УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Бојана Вуковић

МЈУРХЕДОВА НЕЈЕДНАКОСТ

МАСТЕР РАД

Београд, април 2021.

Садржај

Увод

Једна од првих неједнакости са којом се ученици срећу током школовања је $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где су a, b ненегативни реални бројеви и назива се неједнакост између аритметичке и геометријске средине за две променљиве. Претпоставља се да су неједнакост користили још Питагорејци, а доказао ју је Еуклид. Често се појављује и у облику $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Последња неједнакост је еквивалентна са $(a-b)^2 \geqslant 0$, која је очигледна. Временом је дошло до разних уопштења, на пример кроз повећање степена или повећање броја променљивих. Рецимо, ако желимо одоздо да проценимо израз $2(a^2+b^2+c^2)$ за реалне a, b, c, коришћењем горњег резултата, једна могућност је применити добијену неједнакост на парове променљивих a, b, c. Добија се $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $b^2+c^2 \geqslant 2bc$, $c^2+a^2 \geqslant 2ac$, одакле се, сабирањем, добија $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$, односно $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ за произвољне $a, b, c \in \mathbb{R}$. Притом се једнакост достиже ако и само ако је $a=b=c$.

Друго могуће уопштење добијамо проценом одоздо израза $a^3+b^3+c^3$ за $a, b, c > 0$. Једна могућност је да из идентитета $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, применом претходне неједнакости, добијемо $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ за произвољне $a, b, c > 0$ (последње се обично назива неједнакошћу између аритметичке и геометријске средине за три променљиве). Друга могућност је да приметимо да из $(a-b)^2(a+b) \geqslant 0$ за $a, b > 0$, добијамо $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$, па сабирањем по паровима a, b, c, следи процена $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$. Обе добијене неједнакости дају процену израза $a^3+b^3+c^3$ одоздо, па се природно поставља питање која од ове две процене је боља и да ли одговор зависи од a, b, c. У овом случају одговор је лак, пошто из $a^2b+bc^2 \geqslant 2abc$, $b^2c+ca^2 \geqslant 2abc$ и $c^2a+ab^2 \geqslant 2abc$ (које су непосредне последице неједнакости добијене у првом пасусу), сабирањем добијамо $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geqslant 6abc$, за $a, b, c > 0$.

Након претходно добијеног се сама намећу питања да ли је оно што је десило у претходном пасусу случајно, да ли постоје већа уопштења, да ли се се могло лакше видети због чега се све што је урађено уклопило. Рецимо, расправа слична претходној се може развити по питању процене одоздо израза $a^4+b^4+c^4$ за $a, b, c > 0$. Сабирањем неједнакости $a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2$, $b^4+c^4 \geqslant 2b^2c^2$, $c^4+a^4 \geqslant 2c^2a^2$, које су последице неједнакости између аритметичке и геометријске средине за две променљиве, добијамо $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, а са друге стране сабирањем неједнакости $a^2b^2+b^2c^2 \geqslant 2ab^2c$, $b^2c^2+c^2a^2 \geqslant 2abc^2$, $c^2a^2+a^2b^2 \geqslant 2a^2bc$, које су такође последице неједнакости између аритметичке и геометријске средине за две променљиве, добијамо $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant ab^2c+abc^2+a^2bc$. Из добијеног видимо да су изрази $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ и $ab^2c+abc^2+a^2bc$ ограничења одоздо израза $a^4+b^4+c^4$ за $a, b, c > 0$, као и да је процена првонаведеним изразом прецизнија. Већ сад се може наслутити да ови резултати нису случајност и да имају бројна уопштења.

Главни део овог рада ће бити посвећен уопштењима неједнакости у којима учествују симетрични изрази у дискретној ситуацији. Такве неједнакости су прилично присутне у школском градиву, као и на домаћим и међународним такмичењима из математике за ученике основних и средњих школа, што је и дало један од мотива аутору овог текста да проучава ову материју. Наравно, постоје одговарајућа уопштења и у недискретној ситуацији (историјски гледано, Мјурхед, чије се име помиње у наслову овог рада, је већину својих резултата радио у циљу добијања одговарајућих процена интеграла), но како је жеља да рад буде приступачан средњошколцима, у већини случајева ћемо се задржати на дискретној ситуацији.

1. Конвексност функција реалне промењиве

Конвексност је важно геометријско својство, које има бројне примене и ван математике. Природно се повезује и са бројним неједнакостима, па ћемо у овом делу рада навести основна својства конвексних реалних функција реалне промењиве.

Основна својства конвексних функција

Нека је I неки од интервала, тј. скупова облика (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, где су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Дефиниција 1. Нека $f : I \to \mathbb{R}$.

(а) Функција f је **конвексна** ако за све $x, y \in I$ и свако $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(б) Функција f је **конкавна** ако за све $x, y \in I$ и свако $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Уколико у (а) за све $x, y \in I$ и свако $\lambda \in (0, 1)$ важи строга неједнакост, кажемо да је f **строго конвексна**. Уколико у (б) за све $x, y \in I$ и свако $\lambda \in (0, 1)$ важи строга неједнакост, кажемо да је f **строго конкавна**.

Ако је $x < y$, скуп $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ једнак је интервалу $[x, y]$, па ако две тачке припадају домену конвексне (конкавне) функције, онда и све тачке између њих припадају домену те функције. То је разлог што се такве функције дефинишу на интервалима.

Скуп у $\mathbb{R}^2$ је конвексан ако из припадности две тачке скупу, следи и да дуж која их спаја припада том скупу. Стога дефиниција конвексности одговара конвексности скупа $\{(x, y) \mid x \in I, y \geqslant f(x)\}$, односно скупу тачака „изнад” графика функције f. Слично, дефиниција конкавности одговара конвексности скупа $\{(x, y) \mid x \in I, y \leqslant f(x)\}$, односно скупу тачака „испод” графика функције f. Зато се у неким литературама уместо термина конвексност и конкавност користе, редом, конвексност на горе и конвексност на доле.

Пример 1. Ако је $f_1(x) = ax + b$ на $\mathbb{R}$ за неке $a, b \in \mathbb{R}$, важи $\lambda f_1(x) + (1 - \lambda)f_1(y) = \lambda(ax + b) + (1 - \lambda)(ay + b) = a(\lambda x + (1 - \lambda)y) + b = f_1(\lambda x + (1 - \lambda)y)$, па је f_1 и конвексна и конкавна (и линеарна функција је једина таква функција). Ако је $f_2(x) = |x|$ за $x \in \mathbb{R}$, онда је $f_2(\lambda x + (1 - \lambda)y) = |\lambda x + (1 - \lambda)y| \leqslant \lambda|x| + (1 - \lambda)|y| = \lambda f_2(x) + (1 - \lambda)f_2(y)$, па је функција f_2 конвексна. Ако је $f_3(x) = x^2$ за $x \in \mathbb{R}$, онда је $f_3(\lambda x + (1 - \lambda)y) = (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 = \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - \lambda(1 - \lambda)(x - y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 = \lambda f_3(x) + (1 - \lambda)f_3(y)$. Притом је $\lambda(1 - \lambda)(x - y)^2 \neq 0$ за $\lambda \in (0, 1)$, $x \neq y$, па је f_3 строго конвексна.

У наставку текста, између осталог, биће доказано да је функција $\sin x$ строго конкавна на $(0, \pi)$ (видети лему 5, коментар након те леме, као и пример 8). Међутим, функција $\sin x$ није конкавна на $\mathbb{R}$. Ово је веома честа ситуација и стога је један од главних корака приликом испитивања реалне функције реалне променљиве одређивање интервала на којима она конвексна или конкавна (уколико такви интервали постоје).

Наредна лема следи тривијално из дефиниције конвексности.

Лема 1. (а) Функција $f : I \to \mathbb{R}$ је конвексна ако и само ако је функција $-f$ конкавна.

(б) Ако су $f, g : I \to \mathbb{R}$ конвексне (конкавне) и $\alpha, \beta > 0$, онда је функција $\alpha f + \beta g$ конвексна (конкавна).

Пример 2. Функција $ax^2 + bx + c$ је конвексна ако је $a > 0$, а конкавна ако је $a < 0$. Заиста, на основу претходног примера, функција x^2 је конвексна, а $bx + c$ (линеарна функција) и конвексна и конкавна, па тврђење следи непосредно из претходне леме.

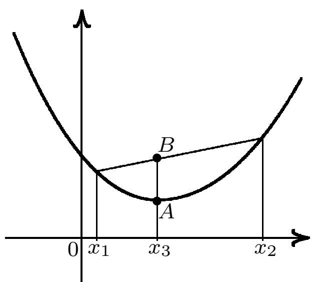
Лема 2. Ако је $f : (a, b) \to (c, d)$ конвексна функција и $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ конвексна растућа функција, онда је $g \circ f$ конвексна функција.

Доказ. Функција $g \circ f$ је добро дефинисана. Ако су $x, y \in (a, b)$ и $\lambda \in [0, 1]$, на основу конвексности функције f следи $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Следи $(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \leqslant \lambda(g \circ f)(x) + (1-\lambda)(g \circ f)(y)$, где прва неједнакост следи из раста, а друга из конвексности функције g. $\square$

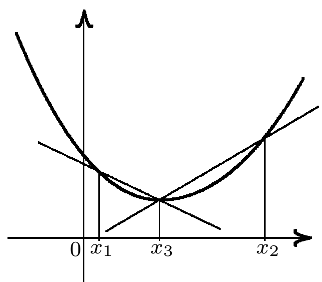
Пример 3. Ако је $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = x^2$, онда су f и g конвексне. Како је $(g \circ f)(0) = 1$ и $(g \circ f)(-1) = (g \circ f)(1) = 0$, следи $(g \circ f)\left(\frac{-1+1}{2}\right) > \frac{(g\circ f)(-1)+(g\circ f)(1)}{2}$, па претходна лема не важи без претпоставке о монотоности функције g.

Из дефиниције је јасно да је рестрикција на било који подинтервал интервала I конвексне функције такође конвексна, што доводи до најчешћег геометријског представљања реалне конвексне функције: „функција је конвексна ако се све тачке произвољне сечице налазе изнад одговарајућег дела графика функције” (видети слику 1). Прецизније, ако је x_3 тачка интервала $[x_1, x_2]$, онда за неко $\lambda \in [0, 1]$ важи $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, док су y-координате тачака A и B са ове слике једнаке, редом, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ и $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, па је, по дефиницији конвексности, y-координата тачке B не мања од y-координате тачке A. Слично тумачење постоји и за конкавне функције.

Права која спаја тачке $C(x_C, y_C)$ и $D(x_D, y_D)$, $x_C \neq x_D$, има коефицијент нагиба $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$. У наставку ћемо развити поступак којим ћемо моћи лакше да испитамо конвексност неке функције, као и њене особине. Први корак у том правцу је наредна лема, која, слободније говорећи, говори да нагиб сечице расте „што више идемо у десно” (слика 2).



Слика 1.



Слика 2.

Лема 3. Нека је $f : I \to \mathbb{R}$ конвексна функција.

(а) Ако су $x_1, x_2, x_3 \in I$ такве да је $x_1 < x_3 < x_2$, онда је

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

као и $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$ и $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$.

(б) Ако $c, d \in (a, b)$ и $[a, b] \subseteq I$, онда је $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \dfrac{f(d) - f(b)}{d - b}$.

Доказ. (а) Како $x_3 \in (x_1, x_2)$, важи $x_3 = \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1} \cdot x_1 + \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} \cdot x_2$ и притом је $\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1} \in (0, 1)$ и $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = 1 - \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$. Из конвексности функције f следи $f(x_3) \leqslant \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} \cdot f(x_2)$, одакле следи прва од наведених неједнакости. Друге две се добијају аналогно.

(б) На основу дела (а) следи $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leqslant \frac{f(b)-f(d)}{b-d}$. □

Аналогна лема важи и за конкавне функције (са обрнутим знаком неједнакости). Из дефиниције конвексности је јасно да су такве функције погодне за добијање разних неједнакости. Рецимо, тривијално следи да ако је $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, онда је $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}$ (и, аналогно, конкавна функција на $[a, b]$ достиже минимум у неком од крајева интервала). Међутим, постоје и многе нетривијалне неједнакости за такве функције. Једна од најважнијих за даље примене приказана је у наредној леми.

Лема 4 (Јенсенова неједнакост). Нека је $f : I \to \mathbb{R}$ конвексна функција, $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ такви да је $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Онда за све $x_1, \ldots, x_n \in I$ важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Доказ. Ако је $n = 2$, онда је $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, па је тврђење дефиниција конвексности.

Нека је тврђење тачно за неко n и нека су $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$. Ако је $\lambda_{n+1} = 0$, тврђење за $n+1$ се своди на тврђење за n. Иначе су $\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}$ и $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}$ ненегативни и важи $\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} = 1$, а тачка $\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot x_{n+1}$ припада интервалу чије су границе x_n и x_{n+1} (самим тим припада и I). Следи

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= f\big(\lambda_1 x_1 + \ldots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \cdot \tfrac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\big) \\
&\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\big(\tfrac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot x_n + \tfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot x_{n+1}\big) \\
&\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + (\lambda_n + \lambda_{n+1})\big(\tfrac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot f(x_n) + \tfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot f(x_{n+1})\big) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),
\end{aligned}$$

где је прва у низу неједнакости добијена на основу претпоставке, а друга на основу конвексности функције.

Следи да је тврђење тачно за $n + 1$ сабирака, па индукцијом следи тврђење теореме. □

Аналогно тврђење, са обрнутим знаком неједнакости, важи за конкавне функције. Оба тврђења се формално могу проширити за $n = 1$, онда су на обе стране неједнакости изрази $f(x)$ (тј. важи једнакост). Уколико је $n \geqslant 2$, $\lambda_i \in (0,1)$ за $i \in \{1,\dots,n\}$ и функција строго конвексна (конкавна), анализом доказа тврђења, следи да у случају достизања једнакости мора важити $x_1 = \ldots = x_n$. Наравно, уколико се дозволи да су неки од λ_i једнаки 0, једнакост тривијално важи ако су сви сем једног једнаки 0.

Пример 4. Како је функција $f(x) = x^2$ строго конвексна, применом Јенсенове неједнакости добија се да за произвољне $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$, такве да је $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, важи $(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)^2 \leqslant \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ и притом се једнакост достиже ако и само ако је $x_1 = \ldots = x_n$ или су сви λ_i, сем једног, једнаки 0. За n-торку $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ добија се $\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}$, односно класична неједнакост између аритметичке и квадратне средине (притом се једнакост достиже ако и само ако је $x_1 = \ldots = x_n$).

Пример 5. Ако су α, β, γ углови троугла, они припадају интервалу $(0, \pi)$ и важи $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Како је функција $\sin x$ строго конкавна на овом интервалу, из Јенсенове неједнакости (за $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$) следи да за углове троугла важи $\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Притом се једнакост достиже ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, односно ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Пример 6. Ако су $f, g : I \to \mathbb{R}$ конвексне функције, онда функција $h_1(x) = f(x)g(x)$ не мора бити конвексна, док је функција $h_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ конвексна. Заиста, функције $f(x) = -1$ и $g(x) = x^2$ су конвексне (обе дефинисане на $\mathbb{R}$), а $h_1(x) = f(x)g(x) = -x^2$ није. По питању функције h_2, како је $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leqslant \lambda h_2(x) + (1-\lambda)h_2(y)$ и $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \leqslant \lambda h_2(x) + (1-\lambda)h_2(y)$, следи $h_2(\lambda x + (1-\lambda)y) = \max\{f(\lambda x + (1-\lambda)y), g(\lambda x + (1-\lambda y))\} \leqslant \lambda h_2(x) + (1-\lambda)h_2(y)$, тј. и h_2 је конвексна.

Јенсен–конвексне функције

У претходном смо видели да испитивање конвексности по дефиницији може бити прилично непријатно. Један од покушаја да се тај проблем отклони је био да се услов конвексности замени слабијим условом, који ће на ужој класи функција обезбедити конвексност, а тиме, између осталог, могућност примене до сада добијених резултата.

Дефиниција 2. Функција $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ је Јенсен–конвексна (Јенсен–конкавна) ако за свако $x, y \in [a,b]$ важи

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \Big(f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}\Big).$$

Теорема 1. Ако је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Јенсен–конвексна (Јенсен–конкавна) и непрекидна, онда је и конвексна (конкавна).

Доказ. Доказаћемо део тврђења везан за конвексност (део за конкавност се доказује аналогно). Докажимо да за свако $k \geqslant 1$ и за све $x_1, \dots, x_{2^k}$ важи

$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_{2^k})}{2^k}$. За $k=1$ ово је дефиниција Јенсен–конвексности. Ако је тврђење тачно за неко k и $x_1,\ldots,x_{2^{k+1}} \in [a,b]$, следи

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}+\frac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^k}}{2^{k+1}}\right)}{2} \\ &\leqslant \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_{2^k})+f(x_{2^k+1})+\ldots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

па је тврђење доказано индукцијом.

Ако је $n \in \mathbb{N}$, постоји k тако да је $2^k \geqslant n$. Ако су $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$, $\tilde{x} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ и $x_{n+1} = \ldots = x_{2^k} = \tilde{x}$, заменом у претходно добијено тврђење следи $f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n+(2^k-n)\tilde{x}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)+(2^k-n)f(\tilde{x})}{2^k}$, одакле је $f(\tilde{x}) \leqslant \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$. Ако је $\lambda \in (0,1)$ и $\lambda = \frac{p}{q}$, за $p,q \in \mathbb{N}$, $(p,q)=1$ и ако је $x,y \in [a,b]$, заменом $x_1 = \ldots = x_p = x$ и $x_{p+1} = \ldots = x_q = y$ добија се $f\left(\frac{px+(q-p)y}{q}\right) \leqslant \frac{pf(x)+(q-p)f(y)}{q}$, односно $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ за све рационалне λ. Како је претходно тачно за све рационалне $\lambda \in (0,1)$, како је скуп тих рационалних бројева густ у $(0,1)$ и како је $f(x)$ непрекидна, следи да је испуњена претходна неједнакост за свако $\lambda \in (0,1)$, тј. да је функција $f(x)$ конвексна. □

Лема 5. Функција $\sin x$ је Јенсен–конкавна на $[0,\pi]$.

Доказ. Ако је $x,y \in [0,\pi]$, важи $\frac{x+y}{2} \in [0,\pi]$ и $\frac{x-y}{2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, па је $\sin\frac{x+y}{2} \geqslant 0$ и $0 \leqslant \cos\frac{x-y}{2} \leqslant 1$. Следи $\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leqslant 2\sin\frac{x+y}{2}$, тј. Јенсен–конкавност функције. Притом, једнакост важи ако и само ако је $\sin\frac{x+y}{2}=0$ или $\cos\frac{x-y}{2}=1$, што је при $x,y \in [0,\pi]$ еквивалентно са $x=y$, па је функција и строго Јенсен–конкавна. □

Како је функција $\sin x$ и непрекидна, на основу теореме 1 следи конкавност ове функције. Начин на који смо утврдили претходну чињеницу је прилично захтеван. Стога ћемо у наставку покушати да дођемо до једноставнијих метода за утврђивање конвексности (конкавности) функција.

Конвексност и диференцијабилност

У претходном делу рада видели смо да испитивање конвексности на основу дефиниције може бити веома захтевно. Рад са Јенсен–конвексним функцијама је само у некој мери олакшао то испитивање, али је оно остало, у општем случају, прилично напорно. У случају да је функција диференцијабилна (или два пута диференцијабилна), то испитивање може бити доста једноставније.

Теорема 2. Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна функција (где је $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$). Онда за свако $x \in (a,b)$ постоје $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ и важи $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. Такође, функције $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ су растуће на (a,b).

Доказ. Ако је $x \in (a,b)$ и $x_1,x_2 \in (a,b)$ такве да је $a < x_1 < x < x_2 < b$, на основу леме 3 важи $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$. Такође, на основу исте леме следи да је $\varphi(x_2) = \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ растућа функција на (x,b), као и да је ограничена одоздо (са $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$), па постоји $\lim\limits_{x_2\to x+}\varphi(x_2)$, а по дефиницији та гранична вредност је управо $f'_+(x)$. Аналогно се показује егзистенција $f'_-(x)$ за произвољно $x\in(a,b)$.

Из претходног закључујемо и више, да је $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant f'_+(x)$ за свако $x_1\in(a,x)$. Пуштањем да $x_1\to x-$, добија се да је $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$. Ако је $a<x<y<b$, из претходног следи да је $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)\leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_-(y)\leqslant f'_+(y)$, одакле следи да су $f'_-(x)$ и $f_+(x)$ растуће на (a,b). ◻

Непосредно из претходне теореме следи да конвексна функција на (a,b) мора бити непрекидна на (a,b) (како постоје f'_- и f'_+, функција f мора бити непрекидна). Заправо, можемо закључити и више, да је скуп тачака у којима f није диференцијабилна највише пребројив. Заиста, како постоје $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ за свако $x\in(a,b)$, онда је диференцијабилност у тачки x еквивалентна са $f'_-(x)=f'_+(x)$. Ако f није диференцијабилна у тачкама x_1 и x_2, таквим да је $x_1<x_2$, по претходној теореми важи $f'_-(x_1)<f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)<f'_+(x_2)$, па свакој тачки у којој функција није диференцијабилна можемо доделити интервал (тачки x_1, на пример, доделимо $\big(f'_-(x_1), f'_+(x_1)\big)$ и, по горњој вези, ти интервали су дисјунктни). Како сваки (непразан) интервал садржи бар једну рационалну тачку и како су интервали дисјунктни, следи да таквих интервала (а по претходном, и тачака у којима конвексна функција није диференцијабилна) може бити највише пребројиво много.

Као последица претходне теореме, као и тврђења везаних за испитивање монотоности диференцијабилне функције, непосредно следи да је диференцијабилна $f:(a,b)\to(a,b)$ (строго) конвексна (конкавна) ако и само ако функција f' (строго) расте (опада). Следи, ако је f и два пута диференцијабилна, конквексна (конкавна) је ако и само ако је $f''(x)\geqslant 0$ ($f''(x)\leqslant 0$) за $x\in(a,b)$.

Уколико је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и ако су $c,d,e\in(a,b)$, такви да је $c<d<e$ и ако је f различите конвексности на интервалима (c,d) и (d,e) (односно, ако је конвексна на (c,d), а конкавна на (d,e) или ако је конкавна на (c,d), а конвексна на (d,e)), онда ћемо за d рећи да је **превојна тачка** функције f. Из претходних резултата непосредно следи да, уколико је f два пута диференцијабилна, превојна тачка мора бити међу решењима једначине $f''(x)=0$.

Пример 7. Нека је $f_1(x)=|x|$, $f_2(x)=x^3$, $f_3(x)=x^4$ (све три за $x\in\mathbb{R}$), $f_4(x) = \begin{cases} -x^2+2x & \text{за } x<0 \\ x^2-2x & \text{за } x\geqslant 0\end{cases}$ и $f_5(x) = \begin{cases} x^2-x & \text{за } x\in(0,1) \\ 1 & \text{за } x\in\{0,1\}\end{cases}$. Функција f_1 је конвексна на $\mathbb{R}$, али није диференцијабилна у 0. Функције f_2 и f_3 су два пута диференцијабилне на $\mathbb{R}$, важи $f_2''(x)=6x$ и $f_3''(x)=12x^2$, па је 0 решење и једначине $f_2''(x)=0$ и једначине $f_3''(x)=0$. Међутим, како је f_2 конкавна на $(-\infty,0)$, а конвексна на $(0,\infty)$, тачка 0 је превојна тачка функције f_2, док у случају функције f_3 то није случај, пошто је f_3 конвексна на $\mathbb{R}$. Функција f_4 је конкавна на $(-\infty,0)$, а конвексна на $(0,\infty)$, међутим није диференцијабилна у 0, која је превојна тачка те функције. Функција f_5 је конвексна на $[0,1]$, али није непрекидна на $[0,1]$, па је у претходној теореми битна претпоставка да је функција дефинисана на отвореном интервалу.

Пример 8. Ако је $f(x)=\sin x$, важи $f''(x)=-\sin x$, па је $f''(x)<0$ за $x\in(0,\pi)$. Следи да је функција $f(x)$ строго конкавна на $(0,\pi)$. Приметимо да је закључак добијен далеко једноставније у односу на то како је исти закључак добијен у леми

5 (и делу након леме).

Пример 9. Функција $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, је два пута диференцијабилна на $(0,\infty)$ и важи $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Ако је $p \in (-\infty, 0) \cup (1,\infty)$, следи да је $f''(x) > 0$ за $x \in (0,\infty)$, па је f конвексна на $(0,\infty)$. Слично, ако је $p \in (0,1)$, следи да је f конкавна на $(0,\infty)$. Комбинујући добијени резултат са лемом 4, добијају се различите неједнакости за позитивне бројеве. На пример, за $p = 2$ се добија неједнакост из примера 4 (неједнакост између аритметичке и квадратне средине), а за $p = -1$ (и $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$) се добија да за позитивне $x_1, \ldots, x_n$ важи $\frac{n}{x_1+\ldots+x_n} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}$, одакле је $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$, што је неједнакост између хармонијске и аритметичке средине. Слично, ако је $g(x) = \ln x$ за $x \in (0,\infty)$, онда је $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, па је g конкавна на $(0,\infty)$. На основу леме 4 (за $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$) следи да за позитивне $x_1, \ldots, x_n$ важи $\ln \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \frac{\ln x_1+\ldots+x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$, одакле, како је функција $\ln x$ растућа, следи да за позитивне $x_1, \ldots, x_n$ важи $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ (неједнакост између геометријске и аритметичке средине).

Пример 10. Испитајмо конвексност функције $f(x) = \operatorname{arctg} \ln^2 x$. Функција је дефинисана на $(0,\infty)$ и бесконачно диференцијабилна на овом скупу, па се превојне тачке налазе међу решењима једначине $f''(x) = 0$. Како је $f'(x) = \frac{1}{1+\ln^4 x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$, следи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x^2(1+\ln^4 x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x(1+\ln^4 x) - \ln x \cdot \left(1 + \ln^4 x + x \cdot 4\ln^3 x \cdot \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\frac{2}{x^2(1+\ln^4 x)^2} \cdot (\ln^5 x + 3\ln^4 x + \ln x - 1) \\ &= -\frac{2}{x^2(1+\ln^4 x)^2} \cdot (\ln x + 1)(\ln^4 x + 2\ln^3 x - 2\ln^2 x + 2\ln x - 1). \end{aligned}$$

Ако је $g(t) = t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 1$, онда је $g'(t) = 4t^3 + 6t^2 - 4t + 2$ и $g''(t) = 12t^2 + 12t - 4 = 4(3t^2 + 3t - 1)$.

Како је $g''(x) = 0$ за $x \in \left\{\frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right\}$, g' расте на $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right)$ и на $\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6}, \infty\right)$, а опада на $\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right\}$. Како важи $\frac{-3-\sqrt{21}}{6} < \frac{-3+\sqrt{21}}{6} < \frac{-3+5}{6} = \frac{1}{3}$ и $g'(t) = \left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\right) \cdot (3t^2 + 3t - 1) - \frac{2}{3} \cdot (7t - 4)$, следи $g'\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right) > 0$ и $g'\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right) > 0$ (пошто је $\frac{1}{3} < \frac{4}{7}$). Како је $g'(-3) = -40$, $g'(-2) = 2$, g' има нулу ξ на $(-3,-2)$, па g опада на $(-\infty, \xi)$, а расте на (ξ, ∞). Како је $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $g(-1) = -6$, $g(0) = -1 < 0$, следи да g има нуле $\alpha \in (-\infty, -1)$ и $\beta \in (0,\infty)$, g је негативна на (α, β), а позитивна на $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$.

Дакле, f је конвексна на $(0, e^\alpha)$ и на (e^{-1}, e^β), а конкавна на (e^α, e^{-1}) и на (e^β, ∞). Превојне тачке су e^α, e^{-1}, e^β (има их 3).

Јенсенова неједнакост је применљива и приликом процене вредности интеграла. Зарад потпуности, овде наводимо и Јенсенову неједнакост у интегралном облику.

Теорема 3. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилна, са сликом садржаном у

(m, M), а g конвексна на (m, M). Онда је

$$g\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx.$$

Доказ. Функција g је конвексна на (m, M), па је непрекидна, а композиција непрекидне и интеграбилне функције је интеграбилна. Ако је $x_0 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$, важи $x_0 \in (m, M)$, па по конвексности функције g на интервалу (m, M) постоји k тако да је $g(x) - g(x_0) \geqslant k(x - x_0)$ за свако $x \in (m, M)$, одакле је $g(f(x)) - g(x_0) \geqslant k(f(x) - x_0)$, тј. $g(f(x)) \geqslant k(f(x) - x_0) + g(x_0)$. Интеграцијом, следи

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx \geqslant k\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - x_0\Big) + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x_0)dx = g(x_0),$$

пошто је, услед избора x_0, израз у загради једнак 0, а тиме је добијено наведено тврђење. □

Примене Јенсенове неједнакости

На крају ове главе приказаћемо неке неједнакости које се непосредно добијају из Јенсенове неједнакости. Бирани су примери који се јављају по школској литератури у Србији, а решења која су овде изложена су у већини случајева битно краћа од оних која се могу наћи у тој литератури.

Пример 11. Нека су $x_1, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, такви да је $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Применом Јенсенове неједнакости на строго конвексну функцију e^x и бројеве $\ln x_1, \ldots, \ln x_n$, добијамо $e^{\lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n} \leqslant \lambda_1 e^{\ln x_1} + \ldots + \lambda_n e^{\ln x_n}$, односно

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

која се назива тежинском неједнакошћу између аритметичке и геометријске средине (ако је $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, добија се класична неједнакост између аритметичке и геометријске средине). Како је e^x строго конвексна, једнакост се достиже ако и само ако су сви x_i међусобно једнаки или ако су сви λ_i сем једног једнаки нули. Применом добијене неједнакости на бројеве $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, добија се

$$\frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{x_n}} \leqslant x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

која се назива тежинском неједнакошћу између геометријске и хармонијске средине (ако је $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, добија се класична неједнакост између геометријске и хармонијске средине).

Пример 12. Докажимо да за позитивне $x_1, \ldots, x_n$ важи

$$e^{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}} \leqslant \frac{x_1 e^{x_1} + \ldots + x_n e^{x_n}}{x_1 + \ldots + x_n}.$$

Наведена неједнакост је еквивалентна са $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot e^{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}} \leqslant \frac{x_1 e^{x_1} + \ldots + x_n e^{x_n}}{n}$, а последња следи непосредно из Јенсенове неједнакости, примењене на $\lambda_1 = \ldots =$

$\lambda_n = \frac{1}{n}$ и функцију xe^x, која је конвексна на $(0,\infty)$, пошто је $(xe^x)'' = (x+2)e^x > 0$. Она је и строго конвексна, па се једнакост у случају $n \geqslant 2$ достиже ако и само ако је $x_1 = \ldots = x_n$.

Пример 13. Докажимо да за $a, b, c > 0$ важи

$$\frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}} \leqslant \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^{a+b+c}.$$

Наведена неједнакост је еквивалентна са $a\ln(b+c)+b\ln(c+a)+c\ln(a+b) \leqslant (a+b+c)\ln\frac{2(a+b+c)}{3}$, односно са $\frac{a}{a+b+c}\cdot\ln(b+c)+\frac{b}{a+b+c}\cdot\ln(c+a)+\frac{c}{a+b+c}\cdot\ln(a+b) \leqslant \ln\frac{2(a+b+c)}{3}$.

На основу Јенсенове неједнакости, примењене на конкавну функцију $\ln x$, бројеве $b+c, c+a, a+b$ и коефицијенте $\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b+c}$, редом, следи $\frac{a}{a+b+c}\cdot\ln(b+c)+\frac{b}{a+b+c}\cdot\ln(c+a)+\frac{c}{a+b+c}\cdot\ln(a+b) \leqslant \ln\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{a+b+c} = \ln\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$, па како је функција $\ln x$ растућа, довољно је доказати да важи $\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c} \leqslant \frac{2(a+b+c)}{3}$, односно $3(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^2$, а последње је еквивалентно са $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$, тј. са $0 \leqslant (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, што је тачно. Једнакост се достиже ако и само ако је $a=b=c$.

Пример 14. Ако је $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ и $r_1,\ldots,r_n \in [1,\infty)$, докажимо да важи

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+r_i} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} r_i}}.$$

Наведена неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+e^{\ln r_i}}}{n} \geqslant \frac{1}{1+e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln r_i}{n}}}.$$

Ако је $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, онда је $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$, па је $f''(x) > 0$ на $(0,\infty)$. Како је $r_i \geqslant 1$, следи $\ln r_i \geqslant 0$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, па се последња неједнакост добија непосредном применом Јенсенове неједнакости за $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ и бројеве $\ln r_1,\ldots,\ln r_n$. Једнакост се достиже ако и само ако је $r_1 = \ldots = r_n$.

2. Неједнакости између симетричних израза

Неједнакости између симетричних израза су оставиле дубок траг у историји математике, а заузимају и важно место у градиву математике за основну и средњу школу. У овој глави, која је централни део овог рада, приказаћемо технику која уопштава већину неједнакости које се обрађују у току прва два нивоа школовања, а омогућава и да се велики број проблема различитих нивоа тежине реши на начин који је прилично шаблонски.

Слободније говорећи, под симетричном функцијом променљивих $x_1, \ldots, x_n$ подразумевамо функцију чија се вредност не мења променом поретка променљивих. Прецизније, ако $f : D \to \mathbb{R}$, где је $D \subseteq \mathbb{R}^n$, рећи ћемо да је f симетрична ако је $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ за све $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ и сваку пермутацију σ (последње, наравно, подразумева да је домен инваријантан приликом промене редоследа координата). Скуп пермутација над скупом од n елемената (тј. бијекција скупа $\{1, \ldots, n\}$) ћемо обележавати са S_n. У већини резултата које ћемо приказати у наставку текста ће бити $D = (0, \infty)^n$. Приметимо да су функције овог облика, на пример, класичне средине.

Дефиниција 3. Ако је $n \in \mathbb{N}$ и ако су $a = (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, кажемо да a **мајорира** b, у ознаци $a \succ b$ ако и само ако важи:

(1) $a_1 + \ldots + a_k \geqslant b_1 + \ldots + b_k$, за свако $1 \leqslant k < n$;

(2) $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$.

Користи се и ознака $b \prec a$, а писаћемо и $(a_i)_{i=1}^n \succ (b_i)_{i=1}^n$, односно $(b_i)_{i=1}^n \prec (a_i)_{i=1}^n$. Из дефиниције непосредно следи мајорација рефлексивна ($a \succ a$), антисиметрична (ако је $a \succ b$ и $b \succ a$, онда је $a = b$) и транзитивна (ако је $a \succ b$ и $b \succ c$, онда је $a \succ c$), тако да је релација мајорације релација поретка на скупу вектора чије су координате нерастуће. Ако вектору $a = (a_1, \ldots, a_n)$ придружимо вектор $a^{\downarrow} = (a_{\sigma(1)} \ldots, a_{\sigma(n)})$, где је $\sigma \in S_n$ таква да важи $a_{\sigma(1)} \geqslant \ldots \geqslant a_{\sigma(n)}$, приметимо да се релација мајорирања може дефинисати и за произвољне векторе из $\mathbb{R}^n$ (рећи ћемо да $a \succ b$ ако $a^{\downarrow} \succ b^{\downarrow}$). Координате вектора a при таквој пермутацији σ ћемо означавати и са $a_i^{\downarrow}$ (тј. $a_i^{\downarrow} = a_{\sigma(a)}$, па је $a_1^{\downarrow} \geqslant \ldots \geqslant a_n^{\downarrow}$). Међутим, овде морамо бити опрезни, пошто се не преносе сва тврђења која важе за векторе чије су координате нерастуће. На пример, престаје да важи симетричност релације мајорације (у овом случају не можемо закључити да је $a = b$, већ само да се a и b могу добити један из другог пермутацијом чланова). У наставку ове главе, зарад лакшег праћења, уколико није другачије наглашено подразумеваћемо да су координате вектора у нерастућем поретку уколико то не утиче на резултат (а у овој глави неће, а добијамо већу удобност; на пример, нећемо морати да спроводимо дискусију по параметру a у теореми 6).

Пример 15. Како је $5 \geqslant 1 \geqslant 0$ и $3 \geqslant 3 \geqslant 0$, важи $5 \geqslant 3$, $5 + 1 \geqslant 3 + 3$, као и $5 + 1 + 0 = 3 + 3 + 0$, следи $(5, 1, 0) \succ (3, 3, 0)$. Слично, како је $5 \geqslant 1 \geqslant 0$ и $4 \geqslant 1 \geqslant 1$, важи $5 \geqslant 4$, $5+1 \geqslant 4+1$, као и $5+1+0 = 4+1+1$, следи $(5, 1, 0) \succ (4, 1, 1)$. Приметимо да, како је $4 > 3$, не може бити $(3, 3, 0) \succ (4, 1, 1)$, а како је $4 + 1 < 3 + 3$, не може бити $(4,1,1) \succ (3,3,0)$, па мајорирање није релација тоталног поретка. Такође, за произвољан вектор $(a_1,\dots,a_n)$ за који је $a_i \geqslant 0$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, важи

$$(a_1+\ldots+a_n,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}) \succ (a_1,\ldots,a_n) \succ \big(\underbrace{\tfrac{a_1+\ldots+a_n}{n},\ldots,\tfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}}_{n}\big).$$

Лема 6. Нека су $a=(a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ и $b=(b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ различити неопадајући низови, тако да $a \succ b$ и нека је m кардиналност скупа $\{a_i \neq b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Онда постоји $c=(c_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, који је неопадајући, задовољава $c \succ b$ и притом је кардиналност скупа $\{c_i \neq b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ мања од m.

Доказ. Како $a \succ b$, ако низови нису идентички једнаки, постоји бар једно i, тако да је $a_i \neq b_i$. Како је $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$, ако је k најмањи индекс за који је $a_k \neq b_k$, мора бити $a_k > b_k$, а како је $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$, онда постоји бар један индекс i за који је $a_i < b_i$. Нека је l најмањи такав индекс. По избору, следи $k < l$ и важи $a_k > b_k$, $a_l < b_l$, а за све $k < i < l$ је $a_i = b_i$.

Нека је $\delta = \max\big\{\big|b_k - \frac{a_k+a_l}{2}\big|, \big|b_l - \frac{a_k+a_l}{2}\big|\big\}$, $c_k = \frac{a_k+a_l}{2}+\delta$, $c_l = \frac{a_k+a_l}{2}-\delta$ и $c_i = a_i$ за $i \notin \{k,l\}$. Како $b_l, b_k \in [a_l, a_k]$, следи $\delta \leqslant \frac{a_k-a_l}{2}$, па је $c_k \leqslant a_k$ и $c_l \geqslant a_l$. Такође је $c_k = \frac{a_k+a_l}{2}+\delta \geqslant \frac{a_k+a_l}{2} + \big|b_k - \frac{a_k+a_l}{2}\big| \geqslant b_k$, а аналогно је $c_l \leqslant b_l$.

Ако је $b_l > \frac{a_k+a_l}{2}$, како је $b_k \geqslant b_l$, следи $\delta = b_k - \frac{a_k+a_l}{2}$, па је $c_k = \frac{a_k+a_l}{2}+\delta = b_k$. Слично, ако је $b_k < \frac{a_k+a_l}{2}$, како је $b_k \geqslant b_l$, следи $\delta = \frac{a_k+a_l}{2} - b_l$, па је $c_l = \frac{a_k+a_l}{2} - \delta = b_l$. Коначно, ако је $b_k \geqslant \frac{a_k+a_l}{2} \geqslant b_l$, бар једно од $\delta = b_k - \frac{a_k+a_l}{2}$ и $\delta = \frac{a_k+a_l}{2} - b_l$ је испуњено, па је испуњено бар једно од $c_k = b_k$ и $c_l = b_l$.

Из горе добијеног следи да је низ $(c_k)_{k=1}^n$ неопадајући (за $i < k$ је $c_i = a_i \geqslant a_k \geqslant c_k$; за $k < i < l$ је $c_k \geqslant b_k \geqslant b_i = a_i = c_i$ и $c_i = a_i = b_i \geqslant b_l \geqslant c_l$; за $i > l$ је $c_l \geqslant a_l \geqslant a_i = c_i$; поређење осталих чланова је тривијално, пошто за $i \notin \{k,l\}$ важи $c_i = a_i$). Како је $c_i = a_i$ за $i \notin \{k,l\}$ и $c_k + c_l = a_k + a_l$, следи да је $\sum\limits_{i=1}^{j} c_i = \sum\limits_{i=1}^{j} a_i$ за $j < k$ и $j \geqslant l$, па за овакве j важи $\sum\limits_{i=1}^{j} c_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{j} b_i$, као и $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$. Ако је $k \leqslant j < l$, како је, по избору k и l, $c_i = a_i = b_i$ за све $i < l$, $i \neq k$, следи $\sum\limits_{i=1}^{j} c_i - \sum\limits_{i=1}^{j} b_i = c_k - b_k \geqslant 0$. Дакле, важи $c \succ b$. $\square$

Претходна лема даје да, слободније говорећи, можемо изменити неке координате вектора a, тако да остану у опадајућем поретку, као да и новодобијени вектор и даље мајорира вектор b. Притом се неће изменити координате на местима на којима су једнаке одговарајућим координатама вектора b, а добиће се или једна или две нове координате на којима ће се постићи једнакост (могућа су оба случаја). Како вектори које посматрамо имају коначно много координата, након коначно много корака (највише $n-1$) ће се, описаном трансформацијом, вектор a трансформисати у вектор b. Описану трансформацију ћемо називати L трансформацијом (по нотацији из доказа претходне леме, писаћемо $c = La$; притом, одговарајуће координате вектора a и вектора $c = La$ се разликују на тачно два места).

Пример 16. Важи $(4,0,0) \succ (2,1,1)$ (све одговарајуће координате су различите), па се применом описане трансформације прво $(4,0,0)$ трансформише у $(3,1,0)$ (поклапа се друга координата, а прва и трећа не), а онда у $(2,1,1)$ (поклапају се све три кооддинате). Слично, важи $(5,0,0) \succ (2,2,1)$, описаном трансформацијом се $(5,0,0)$ трансформише у $(3,2,0)$, а онда се $(3,2,0)$ трансформише у $(2,2,1)$.

Дефиниција 4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f:(0,\infty)^n \to \mathbb{R}$. Функцију $F:(0,\infty)^n \to \mathbb{R}$ дефинисану са $F(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ називамо симетризацијом функције f. Специјално, ако је $a = (a_k)_{k=1}^n$ n-торка реалних бројева, симетризацију функције $x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$, тј. израз

$$T[a](x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_{\sigma(n)}}$$

називамо ***a*-средином** бројева $x_1,\ldots,x_n$.

Уколико је јасно са којим се промељивим ради, писаћемо и $T[a]$, а уобичајна ознака претходног израза је и $T[a_1,\ldots,a_n]$. Непосредно из дефиниције следи да је $T[a_1,\ldots,a_n](x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n}$. Наравно, за неке a функција $T[a]$ може бити дефинисана и на ширем скупу, не само на $(0,\infty)^n$, но у овом раду ћемо се задржати на раду са функцијама које су дефинисане на позитивним бројевима. Приметимо да је $T[a_1,\ldots,a_n]$ хомогена, степена $a_1+\ldots+a_n$ (заиста, важи $T[a_1,\ldots,a_n](\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^{a_1+\ldots+a_n} \cdot T[a_1,\ldots,a_n](x_1,\ldots,x_n)$ за све $x_1,\ldots,x_n,\lambda > 0$).

Пример 17. Ако су променљиве x,y,z, важи $T[2,1,0] = x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2$, $T[1,0,-1] = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$, $T[1,1,1] = xyz+yzx+zxy+xzy+yxz+zyx = 6xyz$.

Као што је то урађено у претходном примеру код изражавања $T[1,1,1]$, приликом срећивања израза уобичајно је да се, уколико се неки моном појављује више пута, одговарајући чланови групишу. До такве ситуације долази ако су неки чланови низа $(a_k)_{k=1}^n$ једнаки. Конкретно, ако су $b_1,\ldots,b_r$ различити чланови низа $(a_k)_{k=1}^n$ и ако се они у том низу појављују $l_1,\ldots,l_r$ пута, редом (јасно је да онда важи $l_1+\ldots+l_r = n$), исти моном који се јавља у $T[a_1,\ldots,a_n]$ се добија било којом пермутацијом која мења чланове који су једнаки, тј. исти моном ће се појављивати онолико пута колико има таквих пермутација (у питању су пермутације са понављањем), тј. биће $\binom{n}{l_1,\ldots,l_r} = \frac{n!}{l_1! \cdot \ldots \cdot l_r!}$ различитих монома, а сваки од њих ће се појављивати $l_1! \cdot \ldots \cdot l_r!$ пута.

Пример 18. Важи $T[3,3,2](x_1,x_2,x_3) = 2! \cdot 1! \cdot (x_1^3x_2^3x_3^2 + x_2^3x_3^3x_1^2 + x_3^3x_1^3x_2^2) = 2 \cdot (x_1^3x_2^3x_3^2 + x_2^3x_3^3x_1^2 + x_3^3x_1^3x_2^2)$ (овде је $l_1 = 2$ и $l_2 = 1$). Слично, важи $T[1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}] = (n-1)! \cdot (x_1 + \ldots + x_n)$ и $T[\underbrace{\tfrac{1}{n},\ldots,\tfrac{1}{n}}_{n}] = n! \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ (последњи изрази ће бити коришћени за контролу аритметичке и геометријске средине).

Караматина неједнакост и њене примене

Појам мајорације је јако важан у теорији неједнакости. Пре него што пређемо на рад са a-growth-срединама, илуструјмо једно од првих уопштења Јенсенове неједнакости, Караматину неједнакост, код које се види важност појма мајорације, као и неке њене последице.

Теорема 4. Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција, $n \geqslant 2$, $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n$ n-торке тачака из (a,b), тако да $(x_1,\dots,x_n) \succ (y_1,\dots,y_n)$. Онда важи

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^n f(y_i).$$

Притом, ако је f строго конвексна, једнакост се достиже ако и само ако је $x_i = y_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказ. Уколико је $x_i = y_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, онда је наведена неједнакост тривијална једнакост. Ако то није случај, а за неко i важи $x_i = y_i$, елиминисањем ових елемената из неједнакости и вектора, добијамо одговарајућу неједнакост за $n-1$ сабирака (у овом случају уклањање ова два елемента не утиче ни на неједнакост ни на услов мајорације).

Дакле, довољно је доказати неједнакост под условом $x_i \neq y_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Ако је $c_i = \frac{f(x_i)-f(y_i)}{x_i-y_i}$, како је f конвексна, важи $c_{i+1} \geqslant c_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (израз c_i представља нагиб сечице која садржи тачке $(x_i, f(x_i))$ и $(y_i, f(y_i))$). Ако је $X_k = \sum\limits_{i=1}^k x_i$ и $Y_k = \sum\limits_{i=1}^k y_i$ за $1 \leqslant k \leqslant n$, важи $x_i = X_i - X_{i-1}$ и $y_i = Y_i - Y_{i-1}$ (овде узимамо $X_0 = Y_0 = 0$), као и $X_k \geqslant Y_k$ за $1 \leqslant k \leqslant n-1$, односно $X_n = Y_n$. На основу добијеног, следи

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(y_i) &= \sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(y_i)\big) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i\big((X_i - X_{i-1}) - (Y_i - Y_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(X_i - Y_i) - \sum_{i=2}^n c_i(X_{i-1} - Y_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(X_i - Y_i) - \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}(X_i - Y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1})(X_i - Y_i) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Из последње добијеног, следи да се једнакост достиже ако и само ако су сви сабирци у последњој суми једнаки 0, У случају строго конвексне је $c_i \neq c_{i+1}$, па је $X_i = Y_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n-1$, одакле је $x_i = y_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, што је у овом случају немогуће.

Дакле, за строго конвексне функције једнакост се достиже ако и само ако је $x_i = y_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. ☐

Уколико је функција конкавна, важи аналогно тврђење, са супротним знаком неједнакости (довољно је применити претходну теорему на функцију $-f$). Уколико је $y_i = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, онда $(x_1,\dots,x_n) \succ (y_1,\dots,y_n)$, па се применом Караматине неједнакости добија класична Јенсенова неједнакост. Следи да је Караматина неједнакост уопштење Јенсенове неједнакости.

У наставку прикажимо неколико примена Караматине неједнакости које се срећу по средњошколској литератури. По тој литератури ова тврђења су углавном показана без помињања Караматине неједнакости, па се често дешава да су изложени докази доста компликованији од оних које ћемо изложити овде.

Пример 19. Докажимо да за произвољне $a,b,c > 0$ важи

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Ако је $f(x) = \frac{1}{x}$ за $x > 0$, како је $f''(x) = 2x^{-3} > 0$, следи да је f конвексна. Нека је, без умањења општости, $a \geqslant b \geqslant c$ (уочена неједнакост је симетрична). Онда $(2a, 2b, 2c) \succ (a+b, b+c, c+a)$, одакле се применом Караматине неједнакости непосредно добија наведена неједнакост.

Пример 20. Ако су a, b, c дужине страница троугла, докажимо да важи

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Функција $f(x) = \sqrt{x}$ је конкавна на $(0, \infty)$. Нека је, без умањења општости, $a \geqslant b \geqslant c$ (уочена неједнакост је симетрична). Онда $(a+b-c, a+c-b, b+c-a) \succ (a, b, c)$, па на основу Караматине неједнакости добијамо наведену неједнакост.

Пример 21. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$ такви да је $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Докажимо да важи

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{x_i}\Big) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \Big(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\Big).$$

Функција $f(x) = \ln\big(1 + \frac{1}{x}\big)$ је конвексна на $(0, \infty)$, пошто је $f''(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} > 0$, а уочена неједнакост је еквивалентна са $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{x_i}\Big) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{\frac{1-x_i}{n-1}}\Big)$.

Докажимо да $(x_1, \ldots, x_n) \succ \big(\frac{1-x_n}{n-1}, \ldots, \frac{1-x_1}{n-1}\big)$. Важи $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{n-1} = \frac{1}{n-1} \cdot \big(n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\big) = 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, па треба доказати да за свако $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ важи $(n-1)(x_1 + \ldots + x_k) \geqslant (1 - x_n) + \ldots + (1 - x_{n+1-k}) = k(x_1 + \ldots + x_n) - (x_{n+1-k} + \ldots + x_n)$, а последње је тачно пошто се свако од $x_i > 0$ на левој страни неједнакости јавља $n-1$ пута, а на десној највише $k \leqslant n-1$ пута.

Коначно, на основу Караматине неједнакости, примењене на функцију $\ln(1 + \frac{1}{x})$ и векторе $(x_1, \ldots, x_n)$ и $\big(\frac{1-x_n}{n-1}, \ldots, \frac{1-x_1}{n-1}\big)$, добија се $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{1}{x_i}\big) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{1}{\frac{1-x_i}{n-1}}\big)$, одакле следи наведена неједнакост.

Пример 22. Ако је $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ конвексна, онда важи

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leqslant f(x_1 + \ldots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Заиста, како за ненегативне x_i важи $(x_1 + \ldots + x_n, 0, \ldots, 0) \succ (x_1, \ldots, x_n)$, наведена неједнакост се добија непосредном применом Караматине неједнакости на ове векторе. Иначе, неједнакост из овог примера се често назива и Петровићевом неједнакошћу.

Мјурхедова неједнакост и њене примене

Како смо видели у ранијем делу текста, међу a-средине спадају и аритметичка и геометријска средина (видети пример 18). Позната је чувена неједнакост између аритметичке и геометријске средине, па се намеће питање да ли се иоле сличан резултат може добити и за друге a-средине. Прецизније, ако су $a = (a_k)_{k=1}^n$ и $b = (b_k)_{k=1}^n$, под којим условима можемо обезбедити да важи $T[a](x_1, \ldots, x_n) \leqslant$

$T[b](x_1,\dots,x_n)$ или $T[a](x_1,\dots,x_n) \geqslant T[b](x_1,\dots,x_n)$ за свако $(x_1,\dots,x_n) \in (0,\infty)^n$. Уколико можемо обезбедити да важи нека од наведене две неједнакости, рећи ћемо да су средине $T[a]$ и $T[b]$ упоредиве. Наредна теорема даје одговор под којим условима се то може урадити.

Теорема 5 (Мјурхедова теорема). Потребан и довољан услов да су $T[a]$ и $T[b]$ упоредиве је да $a \succ b$ или $b \succ a$. Притом, ако $a \succ b$, важи $T[a](x_1,\dots,x_n) \geqslant T[b](x_1,\dots,x_n)$. Уколико a и b нису идентични, једнакост се достиже ако и само ако је $x_1 = \ldots = x_n$.

Доказ. Ако је $T[a](x_1,\dots,x_n) \geqslant T[b](x_1,\dots,x_n)$ за све $(x_1,\dots,x_n) \in (0,\infty)^n$, како су $T[a]$ и $T[b]$ хомогени, степена хомогености $a_1+\ldots+a_n$ и $b_1+\ldots+b_n$, редом, заменом $x_1,\dots,x_n$ са $\lambda x_1,\dots,\lambda x_n$, где је $\lambda > 0$ произвољно, добијамо $\lambda^{a_1+\dots+a_n} \cdot T[a](x_1,\dots,x_n) \geqslant \lambda^{b_1+\dots+b_n} \cdot T[b](x_1,\dots,x_n)$ за све $(x_1,\dots,x_n) \in (0,\infty)^n$ и све $\lambda > 0$, па мора бити $a_1+\ldots+a_n = b_1+\ldots+b_n$ (да би наведена неједнакост важила и кад $\lambda \to 0+$ и кад $\lambda \to \infty$). За $k < n$, ако заменимо $x_1 = \ldots = x_k = x > 0$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$, изрази $T[a](x_1,\dots,x_n)$ и $T[b](x_1,\dots,x_n)$ постају полиноми по x, најстаријих чланова степена $a_1+\ldots+a_k$ и $b_1+\ldots+b_k$, редом, па да би важило $T[a] \geqslant T[b]$ кад $x \to \infty$, мора бити $a_1+\ldots+a_k \geqslant b_1+\ldots+b_k$.

Са друге стране, ако $a \succ b$ и a и b нису идентични, на основу леме 6 (и коментара након леме), b се може добити из a применом коначно много L трансформација, па је довољно доказати да је $T[a] \geqslant T[b]$ у случају $b = La$. У том случају вектори a и b се разликују на тачно две координате, па како је $T[a_1,\dots,a_n](x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdot x_{\sigma(2)}^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n} = \sum\limits_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(2)}^{a_1} \cdot x_{\sigma(1)}^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n}$, аналогно се изражава $T[b]$, и како су уочене функције симетричне, без умањења општости можемо претпоставити да се разликују на прве две координате и да је $a_1 > a_2$. Нека је $p = \frac{a_1+a_2}{2}$ и $\gamma = \frac{a_1-a_2}{2}$. По опису L трансформације (видети доказ леме 6 и коментар након ње), последње значи да је $b_1 = p+\delta$ и $b_2 = p-\delta$, као и да је $\delta < \gamma$, па како је $a_1 = p+\gamma$ и $a_2 = p-\gamma$, следи

$$\begin{aligned}
2\big(T[a]-T[b]\big) &= \sum_{\sigma\in S_n}\Big(x_{\sigma(1)}^{a_1}\cdot x_{\sigma(2)}^{a_2}\cdot\prod_{i=3}^{n}x_{\sigma(i)}^{a_i}\Big) + \sum_{\sigma\in S_n}\Big(x_{\sigma(2)}^{a_1}\cdot x_{\sigma(1)}^{a_2}\cdot\prod_{i=3}^{n}x_{\sigma(i)}^{a_i}\Big)\\
&- \sum_{\sigma\in S_n}\Big(x_{\sigma(1)}^{b_1}\cdot x_{\sigma(2)}^{b_2}\cdot\prod_{i=3}^{n}x_{\sigma(i)}^{b_i}\Big) - \sum_{\sigma\in S_n}\Big(x_{\sigma(2)}^{b_1}\cdot x_{\sigma(1)}^{b_2}\cdot\prod_{i=3}^{n}x_{\sigma(i)}^{b_i}\Big)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\Big(\big(x_{\sigma(1)}^{p+\gamma}x_{\sigma(2)}^{p-\gamma} + x_{\sigma(2)}^{p+\gamma}x_{\sigma(1)}^{p-\gamma} - x_{\sigma(1)}^{p+\delta}x_{\sigma(2)}^{p-\delta} - x_{\sigma(2)}^{p+\delta}x_{\sigma(1)}^{p-\delta}\big)\cdot\prod_{i=3}^{n}x_{\sigma(i)}^{a_i}\Big)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\Big(\big(x_{\sigma(1)}^{\gamma+\delta} - x_{\sigma(2)}^{\gamma+\delta}\big)\cdot\big(x_{\sigma(1)}^{\gamma-\delta} - x_{\sigma(2)}^{\gamma-\delta}\big)\cdot\big(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\big)^{p-\gamma}\prod_{i=3}^{n}x_{\sigma(i)}^{a_i}\Big) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

пошто су сви сабирци ненегативни (како је $\gamma+\delta > 0$ и $\gamma-\delta > 0$, функције $x^{\gamma+\delta}$ и $x^{\gamma-\delta}$ су растуће). Притом, да би важила једнакост, сваки сабирак мора бити једнак 0, тј. мора бити $x_{\sigma(1)} = x_{\sigma(2)}$ за свако $\sigma \in S_n$, односно мора бити $x_1 = \ldots = x_n$. $\square$

Први део доказа претходне теореме говори да је услов мајорације природан уколико су уочене средине упоредиве. Неједнакост добијена претходном теоремом се назива Мјурхедовом неједнакошћу (за пар a, b).

Пошто се у оквиру градива основне и средње школе углавном виђају варијанте Мјурхедове неједнакости за $n = 2$ и $n = 3$, прикажимо скице доказа у овим ситуацијама у облику у којем се обично виђа по школској литератури (пошто се ученицима најчешће не дозвољава да се позивају на тврђење Мјурхедове теореме). Зарад лакшег праћења, променљиве ћемо у овим ситуацијама обележавати са x, y, односно x, y, z.

У случају $n = 2$, уколико су у питању вектори (a_1, a_2) и (b_1, b_2), $a_1 \geqslant a_2$, такви да $(a_1, a_2) \succ (b_1, b_2)$, се, након скраћивања са $x^{a_2}y^{a_2}$, Мјурхедова неједнакост своди на Мјурхедову неједнакост за векторе $(a_1 - a_2, 0)$ и $(b_1 - a_2, b_2 - a_2)$, тј. довољно је доказати неједнакост за пар $(s, 0)$ и $(\alpha, s - \alpha)$ (овде је $s > 0$ и $\alpha \in (0, s)$; онда $(s, 0) \succ (\alpha, s - \alpha)$). У последње наведеном случају неједнакост гласи $x^s + y^s \geqslant x^\alpha y^{s-\alpha} + x^{s-\alpha}y^\alpha$ и еквивалентна је са $\big(x^\alpha - y^\alpha\big)\big(x^{s-\alpha} - y^{s-\alpha}\big) \geqslant 0$, па је тачна, пошто је $\alpha > 0$ и $s - \alpha > 0$.

У случају $n = 3$, аналогно, скраћивањем и сменом променљиве се добија да је тврђење довољно доказати за векторе облика $(1, a, 0)$ и (b, c, d), тако да је $a \in [0, 1]$, $1 \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$ и $(1, a, 0) \succ (b, c, d)$. Приметимо да се у случају $\{1, a, 0\} \cap \{b, c, d\} \neq \emptyset$ тврђење своди на показано тврђење за $n = 2$ (заправо, на три одговарајућа тврђења). На пример, ако је $b = 1$, онда је $c + d = a$ (и важи $c, d \in [0, a]$), па се тврђење Мјурхедове неједнакости своди на

$$x\big(y^c - z^c\big)\big(y^d - z^d\big) + y\big(z^c - x^c\big)\big(z^d - x^d\big) + z\big(x^c - y^c\big)\big(x^d - y^d\big) \geqslant 0.$$

Слично, ако је $d = 0$, онда је $b + c = 1 + a$ (и важи $b, c \in [a, 1]$), па се тврђење Мјурхедове неједнакости своди на

$$\begin{aligned} x^a y^a\big(x^{b-a} - y^{b-a}\big)\big(x^{c-a} - y^{c-a}\big) &+ y^a z^a\big(y^{b-a} - z^{b-a}\big)\big(y^{c-a} - z^{c-a}\big) \\ &+ z^a x^a\big(z^{b-a} - x^{b-a}\big)\big(z^{c-a} - x^{c-a}\big) \geqslant 0, \end{aligned}$$

а аналагно се добија закључак и у другим могућим ситуацијама.

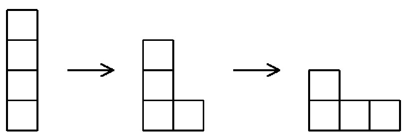
Уколико је $\{1, a, 0\} \cap \{b, c, d\} = \emptyset$ и $(1, a, 0) \succ (b, c, d)$, уколико је $1 - b \leqslant d$ (односно $b + d \geqslant 1$), онда $(1, a, 0) \succ (1, c, b + d - 1) \succ (b, c, d)$, а уколико је $1 - b < d$ (односно $b + d < 1$), онда $(1, a, 0) \succ (b + d, c, 0) \succ (b, c, d)$, па се у овом случају неједнакост своди на две неједнакости код којих је бар једна координата вектора једнака, односно на претходно доказан случај.

По школским књигама, поготово за основну и млађе разреде средње школе, се претходно најчешће спроводи за конкретне векторе, тако да има мање разматрања случајева. Али исто тако, често се виђа и да се доказ сведе на „уметање помоћног израза”, тј. израза за који се испостави да се налази између два израза који се пореде, но без икаквог објашњења како се дошло до помоћног израза.

У наставку овог дела ћемо илустровати примену Мјурхедове теореме и анализирати њене могућности.

Пример 23. Како $(n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}) \succ (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, на основу Мјурхедове неједнакости следи $(n-1)! \cdot \big(x_1^n + \ldots + x_n^n\big) = T[n, 0, \ldots, 0] \geqslant T[1, \ldots, 1] = n! \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, односно $\frac{x_1^n + \ldots + x_n^n}{n} \geqslant x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ (класична неједнакост између аритметичке и геометријске средине). Неједнакост између геометријске и хармонијске средине, па самим тим и неједнакост између аритметичке и хармонијске средине је непосредна последица неједнакости између аритметичке и геометријске средине, али зарад потпуности илуструјмо да се и ове неједнакости добијају праволинијском употребом Мјурхедове теореме. Заиста, након сређивања, прва се своди на $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_1^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\frac{1}{n}}}{x_k} \geqslant n$, односно $\frac{1}{(n-1)!}\cdot T\left[\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n}-1\right] \geqslant n\cdot\frac{1}{n!}\cdot T[0,\ldots,0]$, а друга на $\sum\limits_{i\neq j}\left(\frac{x_i}{x_j}\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n\right) \geqslant n(n-1)x_1\cdot\ldots\cdot x_n$, односно $\frac{1}{(n-2)!}\cdot T[2,1,\ldots,1,0] \geqslant n(n-1)\cdot\frac{1}{n!}\cdot T[1,\ldots,1]$, па су тачне, пошто $\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n}-1\right) \succ (0,\ldots,0)$ и $(2,1,\ldots,1,0) \succ (1,\ldots,1)$.

Такође, сви примери који су наведени у уводном делу се добијају непосредно из Мјурхедове неједнакости. На пример, да за $a,b,c>0$ важи $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant ab^2c+abc^2+a^2bc$ следи из $(4,0,0)\succ(2,2,0)\succ(2,1,1)$ (чак видимо да можемо извршити и низ профињења; на пример, између прва два израза који се јављају у претходном низу неједнакости се може уметнути израз $\frac{1}{2}\cdot T[3,1,0]$). Овакве неједнакости се најчешће јављају у градиву осмог разреда и притом се код ученика тестира способност да изврше алгебарске трансформације помоћу којих долазе до облика из ког могу да закључе да одговарајућа неједнакост важи. Захтевнији примери овог облика се обично јављају на вишим нивоима такмичења у основној школи, па је стога тврђење Мјурхедове теореме нашло своје стандардно место у оквиру додатне наставе за ученике овог годишта. Иако се ученицима често не дозвољава да се у решењу позову на само тврђење Мјурхедове теореме, оно им може бити јако корисно, пошто може упростити доказивање неједнакости тиме што се „разбије” на низ једноставијих (а мајорација им се обично представља као што је то урађено на наредној слици, „пребацивањем квадратића у десно”; слика илуструје да $(4,0,0)\succ(3,1,0)\succ(2,1,1)$, односно неке од мајорација поменутих на почетку овог пасуса).



Слика 3.

Илуструјмо неколико примера неједнакости које се јављају по школској литератури, а које су непосредне последице Мјурхедове неједнакости.

Пример 24. Доказажимо да за $a,b,c>0$ важи $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$. Наведена неједнакост је заправо $\frac{1}{2}\cdot T[3,0,0] \geqslant \frac{1}{2}\cdot T\left[2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, па како $(3,0,0)\succ\left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, следи непосредно из Мјурхедове неједнакости.

Пример 25. Докажимо да за $a,b>0$ важи $8(a^4+b^4)\geqslant(a+b)^4$. Наведена неједнакост је еквивалентна са $8(a^4+b^4)\geqslant a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, односно са $7(a^4+b^4)\geqslant 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3$, тј. са $7T[4,0]\geqslant 4T[3,1]+3T[2,2]$, па како $(4,0)\succ(3,1)$ и $(4,0)\succ(2,2)$, следи непосредно из Мјурхедове неједнакости.

Пример 26. Одредимо најмање k, тако да за све $x,y\geqslant 0$ важи

$$x^6+5x^5y+10x^4y^2+kx^3y^3+10x^2y^4+5xy^5+y^6\geqslant 0.$$

Наведена неједнакост је тривијално испуњена ако је $k\geqslant 0$, па је довољно испитати да ли постоји $k<0$ за које је испуњена. Уколико је $x=y$, неједнакост постаје $(k+32)x^6 \geqslant 0$, па мора бити $k \geqslant -32$, па уколико докажемо да је наведена неједнакост испуњена за $k=-32$, доказаћемо да је тражена вредност баш $k=-32$. У том случају, неједнакост гласи $T[6,0]+5T[5,1]+10T[4,2] \geqslant 16T[3,3]$, па како $(6,0) \succ (3,3)$, $(5,1) \succ (3,3)$ и $(4,2) \succ (3,3)$, тврђење следи из Мјурхедове неједнакости.

Пример 27. Докажимо да за $a,b,c>0$ важи $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c$. Наведена неједнакост је хомогена, еквивалентна је са $T[3,-1,-1] \geqslant T[1,0,0]$, па како $(3,-1,-1) \succ (1,0,0)$, следи на основу Мјурхедове неједнакости.

Пример 28. Докажимо да за $a,b,c>0$ важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$. Множењем неједнакости са $a^3b^3c^3$, добијамо еквивалентну неједнакост $a^3b^3c^2+a^3b^2c^3+a^3b^3c^2 \leqslant a^8+b^8+c^8$, односно $T[3,3,2] \leqslant T[8,0,0]$, па како $(8,0,0) \succ (3,3,2)$, следи из Мјурхедове неједнакости.

Пример 29. Одредимо $\inf\limits_{x,y,z>0} \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$. Ако је $x=y=z$, вредност израза под инфимумом је 8, па ако покажемо да је $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geqslant 8$, доказаћемо и да је наведени инфимум једнак 8. Добијена неједнакост је еквивалентна са $8xyz \leqslant (x+y)(y+z)(z+x) = x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz$, односно са $T[1,1,1] = 6xyx \leqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2 = T[2,1,0]$, па како $(2,1,0) \succ (1,1,1)$, тачна је на основу Мјурхедове неједнакости.

Пример 30. За $x,y,z>0$ докажимо да важи $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geqslant \frac{9}{2}$. Заиста, уочена неједнакост је еквивалентна са $\frac{9}{2}\cdot(x+y)(y+z)(z+x) \leqslant (x+y+z)\big((x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\big) = (x+y+z)\big(x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)\big)$, односно $\frac{9}{2}\cdot T[2,1,0]+\frac{3}{2}\cdot T[1,1,1] \leqslant \frac{1}{2}\cdot T[3,0,0]+4\cdot T[2,1,0]+\frac{3}{2}\cdot T[1,1,1]$, тј. са $T[2,1,0] \leqslant T[3,0,0]$, па је тачна, пошто $(3,0,0) \succ (2,1,0)$.

Наравно, не може се очекивати да се свака симетрична неједнакост сведе на непосредну последицу Мјурхедове неједнакости, а чак и кад је то могуће, често није исплативо због количине рачуна који може бити потребан. Да би се дошло до закључка, често се Мјурхедова неједнакост комбинује са другим неједнакостима.

Пример 31. Докажимо да за $x_1,\ldots,x_n>0$ важи

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n-1]{\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{x_i}}\right)^{x_1+\ldots+x_n} \leqslant x_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_n}.$$

На основу Мјурхедове неједнакости важи $T[\underbrace{\tfrac{1}{n-1},\ldots,\tfrac{1}{n-1}}_{n-1},0] \leqslant T[1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}]$, одакле је $\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[n-1]{\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{x_i}} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$, па је довољно доказати да је испуњено $\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^{x_1+\ldots+x_n} \leqslant x_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_n}$. Логаритмовањем и срећивањем се добија еквивалентна неједнакост $\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{x_1\ln x_1+\ldots+x_n\ln x_n}{x_1+\ldots+x_n}$, тј. $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\cdot\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{x_1\ln x_1+\ldots+x_n\ln x_n}{n}$, која се непосредно добија из Јенсенове неједнакости примењене на конвексну функцију $x\ln x$, при $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$. Једнакост се достиже само ако и само ако је $x_1=\ldots=x_n$.

Оно што се чешће јавља је да се захтева процена израза на неком подскупу његовог домена (условни екстремум; овакви захтеви се обично дају ученицима у току средњошколског образовања). У таквим захтевима се испоставља да Мјурхедова неједнакост може бити корисна чак и приликом процене израза који нису истог степена хомогености, а у том случају услов обично служи да се помоћу њега неједнакост трансформише у облик у којем су стране истог степена хомогености. У наставку ћемо такве ситуације приказати кроз неколико примера.

Пример 32. Докажимо да за $a, b, c > 0$, такве да је $a + b + c = 1$, важи

$$ab + bc + ca \geqslant 4\big(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\big) + 5abc.$$

Израз $ab+bc+ca$ је хомоген, степена 2, израз $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ је хомоген, степена 4, а израз abc је хомоген, степена 3, па на први поглед Мјурхедова неједнакост не може помоћи у овом случају. Међутим, приметимо да је захтев да се наведена неједнакост испита само за промењиве за које је $a + b + c = 1$, па је идеја да наведени услов искористимо да неједнакост трансформишемо у еквивалентну, код које ће сви сабирци бити истог степена хомогености. Наведена неједнакост је, под условом $a + b + c = 1$, $a, b, c > 0$, еквивалентна са

$$(a + b + c)^2(ab + bc + ca) \geqslant 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 5abc(a + b + c)$$

(приметимо да смо израз који је био степена хомогености 2 помножили са $(a+b+c)^2$, а израз који је био степена хомогености 3 са $a+b+c$; како је $a+b+c$ хомоген, степена хомогености 1, на овај начин ћемо добити да су сви сабирци који учествују у неједнакости степена хомогености 4), односно, након сређивања, наведена неједнакост је еквивалентна са $T[3, 1, 0] + T[2, 2, 0] + \frac{5}{2} \cdot T[2, 1, 1] \geqslant 2T[2, 2, 0] + \frac{5}{2} \cdot T[2, 1, 1]$, тј. са $T[3, 1, 0] \geqslant T[2, 2, 0]$, која је тачна, пошто $(3, 1, 0) \succ (2, 2, 0)$. Једнакост се достиже ако и само ако је $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Пример 33. Докажимо да за $a, b, c > 0$, за које је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, важи

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8.$$

Услов којим су везане промењиве је еквивалентан са $ab + bc + ca = abc$, а наведена неједнакост са $abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \geqslant 8$, односно, ако искористимо услов, са $a + b + c \geqslant 9$. Како је лева страна последње неједнакости степена хомогености 1, десна степена хомогености 0, а функција $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ (која учествује у услову) степена хомогености 1, трансформишимо добијену неједнакост у облик $a + b + c \geqslant 9 \cdot \frac{abc}{ab+bc+ca}$, односно $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqslant 9abc$, тј. $T[2, 1, 0]+\frac{1}{2}\cdot T[1, 1, 1] \geqslant \frac{3}{2}\cdot T[1, 1, 1]$, односно $T[2, 1, 0] \geqslant T[1, 1, 1]$. Добијена неједнакост је тачна на основу Мјурхедове неједнакости, пошто $(2, 1, 0) \succ (1, 1, 1)$. Једнакост се достиже ако и само ако је $a = b = c = 3$.

Пример 34. Докажимо да за $a, b, c > 0$, такве да је $abc = 1$, важи

$$\frac{a^3}{(b + 1)(c + 1)} + \frac{b^3}{(c + 1)(a + 1)} + \frac{c^3}{(a + 1)(b + 1)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Множењем са $4(a+1)(b+1)(c+1)$ добија се еквивалентна неједнакост $4(a^4 + b^4 + c^4)+4(a^3+b^3+c^3) \geqslant 3abc+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3$, односно, ако услов искористимо за корекцију степена хомогености сабирака (да сви постану степена хомогености 4), добија се еквивалентна неједнакост $4(a^4 + b^4 + c^4) + 4(abc)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) \geqslant 3(abc)^{\frac{1}{3}} \cdot abc + 3(abc)^{\frac{2}{3}} \cdot (ab + bc + ca) + 3abc(a + b + c) + 3(abc)^{\frac{4}{3}}$, односно

$$2T[4, 0, 0] + 2T\left[\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right] \geqslant T\left[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right] + \tfrac{3}{2} \cdot T\left[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3}\right] + \tfrac{3}{2} \cdot T[2, 1, 1],$$

која је тачна на основу Мјурхедове неједнакости, пошто и $(4,0,0)$ и $\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ мајорирају сваки од $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $(2,1,1)$, а на странама неједнакости се налази једнак број a-средина (збир коефицијената којима се множе средине на обе стране неједнакости је 4). Једнакост се достиже ако и само ако је $a=b=c=1$.

Пример 35. Докажимо да за $a,b,c>0$, такве да је $abc=1$, важи

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

Како је $a,b,c>0$, а стране неједнакости степена хомогености -4 и 0, уколико бројиоце разломака на левој страни неједнакости прикажемо у облику $(abc)^{\frac{4}{3}}$ (што можемо, на основу услова којим су везане променљиве), добијамо неједнакост којој су стране истог степена хомогености (степена 0). Множењем неједнакости са $(b+c)(c+a)(a+b)$ и сређивањем, добијамо еквивалентну неједнакост

$$\tfrac{3}{2}\cdot T[2,1,0]+\tfrac{1}{2}\cdot T[1,1,1] \leqslant T\left[\tfrac{7}{3}, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{2}{3}\right]+\tfrac{1}{2}\cdot T\left[\tfrac{7}{3}, \tfrac{7}{3}, -\tfrac{5}{3}\right]+\tfrac{1}{2}\cdot T\left[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}\right],$$

која је последица правило упарене три Мјурхедове неједнакости, пошто $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right) \succ (2,1,0)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \succ (2,1,0)$ и $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \succ (1,1,1)$ (заправо, у закључку је само битно да се $T[1,1,1]$ процени са $T\left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right]$, пошто $(2,1,0) \succ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$). Једнакост се достиже ако и само ако је $a=b=c=1$.

Из претходних примера видимо да се количина рачуна која је потребна да се неједнакости овог типа сведу на основне драстично повећава усложњавањем неједнакости. Стога се Мјурхедова неједнакост често комбинује са другим неједнакостима, које, правилно примењене, могу драстично смањити количину рачуна која је неопходна. У наредном примеру је помогла неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског (за $n\in\mathbb{N}$ и $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$ важи $\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right) \geqslant (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2$, уз достизање једнакости ако и само ако су вектори $(a_1,\dots,a_n)$ и $(b_1,\dots,b_n)$ зависни), која се често користи у старијим разредима средње школе (наравно, и касније).

Пример 36. Ако је $k\in\mathbb{N}$, докажимо да за $a,b,c\geqslant 0$, такве да је $a+b+c=1$, важи

$$\frac{a^{k+2}}{a^{k+1}+b^k+c^k}+\frac{b^{k+2}}{b^{k+1}+c^k+a^k}+\frac{c^{k+2}}{c^{k+1}+a^k+b^k} \geqslant \frac{1}{7}\,.$$

Означимо са L израз на левој страни наведене неједнакости. Како је, на основу неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског,

$$\begin{aligned}
\left(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}\right)^2 &= \Bigg(\sqrt{\tfrac{a^{k+2}}{a^{k+1}+b^k+c^k}}\cdot\sqrt{a^k(a^{k+1}+b^k+c^k)} \\
&+ \sqrt{\tfrac{b^{k+2}}{b^{k+1}+c^k+a^k}}\cdot\sqrt{b^k(b^{k+1}+c^k+a^k)}+\sqrt{\tfrac{c^{k+2}}{c^{k+1}+a^k+b^k}}\cdot\sqrt{c^k(c^{k+1}+a^k+b^k)}\Bigg)^2 \\
&\leqslant L\cdot\Big(a^k\big(a^{k+1}+b^k+c^k\big)+b^k\big(b^{k+1}+c^k+a^k\big)+c^k\big(c^{k+1}+a^k+b^k\big)\Big) \\
&= L\cdot\Big(\big(a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1}\big)+2\big(a^kb^k+b^kc^k+c^ka^k\big)\Big),\ \text{следи} \\
L &\geqslant \frac{\left(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}\right)^2}{\big(a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1}\big)+2\big(a^kb^k+b^kc^k+c^ka^k\big)}=K,
\end{aligned}$$

па је довољно доказати да је $K \geqslant \frac{1}{7}$. Користећи услов, можемо трансформисати последњу неједнакост тако да буде хомогена, конкретно, еквивалентна је са

$$\frac{\left(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}\right)^2}{\left(a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1}\right)(a+b+c)+2\left(a^kb^k+b^kc^k+c^ka^k\right)(a+b+c)^2} \geqslant \frac{1}{7},$$

односно, након сређивања, са $\frac{7}{2}\cdot T[2k+2,0,0]+7T[k+1,k+1,0] \geqslant \frac{1}{2}\cdot T[2k+2,0,0]+T[2k+1,1,0]+2T[k+2,k,0]+T[k,k,2]+2T[k+1,k+1,0]+4T[k+1,k,1]$, односно

$$3T[2k+2,0,0]+5T[k+1,k+1,0] \geqslant T[2k+1,1,0]+2T[k+2,k,0]+T[k,k,2]+4T[k+1,k,1].$$

Последња неједнакост следи из Мјурхедове неједнакости, пошто $(2k+2,0,0) \succ (2k+1,1,0)$, $(2k+2,0,0) \succ (k+2,k,0)$, $(k+1,k+1,0) \succ (k+1,k,1)$ и $(k+1,k+1,0) \succ (k,k,2)$ и одговарајући су коефицијенти уз одговарајуће a-средине. Анализом свих коришћених неједнакости, следи да се једнакост достиже ако и само ако је $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Шурова неједнакост и њене примене

Мјурхедова теорема даје услове под којима се могу поредити две a-средине. Уколико су изрази које поредимо линеарне комбинације a-средина (пребацивањем на одговарајућу страну неједнакости се може претпоставити да су то комбинације код којих су коефицијенти ненегативни), као последице добијамо нове неједнакости. Овакав поступак је дао решење у претходна три примера, зато што су се добијене неједнакости могле раставити на неколико неједнакости које се своде на Мјурхедову неједнакост. Међутим, није јасно да ли је могуће поредити изразе уколико се неједнакост коју доказујемо не може разложити на описани начин на више неједнакости.

На пример, уколико би желели да упоредимо изразе $T[3,0,0]+T[1,1,1]$ и $2T[2,1,0]$ на описани начин, долазимо до проблема. Оба израза су комбинација две a-средине, важи $(3,0,0) \succ (2,1,0) \succ (1,1,1)$, па је $T[3,0,0] \geqslant T[2,1,0] \geqslant T[1,1,1]$. Међутим, израз $T[3,0,0]$ не мора бити већи од $2T[2,1,0]$, па у овом случају није јасно како доћи до закључка (поготово ако се ослањамо само на Мјурхедову теорему). На ово питање ћемо одговорити у наредном примеру, а поређење оваквих израза, који се не могу разложити на коначно много Мјурхедових неједнакости, је мотивисало развој нових неједнакости, међу којима је и неједнакост показана у наредној теореми.

Теорема 6 (Шурова неједнакост). Нека је $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Онда важи

$$T[a+2b,0,0]+T[a,b,b] \geqslant 2\cdot T[a+b,b,0].$$

Доказ. Означимо, зарад лакшег праћења, променљиве x_1,x_2,x_3, са x,y,z, редом. Онда је

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\cdot\left(T[a+2b,0,0]+T[a,b,b]-2\cdot T[a+b,b,0]\right) &= \left(x^{a+2b}+y^{a+2b}+z^{a+2b}\right)\\ &+ \left(x^ay^bz^b+x^by^az^b+x^by^bz^a\right)\\ &- \left(x^{a+b}y^b+x^{a+b}z^b+y^{a+b}x^b+y^{a+b}z^b+z^{a+b}x^b+z^{a+b}y^b\right)\\ &= x^a\left(x^b-y^b\right)\left(x^b-z^b\right)+y^a\left(y^b-x^b\right)\left(y^b-z^b\right)+z^a\left(z^b-x^b\right)\left(z^b-y^b\right).\end{aligned}$$

Докажимо неједнакост у случају $x \geqslant y \geqslant z$ (због симетрије, одатле ће следити доказ и у преосталих пет случајева).

1° Ако је $a \geqslant 0$, онда је $x^a\big(x^b-y^b\big)\big(x^b-z^b\big)+y^a\big(y^b-x^b\big)\big(y^b-z^b\big) \geqslant y^a\big(x^b-y^b\big)\big(y^b-z^b\big)+y^a\big(y^b-x^b\big)\big(y^b-z^b\big)=0$, па како је $z^a\big(z^b-x^b\big)\big(z^b-y^b\big) \geqslant 0$, следи да је уочени израз ненегативан.

2° Ако је $a<0$, онда је $y^a\big(y^b-x^b\big)\big(y^b-z^b\big)+z^a\big(z^b-x^b\big)\big(z^b-y^b\big) \geqslant y^a\big(y^b-x^b\big)\big(y^b-z^b\big)+y^a\big(y^b-x^b\big)\big(z^b-y^b\big)=0$, па како је $x^a\big(x^b-y^b\big)\big(x^b-z^b\big) \geqslant 0$, следи да је уочени израз ненегативан.

Једнакост се достиже ако и само ако је $x=y=z$. □

Пример 37. Докажимо да за $x,y,z>0$ важи $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant xyz$. Наведена неједнакост је еквивалентна са $x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2 \leqslant x^3+y^3+z^3+3xyz$, односно са $T[3,0,0]+T[1,1,1] \geqslant 2T[2,1,0]$, што се добија из Шурове неједнакости избором $a=b=1$. Притом се једнакост достиже ако и само ако је $x=y=z$.

Приметимо да смо у претходном примеру одговорили и на питање постављено на почетку овог дела, на које нисмо могли да одговоримо ослањајући се само на Мјурхедову неједнакост. Шурова неједнакост је формулисана за векторе у $\mathbb{R}^3$, будући да даје процену између одговарајућих a-средина генерисаних векторима код којих се, по описаном правилу, мењају само три координате вектора, но, наравно, она је применљива и на средине генерисане векторима из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$ (преосталих $n-3$ координата остају непромењене). Проблеми у којима је за добијање коначног закључка поред Мјурхедове неједнакости потребно на прави начин употребити и неједнакост Шура (или неке друге неједнакости) се у оквиру средње школе обично налазе на највишим нивоима такмичења, а може се рећи и да Шурова неједнакост даје праву снагу применама Мјурхедове неједнакости. На крају овог дела приказаћемо неколико таквих примера.

Пример 38. Докажимо да за $a,b,c \geqslant 0$, такве да је $a+b+c \geqslant 1$, важи

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

На основу неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског, следи

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \left(\sqrt{\tfrac{a\sqrt{a}}{b+c}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}\,(b+c)}+\sqrt{\tfrac{b\sqrt{b}}{c+a}}\cdot\sqrt{\sqrt{b}\,(c+a)}+\sqrt{\tfrac{c\sqrt{c}}{a+b}}\cdot\sqrt{\sqrt{c}\,(a+b)}\right)^2\\ &\leqslant \left(\tfrac{a\sqrt{a}}{b+c}+\tfrac{b\sqrt{b}}{c+a}+\tfrac{c\sqrt{c}}{a+b}\right)\cdot\big(\sqrt{a}\,(b+c)+\sqrt{b}\,(c+a)+\sqrt{c}\,(a+b)\big),\end{aligned}$$

па, уз коришћење услова $a+b+c \geqslant 1$, следи

$$\begin{aligned}\frac{a\sqrt{a}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c}}{a+b} &\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}\,(b+c)+\sqrt{b}\,(c+a)+\sqrt{c}\,(a+b)}\\ &\geqslant \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}\,(b+c)+\sqrt{b}\,(c+a)+\sqrt{c}\,(a+b)}\end{aligned}$$

(последња процена је урађена да би се добио израз степена хомогености 0), па је довољно доказати да важи

$$\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}\,(b+c)+\sqrt{b}\,(c+a)+\sqrt{c}\,(a+b)} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Последња неједнакост је еквивалентна са $4(a+b+c)^3 \geqslant 3\big(\sqrt{a}\,(b+c)+\sqrt{b}\,(c+a)+\sqrt{c}\,(a+b)\big)^2$, односно, након сређивања, са $2T[3,0,0]+12T[2,1,0]+4T[1,1,1] \geqslant 3T[2,1,0]+3T\big[2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]+3T\big[\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\big]+6T\big[\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\big]+3T[1,1,1]$, тј. са

$$2T[3,0,0]+9T[2,1,0]+T[1,1,1] \geqslant 3T\big[2,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\big]+3T\big[\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},0\big]+6T\big[\tfrac{3}{2},1,\tfrac{1}{2}\big].$$

У добијеној неједнакости се јавља по 12 a-средина са обе стране. Притом су $T[3,0,0]$ и $T[2,1,0]$ већи од било ког сабирка који се јављају на десној страни (вектори $(3,0,0)$ и $(2,1,0)$ мајорирају произвољан од $\big(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)$, $\big(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\big)$, $\big(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\big)$), али $T[1,1,1]$ то није (заправо, он је мањи од произвољне a-средине која се јавља на десној страни), па се тражена процена не може добити праволинијском применом Мјурхедове теореме. Једна од могућности да се проблем отклони је да се искористи Шурова неједнакост за процену у којој учествује члан $T[1,1,1]$. Како је $T[3,0,0]+T[1,1,1] \geqslant 2T[2,1,0]$, важи $2T[3,0,0]+9T[2,1,0]+T[1,1,1] \geqslant T[3,0,0]+11T[2,1,0]$, а добијени израз је, по малопређашњем закључку, већи од десне стране добијене неједнакости (по Мјурхедовој теореми и $T[3,0,0]$ и $T[2,1,0]$ су већи од произвољног од $T\big[2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]$, $T\big[\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\big]$, $T\big[\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\big]$, а на странама неједнакости учествује по 12 оваквих сабирака). Једнакост се достиже ако и само ако је $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Пример 39. Докажимо да за $x,y,z>0$ важи

$$\frac{x^3}{y^2-yz+z^2}+\frac{y^3}{z^2-zx+x^2}+\frac{z^3}{x^2-xy+y^2} \geqslant 3\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\,.$$

Неједнакост је еквивалентна са $\frac{x^3(y+z)}{y^3+z^3}+\frac{y^3(z+x)}{z^3+x^3}+\frac{z^3(x+y)}{x^3+y^3} \geqslant 3\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, односно, након множења са $(y^3+z^3)(z^3+x^3)(x^3+y^3)(x+y+z)$ и груписања чланова, са $T[10,1,0]+T[9,2,0]+T[9,1,1]+T[7,4,0]+T[7,3,1]+T[6,5,0]+2T[6,4,1]+T[6,3,2]+T[5,3,3]+2T[4,4,3] \geqslant 3T[7,4,0]+3T[7,3,1]+3T[6,4,1]+3T[4,4,3]$, па се након скраћивања добија $T[10,1,0]+T[9,2,0]+T[9,1,1]+T[6,5,0]+T[6,3,2]+T[5,3,3] \geqslant 2T[7,4,0]+2T[7,3,1]+T[6,4,1]+T[4,4,3]$.

На основу Мјурхедове неједнакости је

$$T[10,1,0] \geqslant T[7,4,0],\quad T[9,2,0] \geqslant T[7,4,0],\quad T[6,5,0] \geqslant T[6,4,1],\quad T[6,3,2] \geqslant T[4,4,3],$$

а на основу Шурове (за $a=4$, $b=2$) је $T[8,0,0]+T[4,2,2] \geqslant 2T[6,2,0]$, па множењем последње добијене неједнакости са $xyz>0$, добијамо

$$T[9,1,1]+T[5,3,3] \geqslant 2T[7,3,1].$$

Неједнакост коју треба доказати се добија сабирањем добијених 5 неједнакости. Једнакост се достиже ако и само ако је $x=y=z$.

Пример 40. Докажимо да за $x, y, z > 0$, такве да је $xyz \geqslant 1$, важи

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

Након множења неједнакости са $(x^5+y^2+z^2)(y^5+z^2+x^2)(z^5+x^2+y^2)$ и сређивања, добија се еквивалентна неједнакост $\frac{1}{2} \cdot T[9,0,0] + 2T[7,5,0] + T[7,2,0] - \frac{1}{2} \cdot T[6,0,0] + \frac{1}{2} \cdot T[5,5,5] + \frac{1}{2} \cdot T[5,2,2] - T[5,4,0] - T[4,2,0] - T[7,2,0] - \frac{1}{2} \cdot T[5,5,2] - \frac{1}{2} \cdot T[2,2,2] \geqslant 0$, односно

$$\begin{aligned} &T[9,0,0] + 4 \cdot T[7,5,0] + T[5,5,5] + T[5,2,2] \\ &\qquad \geqslant T[6,0,0] + 2 \cdot T[5,4,0] + 2 \cdot T[4,2,0] + T[5,5,2] + T[2,2,2]. \end{aligned}$$

Шурова неједнакост (за $a = 5$, $b = 2$), комбинована са Мјурхедовом неједнакошћу ($(7,2,0) \succ (7,1,1)$, па је $T[7,2,0] \geqslant T[7,1,1]$; $(6,0,0) \succ (4,2,0)$, па је $T[6,0,0] \geqslant T[4,2,0]$) и условом $xyz \geqslant 1$, даје

$$T[9,0,0] + T[5,2,2] \geqslant 2 \cdot T[7,2,0] \geqslant 2 \cdot T[7,1,1] \geqslant 2 \cdot T[6,0,0] \geqslant T[6,0,0] + T[4,2,0],$$

а Мјурхедова неједнакост, опет комбинована са $xyz \geqslant 1$, даје

$$\begin{aligned} &T[7,5,0] \geqslant T[5,5,2], && 2 \cdot T[7,5,0] \geqslant 2 \cdot T[6,5,1] \geqslant 2 \cdot T[5,4,0], \\ &T[5,5,5] \geqslant T[2,2,2], && T[7,5,0] \geqslant T[6,4,2] \geqslant T[4,2,0] \end{aligned}$$

(пошто $(7,5,0) \succ (5,5,2)$, $(7,5,0) \succ (6,5,1)$ и $(7,5,0) \succ (6,4,2)$), па се сабирањем последње добијених неједнакости добија тражена неједнакост. Једнакост се достиже ако и само ако је $x = y = z = 1$.

3. Примене конвексности у линеарној алгебри

Појам конвексности функције има смисла и за функције $f : U \to \mathbb{R}$, где је U конвексан скуп (у произвољном реалном векторском простору, не обавезно у $\mathbb{R}$), а основне особине се непосредно преносе и на ову ситуацију (на пример, тврђења лема 1 и 2 се преносе и на овај случај скоро праволинијски). Наравно, постоје и тврђења која су у општој ситуацији доста незахвалнија за контролу. Но, по самој дефиницији конвексности, за очекивати је да се и у случају када домен није у $\mathbb{R}$ добију неједнакости различитих облика. У овом делу ћемо приказати неколико таквих тврђења уколико је $U \subseteq M_n(\mathbb{R})$ или $U \subseteq M_n(\mathbb{C})$ (матрице димензија $n \times n$ са елементима из $\mathbb{R}$, односно $\mathbb{C}$), у циљу да се до неке мере употпуне резултати приказани у главном делу рада, прикажу нека уопштења, а и наслуте могући правци даљег проширивања добијених резултата.

Наведимо основне појмове линеарне алгебре које ћемо користити у овом делу. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ се назива нормална ако важи $AA^* = A^*A$ (ако је $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, онда је $A^* = (\overline{a}_{ji})_{i,j=1}^n$), ермитска ако важи $A^* = A$, а унитарна ако је $A^* = A^{-1}$ (уколико посматрамо одговарајуће релације у $M_n(\mathbb{R})$, уобичајна нотација је да се матрица за коју је $A^T = A$ назива симетрична, а матрица за коју је $A^T = A^{-1}$ ортогонална). Приметимо да ако је матрица ермитска или унитарна, онда је и нормална. Са $\langle \cdot, \cdot \rangle$ биће означен стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), а са $(\lambda_i)_{i=1}^n$ сопствене вредности матрице, где су сопствене вредности означене тако да важи $|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$. Уколико будемо желели да нагласимо да су у питању сопствене вредности матрице A, писаћемо и $\lambda_i(A)$, а уколико је јасно о којој се матрици ради, писаћемо само λ_i. Напоменимо да ћемо у овом делу рада за вектор $a = (a_i)_{i=1}^n$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, под $f(a)$ подразумевати вектор $(f(a_i))_{i=1}^n$. Специјално, $|a|$ ће означавати вектор $(|a_i|)_{i=1}^n$. Приликом рада са уведеним појмовима наредно тврђење има велику практичну вредност.

Лема 7 (Шурово разлагање). Ако је $A \in M_n(\mathbb{C})$, онда постоји унитарна $U \in M_n(\mathbb{C})$, тако да је $T = UAU^*$ горњетроугаона матрица. Притом се на главној дијагонали T налазе сопствене вредности матрице A. Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$, онда се U може изабрати тако да буде ортогонална. Матрица A је нормална ако и само ако је T дијагонална.

Доказ претходне леме се може наћи у већини уџбеника линеарне алгебре, па га овде изостављамо. Непосредно закључујемо да су сопствене вредности ермитске матрице реалне (и више, $A \in M_n(\mathbb{C})$ је ермитска ако и само ако постоје унитарна U и дијагонална $D \in M_n(\mathbb{R})$, тако да је $A = U^*DU$; притом су елементи главне дијагонале матрице D управо сопствене вредности матрице A). Уколико су те сопствене вредности позитивне (ненегативне), A се назива позитивно (ненегативно) дефинитна. За $A \in M_n(\mathbb{C})$, матрице AA^* и A^*A су ненегативно дефинитне (и имају исте сопствене вредности), а бројеви $s_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, се називају сингуларним вредностима матрице A (као и у случају сопствених вредности, нумерисаћемо их тако да је $s_1(A) \geqslant \ldots \geqslant s_n(A)$, а уколико је јасно о којој матрици се ради, писаћемо и само s_i уместо $s_i(A)$; приметимо да је $\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 \geqslant 0$ за свако $x \in \mathbb{R}^n$, па је $s_i(A)$ добро дефинисан и ненегативан). Користећи лему 7, непосредно следи да су у случају нормалне матрице везе између сингуларних и сопствених вредности прилично једноставне. Наиме, важи $s_i(A) = \left|\lambda_i(A)\right|$ за $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ако је $A \in M_n(\mathbb{C})$, придружена матрица реда k је матрица $C_k(A)$, чији су елементи минори реда k матрице A у одговарајућем поретку. Прецизније, уколико фамилију подскупова са k елемената скупа $\{1, \ldots, n\}$ уредимо лексикографски (та фамилија има $\binom{n}{k}$ елемената; нека су $l_1, \ldots, l_{\binom{n}{k}}$ чланови те фамилије индексовани по лексикографском уређењу), $C_k(A)$ је матрица чији је елемент на месту (i, j) једнак минору матрице A одређеном врстама чији индекси припадају l_i и колонама чији индекси припадају l_j.

Непосредно из дефиниције следи да је $C_k(A^*) = \big(C_k(A)\big)^*$, $C_k(\lambda A) = \lambda^k C_k(A)$, уколико је A инвертибилна онда је $C_k(A^{-1}) = \big(C_k(A)\big)^{-1}$, важи $C_1(A) = A$, $C_n(A) = \det A$, а на основу Бине–Кошијевог правила је $C_k(AB) = C_k(A)C_k(B)$. Такође, тривијално следи и да, уколико је A горњетроугаона, дијагонална, унитарна (ортогонална), ермитска (симетрична), позитивно (ненегативно) дефинитна или нормална, да $C_k(A)$ има исту особину. Специјално, важи и $C_k(A^*A) = \big(C_k(A)\big)^* C_k(A)$. Важно својство матрице $C_k(A)$ је да су њене сопствене вредности $\prod\limits_{i \in l_j} \lambda_i$, за $1 \leqslant j \leqslant \binom{n}{k}$ (производи по k сопствених вредности матрице A).

Конвексни скупови у простору матрица

Конвексни скупови у $\mathbb{R}^n$ су, на пример, тачка, дуж, потпростор. Приметимо да унија два потпростора, ако није и сама потпростор, не може бити конвексна. Заиста, ако су то L_1 и L_2 и ако су $x \in L_1$, $y \in L_2$ такви да $x \notin L_2$, $y \notin L_1$ (постоје такви x и y, иначе би важило $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$), на основу конвексности $\frac{x+y}{2} \in L_1 \cup L_2$, па $\frac{x+y}{2}$ припада бар једном од њих. Ако, без умањења општости, претпоставимо $\frac{x+y}{2} \in L_1$, онда $y = 2 \cdot \frac{x+y}{2} - x \in L_1$, што противречи избору y.

Пример 41. Ако је $n \in \mathbb{N}$ и ако су $x_1, \ldots, x_n$ елементи неког реалног векторског простора, скуп $P(x_1, \ldots, x_n) = \big\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \geqslant 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1\big\}$ је конвексан. То је, у скуповном смислу, најмањи конвексан скуп који садржи тачке $x_1, \ldots, x_n$. Обично се назива полиедром одређеним тачкама $x_1, \ldots, x_n$.

Типични примери полиедара су симплекси. На пример, ако је $x_1 \neq x_2$, онда је $P(x_1, x_2)$ дуж чији су крајеви тачке x_1 и x_2. Ако је x нека тачка те дужи, онда је $P(x_1, x_2, x) = P(x_1, x_2)$. Наравно, од интереса је полиедар описати помоћу што мање тачака.

Лема 8. Нека су $x_1, \ldots, x_n$ елементи реалног векторског простора. Онда постоје јединствени $y_1, \ldots, y_m \in P(x_1, \ldots, x_n)$ тако да је $P(y_1, \ldots, y_m) = P(x_1, \ldots, x_n)$, а притом $y_i \notin P(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m)$ за произвољно $1 \leqslant i \leqslant m$.

Доказ. Прво ћемо показати да постоје $(y_i)_{i=1}^m$ са описаним својством. Ако је $n = 1$, тврђење је тривијално. Претпоставимо да је тврђење показано за све бројеве мање од n и посматрајмо векторе $x_1, \ldots, x_n$. Ако је то скуп линеарно независних вектора, опет је тврђење тривијално. Иначе, без умањења општости, можемо претпоставити да $x_1 \in P(x_2, \ldots, x_n)$. По претпоставци, то значи да постоје $y_1, \ldots, y_m$ (међу којима ниједан није конвексна комбинација преосталих) и важи

$P(y_1,\dots,y_m) = P(x_2,\dots,x_n)$, али онда и $x_1 \in P(y_1,\dots,y_m)$, па је $P(y_1,\dots,y_m) = P(x_1,\dots,x_n)$.

Остаје да се докаже јединственост. Ако би постојали $z_1,\dots,z_r$ (међу којима ниједан није конвексна комбинација преосталих) такви да је $P(z_1,\dots,z_r) = P(x_1,\dots,x_n) = P(y_1,\dots,y_m)$, онда је $y_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j z_j$, за свако $1 \leqslant i \leqslant m$ и неке $\alpha_j \in [0,1]$, такве да је $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j = 1$, као и $z_j = \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_{jl} y_l$, за свако $1 \leqslant j \leqslant r$ и неке $\beta_{jl} \in [0,1]$, такве да је $\sum\limits_{l=1}^{m} \beta_{jl} = 1$. Следи $y_i = \sum\limits_{l=1}^{m} \Big(\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j \beta_{jl}\Big) y_l$, па како су $y_1,\dots,y_m$ независни, следи да је $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j \beta_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } l = i \\ 0, & \text{ако је } l \neq i \end{cases}$. Како је $0 \leqslant \beta_{jl} \leqslant 1$, следи $1 = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j \beta_{ji} \leqslant \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \beta_{ji} \cdot \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j = 1$, што је могуће само ако је добијени максимум једнак 1, односно ако је неки од β_{ji} једнак 1. Међутим, онда остали морају бити једнаки 0, што значи да је y_i једнак неком од z_j, одакле се лако закључује јединственост. $\square$

Тачке $(y_i)_{i=1}^{m}$ описане у претходној леми се називају и врховима (теменима) уоченог полиедра, а оне су и екстремне тачке полиедра (нису унутрашња тачка произвољне дужи чији крајеви припадају полиедру, односно x је екстремна тачка конвексног скупа P ако не постоје $z_1 \neq z_2$ у P и $\lambda \in (0,1)$, тако да је $x = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$).

Пример 42. Скуп свих $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ таквих да је $a_{ij} \geqslant 0$ је конвексан у $M_n(\mathbb{R})$. Такође, скуп свих $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ таквих да је $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ за свако $1 \leqslant j \leqslant n$, као и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, је конвексан у $M_n(\mathbb{R})$. Заиста, ако је $J \in M_n(\mathbb{R})$ матрица чији су сви елементи једнаки 1, онда се претходни услови своде на $AJ = JA = J$. Ако су A_1 и A_2 матрице са описаним својством и $\lambda \in [0,1]$, онда је $\big(\lambda A_1 + (1-\lambda) A_2\big) J = \lambda A_1 J + (1-\lambda) A_2 J = \lambda J + (1-\lambda) J = J$, као и $J\big(\lambda A_1 + (1-\lambda) A_2\big) = \lambda J A_1 + (1-\lambda) J A_2 = \lambda J + (1-\lambda) J = J$, па и $\lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$ има наведено својство.

На простору матрица је доста непријатније контролисати појмове који су испитивани у случају $\mathbb{R}$ у прве две главе, као што су конвексност и мајорација. Жеља за лакшом контролом тих појмова довела је до потребе за описом матрица са посебним својствима, што ће бити урађено у наставку.

Дефиниција 5. За матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{R})$ кажемо да је **двоструко стохастичка** ако важи

(1) $a_{ij} \geqslant 0$ за свако $1 \leqslant i, j \leqslant n$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ за свако $1 \leqslant j \leqslant n$;

(3) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$.

Скуп свих двоструко стохастичких матрица из $M_n(\mathbb{R})$ означимо са Ω_n.

Приметимо да је скуп Ω_n конвексан (непосредно следи из примера 42, пошто је Ω_n пресек два конвексна скупа описана у том примеру). Такође, ако $A, B \in \Omega_n$, онда $AB \in \Omega_n$ и $A^* \in \Omega_n$.

Пример 43. Ако је $U \in M_n(\mathbb{C})$ унитарна, онда је матрица чији су елементи $|u_{ij}|^2$, за $1 \leqslant i, j \leqslant n$, двоструко стохастичка. За уочену пермутацију σ (на скупу $\{1, \dots, n\}$), матрица $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$, таква да је $p_{i\sigma(i)} = 1$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, док су преостали елементи једнаки 0, је двоструко стохастичка. За $x = (x_i)_{i=1}^n$ је Px вектор којем је i-та координата једнака $x_{\sigma(i)}$, тј. вектор Px је вектор који се добија пермутацијама координата вектора x. Зато се овакве матрице називају матрицама пермутација. Ако је P матрица пермутације, а A двоструко стохастичка, онда су и PA и AP двоструко стохастичке (по закључку који је претходио овом примеру, производ две двоструко стохастичке матрице је двоструко стохастичка матрица).

Матрице пермутација су, по претходном примеру, двоструко стохастичке. Међутим, преко њих се могу описати све двоструко стохастичке матрице, у смислу у ком је то показано у тврђењима која следе. Напоменимо да под дијагоналом матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ сматрамо било који избор n елемената, тако да се у свакој врсти и свакој колони налази бар један од изабраних, односно ако постоји пермутација σ скупа $\{1, \dots, n\}$ тако да су изабрани елементи $(a_{i\sigma(i)})_{i=1}^n$.

Лема 9 (Кениг–Фробенијус). Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Онда свака дијагонала матрице A садржи елемент једнак 0 ако и само ако A има подматрицу димензија $k \times l$ чији су сви елементи једнаки 0 и важи $k + l > n$.

Доказ. Ако су P и Q матрице пермутације, онда PAQ и A имају подматрице чији су сви елементи 0 једнаких димензија. Следи да ако A има такву подматрицу димензије $k \times l$, можемо претпоставити да је матрица има блок матрично представљање облика $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ (где је са 0 означена поменута подматрица, чији су сви елементи 0). У приказаном представљању, матрица B је димензија $k \times (n - l)$. Ако је $(d_{i\sigma(i)})_{i=1}^n$ дијагонала чији су сви елементи различити од 0, следи да су $d_{i\sigma(i)}$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, елементи матрице B, па мора бити $k \leqslant n - l$, односно $k + l \leqslant n$, чиме је доказан један смер тврђења.

Други смер докажимо индукцијом по димензији n. За $n = 1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо да свака дијагонала матрице димензије n садржи бар један елемент једнак 0 и да је тврђење тачно за $n - 1$. Ако је A нула матрица, тврђење је тривијално. Иначе, постоји $a_{ij} \neq 0$, па свака дијагонала матрице која се из A добија избацивањем i-те врсте и j-те колоне мора садржати 0. Та матрица је квадратна, димензије $n - 1$, па како свака њена дијагонала садржи бар један елемент једнак 0, по индуктивној претпоставци садржи бар једну подматрицу димензије $r \times s$, тако да је $r + s > n - 1$, чији су сви елементи једнаки 0. Следи да A садржи бар једну матрицу димензије $r \times (n - r)$ чији су сви елементи једнаки 0, па постоје пермутационе матрице P и Q тако да A има блок матрично представљање облика $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$, где 0 означава уочену подматрицу димензија $r \times (n - r)$. Притом, матрица B је квадратна, димензије r, а C квадратна, димензије $n - r$, па свака дијагонала бар једне од њих мора садржати 0. Без умањења општости, нека је то B. Онда, по индуктивној претпоставци, B садржи подматрицу димензија $t \times q$, где је $t + q > r$, чији су сви елементи једнаки 0. Међутим, онда A

садржи матрицу димензија $t \times (n-r+q)$ чији су сви елементи једнаки 0 и притом је $t+(n-r+q) = n+(t+q-r) > n$. $\square$

Теорема 7 (Биркоф–фон Нојман). Екстремне тачке скупа Ω_n су матрице пермутација.

Доказ. У примеру 43 је показано да су матрице пермутација двоструко стохастичке. Ако је P матрица пермутације σ, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ двоструко стохастичке и $\lambda \in [0,1]$ такви да важи $\lambda A + (1-\lambda)B = P$, онда је $1 = p_{i\sigma(i)} = \lambda a_{i\sigma(i)} + (1-\lambda)b_{i\sigma(i)} \leqslant 1$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, па мора бити $a_{ij} = b_{ij} = 1$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, па остали елементи матрица A и B морају бити једнаки 0, односно мора бити $A = B = P$, тј. P је екстремна тачка скупа Ω_n.

Приметимо да двоструко стохастичка $A \in M_n(\mathbb{R})$ мора имати бар n ненула елемената (у свакој врсти барем један), а ако је број ненула елемената баш n, у питању је матрица пермутације. Такође, A мора имати бар једну дијагоналу на којој су сви елементи различити од 0. Заиста, ако је $k \times l$ нула подматрица матрице A, постоје пермутационе матрице P_1 и P_2 тако да је $P_1AP_2 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ одговарајуће блок матрично представљање матрице A, а димензија 0 блока је $k \times l$. Притом је и P_1AP_2 двоструко стохастичка, па је збир елемената сваке врсте матрице B, као и сваке колоне матрице C, једнак 1, односно збир свих елемената матрица B и C једнак је $k+l$. Како је збир свих елемената матрице A једнак n, следи $k+l \leqslant n$, па на основу леме 9 следи да постоји дијагонала чији су сви елементи различити од 0.

Нека је m број ненула елемената двоструко стохастичке $A \in M_n(\mathbb{R})$. По претходном, важи $m \geqslant n$, а ако је $m = n$, у питању је матрица пермутације (па је и конвексна комбинација матрица пермутација). Ако је $m > n$, претпоставимо да се свака двоструко стохастичка матрица са највише $m-1$ ненула елемената изражава у облику конвексне комбинација матрица пермутације. По претходном, постоји бар једна дијагонала чији су сви елементи различити од 0, па ако је a најмањи елемент такве дијагонале и P пермутациона матрица која одговара тој дијагонали, онда је $B = \frac{1}{1-a} \cdot (A - aP)$ двоструко стохастичка и има највише $m-1$ елемент различит од 0. Следи да је B конвексна комбинација матрица пермутација, па је то и $A = aP + (1-a)B$ (A је конвексна комбинација матрица B и P). На основу доказаног, тврђење следи индукцијом. $\square$

Претходна теорема говори да је свака двоструко стохастичка матрица конвексна комбинација матрица пермутација, што може бити веома практично. На пример, приликом одређивања максимума конвексне $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$, довољно одредити максимум на матрицама пермутација. Приметимо да је и матрица L трансформације (описане у леми 6 и након ње) двоструко стохастичка (матрица L трансформације је конвексна комбинација идентичког пресликавања и транспозиције која мења елементе i и j), па се двоструко стохастичке матрице природно повезују са појмом мајорације.

Лема 10. Нека су $a = (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ и $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Онда $a \succ b$ ако и само ако за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $\sum\limits_{i=1}^n |a_i - x| \geqslant \sum\limits_{i=1}^n |b_i - x|$.

Доказ. Ако је $x \geqslant b_1^{\downarrow}$, онда је $\sum\limits_{i=1}^n |b_i - x| = \sum\limits_{i=1}^n (x - b_i) = nx - \sum\limits_{i=1}^n b_i = nx - \sum\limits_{i=1}^n a_i =$

$\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-x|$. Ако је $b_k^{\downarrow} \leqslant x < b_{k-1}^{\downarrow}$ за $2 \leqslant k \leqslant n$, онда је $\sum\limits_{i=1}^{n}|b_i-x| = \sum\limits_{i=1}^{k-1}(b_i^{\downarrow}-x)+\sum\limits_{i=k}^{n}(x-b_i^{\downarrow}) = (n-2k+2)x+2\cdot\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i^{\downarrow}-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{\downarrow} \leqslant (n-2k+2)x+2\cdot\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_i^{\downarrow}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\downarrow} = \sum\limits_{i=1}^{k-1}(a_i^{\downarrow}-x)+\sum\limits_{i=k}^{n}(x-a_i^{\downarrow}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-x|$. Коначно, ако је $x < b_n^{\downarrow}$, онда је $\sum\limits_{i=1}^{n}|b_i-x| = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-x) = \sum\limits_{i=1}^{n}b_i-nx = \sum\limits_{i=1}^{n}a_i-nx = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-x) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-x|$. $\square$

Теорема 8. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ је двоструко стохастичка ако и само ако за сваки $x \in \mathbb{R}^n$ важи $Ax \prec x$.

Доказ. Ако $Ax \prec x$ за свако x, онда је $Ae \prec e$, где је $e \in \mathbb{R}^n$ вектор чије су све координате једнаке 1. Специјално, збир координата вектора Ae је једнак n, па како сваки вектор чији је збир координата једнак n маројира e, важи $e \prec Ae$, па је Ae вектор који се добија пермутацијама координата вектора e, а како су све координате e једнаке, следи $Ae = e$, а то значи да је збир координата сваке врсте матрице A једнак 1. Слично, ако је e_i, за $1 \leqslant i \leqslant n$, вектор чија је i-та координата једнака 1, а преостале 0, важи $Ae_i \prec e_i$, па су координате вектора Ae_i (који је једнак вектору i-те колоне матрице A) ненегативне (ако би нека била негативна, пошто је збир свих једнак 1, збир $n-1$ највећих би био већи од 1, па не би могло бити $Ae_i \prec e_i$), а то што је збир координата Ae_i једнак 1 повлачи да је збир координата i-те колоне матрице A једнак 1.

Са друге стране, ако је $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ двоструко стохастичка и $x = (x_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$, координате вектора Ax су $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, па по особинама матрице A и како је $|x|$ конвексна на $\mathbb{R}$, следи да за $z \in \mathbb{R}$ важи

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j - z\Big| = \sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j - z)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j - z| = \sum_{j=1}^{n}|x_j - z|.$$

На основу претходне леме, следи да $Ax \prec x$. $\square$

Из до сада доказаног непосредно следи и наредна лема.

Лема 11. Ако су $x, y \in \mathbb{R}^n$, наредна тврђења су еквивалентна:

(1) $x \succ y$;

(2) y се добија из x применом коначно много L трансформација;

(3) y припада конвексном омотачу свих вектора добијених од вектора x пермутацијама његових координата;

(4) $y = Ax$ за неку двоструко стохастичку матрицу A.

Пример 44. Матрица $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ је двоструко стохастичка, а важи $u = (3,3,0) \prec (4,2,0) = v$. Како је $Au = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$ и $Av = (2,2,2)$, следи да ако $u \prec v$, не мора бити $Au \prec Av$ (у овом примеру чак $Au \succ Av$).

Прикажимо и резултат који употпуњује тврђење о Караматиној неједнакости (зарад потпуности, у оквиру њега је дат и доказ Караматине неједнакости помоћу резултата добијених у овом делу рада).

Лема 12. Ако су $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, наредна тврђења су еквивалентна:

(1) $x \succ y$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^n f(x_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^n f(y_i)$ за сваку конвексну функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Доказ. Ако $x \succ y$, постоји двоструко стохастичка $A = (a_{ij})_{i=1}^n$ тако да је $y = Ax$, па на основу Јенсенове неједнакости следи $f(y_i) = f\big(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\big) \leqslant \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}f(x_j)$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, па је $\sum\limits_{i=1}^n f(y_i) \leqslant \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n a_{ij}f(x_j) = \sum\limits_{j=1}^n f(x_i)$.

Са друге стране, како је $f(x) = |x - z|$ конвексна за свако $z \in \mathbb{R}$, тврђење следи непосредно на основу леме 10. □

Двоструко стохастичке матрице се природно повезују и са нормалним матрицама.

Пример 45. Ако је $A \in M_n(\mathbb{C})$ нормална, $(\lambda_i)_{i=1}^n$ њене сопствене вредности и $(u_i)_{i=1}^k$ ортонормиран скуп у $\mathbb{C}^n$. Нека је $z_i = \langle Au_i, u_i\rangle$ за $1 \leqslant i \leqslant k$. На основу леме 7 постоје ортонормирани $(v_i)_{i=1}^n$, тако да је $Av_i = \lambda_i v_i$, па је $Au_j = A\Big(\sum\limits_{i=1}^n \langle u_j, v_i\rangle v_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^n \langle u_j, v_i\rangle \lambda_i v_i$ за $1 \leqslant j \leqslant k$, а како је $u_j = \sum\limits_{i=1}^n \langle u_j, v_i\rangle v_i$ за $1 \leqslant j \leqslant k$, важи $\langle Au_j, u_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \big|\langle u_j, v_i\rangle\big|^2$ за $1 \leqslant j \leqslant k$. Ако допунимо $(u_i)_{i=1}^k$ до потпуног ортонормираног система на $\mathbb{C}^n$ (векторе допуне означимо са $u_{k+1}, \ldots, u_n$) и ако је $S = \big(\big|\langle u_i, v_j\rangle\big|^2\big)_{i,j=1}^n$, онда је матрица S двоструко стохастичка. Заиста, важи $1 = \|u_i\|^2 = \sum\limits_{j=1}^n \big|\langle u_i, v_j\rangle\big|^2$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ пошто су $(v_i)_{i=1}^n$ ортонормирани, а аналогно је и $1 = \|v_j\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n \big|\langle u_i, v_j\rangle\big|^2$ за $1 \leqslant j \leqslant n$ по ортонормираности $(v_j)_{j=1}^n$. Приметимо да добијену везу можемо видети у облику $z_j = \langle S_{(j)}, \lambda\rangle$ за $1 \leqslant j \leqslant k$, где $S_{(j)}$ означава i-ту врсту матрице S, а $\lambda = (\overline{\lambda}_i)_{i=1}^n$.

Конвексне функције на простору матрица

Први, тривијални примери, се могу пренети са случаја функција реалне променљиве. На пример, линеаран функционал дефинисан на конвексном подскупу у $M_n(\mathbb{R})$ је и конвексна и конкавна функција. Такође, функција $f(A) = \operatorname{tr} A$ је и конвексна и конкавна на $M_n(R)$

Пример 46. Ако је $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}$ конвексна (конкавна) и $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Онда је $F : \Omega_n \to \mathbb{R}$ дефинисана са $F(S) = f\big(\langle S_{(1)}, x\rangle, \ldots, \langle S_{(k)}, x\rangle\big)$ конвексна (конкавна), где $S_{(k)}$ означава k-ту врсту матрице S. Заиста, ако је $S, T \in \Omega_n$ и $\lambda \in [0, 1]$, онда је

$$\begin{aligned} F(\lambda S + (1-\lambda)T) &= f\big(\langle(\lambda S + (1-\lambda)T)_{(1)}, x\rangle, \ldots, \langle(\lambda S + (1-\lambda)T)_{(k)}, x\rangle\big) \\ &= f\big(\lambda\langle S_{(1)}, x\rangle + (1-\lambda)\langle T_{(1)}, x\rangle, \ldots, \lambda\langle S_{(k)}, x\rangle + (1-\lambda)\langle T_{(k)}, x\rangle\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \lambda f\big(\langle S_{(1)}, x\rangle, \ldots, \langle S_{(k)}, x\rangle\big) + (1-\lambda) f\big(\langle T_{(1)}, x\rangle, \ldots, \langle T_{(k)}, x\rangle\big)\\
&= \lambda F(S) + (1-\lambda) F(T).
\end{aligned}$$

Уколико је $A \in M_n(\mathbb{C})$ нормална, $S \in \Omega_n$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$ као у примеру 45, а $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}$ конвексна, на основу претходног примера је $F(S) = f\big(\langle S_{(1)}, \lambda\rangle, \ldots, \langle S_{(k)}, \lambda\rangle\big)$ конвексна, па на основу теореме 7 максимум достиже за неку матрицу пермутација S, што значи да је $\max\limits_{(u_i)_{i=1}^k} f\big(\langle Au_1, u_1\rangle, \ldots, \langle Au_k, u_k\rangle\big) = \max\limits_{l_1 < \ldots < l_k} f(\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_k})$ (овде је $(u_i)_{i=1}^k$ ортонормиран скуп, а максимум са десне стране је по свим k-торкама различитих индекса). Аналогно, уколико је функција конкавна, минимум се такође достиже у некој пермутационој матрици. Ако изаберемо ермитску $A \in M_n(\mathbb{C})$ и функцију $f(z_1, \ldots, z_k) = z_1 + \ldots + z_k$, која је линеарна (па је и конвексна и конкавна), добијамо наредну лему.

Лема 13. Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$ ермитска, $(\lambda_i)_{i=1}^n$ њене сопствене вредности (индексоване тако да важи $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$) и $(u_i)_{i=1}^k$ ортонормирани вектори (у $\mathbb{C}^n$). Онда је

$$\sum_{i=1}^k \lambda_{n-i+1} \leqslant \sum_{i=1}^k \langle Au_i, u_i\rangle \leqslant \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

Из добијених резултата можемо добити чувено Вејлово тврђење о односу сингуларних и сопствених вредности произвољне матрице (подсетимо, уколико је матрица нормална, однос сингуларних и сопствених вредности смо закључили непосредно на основу леме 7).

Лема 14 (Вејл). Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$, $(\lambda_i)_{i=1}^n$ њене сопствене вредности (индексоване тако да важи $|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$) и $(s_i)_{i=1}^n$ њене сингуларне вредности ($s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_n$). Онда за свако $1 \leqslant k \leqslant n-1$ важи $|\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k| \leqslant s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$, док је $|\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n| = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$.

Доказ. За $k = 1$ применом претходне леме на ненегативно дефинитну матрицу A^*A и ако је v јединични сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_1, добијамо $|\lambda_1|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle \leqslant \max\limits_{\|u\|=1} \langle A^*A, u, u\rangle = \lambda_1(A^*A) = s_1^2$, тј. $|\lambda_1| \leqslant s_1$. За $2 \leqslant k \leqslant n-1$, тврђење добијамо применом тврђења за $k = 1$ на придружену матрицу реда k, пошто је највећа (по модулу) сопствена вредност матрице $C_k(A)$ једнака $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k$, а највећа сингуларна вредност $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$. За $k = n$ важи $|\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n|^2 = |\det A|^2 = \big(C_n(A)\big)^* C_n(A) = C_n(A^*A) = \det(A^*A) = (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n)^2$, па је $|\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n| = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. □

Као што је у леми 13 процењено $\sum\limits_{i=1}^k \langle Au_i, u_i\rangle$ (преко сопствених вредности ермитске матрице A), могуће је проценити и још неке симетричне функције израза $\langle Au_i, u_i\rangle$ (неке од њих уз јаче услове на A). У наредној леми ћемо приказати како се то може урадити за производ ових вредности.

Лема 15. Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$ ненегативно дефинитна, $(\lambda_i)_{i=1}^n$ њене сопствене вредности (индексоване тако да важи $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$) и $(u_i)_{i=1}^k$ ортонормирани вектори (у $\mathbb{C}^n$). Онда је

$$\prod_{i=1}^k \lambda_{n-i+1} \leqslant \prod_{i=1}^k \langle Au_i, u_i\rangle \leqslant \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^k \lambda_i}{k}\right)^k.$$

Доказ. Како је A ненегативно дефинитна, важи $\langle Au_i, u_i\rangle \geqslant 0$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, па на основу неједнакости између геометријске и аритметичке средине, као и леме 13, следи $\prod\limits_{i=1}^{k}\langle Au_i, u_i\rangle \leqslant \Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\langle Au_i,u_i\rangle}{k}\Big)^k \leqslant \Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i}{k}\Big)^k$.

Ако је $(x_i)_{i=1}^k, (y_i)_{i=1}^k \in [0,\infty)^k$, онда је

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} x_i\Big)^{\frac{1}{k}} + \Big(\prod_{i=1}^{k} y_i\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{k}(x_i+y_i)\Big)^{\frac{1}{k}}.$$

Заиста, ако је $x_i = y_i = 0$ за неко $1 \leqslant i \leqslant k$, тврђење је тривијално. Иначе, на основу неједнакости између геометријске и аритметичке средине важи

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{i=1}^{k} x_i\Big)^{\frac{1}{k}} + \Big(\prod_{i=1}^{k} y_i\Big)^{\frac{1}{k}} &= \Big(\prod_{i=1}^{k}(x_i+y_i)\Big)^{\frac{1}{k}} \cdot \Big[\Big(\prod_{i=1}^{k}\tfrac{x_i}{x_i+y_i}\Big)^{\frac{1}{k}} + \Big(\prod_{i=1}^{k}\tfrac{y_i}{x_i+y_i}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big]\\ \leqslant\quad &\Big(\prod_{i=1}^{k}(x_i+y_i)\Big)^{\frac{1}{k}} \cdot \Big[\tfrac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\tfrac{x_i}{x_i+y_i} + \tfrac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\tfrac{y_i}{x_i+y_i}\Big] = \Big(\prod_{i=1}^{k}(x_i+y_i)\Big)^{\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

Ако је $z = (z_i)_{i=1}^k$ и $f : [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(z) = f(z_1,\dots,z_k) = (z_1\cdot\ldots\cdot z_k)^{\frac{1}{k}}$, добијени резултат (ако се још обе стране неједнакости поделе са 2) говори да је $\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\big(\frac{x+y}{2}\big)$, тј. да је f Јенсен–конкавна, па како је и непрекидна, следи да је f конкавна. На основу закључка добијеног у примеру 46, следи $\prod\limits_{i=1}^{k}\langle Au_i, u_i\rangle \geqslant$ $\min\limits_{(u_i)_{i=1}^k} f\big(\langle Au_1,u_1\rangle,\dots,\langle Au_k,u_k\rangle\big) = \min\limits_{l_1<\ldots<l_k} f(\lambda_{l_1},\dots,\lambda_{l_k}) = \prod\limits_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}$. ☐

У наставку, као завршни део овог рада, приказаћемо неколико историјски познатих резултата који се могу добити применом описане технике.

Лема 16 (Адамарова за детерминанте). Ако је $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$, онда је

$$\big|\det A\big|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

Доказ. Нека је e_i, за $1 \leqslant i \leqslant n$, вектор чија је i-та координата једнака 1, а простале 0. Како је A^*A ненегативно дефинитна, $\det(A^*A)$ је једнако производу сопствених вредности матрице A^*A, па на основу леме 15, важи $\big|\det A\big|^2 = \det A^*\det A =$ $\det(A^*A) \leqslant \prod\limits_{j=1}^{n}\langle A^*Ae_j, e_j\rangle = \prod\limits_{j=1}^{n}\langle Ae_j, Ae_j\rangle = \prod\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2$. ☐

Иначе, непосредно се закључује да се једнакост у неједнакости из претходне леме достиже ако и само ако је A^*A дијагонална или ако нека од колона A има све елементе једнаке 0. Приметимо да у случају да је A ненегативно дефинитна, претходно тврђење говори да је $\det A \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ (у овом облику се тврђење најчешће појављује у уџбеницима линеарне алгебре).

Лема 17 (Минковског за детерминанте). Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ненегативно дефинитне, онда је

$$\big(\det(A+B)\big)^{\frac{1}{n}} \geqslant \big(\det A\big)^{\frac{1}{n}} + \big(\det B\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Доказ. Нека је $(v_i)_{i=1}^n$ ортонормирани скуп састављен од сопствених вектора матрице $A+B$ (она је ненегативно дефинитна, па такав скуп постоји). На основу неједнакости $\Big(\prod\limits_{i=1}^k x_i\Big)^{\frac{1}{k}} + \Big(\prod\limits_{i=1}^k y_i\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant \Big(\prod\limits_{i=1}^k (x_i+y_i)\Big)^{\frac{1}{k}}$, за $(x_i)_{i=1}^k, (y_i)_{i=1}^k \in [0,\infty)^k$, која је показана у доказу леме 15, као и тврђења те леме за $k=n$ и како је производ свих сопствених вредности квадратне матрице једнак њеној детерминанти, важи

$$\begin{aligned}\big(\det(A+B)\big)^{\frac{1}{n}} &= \Big(\prod_{i=1}^n \langle (A+B)v_i, v_i\rangle\Big)^{\frac{1}{n}} = \Big(\prod_{i=1}^n \big(\langle Av_i, v_i\rangle + \langle Bv_i, v_i\rangle\big)\Big)^{\frac{1}{n}} \\ &\geqslant \Big(\prod_{i=1}^n \langle Av_i, v_i\rangle\Big)^{\frac{1}{n}} + \Big(\prod_{i=1}^n \langle Bv_i, v_i\rangle\Big)^{\frac{1}{n}} \geqslant \big(\det A\big)^{\frac{1}{n}} + \big(\det B\big)^{\frac{1}{n}}. \quad \square\end{aligned}$$

Ако је $g(A) = \big(\det A\big)^{\frac{1}{n}}$, тврђење претходне леме се своди на $g\big(\frac{A+B}{2}\big) \geqslant \frac{g(A)+g(B)}{2}$, за ненегативно дефининитне A и B, односно на Шур–конкавност функције g на простору таквих матрица (а како је g непрекидна на том скупу, неједнакост је заправо и еквивалентна конкавности функције g на скупу ненегативних квадратних матрица реда n). Може се показати да се, уколико су A и B несингуларне, једнакост достиже ако и само ако је $B = \alpha A$ за неко $\alpha > 0$. Приметимо и да је (услед ненегативне дефинитности) $\det A \geqslant 0$ и $\det B \geqslant 0$, па на основу претходне леме следи $\det(A+B) \geqslant \big[\big(\det A\big)^{\frac{1}{n}} + \big(\det B\big)^{\frac{1}{n}}\big]^n \geqslant \det A + \det B$ (за ненегативне квадратне матрице истих димензија), а последње добијена неједнакост се обично среће у уџбеницима линеарне алгебре (наравно, добијена последица је слабије тврђење, па се често виђају и докази који избегавају тврђење претходне леме).

Лема 18 (Вејлова о мајорацији). Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$, $(s_i)_{i=1}^n$ њене сингуларне, а $(\lambda_i)_{i=1}^n$ њене сопствене вредности (нумерисане тако да је $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_n$ и $|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$). Нека је $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ функција, таква да је $f(e^x)$ конвексна и растућа. Онда за свако $1 \leqslant k \leqslant n$ важи $\sum\limits_{i=1}^k f(|\lambda_i|) \leqslant \sum\limits_{i=1}^k f(s_i)$.

Доказ. Довољно је доказати тврђење под претпоставком да је A несингуларна (у случају сингуларне матрице, резултат се преноси на основу непрекидности). Онда је $|\lambda_i| > 0$ и $s_i > 0$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, па је дефинисано $\ln|\lambda_i|$ и $\ln s_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. На основу везе између сопствених и сингуларних вредности (лема 14), следи да $u = \big(\ln|\lambda_1|, \ldots, \ln|\lambda_n|\big) \prec (\ln s_1, \ldots, \ln s_n) = v$. На основу леме 11, важи $u = Av$ за неку двоструко стохастичку A, а функција $g : (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$, за $1 \leqslant k \leqslant n$, дефинисана са $g(z_1, \ldots, z_k) = \sum\limits_{i=1}^k f(e^{z_i})$ је конвексна, па на основу закључка спроведеног у примеру 46 је $G : \Omega_n \to \mathbb{R}$, дефинисана са $G(S) = g\big(\langle S_{(1)}, v\rangle, \ldots, \langle S_{(k)}, v\rangle\big)$, конвексна.

Приметимо да је $G(A) = g(\ln|\lambda_1|, \ldots, \ln|\lambda_k|) = \sum\limits_{i=1}^k f(|\lambda_i|)$, а уколико је P_σ матрица пермутације σ, која на местима $(i, \sigma(i))$ има елемент 1, а на преосталима

0, онда је $G(P) = g(\ln s_{\sigma(1)}, \ldots, \ln s_{\sigma(k)}) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(s_{\sigma(i)})$. На основу конвексности G, следи да се максимум на Ω_n достиже у некој матрици пермутација, па је $G(A) \leqslant \max\limits_{\sigma \in S_n} \sum\limits_{i=1}^{k} f(s_{\sigma(i)})$ (где S_n означава скуп свих пермутација на $\{1, \ldots, n\}$), а како је f растућа, добијамо тврђење леме. $\square$

При условима претходне леме, примењене на $f(x) = x^p$ за $p > 0$, добијамо да важи $\sum\limits_{i=1}^{k} |\lambda_i|^p \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} s_i^p$ (у овом облику се тврђење често среће по литератури, будући да је то првобитни облик тврђења до ког је дошао Вејл). Приметимо и да су завршни резултати овог дела текста прилично испреплетени (на пример, Адамарово тврђење о детерминанти се може добити и применом Вејловог тврђења о мајорацији). Такође, одавде се наслућује један од могућих праваца уопштавања резултата који су изложени у овом раду, пошто је након добијеног логично питање у којој мери се ова теорија може пренети на бесконачно димензиони случај (на пример, на простор ограничених линеарних оператора на неком Хилбертовом простору).

Лема 19 (Шур–Хорн). Нека су $d = (d_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Онда постоји ермитска матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ чије су сопствене вредности λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, а елементи главне дијагонале $a_{ii} = d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ако и само ако $\lambda \succ d$.

Доказ. Ако је A ермитска и $d = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$, на основу леме 7 постоје унитарна $U = (u_{ij})_{i,j=1}^n$ и дијагонална D, тако да је $A = UDU^*$, где је главна дијагонала D једнака λ. Следи $a_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j |u_{ij}|^2$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, а како је матрица S чији су елементи $|u_{ji}|^2$ двоструко стохастичка (видети пример 43), следи $d = S\lambda$, па, на основу леме 11, следи $d \prec \lambda$.

Ако је $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ ермитска , $i < j$, $\lambda \in [0,1]$ и z комплексан број, тако да је $\overline{z} b_{ji} = -z b_{ij}$ и $|z| = 1$ (како је $\overline{b}_{ij} = b_{ji}$, такво z постоји), онда је $U = (u_{ij})_{i,j=1}^n$, таква да је

$$u_{kl} = \begin{cases} z\sqrt{\lambda}, & \text{ако је } (k,l) = (i,i) \\ \sqrt{\lambda}, & \text{ако је } (k,l) = (j,j) \\ -\sqrt{1-\lambda}, & \text{ако је } (k,l) = (i,j) \\ z\sqrt{1-\lambda}, & \text{ако је } (k,l) = (j,i) \\ 1, & \text{ако је } k = l, k \notin \{i,j\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

унитарна, а матрица UBU^* ће на дијагонали, на местима (k,k), $k \notin \{i,j\}$ имати исте вредности као и матрица B, док ће на местима (i,i) и (j,j) имати вредности $\lambda b_{ii} + (1-\lambda) b_{jj}$ и $(1-\lambda) b_{ii} + \lambda b_{jj}$, редом, односно, дијагонала матрице UBU^* се добија из дијагонале матрице B применом L трансформације. Притом, матрице B и UBU^* имају исте сопствене вредности.

Коначно, за други смер тврђења, уочимо дијагоналну матрицу којој су елементи дијагонале λ. Пошто $d \prec \lambda$, по леми 11 се d добија из λ применом коначно много L трансформација, па се применом трансформација описаних у претходном пасусу, а који одговарају тим L трансформацијама, добија ермитска матрица којој су елементи дијагонале d, а сопствене вредности λ. $\square$

Иначе, по литератури се често виђа да се тврђење претходне леме раздваја и да се први део тврђења (ако је A ермитска, да онда $d \prec \lambda$) назива Шуровим, а други део тврђења Хорновим именом.

Завршна реч

Резултати приказани у првој, као и делу друге главе овог текста су, макар званично, саставни део плана и програма средњих школа природно–математичког смера. Међутим, пракса говори да се по текстовима намењеним овом узрасту обично налазе само у фрагментима, а ретко где се налази комплетније изложена материја. Резултати друге главе текста су последњих година постали саставни део припрема ученика за математичка такмичења, и то не само у Србији, а како је интернет доста урадио на пољу доступности информација, у све више земаља тематика везана за контролу неједнакости које су описане у овом раду постаје позната ученицима. Ово доводи и до тога да се на математичким такмичењима захтевност задатака у којима треба доказати одређену неједнакост подиже на све виши ниво.

По питању резултата треће главе, они се ретко срећу у оквиру средњошколског образовања. У Србији, обично се само делови обрађују у специјализованим математичким одељењима, а тешко је наћи материјал за овај узраст у којем је ова материја систематичније обрађена.

Жеља аутора, приликом израде овог рада, је била да се на једном месту изложи материја везана за примене конвексности у облику који се најчешће то захтева од ученика, као и да се покаже да сличан начин размишљања доводи и до резултата који превазилазе средњу школу, а да притом текст буде написан на начин који је њима доступан. Стога су нека тврђења и докази, који се могу скратити користећи неке технике које се обрађују на факултету, изложени на начин за који се надамо да ће бити приступачан ученицима тог узраста.

Литература

[1] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији*, Материјали за младе математичаре, свеска 49, друго издање, Друштво математичара Србије, Београд, 2011.

[2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Graduate texts in mathematics, 169, Springer–Verlag, New York, 1997.

[3] З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић, *Неједнакости*, Материјали за младе математичаре, свеска 42, Друштво математичара Србије, Београд, 2003.

[4] Г. Калајџић, *Линеарна алгебра*, БС Процесор, Математички факултет, Београд, 1994.

[5] Ђ. Кртинић, *Математичке олимпијаде средњошколаца 2007–2011. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 52, Друштво математичара Србије, Београд, 2012.

[6] П. Младеновић, Ђ. Кртинић, *Међународне и Балканске олимпијаде средњошколаца 1996–2006. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 48, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.