тако из (207) интеграљењем по v у границама од 0 до 2π и после смене приближног израза за Q из (208) добијамо ове приближне изразе секуларних поремећаја сателита за један обилазак око Земље:

$$
\left.\begin{aligned}
\delta p &= \int_0^{2\pi} 2r\frac{T}{g_0}\,dv,\\
\delta e &= \int_0^{2\pi}\left\{\frac{S}{g_0}\sin v+\frac{T}{g_0}\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\frac{r}{p}\right]\right\}dv,\\
\delta\omega &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{S}{g_0}\frac{\cos v}{e}+\frac{T}{g_0}\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-\frac{W}{g_0}\frac{r}{p}\operatorname{ctg} i\sin u\right]dv,\\
\delta\Omega &= \int_0^{2\pi}\frac{W}{g_0}\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i}\,dv,\\
\delta i &= \int_0^{2\pi}\frac{W}{g_0}\frac{r}{p}\cos u\,dv;\\
r&=\frac{p}{1+e\cos v},\quad \frac{r}{p}=\frac{1}{1+e\cos v},\quad u=\omega+v,\quad g_0=\frac{\mu}{r^2}.
\end{aligned}\right\}\quad (209)
$$

У изразима (209) за поремећаје првога реда изоставићемо ознаку „$_0$" за обележавање почетних оскулаторних елемената, због простијег писања. Напоменимо да смо претходне изразе написали уз претпоставку да су односи $\frac{S}{eg_0}$, $\frac{T}{eg_0}$ и $\frac{W}{g_0}$ мали. Међутим, ако су путање блиске кружним, када $e\to 0$, онда ови изрази могу бити неподесни, чак при утицају врло малих поремећајних убрзања и тада се анализа врши на други начин.

20. СЕКУЛАРНИ ПОРЕМЕЋАЈИ ЗБОГ УТИЦАЈА НЕЦЕНТРАЛНОСТИ ЗЕМЉИНОГ ПРИВЛАЧЕЊА

Секуларне поремећаје вештачког сателита због Земљине сфероидалности или спљоштености, односно утицај другог члана развоја Земљиног нормалног потенцијала на елементе елиптичне путање, за једно облетање вештачког сателита око Земље, у приближном облику (због узетог приближног израза за Q) и са обрачунавањем секуларних поремећаја првога реда, када на десним странама узимамо да су путањски елементи константни, добијамо из (209) и (156), којим су дате координате поремећајног убрзања од другог члана Земљиног потенцијала. Тако налазимо следеће изразе:

$$
\left.\begin{aligned}
\delta p &= -\frac{2}{p}\frac{\varepsilon}{\mu}\sin^2 i\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\sin 2u\,dv,\\
\delta e &= \frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\{\sin v\,(1+e\cos v)^2(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-\\
&\quad -\sin^2 i\sin 2u\,(1+e\cos v)\,[2\cos v+e(\cos^2 v+1)]\}\,dv,\\
\delta\omega &= \frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\cos v}{e}(1+e\cos v)^2(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-\right.\\
&\quad -\frac{2+e\cos v}{e}(1+e\cos v)\sin^2 i\sin v\sin 2u+\\
&\quad \left.+2\,(1+e\cos v)\cos^2 i\sin^2 u\right]dv,\\
\delta\Omega &= -\frac{2}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\sin^2 u\,dv,\\
\delta i &= -\frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\sin 2i\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\sin u\cos u\,dv.
\end{aligned}\right\}\quad (210)
$$

Пре него што приступимо израчунавању наведених интеграла, да бисмо рачун упростили, испитајмо одређени интеграл у облику

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin^n (x+\alpha) \cos^m (x+\alpha)\, dx, \tag{211}$$

где је α нека константа, а n и m су произвољни цели бројеви, од којих је један непаран. Нека је прво m непаран број, тј. $m = 2k+1$, где је k цео број. Тада разматрани интеграл, за узети случај, постаје

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \sin^n (x+\alpha) \cos^{2k} (x+\alpha) \cos (x+\alpha)\, dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^n (x+\alpha) [1-\sin^2 (x+\alpha)]^k \cos (x+\alpha)\, dx = \int_{\sin\alpha}^{\sin\alpha} y^n (1-y^2)^k\, dy = 0 \end{aligned} \tag{212}$$

због истих граница интеграљења, а смена је $y = \sin (x+\alpha)$. Слично се показује и добија да је $I_1 = 0$ и у другом случају, ако је n непаран број, тј. $n = 2k+1$. Тако (211), због (212), има вредност

$$\int_0^{2\pi} \sin^n (x+\alpha) \cos^m (x+\alpha)\, dx = 0, \tag{213}$$

ако је један од целих бројева n или m непаран. Нарочито, ако је збир $n+m$ непаран, када један од ових сабирака мора да је непаран, постоји (213).

Испитајмо сада други одређени интеграл у облику

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^n x \cos^m x \sin^p (x+\alpha) \cos^q (x+\alpha)\, dx, \tag{214}$$

где је α нека константа, а n, m, p, q су цели бројеви. Овај интеграл може да се напише као збир интеграла у облику

$$I_2 = \sum_{i=1} A_i \int_0^{2\pi} \sin^{n_i} x \cos^{m_i} x\, dx, \tag{215}$$

где су A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ неке тригонометријске функције константе α, а n_i и m_i су цели бројеви који задовољавају услов

$$n_i + m_i = n+m+p+q.$$

Тако можемо да закључимо, ако је збир $n+m+p+q$ непаран број, онда се интеграл (214), односно (215) своди на збир интеграла облика (213), па је у том случају, за непаран збир експонената,

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \cos^m x \sin^p (x+\alpha) \cos^q (x+\alpha)\, dx = 0. \tag{216}$$

Као што смо већ рекли, у првој апроксимацији, с којом ћемо решавати постављени задатак, путањске елементе на десним странама израза (210) у току једног сателитовог обиласка путање сматраћемо константним, па је на десним странама (210) променљива само права аномалија v, која фигурише и преко аргумента латитуде $u = \omega + v$. Онда изрази (210), с обзиром на (213) и (216), постају:

$$\begin{aligned} \delta p &= -\frac{2}{p} \frac{\varepsilon}{\mu} \sin^2 i \left\{ \int_0^{2\pi} \sin 2u\, dv + e \int_0^{2\pi} \sin 2u \cos v\, dv \right\} = \\ &= -\frac{2}{p} \frac{\varepsilon}{\mu} \sin^2 i \left\{ 2 \int_0^{2\pi} \sin (\omega+v) \cos (\omega+v)\, dv + \right. \\ &\quad \left. + 2e \int_0^{2\pi} \cos v \sin (\omega+v) \cos (\omega+v)\, dv \right\} = 0; \end{aligned}$$

на сличан начин се показује да је

$$\delta i = 0;$$

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{1}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} e \sin^2 i \int_0^{2\pi} (6 \sin v \cos v \sin^2 u - 3 \cos^2 v \sin 2u)\, dv = \\ &= \frac{3}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} e \sin^2 i \int_0^{2\pi} \left(\sin 2v \frac{1-\cos 2u}{2} - \frac{1+\cos 2v}{2} \sin 2u \right) dv = \\ &= -\frac{3}{2p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} e \sin^2 i \int_0^{2\pi} (\sin 2v \cos 2u + \cos 2v \sin 2u)\, dv = \\ &= -\frac{3}{2p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} e \sin^2 i \int_0^{2\pi} \sin (2v+2u)\, dv = -\frac{3}{2p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} e \sin^2 i \int_0^{2\pi} \sin (2\omega + 4v)\, dv = 0; \end{aligned}$$

$$\delta\omega = \frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\int\limits_0^{2\pi}[-2\cos^2 v\,(3\sin^2 i\sin^2 u - 1) - 3\sin^2 i \sin v\cos v\sin 2u +$$

$$+ 2\cos^2 i\sin^2 u]\,dv =$$

$$= \frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\int\limits_0^{2\pi}[-\sin^2 i\,(6\cos^2 v\sin^2 u + 3\cos v\sin v\sin 2u) +$$

$$+ 2\cos^2 v + 2\cos^2 i\sin^2 u]\,dv =$$

$$= \frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\int\limits_0^{2\pi}\left\{-\frac{3}{2}\sin^2 i\,[(1+\cos 2v)(1-\cos 2u) + \sin 2v\sin 2u] +\right.$$

$$\left. + 1 + \cos 2v + \cos^2 i\,(1-\cos 2u)\right\} dv =$$

$$= \frac{1}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\pi\,(-3\sin^2 i + 2 + 2\cos^2 i) = \frac{\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}(5\cos^2 i - 1);$$

$$\delta\Omega = -\frac{2}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 u\,dv = -\frac{2}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2u}{2}\,dv = -\frac{2\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i.$$

Дакле, у првој апроксимацији, за један обилазак вештачког сателита око Земље промене његових елиптичних путањских елемената су:

$$\left.\begin{aligned} &\delta p = \delta i = \delta e = 0,\\ &\delta\omega = \frac{\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}(5\cos^2 i - 1),\\ &\delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i. \end{aligned}\right\} \tag{217}$$

Кад употребимо приближан израз (134), по којем је $\dfrac{\varepsilon}{\mu} \approx \dfrac{a_e^2\,\alpha}{2}$, где смо сад Земљин екваторски полупречник означили са a_e уместо раније ознаке a (која се користи и за велику полуосу елиптичне путање), онда претходни изрази постају

$$\left.\begin{aligned} &\delta\omega \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\alpha\,(5\cos^2 i - 1),\\ &\delta\Omega \approx -\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\alpha\cos i. \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

Изрази (217) показују да спљоштеност Земљиног сфероида, у првој апроксимацији, не производи секуларне поремећаје параметра, нагиба и ексцентричности путање Земљиног вештачког сателита, а изазива померање перигеја и чворова. Ако је путања поларна, тј. $i = 90°$, онда је $\delta\Omega = 0$. Чворна линија сателитове путање, у првој апроксимацији, подлежи секуларним поремећајима, који су пропорционални косинусу нагиба, а обрнуто пропорционални квадрату параметра путање. За вештачке сателите са директним кретањем, одн. када је $i < 90°$, чворови њихових путања се крећу ретроградно, а за сателите са $i > 90°$ чворови се крећу директно; ово кретање се назива прецесијом чворова путање. Због тога се и путањске равни вештачких сателита, сем поларних, обрћу око осе Земљине ротације. Ова прецесија достиже приметне вредности. Тако, нпр. за сателите типа „Васток“ прецесија чворова њихових путања износи $-4°$ за један дан[1].

За анализу секуларног померања $\delta\omega$ перигеја, у првој апроксимацији, за време једног сателитовог обиласка око Земље, видимо да је $\delta\omega = 0$ за критичне вредности нагиба сателитове путање

$$i_{\text{кр}\,1} = \arccos\sqrt{\frac{1}{5}} \approx 63°26', \qquad i_{\text{кр}\,2} = 180° - i_{\text{кр}\,1} \approx 116°34', \tag{219}$$

што се добија из $5\cos^2 i - 1 = 0$. Затим је $\delta\omega > 0$, тј. перигеј се помера у смеру сателитовог кретања за $i < i_{\text{кр}\,1}$ или $i > i_{\text{кр}\,2}$, а $\delta\omega < 0$, тј. перигеј сателитове путање се помера у супротном смеру од оног у којем се сателит креће око Земље за нагиб i његове путање $i_{\text{кр}\,1} < i < i_{\text{кр}\,2}$. Највећу брзину секуларног померања перигеја (за $p = \text{const.}$) има екваторска путања Земљиног вештачког сателита (за $i = 0$) за коју, из (217) и (218), добијамо израз

$$\delta\omega_{\max} = 4\frac{\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu} \approx 2\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\alpha. \tag{220}$$

Тако, за ниско летеће сателите ($p \approx a_e$) у екваторској равни имамо

$$\delta\omega_{\max} \approx 2\pi\alpha \approx \frac{360°}{300} \approx 1\overset{\circ}{.}2$$

за једно облетање Земље.

Из (220) видимо да се са повећањем димензија путање брзина секуларног померања перигеја смањује обрнуто пропорционално квадрату параметра путање. Тако, за екваторске вештачке сателите који би се кретали у области Месечеве путање ($p \approx 384\,000$ км) било би $\delta\omega_{\max} \approx 1''\!.2$, што је још приметна величина[2].

Напоменимо, узгред, да при прелазу са елиптичне на кружну путању параметар p постаје једнак полупречнику r путање, па тада секуларно померање $\delta\omega$ перигеја губи смисао, а померање чвора, с обзиром на (217) и (218), добија израз $\delta\Omega = -\dfrac{2\pi}{r^2}\dfrac{\varepsilon}{\mu}\cos i$, одн. $\delta\Omega \approx -\pi\left(\dfrac{a_e}{r}\right)^2\alpha\cos i$. Дакле,

[1] М. К. Тихонравов и др. — Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли, 1974, стр. 120.

[2] П. Е. Эльясберг — Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, 1965, стр. 339.

због несферичности и ротације Земље и раван кружне путање вештачког сателита непрекидно се мења, изузев за поларне путање. При томе нагиб i не подлеже секуларним променама.

Величине померања $\Delta\Omega$ чвора и $\Delta\omega$ перигеја путање Земљиног вештачког сателита за време n облетања путање су

је

$$\Delta\Omega = n\,\delta\Omega, \qquad \Delta\omega = n\,\delta\omega, \tag{221}$$

где је n цео број. Ако означимо са n_{Ω} и n_ω бројеве обилажења Земље за које свако од померања $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$ постаје једнако 2π, онда се, пошто сателит изврши n_{Ω} и n_ω облетања Земље, раван његове путање и његов перигеј враћају у почетне положаје. Одавде закључујемо да секуларни поремећаји вештачког сателита стварно имају дугопериодични карактер. Временски периоди једног пуног обиласка чвора и перигеја, P^*_{Ω} и P^*_ω, због ових поремећаја су

$$P^*_{\Omega} = n_{\Omega} P, \qquad P^*_\omega = n_\omega P, \tag{222}$$

где P означава временски период једног сателитовог обилажења његове путање. С обзиром на (221), кад узмемо $\Delta\Omega = 2\pi$ и $\Delta\omega = 2\pi$, онда су $2\pi = n_{\Omega}\cdot|\delta\Omega|$ и $2\pi = n_\omega\cdot|\delta\omega|$, па због (217) и (218) добијамо за одговарајуће бројеве обилажења путање сателита

$$\left.\begin{aligned} n_{\Omega} &= \frac{2\pi}{|\delta\Omega|} = \frac{p^2}{|\cos i|}\frac{\mu}{\varepsilon} \approx \frac{2}{\alpha|\cos i|}\left(\frac{p}{a_e}\right)^2, \\ n_\omega &= \frac{2\pi}{|\delta\omega|} = \frac{2p^2}{|5\cos^2 i - 1|}\frac{\mu}{\varepsilon} \approx \frac{4}{\alpha|5\cos^2 i - 1|}\left(\frac{p}{a_e}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{223}$$

Из ових израза видимо да $n_{\Omega} \to \infty$ за $i \to \frac{\pi}{2}$, док $n_\omega \to \infty$ за $i \to i_{\text{кр }1}$ или за $i \to i_{\text{кр }2}$. Најмање вредности n_{Ω} и n_ω имају кад се сателит креће у екваторској равни, тј. за $i = 0$, када су

$$\left.\begin{aligned} (n_{\Omega})_{\min} &= p^2\frac{\mu}{\varepsilon} \approx \frac{2}{\alpha}\left(\frac{p}{a_e}\right)^2, \\ (n_\omega)_{\min} &= \frac{p^2}{2}\frac{\mu}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p}{a_e}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{224}$$

Међутим, приметимо да за $i = 0$ разматрање кретања чвора путање губи смисао, јер тада је положај чвора неодређен, па наведени израз за $(n_{\Omega})_{\min}$ из (224) треба схватити као граничну вредност којој тежи n_{Ω} кад $i \to 0$.

Тако, за ниско летећи Земљин вештачки сателит ($p \approx a_e$) у екваторској, односно скоро екваторској равни добијамо

$$\left.\begin{aligned} (n_\omega)_{\min} &\approx \frac{1}{\alpha} \approx 300, \\ (n_{\Omega})_{\min} &\approx \frac{2}{\alpha} \approx 600, \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

тј. после скоро 300, одн. 600 обилазака оваквог сателита око Земље правац перигеја, односно узлазног чвора његове путање, због дејства секуларних поремећаја, поново ће бити онај отпре $300\,P$, одн. $600\,P$, где је P период једног обиласка сателитове путање.

21. ПОРЕМЕЋАЈИ ПЕРИОДА ОБИЛАЖЕЊА ЕЛИПТИЧНЕ ПУТАЊЕ

Напред смо размотрили секуларне поремећаје елиптичне путање Земљиног вештачког сателита и видели да они проузрокују промене положаја њене равни и перигеја. Међутим, постоје секуларни поремећаји положаја сателита на путањи или поремећаји времена долажења сателита у неку изабрану тачку његове путање. Специјално, интересује нас да одредимо поремећаје периода обилажења елиптичне путање сателита. Но, приметимо да је сам појам периода обилажења у датом случају донекле неодређен, па ћемо зато дефинисати више различитих периода.

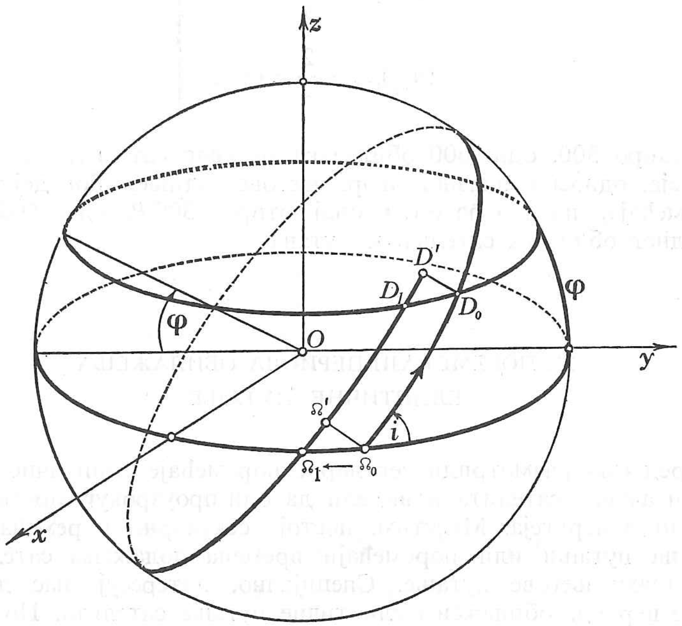
За непоремећену елиптичну путању, која је увек у једној равни, период обилажења путање, P, једнак је временском интервалу после којег се радијус-вектор OD, који спаја центар O Земље са центром D сателита, враћа у полазни положај. Међутим, због постојања секуларних поремећаја путањске равни вештачког сателита немогуће је да се његов геоцентрични радијус-вектор OD врати у неки изабрани почетни положај. Због тога се период обилажења обично одређује као време између два узастопна пресека центра D сателита са неком задатом површи, при чему, у зависности од избора ове површи, постоје различити периоди обилажења.

Обично се разликују следећи периоди обилажења вештачког сателита око Земље:

1) д р а к о н и т и ч к и (д р а к о н и ч к и) п е р и о д о б и л а ж е њ а, P_{Ω} — временски интервал између два узастопна пролаза сателита кроз екваторску раван при кретању с јужне у северну хемисферу. То је време које је протекло између пролаза сателита кроз узлазне чворове Ω_0 и Ω_1 два узастопна облетања путање (сл. 14);

2) п е р и о д о б и л а ж е њ а к о ј и о д г о в а р а н е к о ј г е о ц е н т р и ч н о ј ш и р и н и, P_φ — временски интервал између два узастопна пролаза сателита кроз тачке D_0 и D_1, које леже на конусној површи константне геоцентричне ширине φ, при кретању сателита с југа на север;

3) сидерички период обилажења, P_s — време лета од неке тачке D_0 путање до тачке D', која лежи у равни што пролази кроз радијус-вектор OD_0 а нормална је на раван оскулаторне путање у тачки D_0;



Сл. 14

4) аномалистички период обилажења, P_π — временски интервал између два узастопна пролаза сателита кроз перицентар (перигеј) путање;

5) оскулаторни период обилажења, P' — понекад се назива и непоремећеним периодом обилажења, јер је то време за које се једанпут обиђе оскулаторна путања, тј. то је период обиласка непоремећене путање, по којој би се кретао сателит почев од неког тренутка у којем би престала да постоје сва поремећајна дејства. Ако су познате координате вектора положаја и вектора брзине сателита у неком тренутку t_0, онда знамо и радијус-вектор и брзину сателита, r_0 и V_0, па из интеграла живе силе за елиптично кретање, који је познат из небеске механике, $V^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$ можемо да одредимо велику полуосу a оскулаторне елипсе. Затим, из трећег Кеплеровог закона $n^2 a^3=\mu$, где је за сателит $\mu=k^2 M$, M је маса Земље, налазимо средње сидеричко кретање сателита n, па помоћу њега најзад налазимо оскулаторни или непоремећени период обилажења $P'=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi\, a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$.

У већини случајева, који имају практичан значај, прва четири периода обилажења мало се разликују од оскулаторног или непоремећеног периода P', па је погодно изразити их обрасцима у облику

$$P=P'+\Delta P,$$

где је ΔP поремећај периода обилажења и обично мала величина у поређењу са P и P'.

Уопште, из дефиниције величина P_φ, P_s и P' следује да се оне разликују међусобно и да зависе од избора почетне тачке D_0, којој оне одговарају. Величине периода P_{Ω} и P_π су у вези са одређеним тачкама, које одговарају чвору и перигеју. Њихове вредности се одређују карактеристикама датог облетања путање, при чему за путање с нагибима $i\neq 0$ највећи практичан значај има драконитички период обилажења P_{Ω}. Овo стога што сваки пролаз сателита кроз екваторску раван може да буде тачно утврђен помоћу одговарајућих мерних инструмената. Међутим, одређивање тренутка пролаза сателита кроз перигеј путање је теже, нарочито за путање с малим ексцентричностима, јер за њих положај перигеја уопште постаје неодређен.

22. ДРАКОНИТИЧКИ ПЕРИОД ОБИЛАЖЕЊА

Извешћемо приближан израз за драконитички рериод P_{Ω} обилажења вештачког сателита око Земље. Приметимо да у тренутку пролаза сателита кроз узлазни чвор стварне путање одговарајућа оскулаторна путања такође пролази кроз чвор, па је зато

$$P_{\Omega}=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{du}\,du, \tag{226}$$

где t означава време, а u је угаоно растојање посматране тачке у којој је сателит од узлазног чвора одговарајуће оскулаторне путање. Из једначине (198) имамо да је

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu\, p}}{r^2}-\cos i\,\frac{d\Omega}{dt},$$

одакле добијамо

$$\frac{dt}{du}=\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\left(1-\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right)^{-1}. \tag{227}$$

С обзиром на изразе (172) за $\frac{d\Omega}{dt}$ које зависи од W, (156) за W које зависи од ε и (134) за ε које зависи од спољштености α Земљиног сфероида закључујемо да је други члан у загради на десној страни једначине (227) мала величина реда као α. Зато, после развијања у ред и занемаривања чланова реда α^2 и вишега, добијамо

$$\left(1-\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right)^{-1}\approx 1+\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt},$$

па је

$$\frac{dt}{du}\approx\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}+\frac{r^4}{\mu p}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}. \tag{228}$$

Узимајући (203) за r и после смене (228) у (226) налазимо приближан израз за P_Ω

$$P_\Omega=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{p^{3/2}}{[1+e\cos(u-\omega)]^2}du+ \\ +\frac{1}{\mu}\int_0^{2\pi}\frac{p^3}{[1+e\cos(u-\omega)]^4}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\,du. \tag{229}$$

Оскулаторне путањске елементе $p,\ e,\ \omega,\ i,$ који се налазе на десној страни једначине (229) и који одговарају аргументу латитуде u, одређујемо изразима

$$p=p_0+\Delta p,\quad e=e_0+\Delta e,\quad \omega=\omega_0+\Delta\omega,\quad i=i_0+\Delta i, \tag{230}$$

где $p_0,\ e_0,\ \omega_0,\ i_0$ означавају одговарајуће оскулаторне елементе у тренутку сателитова пролаза кроз узлазни чвор, када је $u=0$. Величине $\Delta p,\ \Delta e,\ \Delta\omega,\ \Delta i$ су мале поправке претходних елемената због дејства поремећаја, а одређујемо их изразима

$$\Delta p=\int_0^u\frac{dp}{du}du,\quad \Delta e=\int_0^u\frac{de}{du}du,\quad \Delta\omega=\int_0^u\frac{d\omega}{du}du,\quad \Delta i=\int_0^u\frac{di}{du}du. \tag{231}$$

Драконитички период изражен са (229), после смена (230), можемо да схватимо као функцију назначених путањских елемената, па да је развијемо у Тејлоров ред и при томе задржимо само мале величине првога реда. Тако добијамо

$$P_\Omega=P_\Omega(p,e,\omega,i)\approx(P_\Omega)_0+\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial p}\right)_0\Delta p+\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial e}\right)_0\Delta e+ \\ +\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial\omega}\right)_0\Delta\omega+\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial i}\right)_0\Delta i$$

или

$$P_\Omega\approx P'_\Omega-(\Delta P_1+\Delta P_2+\Delta P_3+\Delta P_4), \tag{232}$$

где су

$$\left.\begin{aligned}-\Delta P_1&=\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial p}\right)_0\Delta p, & -\Delta P_2&=\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial e}\right)_0\Delta e,\\ -\Delta P_3&=\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial\omega}\right)_0\Delta\omega, & -\Delta P_4&=\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial i}\right)_0\Delta i.\end{aligned}\right\} \tag{233}$$

Индекс „0" иза заграде означава да у нађеном изразу за путањске елементе треба узети вредности $p_0,\ e_0,\ \omega_0,\ i_0$. $(P_\Omega)_0=P'_\Omega$ представља оскулаторни период обилажења за оскулацију у чвору Ω_0 путање, а $\Delta P_1,\ \Delta P_2,\ \Delta P_3$ и ΔP_4 су његове поправке због дејства поремећаја на путањске елементе. P'_Ω добијамо, по аналогији са (226), помоћу (180) и (203), знајући да је за непоремећено кретање $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}$,

$$P'_\Omega=\int_0^{2\pi}\frac{\partial t}{\partial u}du=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}du=\frac{p_0^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{[1+e_0\cos(u-\omega_0)]^2}. \tag{234}$$

Видимо да се овај израз може добити из првог члана на десној страни (229), кад у њему путањске елементе узмемо за тренутак пролаза кроз почетни узлазни чвор путање. Прве три поправке (233) налазимо парцијалним диференцирањем само првог члана на десној страни једначине (229), јер из другог члана добили бисмо парцијалне изводе који за фактор имају малу величину $\dfrac{d\Omega}{dt}$, а ово треба још множити са малим величинама Δp, одн. Δe или $\Delta\omega$, што даје мале величине другога реда, које занемарујемо као што смо рекли. Тако налазимо

$$\left.\begin{aligned}\Delta P_1&=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta p}{[1+e_0\cos(u-\omega_0)]^2}du,\\ \Delta P_2&=\frac{2\,p_0^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(u-\omega_0)}{[1+e_0\cos(u-\omega_0)]^3}\Delta e\,du,\\ \Delta P_3&=\frac{2\,p_0^{3/2}e_0}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(u-\omega_0)}{[1+e_0\cos(u-\omega_0)]^3}\Delta\omega\,du,\end{aligned}\right\} \tag{235}$$

где нам прва поправка долази због поремећаја параметра, друга због поремећаја ексцентричности, а трећа поправка оскулаторног периода, за налажење драконитичког периода, долази од поремећајног дејства на аргумент латитуде перигеја Земљиног вештачког сателита. Четврту поправку наћи ћемо на други начин, а не по обрасцу из (233), који би нас довео до израза са производом $\dfrac{d\Omega}{dt}\Delta i$ што бисмо по договору, као малу величину другога реда, занемарили. Како последњи члан из (232) постоји као последица промене нагиба i, кад узмемо да је

$$\cos i=\cos(i_0+\Delta i)=\cos i_0\cos\Delta i-\sin i_0\sin\Delta i\approx\cos i_0-\Delta i\sin i_0,$$

па ово заменимо у други члан једначине (229), јер само у њему фигурише нагиб i, после занемаривања члана са $\Delta i \cdot \frac{d\Omega}{dt}$, налазимо тражену последњу поправку периода обилажења

$$\Delta P_4 = -\frac{p_0^3}{\mu}\cos i_0 \int_0^{2\pi} \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{[1+e_0\cos(u-\omega_0)]^4}\,du. \tag{236}$$

Поправке (235) и (236) су мале кад ексцентричности нису велике ($e \ll 1$). Стога што их одређујемо уз коришћење израза (231) и којима фигуришу изводи $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, то код израчунавања истих можемо да занемаримо мале величине виших редова, почев од другог реда. Тако, помоћу (202), (198), (156) и (203), имајући у виду занемаривање малих величина другог и виших редова, добијамо следеће приближне изразе за потребне изводе у првој апроксимацији, када за путањске елементе узимамо почетне вредности а промењиве су само аргумент латитуде u и права аномалија v,

$$\frac{dp}{du} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{du}{dt}} = 2\,r\,T\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}} =$$

$$= -\frac{2\varepsilon}{\mu r}\sin^2 i \sin 2u \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}} \approx$$

$$\approx -\frac{2}{p}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\sin^2 i \sin 2u\,(1+e\cos v)\left(1 + \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right) \approx$$

$$\approx -\frac{2}{p_0}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\sin^2 i_0\,(1+e_0\cos v)\sin 2u,$$

јер је $(1-\varepsilon_1)^{-1} \approx 1+\varepsilon_1$, када је ε_1 мала величина $\left(\text{овде је } \varepsilon_1 = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right)$;

$$\frac{de}{du} = \frac{de}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{du}{dt}} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{S\sin v + T\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v + e\,\frac{r}{p}\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left\{\sin v\,(3\sin^2 i \sin^2 u - 1) - \right.$$

$$\left. - \sin^2 i \sin 2u\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v + e\,\frac{r}{p}\right]\right\}\cdot\frac{1}{1-\cos i\,\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{d\Omega}{dt}} \approx$$

$$\approx \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{1}{r^2}\left\{\sin v\,(3\sin^2 i\sin^2 u - 1) - \sin^2 i \sin 2u\left(\frac{2+e\cos v}{1+e\cos v}\cdot\cos v + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{e}{1+e\cos v}\right)\right\}\cdot\left(1+\cos i\,\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{d\Omega}{dt}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{p_0^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\{\sin v\,(1+e_0\cos v)^2(3\sin^2 i_0 \sin^2 u - 1) -$$

$$- \sin^2 i_0 \sin 2u\,(1+e_0\cos v)\,[2\cos v + e_0(\cos^2 v + 1)]\};$$

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{du}{dt}} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\,\frac{\cos v}{e} + T\,\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v - W\,\frac{r}{p}\operatorname{ctg} i \sin u\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left[-\frac{\cos v}{e}(3\sin^2 i\sin^2 u - 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{2+e\cos v}{1+e\cos v}\cdot\frac{1}{e}\sin^2 i \sin v \sin 2u + \frac{\sin 2i \operatorname{ctg} i \sin^2 u}{1+e\cos v}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1-\cos i\,\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{d\Omega}{dt}} \approx \frac{1}{p^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left[-\frac{\cos v}{e}(1+e\cos v)^2(3\sin^2 i \sin^2 u - 1) - \right.$$

$$- \frac{2+e\cos v}{e}(1+e\cos v)\sin^2 i \sin 2u \sin v +$$

$$\left. + 2\,(1+e\cos v)\cos^2 i \sin^2 u\right]\cdot\left(1+\cos i\,\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{d\Omega}{dt}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{p_0^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left[-\frac{\cos v}{e_0}(1+e_0\cos v)^2(3\sin^2 i_0\sin^2 u - 1) - \right.$$

$$- \frac{2+e_0\cos v}{e_0}(1+e_0\cos v)\sin^2 i_0 \sin 2u \sin v +$$

$$\left. + 2\,(1+e_0\cos v)\cos^2 i_0 \sin^2 u\right].$$

Тако смо из последња три извођења добили систем једначина

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= -\frac{2}{p_0}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\sin^2 i_0\,(1+e_0\cos v)\sin 2u, \\ \frac{de}{du} &= \frac{1}{p_0^2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\{\sin v\,(1+e_0\cos v)^2(3\sin^2 i_0\sin^2 u - 1) - \end{aligned}\right| \tag{237}$$

$$
- [2\cos v + e_0 (\cos^2 v + 1)] (1 + e_0 \cos v) \sin^2 i_0 \sin 2u\},
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\omega}{du} = \frac{1}{p_0^2} \frac{\varepsilon}{\mu} \Big[& - \frac{\cos v}{e_0} (1 + e_0 \cos v)^2 (3 \sin^2 i_0 \sin^2 u - 1) - \\
& - \frac{2 + e_0 \cos v}{e_0} (1 + e_0 \cos v) \sin^2 i_0 \sin v \sin 2u + \\
& + 2 (1 + e_0 \cos v) \cos^2 i_0 \sin^2 u \Big],
\end{aligned}\right\} \qquad (237)
$$

при чему је

$$
v = u - \omega_0, \qquad (238)
$$

одакле је, у разматраном случају, тј. у првој апроксимацији $dv = du$. Изрази (237) су добијени на сличан начин као они (210), само тамо смо извршили интеграљење.

Одређивање поправки (235) периода обилажења помоћу (231), тј. (237) своди се на израчунавање интеграла у облику

$$
I = \int_0^{2\pi} f(u)\, du \int_0^u \frac{dq}{du}\, du, \qquad (239)
$$

где је $f(u)$ извесна функција аргумента латитуде u, а q може да буде елемент p, e или ω. Ако уведемо смене

$$
U = \int_0^u \frac{dq}{du}\, du = \Delta q = q - q_0, \qquad dV = f(u)\, du,
$$

при чему је елемент $q_0 = \text{const}$, онда је

$$
dU = dq = \frac{dq}{du}\, du, \qquad V = \int f(u)\, du = F(u),
$$

па (239) можемо да интегралимо парцијално. Тако налазимо

$$
I = \int_0^{2\pi} U\, dV = U V \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} V\, dU = \delta q \cdot F(2\pi) - \int_0^{2\pi} F(u) \frac{dq}{du}\, du, \qquad (240)
$$

јер по природи проблема имамо да је, с обзиром на уведене ознаке, $U(0) = \Delta q(0) = q_0 - q_0 = 0$, $V(2\pi) = F(2\pi)$; док

$$
U(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{dq}{du}\, du = \Delta q(2\pi) = \delta q
$$

представља секуларни поремећај одговарајућег путањског елемента q за један обилазак вештачког сателита око Земље, а који има одговарајући израз из система (217).

Да бисмо упростили даљи рачун, ограничићемо се на разматрање путања са малим ексцентричностима, тј. узимаћемо у рачун само чланове са e на првом степену. Због једноставнијег писања даље ћемо изоставити индекс „$_0$" као ознаку код елемената оскулаторне путање у почетном тренутку t_0. Онда изрази који фигуришу у подинтегралним функцијама (235), с обзиром на (238), постају

$$
\frac{1}{(1 + e\cos v)^2} \approx 1 - 2e\cos v,
$$

$$
\frac{\cos v}{(1 + e\cos v)^3} \approx \cos v\,(1 - 3e\cos v) = \cos v - 3e\cos^2 v,
$$

$$
\frac{\sin v}{(1 + e\cos v)^3} \approx \sin v\,(1 - 3e\cos v) = \sin v - \frac{3}{2} e \sin 2v,
$$

јер уопште је $(1 + x)^{-n} \approx 1 - nx$, када је x мала величина. Помоћу претходних израза поправке (235) постају

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta P_1 &= -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \int_0^{2\pi} (1 - 2e\cos v)\, \Delta p\, du, \\
\Delta P_2 &= \frac{2p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^{2\pi} (\cos v - 3e\cos^2 v)\, \Delta e\, du, \\
\Delta P_3 &= \frac{2p^{3/2} e}{\sqrt{\mu}} \int_0^{2\pi} \left(\sin v - \frac{3}{2} e \sin 2v\right) \Delta\omega\, du.
\end{aligned}\right\} \qquad (241)
$$

Како је овде, због (238), $du = dv$, онда можемо да израчунамо следеће потребне интеграле (без интеграционе константе)

$$
\left.\begin{aligned}
F_p(u) &= \int (1 - 2e\cos v)\, du = u - 2e\sin v, \\
F_e(u) &= \int (\cos v - 3e\cos^2 v)\, du = \sin v - \frac{3}{2} e \left(u + \frac{1}{2} \sin 2v\right), \\
F_\omega(u) &= \int \left(\sin v - \frac{3}{2} e \sin 2v\right) du = -\cos v + \frac{3}{4} e \cos 2v; \\
v &= u - \omega.
\end{aligned}\right\} \qquad (242)
$$

Интеграле (241) можемо да израчунамо применом трансформације (240) уз коришћење израза (217), (231), (237), (238) и (242), при чему одбацујемо све чланове са квадратима ексцентричности путање. Тако добијамо

$$
\Delta P_1 = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[F_p(2\pi) \cdot \delta p - \int_0^{2\pi} F_p(u) \frac{dp}{du}\, du \right] = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \int_0^{2\pi} F_p(u) \frac{dp}{du}\, du =
$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\sin^2 i\int_0^{2\pi}(u-2\,e\sin v)\,(1+e\cos v)\sin 2\,u\,du=$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\sin^2 i\int_0^{2\pi}[u\sin 2\,u+e\,(u\cos v\sin 2\,u-2\sin v\sin 2\,u)]\,du;$$

$$\Delta P_2=2\frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left[F_e(2\,\pi)\cdot\delta e-\int_0^{2\pi}F_e(u)\,\frac{de}{du}\,du\right]=-2\,\frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}F_e(u)\,\frac{de}{du}\,du=$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\left[\sin v-\frac{3}{2}\,e\left(u+\frac{1}{2}\sin 2\,v\right)\right]\{\sin v\,(1+e\cos v)^2\cdot$$

$$\cdot\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-[2\cos v+e\,(\cos^2 v+1)]\,(1+e\cos v)\sin^2 i\sin 2\,u\}\,du=$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\left[\sin v-\frac{3}{2}\,e\left(u+\frac{1}{2}\sin 2\,v\right)\right]\{\sin v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-$$

$$-2\sin^2 i\cos v\sin 2\,u+e\,[\sin 2\,v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-$$

$$-(3\cos^2 v+1)\sin^2 i\sin 2\,u]\}\,du=-\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\Big\{\sin^2 v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-$$

$$-\sin^2 i\sin 2\,v\sin 2\,u+e\Big[\sin v\sin 2\,v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-$$

$$-\sin v\,(3\cos^2 v+1)\sin^2 i\sin 2\,u-\frac{3}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2\,v\right)(3\sin^2 i\sin v\sin^2 u-$$

$$-\sin v-2\sin^2 i\cos v\sin 2\,u)\Big]\Big\}\,du;$$

$$F_\omega(2\,\pi)=-\cos(2\,\pi-\omega)+\frac{3}{4}\,e\cos 2\,(2\,\pi-\omega)=-\cos\omega+\frac{3}{4}\,e\cos 2\,\omega;$$

$$\Delta P_3=\frac{2\,p^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\,e\left[F_\omega(2\,\pi)\cdot\delta\omega-\int_0^{2\pi}F_\omega(u)\,\frac{d\omega}{du}\,du\right]=\frac{2\,p^{3/2}\,e}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{3}{4}\,e\cos 2\,\omega-\cos\omega\right)\delta\omega+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\left(\cos v-\frac{3}{4}\,e\cos 2\,v\right)\{-\cos v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-2\,e\cos^2 v\,\cdot$$

$$\cdot\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-(2+e\cos v)\,(1+e\cos v)\sin^2 i\sin v\sin 2\,u+$$

$$+2\,e\cos^2 i\sin^2 u\}\,du=-\frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,e\,(5\cos^2 i-1)\cos\omega+\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\Big(\cos v-$$

$$-\frac{3}{4}\,e\cos 2\,v\Big)\{-\cos v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-2\sin^2 i\sin v\sin 2\,u+$$

$$+e\,[-2\cos^2 v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)-3\sin^2 i\sin v\cos v\sin 2\,u+$$

$$+2\cos^2 i\sin^2 u]\}\,du=-\frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,e\,(5\cos^2 i-1)\cos\omega-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\Big\{\cos^2 v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)+\sin^2 i\sin 2\,v\sin 2\,u+$$

$$+e\Big[2\cos^3 v\,(3\sin^2 i\sin^2 u-1)+3\sin^2 i\sin v\cos^2 v\sin 2\,u-$$

$$-2\cos^2 i\cos v\sin^2 u-\frac{3}{4}\cos 2\,v\,(3\sin^2 i\cos v\sin^2 u-\cos v+$$

$$+2\sin^2 i\sin v\sin 2\,u\Big]\Big\}\,du.$$

Кад одбацимо чланове који се анулирају према изразима (213) и (216), а $\cos 2\,v$ заменимо по обрасцу $\cos 2\,v=1-2\sin^2 v$, онда претходни изрази постају

$$\left.\begin{aligned}
\Delta P_1&=-\frac{3}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\sin^2 i\left(\int_0^{2\pi}u\sin 2\,u\,du+e\int_0^{2\pi}u\,\cos v\sin 2\,u\,du\right),\\
\Delta P_2&=-\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left[\sin^2 i\left(3\int_0^{2\pi}\sin^2 v\sin^2 u\,du-\int_0^{2\pi}\sin 2v\sin 2u\,du\right)-\right.\\
&\quad-\int_0^{2\pi}\sin^2 v\,du-e\sin^2 i\left(\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}u\sin v\sin^2 u\,du-3\int_0^{2\pi}u\cos v\sin 2u\,du\right)+\\
&\quad\left.+\frac{3}{2}\,e\int_0^{2\pi}u\sin v\,du\right],\\
\Delta P_3&=-\frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,(4-5\sin^2 i)\,e\cos\omega-\\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left[\sin^2 i\left(3\int_0^{2\pi}\cos^2 v\sin^2 u\,du+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_0^{2\pi}\sin 2\,v\sin 2\,u\,du\right)-\int_0^{2\pi}\cos^2 v\,du\right].
\end{aligned}\right\}\quad(243)$$

Из интегралног рачуна, парцијалним интеграљењем, имамо

$$\int u \sin ku\, du = \frac{\sin ku}{k^2} - u\,\frac{\cos ku}{k},$$

$$\int u \cos ku\, du = \frac{\cos ku}{k^2} + u\,\frac{\sin ku}{k}$$

без интеграционе константе, одакле добијамо

$$\int_0^{2\pi} u \sin ku\, du = -\frac{2\pi}{k}, \qquad \int_0^{2\pi} u \cos ku\, du = 0. \tag{244}$$

За изразе (243) потребни су следећи интеграли, које израчунавамо коришћењем (238) и (244),

$$\int_0^{2\pi} u \sin 2u\, du = -\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} u \cos v \sin 2u\; du = \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} u \sin(3u-\omega)\, du + \int_0^{2\pi} u \sin(u+\omega)\, du\right] =$$

$$= \frac{\cos\omega}{2}\left[\int_0^{2\pi} u \sin 3u\, du + \int_0^{2\pi} u \sin u\, du\right] = -\frac{4}{3}\pi\cos\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 v \sin^2 u\, du = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2v)(1-\cos 2u)\, du = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2v \cos 2u\, du =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} [\cos(4u-2\omega) + \cos 2\omega]\, du = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\cos 2\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2v \sin 2u\, du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos 2\omega - \cos(4u-2\omega)]\, du = \pi\cos 2\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 v\, du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2v)\, du = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} u \sin v \sin^2 u\, du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u \sin v\,(1-\cos 2u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u \sin(u-\omega)\, du -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u \sin(u-\omega)\cos 2u\, du = -\pi\cos\omega - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u\,[\sin(3u-\omega) -$$

$$-\sin(u+\omega)]\, du = -\pi\cos\omega - \frac{1}{3}\pi\cos\omega = -\frac{4}{3}\pi\cos\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} u \sin v\, du = -2\pi\cos\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 v \sin^2 u\, du = \int_0^{2\pi} \sin^2 u\, du - \int_0^{2\pi} \sin^2 v \sin^2 u\, du = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\cos 2\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 v\, du = \pi.$$

После смене ових интеграла у (243) добијамо прве три поправке периода обилажења

$$\left.\begin{aligned}
\Delta P_1 &= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\sin^2 i\left(\frac{3}{2} + 2e\cos\omega\right),\\
\Delta P_2 &= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\Big(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i + \frac{1}{4}\sin^2 i\cos 2\omega +\\
&\qquad + 3e\cos\omega - 2e\sin^2 i\cos\omega\Big),\\
\Delta P_3 &= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\Big(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i - \frac{1}{4}\sin^2 i\cos 2\omega -\\
&\qquad - 4e\cos\omega + 5e\sin^2 i\cos\omega\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Поправку ΔP_4 израчунавамо из (236) коришћењем израза (202), (156), (203) и (216), занемарујући чланове реда e^2. Тако налазимо

$$\Delta P_4 = \frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\cos^2 i\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{1+e\cos v}\, du \approx \frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\cos^2 i\int_0^{2\pi} (1-e\cos v)\sin^2 u\, du = \tag{246}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\cos^2 i\int_0^{2\pi} \sin^2 u\, du = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\cos^2 i = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}}\,\frac{\varepsilon}{\mu}(1-\sin^2 i).$$

Коначно, P_{Ω} добијамо из (232), после замене поправки из (245) и (246) и узимања, с тачношћу закључно са члановима реда e, да је

$$p = a(1-e^2) \approx a.$$

Онда, с обзиром да је одраније познат израз

$$P'_{\Omega} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}},$$

налазимо

$$\begin{aligned} P_{\Omega} &= P'_{\Omega} - \frac{2\pi}{\sqrt{\mu a}} \frac{\varepsilon}{\mu}\left[3 - \frac{5}{2}\sin^2 i - e\cos\omega\,(1-5\sin^2 i)\right] = \\ &= P'_{\Omega}\left\{1 - \frac{1}{a^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\left[3 - \frac{5}{2}\sin^2 i - e\cos\omega\,(1-5\sin^2 i)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{247}$$

Нека ΔP_{Ω} означава разлику између драконитичког и оскулаторног (непоремећеног) периода обилажења у узлазном чвору путање Земљиног вештачког сателита

$$\Delta P_{\Omega} = P_{\Omega} - P'_{\Omega} \tag{248}$$

и нека P_z означава период обилажења фиктивног вештачког сателита, који би се кретао око геоцентра по кружној путањи са полупречником једнаким великој полуоси a_e општег Земљиног елипсоида,

$$P_z = \frac{2\pi a_e}{V_e} = \frac{2\pi a_e}{\sqrt{\frac{\mu}{a_e}}} = 2\pi\frac{a_e^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \approx 84^{\mathrm{m}},5, \tag{249}$$

где је V_e брзина овог фиктивног сателита. Онда, с обзиром на (134), имамо

$$\left.\begin{aligned} \Delta P_{\Omega} &\approx -\frac{\pi a_e^2}{\sqrt{\mu a}}\alpha\left[3 - \frac{5}{2}\sin^2 i - e\cos\omega(1-5\sin^2 i)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}P_z\sqrt{\frac{a_e}{a}}\,\alpha\left[3 - \frac{5}{2}\sin^2 i - e\cos\omega(1-5\sin^2 i)\right], \\ \frac{\Delta P_{\Omega}}{P'_{\Omega}} &\approx -\frac{1}{2}\left(\frac{a_e}{a}\right)^2\alpha\left[3 - \frac{5}{2}\sin^2 i - e\cos\omega\,(1-5\sin^2 i)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{250}$$

Тако, ниско летећи вештачки сателити који би се кретали по кружним путањама око Земље ($e=0$, $a \approx a_e$) имали би максималне вредности разматране поправке периода обилажења и њеног односа према оскулаторном периоду обилажења Земље за нагиб путање $i=0$,

$$|\Delta P_{\Omega}|_{\max} \approx 0^{\mathrm{m}},42 = 25^{\mathrm{s}},2 \qquad \left|\frac{\Delta P_{\Omega}}{P'_{\Omega}}\right|_{\max} \approx \frac{0,42}{84,5} \approx 0,005.$$

Изрази (250) показују да са повећањем димензија путање ова поправка постаје мања, јер је обрнуто пропорционална другом корену из велике полуосе разматране елиптичне путање, док се однос те поправке и периода обилажења смањује са порастом квадрата велике полуосе путање сателита. Даље, поправка ΔP_{Ω} има члан који зависи од аргумента латитуде перигеја ω и тај се члан повећава с повећањем ексцентричности e путање. Међутим, приметимо да секуларни поремећаји $\delta\omega$ и $\delta\Omega$ не зависе од ω, што се види из (217).

23. СИДЕРИЧКИ ПЕРИОД ОБИЛАЖЕЊА У УЗЛАЗНОМ ЧВОРУ ПУТАЊЕ

Сидерички период P_s је најпрецизнија карактеристика времена које је потребно сателиту за пун обилазак око Земље у односу на раније набројане периоде обилажења. А мали поремећај периода P_s проистиче због ремећења сателита у правцу његова лета. За екваторске сателитске путање ($i=0$) сидерички период P_s се подудара с периодом обилажења раванске путање.

Да би се избегла неодређеност због избора почетне тачке рачунања сидеричког периода обилажења, узећемо да је та тачка узлазни чвор путање, па ћемо одредити сидерички период обилажења у узлазном чвору путање. Са слике 14 се види да је тада, с тачношћу до малих величина другога реда,

$$P_s = P_{\Omega} + \widehat{\Omega_1\Omega_0}\cos i\left(\frac{dt}{du}\right)_{\Omega} = P_{\Omega} - \delta\Omega\left(\frac{dt}{du}\right)_{\Omega}\cos i, \tag{251}$$

где поремећај положаја узлазног чвора за један обилазак сателита око Земље, када u нарасте од 0 до $2\pi = 360°$, према (217), представља угао $\delta\Omega = -\widehat{\Omega_1\Omega_0} = -\frac{2\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i$, рачунат у ретроградном смеру за $i < 90°$; $\left(\frac{dt}{du}\right)_{\Omega}$ представља одговарајући извод у узлазном чвору путање, када је $u=0$, тј. $v = 2\pi - \omega$. Приметимо да други члан на десној страни једначине (251) треба да има димензију времена, што је и постигнуто његовим датим изразом.

Тражени сидерички период одређујемо из (251), кад извршимо смене помоћу (217), (228), (203) и одбацимо чланове са малим величинама вишега реда. Тако налазимо

$$P_s = P_{\Omega} + \frac{2\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i \cdot \left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} + \frac{r^4}{\mu p}\cos i\frac{d\Omega}{dt}\right)_{\Omega} \cdot \cos i \approx$$

$$\approx P_{\Omega} + \frac{2\pi}{p^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos^2 i\frac{r_{\Omega}^2}{\sqrt{\mu p}} = P_{\Omega} + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\cos^2 i}{(1+e\cos\omega)^2} \approx$$

$$\approx P_{\Omega} + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}} \frac{\varepsilon}{\mu} (1 - \sin^2 i)(1 - 2e\cos\omega) =$$

$$= P_{\Omega} + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu p}} \frac{\varepsilon}{\mu} [1 - \sin^2 i - 2e\cos\omega\,(1 - \sin^2 i)],$$

где је r_{Ω} геоцентрично растојање узлазног чвора путање вештачког сателита и где смо одбацили чланове реда e^2. Кад у претходном изразу заменимо драконитички период P_{Ω} из (247), узимајући опет да је $p \approx a$, коначно добијамо израз за сидерички период обилажења вештачког сателита око Земље

$$\begin{aligned} P_s &= P'_{\Omega} - \frac{2\pi}{\sqrt{\mu a}} \frac{\varepsilon}{\mu} \left[2 - \frac{3}{2}\sin^2 i + e\cos\omega\,(1 + 3\sin^2 i) \right] = \\ &= P'_{\Omega} \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\varepsilon}{\mu} \left[2 - \frac{3}{2}\sin^2 i + e\cos\omega\,(1 + 3\sin^2 i) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{252}$$

где је P'_{Ω} оскулаторни период обилажења, чији нам је израз познат одраније.

ЛИТЕРАТУРА

Татомир Анђелић, Растко Стојановић — Рационална механика, Београд. 1966.

М. Миланковић — Основи небеске механике, Београд, 1955.

М. Ф. Субботин — Введение в теоретическую астрономию, Москва, 1968.

Г. Н. Дубошин — Небесная механика. Основные задачи и методы, Москва, 1968.

П. Е. Эльясберг — Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, Москва, 1965.

В. Г. Демин — Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, Москва, 1968.

В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов — Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, Москва, 1971.

Група аутора под редакцијом Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова — Основы теории полета космических аппаратов, Москва, 1972.

Група аутора под редакцијом М. К. Тихонравова — Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли, Москва, 1974.

D. Brouwer, G. Clemence — Methods of celestial mechanics, New York, 1961.

Ph. M. Fitzpatrick — Principles of celestial mechanics, New York, 1970.

S. Herrick — Astrodynamics, Vol. I, II, London, 1971, 1972.

P. Musen — On the motion of satellite in an asymmetrical gravitational field, J. Geophys. Res., 1960, 65, 2703—2792.

J. Kovalevsky — Introduction à la mécanique céleste, Paris, 1963.

B. Morando — Mouvement d'un satellite artificiel de la terre, Paris, 1974.

K. Stumpff — Himmelsmechanik, Band II, Berlin, 1965.