UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Marina Valjarević

TESELACIJE PRAVILNIM MNOGOUGLOVIMA U POENKAREOVOM DISK MODELU HIPERBOLIČKE RAVNI

master rad

Beograd, 2021.

Mentor:

dr Mirjana Đorić, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miroslava Antić, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Tijana Šukilović, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: 20.04.2021.

Ćerki Petri

Sadržaj

1 Uvod u hiperboličku geometriju **3**

2 Inverzija u odnosu na krug **5**

2.1 Definicija inverzije 5

2.2 Konstrukcije tačke, prave i krugova u inverziji 9

3 Poenkareov disk model **14**

3.1 Osnovni pojmovi 14

3.2 Izometrijske transformacije hiperboličke ravni 17

4 Teselacije **27**

4.1 Malo istorije 27

4.2 Pojam teselacije ravni 29

4.3 Teselacije euklidske ravni 30

4.4 Teselacije hiperboličke ravni 32

5 Alat GCLC **51**

Bibliografija **55**

Predgovor

„Nadahnuće je potrebno u poeziji kao i u geometriji”-A.S.Puškin

Geometrija kao disciplina ima svoju dugu i bogatu istoriju. Začeta još u najstarijim ljudskim civilizacijama, radi potrebe premeravanja tla, vekovima se razvijala kao induktivna nauka, da bi danas zauzela vodeće mesto među naukama, u okviru matematike. Takođe, kao zanimljiv pojam u geometriji pojavljuju se teselacije, koje su čovečanstvu poznate iz daleke prošlosti, gde se neki oblici teselacija pojavljuju još 4000. godina p.n.e. Još od davnina, kineske i egipatske kulture koristile su teselaciju, čime su postizale neobičan i jedinstven izgled građevina. Danas teselacije možemo spoznati od pločica na podu, preko zidova od cigli, pa čak i do same celokupne konstukcije građevine koja je napravljena ređanjem nekih pravilnih poliedara. Primer takve građevine je Skver federacije u Melburnu, konstruisan ređanjem pravilnih trouglova, veoma je kompleksne strukture i sačinjen od različitih materijala.
Teselacije se mogu pronaći svuda oko nas, struktura košnice, oklop kornjače različite šare na koži zmije i guštera, u građevinarstvu, u umetnosti počev od antičke arhiteture do modernog stvaralaštva, u kompjuterskoj grafici, optici, društvenim igrama i igrama na računarima. Kao takve, od uvek zanimljive i veoma korišćene, a čini mi se ne tako poznate u krugovima ljudi koji se ne bave matematikom, zainteresovale su i mene i inspirisale da odaberem ovu temu za pisanje. Tako da sam se teselacijama bavila u svom završnom radu na master studijama na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. U samoj izradi rada od neprocenjive pomoći bila je moj mentor, prof dr Mirjana Đorić, čije sugestije i kritike su bile veoma motivišuće i pre svega veoma korisne.
Rad je podeljen na 5 poglavlja.
U prvom poglavlju sam se kratko osvrnula na istoriju hiperboličke geometrije, njen nastanak i razvoj.

U drugom poglavlju pišem o inverziji u odnosu na krug, važnom preslikavanju u slučaju kako hiperboličke, tako i euklidske geometrije. Takođe inverzija u odnosu na krug ima važnu ulogu pri konstrukciji teselacija, koje su i centralna tema rada. Poglavlje sadrži kratko prezentovanje ovog preslikavanja, njegove osobine i neka važna svojsta. Takođe poglavlje prate ilustracije, kako bi čitalac lakše shvatio samo preslikavanje.
Treće poglavlje je posvećeno Poenkareu i njegovom disk modelu, kao jednom od najpoznatijih modela hiperboličke ravni. Date su osnovne definicije, važne teoreme i tvrđenja koja važe u hiperboličkoj geometriji, a predstavljena su u ovom modelu. Zatim, predstavljenje su i klasifikovane izometrijske transformacije hiperboličke ravni. Takođe, poglavlje prate potrebne ilustracije.
Četvrto poglavlje se bavi teselacijama. Počinje kratkom istorijom teselacija, sledi objašnjenje samog pojma, klasifikacija teselacija, zatim, kratak osvrt na teselacije euklidske ravni. Objašnjeni su pojmovi dualnih i idealnih teselacija. Važno mesto u ovom poglavlju zauzima i Ešer sa teselacijama u svojim radovima koji su, svakako, čudan spoj umetnosti i matematike, i kao takvi služe kao dokaz da je matematika svuda oko nas.
Poslednje, peto poglavlje, posvećeno je programskom alatu GCLC, koji je korišćen za potrebne ilustacije kroz ceo rad.

Glava 1

Uvod u hiperboličku geometriju

Istorija geometrije seže do antičkog doba, ali je njena kolevka nesumnjivo Istok. Razvoj geometrije se može podeliti na četiri perioda, čije je granice nemoguće odrediti datumima. Geometrija se kao nauka prvi put pojavila u drevnom Egiptu, Vaviloniji i Grčkoj, oko V veka p.n.e., u vezi sa razvojem kulture premeravanja tla. Dok euklidska geometrija spada u najstarije poznate oblasti matematike, neeuklidska geometrija nije bila prihvaćena i priznata sve do XIX veka. Termin neeuklidska geometrija opisuje hiperboličku i eliptičku geometriju koje nisu negacija euklidske geometrije. Suštinska razlika među njima je priroda paralelnih pravih.

Hiperbolička geometrija je grana matematike koja se intenzivno razvija poslednjih dvesta godina. Sami počeci ove oblasti su, međutim, daleko stariji. Može se reći da se hiperbolička geometrija „rodila” onog momenta kad su matematičari došli na ideju da dokažu peti Euklidov postulat. Danas su, gledano sa matematičke tačke gledišta, euklidska i hiperbolička geometrija ravnopravne. Bitno je napomenuti da su sve definicije, teoreme koje su važile u apsolutnoj geometriji tj. apsolutnom prostoru, našle svoje mesto i u hiperboličkoj geometriji, odnosno hiperboličkom prostoru. Međutim, euklidska geometrija je vekovima bila u „prednosti”. Njena „prednost” bila je ta što ljudi prostor intuitivno shvataju kao euklidski. Otkriće hiperboličke geometrije svrstalo je 19. vek u vek neslućenih dostignuća u oblasti geometrije. Naime, Nikolaj Lobačevski[1] i Janoš Boljaj[2] nezavisno jedan od drugog dolaze na ideju da peti Euklidov postulat zamene aksiomom koja bi ga negirala. Ne koristeći Euklidov peti postulat niti bilo koje njemu ekvivalentno tvrđenje, uspešno je izgrađena jedna sasvim nova teorija u kojoj nema nikakvih protivureč-

[1]Nikolaj Ivanovič Lobačevski, (1793 - 1856) ruski matematičar
[2]Bolyai Jănos, (1802 - 1860) mađarski matematičar)

nosti i koja je isto toliko valjana kao i euklidska geometrija. Možda se, nepravedno, smatra da je za to otkriće više zaslužan Lobačevski, te se Boljaj i njegov rad često zanemaruju u literaturi. Da li je došlo do nepravde ili ne, nije poznato, ali svakako da, kada se pomene hiperbolička geomatrija, prvo na koga pomislimo, je zapravo Lobačevski.

Aksiom Lobačevskog:
Postoje prava a i tačka A van prave a takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži tačku A, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka.

Geometrijski sistem zasnovan na prve četiri grupe Hilbertovog sistema aksioma, aksiomama veze, rasporeda, podudarnosti, neprekidnosti i aksiomi Lobačevskog, naziva se **geometrija Lobačevskog** ili **hiperbolička geometrija**. Ta geometrija se ponekad naziva i **geometrija Boljaj-Lobačevskog** ili **geometrija Gaus-Boljaj-Lobačevskog**. Prostor čije tačke, prave i ravni stoje u međusobnim odnosima, tako da su zadovoljeni zahtevi aksioma prve četiri grupe Hilbertovog sistema aksioma i aksioma Lobačevskog, zove se **hiperbolički prostor**. Kao i u svakom trileru i u ovoj priči ima zaturenih pisama, pitanja "ko je za šta znao u vreme kad je ovaj drugi već...", itd.
Iz geometrijskog sveta u kome se u potpunosti moglo osloniti na intuiciju, zasnovanu na predstavama koje stvaraju čula, zakoračilo se u svet koji postoji izvan dotadašnjeg matematičkog iskustva. Nije zato iznenađujuće što zamisli Lobačevskog i Boljaja nisu za njihova života doživele priznanje koje im pripada. Razvoj neeuklidskih geometrija pokazao se veoma značajnim za fiziku XX veka. Zadajući ograničenja brzini svetlosti, sabiranje brzina zahtevalo je nužno korišćenje hiperboličke geometrije. Otkriće neeuklidske geometrije spada u red najvećih otkrića u matematici. Ovim otkrićem, kao i svojim celokupnim stavom matematičara i filozofa matematike, Lobačevski je otvorio nove puteve u razvitku matematike koji su usledili aksiomatskim zasnivanjima svih grana matematike i uvrstio se u red genijalnih stvaralaca.
Danas postoji nekoliko modela koji se koriste za vizualizaciju hiperboličke geometrije: Klajnov model, Poenkareov disk model, Poenkareov poluravanski model i Lorencov model. Kasnije će biti više reči o Poenkareovom disk modelu hiperboličke geometrije, jer je to i moj izbor modela za prezentovanje teselacija hiperboličke ravni.

Glava 2

Inverzija u odnosu na krug

2.1 Definicija inverzije

Neka je O fiksirana tačka u euklidskoj ravni E^2 i neka je r fiksiran, pozitivan, realan broj. Neka je $k = k(O, r)$ krug sa centrom u tački O poluprečnika r.

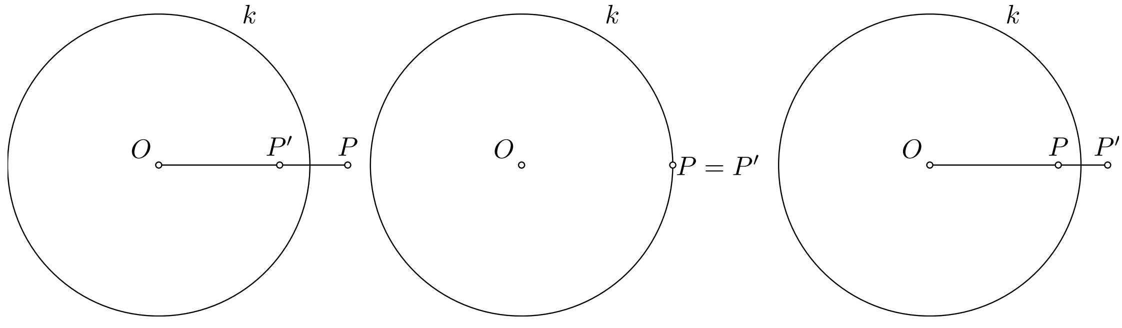
Definicija 2.1.1 *Inverzija u odnosu na krug k je preslikavanje*

$$\phi_k : E^2 \backslash \{O\} \to E^2 \backslash \{O\}$$

koje svakoj tački $P \neq O$ dodeljuje tačku $P' = \phi_k(P)$ poluprave OP tako da je

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Tačka O je centar inverzije.



Slika 2.1: Inverzija tačke P u odnosu na krug $k = k(O, r)$, $\phi_k(P) = P'$

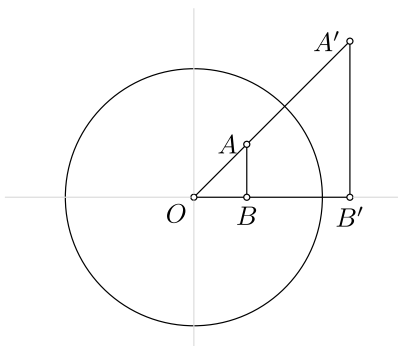
Zašto su domen i kodomen ovog preslikavanja skupovi $E^2 \backslash \{O\}$?
Ako bi centar O imao svoju sliku O', važilo bi:

$\phi_k(O) = O'$ ako i samo ako O' pripada polupravoj OO i $OO \cdot OO' = r^2$. Međutim, kako je dužina duži OO jednaka 0, nemoguće je da tačka O ima sliku. Slično, tačka O nije slika nijedne tačke. Važiće i sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.1.1 *Neka je $P' = \phi_k(P)$. Prava PP' je normalna na krug k.*

Dokaz.
Iz Definicije 2.1.1 znamo da su tačka P, njena slika P' i centar inverzije O kolinearne tačke i pripadaju pravoj koja sadrži centar kruga k. Takođe iz definicije tangente na krug u tački, znamo da je ugao između poluprečnika kruga i tangente u tački dodira prav. Možemo da zaključimo da je svaka prava koja sadrži centar kruga, zapravo normalna na taj krug.$\diamondsuit$

Uvodimo koordinatni sistem. Posmatrajmo tačku O kao koordinatni početak i neka se tačka $A(x_1, y_1)$ inverzijom ϕ_k slika u tačku $A'(x_2, y_2)$, gde je krug $k(O, r)$ zadat jednačinom u standardnim euklidskim koordinatama. Neka su tačke B i B' redom podnožja normala iz A i A' na x-osu.



Slika 2.2:

Iz sličnosti $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B'$ znamo da važi $\frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$, tj.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = k,$$

odnosno

$$x_2 = kx_1, y_2 = ky_1.$$

Kako iz Definicije 2.1.1. znamo i da važi $OA \cdot OA' = r^2$, koristeći ove dve činjenice znamo sledeće:

$$(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) = r^4$$

$$(x_1^2 + y_1^2) \cdot (k^2 x_1^2 + k^2 y_1^2) = r^4$$
$$k^2 (x_1^2 + y_1^2)^2 = r^4$$
$$k^2 = \frac{r^4}{(x_1^2 + y_1^2)^2}.$$

Kako iz Definicije 2.1.1. znamo da tačka A' leži na istoj polupravoj iz centra kruga inverzije k, kao i tačka A, zaključujemo da A' ima koordinate (kx_1, ky_1) za neko pozitivno k, dakle:

$$k = \frac{r^2}{x_1^2 + y_1^2}$$
$$\phi_k(x_1, y_1) = \left(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right). \quad (1)$$

Tvrđenje 2.1.2 *Inverzija u odnosu na krug $k = k(O, r)$ je* ***bijektivno preslikavanje****.*

Dokaz.
Neka je $Y \in E^2 \backslash \{O\}$ proizvoljna tačka. Na polupravoj OY postoji jedinstvena tačka X , $X \in E^2 \backslash \{O\}$ takva da je $OX = \frac{r^2}{OY}$, tj. $OX \cdot OY = r^2$. Kako iz Definicije inverzije u odnosu na krug, Definicija 2.1.1, i poslednje jednakosti sledi da je tada $Y = \phi_k(X)$, slediće da je ϕ_k „na” preslikavanje.
S druge strane, ako je $\phi_k(X_1) = \phi_k(X_2) = Y$, onda je $OX_1 \cdot OY = OX_2 \cdot OY = r^2$, odnosno $OX_1 = OX_2 = \frac{r^2}{OY}$. Kako na osnovu Definicije 2.1.1. sledi da i X_1 i X_2 pripadaju pravoj OY, biće $X_1 = X_2$. Dakle, ϕ_k je „1-1” preslikavnje.
Na kraju zaključujemo da je ϕ_k bijektivno preslikavanje.$\diamondsuit$

Neka je $P \in E^2 \backslash \{O\}$ proizvoljna tačka. S obzirom da je $OP \cdot OP' = r^2$, zaključujemo da je $OP < r$ ako i samo ako je $OP' > r$, odnosno da se inverzijom u odnosu na krug k tačke iz njegove unutrašnjosti slikaju u tačke koje pripadaju spoljašnjosti kruga k, i obrnuto, tj. važi:

Tvrđenje 2.1.3 *Inverzija u odnosu na krug $k(O, r)$ preslikava unutrašnju oblast tog kruga bez centra O u spoljašnju oblast i obratno, spoljašnja oblast se tom inverzijom preslikava u unutrašnju oblast bez centra O.*

Ovo tvrđenje sada lako možemo da proverimo koristeći izvedenu formulu (1). Kako je jednačina kruga k data sa $x^2 + y^2 = r^2$, ako posmatramo tačku $A(x_1, y_1)$ koja

se nalazi u unutrašnjosti kruga, važiće $x_1^2 + y_1^2 < r^2$. Dalje, znamo da slika tačke A u inverziji u odnosu na k ima kordinate $A'(\frac{r^2x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{r^2y_1}{x_1^2+y_1^2})$, pa proveravamo da li tačka A' stvarno pripada spoljašnjosti kruga k.
$(\frac{r^2x_1}{x_1^2+y_1^2})^2 + (\frac{r^2y_1}{x_1^2+y_1^2})^2 = \frac{x_1^2r^4+y_1^2r^4}{(x_1^2+y_1^2)^2} = \frac{r^4(x_1^2+y_1^2)}{(x_1^2+y_1^2)^2} = \frac{r^4}{x_1^2+y_1^2}$ za šta znamo da je veće od r^2 jer je $x_1^2 + y_1^2 < r^2$. Slično se pokazuje i obrnuto.

Na osnovu definicije inverzije u odnosu na krug znamo, što je tačka P bliža centru inverzije O, to je njena slika P' sve dalja. Dakle, možemo reći ako se tačka P približava ka centru inverzije O, njena slika će se udaljavati ka beskonačnosti. Takođe ako je tačka P blizu kruga k i njena slika će biti blizu kruga k, samo sa druge strane.
To možemo zapisati i na ovaj način:
Ako se tačke P i Q slikaju inverzijom u odnosu na krug k u tačke P' i Q' i ako važi raspored $\mathcal{B}(O, P, Q)$, onda će da važi i raspored $\mathcal{B}(O, Q', P')$.
Dalje, ako je $OP = r$, tada je i $OP' = r$, odnosno $P = P'$, tj. tačka P je invarijantna za transformaciju ϕ_k. Jasno je da se tačke kruga k, inverzijom u odnosu na krug k, slikaju u same sebe. Zapravo važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.1.4 *Jedine invarijantne tačke inverzije u odnosu na krug k su upravo tačke kruga k.*

Kako znamo i da je $\phi_k(P') = P$, važiće teorema:

Teorema 2.1.1 *Inverzija u odnosu na krug je* ***involutivno preslikavanje****, tj za svaku tačku $P \in E^2 \backslash \{O\}$ važi:*

$$\phi_k(\phi_k(P)) = \phi_k^2(P) = P.$$

Ako euklidskoj ravni pridružimo jednu, beskonačno daleku, tačku ∞, tako dobijeni skup ćemo zvati **proširenom euklidskom ravni**. Tada, ćemo definisati i da je $\phi_k(O) = \infty$, $\phi_k(\infty) = O$.
U proširenoj euklidskoj ravni, i pravu možemo smatrati krugom koji pri tom sadrži beskonačno daleku tačku, a takve prave i krugove zajedno ćemo nazivati **uopštenim krugovima**.

Osobina konformnosti

Sada ćemo se pozabaviti jednim od važnijih svojstava inverzije, a to je da je ona jedno **konformno preslikavanje**. Nećemo strogo definisati ovaj pojam, ali možemo prihvatiti jednu deskriptivnu definiciju, da je to preslikavanje koje „čuva uglove”.

Definicija 2.1.2 *Ugao između dve glatke krive*[1] *hiperboličke ravni je euklidski ugao između njihovih (euklidskih) tangenti u zajedničkim tačkama.*

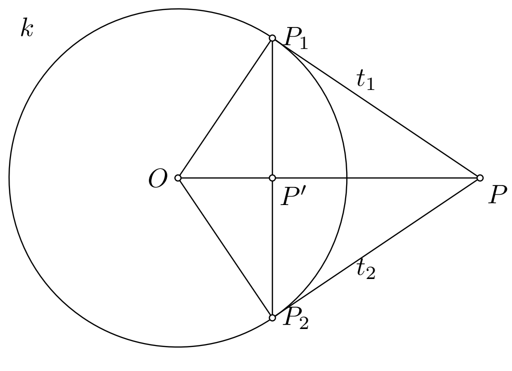
Važiće sledeća teorema:

Teorema 2.1.2 *Inverzija ϕ_k je konformno preslikavanje tj. ugao pod kojim se seku dva uopštena kruga l_1 i l_2 euklidske ravni, jednak je uglu pod kojim se seku njihove slike l_1' i l_2' u toj inverziji, samo suprotne orijentacije.*

Dokaz ove teoreme se može pročitati u literaturi [2, strana 69.]
Takođe, analogno, navedena teorema važi za sve glatke krive euklidskog prostora.

2.2 Konstrukcije tačke, prave i krugova u inverziji

Konstruišimo sliku tačke $P \in E^2 \setminus \{O\}$ preslikane inverzijom u odnosu na krug k. Pretpostavimo da P pripada spoljašnjosti kruga k. Neka su t_1 i t_2 tangente iz tačke P na krug k, a P_1 i P_2 tačke dodira ovih tangenti sa krugom k. Neka je P' presečna tačka prave P_1P_2 i prave OP, Slika 2.3. Dokažimo da je $\phi_k(P) = P'$:



Slika 2.3: Konstrukcija tačke P' ako je $\phi_k(P) = P'$

Kako je $OP_1 = OP_2 = r$ i $PP_1 = PP_2$ kao tangentne duži, to tačke P i O leže na simetrali duži P_1P_2, odnosno prava PO je normalna na pravu P_1P_2

[1]Kriva je glatka ukoliko u svakoj svojoj tački ima definisanu tangentu

kao simetrala duži P_1P_2. Posmatajući $\triangle OP_1P$ i $\triangle OP'P_1$, uočavamo da su oba pravougla, imaju zajednički ugao kod temena O i zajedničku stranicu OP_1, te možemo da zaključimo da su slični, a iz sličnosti dalje važi:

$$\frac{OP_1}{OP'} = \frac{OP}{OP_1}$$

odakle je

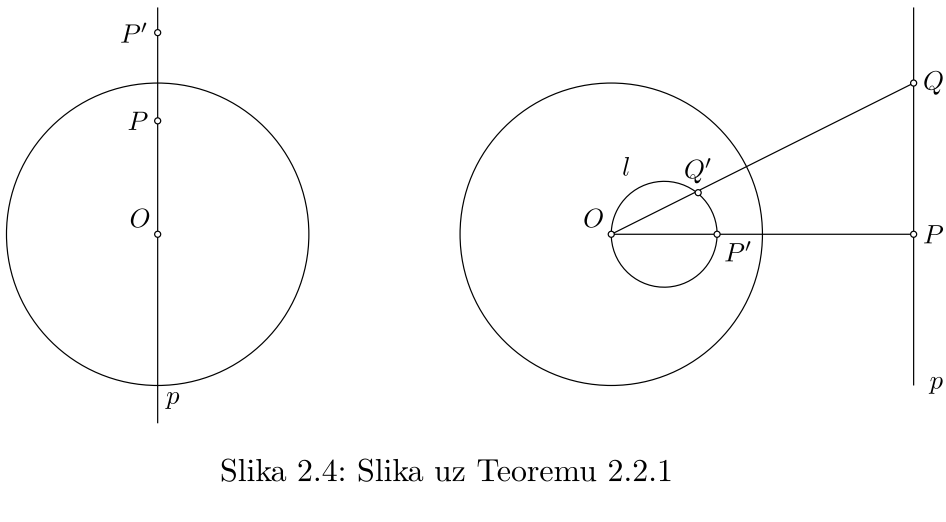
$$OP' \cdot OP = OP_1^2 = r^2$$

odnosno, biće $\phi_k(P) = P'$.

Kako je $\phi_k(P') = P$, na sličan način dobijamo sliku tačke P kada je ona u unutrašnjosti kruga k.

Teorema 2.2.1 *Neka je p prava ravni E^2. Tada važi:*
a) Ako $O \in p$ onda $\phi_k(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.
b) Ako O ne pripada pravoj p tada postoji krug l u ravni, koji sadrži tačku O, takav da je $\phi_k(p) = l \backslash \{O\}$.

Dokaz.
a) Neka je $P \in p$. Tada su tačke P, O, P' kolinearne, pa sve pripadaju pravoj p, pa važi i da $P' \in p$. S obzirom da je ϕ_k involucija važiće i $\phi_k(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.
b) Neka je P podnožje normale iz O na p i $\phi_k(P) = P'$. Neka je l krug sa prečnikom OP'. Neka je $Q \in p$, $Q \neq P$ proizvoljna tačka. Dokažimo da $Q' \in l$.



Slika 2.4: Slika uz Teoremu 2.2.1

S obzirom da su trouglovi OPQ i $OQ'P'$ slični, sledi i da je $\angle OQ'P' = \angle OPQ$ prav. Zato tačka Q' pripada krugu sa prečnikom OP, odnosno l. Obrnuto, ako je

$Q' \in l \setminus \{O\}$, tačka Q' se inverzijom ϕ_k slika u tačku Q poluprave OQ' za koju važi i da je $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ te Q pripada i pravoj ortogonalnoj u P na OP', odnosno pravoj p. Zato važi i $\phi_k(p) = l \setminus \{O\}$. $\diamondsuit$

Teorema 2.2.2 *Neka je l krug euklidske ravni. Tada važi:*
a) Ako $O \in l$, onda je $\phi_k(l \setminus \{O\})$ neka prava p te ravni koja, pri tom ne sadrži tačku O.
b) Ako l ne sadrži tačku O tada je $\phi_k(l) = l'$ takođe krug koji ne sadrži tačku O. Pri tom, postoji i homotetija sa centrom u O kojom se l slika u l'.

Dokaz.
a) S obzirom da je ϕ_k involucija, tvrđenje direktno sledi iz Teoreme 2.2.1 pod b).
b) Neka je S centar kruga l i P i Q tačke u kojima prava OS seče l. Neka je $R \in l$ proizvoljna tačka. Prava OR seče krug l još u tački R_1. Posebno, ako je OR tangenta na l, tada je $R = R_1$. Neka je $\phi_k(R) = R'$. Pri tom, zbog potencije tačke O u odnosu na krug l sledi da je $OR \cdot OR_1 = OP \cdot OQ$. Kako je i $OR \cdot OR' = r^2$, sledi da je i

$$\frac{OR'}{OR_1} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ}$$

$$OR' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} OR_1 \quad (2).$$

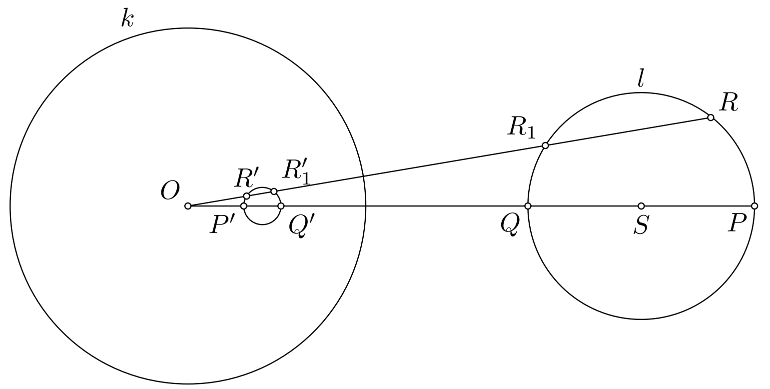
Ako je $\mathcal{H}$ homotetija sa središtem O i koeficijentom $\frac{r^2}{OP \cdot OQ}$ korišteci (2) sledi da je tačka R' iz skupa l' ako i samo ako je $R' = \mathcal{H}(R_1)$ za (neku) tačku R_1 kruga l. To zapravo znači da je skup l' homotetična slika kruga l, pa je l' krug koji ne sadrži središte O homotetije $\mathcal{H}$. Kako je ϕ_k involucija sledi i da važi skupovna jednakost $\phi_k(l) = l'$.$\diamondsuit$

Iz navedene Definicije 2.1.2 koja govori o uglu dve krive, dolazimo do kriterijuma za ortogonalnost dva kruga:

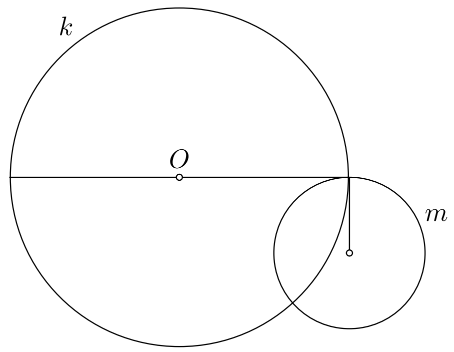
Tvrđenje 2.2.1 *Dva kruga su ortogonalna (normalna) ukoliko tangenta u zajedničkoj tački jednog od njih prolazi kroz centar drugog kruga.*

Tvrđenje 2.2.2 *Neka tačka P ne pripada krugu k i neka je $P' = \phi_k(P)$. Ako krug l sadrži tačke P i P' onda su krugovi k i l ortogonalni.*

Dokaz.
Neka je $P \notin k(O, r)$. Potencija tačke O u odnosu na krug l je $OP \cdot OP' = OT^2$,

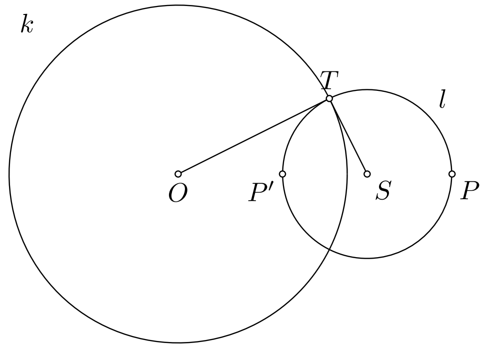


Slika 2.5: Slika uz Teoremu 2.2.2., slučaj kada krug ne sadrži tačku O



Slika 2.6: k i m su ortogonalni krugovi

gde je T dodirna tačka tangente iz O na l. Dalje, kako je $\phi_k(P) = P'$ važiće $OP \cdot OP' = r^2$ pa je jasno da je $r = OT$, što znači da tačka T pripada krugu k. Tada se tangente na k i l u tački T seku pod pravim uglom pa su krugovi ortogonalni.$\diamondsuit$



Slika 2.7: Slika uz Tvrđenje 2.2.2.

Tvrđenje 2.2.3 *Neka su k i l dva kruga euklidske ravni. Tada je $\phi_k(l) = l$ ako i samo ako su krugovi k i l ortogonalni ili $k = l$.*

Dokaz.
Pretpostavimo da $k \neq l$ i neka je $X \in l$ tačka koja ne pripada krugu k, a $\phi_k(X) = X'$. Ako je $\phi_k(l) = l$ tada $X' \in l$ pa na osnovu Tvrđenja 2.2.2. sledi $k \perp l$. Obratno, ako je $k \perp l$, sledi da je dodirna tačka T tangente iz tačke O na l zajednička za k i l, pa je potencija tačke O u odnosu na l jednaka $OT^2 = r^2$. Ako je X'' druga presečna tačka kruga l i prave OX tada je potencija $OX \cdot OX'' = r^2$, a kako je X' slika tačke X u inverziji važi i $r^2 = OX \cdot OX'$. Zato je $X' = X''$ pa se krug l slika u sebe.$\diamondsuit$

Glava 3

Poenkareov disk model

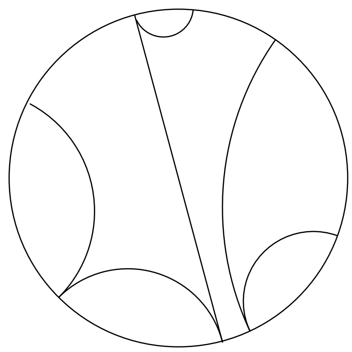
3.1 Osnovni pojmovi

„Osećanje matematičke lepote, harmonija brojeva i formi, geometrijska elegancija predstavljaju istinski estetski osećaj, poznat svim matematičarima, ali je tako daleko laicima, da često dolaze u iskušenje da se nasmeju"- Poenkare

Anri Poenkare[1] bio je jedan od najtalentovanijih matematičara svih vremena. Predavao je matematičku fiziku i račun verovatnoće na Fakultetu nauka u Parizu, te višu analizu na Politehničkoj školi. Njegov naučni rad obuhvata matematiku, astronomiju i fiziku. Razvio je teoriju automorfnih funkcija i istraživao diferencijalne jednačine, a posebno su važni njegovi radovi na području topologije i njegova interpretacija geometrije Lobačevskog. Krajem 19. veka je u euklidskoj geometriji konstruisao model hiperboličke geometrije. Od tog momenta se svi pojmovi, relacije i tvrđenja hiperboličke geometrije mogu vizualizovati.
U ovom poglavlju daćemo osobine osnovnih geometrijskih pojmova i relacija u modelu hiperboličke geometrije, **Poenkareovom disk modelu**.
Uočimo u euklidskoj ravni jedinični krug k, koji ćemo zvati **apsolutni krug** ili prosto samo **apsoluta**.
Unutrašnjost tog kruga zvaćemo h-**ravan**, dok ćemo svaku tačku koja pripada unutrašnjosti tog kruga, ne računajući i tačke samog kruga k, zvati h-**tačkama**.
Tačke preseka apsolute k i uopštenih krugova nazivaćemo **beskonačno daleke tačke** h-prave koja je nastala na taj način.
Neka je $\tilde{l}$ uopšteni krug ravni E^2, normalan na apsolutu k. Tada $\tilde{l}$ i k imaju dve

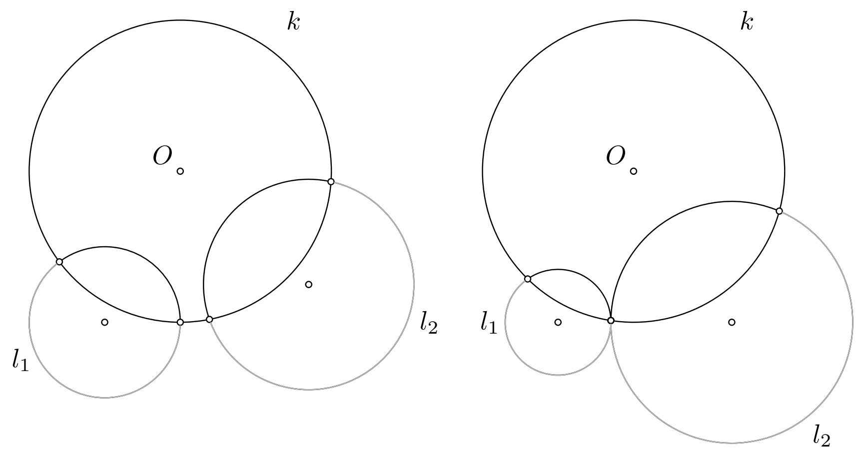
[1]Žil Anri Poenkare(Jules Henri Poincare, $1854-1912$) francuski matematičar i teorijski fizičar

zajedničke beskonačno daleke tačke X i Y. Tada je $\tilde{l}$ u euklidskom smislu prava ako i samo ako $\tilde{l}$ sadrži centar apsolute O. Skup tačaka uopštenog kruga $\tilde{l}$ koje su ujedno i h-tačke je h-**prava** i označavaćemo je sa l. Tačnije, prave u Poenkareovom disk modelu predstavljaju prečnici apsolute ili delovi krugova koji su normalni na apsolutu i pripadaju njenoj unutrašnjosti.

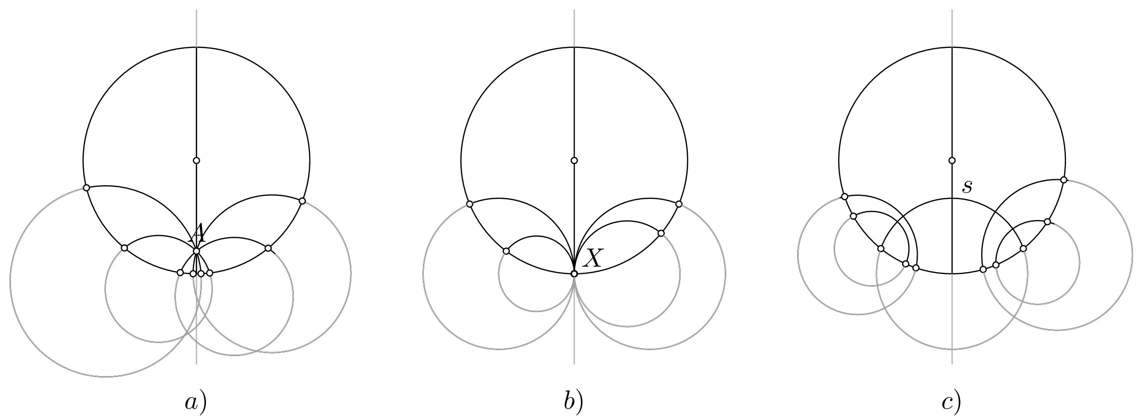


Slika 3.1: h-prave u Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni

Dva razna uopštena kruga $\tilde{l_1}$ i $\tilde{l_2}$ koji određuju dve h-prave l_1 i l_2, mogu da imaju zajedničke najviše dve tačke.
Ako nemaju zajedničkih tačaka, tada se ni h-prave l_1 i l_2 ne seku. Kažemo da su te h-prave **hiperparalelne**. Slika 3.2.
Ako se $\tilde{l_1}$ i $\tilde{l_2}$ dodiruju u jednoj tački, ona je invarijantna za inverziju, pa pripada apsoluti k i nije h-tačka. Tada kažemo da su h-prave l_1 i l_2 **paralelne prave**. Slika 3.2. Za razliku od euklidske geometrije, u hiperboličkoj geometriji postoji tri vrste **pramenova pravih**.
Ako je A h-tačka, tada skup svih h-pravih koje sadrže A nazivamo **pramenom konkurentnih pravih** ili **eliptičkim pramenom pravih**, sa centrom u A. Slika 3.3 a).
Ako je X tačka apsolute, svi uopšteni krugovi koji sadrže X i koji određuju h-prave se dodiruju u tački X. Zato sve h-prave koje imaju zajedničku beskonačno daleku tačku X nazivamo **pramenom paralelnih pravih** ili **paraboličkim pramenom**, sa centom u X. Slika 3.3. b).
Ako je s h-prava, tada skup svih h-pravih normalnih na s nazivamo **pramenom hiperparalelnih pravih**, odnosno **hiperboličkim pramenom**. Slika 3.3. c)
Dalje ćemo definisati još neke pojmove h-ravni. Svaki segment kruga ili duž prave



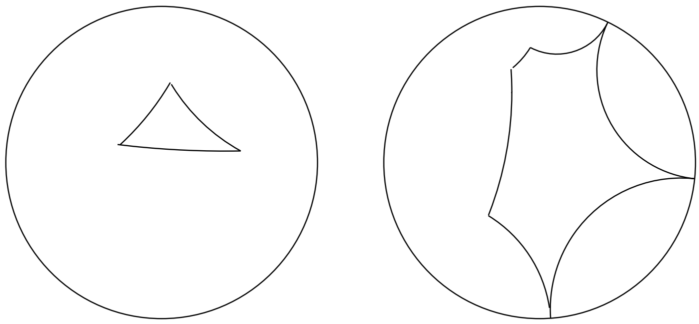
Slika 3.2: Hiperparalelne i paralelne h-prave l_1 i l_2



Slika 3.3: Pramenovi pravih: a)eliptički, b)parabolički, c)hiperbolički

koji je upravan na apsolutu, čija temena pripadaju h-ravni, zvaćemo **h-duži**. Ako imamo segment kruga čije je jedno teme na apsoluti, a drugo pripada h-ravni, nazivaćemo ga **h-poluprava**. Teme koje se nalazi na apsoluti nazivamo krajem h-poluprave, a drugo temenom h-poluprave. h-prava će razlagati h-ravan na dve oblasti koje nazivamo **h-poluravnima**, dok tu h-pravu zovemo **rubom** tih h-poluravni. Dve h-poluprave koje imaju zajedničko teme razlažu h-ravan na dve oblasti koje nazivamo **h-uglovima**, a te dve poluprave nazivamo kracima tih h-uglova. Mera ugla između dve h-prave je njegova euklidska mera, odnosno, ugao između dve h-prave l_1 i l_2 je ugao između tangenti na l_1 i l_2 u presečnoj tački.

Ako su A, B i C tri h-tačke koje ne pripadaju istoj h-pravoj, tada skup koji se sastoji iz h-duži AB, AC i BC nazivamo **h-trouglom**.



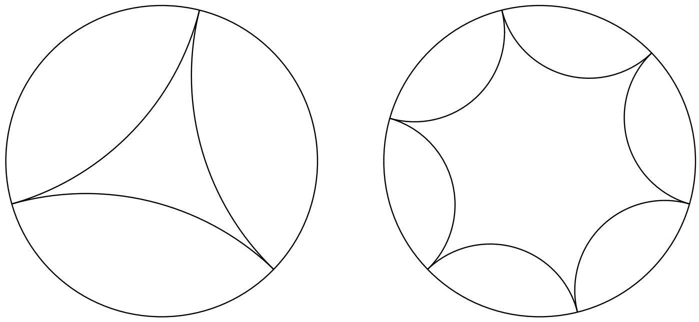
Slika 3.4: h-trougao i h-šestougao

Analogno sa pojmom ugla trougla možemo uvesti i pojam ugla h-trougla. Takođe i pojmovi **h-poligonske linije** i **h-poligona** se uvode analogno sa odgovarajućim pojmovima apsolutne geometrije. Isto tako i pojmovi ugla h-poligona i h-poligonske povši.

Idealan trougao čine tri prave Poenkareovog disk modela koje se dodiruju na granici Poenkareovog diska, odnosno na apsoluti. Budući da granica diska nije deo hiperboličkog prostora, stranice idealnog trougla su beskonačno dugačke i nikadase zapravo ne susreću. Međutim, ipak se zbližavaju dok se kreću prema ivici. Tri tačke na apsoluti se nazivaju idealnim vrhovima idealnog trougla i imaju sličnu ulogu kao vrhovi običnog trougla. Budući da su sve stranice normalne na granicu Poenkareovog diska, one međusobno prave ugao od 0^o. Na sličan način, nastaju i ostali **idealni poligoni**. Slika 3.5.

3.2 Izometrijske transformacije hiperboličke ravni

Neka je l h-prava. Tada je l ili luk uopštenog kruga $\tilde{l}$, koji je ortogonalan na apsolutu k ili deo(euklidske) prave koja prolazi kroz centar apsolute, odnosno njen prečnik. U slučaju kada je posmatrana h-prava luk uopštenog kruga, preslikavanje je inverzija u osnosu na taj krug, dok u slučaju kada je naša h-prava prečnik apsolute, preslikavanje o kome govorimo je refleksija u osnosu na pravu. Inverzija



Slika 3.5: Idealni trougao i idealan šestougao

(ili refleksija) ϕ_l u odnosu na l tada slika krug k u sebe. Pri tom, h-tačke h-prave l su invarijantne za ovo preslikavanje, što nam u slučaju luka uopštenog kruga dokazuje Tvrđenje 2.2.2, a u slučaju prečnika apsolute, to sledi iz definicije refleksije u odnosu na pravu. h-prava l razlaže unutrašnjost kruga k na dve oblasti koje se preslikavanjem ϕ_l slikaju jedna u drugu. Restrikciju te inverzije (ili refleksije) na h-ravan zvaćemo h-**refleksijom** i označavati S_l. h-pravu l zvaćemo osom h-refleksije. Svaka poluravan kojoj je rub osa neke h-refleksije tom h-refleksijom se preslikava na njoj komplementnu h-poluravan.

Tvrđenje 3.2.1 *Neka je A h-tačka različita od centra apsolute O. Tada postoji jedinstvena h-refleksija S_l koja slika A u O.*

Tvrđenje 3.2.2 *Za dve razne h-tačke A i B postoji jedinstvena h-refleksija kojom se te dve tačke preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz ove teoreme može se pročitati u literaturi [8, strana 279-280].

Teorema 3.2.1 *Ako se dve h-prave seku, tada postoje dve h-refleksije kojima se one preslikavaju jedna na drugu, a ako su disjunktne, tada postoji jedinstvena h-refleksija kojom se one preslikavaju jedna na drugu.*

Teorema 3.2.2 *Postoji jedinstvena h-refleksija kojom se dve h-poluprave sa zajedničkim temenom preslikavaju jedna na drugu.*

Definicija 3.2.1 *Kompozicija konačnog broja h-refleksija je h-**izometrija**. Ukoliko je h-izometrija kompozicija parnog broja h-refleksija onda je ona **direktna**, a ako je kompozicija neparnog broja h-refleksija biće **indirektna** h-izometrija.*

Važiće i teorema:

Teorema 3.2.3 *Svaka direktna h-izometrija se može predstaviti kao kompozicija dve h-refleksije, a svaka indirektna je ili h-refleksija ili kompozicija tri h-refleksije.*

Dokaz ove teoreme se može pročitati u literaturi [2, strana 78-79].

Tvrđenje 3.2.3 *Svaka h-izometrija slika h-kolinearne tačke u h-kolinearne tačke, čuva raspored, slika h-prave u h-prave. Pri tom, uglovi između dve h-prave i njihovih slika su jednaki. Konkurentne, paralelne, odnosno hiperparalelne h-prave se slikaju redom u konkurentne, paralelne, odnosno hiperparalelne h-prave.*

Definicija 3.2.2 *Dve figure se zovu h-**kongruentne** ako postoji h-izometrija koja slika jednu od figura u drugu.*

Definisaćemo sve h-izometrijske transformacije. Osnovna njihova podela je na direktne i indirektne. Sa I ćemo zvati svaku od tih h-izometrijskih transformacija dok ih ne definišemo i uvedemo konkretnu oznaku koja se koristi.

Direktne h-izometrijske transformacije

Ako se h-tačka A slika h-refleksijom S_{l_1} u h-tačku $A_1 \neq A$, tada je l_1 h-simetrala duži AA_1. Ako je $S_{l_2}(A_1) = A$ tada je i l_2 h-simetrala duži AA_1 pa je $l_1 = l_2$. Zato važi sledeća teorema:

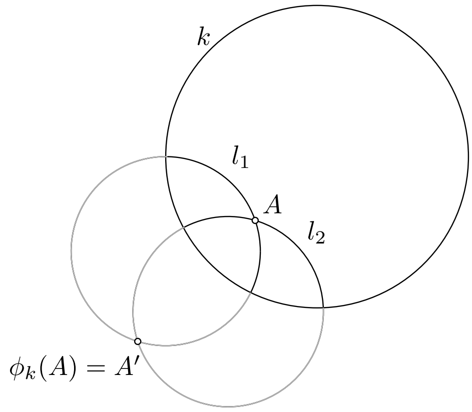
Teorema 3.2.4 *Ako su l_1 i l_2 razne h-prave tada je h-tačka A invarijantna za $I = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ ako i samo ako se l_1 i l_2 seku u A.*

Dalje ćemo na osnovu međusobnog položaja h-pravih l_1 i l_2 koje su delovi uopštenih krugova $\tilde{l_1}$ i $\tilde{l_2}$ i Teoreme 3.2.3 iz koje znamo da se svaka direktna h-izometrija može napisati kao kompozicija dve h-refleksije, izvršićemo njihovu klasifikaciju:

- Ako je $l_1 = l_2$, onda je I identičko preslikavanje ili **koincidencija** i označavamo je ϵ. Sve h-tačke su invarijantne.

- Ako se dve razne h-prave l_1 i l_2 seku, naime imaju jednu zajedničku h-tačku A, ona će na osnovu Teoreme 3.2.4 biti jedinstvena invarijantna tačka transformacije $I = S_{l_1} \circ S_{l_2}$.

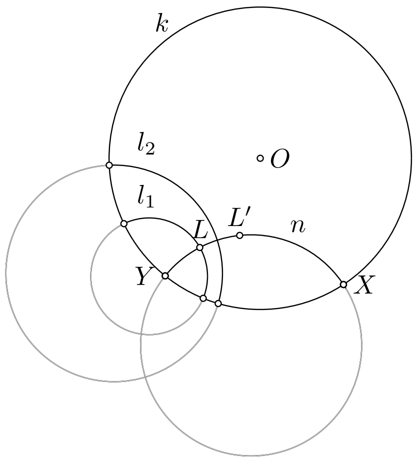
  Proizvoljna h-tačka X se transformacijom I slika u tačku X' takvu da je ugao α između h-pravih AX i AX' jednak dvostrukom uglu između h-pravih l_1 i l_2. Transformaciju I nazivamo **centralnom rotacijom**, sa centrom A za ugao α i označavamo sa $\mathcal{R}_{A,\alpha}$. Dakle, važi tvrđenje:



Slika 3.6: Rotacija

Tvrđenje 3.2.4 *Neidentička direktna h-izometrija I je rotacija ako i samo ako I ima invarijantnu bar jednu h-tačku. Tada je ta h-tačka jedinstvena invarijantna tačka za I.*

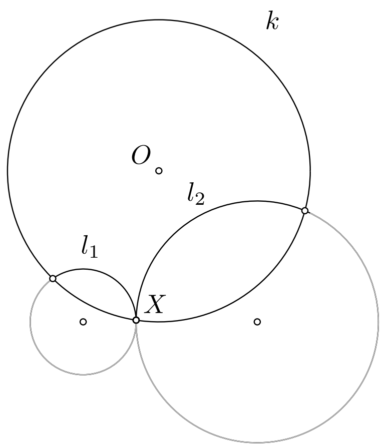
- Neka su h-prave l_1 i l_2 hiperparalelne i neka je n, h-prava normalna na l_1 i l_2, sa beskonačno dalekim tačkama X i Y.
  Neka se l_1 i n seku u h-tački L i L' je slika tačke L pri h-refleksiji S_{l_2}.



Slika 3.7: Translacija

Tada je kompozicija $I = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ restrikcija preslikavanja kojim se tačke X, Y, L slikaju redom u X, Y i L', pa je I, transformacija koju zovemo **translacijom** za vektor $\vec{LL'}$ i označavamo $\tau_{\vec{LL'}}$.

- Ukoliko su prave l_1 i l_2 paralelne sa zajedničkom beskonačno dalekom tačkom X tada je X invarijantna za I. Dakle ne postoji transformacija I, proširene euklidske ravni, bez invarijantnih tačaka. Uopšteni krugovi l_1 i l_2 se dodiruju u tački X, te njihovi centri pripadaju euklidskoj pravoj koja u X dodiruje k. Ako bi postojala još neka beskonačno daleka invarijantna tačka Y, tada bi važilo $\phi_{l_1}(Y) = \phi_{l_2}(Y) = Y_1 \neq Y$, pa bi centri l_1 i l_2 pripadali pravoj koja seče k u tačkama Y i Y_1. Zato transformacija I ima samo jednu beskonačno daleku invarijantnu tačku. h-izometrija I je **oriciklička rotacija** odnosno **paralelno pomeranje**. Označavamo ga sa $\mathcal{R}_{X,L,L'}$ gde je L proizvoljna tačka, a L' njena slika.



Slika 3.8: Paralelno pomeranje

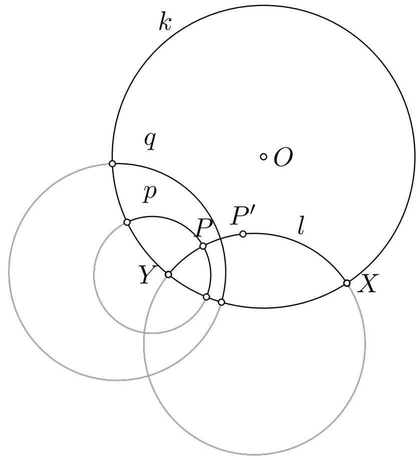
Indirektne h-izometrijske transformacije

Indirektne izometrijske transformacije hiperboličke ravni su h-refleksija i h-klizajuća refleksija.

- h-**refleksiju** S_l smo već definisali kao restrikciju inverzije u odnosu na krug $\tilde{l}$ ili restrikciju refleksije, ukoliko je l h-prava koja je prečnik apsolute. Fiksne tačke su sve tačke h-prave l i dve beskonačno daleke tačke nastale u preseku kruga $\tilde{l}$ i apsolute.

- Neka je I indirektna h-izometrija koja nema invarijantnih tačaka i neka je $P \in l$ h-tačka i $P' = I(P)$. Neka je p h-prava ortogonalna na l u P i q h-simetrala duži PP'. h-refleksija S_p slika pravu l u sebe, a h-polupravu PX

u h-polupravu PY. Zato je kompozicija $S_p \circ S_q \circ S_l$ restrikcija preslikavanja koje ima invarijantne tačke X i Y, a pri tom slika tačku P u P' i dalje je $I = S_p \circ S_q \circ S_l$. Ovu transformaciju zovemo **klizajućom refleksijom** $\mathcal{G}_{l,\vec{PP'}}$, duž prave l za vektor PP'.



Slika 3.9: Klizajuća refleksija

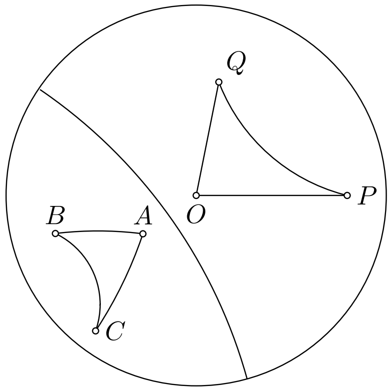
Dokazi i preciznija objašnjenja svake izometrijske transformacije mogu se pročitati u literaturi [2, strana 79-82]. Na kraju ću radi lakše preglednosti sve pomenute izometrijske transformacije, kao i broj njihovih fiksnih tačaka prikazati sledećom tabelom:

Izometrija	Invarijantne h-tač.	Invarijan. beskon. daleke tač.	Direktnost
ϵ	sve	sve	$+$
$\tau_{\vec{LL'}}$	$\emptyset$	$X, Y \in LL'$	$+$
$\mathcal{R}_{A,\alpha}$	A	$\emptyset$	$+$
$\mathcal{R}_{X,L,L'}$	$\emptyset$	X	$+$
S_p	tačke h-prave p	$X, Y \in p$	-
$\mathcal{G}_{l,\vec{PP'}}$	$\emptyset$	$X, Y \in p$	-

Dalje, navodimo teoremu koja ukazuje na važnu razliku između euklidske i hiperboličke geometrije.

Teorema 3.2.5 *Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog h-trougla je manji od* 180^o.

Dokaz.
Neka je ABC h-trougao i tačka O centar apsolute. Tada na osnovu Tvrđenja 3.2.1



Slika 3.10: Slika uz Teoremu 3.2.5.

sledi da postoji jedinstvena h-refleksija kojom se tačka A preslikava u O. Tom istom h-refleksijom se tačke B i C redom slikaju u tačke Q i P. Takođe h-duži AB i AC se slikaju u h-duži koje pripadaju prečniku apsolute, OP i OQ. Kako na onovu Teoreme 2.1.2 znamo da h-refleksija čuva uglove, sigurno je da se uglovi h-trougla ABC tom h-refleksijom slikaju u njima podudarne uglove h-trougla PQO. Kako su u h-trouglu OPQ, h-uglovi kod temena P i Q manji od uglova kod istih temena (euklidskog) trougla OPQ, zaključujemo da će zbir unutrašnjih uglova h-trougla OPQ biti manji od 180^o. Stoga će i zbir unutrašnjih uglova h-trougla $\triangle ABC$ biti mani od 180^o. $\diamondsuit$

Takođe zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog prostog h-četvorougla biće manji od 360^o, a zbir unutrašnjih uglova h-poligonske površi koja ima n stranica biće manji od $(n-2)180^o$.

Teorema 3.2.6 *h-ravan je model hiperboličke ravni.*

Detaljan dokaz ove teoreme može se pročitati u literaturi [8, strana 282]. Svakako je za taj dokaz potrebno pokazati da na Poenkareovom disk modelu važe sve aksiome apsolutne geometrije, kao i aksioma Lobačevskog, tj. da na ovom modelu važi hipebolička geometrija, što bi dalje značilo da je svakom pojmu hiperboličke planimetrije pridružen pojam geometrije h-ravni i da svaka teorema hiperboličke geometrije ima svoju interpretaciju u geometriji h-ravni, kao i obrnuto, dokazujući stavove geometrije h-ravni zapravo dokazujemo teoreme hiperboličke geometrije.

Ovaj model je smešten u deo euklidske ravni. Osnovni objekti tog modela kao i relacije su objekti i relacije geometrije Euklida. Drugim rečima, cela h-

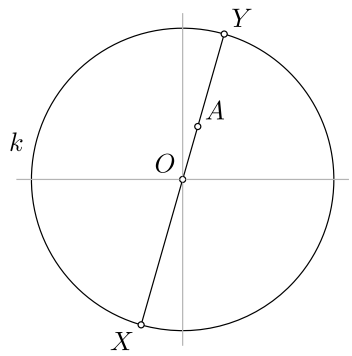
geometrija posmatranog modela je jedan deo geometrije Euklida. Upravo na ovaj način konstruisan model hiperboličke ravni naziva se **Poenkareov disk model**.

Funkcija rastojanja

U euklidskoj ravni, za bilo koje dve tačke $z_1, z_2 \in C$ postoji nenegativan broj koji se naziva rastojanje između te dve tačke i definiše :

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in C.$$

Sada ćemo uvesti analognu formulu za udaljenost dve h-tačke u hiperboličkoj ravni. Neka je A h-tačka čija je kompleksna koordinata z i O centar apsolute, koji smeštamo u koordinatni početak, radi lakšeg razumevanja.



Slika 3.11:

Neka su X i Y beskonačno daleke tačke h-prave OA takve da tačka A pripada polupravoj OY . Tada je $AX = 1+|z|$, $AY = 1-|z|$, $OX = OY = 1$. Veza između hiperboličkog rastojanja d i euklidskog $|z|$ tačaka O i A je data sa

$$d = d_h(O, A) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Tada je i

$$|z| = \frac{e^d - 1}{e^d + 1},$$

odnosno

$$|z| = \tanh \frac{d}{2},$$

tj.

$$d = 2\tanh^{-1}|z|. \quad (4)$$

Rekli smo da je $|z|$ euklidska udaljenost tačke A od koordinatnog početka, a jednačina (4) govori da hiperbolička udaljenost tačke A može da se dobije kada se primeni inverzna funkcija tangenshiperboličkog na euklidsku udaljenost tačke A od koordinatnog početka.
Kada se tačka sa koordinatom z približava apsoluti, hiperbolička udaljenost te tačke od koordinatnog početka raste bez ograničenja. Ako bi euklidsko rastojanje $|z|$ težilo ka 1, hiperbolička udaljenost bi težila ka ∞.
Ako posmatramo parove tačaka na istom međusobnom hiperboličkom rastojanju, euklidski gledano njihovo rastojanje je manje ukoliko se nalaze bliže apsoluti.

Teorema 3.2.7 *Neka su z_1 i z_2 koordinate h-tačaka A i B. Tada je*

$$d_h(A,B) = 2\tanh^{-1}|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}|$$

Dokaz ove Teoreme se može pročitati u literaturi [2, strana 83].

Navešćemo neka svojstva koja očekujemo da ima funkcija rastojanja u hiperboličkoj ravni, definisana na ovaj način:

1. $d_h(z_1, z_2) \geq 0$ za sve $z_1, z_2 \in C$, $\quad d_h(z_1, z_2) = 0$ akko $z_1 = z_2$
2. $d_h(z_1, z_1) = d_h(z_2, z_1)$, za sve $z_1, z_2 \in C$
3. $d_h(z_1, z_2) + d_h(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3)$, za sve $z_1, z_2, z_3 \in C$
4. $d_h(z_1, z_2) + d_h(z_2, z_3) = d_h(z_1, z_3)$, akko z_1, z_2 i z_3 pripadaju istoj pravoj
5. $d_h(z_1, z_2) = d_h(\overline{z_1}, \overline{z_2})$, za sve $z_1, z_2 \in C$
6. $d_h(z_1, z_2) = d_h(M(z_1), M(z_2))$, za sve $z_1, z_2 \in C$ i sve direktne hiperboličke transformacije M.

Prva četiri svojstva važe za funkciju rastojanja kako u hiperboličkoj, tako i u euklidskoj ravni, dok poslednja dva govore o rastojanju u hiperboličkoj ravni i govore o njenoj invarijantnosti pri dejstvu h-transformacija.
5. svojstvo govori o invarijantnosti funkcije rastojanja pri dejstvu h-refleksija (jer je i prečnik apsolute h-prava), dok 6. svojstvo govori o invarijatnosti u odnosu na direktne h-izometrije (koje nastaju kao kompozicija h-refleksija).

Dokaz da funkcija (4) ima navedena svojstva 1.-6. može se naći u literaturi [4, strana 367-371].

Neka je $\tilde{l}$ uopšteni krug ortogonalan na apsolutu. S obzirom da inverzija $\phi_{\tilde{l}}$ slika h-pravu u h-pravu i čuva h-raspored tačaka, direktno sledi i sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 3.2.5 *Neka je I h-izometrija, A i B dve h-tačke i $I(A) = A'$, $I(B) = B'$. Tada je $d_h(A, B) = d_h(A', B')$.*

Glava 4

Teselacije

4.1 Malo istorije

Govoreći jezikom koji nije strogo matematički, teselacija ravni je prekrivanje (popločavanje) različitih površi oblicima koji se ponavljaju bez međusobnog preklapanja i šupljina između njih. Geometrijski oblici koji se slažu zajedno i stvaraju raznovrsne šare i tako prekrivaju neke površi mogu se naći u svim zemljama sveta. Skoro da ne postoji narod koji nije koristio metode teselacije iz estetskih ili spiritualnih razloga. U različitim epohama korišćeni su različiti principi teselacije, različiti oblici i boje. Reč teselacija potiče od jonske verzije grčke reči tesseres što bi se prevelo kao četiri. Ako pogledamo i u nekim rečnicima, videćemo da tessellate znači popločati kvadratima kao kad se pravi mozaik. Prva popločavanja različitih površi jesu bila sa kvadratnim pločicama. U drevnoj Kini su prekrivali krovove svojih palata i hramova četvorougaonim pločicama različitih boja. Žuta se smatrala kraljevskom bojom, simbolizovala je sunce, i pločice te boje su bile rezervisane za krovove kraljevskih palata, a plave su simbolizovale nebo i koristile su se za prekrivanje krovova hramova. Na području današnjeg Irana, oko 3500. godina p.n.e., u preislamskom periodu, korišćene su pločice od uglačanog kamena i gline za pravljenje raznih šara i ornamenata. Arapi su kombinacijom jednostavnih i jednobojnih pločica stvarali složene geometrijske figure. Prvi matematičar koji se bavio slaganjem poligona bez međusobnog preklapanja i bez formiranja šupljina između njih i time postavio osnove za razvijanje ideja i principa teselacija, je Arhimed[1]. Spisi u kojima je on ovo izučavao nisu sačuvani, osim prepiske sa aleksandrijskim matematičarima u kojoj je o ovome bilo reči. Jedan od prvih

[1]starogrčki matematičar, fizičar i astronom živeo od 287. do 212. g.p.n.e

sačuvanih matematičkih radova o teselacijama je rad nemačkog matematičara i astronoma Keplera[2]. On je 1619. godine izvršio potpunu numeraciju uniformnih teselacija euklidske ravni. Naredna tri veka se ovim izučavanjem nije bavio niko i tek je Somervil[3] 1905. godine dokazao tačnost Keplerovog tvrđenja o postojanju tačno 11 uniformnih teselacija u euklidskoj ravni. Matematičaru Davidu Hilbertu[4] problem teselacija ravni se u početku činio neinteresantnim i trivijalnim. On se u svom delu iz 1900. godine bavio isključivo popločavanjem u prostorima sa tri i više dimenzija. Kasnije je jedan od Hilbertovih učenika detaljnije istraživao problem teselacija u ravni i Hilberta zainteresovao za problem traženja algoritma sa konačnim brojem koraka koji određuje da li određena grupa pločica može biti model koji se može koristiti za popločavanje cele ravni. Tad je Hilbert uvideo da je problem daleko od trivijalnog. Algoritam do danas nije napravljen, iako postoji osnovana sumnja da je algoritam moguće napisati.

Hiperboličke teselacije prikazane u raznim modelima hiperboličkog prostora, a posebno u Poenkareovom disk modelu, su i vizuelno privlačne. Prve slike teselacija u Poenkareovom disk modelu su se javile već krajem XIX veka. Prvi crtež teselacije hiperboličke ravni pojavio se u knjizi Feliksa Klajna[5] i Roberta Frikea[6], koja je izdata u Lajpcigu 1890. godine. Problematika teselacija hiperboličke ravni sa dve ili više vrsta poligona nije privlačila toliku pažnju pa su ređe slike takvih teselacija. Grafickim predstavljanjem teselacija uspešno se bavio holandski umetnik Moris Kornelis Ešer[7]. Ešer je uz teorijsku pomoć Koksetera[8] izradio neke od najpoznatijih slika i litografija koje su u osnovi teselacije hiperboličke ravni. Mnogi popularizatori nauke, poput Karla Sejgana[9], Stivena Hokinga[10] ili Rodžera Penrouza[11], koristili su upravo Ešerove ilustracije kako bi svojim čitaocima približili teško shvatljive naučne teorije.

[2]Johannes Kepler (1571 – 1630), nemački astronom, matematičar i astrolog

[3]Duncan MacLaren Young Sommerville(1879 - 1934), škotski matematičar

[4]David Hilbert (1862 - 1943), nemački matematičar

[5]Felix Klein, (1849 - 1925) nemački matematičar

[6]Karl Emanuel Robert Fricke,(1861 - 1930) nemacki matematičar

[7]Maurits Cornelis Escher(1898 - 1972), holandski umetnik i grafičar

[8]Harold Scott MacDonald Coxeter (1907 - 2003), kanadski matematičar

[9]Carl Edward Sagan(1934 - 1996), američki astronom i astrobiolog

[10]Stephen William Hawking(1942 - 2018), engleski teoretski fizičar, kosmolog, autor i direktor istraživanja u Centru za teorijsku kosmologiju na Univerzitetu u Kembridžu

[11]Roger Penrose, engleski matematičar, fizičar i filozof nauke, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku, rođen 1931. godine

4.2 Pojam teselacije ravni

Teselacije se mogu posmatrati u Euklidskoj (E^2), hiperboličkoj ravni (H^2) ili na sferi (S^2). Teselacija euklidske i hiperboličke ravni je beskonačna, odnosno postoji beskonačno mnogo poligona koji formiraju teselaciju, dok je teselacija sfere ograničena površinom te sfere. Teselacije sfere izlaze iz okvira ovog rada, tako da nadalje govorimo o teselacijama euklidske i hiperboličke ravni i obe ravni ćemo zvati ravan π. Glavna razlika u teselacijama ove dve ravni proizilazi iz toga što je zbir uglova u trouglu u euklidskoj geometriji stalan, a u hiperboličkoj nije, videćemo kasnije kako se to odražava na njihovo nastajanje i izgled. Teselacija τ ravni π se definiše na sledeći način:

Definicija 4.2.1 *Pod teselacijom ravni π podrazumevamo prebrojivu familiju $\tau = \{\tau_i, i \in N\}$ zatvorenih poligonskih površi τ_i. Svaka ivica nekog poligona τ_i ivica je samo još jednog poligona, svaka tačka ravni π pripada bar jednog poligonskoj površi i mera preseka bilo koja dva poligona τ_i, $i \neq j$ je nula. Svaki presek tri i više poligonskih površi sadrži najviše jednu tačku, koju nazivamo teme poligona. Poligone koje čine teselaciju nazivamo pljosnima. Ukoliko pljosni imaju zajedničku ivicu one se nazivaju susedne.*

Definicija 4.2.2 *Grupa svih izometrija ravni π koje preslikavaju τ na samu sebe, se zove grupa simetrija (ili simetrijska grupa) teselacije τ i označava se $Sym(\tau)$.*

Svaka izometrija iz grupe $Sym(\tau)$ preslikava temena, ivice i pljosni teselacije τ respektivno, na temena, ivice i pljosni te iste teselacije. Kako svaka ivica ima dva temena i pripada dvema pljosnima, sledi da za proizvoljne dve ivice postoje najviše četiri izometrije koje preslikavaju jednu ivicu na drugu. Slično, za svake dve pljosni postoji najviše konačno mnogo izometrija koje preslikavaju jednu pljosan na drugu, jer svaka pljosan ima konačan broj temena i ivica.

Definicija 4.2.3 *Teselacija tipa $p_1, p_2, ..., p_q$ ili drugačije $(p_1, p_2, ..., p_q)$ sastoji se iz poligona koji su ciklično poređani oko svakog temena i to redom: p_1-tougao, p_2-tougao,... i p_q-tougao gde je q broj poligona oko svakog temena. Menjanje redosleda navođenja poligona u istom cikličnom rasporedu ne određuje drugačiju teselaciju iako je pravilo da se navođenje započne od mnogougla sa najmanjim brojem uglova.*

Postoji više tipova teselacija. To su:

1. **Regularne (pravilne)** teselacije su sastavljene od istih pravilnih poligona. U euklidskoj ravni, postoje tačno 3 teselacije kod kojih su poligoni pravilni mnogougli: 6 pravilnih trouglova, 4 pravilna četvorougla i 3 pravilna šestougla u svakom temenu. U hiperboličkoj ravni ih ima beskonačno mnogo.

2. **Arhimedovske** teselacije su sastavljene od pravilnih mnogouglova koji ne moraju biti istog tipa, ali temena moraju biti istog tipa[12].

3. Teselacija je **uniformna (polupravilna)** ako je Arhimedovska i ako su joj simetrije tranzitivne u odnosu na temena teselacije.

Sve Arhimedovske teselacije euklidske ravni su i uniformne. U hiperboličkoj i sfernoj ravni postoji razlika između Arhimedovskih i uniformnih teselacija. Primer za to je teselacija (3,4,4,4) u sfernoj geometriji koja može biti Arhimedovska, ali i uniformna u zavisnosti od rasporeda trougla i četvorouglova.

Zaključujemo, ako je grupa $Sym(\tau)$ tranzitivna, odnosno ako za bilo koja dva temena te teselacije postoji transformacija iz $Sym(\tau)$ takva da preslikava jedno teme u drugo, onda je teselacija τ uniformna. Ako su svi mnogouglovi koji su elementi teselacije τ i podudarni, onda je ta teselacija regularna (pravilna).

Svakom pravilnom poliedru možemo pridružiti oznaku $\{p, q\}$ ili oznaku (p^q) gde p označava tip pravilnog poligona od kojeg se sastoji poliedar, a q predstavlja koliko je p-uglova oko svakog temena. Ovaj tip oznaka se naziva **Šlefijev simbol**[13]. Tako su $\{3,3\}$, $\{4,3\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$ i $\{5,3\}$ (odnosno (3^3), (4^3), (3^4), (3^5),(5^3)) redom Šlefijeve oznake za tetraedar, heksaedar, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar. Šlefijeve oznake se koriste i za označavanje teselacija, pa je oznaka za teselaciju kvadratima (po četiri oko svakog temena) $\{4,4\}$, trouglovima (njih je šest oko svakog temena) $\{3,6\}$ i šestouglovima $\{6,3\}$ (tri oko svakog temena teselacije).

4.3 Teselacije euklidske ravni

Uočimo jednu tačku euklidske ravni i regularnu teselaciju $\{p, q\}$. U skladu sa Šlefijevim simbolom, oko te tačke biće q pravilnih p-uglova. Unutrašnji ugao jednog

[12]Teme teselacije je tipa $(p_1, p_2, ..., p_q)$ ako su poligoni u tom temenu u cikličnom redosledu p_1-tougao, p_2-tougao,... i p_q-tougao gde je q broj poligona oko svakog temena.

[13]Ludwig Schläfli,(1814 – 1895) švajcarski matematičar

pravilnog p-ugla je

$$\alpha = \frac{(p-2)180^o}{p}$$

a važiće i

$$q \cdot \frac{(p-2)180^o}{p} = 360^o.$$

Možemo da zaključimo da je $\{p, q\}$ regularna teselacija u euklidskoj ravni ako važi da je $q \cdot (p-2) = 2p$ tj. $(q-2) \cdot (p-2) = 4$. Taj uslov se još može zapisati na sledeći način:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

odnosno

$$(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}.$$

Odavde možemo da zaključimo da postoje samo tri regularne teselacije euklidske ravni i to su popločavanja ravni jednakostraničnim trouglovima i to po šest oko svakog temena, popločavanje kvadratima, po njih četiri oko svakog temena i teselacija pravilnim šestouglovima po tri oko svakog temena. Kao što vidimo, u euklidskoj geometriji, kada pričamo o pravilnim teselacijama postoje samo tri vrednosti za p i q, ali nema ograničenja u veličini poligona. Kasnije ćemo videti kakva je situacija u hiperboličkoj geometriji. Važi i uopšteno tvrđenje:

Lema 4.3.1 *U euklidskoj ravni, teselacija $(p_1, p_2, ..., p_q)$ je uniformna samo ako važi da je:*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_q} = \frac{1}{2}.$$

Ako bismo posmatrali teselaciju euklidske ravni različitim pravilnim mnogouglovima, na primer, pravilnim trouglom, četvorouglom, petouglom i šestouglom, zbir uglova kod jednog temena bi bio $60^o + 90^o + 108^o + 120^o = 378^o > 360^o$ što znači da mora doći do preklapanja. Iz tog razloga broj različitih vrsta pravilnih mnogouglova ne može prelaziti tri.
Treba napomenuti da prethodna Lema 4.3.1. koja opisuje uslov postojanja uniformne teselacije euklidske ravni daje potreban, ali ne i dovoljan uslov. Naime, broj kombinacija koji se mogu dobiti jednačinom

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_q} = \frac{1}{2}$$

je zapravo dvadeset i jedan, ali postoji samo jedanaest uniformnih teselacija euklidske ravni. Ostalih deset kombinacija zaista daju mogućnost da ne bude praznina

oko temena teselacije kod nekih temena, ali kod tih naizgled teselacija nisu sva temena ista, pa ipak postoje praznine. Na primer, teselacija $(5,5,10)$ ispunjava uslov Leme 4.3.1. tj, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$ ali se ta teselacija sa dva pravilna petougla i jednim pravilnim desetouglom ne može proširiti na celu ravan i samim tim nemamo prekrivanje cele ravni bez šupljina i preklapanja. Isti problem se javlja i sa još devet kombinacija:$(3,3,4,12)$, $(3,4,3,12)$, $(3,3,6,6)$, $(3,4,4,6)$, $(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$, $(3,10,15)$ i $(4,5,20)$, te one nisu teselacije.
Uniformne teselacije euklidske ravni su: (3^6), (4^4), (6^3), $(3^4,6)$, $(3^3,4^2)$, $(3^2,4,3,4)$, $(3,4,6,4)$, $(3,6)^2$, $(3,12^2)$, $(4,6,12)$ i $(4,8^2)$. Teselacije $(3^6),(4^4),(6^3)$, su već poznate pravilne teselacije, naime, u jednom temenu je 6 trouglova, 4 kvadrata i 3 šestougla, te je izgled tih teselacija jasan, dok slike ostalih mogu da se nađu na sajtu: http://people.hws.edu/mitchell/tilings/Part1.html.

4.4 Teselacije hiperboličke ravni

Problematika teselacija hiperboličke ravni sa dve ili više vrsta poligona nije nikad privlačila toliku pažnju, pa su ređe slike takvih teselacija. Teselacija nastala od dve vrste pravilnih poligona naziva se **kvaziregularna teselacija**. Glavna tema mog rada su, svakako regularne teselacije, gde je jedna vrsta pravilnog mnogougla u igri, a takođe i isti broj njih oko svakog temena. Slike takvih teselacija Poenkareovog disk modela ću i prikazivati kroz rad. Takođe, neće biti isključena priča ni o unifornim teselacijama, koje su kroz teoriju veoma povezane sa pravilnim. Kada popločavamo hiperboličku ravan imamo više slobode nego što je imamo u ograničenom euklidskom svetu. Možemo ga obložiti jednakostraničnim trouglovima, četvorouglovima, petouglovima itd. I ne samo to, možemo to učiniti na beskonačno mnogo načina sa svakim od tih oblika. Uglovi su mnogo ograničeniji u euklidskom prostoru. Svi euklidski trouglovi imaju ukupan zbir ugova od 180^o, dok u hiperboličkom prostoru trouglovi mogu imati bilo koji zbir uglova manji od 180^o. U euklidskom svemiru, jednakostranični trouglovi imaju uglove od 60^o, pa je jedini način da se oni uklope u ravan konstrukcijom 6 oko jednog temena. S druge strane, u hiperboličkom prostoru, za popločavanje jednakostraničnim trouglovima može ih biti sedam, osam, pedeset, a nekad i beskonačno mnogo oko svakog temena.

Pre svega, potsetimo se definicije **pravilnog poligona**. Neka je zadata ciklična grupa $\mathcal{C}_p$[14] generisana rotacijom $\mathcal{R}$ i neka je A proizvoljna tačka koja nije invarijantna u toj rotaciji. Kako je $\mathcal{C}_p$ konačna grupa i skup slika tačke A u rotacijama iz te grupe biće konačan. Tačnije, ukupan broj slika tačke A biće jednak redu p grupe $\mathcal{C}_p$. Neka je

$$A_i = \mathcal{R}^i(A).$$

Kako je skup tačaka $A_1, A_2, ..., A_p = A$ konačan, njima će biti određen poligon $A_1A_2...A_p$ čija temena pripadaju nekom krugu sa centrom u tački O. Tačku O ćemo zvati **središte (centar)** pomenutog poligona. Tada je:

$$\mathcal{R}^i(A_1A_2...A_p) = A_{i+1}A_{i+2}...A_pA_1...A_i.$$

Budući da su $A_1, A_2, ..., A_p$ razne tačke, poluprave $OA_1, OA_2, ..., OA_p$ razlažu ravan kojoj pripadaju na p međusobno podudarnih uglova $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$. Obeležimo otvorene uglove AOA_1, AOA_2,..., $A_{p-1}OA_p$, redom, sa $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p$. Ako ugao ω_1 ima neprazan presek sa d uglova iz skupa $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p\}$, tada i svaki drugi ugao

$$\omega_i = \mathcal{R}^i(\omega_1), i \in \{1, 2, .., p\}$$

ima neprazan presek sa d uglova iz tog skupa, pa je ugao rotacije $\mathcal{R}$ tada $\frac{2d180^o}{p}$. Za $d = 1$ uglovi iz skupa $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p\}$ su istovetni sa uglovima iz skupa $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p\}$. Tada je poligonska površ $A_1A_2...A_p$ konveksna, pa poligon $A_1A_2...A_p$ nazivamo **pravilnim konveksnim poligonom**. Definicija pravilnog poligona je ista, kako u euklidskoj, tako i u hiperboličkoj ravni. U hiperboličkoj ravni se koristi h-rotacija.

Neka je $\{p, q\}$ regularna teselacija hiperboličke ravni. Nakon dokazane Teoreme 3.2.5 smo zaključili da će zbir unutrašnjih uglova pravilnog h-poligona hiperboličke ravni koji ima p stranica biti manji od $(p-2)180^o$, naime važiće:

$$\alpha < \frac{(p-2) \cdot 180^o}{p}.$$

Važi i

$$\frac{360^o}{q} < \frac{(p-2) \cdot 180^o}{p}$$

odakle sledi

$$2p < q(p-2)$$

[14]Grupa $(G, *)$ je ciklična ukoliko postoji jedan element a, takav da je $G =< a >= \{a^k | k \in Z\}$

odnosno

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

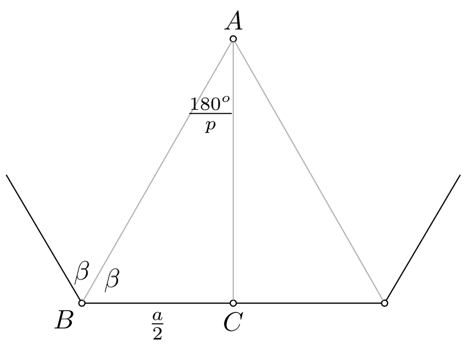
Možemo da zaključimo da u hiperboličkoj geometriji ima beskonačno mnogo regularnih teselacija, jer za svako p veće ili jednako 3, postoji broj q veći od 3, tako da je ispunjena nejednačina (5). Tačnije, postoji beskonačno mnogo parova p i q koji se mogu koristiti za izradu popločavanja pravilnim poligonima, ali u bilo kojoj od mogućih varijanti teselacije veličinu poligona jedinstveno određuju upravo p i q. Opštije, za uniformnu teselaciju će važiti:

Lema 4.4.1 *Teselacija* $(p_1, p_2, ..., p_q)$ *je uniformna teselacija hiperboličke ravni samo ako važi da je*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_q} < \frac{q-2}{2}.$$

Napomena 1.

Uvek je moguće konstruisati niz poligona oko jednog temena O u hiperboličkoj ravni ako poligoni zadovoljavaju Lemu 4.4.1. Pitanje je da li se popločavanje može proširiti tako da pokrije celu ravan, a da pri tom ne dolazi do preklapanja.
Kako znamo da li će i to biti moguće?
Pre svega, uočimo da kod pravilnog p-tougla hiperboličke ravni veličina ugla na stranici zavisi od dužine stranice. Neka je A centar pravilnog p-tougla, a centralni ugao mu je $\frac{360^o}{p}$. Neka je C podnožje normale iz A na ivicu, ivica je dužine a, i neka je B jedno teme te ivice. Tada je ABC pravougli trougao sa jednom katetom $\frac{a}{2}$ i naspramnim uglom $\frac{180^o}{p}$.



Slika 4.1:

Iz formula triginometrije hiperboličkih trouglova [1, strana 110.] znamo da za pravougli trougao ABC važi sledeć:

$$\cos\frac{180^o}{p} = \cosh\frac{a}{2}\sin\beta$$

dalje zaključujemo:

$$\beta = \arcsin\frac{\cos\frac{180^o}{p}}{\cosh\frac{a}{2}}$$

gde će ugao našeg p-tougla biti

$$2\beta = 2\arcsin\frac{\cos\frac{180^o}{p}}{\cosh\frac{a}{2}}.$$

Dalje, da bismo mogli da popločamo ravan oko neke proizvoljne tačke O hiperboličke ravni potrebno je i dovoljno da zbir uglova p_1-ougla, p_2-ougla,...p_q-ougla, koje ređamo oko tačke O, bude 360^o. Dakle, treba da važi:

$$\sum_{j=1}^{q}\arcsin\frac{\cos\frac{180^o}{p_j}}{\cosh\frac{a}{2}} = 180^o. \quad (6)$$

Sada, uočimo da će $\lim_{a\to\infty}$ leve strane jednakosti (6) imati vrednost 0, što je manje od 180^o, dok će $\lim_{a\to 0}$ imati vrednost veću od 180^o. Ako uzmemo u obzir neprekidnost funkcije, možemo da zaključimo da sigurno postoji konačan broj a, tako da za tu vrednost važi jednakost (6). Upravo za tu vrednost a postoji popločavanje oko tačke O.

Dakle, posmatramo pravilne poligone, p_1-ougao, p_2-ougao,..., p_q-ougao, čiji su centri tačke A_1, A_2,...A_q i stranice su im a (svi poligoni su pravilni i po dva su susedna, tako da su svima sve stranice dužine a).

Znamo da u svaki pravilni poligon možemo upisati krug koji dodiruje stranice u njihovim središtima. Kada spojimo centre susednih poligona, opisanih oko O, dobijamo q-tougao, a ugao izmedju ivica u A_j dobijenog q-tougla je $\frac{360^o}{p_j}$. Pri tom krug sa centrom u O i poluprečnikom $\frac{a}{2}$ dodiruje ivice ovog q-tougla (upravo u središtima stranica posmatranih p_i-ougla). Na kraju zaključujemo da se krug može upisati u ovako konstruisan q-tougao sa uglovima $\frac{360^o}{p_1}$, $\frac{360^o}{p_2}$,..., $\frac{360^o}{p_q}$.

Lema 4.4.2 *(Lema o paritetu) Neka je data uniformna teselacija ravni* $(p_1, p_2, ..., p_q)$ *i neka važi:*

1. *Neka je p neparno i neka se par susednih poligona $x.p$ pojavljuje u teselaciji samo kao deo sekvence $x.p.y$, tj. $p.x$ samo kao deo $y.p.x$, a par susednih*

poligona p.y samo kao deo sekvence x.p.y, odnosno y.p kao deo y.p.x. Onda je $x = y$.

2. *Neka je p neparno i neka se pojavljuje u zapisu teselacije samo kao deo uređene četvorke x.p.p.y, tj. y.p.p.x. Onda je* $x = p$ *ili* $y = p$.

Dokaz.
1. Neka su $A_1, \ldots, A_p$ temena jednog p-tougla u teselaciji koji je susedan jednom x-touglu, recimo tako što imaju zajedničku ivicu A_1A_2. Tada, prema prvom uslovu leme je A_2A_3 ujedno ivica jednog y-tougla. Slično, po drugom uslovu Leme, onda ivica A_3A_4 pripada nekom x-touglu. Dakle, susedni poligoni datom p-touglu su naizmenično x i y-tougli. Ukoliko bi bilo $x \neq y$ sledilo bi da p-tougao ima paran broj strana.
2. Neka je p-tougao $A_1...A_p$ deo date teselacije. S obzirom da se u teselaciji pojavljuje samo kao deo četvorke $x.p.p.y$ sledi da su mu u jednom njegovom temenu A_1 susedni jedan p-tougao, sa zajedničkom ivicom A_pA_1 i još jedan poligon sa x ili y strana. Neka je, bez umanjenja opštosti, to x-tougao. Dakle A_1A_2 je zajednička ivica p i x tougla. Tada je po uslovu Leme, poligon susedan $A_1A_2...A_p$ sa zajedničkom ivicom A_2A_3 neki p-tougao. Dakle, svaka druga ivica $A_1...A_p$ je incidentna sa nekim p-touglom, a ostale sa poligonima koje imaju x ili y strana. Ako bi bilo $x, y \neq p$ sledilo bi da je p paran broj.$\diamondsuit$

Lema 4.4.3 *(Lema o hiperboličkim trouglovima)Neka je dat trougao* $\triangle ABC$ *sa uglovima* $\frac{180^o}{p_1}$, $\frac{180^o}{p_2}$ *i* $\frac{180^o}{p_3}$ *redom kod temena A, B i C. Zbir uglova hiperboličkog trougla je manji od* 180^o *pa važi* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < 1$. *Ako refleksijom preslikamo ovaj trougao u odnosu na njegove stranice, a onda i novonastale trouglove, dobijamo jednu teselacije hiperboličke ravni.*

Detaljnije objašnjenje i dokaz ove Leme, pomoću teorija grupa, može se pročitati u doktorskoj disertaciji profesora Zorana Lučića ([9, strana 9-10]).
Važi i opštije tvrđenje:

Lema 4.4.4 *Svaki mnogougao sa uglovima* $\frac{180^o}{p_1}, \frac{180^o}{p_2}, \cdots, \frac{180^o}{p_q}$ *formira teselaciju* $(p_1, p_2, \cdots, p_q)$ *hiperboličke ravni refleksijom u odnosu na svoje ivice.*

Teorema 4.4.1 *Ako postoji pravilan ili nepravilan q-tougao takav da:*

1. *postoji teselacija ravni, korišćenjem samo ovog q-tougla, takva da se susedne pločice dobijaju refleksijom preko zajedničke ivice*

2. u taj q-tougao se može upisati krug,

onda postoji uniformna teselacija $(p_1, p_2, ..., p_q)$ *koja nastaje spajanjem centara tih q-tougla.*

Dokaz ove teoreme se može pročitati u literaturi [3, strana 12].

Lema 4.4.5 *Jedine mogućnosti za postojanje regularnih ili uniformnih teselacija* (p_1, p_2, p_3, p_4) *su one koje ispunjavaju uslov*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} < 1$$

i za koje važi neka od sledećih stavki:

1. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, *za* $p_1 \geq 5$,

2. *svaki od brojeva* p_1, p_2, p_3, p_4 *je paran,*

3. p_1 *je parno,* $p_1 = p_3$, p_2 *je neparno,*

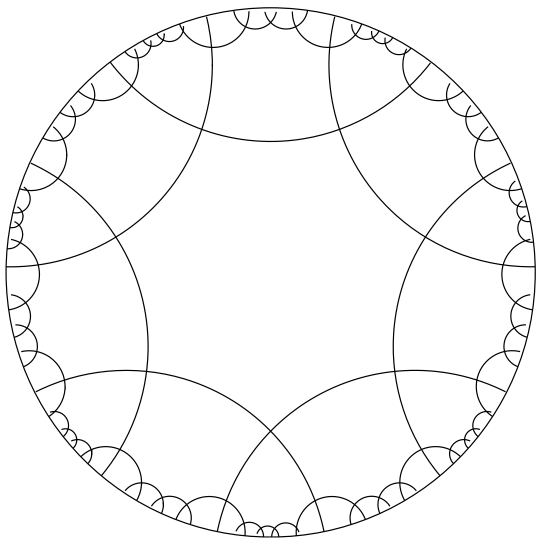
4. *svaki od brojeva* p_1, p_2, p_3, p_4 *je neparan, i važi da je* $p_1 = p_3$ *i* $p_2 = p_4$

5. $p_1 = p_2 = p_3$, $p_1 \neq p_4$, *gde je samo jedan od brojeva* p_1 *ili* p_4 *neparan.*

Dokaz. Najpre ćemo pokazati razloge zašto su navedene teselacije moguće u slučajevima gde je to poznato, a zatim ćemo pokazati zašto nema drugih uniformnih ili regularnih teselacija, tj. da su svi mogući slučajevi obuhvaćeni lemom.
1. Ovakva teselacija je regularna i oblika $\{p_1, p_1, p_1, p_1\}$, odnosno $\{p_1, 4\}$ pa iz nejednakosti (5) imamo, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, odakle sledi da je $p_1 > 4$.
2. Posmatrajmo hiperbolički četvorougao sa uglovima $\frac{360^o}{p_1}$, $\frac{360^o}{p_2}$, $\frac{360^o}{p_3}$ i $\frac{360^o}{p_4}$ u koji se može upisati krug (videti Napomenu 1). Pošto su p_1, p_2, p_3, p_4 parni, uglovi tog četvorougla su $\frac{180^o}{i}$, $\frac{180^o}{j}$, $\frac{180^o}{k}$, $\frac{180^o}{l}$, za neke cele brojeve i, j, k, l za koje važi da je $i = \frac{p_1}{2}$, $j = \frac{p_2}{2}$, $k = \frac{p_3}{2}$ i $l = \frac{p_4}{2}$. Prema uopštenju Leme o hiperboličkim trouglovima, Lema 4.4.4, refleksijom ovakvog četvorougla oko njegovih ivica dobijamo jedno popločavanje ravni. Na osnovu Teoreme 4.4.1. spajanjem centara upisanih kružnica tih četvorouglova nastaje tražena teselacija.
3. Iz uslova teoreme imamo da važi: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_4} < 1$. Razmotrićemo dva slučaja:
a) ako je $p_2 \neq p_4$ važi da je $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{2p_2} + \frac{1}{2p_4} < \frac{1}{2}$. Prema Lemi o hiperboličkim trouglovima, Lema 4.4.3, možemo uočiti hiperbolički trougao sa uglovima $\frac{180^o}{p_1}$,

$\frac{180^o}{2p_2}$ i $\frac{180^o}{2p_4}$. Popločavamo hiperboličku ravan trouglovima refeleksijom oko njegovih ivica. Dalje, uočimo deltoide koji se sastoje od dva takva trougla i imaju uglove $\frac{180^o}{p_1}$, $\frac{180^o}{p_2}$, $\frac{180^o}{p_1}$, $\frac{180^o}{p_4}$. Ponovo spajanjem centara upisanih kružnica tih četvorouglova nastaje tražena teselacija.
b) ako je i $p_2 = p_4$ dokaz je sličan, samo će četvorouglovi koji nastaju od dva takva trougla biti rombovi, ali svakako spajanjem centara njihovih upisanih kružnica dobijamo traženu teselaciju.
4. Videćemo u Teoremi 4.4.2., 4. slučaj.
5. Ako je p_4 neparan, odnosno jedan od brojeva je neparan, a tri su parna i jednaka, to je svodi na slučaj 3. Naglasimo da nije poznato da li postoji, i u kojim slučajevima, teselacija (p_1, p_2, p_3, p_4) ukoliko je p_4 parno, a preostali brojevi su jednaki i neparni. Zato ovu mogućnost ne možemo da odbacimo.
Dalje ćemo razmotriti da li smo obuhvatili sve mogućnosti. Dakle, teselacija koju posmatramo je (p_1, p_2, p_3, p_4). Slučaj kada su svi brojevi p_i parni smo razmotrili u 2. slučaju Leme. Posmatrajmo, dalje, slučajeve kada je bar jedan od brojeva p_i neparan (neka bude p_2, nije važno koji od brojeva, svakako se cikličnim permutovanjem zapisa može dovesti do toga da bilo koji od p_i bude neparan). Ukoliko je $p_2 \neq p_1, p_3, p_4$ sledi da možemo primeniti Lemu o paritetu (1) i da tada važi $p_1 = p_3$. Dakle, bar neka dva od četiri p_i se moraju poklapati. Postoje 4 mogućnosti za tako nešto:
1. ako su sva četiri jednaka, odnosno $p_2 = p_2 = p_2 = p_2$, to je razmotreno u 1. slučaju leme.
2. slučaj kada se neka tri poklapaju, a četvrti razlikuje od njih je razmatran u 5. slučaju leme.
3. kada su ista dva koja su susedna, tada postoji opcija da ta dva budu neparni, ali tada zbog Leme o paritetu, mora još jedan od preostala dva biti jednak njima, što smo pominjali u delu 5. leme. Drugi slučaj je da su dva koja se poklapaju parni brojevi $p_3 = p_4$. S obzirom da smo upravo videli da ne mogu biti dva ista neparna susedna broja, sledi da se preostala dva broja razlikuju. Tada se neparni p_2 pojavljuje samo u sekvenci $p_1.p_2.p_3$ pa je po Lemi o paritetu $p_1 = p_3$ tj. svodi se na slučaj koji je pomenut u Lemi.
4. kada se dva nesusedna poklapaju, i ako su parni, jedan od preostalih je neparan (zbog preduslova da je bar jedan od p_i neparan), četvrti može biti bilo kakav, a to je 3. slučaj leme. A ako su dva nesusedna koja se poklapaju neparni, nalaze se između preostala dva p_i, pa se ili još jednom pojavljuje ta vrednost ili se ne

pojavljuje, pa su preostale dve vrednosti međusobno jednake (po Lemi o paritetu). To je obuhvaćeno 3. slučajem Leme.$\diamondsuit$
Kako grafički predstavljam samo teslacije sa istim mnogouglovima u jednom temenu, interesantan nam je samo 1. slučaj navedene Leme. Ako želimo da imamo četiri mnogougla u jednom temenu, ti mnogouglovi moraju biti najmanje petouglovi, dalje mogu šestouglovi, sedmouglovi itd. Na Slici 4.2. prikazana je teselacija $\{7,4\}$, dakle u svakom temenu imamo po četiri sedmougla.



Slika 4.2: Teselacija $\{7,4\}$, odnosno $\{7,7,7,7\}$

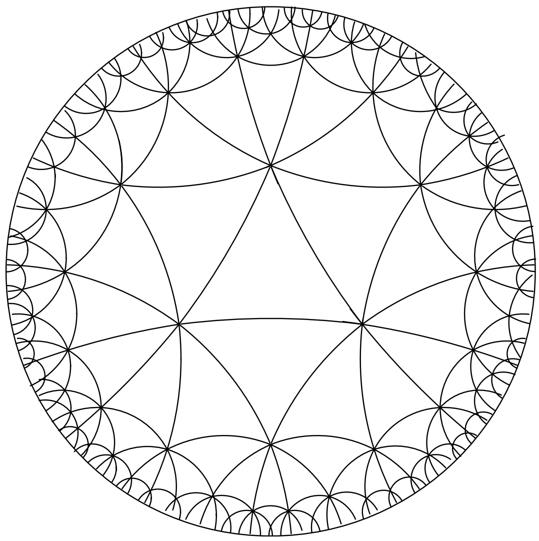
Lema 4.4.6 *Teselacije tipa (p_1, p_2, p_3) sastavljene od tri poligona oko jednog temena koje su regularne ili uniformne su:*

1. *regularne (p,p,p) odnosno $\{p,3\}$, gde je $p \geq 7$*
2. *diedarske teselacije*[15] *$(2p_1, 2p_1, p_2)$, gde je p_2 neparno i važi $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < \frac{1}{2}$*
3. *triedarske teselacije*[16] *$(2p_1, 2p_2, 2p_3)$, gde je $p_1 \neq p_2 \neq p_3$, i važi $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < 1$.*

Dakle, ako posmatramo regularne teselacije hiperboličke ravni i želimo po 3 poligona u svakom temenu, ti poligoni mogu biti najmanje sedmouglovi, zatim osmouglovi itd.

[15]teselacije nastale od dve vrste poligona
[16]teselacije nastale od tri vrste poligona

Ako bismo posmatrali teselaciju hiperboličke ravni trouglovima, iz nejednkaosti (5) moralo bi da važi
$\frac{1}{3} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, odnosno $\frac{1}{q} < \frac{1}{6}$, što znači da $q > 6$. Tačnije, moguće teselacije trouglovima su $\{3, 7\}, \{3, 8\}, \{3, 9\}, \cdots, \{3, \infty\}$. Jasno je da je broj teselacija trouglovima beskonačan. Na Slici 4.3. prikazana je teselacija $\{3, 8\}$.

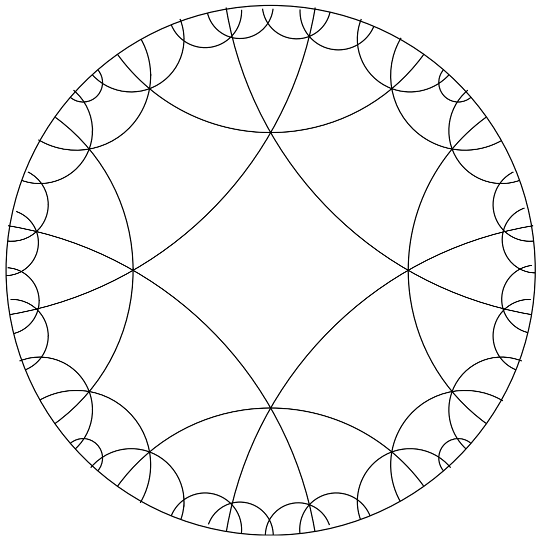


Slika 4.3: Teselacija $\{3, 8\}$

Dalje, ako bismo posmatrali teselaciju hiperboličke ravni četvorouglovima, tj. ako bi u nejednakosti (5) bilo $p = 4$ moralo bi da važi i $\frac{1}{4} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, odnosno $\frac{1}{q} < \frac{1}{4}$, što u stvari znači da je $q > 4$. Dakle, ako želimo teselaciju hiperboličke ravni četvorouglovima mora ih biti bar 5 oko svakog temena. Na Slici 4.4. je prikazana teselacija četvorouglovima gde ih ima 6 oko svakog temena, dakle $\{4, 6\}$.

Dualne teselacije

Za dve teselacije kažemo da su međusobno **dualne** ako postoji bijekcija koja preslikava težišta i temena poligona jedne teselacije u temena i težišta poligona druge teselacije. Odnosno, dualnu teselaciju regularne teselacije dobijamo kada spojimo centre svih poligona te teselacije. Jasno je da, ako se u jednom popločavanju u temenu sastaje p poligona, u njemu dualnom popločavanju će svaki poligon imati p stranica.
Svaka regularna teselacija ima svoj dual. Iz definicije sledi da je dual teselacije $\{p, q\}$ teselacija $\{q, p\}$. U euklidskoj ravni dual teselacije $\{3, 6\}$ je $\{6, 3\}$, dok je



Slika 4.4: Teselacija $\{4, 6\}$

teselacija $\{4, 4\}$ sama sebi dualna.
Kada govorimo o dualnim teselacijama hiperboličke ravni, ima ih beskonačno mnogo. Zapravo svakoj teselaciji $\{p, q\}$ dualna je teselacija $\{q, p\}$, dok su teselacije gde su p i q jednaki dualne same sebi. O postojanju dualnih teselacija govori i sledeća teorema.

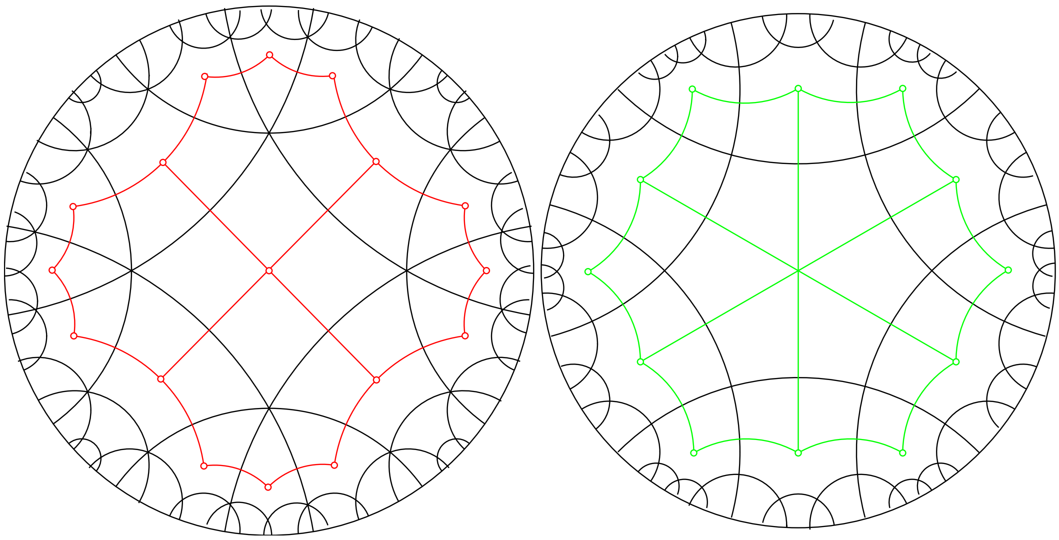
Teorema 4.4.2 *Ako postoji teselacija $\{p, q\}$ onda postoje i teselacije:*

1. $\{q, p\}$, *koje nazivamo dualne sa* $\{p, q\}$.
2. $(p, 2q, 2q)$ *i* $(2p, 2p, q)$.
3. $(4, p, 4, q)$.
4. (p, q, p, q).
5. $(4, 2p, 2q)$.
6. $(3, 3, p, 3, q)$.
7. $(3, p, 3, p, 3, \frac{q}{2})$ *za parno* q *i veće od 6.*

Dokaz.
1. Ovo proizilazi iz same definicije dualnih teselacija.
2. Polazimo od teselacije $\{p, q\}$. Podelimo svaki od p_i-touglova na i podudarnih

jedakokrakih trouglova spajanjem centra poligona sa njegovim temenima. Ovako dobijamo teselaciju sačinjenu od trouglova. Uglovi pri vrhu trouglova su $\frac{360^o}{p}$, a uglovi na osnovicama $\frac{180^o}{q}$, odnosno $\frac{360^o}{2q}$. Dakle, dobijamo tražene teselacije. Slično možemo dokazati postojanje teselacije $(2p, 2p, q)$ tako što pođemo od dualne teselacije datoj teselaciji tj. od teselacije $\{q, p\}$ i podelimo mnogouglove na trouglove kao u prethodnom slučaju. Tada dobijamo trouglove čiji su uglovi na vrhu $\frac{360^o}{q}$, a uglovi na osnovicama $\frac{360^o}{2p}$, a to je teselacija $(2p, 2p, q)$.
3. Ako preklopimo početnu i njenu dualnu teselaciju, dobijamo teselaciju sastavljenu od četvorouglova sa uglovima od 90^o, $\frac{180^o}{2p}$, 90^o i $\frac{180^o}{2q}$, a to je tražena teselacija.
4. Teselacija $\{p, q\}$ je pravilna, te sigurno postoje centri p-gona od kojih je ona sačinjena. Konstruišimo novu teselaciju rombovima čije su stranice duži koje spajaju centre i temena poligona teselacije $\{p, q\}$. Susedni rombovi su simetrični u odnosu na zajedničku stranicu. Pošto su uglovi rombova naizmenično $\frac{360^o}{p}$ i $\frac{360^o}{q}$, dobijamo teselacije (p, q, p, q).
5. Podelimo svaki p-tougao date teselacije na $2p$ tako što ćemo povezati centar upisane kružnice sa temenima poligona. Očigledno su svi susedni trouglovi simetrični u odnosu na njihovu zajedničku ivicu. Koristeći refleksije u odnosu na ivice početne teselacije dobijamo uglove trougla 90^o,$\frac{180^o}{p}$ i $\frac{180^o}{q}$ i to čini teselaciju $(4, 2p, 2q)$.
6. Počinjemo od teselacije hiperboličke ravni oblika $\{p, q\}$. Uočimo jedno teme te teselacije, na primer neku tačku A i nepravilni petougao čije je jedno teme A, ugao kod A iznosi $\frac{360^o}{q}$, drugo teme O je centar odgovarajućeg p-ugla te teselacije i ugao kod tog temena je $\frac{360^o}{p}$. Treće teme X petougla nalazimo tako da je ugao kod njega 120^o, a ostala dva u rotaciji temena X za $\frac{360^o}{q}$ sa centrom rotacije u A i u rotaciji temena X za ugao -$\frac{360^o}{p}$ sa centrom rotacije u O. Uglovi kod ta dva temena iznose po $\frac{360^o}{3}$. Ako ovo uradimo sa svim temenima teselacije, dobijamo teselaciju nepravilnim petouglovima. Oni se ne reflektuju jedan na drugi preko zajedničke ivice, već se dobijaju rotacijama prvo za ugao od $\frac{360^o}{q}$ sa centrom rotacije u tački koja je centar odgovarajućeg p-tougla početne teselacije, zatim rotacijom za ugao $\frac{2p}{q}$ oko temena prvobitne $\{p, q\}$ teselacije. Na ovaj način zadovoljavaju se uslovi Teoreme 4.4.1. i spajanjem centara ovih petouglova nastaje teselacija $(3, 3, p, 3, q)$
7. Slično kao i u prethodnim slučajevima, počinjemo od teselacije hiperboličke ravni oblika $\{p, q\}$. Uočavamo nepravilni šestougao čije jedno teme A pripada početnoj teselaciji, drugo teme B je na ivici odgovarajuće pločice, treće teme O je centar polazne pločice, četvrto teme B' je rotacija temena B za ugao $\frac{360^o}{p}$ oko tačke

O. Ostala dva temena se dobijaju pri refleksiji tačaka O i A u odnosu na pravu koja sadrži B i B'. Ako na ovaj način uradimo i sa ostalim temenima polazne teselacije, dobićemo popločavanje hiperboličke ravni nepravilnim šestouglovima. Njihove simetrije se sastoje od rotacije za ugao $\frac{360^o}{p}$ oko centra polazne pločice i refleksije u odnosu na ivice polazne pločice. Centri ovih šestouglova formiraju traženu teselaciju. $\diamondsuit$

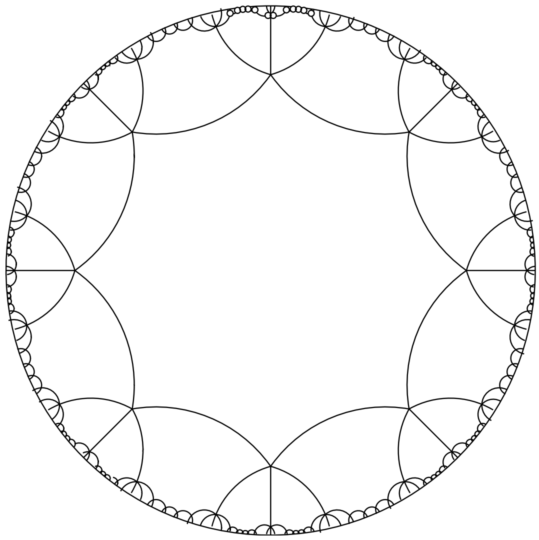


Slika 4.5: Dualne teselacije $\{4, 6\}$ i $\{6, 4\}$

Teorema 4.4.2. govori o postojanju nekih teselacija, što ću ilustrovati narednim tabelama, za neke vrednosti p i q, dok su na Slikama 4.6. i 4.7. prikazane još neke od njih:

Euklidska geometrija			
Regularna teselacija	(3,6)	(4,4)	(6,3)
Dualna teselacija	(6,3)	(4,4)	(3,6)
(p, 2q, 2q)	(3,12,12)	(4, 8, 8)	(6,6,6)
(4, 2p, 2q)	(4,6,12)		(4,12,6)
(p, q, p, q)	(3, 6, 3, 6)	(4, 4, 4, 4)	(6, 3, 6, 3)
(4, p, 4, q)	(4, 3, 4, 6)		(4, 6, 4, 3)
(3, 3, p, 3, q)	(3, 3, 3, 3, 6)	(3, 3, 4, 3, 4)	(3, 3, 6, 3, 6)
(3, p, 3, p, 3, $\frac{q}{2}$)	(3,3,3,3,3,3)		

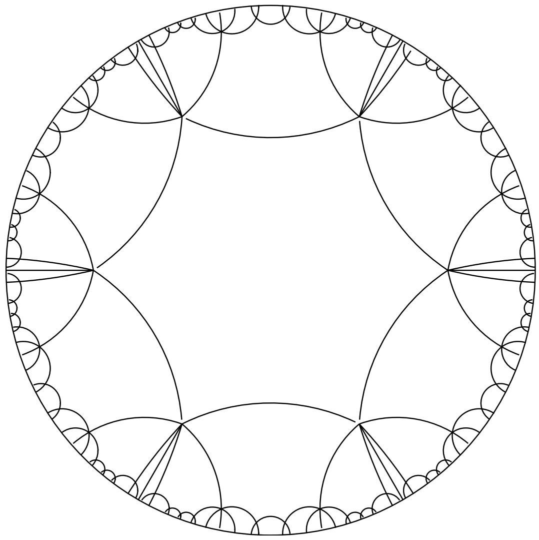
Hiperbolička geometrija			
Regular. tesel.	(7, 6)	(4, 6)	(5, 8)
Dual.tesel.	(6, 7)	(6, 4)	(8, 5)
(p, 2q, 2q)	(7,12,12)	(4,12,12)	(5, 16, 16)
(4, 2p, 2q)	(4, 14, 12)	(4, 8, 12)	(4, 10, 16)
(p, q, p, q)	(7, 6, 7, 6)	(4, 6, 4, 6)	(5, 8, 5, 8)
(4, p, 4, q)	(4, 7, 4, 6)	(4, 4, 4, 6)	(4, 5, 4, 8)
(3, 3, p, 3, q)	(3, 3, 7, 3, 6)	(3, 3, 4, 3, 6)	(3, 3, 5, 3, 8)
(3, p, 3, p, 3, $\frac{q}{2}$)	(3, 7, 3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 4, 3, 3)	(3, 5, 3, 5, 3, 4)



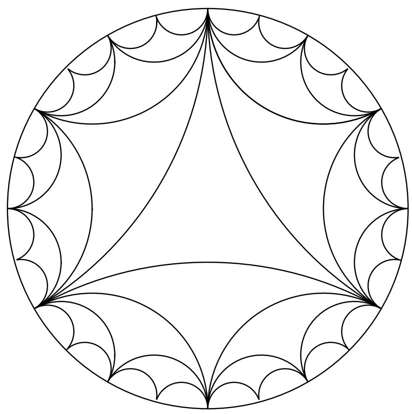
Slika 4.6: Teselacija $\{8, 5\}$

Idealne teselacije

Idealnim teselacijama hiperboličke ravni zovemo one teselacije kod kojih temena svih mnogouglova leže na granici Poenkareovog diska, odnosno beskonačno joj se približavaju. Svi poligoni u nekoj idealnoj teselaciji su zapravo idealni poligoni, te takve teselacije nemaju Šlefijev simbol. Međutim, one se uklapaju u šemu regularnih teselacija sa neobičnom osobinom da se beskonačno mnogo idealnih poligona susreće u idealnom vrhu. Takve teselacije ćemo označavati sa $\{p, \infty\}$. Na Slici 4.8. je prikazana idealna teselacija trouglovima, odnosno, teselacija $\{3, \infty\}$.



Slika 4.7: Teselacija $\{6, 7\}$

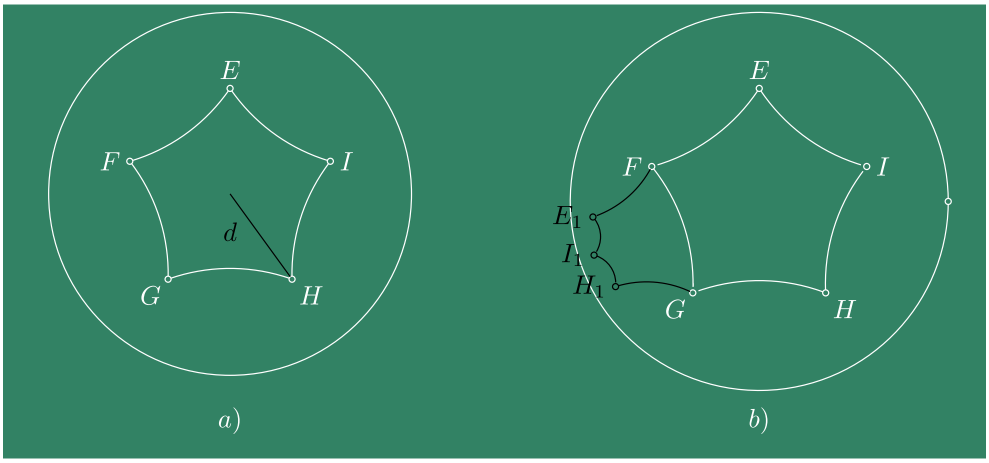


Slika 4.8: Teselacija $\{3, \infty\}$

Opis konstrukcije teselacija

Teselacije se u hiperboličkoj i euklidskoj geometriji mogu formirati uz pomoć tri izometrijske transformacije: rotacije, translacije i refleksija. Ja ću, koristeći Lemu 4.4.4 i činjenicu da se u ovom radu, prvenstveno bavimo pravilnim teselacijama, za konstrukciju teselacija u GCLC-u, koristiti refleksije. Tačnije, regularna teselacija hiperboličke ravni nastaje kada sva temena jednog poligona preslikavamo h-refleksijama u odnosu na njegove ivice. Na taj način se „približavamo" apsoluti i popločavamo hiperboličku ravan. Sada je jasno kako se neka teselacija hiperboličke ravni „razvija", ali pitanje je odakle da krenemo, tj. kako da nacrtamo

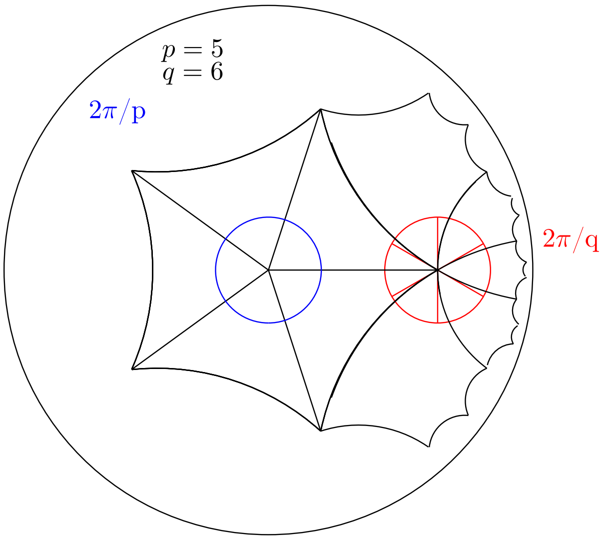
prvi poligon koji ćemo dalje inverzijom u odnosu na njegove ivice preslikavati i na taj način „popunjavati” Poenkareov disk model.
Neka je $\{p, q\}$ jedna regularna teselacija. Kao što smo već pomenuli, u euklidskoj geometriji postoje samo tri mogućnosti kada su u pitanju vrednosti p i q, ali nema ograničenja u veličini poligona. U hiperboličkoj geometriji postoji beskonačno mnogo parova p i q koji se mogu koristiti u izradi regularnih teselacija, ali u svakoj od tih teselacija veličina poligona je jedinstveno određena sa p i q. Postoji samo jedna hiperbolička veličina. Pri konstrukciji, prvo teme poligona možemo proizvoljno da izaberemo, ali kada to učinimo, sledeće teme tog poligona se može kretati samo duž uopštenog kruga. Za date p i q najlakše je razmotriti slučaj kada je centar jednog poligona zapravo centar apsolute. Neka je d euklidska udaljenost između centra poligona i njegovih temena (Slika 4.9.a), a računaćemo ga na sledeći način:



Slika 4.9: Opis konstrukcije teselacije Poenkareovog disk modela

$$d = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$

Pomoću navedene formule za d, lako računamo tu dužinu, tj. lako možemo da konstruišemo bilo koji pravilni mnogougao čiji će centar biti centar apsolute. Da bismo ovu formulu bolje razumeli, pokazaćemo na primeru kako su brojevi p i q povezani sa uglovima poligona. Na Slici 4.10. vidimo koje uglove određuju brojevi p i q, tj. neka su na primer $p = 5$, a $q = 6$. Radi lakšeg izvođenja formula centar apsolute, tačku O smeštamo u koordinatni početak i neka je naša apsoluta jedinični krug. Dalje, na Slici 4.11. možemo da vidimo da je α polovina „crvenog ugla”, a



Slika 4.10:

ugao β polovina „plavog ugla”. Tačke A i B su temena našeg petougla (pripadaju jednoj h-pravoj, pa i uopštenom krugu koji određuje tu h-pravu), a tačke A' i B' biće njihove slike inverzijom u odnosu na apsolutu (znamo na osnovu Tvrđenja 2.2.2 da i tačke A' i B', takođe pripadaju istom uopštenom krugu). Dalje, tačka A ima koordinate $A = (d, 0)$, dok tačka A' ima koordinate $A' = (\frac{1}{d}, 0)$, što je poznato jer mora važiti da je $OA \cdot OA' = r^2 = 1$. Neka je tačka P središte duži AA', odnosno, rastojanje OP je jednako $OP = \frac{d+\frac{1}{d}}{2}$. Kako je $AP = OP - OA$, duž AP je jednaka $AP = \frac{d+\frac{1}{d}}{2} - d$. Sada posmatramo $\triangle OPM$ i $\triangle APM$, iz kojih ćemo izraziti visinu h pomoću uglova β i γ. Biće:

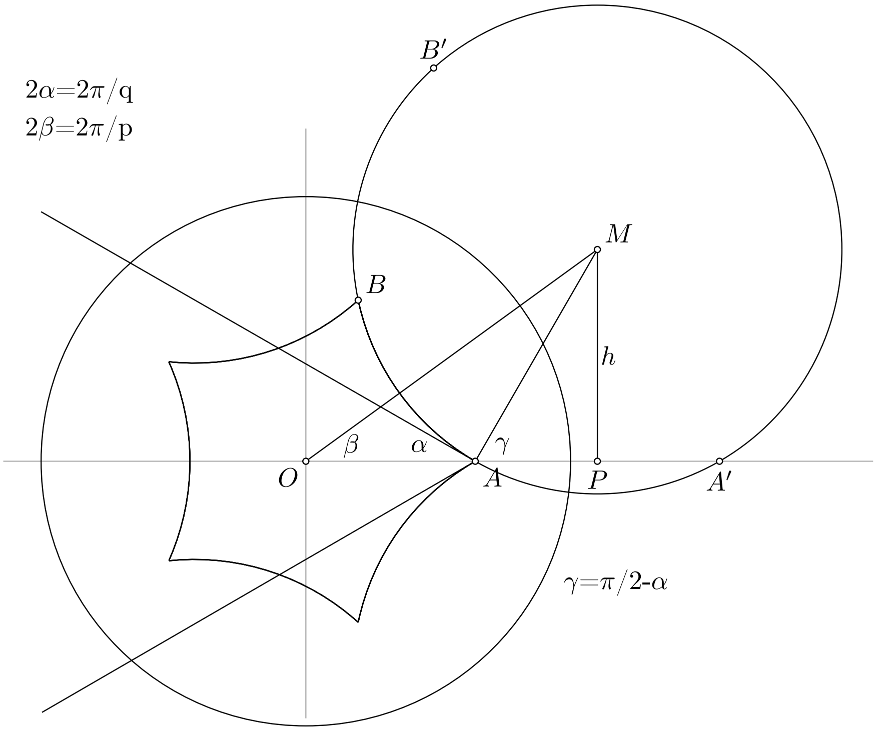
$$h = \tan\beta \cdot (\frac{d+\frac{1}{d}}{2}),$$

$$h = \tan\gamma \cdot (\frac{d+\frac{1}{d}}{2} - d).$$

Izjednačavanjem ove dve jednakosti, posle kratkog sređivanja, dobijamo traženu formulu za računanje dužine duži d.

Kao što sam već napomenula, ostatak popločavanja vršimo tako što mnogougao, dalje, preslikavamo h-refleksijom u odnosu na njegove ivice (Slika 4.9.b). Na osnovu Tvrđenja 2.1.4 tačke F i G su fiksne, dok se tačke E, I, H slikaju redom u tačke E_1, I_1, H_1.

Sledeća Teorema i njena Posledica su od velikog značaja u konstrukciji teselacija



Slika 4.11:

hiperboličke ravni, a govore o podudarnosti. Navodim ih bez dokaza, a dokazi se mogu pročitati u literaturi [8, 243-244 strana]:

Teorema 4.4.3 *Dva trougla hiperboličke ravni su podudarna ako i samo ako su im odgovarajući uglovi međusobno podudarni.*

Posledica 4.4.1 *U hiperboličkoj geometriji svaka sličnost je podudarnost.*

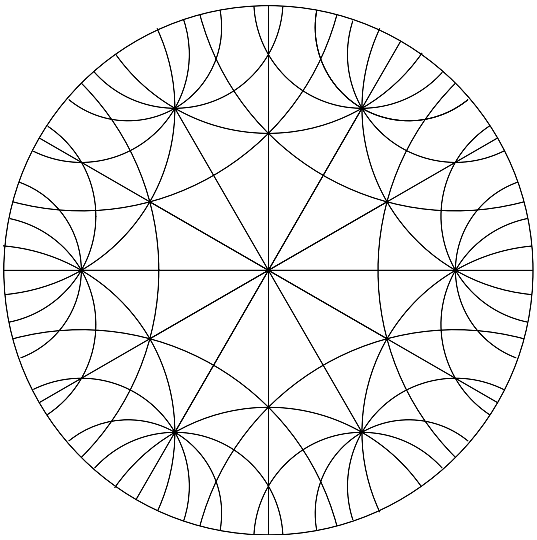
Kako smo već govorili o tome da je inverzija konformno preslikavanje, tj. da se „uglovi čuvaju" pri preslikavanju, sada je jasno da su figure preslikane inverzijom podudarne sa svojim slikama, što u slučaju regularnih teselacija znači da su svi pravilni poligoni koji popločavaju Poenkareov disk model hiperboličke ravni međusobno podudarni.

Ešerove teselacije

Jedan od najznamenitijih umetnika koji se bavio teselacijama svakako je bio već pomenuti Moris Ešer, holandski grafičar koji je pravio matematički nadahnute umetničke radove. Uprkos širokom interesovanju javnosti, Ešer je dugo bio zapostavljen, čak i u svojoj rodnoj Holandiji. Pre održavanja retrospektivne izložbe imao je 70 godina. Krajem 20. veka postao je šire cenjen, a u 21. veku proslavljen je na izložbama širom sveta. Njegov rad sadrži matematičke objekte i operacije, uključujući nemoguće objekte, istraživanja beskonačnosti, odraz, simetriju, perspektivu, krnje i zvezdaste poliedre, hiperboličku geometriju i teselacije. Iako je Ešer verovao da nema matematičke sposobnosti, uspešno je komunicirao sa matematičarima, a takođe i sproveo sopstveno istraživanje o teselacijama. Činjenica da je Ešerov rad matematički je i prouzrokovala nedostatak poštovanja s kojim su ga gledali u svetu umetnosti. Poštuju se njegovi originalnost i majstorstvo grafičkih tehnika, ali za njegova dela se smatra da su previše intelektualna i nedovoljno lirska.
1954. godine je održan Međunarodni kongres matematičara, gde je za učesnike organizovano prikazivanje Ešerovih radova u muzeju Stedelijk u Amstardamu. Ešerovi radovi su poseban utisak ostavili na Koksetera[17], koji je bio impresioniran njegovim intuitivnim poimanjem matematike. Kokseter je 1957. godine dobio Ešerovu dozvolu da koristi dva njegova crteža u svom radu „Kristalna simetrija i njene realizacije". Poslao mu je kopiju rada. Rad je sadržao obrazac hiperboličkog trougla prikazan na Slici 4.12., a Ešer je zabeležio da ga je Kokseterova hiperbolička teselacija prilično zainteresovala.

Beskonačno pravilno ponavljanje mnogouglova u hiperboličkoj ravni, upravo je ono što je moglo da mu omogući predstavljanje beskonačnosti na papiru. Nakon toga, Ešer se posebno zainteresovao da nacrta grafiku unutar kruga u kojoj se jedan motiv ponavlja, a udaljavanjem od centra kruga taj motiv postaje sve manji i manji. Ešer je počeo da istražuje svojsta i mogućnosti teselacija koristeći geometrijske mreže kao osnovu za svoje skice. Zatim ih je proširivao tako da formira složene međusobno povezane projekte, na primer sa životinjama poput ptica, riba i gmizavaca, tako da motivi zadržavaju isti oblik dok se približavaju graničnom krugu. Iz tog razloga njegovi radovi su dobili ime „Granični krug".
Usledila je saradnja u kojoj je matematičar umetniku davao savete kako da una-

[17]Harold Scott MacDonald Coxeter(1907 - 2003), britanski, a kasnije i kanadski matematičar



Slika 4.12: Teselacija na osnovu koje je Kokseter davao uputstva Ešeru

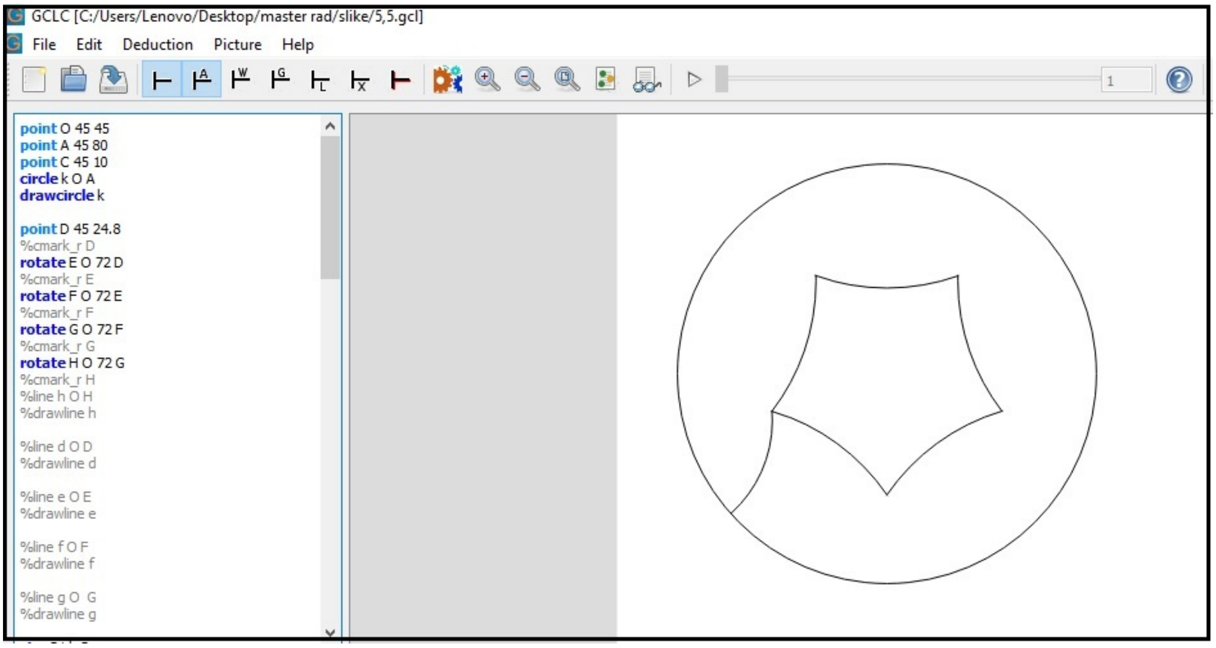
predi svoj rad. Uputio ga je na knjige i članke u vezi sa tom problematikom i iako Ešer, po sopstvenom priznanju, nije razumeo matematički deo tekstova, upravo ta nova saznanja su mu otkrivala metode kako da izradi sopstvene crteže. Ešer je istrajao sa hiperboličkim popločavanjem koje je nazvao Koksetering.
Pravilnost, boje, lepota oblika i sklad koji se iskazuju kroz ova Ešerova dela izazivaju divljenje i kod ljudi koji nemaju široko matematičko znanje. Danas je rad Morisa Ešera izuzetno cenjen, a u većini dela se krije upravo matematika i lepota teselacija. Na narednim slikama prikazani su neki od Ešerovih poznatijih crteža.

Slika 4.13: „Granični krug III" i „Granični krug IV"

Glava 5

Alat GCLC

GCLC (od "Geometry Constructions → LATEX converter") je alat za vizualizaciju geometrije i izradu matematičkih ilustracija. Njegova osnovna svrha je pretvaranje opisa matematičkih objekata (napisanih na gcl jeziku) u digitalne figure. GCLC pruža jednostavnu podršku za mnoge geometrijske konstrukcije, izometrijske transformacije, konike i parametarske krive. Ove digitalne figure mogu biti prikazane u Latex-u ili nekom drugom formatu. Značajna karakteristika GCLC-a jeste i činjenica da se određene konstrukcije mogu napraviti tako da budu dinamičke. Tako se omogućava promena (pomeranje) polaznih objekata čime se, onome ko prezentuje, pruža mogućnost interaktivnog prikaza određenih situacija u geometriji. Do nedavno nepoznat program za mene, ali veoma jednostavan za korišćenje, te veoma brzo i lako savladan. Kako je važna karakteristika ovog rada bila samostalna izrada ilustacija teselacija hiperboličke ravni, korišćenje ovog programa mi je dosta olakšalo posao.
Alat GCLC zajedno sa detaljnim uputstvom za korišćenje se može besplatno preuzeti na sajtu profesora Predraga Janičića, koji je ujedno i autor alata. Sajt je www.matf.bg.ac.rs/janicic/gclc.



Slika 5.1: Izgled programa GCLC u toku konstrukcije regularne teselacije petouglovima

```
%zadajemo kookrdinate centra O apsolute
k i koordinate jedne tačke na njemu, kako
bismo nacrtali krug k
point O 45 45
point A 45 80
point C 45 10
circle k O A
%crtamo krug k
drawcircle k

%pomoću rotacija crtamo petougao čiji je
centar zapravo centar našeg kruga k
point D 45 24.8
%cmark_r D
rotate E O 72 D
%cmark_r E
rotate F O 72 E
%cmark_r F
rotate G O 72 F
%cmark_r G
rotate H O 72 G
%cmark_r H

%line h O H
%drawline h

%line d O D
%drawline d

%line e O E
%drawline e

%line f O F
%drawline f

%line g O G
%drawline g

sim G1 k G
```

```
%kada smo zadali temena
petougla, crtamo lukove koji
predstavljaju njegove stranice, a
ti lukovi su %delovi krugova
normalni na apsolutu, što
koristimo u konstrukciji
line l1 G G1
line l2 H G
midpoint S1 G G1
midpoint S2 H G


perp n1 S1 l1
perp n2 S2 l2
intersec N n1 n2
circle n N G
drawarc N H 39

sim F1 k F
%cmark_r F1

line l1 F F1
line l2 F E
midpoint S1 F F1
midpoint S2 F E
perp n1 S1 l1
perp n2 S2 l2
intersec N1 n1 n2
circle n11 N1 F
drawarc N1 E -39

line l1 G F
line l2 F F1
midpoint S1 G F
midpoint S2 F F1
perp n1 S1 l1
perp n2 S2 l2
intersec N2 n1 n2
circle n12 N2 F
drawarc N2 F -39
sim D1 k D
%cmark_r D1
```

Slika 5.2: GCLC, deo koda korišćen za konstrukciju regularne teselacije petouglovima

```
line l1 D1 D
line l2 D E
midpoint S1 D1 D
midpoint S2 D E
perp n1 S1 l1
perp n2 S2 l2
intersec N3 n1 n2
circle n3 N3 D
drawarc N3 E 39

line l1 D H
line l2 D D1
midpoint S1 D H
midpoint S2 D D1
perp n1 S1 l1
perp n2 S2 l2
intersec N4 n1 n2
circle n4 N4 D
drawarc N4 H -39
```

```
%početni petougao preslikavamo inverzijom u odnosu na jednu njegovu stranicu, gde spajajući nove tačke dobijamo novi petougao u teselaciji
sim F1 n4 F
%cmark_r F1

sim E1 n4 E
%cmark_r E2

sim G1 n4 G
%cmark_r G1

sim G2 k G1
%cmark_r G2

line l1 H G1
line l2 G2 G1
midpoint S1 H G1
midpoint S2 G2 G1
perp n1 S1 l1
perp n2 S2 l2
intersec M n1 n2
circle m M H
drawarc M H -52

%ovajpostupak ponavljamo i na taj način popločavamo Poenkareov disk model
```

Slika 5.3: GCLC, deo koda korišćen za konstrukciju regularne teselacije petouglovima

Bibliografija

[1] Abbott P.; B.A. ; Jackson C.S. ; M.A. ; Macaulay F.S. ; D. Sc. *The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry*, Longmane, green and CO., 1916.

[2] Antić M. *Odabrana poglavlja geometrije*, skripta, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu; http://poincare.matf.bg.ac.rs/ mira//files/skripte.pdf

[3] Barth A. *Tessellation: The Link Between Math and Art*, 2007

[4] Brannan D. A.; Esplen M. F.; Gray J. J. *Geometry*, The Open University, 2012.

[5] Cannon J. W.; Floyd W. J.; Kenyon R.; Parry W. R. *Hyperbolic geometry*, Flavors of Geometry, MSRI Publications , Volume 31, 1997.

[6] Dimitrijević M. *Izometrijske transformacije hiperboličkog prostora*, Master rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, 2019.

[7] Lopandić D. *Geometrija*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 2011.

[8] Lučić Z. *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Total design i Matematički fakultet, 1997.

[9] Lučić Z. *Uniformne teselacije hiperboličke ravni*, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1984.

[10] Milovanović A. *Poenkareov disk model*, Master rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, 2012.

[11] Tutić V. *Teselacije hiperboličke ravni*, Master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2012.

[12] www.matf.bg.ac.rs/janicic/gclc

[13] www.mathstat.slu.edu

[14] www.malinc.se

[15] www.people.hws.edu

[16] www.wikipedia.org

[17] http://people.hws.edu/mitchell/tilings/Part1.html