УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александра Д. Крејовић

ЛАНЦИ МАРКОВА СА НЕПРЕКИДНИМ ВРЕМЕНОМ И ПРИМЕНЕ

мастер рад

Београд, 2021.

Ментор:

др Јелена Јоцковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Павле Младеновић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ленка Главаш, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Садржај

Увод

Савремено људско друштво тежи да процесе који се одвијају на планети, па и ван ње држи под контролом и усмерава жељеним током. Разни хемијски, физички, биолошки, економски, политички и други процеси имају својство случајности. Чим је реч о случајности, ту се јавља појам вероватноће. Човек жели такве процесе добро да истражи, опише могуће исходе и придружи им одговарајуће вероватноће, предвиди будуће догађаје, смањи ризике које са собом носе непожељни догађаји, повећа шансу догађаја од којих има користи. Ту битну улогу имају теорије вероватноће и случајних процеса. Циљ је наћи одговарајући математички модел за такве појаве и процесе.

У овом раду ће бити речи о класи случајних процеса који се зову процеси Маркова. Назив су добили по руском математичару Андреју Маркову[1] који је заслужан за истраживање и увођење ових процеса. Како се вероватноћа током деветнаестог и почетком двадесетог века снажно развијала на просторима данашње Русије, тако су у то време развоју теорије случајних процеса, а самим тим и процеса Маркова највише допринели руски математичари. Посебно место у развоју теорије процеса Маркова заузима математичар Андреј Колмогоров[2], па се тако његово име помиње у многим резултатима везаним за процесе Маркова. С обзиром на то да широк спектар природних и друштвених процеса заправо јесу поменути процеси Маркова, у науци се и данас посвећује доста пажње њиховом проучавању. Значајна и највише истраживана поткласа процеса Маркова су ланци Маркова. Већина рукописа о ланцима Маркова се прво бави ланцима са дискретним временом, а затим ланцима са непрекидним временом. Многа од запажања, извођења и резултата добијених у дискретном случају се на аналоган начин преносе на непрекидан случај уз образложење, често без стриктних доказа. У овом раду ће сва

[1] Андрей Андреевич Марков, 1856-1922, руски математичар

[2] Андрей Николаевич Колмогоров, 1903-1987, руски математичар, сматра се оснивачем савремене теорије вероватноће

својства ланаца Маркова бити посматрана и показана у случају непрекидног времена.

У наставку ће бити посебно разматран случај процеса рађања и умирања и процеса чистог рађања. Биће описано и показано на примеру моделовање система масовног опслуживања процесима рађања и умирања. Биће дат пример примене ланаца Маркова са непрекидним временом у генетици. На крају ће мало пажње бити посвећено и тренутно најактуелнијој теми у свету, епидемији заразне болести $COVID-19$. Захваљујући примени коју имају у епидемиологији, многи од недавно представљених модела ширења и заустављања епидемије изазване вирусом $SARS\ COV\ 2$ се заснивају управо на ланцима Маркова.

Глава 1

Ланци Маркова са непрекидним временом

1.1 Случајни процеси и својство Маркова

„Случајност је незван, али често веома драг гост."
Шандор Петефи[1]

По својој природи појаве могу бити детерминистичке и случајне. Детерминистичке појаве су оне код којих услови под којима се одвијају једнозначно одређују њихов исход и њихово одвијање у будућности се може тачно прорачунати. Исходи случајних појава се због њиховог случајног карактера не могу унапред прорачунати, већ се само могу прогнозирати. На пример, уколико се баца коцка за игру, неизвесно је који ће број бити добијен. Међутим ако се баца коцка којој је дете обрисало вишак туфни тако да је са свих страна остала само по једна, јасно је да ће бити добијен број један. Нас управо интересују случајне појаве и случајни процеси.

Дефиниција 1.1.1 *Фамилија случајних величина* $\mathbf{X} = \{X(t),\ \ t \in T\}$ *дефинисаних на истом простору вероватноћа* (Ω, A, P)*, где је* T *бесконачан скуп се назива* ***случајни процес***.

Свако $X(t)$ узима вредност из неког скупа $S \subset \mathbb{R}$. Скуп T се зове **параметарски** или **индексни скуп**. Параметар $t \in T$ најчешће представља

[1]Petőfi Sándor, 1823-1849, мађарски песник

време. Скуп S је **скуп стања** случајног процеса. Случајна величина $X(t)$ представља стање процеса у тренутку t.

У зависности од природе скупа T разликујемо случајне процесе са **дискретним** и **непрекидним** параметром (временом). Уколико је T неки пребројив скуп, онда говоримо о случајним процесима са дискретним временом. У случају да је T непрекидан скуп, ради се о случајним процесима са непрекидним временом.

Пример 1. Коцка за игру се баца бесконачно много пута. Нека је X_n број добијен при n-том бацању коцке. У том случају је

$$T = \mathbb{N}, \quad S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Дакле, $\mathbf{X} = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ је случајни процес са дискретним временом и коначним скупом стања S.

Пример 2. Посматра се број клијената у реду за чекање на поштанском шалтеру који ради сваког дана у седмици током целог дана без прекида . Ако је $X(t)$ број клијената у реду у тренутку t (од почетка рада шалтера), тада је

$$T = [0,\ +\infty), \quad S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}.$$

Према томе, $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ је случајни процес са непрекидним временом и пребројивим скупом стања.

При бацању коцке, број добијен у n-том бацању не зависи од броја добијеног у $(n-1)$-ом бацању, нити од броја добијеног у било ком претходном бацању. Дакле, стања процеса у различитим временским тренуцима су независна. Међутим, у случају реда за чекање, јасно је да број клијената у реду у дванаест сати зависи од броја клијената у реду у пет до дванаест. Ако је тренутно у реду двадесет клијената, мала је вероватноћа да након пет минута у реду неће бити ни једног клијента. Дакле, стање процеса у неком будућем тренутку зависи од садашњег и од претходних стања процеса.

Неки случајни процеси имају својство да при услову да је познато садашње стање процеса, будућност процеса је независна од прошлости. Ово својство се зове **својство Маркова**, а случајне процесе који имају то својство зовемо **процесима Маркова**.

Пример 3. Посматрамо популацију зечева на одређеној територији. Јасно је да број јединки у популацији на крају године зависи од броја јединки на почетку године. Уколико хоћемо да прогнозирамо број зечева на крају године, од користи нам је податак о броју зечева на почетку године. Међутим, под условом да нам је познат број јединки на половини године, за предвиђање нам више није битан броју јединки на почетку године. Односно, имамо ,,свежије" податке и они стари нам више нису од користи.

У зависности од начина пристизања клијената и динамике опслуживања, често број клијената у реду у будућности не зависи од броја клијената у неком прошлом тренутку, под условом да је познато тренутно стање. Број добијен у неким будућим бацањима коцке не зависи ни од последњег, нити од било ког претходног бацања. Дакле, не постоји никаква зависност и важи својство Маркова.

Низ независних случајних величина је посебан случај процеса Макова јер будућност процеса не зависи ни од садашњости, ни од прошлости процеса.

1.2 Ланци Маркова

Марковски процеси код којих је скуп стања дискретан, тј. коначан или пребројив скуп се зову **ланци Маркова**.

Дефиниција 1.2.1 *Нека је* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \in T\}$ *случајни процес са скупом стања* S *који је коначан или пребројив скуп. Тада је* $\mathbf{X}$ *ланац Маркова ако он задовољава следеће својство (**својство Маркова**)*

$$P[X(t_{n+1}) = i_{n+1}|X(t_0) = i_0, ..., X(t_n) = i_n] = P[X(t_{n+1}) = i_{n+1}|X(t_n) = i_n],$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ *и произвољне* $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1} \in T$ *такве да* $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ *и коректно дефинисане условне вероватноће.*

Уколико посматрамо скуп T, разликујемо два типа ланаца Маркова:

- T је пребројив скуп - **Ланци маркова са дискретним временом**
- T је непрекидан скуп - **Ланци маркова са непрекидним временом**

Дефиниција 1.2.2 *Дискретан случајни процес* $\mathbf{X} = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *је ланац Маркова са дискретним временом ако за свако* $n \in \mathbb{N}_0$*, сва стања* $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ *и под условом да је* $P[X_0 = i_0, ..., X_n = i_n] > 0$ *важи*

$$P[X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, ..., X_n = i_n] = P[X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n].$$

Пример 4. Коцкар улази у казино са сумом новца s. У свакој рунди добија 3 са вероватноћом p и губи 1 са вероватноћом q. Максималан износ који може да заради је r, након тога мора да напусти казино. Казино напушта и када изгуби сав новац. Нека је $\mathbf{X} = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ процес такав да је X_n износ новца који има коцкар након n-те рунде.

Интуитивно је јасно да износ новца који коцкар може имати након следеће рунде зависи од суме новца коју тренутно има и притом не зависи од начина на који је дошао до тренутне суме.

Очигледно,

$$P[X_0 = s] = 1.$$

Под условом да је $P[X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0] > 0$, важи

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0] &= P[X_{n+1} = j | X_n = i] \\ &= \begin{cases} p, & \text{за } j = i + 3 \\ q, & \text{за } j = i - 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \end{aligned}$$

Дакле, $\mathbf{X}$ је ланац Маркова, и то ланац Маркова са дискретним временом ($T = \mathbb{N}_0$) и коначним скупом стања $S = \{0, 1, 2, 3, ..., r\}$.

1.3 Ланци Маркова са непрекидним временом - дефиниција и вероватноће прелаза

Неке појаве, међутим, не посматрамо само у дискретним временским тренуцима, већ непрекидно током времена. Тако неки случајни процеси не мењају стање само у дискретним временским тренуцима, већ се то може догодити у било ком тренутку $t \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 1.3.1 *Случајни процес* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *са коначним или пребројивим скупом стања* S *је ланац Маркова са непрекидним временом ако*

$$P[X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_0) = i_0, ..., X(t_n) = i_n] = P[X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n], \tag{1.1}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, сваки избор стања $i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in S$ и временских тренутака $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \in T$ таквих да $0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ и коректно дефинисане условне вероватноће.

Уведимо следећу ознаку за вероватноћу да се ланац који се у тренутку s налази у стању i, у неком будућем тренутку t нађе у стању j (**вероватноћа прелаза** из стања i у стање j)

$$p_{ij}(s,t) = P[X(t) = j | X(s) = i], \text{ за } s < t.$$

Ланац Маркова са непрекидним временом је **хомоген** у времену ако вероватноћа прелаза из неког стања i у неко стање j не зависи од временског тренутка већ само од дужине временског интервала, односно ако важи

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+v, t+v) &= P[X(t+v) = j | X(s+v) = i] \\ &= P[X(t) = j | X(s) = i] = p_{ij}(s,t), \end{aligned}$$

што убудуће обележавамо са

$$p_{ij}(t-s) = p_{ij}(s,t)$$

и зовемо вероватноћа прелаза из стања i у стање j за време $t-s$.

Посматрајмо хомогени ланац Маркова са непрекидним временом и скупом стања S. Нека је $P(t)$ следећа матрица

$$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j \in S}.$$

Матрица $P(t)$ се зове **матрица вероватноћа прелаза** за време t. У случају да је $|S| = m$, то је квадратна матрица димензије m. Ако је S бесконачан скуп, онда је $P(t)$ квадратна матрица бесконачне димензије.

За матрицу $P(t)$ важи

$$1) \quad p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad \text{за све } i, j \in S,\ t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

$$2) \quad \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1, \quad \text{за свако } i \in S,\ t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Особина (1.2) је директна последица својства ненегативности вероватноће (за сваки догађај A важи $P(A) \geqslant 0$), док (1.3) следи из својства нормираности (за сигуран догађај Ω важи $P(\Omega) = 1$).

Матрица која задовољава претходна два услова се назива **стохастичка матрица**.

Пример 5. Посматрамо сијалицу у једној просторији. Претпостављамо да је радни век сијалице експоненцијално расподељена случајна величина са очекивањем од 100 сати. Нека је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ случајни процес такав да важи

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{уколико је сијалица исправна у тренутку } t, \\ 0, & \text{уколико сијалица није исправна у тренутку } t. \end{cases}$$

Скуп стања процеса је коначан скуп $S = \{0, 1\}$. Процес се у почетном тренутку налази у стању 1, тј. $X(0) = 1$. Хоћемо да испитамо да ли је овај процес ланац Маркова. Јасно је да процес прелази из стања 1 у стање 0 у тренутку када сијалица престане да ради и систем заувек остаје у стању 0. Нека је T случајна величина која представља дужину живота сијалице. Она је експоненцијално расподељена и важи

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{за } t < T \\ 0, & \text{за } t \geqslant T \end{cases}.$$

Навешћемо једно важно својство експоненцијалне расподеле на коме почива марковско својство процеса са непрекидним временом.

За случајну величину T која има експоненцијалну расподелу са параметром λ, функцијом расподеле $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0$ и $s, t > 0$ важи следеће

$$P[T > t + s | T > s] = P[T > t].$$

Заиста,

$$\begin{aligned} P[T > t + s | T > s] &= \frac{P[T > t + s, T > s]}{P[T > s]} = \frac{P[T > t + s]}{P[T > s]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P[T > t]. \end{aligned}$$

Наведено својство се зове **својство одсуства памћења**.

Према дефиницији условне вероватноће и на основу чињенице да T у тачки x има функцију расподеле $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{100}x}$, добијамо следеће

$$\begin{aligned}
P[X(t_{n+1}) = 1 | X(t_n) = 1] &= \frac{P[X(t_{n+1}) = 1, X(t_n) = 1]}{P[X(t_n) = 1]} \\
&= \frac{P[T > t_{n+1}, T > t_n]}{P[T > t_n]} \\
&= \frac{P[T > t_{n+1}]}{P[T > t_n]} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{100}t_{n+1}}}{e^{-\frac{1}{100}t_n}} = e^{-\frac{1}{100}(t_{n+1} - t_n)}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&P[X(t_{n+1}) = 1 | X(t_n) = 1, X(t_{n-1}) = 1, \ldots, X(t_0) = 1] \\
&\quad = \frac{P[X(t_{n+1}) = 1, X(t_n) = 1, X(t_{n-1}) = 1, \ldots, X(t_0) = 1]}{P[X(t_n) = 1, X(t_{n-1}) = 1, \ldots, X(t_0) = 1]} \\
&\quad = \frac{P[T > t_{n+1}, T > t_n, \ldots, T > t_0]}{P[T > t_n, \ldots, T > t_0]} \\
&\quad = \frac{P[T > t_{n+1}]}{P[T > t_n]} \\
&\quad = e^{-\frac{1}{100}(t_{n+1} - t_n)}.
\end{aligned}$$

Када t_n и t_{n+1} заменимо са s и t, добијамо вероватноћу прелаза

$$p_{11}(s,t) = P[X(t) = 1 | X(s) = 1] = e^{-\frac{1}{100}(t-s)}.$$

Аналогно се рачунају вероватноће и за остале комбинације стања и добија се

$$\begin{aligned}
p_{10}(s,t) &= P[X(t) = 0 | X(s) = 1] = 1 - e^{-\frac{1}{100}(t-s)}, \\
p_{00}(s,t) &= P[X(t) = 0 | X(s) = 0] = 1, \\
p_{01}(s,t) &= P[X(t) = 1 | X(s) = 0] = 0.
\end{aligned}$$

Пошто је испуњена једнакост (1.1) за сваки избор стања $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1}$ и коректно дефинисане условне вероватноће, овај процес је ланац Маркова са непрекидним временом. С обзиром на то да $p_{ij}(s,t)$ зависи само од $t - s$, то је хомоген ланац са следећом матрицом вероватноћа прелаза

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{10}(t) \\ p_{01}(t) & p_{00}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{100}t} & 1 - e^{-\frac{1}{100}t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

што је директна последица својства одсуства памћења експоненцијалне расподеле.

Приметимо да у случају хомогеног ланца Маркова за матрицу P важи

$$P(s+t) = P(t)P(s). \tag{1.4}$$

Заиста, ако искористимо формулу потпуне вероватноће и својство Маркова, добијамо

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= P[X(s+t)=j|X(0)=i] \\
&= \sum_{k\in S} P[X(s+t)=j, X(s)=k|X(0)=i] \\
&= \sum_{k\in S} P[X(s+t)=j|X(s)=k, X(0)=i]P[X(s)=k|X(0)=i] \\
&= \sum_{k\in S} P[X(s+t)=j|X(s)=k]P[X(s)=k|X(0)=i] \\
&= \sum_{k\in S} p_{kj}(t)p_{ik}(s).
\end{aligned}$$

Матрична једначина (1.4) се зове једначина **Колмогоров - Чепмена**[2].

С обзиром на то да је

$$p_{ij}(0) = P[X(t)=j|X(t)=i] = \begin{cases} 1, & \text{за } j=i \\ 0, & \text{за } j\neq i \end{cases},$$

за матрицу $P(t)$ још важи

$$P(0) = I.$$

1.4 Ланац скокова и дужина задржавања

Када говоримо о ланцима Маркова са дискретним временом, јасно је да се процес може задржати у неком стању одређени број јединица времена. На пример, један сат, један дан, седам дана или заувек. Но, колико дуго се ланац Маркова са непрекидним временом задржава у неком стању?

[2]Sydney Chapman, 1888-1970, енглески математичар и геофизичар

Дефиниција 1.4.1 *Случајни процес* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *са највише пребројивим скупом стања* S *је процес скокова ако за скоро све* $\omega \in \Omega$ *и свако* $t \geqslant 0$ *постоји* $\epsilon = \epsilon(t, \omega)$ *тако да* $X(s, \omega) = X(t, \omega)$ *за* $\forall s \in \big[t, t + \epsilon(t, \omega)\big)$.

Дефиниција каже да промена стања процеса скокова није тренутна, процес остаје у стању неко време. Трајекторије су му непрекидне са десне стране.

Овакав процес је **регуларан** ако је додатно за скоро све $\omega \in \Omega$ скуп тачака прекида функције $t \mapsto X(t, \omega)$ σ-коначан, односно функција има коначно много прекида на интервалу $[0, c]$, за свако $c \geqslant 0$.

Посматрамо ланац Маркова $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ који је процес скокова, не обавезно регуларан. Означимо са $\mathbf{J} = (J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ низ транутака у којима процес $\mathbf{X}$ мења стање. Тада је

$$J_0 \equiv 0,$$

$$J_{n+1} = inf\{t \geqslant J_n : X(t) \neq X(J_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \inf\ \emptyset = +\infty.$$

Низ $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ зовемо **низ тренутака скокова** процеса $\mathbf{X}$.

За случајне величине J_n важи

$$J_0 \leqslant J_1 \leqslant J_2 \leqslant \cdots \leqslant J_n \leqslant \ldots$$

скоро сигурно (са вероватноћом 1). Уколико је $J_n < +\infty$ онда је $J_n < J_{n+1}$ јер су трајекторије процеса непрекидне са десне стране.

Нека је $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **низ дужина задржавања** процеса у стањима кроз која пролази. Тада је $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисано на следећи начин

$$W_n = \begin{cases} J_{n+1} - J_n, & \text{ако је } J_n < +\infty \\ +\infty, & \text{ако је } J_n = +\infty \end{cases}.$$

При томе важи да је $W_n > 0$ скоро сигурно јер се процес задржава у стању неко време.

Приметимо да је заправо

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k.$$

Уведимо сада још једну случајну величину

$$J_{+\infty} = \lim_{n \to +\infty} J_n = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} J_n = \sum_{k=0}^{+\infty} W_k \leqslant +\infty.$$

J_∞ представља **тренутак експлозије** процеса. Уколико је $J_\infty < +\infty$, процес има бесконачно много промена стања на коначном временском интервалу. Кажемо још да процес експлодира у коначном времену. Ако је $\mathbf{X}$ регуларан процес скокова, онда важи

$$P[J_{+\infty} < +\infty] = 0,$$

јер не може бити бесконачно много скокова на коначном временском интервалу, односно, вероватноћа да процес експлодира у коначном времену је једнака нули.

Нека је $\mathbf{Y} = \{Y_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ случајни процес дефинисан на следећи начин

$$Y_n = X(J_n),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Процес $\mathbf{Y}$ региструје стања кроз која пролази процес $\mathbf{X}$ не региструјући колико се он у тим стањима задржава и зове се **уметнути процес скокова** за процес $\mathbf{X}$.

Случајни процес $\mathbf{X}$ је могуће реконструисати на основу процеса $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{J}$ на следећи начин

$$X(t) = Y_{n-1}, \quad \text{за } J_{n-1} \leqslant t < J_n.$$

Теорема 1.4.1 *Нека је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ ланац Маркова са непрекидним временом и простором стања S. Претпоставља се да је ланац $\mathbf{X}$ временски хомоген. Тада важи:*
1) Уметнути процес скокова $\mathbf{Y}$ је хомоген ланац Маркова са дискретним временом, простором стања S и матрицом вероватноћа прелаза $R = [r_{ij}]_{i,j \in S}$.
2) За ненегативне тренутке $t_0, t_1, \ldots, t_m$ важи

$$P[W_0 \leqslant t_0, W_1 \leqslant t_1, \ldots, W_m \leqslant t_m | \sigma(Y)] = \prod_{n=0}^{m} P[W_n \leqslant t_n | \sigma(Y)] = \prod_{n=0}^{m} P[W_n \leqslant t_n | Y_n]$$

и постоји ненегативан врста вектор $\lambda = (\lambda_i)_{i \in S}$ тд.

$$P[W_n \leqslant t | Y_n = i] = 1 - e^{-\lambda_i t},\ t \geqslant 0.$$

Иако ову теорему остављамо без строгог доказа, у наставку ћемо се потрудити да уверимо читаоца да тврдње важе.

Разликујемо три случаја:

- $\lambda_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad W_n = +\infty$ скоро сигурно и стање i је апсорбујуће (када доспе у то стање, систем ту остаје бесконачно дуго),
- $0 < \lambda_i < +\infty \quad \Longrightarrow \quad W_n$ има експоненцијалну расподелу са параметром λ_i ($W_n \in \mathcal{E}(\lambda_i)$),
- $\lambda_i = +\infty \quad \Longrightarrow \quad W_n = 0$ скоро сигурно и ланац тренутно напушта стање i, чим у њега уђе.

Међутим, убудуће претпостављамо да нема тренутних стања, тј. $\lambda_i \in [0, +\infty)$.

Вратимо се примеру (5). Тренутак када сијалица престане да ради, односно када процес пређе из стања 1 у стање 0 је тренутак првог скока процеса, J_1. Пошто сијалица остаје неисправна заувек, стање 0 је апсорбујуће стање. Јасно је да је W_1 у ствари дужина живота сијалице што смо досад означавали са T. Према томе, $W_1 \in \mathcal{E}(\frac{1}{100})$ и $\lambda_1 = \frac{1}{100}$. Дужина задржавања W_2 је бесконачна, $W_2 = +\infty$ и важи $\lambda_2 = 0$. За тренутак првог скока важи $J_1 \equiv W_1 \in \mathcal{E}(\frac{1}{100})$. Даље, $J_2 = W_1 + W_2 = +\infty$ и $J_n = +\infty$ за $n > 1$, односно процес нема више скокова у коначном времену.

Посматрајмо поново матрицу вероватноћа прелаза P хомогеног ланца Маркова $\mathbf{X}$.

Теорема 1.4.2 *За свако стање $i \in S$ постоји лимес*

$$p'_{ii}(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h},$$

који може бити и бесконачан и за сваки пар стања $i, j \in S, i \neq j$ постоји и коначан је следећи лимес

$$p'_{ij}(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Уведимо ознаке

$$q_{ij} = p'_{ij}(0), \quad i \neq j,$$

$$q_{ii} = p'_{ii}(0)$$

и

$$q_i = -q_{ii}.$$

Величина q_{ij} се назива **интензивност прелаза** ланца $\mathbf{X}$ из стања i у стање j.

Дефиниција 1.4.2 ***Инфинитезимални генератор*** *хомогеног ланца Маркова* $\mathbf{X}$ *је матрица*

$$Q = [q_{ij}]_{i,j\in S}.$$

Јасно је да важи

$$Q = P'(0).$$

При претпоставци регуларности важи и

$$q_i = \sum_{j\in S, j\neq i} q_{ij},$$

тј. збир елемената матрице Q по врстама је једнак нули. При услову регуларности лимес суме је једнак суми лимеса и важи $\sum_{j\in S} p_{ij}(h) = 1$ за свако $i \in S$ и $h \geqslant 0$, па ако кренемо од десне стране једнакости, добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S, j\neq i} q_{ij} &= \sum_{j\in S, j\neq i} \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h\to 0+} \sum_{j\in S, j\neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \sum_{j\in S, j\neq i} p_{ij}(h) \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\big(\sum_{j\in S} p_{ij}(h) - p_{ii}(h)\big) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\big(1 - p_{ii}(h)\big) = q_i.\end{aligned}$$

Посматрајмо поново пример (5). Искористићемо развијени облик експоненцијалне фукције за израчунавање интензивности прелаза

$$\begin{aligned}p'_{11}(0) &= \lim_{h\to 0+} \frac{p_{11}(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{100}h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\big((1 - \frac{1}{100}h + o(h)) - 1\big) = -\frac{1}{100}, \\ p'_{10}(0) &= \lim_{h\to 0+} \frac{p_{10}(h)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{100}h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\big(1 - (1 - \frac{1}{100}h + o(h))\big) = \frac{1}{100}.\end{aligned}$$

Према томе, инфинитезимални генератор овог ланца Маркова је следећа матрица

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.4.3 *Дужина боравка хомогеног ланца Маркова са непрекидним временом у неком стању, тј. количина времена која протекне до изласка ланца из датог стања има експоненцијалну расподелу чији параметар зависи само од тог стања.*

Доказ:

Нека је W_i дужина задржавања ланца у неком стању $i \in S$. Тада, као последица својства Маркова процеса $\mathbf{X}$ и временске хомогености за следећу условну вероватноћу важи

$$\begin{aligned}
P\big[W_i > s+t|W_i > s\big] &= P\big[X(u) = i \text{ за } u \in [0, s+t]|X(u) = i \text{ за } u \in [0, s]\big] \\
&= P\big[X(u) = i \text{ за } u \in [s, s+t]|X(u) = i \text{ за } u \in [0, s]\big] \\
&= P\big[X(u) = i \text{ за } u \in [s, s+t]|X(s) = i\big] \\
&= P\big[X(u) = i \text{ за } u \in [0, t]|X(0) = i\big] \\
&= P\big[W_i > t\big].
\end{aligned}$$

Претходна једнакост се строго формално може показати тек под претпоставком јаког марковског својства које наводимо касније. Зато, доказ у овом моменту није сасвим строг.

На основу наведене једнакости закључујемо да случајна величина W_i има својство одсуства памћења. Једина апсолутно непрекидна расподела која има то својство је експоненцијална расподела, што ћемо сада и да покажемо. Претпостављамо да је $P[W_i > s] > 0$ за свако $s > 0$. Тада важи

$$P[W_i > s+t|W_i > s] = P[W_i > t] \iff \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)} = 1 - F(t),$$

где је F функција расподеле случајне величине W_i.
Ако уведемо ознаку $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, онда имамо

$$\frac{\bar{F}(s+t)}{\bar{F}(s)} = \bar{F}(t),$$

односно

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Нека је $c > 0$ константа и $m, n \in \mathbb{N}$, јасно је да важе следеће једнакости

$$\bar{F}(nc) = \bar{F}(c + c + \cdots + c) = \big(\bar{F}(c)\big)^n \tag{1.5}$$

$$\bar{F}(c) = \bar{F}\Big(\frac{c}{m} + \frac{c}{m} + \cdots + \frac{c}{m}\Big) = \big(\bar{F}\Big(\frac{c}{m}\Big)\big)^m \tag{1.6}$$

Хоћемо да покажемо да је $0 < \bar{F}(1) < 1$.

Ако би било $\bar{F}(1) = 1$, онда би на основу једнакости (1.6) било

$$\bar{F}(n) = \big(\bar{F}(1)\big)^n = 1 \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N},$$

што је у контрадикторности са чињеницом да је

$$\lim_{x\to+\infty} \bar{F}(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - F(x)) = 1 - \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 - 1 = 0.$$

Ако би било $\bar{F}(1) = 0$, онда бисмо имали $P[W_i > 1] = 0$ што је у контрадикторности са претпоставком да је $P[W_i > s] > 0$ за свако $s > 0$.

Дакле, важи $0 < \bar{F}(1) < 1$.

Хоћемо да покажемо да за свако $x \geqslant 0$ важи једнакост

$$\bar{F}(x) = \big(\bar{F}(1)\big)^x. \tag{1.7}$$

Нека је $x \in \mathbb{Q}$. Запишимо x у облику разломка, $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Када искористимо једнакости (1.5) и (1.6), добијамо

$$\big(\bar{F}(x)\big)^q = \big(\bar{F}\Big(\frac{p}{q}\Big)\big)^q = \bar{F}(p) = \big(\bar{F}(1)\big)^p,$$

а самим тим и

$$\bar{F}(x) = \big(\bar{F}(1)\big)^{\frac{p}{q}} = \big(\bar{F}(1)\big)^x.$$

Управо смо показали да једнакост (1.7) важи за све рационалне бројеве.

Нека је $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ рационалних бројева таквих да је $x < s_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} s_n = x$, $x \geqslant 0$. Тада важи

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= 1 - F(x) = 1 - \lim_{t\to x+} F(t) = \lim_{t\to x+} \bar{F}(t) = \lim_{n\to+\infty} \bar{F}(s_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \big(\bar{F}(1)\big)^{s_n} = \big(\bar{F}(1)\big)^{\lim_{n\to+\infty} s_n} = \big(\bar{F}(1)\big)^x.\end{aligned}$$

Према томе, једнакост (1.7) важи за сваки ненегативан реалан број x.

Ако уведемо ознаку

$$\lambda_i = -\ln \bar{F}(1)$$

$$\implies \bar{F}(1) = e^{-\lambda_i}$$

$$\implies \bar{F}(x) = e^{-\lambda_i x}$$

$$\Longrightarrow\ W_i \in \mathcal{E}(\lambda_i), \quad \lambda_i \in [0,+\infty).$$

Покривен је и случај када је $P[W_i > s] = 0$ за неко s.
Ако би било $\bar{F}(1) = 0$, онда бисмо добили

$$\Big(\bar{F}\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big)^m = 0 \quad \text{за свако } m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow\ \bar{F}\Big(\frac{1}{m}\Big) = 0 \quad \text{за свако } m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow\ \bar{F}(0) = 0$$

$$\Longrightarrow\ W_i : \binom{0}{1},$$

а претпоставили смо да је случајна величина W_i апсолутно непрекидна.

Дакле, дужина задржавања ланца Маркова са непрекидним временом у неком стању је експоненцијално расподељена.$\triangledown$

Теорема 1.4.4 (Услов регуларности) *За низ независних и експоненцијално расподељених случајних величина* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *са параметрима* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *редом, важи*

$$P\Big[\sum_{n=1}^{\infty} W_n < +\infty\Big] = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$$

Доказ:

Овде ћемо показати само један смер еквиваленције, јер ћемо убудуће само ту импликацију и користити.
Претпостављамо да важи десна страна једнакости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} E(W_n) < +\infty.$$

Очекивање бесконачне суме случајних величина W_n је једнако суми очекивања тих случајних величина

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} W_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E(W_n) < +\infty, \tag{1.8}$$

што је последица теореме о монотоној конвергенцији којом се у овом раду нећемо бавити, а може се наћи у [3] на страни 83.
Како је $\sum_{n=1}^{\infty} W_n \geqslant 0$ скоро сигурно, онда је

$$P[\sum_{n=1}^{\infty} W_n < +\infty] = 1,$$

у супротном очекивање са леве стране једнкости (1.8) не би било коначно.$\triangledown$

Дакле, за ланац Маркова са непрекидним временом, дужинама задржавања $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и тренуцима скокова $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи

$$P[J_\infty < +\infty] = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty,$$

где је λ_n параметар експоненцијалне расподеле случајне величине W_n. На основу закона контрапозиције добија се да је потребан и довољан услов за регуларност ланца дивергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$.

Инфинитезимална конструкција

Нека је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ случајни процес са коначним простором стања S и нека су q_{ij} такви да за све $i, j \in S$ важи

а) $q_{ij} \geqslant 0, \quad i \neq j$

б) $0 \leqslant -q_{ii} < +\infty, \quad i \in S$

в) $\sum_{j\in S} q_{ij} = 0, \quad i \in S$

Тада је $\mathbf{X}$ ланац Маркова са непрекидним временом, дужинама задржавања које су експоненцијално расподељене са параматром $q_i = -q_{ii}$, чији уметнути ланац скокова има следеће вероватноће прелаза

$$r_{ii} = \begin{cases} 1, & q_i = 0 \\ 0, & q_i \neq 0 \end{cases}$$

и за $j \neq i$

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & q_i = 0 \\ \frac{q_{ij}}{q_i}, & q_i \neq 0 \end{cases}.$$

Према томе ланац Маркова са непрекидним временом $\mathbf{X}$ може бити задат помоћу матрице вероватноћа прелаза $P(t)$ и вектора $q = (q_i)_{i\in S}$ или помоћу инфинитезималног генератора Q.

Посматрајмо ланац $\mathbf{X}$ из другог угла. Нека је $X(0) = i$ и $h \to 0$. Тада, узимајући у обзир чињеницу да догађај да се ланац након h времена нађе у стању i укључује могућност да ланац не промени стање за време h, имамо

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) &= P[X(h) = i | X(0) = i] \\ &\geqslant P[J_1 > h | X(0) = i] \\ &= P[W_1 > h | X(0) = i] \\ &= e^{-\lambda_i h} \\ &= 1 - \lambda_i h + o(h) \end{aligned}$$

С обзиром на то да је догађај да прва промена стања ланца буде прелаз у стање j и да ланац након тога више не промени стање за време h подскуп догађаја да се ланац нађе у стању j након времена h, имамо следеће

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &= P[X(h) = j | X(0) = i] \\ &\geqslant P[J_1 < h < J_2, Y_1 = j | X(0) = i] \\ &\geqslant (1 - e^{-\lambda_i h}) r_{ij} e^{-\lambda_j h} \\ &= \lambda_i r_{ij} h + o(h) \end{aligned}$$

Уз претпоставку регуларности и чињеницу да је $R = [r_{ij}]_{i,j \in S}$ стохастичка матрица и $r_{ii} = 0$ за $\lambda_i \neq 0$ важи следеће

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{j \in S} p_{ij}(h) = p_{ii}(h) &+ \sum_{i \neq j} p_{ij}(h) \\ &\geqslant 1 - \lambda_i h + \sum_{i \neq j} \lambda_i r_{ij} h + o(h) \\ &= 1 + \Big(\sum_{j \in S} r_{ij} - 1 \Big) \lambda_i h + o(h) \\ &= 1 + o(h) \end{aligned}$$

Уколико би негде била строга неједнакост следило би да је $1 > 1$. Дакле, на свим местима важи једнакост и

$$p_{ii}(h) = 1 - \lambda_i h + o(h).$$

Посматрајмо раније дефинисано q_i

$$q_i = \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - (1 - \lambda_i h + o(h))}{h} = \lambda_i.$$

Видимо да је параметар експоненцијалне расподеле случајне величине W_i управо q_i. Према томе, важи

$$p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h).$$

и

$$p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h), \tag{1.9}$$

за $i \neq j$ и мало h, што оправдава назив за q_{ij}, интензивност прелаза ланца из стања i у стање j.

Подсетимо се тврђења 1) теореме 1.4.1. Сада ћемо да се уверимо да је уметнути процес скокова $\mathbf{Y}$, ланца Маркова са непрекидним временом $\mathbf{X}$, заиста ланац Маркова са дискретним временом.

$$\begin{aligned} P[Y_{n+1} = j|Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0] \\ &= P[X(J_{n+1}) = j|X(J_n) = i, X(J_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(J_0) = i_0] \\ &= P[X(J_{n+1}) = j|X(J_n) = i] \\ &= P[Y_{n+1} = j|Y_n = i]. \end{aligned}$$

Вероватноће прелаза за један корак ланца Y за $j \neq i$ и $q_i \neq 0$ су

$$\begin{aligned} r_{ij} &= P[Y_{n+1} = j|Y_n = i] = P[X(J_{n+1}) = j|X(J_n) = i] \\ &= \frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \end{aligned}$$

јер у тренутку J_{n+1} ланац $\mathbf{X}$ сигурно промени стање, тј. налази се у неком од стања $k \neq i$, а вероватноћа да је то стање баш j је $\frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}}$.

1.5 Диференцијална једначина уназад и диференцијална једначина унапред

Теорема 1.5.1 (Диференцијална једначина уназад)
Ако је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ регуларан ланац Маркова, онда су његове вероватноће прелаза $p_{ij}(t)$ непрекидно диференцијабилне функције по t и задовољавају следећи обрнути систем диференцијалних једначина

$$p'_{ij}(t) = q_{ii}p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)$$

што се може записати у матричном облику као

$$P'(t) = QP(t).$$

Доказ:

Интересује нас да ли постоји гранична вредност

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h}.$$

Посматрајмо временски интервал $(0, t+h)$ и тај интервал поделимо на два дела $(0, h)$ и $(h, t+h)$. Применом једначина Колмогоров - Чепмена се добија следеће

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in S} p_{ik}(h)p_{kj}(t),$$

Са обе стране једнакости одузимамо $p_{ij}(t)$ и издвајамо из суме члан за $k = i$,

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_{k\in S} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t)\\
&= \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + p_{ii}(h)p_{ij}(t) - p_{ij}(t)\\
&= \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + (p_{ii}(h) - 1)p_{ij}(t).
\end{aligned}$$

Знамо да постоји гранична вредност

$$\lim_{h\to 0} \frac{(p_{ii}(h) - 1)p_{ij}(t)}{h} = q_{ii}p_{ij}(t).$$

Још треба испитати како се понаша сума $\frac{1}{h}\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$ кад h тежи нули. Лимес коначне суме је једнак суми лимеса и знамо да постоји и коначно је $\lim_{h\to 0} \frac{p_{ik}(h)}{h} = q_{ik}$, па за свако коначно M важи наредна неједнакост

$$\begin{aligned}
\varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) &\geqslant \varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i, k\leqslant M} p_{ik}(h)p_{kj}(t)\\
&= \sum_{k\neq i, k\leqslant M} \varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{ik}(h)p_{kj}(t)\\
&= \sum_{k\neq i, k\leqslant M} q_{ik}p_{kj}(t)
\end{aligned}$$

Искористимо чињеницу да је $p_{kj}(t) \leqslant 1$ и $\sum_{k\in S} p_{ik}(h) = 1$. За $M > i$ имамо неједнакост:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) &= \sum_{k\neq i, k\leqslant M} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + \sum_{k>M} p_{ik}(h)p_{kj}(t)\\
&\leqslant \sum_{k\neq i, k\leqslant M} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + \sum_{k>M} p_{ik}(h)\\
&= \sum_{k\neq i, k\leqslant M} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + 1 - p_{ii}(h) - \sum_{k\neq i, k\leqslant m} p_{ik}(h)
\end{aligned}$$

Посматрамо горњу граничну вредност

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \\
&\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \sum_{k\neq i, k\leqslant M} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \overline{\lim_{h\to 0}} \sum_{k\neq i, k\leqslant m} \frac{p_{ik}(h)}{h} \\
&= \sum_{k\neq i, k\leqslant M} q_{ik}p_{kj}(t) + q_{ii} - \sum_{k\neq i, k\leqslant M} q_{ik}
\end{aligned}$$

Када $M \to \infty$, с обзиром на то да за регуларан ланац важи $-q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij}$, добија се

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) &\leqslant \lim_{M\to\infty} \sum_{k\neq i, k\leqslant M} q_{ik}p_{kj}(t) + \lim_{M\to\infty} \big(q_{ii} - \sum_{k\neq i, k\leqslant M} q_{ik}\big) \\
&= \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)
\end{aligned}$$

Дакле, претходне неједнакоси дају

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \leqslant \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) \leqslant \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t),$$

према томе, на оба места важи једнакост, горња и доња гранична вредност су једнаке и постоји гранична вредност

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t),$$

а самим тим и следећа гранична вредност

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + \lim_{h\to 0} \frac{(p_{ii}(h)-1)}{h} p_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) + q_{ii}p_{ij}(t). \triangledown
\end{aligned}$$

Теорема 1.5.2 (Диференцијална једначина унапред) *При условима из претходне теореме задовољен је следећи директни систем диференцијалних једначина*

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)q_{kj},$$

односно записано у матричном облику

$$P'(t) = P(t)Q.$$

Идеја доказа:

За разлику од једначине уназад, сада интервал $(0, t+h)$ делимо на периоде $(0, t)$ и $(t, t+h)$. Аналогно претходном доказу имамо:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\sum_{k\in S} p_{ik}(t)p_{kj}(h) - p_{ij}(t)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h) + p_{ij}(t)p_{jj}(h) - p_{ij}(t)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h) + p_{ij}(t)(p_{jj}(h) - 1)\big)\\ &= \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj} + p_{ij}(t)q_{jj}.\triangledown\end{aligned}$$

Диференцијална једначина уназад и диференцијална једначина унапред заједно дају

$$QP = P' = PQ.$$

Дакле, матрице P и Q комутирају.

Теорема 1.5.3 *Ланац Маркова са непрекидним временом и коначним простором стања има јединствено решење директног и обрнутог система диференцијалних једначина* $P(t) = e^{tQ}$*, са почетним условом* $P(0) = I$*.*

Доказ.

Прво што треба показати је да је $P(t) = e^{tQ}$ заиста решење. Одговара нам да функцију запишемо у развијеном облику

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tQ)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kQ^k}{k!}.$$

Захваљујући чињеници да је ред конвергентан, може се диференцирати члан по члан. Увођењем смене индекса $l = k-1$ добијамо следеће

$$\begin{aligned}P'(t) &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kQ^k}{k!}\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}Q^k}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^lQ^{l+1}}{l!}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^lQ^l}{l!}Q = P(t)Q\end{aligned}$$

Дакле, $P(t) = e^{tQ}$ задовољава директни систем једначина. С обзиром на то да важи $tQ = Qt$, аналогно се показује да ово решење задовољава и обрнути систем једначина. Још треба показати да је то решење јединствено за сваки од ова два система. Претпоставимо да је S неко друго решење које задовољава директни систем једначина.

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-tQ}S\big) = -Qe^{-tQ}S + e^{-tQ}S' = e^{-tQ}\big(-QS + QS\big) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-tQ}S = const$$

$$S = e^{tQ}C$$

Притом, S треба да испуњава и почетни услов $P(0) = I$.

$$S|_{t=0} = e^{0}C = C$$

$$\Rightarrow C = I$$

$$S = e^{tQ}$$

На исти начин се показује јединственост решења обрнутог система.$\triangledown$

1.6 Пуасонов процес као ланац Маркова

Један врло важан пример ланаца Маркова са непрекидним временом је Пуасонов процес, назван по француском математичару Пуасону[3] упркос томе што он овај процес никада није проучавао. Он се користи као основни модел у теорији масовног опслуживања, за моделовање броја телефонских позива, броја посета неком веб сајту, за моделовање пристизања одштетних захтева у актуарској математици, као модел за појаву земљотреса ...

Дефиниција 1.6.1 *Нека случајна величина $N(t)$ представља укупан број догађаја од интереса који се десе до тренутка t, односно у интервалу $[0, t]$. Случајни процес $\mathbf{N} = \{N(t),\ t \geqslant 0\}$ је хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ, $\lambda > 0$ ако важи:*

- $N(0) = 0$,
- *Процес $\mathbf{N}$ има независне прираштаје, односно за било који избор тренутака $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, случајне величине $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, $\ldots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ су потпуно независне,*

[3]Simeon Denis Poisson, 1781-1840, француски математичар, механичар и физичар

- *Број догађаја у произвољном интервалу дужине t има Пуасонову расподелу са параметром λt,*

$$P[N(t+s)-N(s)=n]=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.$$

Хоћемо да покажемо да овако дефинисан хомогени Пуасонов процес задовољава својство Маркова. Уколико искористимо својство независности прираштаја Пуасоновог процеса, добијамо следећу условну вероватноћу

$$\begin{aligned}
P[N(t_{n+1})=x_{n+1}|N(t_n)=x_n] &= \frac{P[N(t_{n+1})=x_{n+1},N(t_n)=x_n]}{P[N(t_n)=x_n]}\\
&= \frac{P[N(t_{n+1})-N(t_n)=x_{n+1}-x_n,N(t_n)=x_n]}{P[N(t_n)=x_n]}\\
&= P[N(t_{n+1})-N(t_n)=x_{n+1}-x_n|N(t_n)=x_n]\\
&= P[N(t_{n+1})-N(t_n)=x_{n+1}-x_n]\\
&= \frac{(\lambda t)^{x_{n+1}-x_n}}{(x_{n+1}-x_n)!}e^{-\lambda(x_{n+1}-x_n)}.
\end{aligned}$$

Аналогно претходном, и са друге стране долазимо до истог резултата

$$\begin{aligned}
&P[N(t_{n+1})=x_{n+1}|N(t_n)=x_n,N(t_{n-1})=x_{n-1},\dots,N(t_1)=x_1]\\
&\quad= P[N(t_{n+1})-N(t_n)=x_{n+1}-x_n|N(t_n)-N(t_{n-1})=x_n-x_{n-1},\dots,N(t_1)=x_1]\\
&\quad= P[N(t_{n+1})-N(t_n)=x_{n+1}-x_n]\\
&\quad= \frac{(\lambda t)^{x_{n+1}-x_n}}{(x_{n+1}-x_n)!}e^{-\lambda(x_{n+1}-x_n)}.
\end{aligned}$$

Према томе, показали смо да је хомогени Пуасонов процес Марковски процес. А као што и само име каже, хомогени Пуасонов процес је временски хомоген ланац Маркова јер претходна вероватноћа зависи само од разлике $x_{n+1}-x_n$. Јасно је да процес пролази кроз стања $0,1,2,\dots$ редом и да из било ког стања i за време $t>0$ може прећи само у стања $j\geqslant i$. Израчунајмо сада вероватноће прелаза хомогеног Пуасоновог процеса.

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= P[N(s+t)=j|N(s)=i] \\
&= \frac{P[N(s+t)=j, N(s)=i]}{P[N(s)=i]} \\
&= \frac{P[N(s+t)-N(s)=j-i, N(s)=i]}{P[N(s)=i]} \\
&= P[N(s+t)-N(s)=j-i|N(s)=i] \\
&= P[N(s+t)-N(s)=j-i] \\
&= \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Матрица вероватноћа прелаза је квадратна матрица бесконачне димензије, горњетроугаона и има следећи облик

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & p_{03}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) & \cdots \\ p_{30}(t) & p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^3}{6}e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

а инфинитезимални генератор овог процеса је матрица

$$\begin{aligned}
Q = P'(0) &= \begin{bmatrix} -\lambda e^{-\lambda t} & \lambda(1-\lambda t)e^{-\lambda t} & \lambda^2 t(1-\frac{\lambda t}{2})e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^3 t^2}{2}(1-\frac{\lambda t}{3})e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & -\lambda e^{-\lambda t} & \lambda(1-\lambda t)e^{-\lambda t} & \lambda^2 t(1-\frac{\lambda t}{2})e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda e^{-\lambda t} & \lambda(1-\lambda t)e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{t=0} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Дакле, интензивност прелаза из стања i у стање $i+1$ је λ, одатле и назив Пуасонов процес са интензитетом λ.

Нека је $(J_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ низ тренутака скокова овог процеса, а $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ дужина задржавања. Посматрајмо интензивности прелаза, $q_{nn} = -\lambda$ за свако стање

$n \geqslant 0$. Пошто важи $q_n = -q_{nn} = \lambda$, на основу теореме (1.4.3) закључујемо да $W_n \in \mathcal{E}(\lambda)$. Уверимо се сада да то заиста важи

$$\begin{aligned} P[W_n \leqslant w] &= P[N(J_{n-1}+w) - N(J_{n-1}) \geqslant 1] \\ &= 1 - P[N(J_{n-1}+w) - N(J_{n-1}) = 0] \\ &= 1 - \frac{(\lambda w)^0}{0!} e^{-\lambda w} \\ &= 1 - e^{-\lambda w}. \end{aligned}$$

Хоћемо да изведемо систем диференцијалних једначина Колмогорова овог процеса. Вероватноћа прелаза $p_{i,i+k}(t)$ не зависи од стања i и убудуће ћемо је означавати са

$$p_{i,i+k}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} := p_k(t).$$

Посматрамо диференцијалну једначину унапред

$$P'(t) = P(t)Q$$

или покомпонентно када гледамо стање нула као почетно

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda p_{00}(t), \\ p'_{01}(t) &= \lambda p_{00}(t) - \lambda p_{01}(t), \\ &\vdots \\ p'_{0k}(t) &= \lambda p_{0,k-1}(t) - \lambda p_{0k}(t), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Односно, компактније записано имамо следећи систем диференцно диференцијалних једначина

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t),$$

$$p'_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), \quad k \geqslant 1.$$

1.7 Тренуци заустављања и јако марковско својство

„Они који се не сећају прошлости, осуђени су да је понављају.”
Џорџ Сантајана[4]

Дефиниција 1.7.1 *Ненегативна случајна величина T је* ***тренутак заустављања*** *ланца Маркова $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ ако за свако $t \in T$ важи $[T \leqslant t] \in \sigma\big(X(s) : s \leqslant t\big)$ односно догађај $[T \leqslant t]$ је функција случајних величина $\{X(s) : s \leqslant t\}$ и не зависи од случајних величина $\{X(s) : s > t\}$.*

Посматрамо детерминистичко време

$$T \equiv t_0, \quad t_0 \in T.$$

Догађај $[T \leqslant t]$ је тривијалан, цео скуп Ω за $t \geqslant t_0$ или $\emptyset$ за $t < t_0$. Дакле, детерминистичко време је тренутак заустављања.

Нека је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ ланац Маркова и $inf\ \emptyset = +\infty$. Дефинишемо

$$\tau_i = inf\{t \geqslant 0 : X(t) = i\}.$$

Величина τ_i региструје тренутак првог уласка ланца у стање i. За њу важи

$$[\tau_i \leqslant t] = [\exists\ s,\ s \leqslant t : X(s) = i].$$

Очигледно, тренутак првог уласка ланца у стање i је тренутак заустаљања тог ланца. Међутим, ако посматрамо случајну величину $\tau_i - \epsilon$, $\epsilon > 0$, имамо

$$[\tau_i - \epsilon \leqslant t] = [\tau_i \leqslant t + \epsilon] = [\exists\ s,\ s \leqslant t + \epsilon : X(s) = i],$$

она зависи и од $\{X(s) : t < s \leqslant t + \epsilon\}$ и није тренутак заустављања.

Низ тренутака скокова $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је низ тренутака заустављања ланца Маркова $\mathbf{X}$. Заиста, догађај $[J_n \leqslant t]$ подразумева да је ланац направио бар n промена стања до тренутка t и зависи само од дела ланца $\{X(s) : s \leqslant t\}$.

[4] Jorge Agustín Nicolás Ruiz de Santayana y Borrás, 1863-1952, шпански филозоф и писац

Теорема 1.7.1 (Јако марковско својство) *Нека је* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *ланац Маркова и нека је* T *тренутак заустављања за ланац* $\mathbf{X}$. *При услову* $T < +\infty$ *и* $X(T) = i$ *фамилија* $\{X(T+t),\ t \geqslant 0\}$ *је ланац Маркова конструисан на исти начин као оригинални ланац* $\mathbf{X}$ *који у тренутку* $t = 0$ *стартује из стања* i*, условно независан од прошлости процеса* $\{X(s) : s < T\}$.

Више о јаком марковском својству, као и доказ претходне теореме може се наћи у [1].

1.8 Класификација стања ланца Маркова

Нека је $\mathbf{X}$ ланац Маркова са непрекидним временом, скупом стања S и матрицом вероватноћа прелаза $P(t)$ и нека је $B \subset S$. Случајна величина

$$\tau_B = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) \in B\}$$

се зове тренутак првог уласка ланца у скуп B. Уколико је B скуп који садржи само једно стање, $B = \{j\}$, тада имамо

$$\tau_j = \ inf\{t \geqslant 0 : X(t) = j\},$$

што је тренутак првог уласка ланца у стање j.

Дефиниција 1.8.1 *Нека је* $\mathbf{X}$ *ланац Маркова и нека су* $i, j \in S$. *Кажемо да је стање* j ***достижно*** *из стања* i *ако је*

$$P_i[\tau_j < +\infty] := P[\tau_j < +\infty | X(0) = i] > 0$$

и означавамо са $i \to j$.

Односно, вероватноћа да ланац који је кренуо из стања i дође у стање j за коначно време је већа од нуле.

Теорема 1.8.1 (Критеријум достижности) *Следеће тврдње су еквивалентне:*

1) $i \to j$

2) $p_{ij}(t) > 0$ *за неко* $t > 0$

3) $p_{ij}(t) > 0$ *за свако* $t > 0$

4) Постоје стања $j_1, j_2, \dots, j_n \in S$ таква да важи

$$q_{ij_1}q_{j_1j_2}\dots q_{j_nj} > 0.$$

Доказ:

Прво ћемо да покажемо да је (1) $\Leftrightarrow$ (2). Сасвим је очигледно да за произвољно $t > 0$ важи

$$[X(t) = j] \subset [\tau_j \leqslant t] \subset [\tau_j < +\infty],$$

а самим тим и

$$0 < p_{ij}(t) = P[X(t) = j|X(0) = i] \leqslant P_i[\tau_j \leqslant t] \leqslant P_i[\tau_j < +\infty],$$

па (2) $\Rightarrow$ (1).
Ако претпоставимо да важи (1), имамо

$$0 < P_i[\tau_j < +\infty] = \lim_{t\to\infty} P_i[\tau_j \leqslant t] = \lim_{t\to\infty} P_i[\exists\ s,\ s \leqslant t : X(s) = j].$$

Уколико би било $p_{ij}(s) = 0$ за свако $s > 0$, онда би за ланац који полази из i важило

$$[\exists\ s,\ s \leqslant t : X(s) = j] = \emptyset$$

за свако $t > 0$, па би гранична вредност претходне вероватноће била једнака нули. Дакле, мора да постоји неко $s > 0$ тако да $p_{ij}(s) > 0$.
Јасно је да (3) $\Rightarrow$ (2). Хоћемо да покажемо да (4) $\Rightarrow$ (3). Нека за стања $i, k \in S$ важи $q_{ik} > 0$. Тада важи $r_{ik} > 0$ и

$$p_{ik}(s) \geqslant P[J_1 \leqslant s < J_2, Y_1 = k|Y_0 = i] = (1 - e^{-q_i s})r_{ik}e^{-q_k s} > 0$$

за свако $s > 0$. Ако претпоставимо да важи (4) и $s = \frac{t}{n}$, онда

$$p_{ij}(t) \geqslant p_{ij_1}(s)\dots p_{j_nj}(s) > 0$$

за свако $t > 0$.
Остало је још да покажемо да (2) $\Rightarrow$ (4) и затворили смо круг.
Ако постоји $s > 0$ тако да је $p_{ij}(s) > 0$, онда за уметнути ланац скокова Y важи да се из стања i може стићи у стање j непосредно или посредно након одређеног броја корака па постоје $n \in \mathbb{N}$ и $j_1, j_2, \dots j_n \in S$такви да је

$$r_{ij_1}r_{j_1j_2}\dots r_{j_nj} > 0$$

а самим тим је и

$$q_{ij_1}q_{j_1j_2}\dots q_{j_nj} > 0.$$

Показали смо да (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2), па је (4) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1). $\triangledown$

Из претходне теореме следи једно важно и врло корисно својство ланаца Маркова са непрекидним временом. Ако је $p_{ij}(t) > 0$ за неко $t > 0$, онда је $p_{ij}(t) > 0$ за свако $t > 0$, односно ако је $p_{ij}(t) = 0$ за неко $t > 0$, онда је $p_{ij}(t) = 0$ за свако $t > 0$.

Дефиниција 1.8.2 *Уколико важи $i \to j$ и $j \to i$, тада кажемо да стања i и j* ***комуницирају*** *и означавамо са $i \leftrightarrow j$.*

Комуникација је релација еквиваленције, односно има следећа својства:

1) рефлексивност: $i \leftrightarrow i$

2) симетричност: $i \leftrightarrow j$ ако и само ако $j \leftrightarrow i$

3) транзитивност: ако $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$, онда $i \leftrightarrow k$

Рефлексивност важи јер је за регуларан ланац $p_{ii}(0) = 1$, док симетричност следи из саме дефиниције. Пошто $i \to j$ и $j \to k$, постоји t за које важи $p_{ij}(t) > 0$ и постоји s тако да $p_{jk}(s) > 0$. Применом једначина Колмогоров-Чепмена добијамо

$$p_{ik}(t+s) = \sum_{r\in S} p_{ir}(t)p_{rk}(s) \geqslant p_{ij}(t)p_{jk}(s) > 0.$$

Дакле, стање k је достижно из стања i. Још треба показати да важи и обрнуто. С обзиром на то да $j \to i$ и $k \to j$, за неке u и v важи $p_{ji}(u) > 0$ и $p_{kj}(v) > 0$. Аналогно претходном, сада имамо

$$p_{ki}(u+v) = \sum_{r\in S} p_{kr}(v)p_{ri}(u) \geqslant p_{kj}(v)p_{ji}(u) > 0.$$

Према томе, и стање i је достижно из стања k чиме смо показали да важи и транзитивност релације бити у комуникацији.

Познато је да релација еквиваленције разлаже простор на класе еквиваленције. Тако релација бити у комуникацији разлаже простор стања S на дисјунктне класе комуникације $C_0,\ C_1,\ C_2\dots$

$$S = \cup_i C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Сва стања у оквиру једне класе комуникације међусобно комуницирају.

Дефиниција 1.8.3 *Ланац Маркова је* ***несводљив*** *ако се простор стања S састоји од само једне класе комуникације, односно ако сва стања из S међусобно комуницирају.*

Посматрајмо поново пример (5). Јасно је да се из стања 1 може доћи у стање 0. Међутим, $p_{01}(t) = 0$ за свако $t > 0$ тако да стање 1 није достижно из стања 0. Према томе, стања 1 и 0 нису међусобно у комуникацији и свако од та два стања чини једну класу комуникације.

$$S = C_1 \cup C_2, \quad C_1 = \{0\}, \quad C_2 = \{1\}$$

У случају хомогеног Пуасоновог процеса $p_{ij}(t) = 0$ за $j < i$ за свако $t > 0$. Нека су стања i и j таква да $j < i$. Стање i је достижно из стања j, али j није достижно из i. Према томе, никоја два стања нису међусобно у комуникацији што за последицу има да је свако појединачно стање једна класа комуникације.

Дефиниција 1.8.4 *Скуп стања C, $C \subset S$, је* ***затворен*** *ако је време до изласка ланца из тог скупа скоро сигурно бесконачно, тј.*

$$P_C[\tau_{\overline{C}} = +\infty] := P[\tau_{\overline{C}} = +\infty | X(0) \in C] = 1.$$

Када уђе у затворен скуп C, ланац из тог скупа никада неће изаћи.

Теорема 1.8.2 (Критеријум затворености) *Скуп стања C, $C \subset S$ је затворен ако и само ако је $p_{ij}(t) = 0$ за свако $i \in C$, $j \in \overline{C}$ и $t \geqslant 0$.*

Затвореност се може изразти условом да је $P_C[\tau_{\overline{C}} < +\infty] = 0$. За свака два стања таква да $i \in C$ и $j \in \overline{C}$, j није достижно из i. Због тога се доказ ове теореме заснива на истим идејама као и доказ критеријума достижности и нећемо га овде изводити.

Уколико је $C = \{i\}$, $i \in S$ затворен скуп, односно $p_{ij}(t) = 0$, за $i \neq j$, за свако t, онда се стање i назива **апсорбујуће**.

У примеру (5), стање 0 је апсорбујуће. Код Пуасоновог процеса нема затворених скупова стања, а самим тим ни апсорбујућих стања.

Посматрајмо ланац који полази из стања i. Тренутак првог повратка ланца у стање i дефинишемо на следећи начин

$$\tau_i^1 = \inf\{t > J_1 : X(t) = i\}.$$

Дефиниција 1.8.5 *Стање $i \in S$ се назива* ***повратно*** *ако се ланац скоро сигурно враћа у стање i за коначно много времена, тј. ако је*

$$P_i[\tau_i^1 < +\infty] = 1.$$

Иначе, стање i је ***пролазно****.*

Очекивање случајне величине τ_i,

$$\mu_i = E_i \tau_i^1,$$

се назива очекивано време до првог повратка ланца у стање i.

Стање i је **позитивно повратно** уколико је очекивано време до првог повратка ланца у то стање коначно, односно

$$\mu_i < \infty.$$

Повратно стање i је **нула-повратно** ако је очекивано време до првог повратка ланца у то стање бесконачно, тј.

$$\mu_i = \infty,$$

иако се ланац скоро сигурно враћа у то стање после коначно времена.

Теорема 1.8.3 (Критеријум повратности и пролазности) *Стање i је повратно ако и само ако важи*

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty.$$

Стање i је пролазно ако и само ако важи

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt < \infty.$$

Доказ ове теореме се може наћи у [1].

Повратност и пролазност су својства класе комуникације. Сва стања у оквиру једне класе су или повратна или пролазна. Исто важи и за позитивну повратност, сва стања у оквиру једне класе комуникације су или позитивно повратна или нула-повратна.

Нека је $\mathbf{X}$ ланац Маркова који полази из стања i и нека је $B \subset S$. Са μ_i^B обележавамо следеће очекивање

$$\mu_i^B := E_i\big(\tau_B\big) = E\big(\tau_B | X(0) = i\big)$$

и зовемо очекивано време до погађања сукпа B (првог уласка ланца у скуп B). Уколико је B затворен скуп стања, онда се μ_i^B зове очекивано време до апсорпције. Када ланац једном уђе у скуп B, он га апсорбује и убудуће се креће само у скупу B.

Теорема 1.8.4 *Вектор очекиваних времена до погађања скупа B, $\mu^B = (\mu_i^B)_{i \in S}$ је минимално ненегативно решење система линеарних једначина*

$$\mu_i^B = 0 \quad \text{за } i \in B,$$

$$-\sum_{j \in S} q_{ij} \mu_j^B = 1 \quad \text{за } i \notin B. \tag{1.10}$$

Ову теорему нећемо формално доказивати, само ћемо дати кратко образложење. Више о очекиваним временима до погађања неког скупа и очекиваним временима до апсорпције се може наћи у [2].

Ако се ланац налази у стању $i \notin B$, очекивано време које протекне до изласка ланца из тог стања је $\frac{1}{q_i}$. Након тога ланац прелази у неко стање j са вероватноћом r_{ij} и онда се посматра очекивано време до погађања скупа B из стања j па имамо следећу једначину

$$\mu_i^B = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} r_{ij} \mu_j^B \quad \text{за } i \notin B.$$

Када претходну једначину помножимо са q_i добијамо баш (1.10).

Пример 6. Штампарија располаже са два штампача, једним старим и једним новијим. Штампа се обавља на оба штампача. Сваки од штампача има касете са тонером који се након извесног времена потроши и касете се односе у сервис на допуну. Новији штампач ради до нестанка тонера у временском периоду који је експоненцијално расподељен са очекивањем од 56 сати и време које је потребно за допуну је експоненцијално расподељено са очекиваањем 4 сата. Стари штампач мора много чешће да се допуњује тонером и дужина рада тог штампача до потребне допуне је експоненцијално расподељена са очекивањем 16 сати. Време које је потребно за његову допуну је експоненцијално раподељено са очекивањем 7 сати. Тонери се допуњују независно један од другог.

Хоћемо да моделирамо описану ситуацију ланцем Маркова са непрекидним временом. Систем се може наћи у четири различита стања, $S = \{0, 1, 2, 3\}$,

0: Оба штампача су без тонера,

1: Новији штампач ради, а стари је без тонера,

2: Стари штампач ради, а новији је без тонера,

3: Оба штампача раде.

Уколико су оба штампача без тонера, систем остаје у стању 0 док се не допуни један од тонера. Интересује нас какву расподелу има минимум две независне експоненцијално расподељене случајне величине, $W_1 \in \mathcal{E}(\lambda)$ и $W_2 \in \mathcal{E}(\mu)$.

$$\begin{aligned}
P[\min(W_1, W_2) \leqslant w] &= 1 - P[\min(W_1, W_2) \geqslant w] \\
&= 1 - P[W_1 \geqslant w, W_2 \geqslant w] \\
&= 1 - P[W_1 \geqslant w]P[W_2 \geqslant w] \\
&= 1 - e^{-\lambda w}e^{-\mu w} \\
&= 1 - e^{-(\lambda+\mu)w}
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\min(W_1, W_2) \in \mathcal{E}(\lambda + \mu).$$

Према томе, дужина боравка у стању 0 је експоненцијално расподељена са параметром

$$q_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{11}{28}.$$

Очекивано време које систем проведе у стању 0, тј. оба штампача су без тонера и нема штампања, док се неки од тонера не допуни је

$$\frac{1}{q_0} = \frac{28}{11} \approx 2\ h\ 32\ min.$$

Систем из стања 1 може прећи у стање 0 уколико нестане тонера и на новијем штампачу или у стање 3 ако се стари штампач допуни тонером. Притом, претпостављамо да се та два догађаја не могу реализовати истовремено (својство ординарности). Аналогно је и у случају када се систем налази у стању 2. На основу тога имамо да су дужине боравка система у стањима 1 и 2 екпоненцијално расподељене са параметрима

$$q_1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{56} = \frac{9}{56} \quad \text{и} \quad q_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

Из стања 3 се може прећи у стање 1 ако стари штампач остане без тонера или у стање 2 ако новији штампач остане без тонера. Поново претпостављамо да се догађаји не могу реализовати истовремено и време које протекне до изласка система из стања 3 је експоненцијано расподељено са параметром

$$q_3 = \frac{1}{56} + \frac{1}{16} = \frac{9}{112}.$$

Очекивана дужина рада оба штампача истовремено док један не остане без тонера је

$$\frac{1}{q_3} = \frac{112}{9} \approx 12\ h\ 27\ min.$$

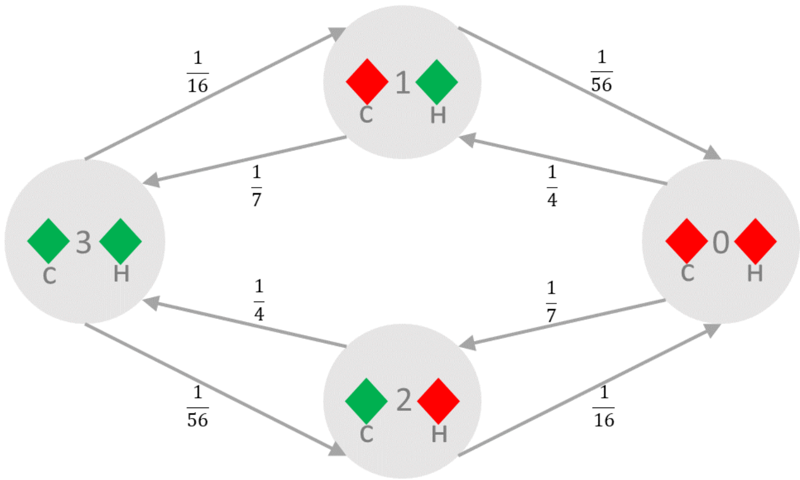
Инфинитезимални генератор овог процеса је

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{56} & -\frac{9}{56} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{16} & 0 & -\frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{56} & -\frac{9}{112} \end{bmatrix}.$$

Граф на слици 1.1 даје илустративни приказ овог ланца.

Из сваког стања се може стићи у било које друго, посредно или непосредно, па је овај ланац несводљив. Нема затворених класа комуникације, нити апсорбујућих стања.

Ако у почетном тренутку раде оба штампача, интересује нас колико је очекивано време које ће проћи док се не деси да оба штампача остану без тонера и дође до прекида штампања. То је управо μ_3^0. На основу теореме



Слика 1.1: Интензитети прелаза између стања

(1.8.4) имамо

$$\begin{aligned}\mu_0^0 &= 0,\\ \frac{9}{56}\mu_1^0 &= 1 + \frac{1}{7}\mu_3^0,\\ \frac{5}{16}\mu_2^0 &= 1 + \frac{1}{4}\mu_3^0,\\ \frac{9}{112}\mu_3^0 &= 1 + \frac{1}{16}\mu_1^0 + \frac{1}{56}\mu_2^0.\end{aligned}$$

Решавањем претходног система једначина добија се

$$\mu_3^0 \approx 137\ h\ 30\ min.$$

Посматрамо очекивано време до првог повратка ланца у стање 0. Очекивано време које ће протећи до напуштања стања 0 је $\frac{1}{q_0}$. Након тога ланац прелази у стање j и посматрамо очекивано време до погађања стања 0 ланца који креће из стања j. С обзиром на то да је μ_3^0 коначно, коначни су и μ_1^0 и μ_2^0, па је коначно и следеће очекивање

$$\mu_0 = E_0(\tau_0^1) = \frac{1}{q_0} + \sum_{j\neq i} r_{ij}\mu_j^0 = \frac{1}{q_0} + \frac{q_{01}}{q_0}\mu_1^0 + \frac{q_{02}}{q_0}\mu_2^0 < \infty.$$

Стање 0 је повратно и то позитивно повратно. Пошто су повратност и позитивна повратност својства класе комуникације, а овај ланац је несводљив, онда је и ланац позитивно повратан.

Сада ћемо мало модификовати овај систем. Претпоставља се да се када оба штампача остану без тонера прекида штампање и више никада не наставља. Када ланац једном уђе у стање 0, из њега више не може изаћи. Дакле, сада је стање 0 апсорбујуће. Сва остала стања су међусобно у комуникацији и чине једну класу комуникације. Сада је

$$q_0 = 0,$$

а инфинитезимални генератор модификованог ланца је

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{56} & -\frac{9}{56} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{16} & 0 & -\frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{56} & -\frac{9}{112} \end{bmatrix}.$$

Очекивана дужина трајања штампања, тј. очекивано врмеме до апсорпције у стање 0 је

$$\mu_3^0 \approx 137\ h\ 30\ min.$$

Апсорбујуће стање 0 је повратно. На пример, ланац из стања 1 са позитивном вероватноћом прелази у стање 0 и у том случају се никада више не враћа у стање 1, тако да је вероватноћа да је тренутак првог повратка у стање 1 бесконачан позитивна и то стање је пролазно. Пошто је пролазност својство класе комуникације, онда су и сва остала стања из те класе пролазна.

1.9 Стационарна и гранична расподела ланца

Ланац Маркова током времена пролази кроз различита стања и у њима се задржава одређено време. Нека стања посећује често, друга ретко, у неким се задржава веома кратко, а у појединим може остати и заувек. Природно се намеће питање о уделу времена који ланац проводи у појединачним стањима, као и какву расподелу има случајна величина $X(t)$.

Дефиниција 1.9.1 *Случајни процес* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *је строго стационаран ако за свако* $n \in \mathbb{N}$ *и сваки избор временских тренутака*

$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ *случајни вектори* $\big(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\big)$ *и* $\big(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h)\big)$ *имају исту расподелу.*

Уколико је процес строго стационаран, када се посматра $n=1$, добија се да $X(t)$ и $X(t+h)$ имају исту расподелу. Тако за строго стационаран случајни процес важи да $X(0)$ и $X(t)$ имају исту расподелу за свако $t>0$.

Дефиниција 1.9.2 *Расподела вероватноћа* $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ *је* ***стационарна расподела*** *за хомогени ланац Маркова ако из услова* $p_j(0) = P[X(0)=j] = \pi_j$ *следи да је* $p_j(t) = P[X(t)=j] = \pi_j$ *за све* $j \in S$ *и* $t>0$.

Дефиниција 1.9.3 *Нека је* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *ланац Маркова са непрекидним временом, простором стања* S *и матрицом вероватноћа прелаза* P. *Нетривијална мера* $\lambda = (\lambda_j)_{j\in S}$ *је инваријантна мера за ланац* $\mathbf{X}$*, односно матрицу* P*, ако за свако* $t \geqslant 0$ *важи*

$$\lambda P(t) = \lambda.$$

Стационарна расподела ланца $\mathbf{X}$ је инваријантна мера која представља расподелу вероватноћа на S.

Нека је π једна инваријантна мера и нека је почетна расподела ланца баш π. Користећи формулу потпуне вероватноће добијамо следеће

$$\begin{aligned} P[X(t)=j] &= \sum_{i\in S} P[X(t)=j|X(0)=i]P[X(0)=i] \\ &= \sum_{i\in S} p_{ij}(t)\pi_j = [\pi P(t)]_j = \pi_j. \end{aligned}$$

Дакле, и случајна величина $X(t)$ има расподелу π. То заправо значи да ланац $\pi_j \cdot 100$ процената времена проведе у стању j.

Стационарна расподела не мора увек да постоји, и уколико постоји не мора бити јединствена.

Теорема 1.9.1 *За ланац Маркова* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *са матрицом вероватноћа прелаза* P *и инфинитезималним генератором* Q *следеће тврдње су еквивалентне*

а) $\pi P(t) = \pi$ *за свако* $t \geqslant 0$

б) $\pi Q = 0$

Доказ:

Раније смо показали да је $P(t) = e^{tQ}$ па ћемо то сада искористити.

$$\begin{aligned}
\pi = \pi P(t) &\Leftrightarrow \pi = \pi e^{tQ} \text{ за свако } t \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \pi = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} \text{ за свако } t \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \pi = \pi + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} \text{ за свако } t \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} \text{ за свако } t \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \pi Q^n \text{ за свако } t \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = \pi Q^n \text{ за свако } n \geqslant 1 \\
&\Leftrightarrow 0 = \pi Q. \triangledown
\end{aligned}$$

С обзиром на то да није једноставно проверити услове $\pi P(t) = \pi$ за свако $t \geqslant 0$, претодна теорема каже да се они могу свести на услове $\pi Q = 0$. Према томе, стационарну расподелу ланца тражимо из услова $\pi Q = 0$ и $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$.

Подсетимо се примера (6). Хоћемо да нађемо стационарну расподелу тог ланца. Решавамо систем једначина

$$\pi Q = 0,$$

покомпонентно

$$\begin{aligned}
-\frac{11}{28}\pi_0 + \frac{1}{56}\pi_1 + \frac{1}{16}\pi_2 &= 0, \\
\frac{1}{4}\pi_0 - \frac{9}{56}\pi_1 + \frac{1}{16}\pi_3 &= 0, \\
\frac{1}{7}\pi_0 - \frac{5}{16}\pi_2 + \frac{1}{56}\pi_3 &= 0, \\
\frac{1}{7}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 - \frac{9}{112}\pi_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Уз услов нормираности вероватноће, добија се јединствено решење ситема

$$\pi_0 = \frac{7}{345}, \quad \pi_1 = \frac{98}{345}, \quad \pi_2 = \frac{16}{345}, \quad \pi_3 = \frac{224}{345}.$$

Исказано речима, асимптотски проценат времена током ког се штампање врши пуним капацитетом је $\pi_3 = \frac{224}{345} \approx 65\%$.

У модификованом случају где је стање 0 апсорбујуће имамо систем једначина

$$\begin{aligned}\frac{1}{56}\pi_1+\frac{1}{16}\pi_2&=0,\\-\frac{9}{56}\pi_1+\frac{1}{16}\pi_3&=0,\\-\frac{5}{16}\pi_2+\frac{1}{56}\pi_3&=0,\\\frac{1}{7}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_2-\frac{9}{112}\pi_3&=0.\end{aligned}$$

Јединствено решење овог система је

$$\pi_1=0,\quad \pi_2=0,\quad \pi_3=0.$$

Из услова нормираности се добија

$$\pi_0=1.$$

Асимптотски гледано, ланац ће се након извесног времена скоро сигурно налазити у стању 0.

Дефиниција 1.9.4 *Расподела вероватноћа* $\lambda=(\lambda_j)_{j\in S}$ *на* S *је* ***гранична расподела*** *ланца Маркова* $\mathbf{X}$ *ако за* $\forall i,j\in S$ *важи*

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lambda_j.$$

Нагласимо да се може десити да све граничне вредности постоје, али да не представљају расподелу вероватноћа на скупу S и у том случају гранична расподела не постоји.

Егзистенција граничне расподеле у ствари говори да ланац „заборавља” одакле је кренуо и „памти” само где стиже. То својство ланаца Маркова се зове **ергодичност.**

Теорема 1.9.2 *Нека је*

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lambda_j$$

гранична расподела ланца Маркова $\mathbf{X}$. *Тада је* $\lambda=(\lambda_j)_{j\in S}$ *и стационарна расподела ланца.*

Теорема 1.9.3 *За несводљив ланац Маркова* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *са матрицом вероватноћа прелаза* P *и инфинитезималним генератором* Q *следеће тврдње су еквивалентне*

а) Ланац је позитивно повратан.

б) Ланац је регуларан и постоји стационарна расподела ланца $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ *која је уједно и гранична расподела ланца.*

Штавише,

$$\pi_i = \frac{1}{q_i\mu_i}.$$

Претходна једнакост се интерпретира као удео очекиване дужине боравка до напуштања стања i у очекиваном времену које прође до повратка у то стање. Доказ теореме се може наћи у [1].

Ланац Маркова $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ је **ергодичан** ако је несводљив и позитивно повратан.

Ланац из примера (6) је несводљив и позитивно повратан, дакле он је регуларан и има јединствену стационарну расподелу (што смо раније показали) која је уједно и гранична, односно ланац је ергодичан.

Теорема 1.9.4 (Ергодичка теорема) *Нека је* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *ергодичан ланац Маркова. Нека је* g *ненегативна и ограничена функција дефинисана на простору стања* S*. Тада важи*

$$P\Big[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t g\big(X(t)\big) = \sum_{j\in S}\pi_j g(j)\Big] = 1.$$

Теорема каже да је временско усредњење функције g по парчету трајекторије ланца (случајне величине $\{X(s),\ s \in [0,t]\}$ чине то парче) скоро сигурно једнако просторном усредњењу функције g по расподели π.

За писање ове главе је коришћена следећа литература [1], [2], [3], [4], [7].

1.10 Нехомогени ланци Маркова са непрекидним временом

Проширићемо причу на нехомогени случај и дефинисати основне појмове на сличан начин као што је то урађено за хомогене ланце Маркова са непрекидним временом. Темељније ћемо размотрити ергодичка својства у општем случају. Вратимо се на дефиницију (1.3.1) и уклонимо претпоставку о временској хомогености ланца на коју смо се до сада ослањали.

Што се тиче матрице вероватноћа прелаза ланца Маркова са непрекидним временом, у општен случају она зависи од временских тренутака s и t и следећег је облика

$$P(s,t) = [p_{ij}(s,t)]_{i,j\in S}.$$

То је једна стохастичка матрица и за њу важе једначине Колмогоров-Чепмена, што се може показати применом истих идеја које су коришћене за извођење једначине (1.3) када се радило о хомогеном ланцу. Наводимо их записане у матричној форми

$$P(s,t) = P(s,u)P(u,t), \quad s \leqslant u \leqslant t. \tag{1.11}$$

Оно што карактерише временски хомогене ланце је управо чињеница да интензивности прелаза ланца не зависе од временског тренутка t у ком се ланац посматра. У општем случају оне су временски зависне и дефинишу се на следећи начин

$$q_{ij}(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h}, \quad \text{за } j \neq i,$$

$$q_{ii}(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ii}(t,t+h) - p_{ii}(t,t)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h},$$

тако да је инфинитезимални генератор нехомогеног ланца матрица која зависи од t,

$$Q(t) = [q_{ij}(t)]_{i,j\in S}.$$

У општем случају диференцијалне једначине Колмогорова имају следећи облик

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)Q(t), \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s,t) = -Q(s)P(s,t), \tag{1.13}$$

а о начину на који се до њих долази и о условима под којима важе се може наћи у [7].

Једначине (1.12) и (1.13) се могу записати у интегралном облику

$$P(s,t) = I + \int_s^t P(s,u)Q(u)du, \tag{1.14}$$

$$P(s,t) = I + \int_s^t Q(u)P(u,t)du. \tag{1.15}$$

Када је реч о класификацији стања нехомогеног ланца Маркова са непрекидним временом, појмови достижности, комуникације, несводљивости, затворености, повратности и пролазности се дефинишу на потпуно исти начин на који су већ дефинисани код хомогеног ланца.

Сада ћемо се усредсредити на ергодичка својства ланаца Маркова са непрекидним временом у општем случају. Разликујемо појмове ергодичности, јаке ергодичности и слабе ергодичности.

Као што је већ речено, појам ергодичан се користи за ланац који има својство да је после дужег временског периода вероватноћа да се нађе у било ком стању независна од почетног стања.

Дефиниција 1.10.1 *Ланац Маркова* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *је **ергодичан** ако постоји расподела вероватноћа* $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ *тако да је за свако* $i \in S$ *и* $s \geqslant 0$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(s,t) = \pi_j, \quad \text{за свако } j \in S.$$

Претходна дефиниција укључује конвергенцију појединачних елемената матрице вероватноћа прелаза $P(s,t)$. Следећа теорема даје потребан и довољан услов за ергодичност ланца.

Теорема 1.10.1 *Нека је* $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ *расподела вероватноћа на* S. *Ланац Маркова* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *са матрицом вероватноћа прелаза* $P(s,t)$ *је ергодичан ако и само ако за свако* $i \in S$ *и свако* $s \geqslant 0$ *важи*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| = 0. \tag{1.16}$$

Доказ:

Претпоставимо да за фиксирано $i \in S$ и $s \geqslant 0$ важи једнакост (1.16). За свако $k \in S$ важи

$$|p_{ik}(s,t) - \pi_k| \leqslant \sum_{j \in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j|.$$

Према томе, важи следеће

$$\lim_{t \to \infty} |p_{ik}(s,t) - \pi_k| = 0$$

и стога је ланац ергодичан.

Претпоставимо сада да је ланац ергодичан. Захваљујући својству нормираности расподеле вероватноћа π, за свако $\epsilon > 0$ се може одабрати K тако да важи

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \pi_j \leqslant \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.17}$$

Пошто је ланац ергодичан, постоји T тако да за $t \geqslant T$ и $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$ важи

$$|p_{ik}(s,t) - \pi_k| \leqslant \frac{\epsilon}{4K}. \tag{1.18}$$

Вишеструком применом неједнакости (1.17) и (1.18) за $t \geqslant T$ добија се

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| &= \sum_{j=1}^{K} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| + \sum_{j=K+1}^{\infty} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{K} \frac{\epsilon}{4K} + \sum_{j=K+1}^{\infty} p_{ij}(s,t) + \sum_{j=K+1}^{\infty} \pi_j \\
&\leqslant \frac{K\epsilon}{4K} + 1 - \sum_{j=1}^{K} p_{ij}(s,t) + \frac{\epsilon}{4} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4} + 1 + \sum_{j=1}^{K} \Big(\frac{\epsilon}{4K} - \pi_j\Big) + \frac{\epsilon}{4} \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \Big(1 - \sum_{j=1}^{K} \pi_j\Big) + \frac{K\epsilon}{4K} + \frac{\epsilon}{4} \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \pi_j + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\
&\leqslant \epsilon. \ \triangledown
\end{aligned}$$

Дакле, претходна теорема каже да се ергодичност може интерпретирати као својство ланца тако да свака врста матрице вероватноћа прелаза $P(s,t)$

конвергира ка истој расподели вероватноћа. Притом, стопе конвергенције различитих врста не морају бити једнаке, односно конвергенција није нужно униформна по i.

Дефиниција 1.10.2 *Норма вектора* $a = \{a_i\}_{i\in S}$ *се дефинише као*

$$||a|| = \sum_{i\in S} |a_i|.$$

За квадратну матрицу $A = [a_{ij}]_{i,j\in S}$, *норма од* A *се дефинише на следећи начин*

$$||A|| = \sup_{i\in S} \Big\{ \sum_{j\in S} |a_{ij}| \Big\}.$$

Очигледно је да је норма било које матрице вероватноћа прелаза $P(s,t)$,

$$\|P(s,t)\| = 1.$$

Уз претпоставку да је $\sum_{j\neq i} q_{ij}(t) = -q_{ii}(t)$, за норму инфинитезималног генератора важи

$$\|Q(t)\| = 2\sup_{i\in S}\{q_{ii}(t)\}.$$

Напоменимо још да матрицу која има једнаке врсте зовемо константна матрица.

Дефиниција 1.10.3 *Ланац Маркова* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *са матрицом вероватноћа прелаза* $P(s,t)$ *је* ***јако ергодичан*** *ако постоји констаантна стохастичка матрица* L *чије су врсте* $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ *тако да је за свако* $s \geqslant 0$

$$\lim_{t\to\infty} ||P(s,t) - L|| = 0.$$

Дакле, када је реч о јако ергодичном ланцу, не ради се само о конвергенцији појединачних врста матрице вероватноћа прелаза $P(s,t)$, већ о конвергенцији читаве матрице $P(s,t)$, у извесном смислу.

Сасвим очекивано, јако ергодичан ланац је и ергодичан. Уверимо се да то заиста важи. За било које $i \in S$ важи неједнакост

$$\sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| \leqslant \sup_{i\in S} \Big\{ \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| \Big\} = ||P(s,t) - L||,$$

па је

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| \leqslant \lim_{t\to\infty} ||P(s,t) - L|| = 0.$$

Када је простор стања коначан, ако важи

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{j\in S}|p_{ij}(s,t)-\pi_j|=0,\quad \text{за свако } i\in S,$$

онда важи и

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{i\in S}\Big\{\sum_{j\in S}|p_{ij}(s,t)-\pi_j|\Big\}=0,$$

па су ергодичност и јака ергодичност еквивалентне.

Дефиниција 1.10.4 *δ-коефицијенӣ сӣохасӣичке маӣрице $P=[p_{ij}]_{i,j\in S}$ се дефинише као*

$$\delta(P)=\frac{1}{2}\sup_{i,k\in S}\Big\{\sum_{j\in S}|p_{ij}-p_{kj}|\Big\}.$$

Дефиниција 1.10.5 *Ланац Маркова је **слабо ерīодичан** ако за свако $s\geqslant 0$ важи*

$$\lim_{t\to\infty}\delta\big(P(s,t)\big)=0.$$

Слаба ергодичност подразумева да ланац након извесног времена „заборавља” одакле је кренуо, па за било које $i,k\in S$ и довољно велико t, апсолутна разлика $|p_{ij}(s,t)-p_{kj}(s,t)|$ тежи нули. Притом, слабо ергодичан ланац не мора обавезно да конвергира ка некој расподели.

Пошто за свако $i,k\in S$ и $0\leqslant s\leqslant t$ важи следећа неједнакости

$$\sum_{j\in S}|p_{ij}(s,t)-p_{kj}(s,t)|\leqslant\sum_{j\in S}|p_{ij}(s,t)-\pi_j|+\sum_{j\in S}|p_{kj}(s,t)-\pi_j|,$$

јако ергодичан ланац Маркова са непрекидним временом је и слабо ергодичан. Међутим, ергодичан ланац не мора бити слабо ергодичан, исто тако ни слабо ергодичан ланац не мора да буде ергодичан. Но, сваки ергодичан ланац са коначним простором стања је јако ергодичан, па је самим тим и слабо ергодичан.

Навешћемо неколико примера који илуструју различите ситуације.

Пример 7. Нека је $\mathbf{X}=\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ ланац Маркова са непрекидним временом, простором стања $S=\mathbb{N}$ и матрицом вероватноћа прелаза $P(s,t)$.

$$P(s,t)=\begin{bmatrix}\frac12+\frac12e^{-(t^2-s^2)} & \frac14-\frac14e^{-(t^2-s^2)} & \frac18-\frac18e^{-(t^2-s^2)} & \frac1{16}-\frac1{16}e^{-(t^2-s^2)} & \cdots\\ \frac12-\frac12e^{-(t^2-s^2)} & \frac14+\frac34e^{-(t^2-s^2)} & \frac18-\frac18e^{-(t^2-s^2)} & \frac1{16}-\frac1{16}e^{-(t^2-s^2)} & \cdots\\ \frac12-\frac12e^{-(t^2-s^2)} & \frac14-\frac14e^{-(t^2-s^2)} & \frac18+\frac78e^{-(t^2-s^2)} & \frac1{16}-\frac1{16}e^{-(t^2-s^2)} & \cdots\\ \frac12-\frac12e^{-(t^2-s^2)} & \frac14-\frac14e^{-(t^2-s^2)} & \frac18-\frac18e^{-(t^2-s^2)} & \frac1{16}+\frac{15}{16}e^{-(t^2-s^2)} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

Хоћемо да испитамо ергодичка својства ланца $\mathbf{X}$. Проверимо прво да ли је $\mathbf{X}$ слабо ергодичан ланац. Јасно је да је

$$|p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)| = 0,$$

када је $i \neq j$ и $k \neq j$ или $i = k = j$. Ако је $i = j$ и $k \neq j$, онда је

$$|p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)| = \left| \frac{1}{2^j} + \frac{2^j - 1}{2^j} e^{-(t^2-s^2)} - \left(\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^j} e^{-(t^2-s^2)} \right) \right| = e^{-(t^2-s^2)}.$$

Исто важи и када је $k = j$ и $i \neq j$. Пошто је $|p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)|$ различито од нуле само када је $j = i$ и $j = k$, добија се

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \sup_{i,k\in S} \left\{ \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)| \right\} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} 2e^{-(t^2-s^2)} = 0,$$

па закључујемо да је ланац слабо ергодичан.
Сада ћемо да испитамо ергодичност ланца.

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(s,t) = \frac{1}{2^j}, \quad \text{за свако } i \in S.$$

Према томе, ланац $\mathbf{X}$ је ергодичан са граничном расподелом

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots \end{bmatrix}.$$

Занима нас још да ли је $\mathbf{X}$ јако ергодичан. Посматрамо апсолутне разлике

$$|p_{ij}(s,t) - \pi_j| = \frac{1}{2^j} e^{-(t^2-s^2)}, \quad \text{за } j \neq i,$$

$$|p_{ii}(s,t) - \pi_i| = \frac{2^i - 1}{2^i} e^{-(t^2-s^2)}.$$

Збир тих разлика по свим $j \in S$ је

$$\begin{aligned} \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| &= \sum_{j\neq i} \frac{1}{2^j} e^{-(t^2-s^2)} + \frac{2^i - 1}{2^i} e^{-(t^2-s^2)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{-(t^2-s^2)} + \frac{2^i - 2}{2^i} e^{-(t^2-s^2)} \\ &= e^{-(t^2-s^2)} + \frac{2^i - 2}{2^i} e^{-(t^2-s^2)} \\ &= 2\frac{2^i - 1}{2^i} e^{-(t^2-s^2)}. \end{aligned}$$

Претходни збир узима највећу вредност када је $i = 1$, па је

$$\lim_{t\to\infty} ||P(s,t) - L|| = \lim_{t\to\infty} \sup_{i\in S} \Big\{ \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - \pi_j| \Big\} = \lim_{t\to\infty} e^{-(t^2-s^2)} = 0.$$

Према томе, ланац $\mathbf{X}$ је и јако ергодичан. Да смо то испитали на почетку, директно би следило да је ланац ергодичан и слабо ергодичан.

Пример 8. Посматрамо ланац Маркова са непрекидним временом, простором од два стања за чију матрицу вероватноћа прелаза важи

$$P(s,t) = \begin{bmatrix} e^{-(t-s)} & 1-e^{-(t-s)} \\ e^{-(t-s)} & 1-e^{-(t-s)} \end{bmatrix}, \qquad \text{ако је } [t-s] \text{ парно;}$$

$$P(s,t) = \begin{bmatrix} 1-e^{-(t-s)} & e^{-(t-s)} \\ 1-e^{-(t-s)} & e^{-(t-s)} \end{bmatrix}, \qquad \text{ако је } [t-s] \text{ непарно.}$$

Такав ланац није ергодичан јер постоје две могуће граничне расподеле $\big(\pi = [0\ 1]$ или $\pi = [1\ 0]\big)$.

Ланац јесте слабо ергодичан јер за свако фиксирано $s \geqslant 0$ важи

$$\begin{aligned} \delta(P(s,t)) &= \frac{1}{2} \sup_{i,k\in S} \left\{ \sum_{j\in S} |p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sup_{i,k\in S} \{0\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

па је

$$\lim_{t\to\infty} \delta(P(s,t)) = 0.$$

Пример 9. Нека је

$$P(s,t) = \begin{bmatrix} \frac12 + \frac14 e^{-\frac{t-s}{2}} & \frac14 - \frac14 e^{-(t-s)} & \frac18 - \frac18 \frac{t-s}{1!} e^{-(t-s)} & \frac1{16} - \frac1{16} \frac{(t-s)^2}{2!} e^{-(t-s)} & \frac1{32} - \frac1{32} \frac{(t-s)^3}{3!} e^{-(t-s)} & \cdots \\ \frac12 - a_2 & \frac14 + \frac14 e^{-(t-s)} & \frac18 & \frac1{16} & \frac1{32} & \cdots \\ \frac12 - a_3 & \frac14 + \frac14 e^{-(t-s)} & \frac18 + \frac38 \frac{t-s}{1!} e^{-(t-s)} & \frac1{16} & \frac1{32} & \cdots \\ \frac12 - a_4 & \frac14 + \frac14 e^{-(t-s)} & \frac18 + \frac38 \frac{t-s}{1!} e^{-(t-s)} & \frac1{16} + \frac7{16} \frac{(t-s)^2}{2!} e^{-(t-s)} & \frac1{32} & \cdots \\ \frac12 - a_5 & \frac14 + \frac14 e^{-(t-s)} & \frac18 + \frac38 \frac{t-s}{1!} e^{-(t-s)} & \frac1{16} + \frac7{16} \frac{(t-s)^2}{2!} e^{-(t-s)} & \frac1{32} + \frac{15}{32} \frac{(t-s)^3}{3!} e^{-(t-s)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4}e^{-(t-s)}, \\ a_3 &= \frac{1}{4}e^{-(t-s)} + \frac{3}{8}\frac{t-s}{1!}e^{-(t-s)}, \\ a_4 &= \frac{1}{4}e^{-(t-s)} + \frac{3}{8}\frac{t-s}{1!}e^{-(t-s)} + \frac{7}{16}\frac{(t-s)^2}{2!}e^{-(t-s)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Сви ови коефицијенти су мањи од $\frac{1}{2}$, па су сви елементи матрице позитивни. Збир чланова у првој врсти је једнак 1, јер је

$$\begin{aligned} e^{-(t-s)} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{t-s}{1!} + \frac{1}{16}\frac{(t-s)^2}{2!} + \dots\right) &= \frac{1}{4}e^{-(t-s)} \cdot \left(1 + \frac{\frac{t-s}{2}}{1!} + \frac{(\frac{t-s}{2})^2}{2!} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{4}e^{-(t-s)}e^{\frac{t-s}{2}} \\ &= \frac{1}{4}e^{-\frac{t-s}{2}}. \end{aligned}$$

Очигледно је да је збир чланова и у осталим врстама једнак 1. Према томе, $P(s,t)$ је стохастичка матрица и нека је она матрица вероватноћа прелаза ланца Маркова $\mathbf{X}$.

Ланац је ергодичан, са граничном расподелом

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \end{bmatrix},$$

јер за свако фиксирано $s \geqslant 0$ и свако фиксирано $k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(t-s)^k}{k!}e^{-(t-s)} = 0.$$

Ланац није слабо ергодичан јер за свако фиксирано $s \geqslant 0$ важи

$$\begin{aligned} \delta(P(s,t)) &= \frac{1}{2}\sup_{i,k\in S}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)|\right\} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\sup_{i,k\in S}\left\{\sum_{j=2}^{\infty}|p_{ij}(s,t) - p_{kj}(s,t)|\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-(t-s)}\left(1 + \frac{t-s}{1!} + \frac{(t-s)^2}{2!} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-(t-s)}e^{t-s} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

па је

$$\lim_{t\to\infty}\delta(P(s,t)) \geqslant \frac{1}{4} \neq 0.$$

Следећа теорема даје довољан услов за еквивалентност слабе ергодичности и јаке ергодичности.

Теорема 1.10.2 *Нека је* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *ланац Маркова са непрекидним временом и инфинитезималним генератором* $Q(t)$ *таквим да* $\|Q(t)\| < q < \infty$. *Претпоставимо да за свако* $t > 0$ *постоји расподела вероватноћа* $\psi(t)$ *таква да*

$$\psi(t)Q(t) = 0$$

и претпоставимо да постоји расподела вероватноћа ψ *таква да је*

$$\int_0^\infty \|\psi(t) - \psi\|dt < \infty.$$

Тада, ако је $\mathbf{X}$ *слабо ергодичан, онда је* $\mathbf{X}$ *и јако ергодичан ланац.*

Доказ:

Нека је L константна стохастичка матрица чије су све врсте $\psi = (\psi_k)_{k\in S}$. Нека је $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t$. Када се искористи својство норме $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, једнакости (1.11) и (1.15) добија се

$$\begin{aligned}
\|P(s,t) - L\| &\leqslant \|P(s,t) - LP(u,t)\| + \|LP(u,t) - L\| \\
&\leqslant \|P(s,u)P(u,t) - LP(u,t)\| + \|L\big(I + \int_u^t Q(v)P(v,t)dv\big) - L\| \\
&= \|\big(P(s,u) - L\big)P(u,t)\| + \|L\int_u^t Q(v)P(v,t)dv\|.
\end{aligned}$$

Посматрајмо матрицу

$$C(u,t) = L\int_u^t Q(v)P(v,t)dv.$$

За њене елементе важи

$$c_{ij}(u,t) = \sum_{k \in S} \psi_k \int_u^t \big(Q(v)P(v,t)\big)_{kj} dv.$$

Сада ћемо искористити претпоставку да је $\|Q(t)\| < q$ и чињеницу да је $P(s,t)$ стохастичка матрица,

$$\begin{aligned} \int_u^t \sum_{k \in S} \big|\psi_k \big(Q(v)P(v,t)\big)_{kj}\big| dv &\leqslant \int_u^t \sum_{k \in S} (\psi_k \cdot q \cdot 1) dv \\ &= \int_u^t q dv = q(t-u) < \infty. \end{aligned}$$

Испуњени су услови за примену Фубинијеве теореме (формулација и доказ теореме се могу наћи у [3]), сума и интеграл могу заменити места, па је

$$C(u,t) = \int_u^t LQ(v)P(v,t)dv.$$

Пошто су $P(s,t)$ и L, обе стохастичке матрице, важи

$$\sum_{j \in S} \big(P(s,t) - L\big)_{ij} = 0 \quad \text{и} \quad \|P(s,t) - L\| \leqslant \|P(s,t)\| + \|L\| \leqslant 2.$$

За стохастичку матрицу P и матрицу $A = [a_{ij}]_{i,j \in S}$ такву да је $\sum_{j \in S} a_{ij} = 0$ за свако $i \in S$ и $\|A\| < \infty$ важи

$$\|AP\| \leqslant \|A\| \delta(P).$$

Доказ претходне неједнакости се може наћи у [9]. Применимо то сада на матрице $P(s,u) - L$ и $P(u,t)$.

$$\begin{aligned} \|P(s,t) - L\| &\leqslant \|\big(P(s,u) - L\big)P(u,t)\| + \|L \int_u^t Q(v)P(v,t)dv\| \\ &\leqslant \|P(s,u) - L\| \delta\big(P(u,t)\big) + \| \int_u^t LQ(v)P(v,t)dv\| \\ &\leqslant 2\delta(P(u,t)) + \int_u^t \|LQ(v)\| \|P(v,t)\| dv \\ &\leqslant 2\delta(P(u,t)) + \int_u^t \|LQ(v)\| dv. \end{aligned}$$

Пошто је L константна матрица, имамо

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|LQ(t)\|dt &= \int_0^\infty \|\psi Q(t)\|dt \\ &= \int_0^\infty \|\psi Q(t) - \psi(t)Q(t)\|dt \\ &\leqslant \int_0^\infty \|\psi - \psi(t)\|\|Q(t)\|dt \\ &\leqslant q\int_0^\infty \|\psi - \psi(t)\|dt \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Као последица претходног, за свако $\epsilon > 0$ се може одабрати $T \geqslant s$ тако да је за $t \geqslant u \geqslant T$

$$\int_u^t \|LQ(t)\|dt < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Пошто је ланац слабо ергодичан, за свако u постоји T' тако да је за $t \geqslant T'$

$$\delta(P(u,t)) < \frac{1}{4}\epsilon.$$

Нека је $u = T$ и $t \geqslant max(T, T')$. Коначно добијамо

$$\begin{aligned}\|P(s,t) - L\| &\leqslant 2\delta(P(u,t)) + \int_u^t \|LQ(v)\|dv \\ &\leqslant 2\Big(\frac{1}{4}\epsilon\Big) + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon. \ \triangledown\end{aligned}$$

Наредна теорема даје услове под којима се испитивање јаке ергодичности нехомогеног ланца може свести на испитивање јаке ергодичности хомогеног ланца.

Теорема 1.10.3 *Претпоставимо да је* $\lim_{t\to\infty}\|Q(t) - Q\| = 0$ *где је* $\sup_{t\geqslant 0}\|Q(t)\| < \infty$ *и* $\sup_{i\in S}\{|q_{ii}|\} < q < \infty$*. Ако је ланац Маркова са инфинитезималним генератором* Q *и матрицом вероватноћа прелаза* $P(t)$

јако ергодичан са граничном матрицом L, онда је нехомогени ланац Маркова са инфинитезималним генератором $Q(t)$ и матрицом вероватноћа прелаза $P(s,t)$ јако ергодичан са граничном матрицом L.

Доказ:

За стохастичку матрицу P и константну матрицу L важи

$$PL = L. \tag{1.19}$$

Уколико уведемо ознаке $C = PL$, $C = [c_{ij}]_{i,j \in S}$, имамо следеће

$$c_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik}\pi_j = \pi_j.$$

Тако је $C = L$.
Сада ћемо искористити једнакости (1.1) и (1.19)

$$\begin{aligned}
\|P(s,t) - L\| &\leqslant \|P(s,t-u)P(t-u,t) - L\| \\
&\leqslant \|P(s,t-u)P(t-u,t) - P(s,t-u)L\| \\
&\leqslant \|P(s,t-u)P(t-u,t) - P(s,t-u)P(u)\| \\
&+ \|P(s,t-u)P(u) - P(s,t-u)L\| \\
&\leqslant \|P(s,t-u)\|\|P(t-u,t) - P(u)\| + \|P(s,t-u)\|\|P(u) - L\| \\
&\leqslant 1 \cdot \|P(t-u,t) - P(u)\| + 1 \cdot \|P(u) - L\|.
\end{aligned}$$

Претпоставили смо да је хомогени ланац строго ергодичан, па постоји U такво да је

$$\|P(U) - L\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

За $t \geqslant U$ важи

$$\|P(s,t) - L\| \leqslant \|P(t-U,t) - P(U)\| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Сада наводимо једно тврђење које ће нам послужити да завршимо доказ.

При претпоставкама $\lim_{t\to\infty} \|Q(t) - Q\| = 0$, $\sup_{t \geqslant 0} \|Q(t)\| < \infty$ и $\sup_{i \in S}\{|q_{ii}|\} < q < \infty$, постоји M такво да

$$\|Q\| \leqslant M \quad \text{и} \quad \|Q(t)\| \leqslant M \text{ за свако } t \geqslant 0.$$

Такође, за свако $U > 0$ и $\delta > 0$ постоји $T = T(\delta)$ тако да је за $t \geqslant T$

$$\|P(t, t+U) - P(U)\| \leqslant \delta U e^{UM}.$$

Доказ овог помоћног тврђења се може наћи у [8].

Дакле, постоји M такво да се за фиксиране U и M може одабрати $\delta = \frac{\epsilon}{2U} e^{-UM}$ тако да за велико t важи

$$\|P(t-U, t) - P(U)\| = \|P(t-U, (t-U)+U) - P(U)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Коначно, постоји T такво да за $t \geqslant T$ важи

$$\|P(s,t) - L\| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \ \triangledown$$

Глава 2

Примери ланаца Маркова са непрекидним временом

2.1 Процеси рађања и умирања

Овде се бавимо посебном класом ланаца Маркова са непрекидним временом, а то су процеси рађања и умирања. Они представљају реалистичне моделе за раст популације у непрекидном времену. Управо зато, ови процеси имају велику примену у биологији, нарочито у популацијској екологији. Пошто може бити у питању и људска популација, они се користе и у демографији. Постоје и многи други процеси који се могу моделовати процесима рађања и умирања, као што су разни процеси производње и услуживања.

Подсетимо се примера (3) од раније. Посматрамо популацију зечева на одређеној територији. Нека је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ случајни процес такав да случајна величина $X(t)$ представља број јединки у популацији у тренутку t. Очигледно, простор стања овог случајног процеса је скуп $\mathbb{N}_0$. Интуитивно је јасно да је вероватноћа да се роди нова јединка у популацији већа што је број јединки у тој популацији већи. Према томе, интензивност рађања нових јединки зависи од тренутног броја јединки у популацији, па тако имамо интензивности рађања $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2,\ \ldots$ које зависе од стања система, као и интензитете смртности $\mu_0, \mu_1, \mu_2,\ \ldots$ Додатно претпостављамо да једна женка истовремено не може родити више од једног младунца и да се две женке не могу окотити истовремено јер би у супротном било нарушено својство ординарности (касније ћемо објаснити зашто). Дакле, стање система се за време h, $h \to 0$ може повећати за један у случају да се роди нова јединка, смањити за један ако дође до смрти неке јединке или остати непромењено.

Дефиниција 2.1.1 *Случајни процес* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *је **процес рађања и умирања** ако је он хомоген ланац Маркова чије вероватноће прелаза* $p_{ij}(t) = P[X(s+t) = j | X(s) = i]$ *задовољавају следеће услове*

1) $p_{i,i+1}(h) = P[X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = i] = \lambda_i h + o(h), \quad i \geqslant 0$
2) $p_{i,i-1}(h) = P[X(t+h) - X(t) = -1 | X(t) = i] = \mu_i h + o(h), \quad i \geqslant 1$
3) $p_{i,i}(h) = P[X(t+h) - X(t) = 0 | X(t) = i] = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geqslant 1$
4) $\lambda_i > 0,\ i \geqslant 0,\ \mu_0 = 0,\ \mu_i > 0, \quad i \geqslant 1$
5) $p_{i,j}(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$

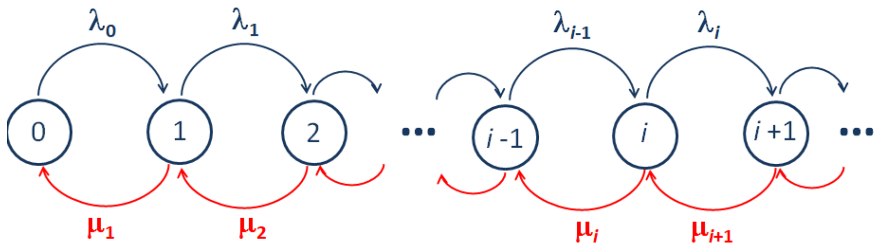
На основу једнакости (1.8) видимо да је инфинитезимални генератор овако дефинисаног процеса матрица

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Дакле, λ_n је интензитет рађања када се систем налази у стању n, тј. када је број јединки у популацији n, а μ_n је интензитет умирања када је систем у стању n (слика 2.1). Приметимо, уколико је систем у стању 0, нема више јединки у популацији, сасвим је природно да је интензитет умирања $\mu_0 = 0$. Логично би било, у случају популације зечева, да је интензитет рађања такође $\lambda_0 = 0$. Тада је стање 0 апсорбујуће и ланац није несводљив. Да бисмо сачували својство несводљивости, убудуће ипак сматрамо да $\lambda_0 > 0$, на пример може доћи до неких имиграција јединки у ту популацију.

Дужина задржавања ланца у стању i има експоненцијалну расподелу са параметром $q_i = \lambda_i + \mu_i$. Скок из стања i у стање $i+1$ има вероватноћу

$$r_{i,i+1} = \frac{q_{i,i+1}}{q_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i},$$



Слика 2.1: Интензивности рађања и умирања

а скок из стања i у стање $i-1$ има вероватноћу

$$r_{i,i-1} = \frac{q_{i,i-1}}{q_i} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}.$$

За вероватноћу прелаза у стање $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ кад $h \to 0$ важи

$$p_{ij}(h) = o(h),$$

односно, вероватноћа скока је

$$r_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = 0.$$

Ово својство каже да је немогуће рађање или умирање више јединки истовремено и зове се ординарност процеса.

Изведимо сада систем диференцијалних једначина Колмогорова за овај процес. Када се добијена матрица Q уврсти у диференцијалну једначину уназад добија се следећи систем једначина

$$P'(t) = QP(t)$$

$$\begin{aligned}
p'_{00}(t) &= -\lambda_0 p_{00}(t) + \lambda_0 p_{10}(t)\\
p'_{01}(t) &= -\lambda_0 p_{01}(t) + \lambda_0 p_{11}(t)\\
&\vdots\\
p'_{0j}(t) &= -\lambda_0 p_{0j}(t) + \lambda_0 p_{1j}(t),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p'_{i0}(t) &= \mu_i p_{i-1,0}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{i0}(t) + \lambda_i p_{i+1,0}(t), \quad i > 0 \\
p'_{i1}(t) &= \mu_i p_{i-1,1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{i1}(t) + \lambda_i p_{i+1,1}(t), \quad i > 0 \\
&\vdots \\
p'_{ij}(t) &= \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t), \quad i > 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Компактније записано, имамо следећи бесконачан систем диференцијално диференцних једначина

$$
\begin{aligned}
p'_{0j}(t) &= -\lambda_0 p_{0j}(t) + \lambda_0 p_{1j}(t), \quad j \geqslant 0 \\
p'_{ij}(t) &= \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t), \quad i > 0,\ j \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Треба испитати егистенцију и јединственост стационарне расподеле овог процеса. Покушаћемо да решимо систем једначина

$$\pi Q = 0,$$

$$
\begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\
\mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\
0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix} = 0,
$$

односно, покомпонентно

$$
\begin{aligned}
-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 &= 0 \\
\lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 + \mu_2 \pi_2 &= 0 \\
\lambda_1 \pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2) \pi_2 + \mu_3 \pi_3 &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Изразићемо све компоненте π_i у зависности од π_0

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0 \\
&\vdots \\
\pi_n &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi_0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Да видимо чему је једнак збир ових вероватноћа

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = \pi_0 \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \Big)$$

Да би био ипуњен услов $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, треба да важи

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} < +\infty,$$

односно, ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

треба да конвергира. Исказано речима, интензитет рађања не би требало сувише брзо да расте у односу на интензитет умирања.

Дакле, у случају да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$ конвергира, стационарна расподела постоји, јединствена је и важи

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}$$

2.2 Процеси чистог рађања

Специјалан случај процеса рађања и умирања су процеси чистог рађања. Као што им само име каже искључена је могућност умирања и $\mu_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Дефиниција 2.2.1 *Случајни процес* $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ *се назива* ***процесом чистог рађања*** *ако је он хомоген ланац Маркова са простором стања* $\mathbb{N}_0$*, чије вероватноће прелаза задовољавају следеће услове*

1) $p_{i,i+1}(h) = P[X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = i] = \lambda_i h + o(h),\ i \geqslant 0$

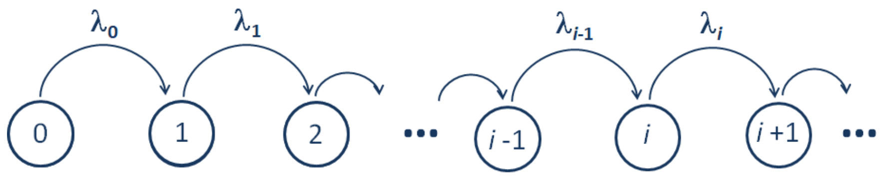
2) $p_{i,i}(h) = P[X(t+h) - X(t) = 0 | X(t) = i] = 1 - \lambda_i h + o(h),\ i \geqslant 1$

3) $X(0) = 0$

4) $P[X(t+h) - X(t) < 0 | X(t) = i] = 0.$

Инфинитезимални генератор овако дефинисаног процеса је матрица

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$



Слика 2.2: Интензивности рађања

а припадни граф дат је на слици 2.2.

Ако са $\mathbf{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ означимо уметнути ланац скокова овог процеса, тада су његове вероватноће прелаза

$$r_{i,i+1} = \frac{q_{i,i+1}}{q_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 1,$$

$$r_{ij} = 0, \text{ за } j \neq i+1,$$

односно, $\mathbf{Y}$ је детерминистички монотон ланац удесно (слика 2.2).

Систем диференцијалних једначина Колмогорова се може записати на једноставан начин

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t), \quad i \geqslant 0,\ j \geqslant 0.$$

Сада ћемо да проверимо у којим околностима постоји стационарна расподела овог ланца. Решавамо систем једначина

$$\pi Q = 0,$$

$$\begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned}-\lambda_0\pi_0 &= 0\\ \lambda_0\pi_0 - \lambda_1\pi_1 &= 0\\ \lambda_1\pi_1 - \lambda_2\pi_2 &= 0\\ &\vdots\end{aligned}$$

Изражавамо све компоненте у зависности од π_0

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_2}\pi_0, \quad \dots, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n}\pi_0, \quad \dots$$

Да би $\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ била расподела вероватноћа треба да буде испуњен услов нормираности, па у том случају важи

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0}{\lambda_n}\pi_0 = \pi_0\big(1 + \lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\big) = \pi_0\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n},$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}}.$$

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ треба да конвергира. Подсетимо се теореме (1.4.4), она каже да при овом услову ланац није регуларан, односно да експлодира у коначном времену. Дакле стационарна расподела може да постоји само код експлозивних процеса чистог рађања. Сва стања су пролазна и никоја два стања нису међусобно у комуникацији.

Пример процеса чистог рађања је раније помињани Пуасонов процес. Интензивност рађања не зависи од тренутног броја јединки у популацији и она је константна. Пошто Пуасонов процес није експлозиван, не постоји ни стационарна расподела.

Процес код ког је $\lambda_k = k\lambda$ се зове процес Јула[1]. Типичан пример је популација у којој се јединке размножавају деобом, на пример амебе или бактерије.

Пример 7. Посматрамо популацију амеба. Нека је $\mathbf{X} = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ процес такав да је случајна величина $X(t)$ број јединки у популацији у тренутку t. Пошто се амебе размножавају простом деобом, када ћелија заврши са фазом раста, она се дели образујући две идентичне ћерке ћелије. Дужина фазе раста једне јединке је експоненцијално расподељена са параметром λ. У почетном тренутку имамо само једну јединку у популацији. Инфинитезимални генератор ланца је матрица

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

одакле видимо да важи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

[1]George Udny Yule, 1871-1951, британски статистичар

Пошто је ред дивергентан, процес Јула је регуларан процес чистог рађања и стога не постоји стационарна расподела овог процеса.

За писање ове главе је коришћена следећа литература [2], [4].

Глава 3

Примене ланаца Маркова са непрекидним временом

С обзиром на то да су ланци Маркова погодни за моделовање широког спектра случајних појава, нашли су практичну примену у разним областима. Велики значај имају у медицини и биологији. Користе се у молекуларној биологији и генетици за праћење раста, размножавања и смрти ћелија, у екологији као модели за праћење броја јединки у популацији. Такође се користе у епидемиологији за праћење ширења заразних болести. Затим, у саобраћају за моделовање протока возила. На пример, на раскрсницама како би се на адекватан начин испрограмирали семафори, омогућило првенство пролаза у прометнијим улицама и тако смањиле гужве у саобраћају. Могу послужити за праћење оптерећености возила градског превоза у току дана, за одређивање оптималног броја возила на одређеним линијама у различитим терминима како се не би стварале гужве у возилима, што је у последње време нарочито важно, с обзиром на присуство вируса корона. Имају примену у економији, на пример, за анализу приноса акција на берзи, или као модел за пристизање и решавање одштетних захтева у осигурању. Савремене компаније желе да побољшају своје пословне системе па све више улажу у развој операционаих истраживања као базичне дисциплине менаџмента. Долази до интензивног развоја теорије редова чекања, теорије управљања залихама, теорије транспортних проблема где велики значај имају управо ланци Маркова. Размотрићемо неке примере примене ланаца Маркова са непрекидним временом.

3.1 Системи масовног опслуживања

Ситуације које сви желимо да избегнемо су чекање на ред у пошти или банци, у фризерском салону, на граничном прелазу, код лекара и сличне ситуације. Такође сви очекујемо да нам аутомеханичар што пре поправи аутомобил или да нам намештај по мери буде израђен у што краћем року. Са друге стране онима који пружају неке од тих услуга циљ је да муштерије оду задовољне, наставе да користе њихове услуге и они тако сачувају свој углед и побољшају пословање. Међутим, није реч само о услужним делатностима. Као основ капиталистичке привреде јавља се серијска производња, власници фабрика хоће што већу продуктивност радника и машина. Веома је важно да у том ланцу производње ниједна карика не закаже. Таквим проблемима се управо бави теорија редова чекања. Она за предмет има истраживања система масовног опслуживања, односно представља научну дисциплину која изучава процес опслуживања случајно пристиглих захтева и могућности задовољавања тих захтева. С обзиром на то да код многих од тих система стање у будућности не зависи од прошлости уколико је познато тренутно стање система, у овој области ланци Маркова имају велику примену.

Систем масовног опслуживања се састоји од клијената (оних који треба да буду опслужени) и сервера (оних који опслужују). Клијенти долазе у систем у случајним временским тренуцима и одлазе из система када буду опслужени. Клијенти могу бити људи којима треба преглед код лекара, муштерије у фризерском салону, аутомобили на наплатној рампи, камиони који чекају на истовар... Самим тим, сервером сматрамо сваког радника за шалтером, фризера у салону, механичара у сервису, аутомат на наплатној рампи, машину у ланцу производње... У свим тим системима, у зависности од учесталости пристизања захтева и динамике опслуживања, могу се формирати редови чекања.

Системи масовног опслуживања имају стандардне Кендалове[1] ознаке $A|B|c$ и класификују се на основу следећих карактеристика:

1) A - тип расподеле интервала између узастопних долазака клијената

2) B - тип расподеле дужине трајања опслуживања клијената

3) c - број сервера у систему

[1] David George Kendall, 1918-2007, енглески математичар и статистичар, познат по свом раду у области теорије редова чекања, увео поменуте ознаке за системе опслуживања 1953. године

Ми ћемо се бавити оним системима код којих је улазни поток клијената процес Маркова, што значи да су времена између узастопних долазака клијената у систем експоненцијално расподељена и у том случају имамо ознаку M (Марков). Такође претпостављамо да је дужина опслуживања експоненцијално расподељена, тј. процес опслуживања је марковски па опет имамо ознаку M. Тако посматрамо системе $M|M|1$, $M|M|2$ ...

Посматрамо систем $M|M|m$ и претпостављамо да је дисциплина опслуживања таква да се клијенти опслужују по редоследу долазака у систем ($FIFO$, $First\ In\ First\ Out$). Сматрамо још да је систем бесконачног капацитета, односно да број клијената који се могу истовремено наћи у систему није ограничен и да је популација из које долазе клијенти бесконачна.

Нека клијенти долазе у систем у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ и нека је дужина опслуживања сваког од клијената на сваком од сервера експоненцијално расподељена са параметром μ (интензивност опслуживања). Случајни процес $\mathbf{N} = \{N(t),\ t \geqslant 0\}$ је такав да $N(t)$ представља број клијената у систему у тренутку t. Овај процес је такође процес Маркова, припада класи процеса рађања и умирања и има интензитете рађања $\lambda_n = \lambda$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и интензтете умирања

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leqslant n \leqslant m \\ m\mu, & n \geqslant m \end{cases} .$$

Величина $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ се назива мера оптерећености система, а величина $\rho_m = \frac{\rho}{m}$ мера оптерећености појединачног сервера система који се налази у равнотежном стању (притом сматрамо да су сервери равноправни, тј. у случају да су сви сервери слободни не постоји неки примарни ка ком се клијенти прво упућују). Сада се поставља питање да ли систем достиже равнотежно стање, односно да ли постоји стационарна расподела овог ланца. Уколико се ослонимо на резултате добијене за процесе рађања и умирања имамо следеће

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\pi_0, & 0 < n \leqslant m \\ \frac{\lambda^n}{m^{n-m}m!\mu^n}\pi_0, & n \geqslant m \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m^{n-m}m!\mu^n}}.$$

Да би постојала стационарна расподела, треба да конвергира ред

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m^{n-m}m!\mu^n} &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^n}{m^{n-m}m!} = \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^{n-m}}{m^{n-m}} \\ &= \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{m^n} = \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_m^n = \frac{\rho^m}{m!} \frac{1}{1-\rho_m},\end{aligned}$$

односно, треба да важи $\rho_m < 1$, тј. $\lambda < m\mu$. Интуитивно је јасно да уколико је $\rho_m > 1$, сервер је преоптерећен. Ако је интензитет долазака подељен на број сервера који су у систему већи од интензитета опслуживања, онда долази до преоптерећености система и формирају се непожељни редови чекања. Формирање редова се може избећи повећавањем броја сервера у систему или повећавањем ефикасност појединачног сервера. Међутим, повећање броја сервера изискује више ресурса, па треба наћи оптимално решење. Са једне стране није добро када је радница за шалтером преоптерећена послом и стварају се гужве, а са друге стране послодавцу није у интересу да радница седи беспослена. Према томе, треба успоставти добар баланс између интензивности пристизања захтева и интензивности опслуживања.

Оно што може бити од интереса је удео времена у ком је систем празан. На пример, радница која ради сама у пошти може изаћи на паузу када у пошти нема никога. Вероватноћа да је систем празан је заправо π_0.

Да ли ће новопридошли клијент морати да чека на опслуживање? Уколико је у систему затекао m или више клијената, чекаће. Вероватноћа да клијент који долази у систем чека на опслуживање је следећа

$$\sum_{n=m}^{\infty} \pi_n = \pi_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m^{n-m}m!\mu^n} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^{n-m}}{m^{n-m}\mu^{n-m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \frac{1}{1-\rho_m}. \tag{3.1}$$

Позабавићемо се неким мерама перформансе система у равнотежном стању. Просечан број клијената у систему означавамо са L, а просечан број клијената у реду за чекање са L_q. У случају система који посматрамо, $M|M|m$, добијају се на следећи начин

$$L = EN(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP[N(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n,$$

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_n = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\rho_m^{n-m} \\ &= \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty} n\rho_m^{n-1}\rho_m = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}\frac{1}{(1-\rho_m)^2}\rho_m = \frac{\pi_m \rho_m}{(1-\rho_m)^2}. \end{aligned}$$

Корисно је одредити и очекивано време проведено у систему W и очекивано време проведено у реду за чекање W_q. На пример у сревису рачунара, муштерији која дође са захтевом да јој се поправи рачунар треба рећи када се очекује да ће поправка бити завршена.

Теорема 3.1.1 (Литлов закон) *Очекивани број клијената у систему (реду) је пропорционалан просечном времену које сваки клијент проведе у систему (реду), где је коефицијент пропорционалности баш интензитет долазака клијената у систем (ред).*

$$L = \lambda W \quad и \quad L_q = \lambda W_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Узимајући у обзир да је очекивана дужина трајања опслуживања $\frac{1}{\mu}$, добија се

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Пример 1. Компанија која врши откуп свежих малина, складишти их и замрзава располаже сумом новца довољном да купи један палетар (машина за истовар и утовар робе) типа A или два палетара типа B. Камиони са малинама пристижу на терминал у складу са експоненцијалном расподелом у просеку два камиона за један сат. Дужина трајања истовара једног камиона је експоненцијално расподељена и просечно траје 20 минута ако се врши палетаром типа A и 40 минута ако се врши палетаром типа B. Која је опција боља?

Наглашавамо да за јединицу времена узмамо 1 сат. Интензитет улазног потока је

$$\lambda = 2.$$

Прво ћемо да размотримо опцију куповине једног палетара типа A и све мере ће имати ознаку A. Пошто је очекивана дужина трајања истовара

$$\frac{1}{\mu_A} = \frac{1}{3},$$

интензитет опслуживања је

$$\mu_A = 3.$$

Исказано речима, за сат времена се може извршити истовар три камиона. Мера оптерећености овог система је

$$\rho_A = \frac{\lambda}{\mu_A} = \frac{2}{3}.$$

Хоћемо да одредимо вероватноћу да је систем празан. За стационарну расподелу овог ланца важи

$$\pi_n^A = \frac{\lambda^n}{\mu_A^n}\pi_0^A = \rho_A^n \pi_0^A, \quad n \geqslant 1.$$

Искористимо својство нормираности вероватноће

$$\pi_0^A \big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_A^n\big) = 1,$$

па је вероватноћа коју тражимо

$$\pi_0^A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_A^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho_A}} = 1 - \rho_A = \frac{1}{3}.$$

Очекивани број камиона који се истовремено налазе у систему је

$$\begin{aligned} L_A &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\rho_A^n = (1-\rho_A)\rho_A \sum_{n=0}^{\infty} n\rho_A^{n-1} = (1-\rho_A)\rho_A \big(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_A^n\big)' \\ &= (1-\rho_A)\rho_A \big(\frac{1}{1-\rho_A}\big)' = (1-\rho_A)\rho_A \frac{1}{(1-\rho_A)^2} = \frac{\rho_A}{1-\rho_A} = 2. \end{aligned}$$

На основу Литловог закона, очекивана дужина временског периода који камион проведе у систему је

$$W_A = \frac{L_A}{\lambda} = 1,$$

док је очекивано време проведено у реду за чекање

$$W_{qA} = W_A - \frac{1}{\mu_A} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

и очекивани број камиона у реду за чекање

$$L_{qA} = \lambda W_{qA} = \frac{4}{3}.$$

Новопридошли камион ће чекати у реду за истовар уколико се у систему већ налази бар један камион, па је вероватноћа да ће чекати на истовар једнака

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^A = 1 - \pi_0^A = \frac{2}{3}.$$

Сада разматрамо другу опцију. Пошто је очекивана дужина трајања истовара

$$\frac{1}{\mu_B} = \frac{2}{3},$$

онда је интензивност опслуживања

$$\mu_B = \frac{3}{2}.$$

Мера оптерећености система је

$$\rho_B = \frac{\lambda}{\mu_B} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3},$$

док је мера оптерећености појединачних сервера (палетара)

$$\rho_{2B} = \frac{\lambda}{2\mu_B} = \frac{2}{2\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Из једнакости (3.1) и услова нормираности вероватноће следи да је

$$\pi_0^B \Big(1 + \rho_B + \frac{\rho_B^2}{2} \frac{1}{1 - \rho_{2B}} \Big) = 1,$$

одакле добијамо следећу вероватноћу да је систем празан

$$\pi_0^B = \frac{1}{1 + \rho_B + \frac{\rho_B^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{\rho_B}{2}}} = \frac{2 - \rho_B}{2 + \rho_B} = \frac{2 - \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{5}.$$

Очекивани број клијената у систему је

$$\begin{aligned} L_B &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n^B = \pi_1^B + 2\pi_2^B + \sum_{n=3}^{\infty} n\pi_n^B = \pi_0^B \Big(\rho_B + \rho_B^2 + \sum_{n=3}^{\infty} n \frac{\rho_B^n}{2^{n-1}} \Big) \\ &= \pi_0^B \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho_B^n}{2^{n-1}} \Big) = \pi_0^B \rho_B \sum_{n=1}^{\infty} n \Big(\frac{\rho_B}{2} \Big)^{n-1} = \pi_0^B \rho_B \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\rho_B}{2} \Big)^n \Big)' \\ &= \pi_0^B \rho_B 2 \Big(\frac{1}{1 - \frac{\rho_B}{2}} \Big)' = \pi_0^B \rho_B \frac{1}{(1 - \frac{\rho_B}{2})^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Табела 3.1: Мере перформансе система A и B

	A	B
λ	2	2
μ	3	$\frac{3}{2}$
ρ	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
ρ_m	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
π_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
L	2	$\frac{12}{5}$
L_q	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{15}$
W	1	$\frac{6}{5}$
W_q	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$
$1-\pi_0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$

На основу Литловог закона, очекивана дужина временског периода који камион проведе у систему је

$$W_B = \frac{L_B}{\lambda} = \frac{6}{5},$$

док је очекивано време проведено у реду за чекање

$$W_{qB} = W_B - \frac{1}{\mu_B} = \frac{6}{5} - \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

и очекивани број камиона у реду за чекање

$$L_{qB} = \lambda W_{qB} = \frac{16}{15}.$$

Вероватноћа да ће новопридошли камион чекати у реду за истовар је

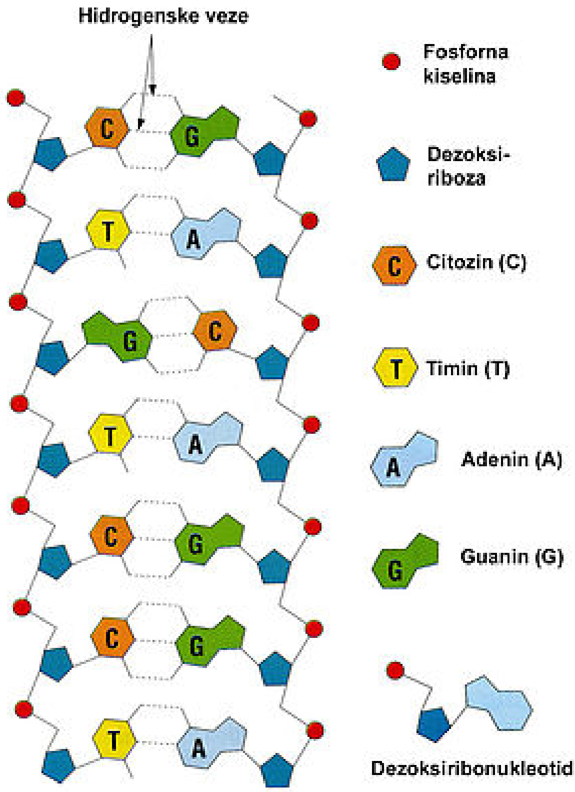
$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^B = 1 - \pi_0^B = \frac{4}{5}.$$

Сумирамо добијене резултате из табеле (3.1). У случају да компанија располаже двама палетарима типа B, просечно време чекања у реду до истовара ће бити краће јер у случају да је један палетар заузет, ту је други да преузме следећи камион, и просечно се мање камиона налази у реду за чекање. Међутим, пошто истовар траје знатно дуже него када се врши палетаром типа A, ипак ће камиони више времена проводити у оваквом систему него у случају када компанија располаже једним палетаром типа A. Овде у прилог може ићи и чињеница да за један палетар треба ангажовати једног радника, а за два палетара два радника. Такође, може се десити да палетар типа A троши много више електричне енергије него палетар типа B. Многа питања се појављују у оваквим ситуацијама и треба их добро размотрити. Но, у погледу времена које камиони проводе у систему, опција куповине једног палетара типа A је ипак боља.

3.2 Jukes - Cantor модел - пример примене у генетици

Jukes [2] - Cantor [3] модел је један од модела еволуције ДНК секвенци кроз генерације. Описаћемо структуру ДНК (дезоксирибонуклеинска киселина), али само у оној мери у којој је то потребно за разумевање овог примера, не залазећи пуно у детаље. Основна градивна јединица ДНК је нуклеотид (слика 3.1). Нуклеотиди се састоје од једног молекула азотне базе, једног молекула шећера пентозе (дезоксирибозе) и једне фосфатне групе. У структури нуклеотида се могу наћи пуринске и пиримидинске базе. Пуринске базе ДНК су аденин и гуанин, а пиримидинске цитозин и тимин. Нуклеотиди су међусобно повезани фосфодиестарским везама градећи полинуклеотидни ланац. ДНК се састоји од два полинуклеотидна ланца који су спирално увијени један око другог. Анденин једног ланца је везан за тимин другог ланца двема водоничним везама, а гуанин за цитозин трима водоничним везама. Овакав принцип повезивања нуклеотида се зове принцип комплементарности и омогућава да редослед база у једном ланцу аутоматски одређује редослед у другом. Врста и редослед нуклеотида ДНК представља њену примарну структуру и специфичан је за сваку врсту. Гени су линеарно распоређени делови ДНК, величине од неколико стотина до неколико хиљада нуклеотидних парова и представљају физичку и функционалну јединицу наслеђивања, која преноси наследну поруку из генераццје у генерацију. Грађа гена је грађа ДНК и огледа се у тачно одређеном редоследу нуклеотида. Промена тог редоследа доводи до промене функција гена и назива се генска мутација.

[2] Thomas Hughes Jukes, 1906–1999, британски биолог
[3] Charles R. Cantor, рођен 1942, амерички молекуларни генетичар

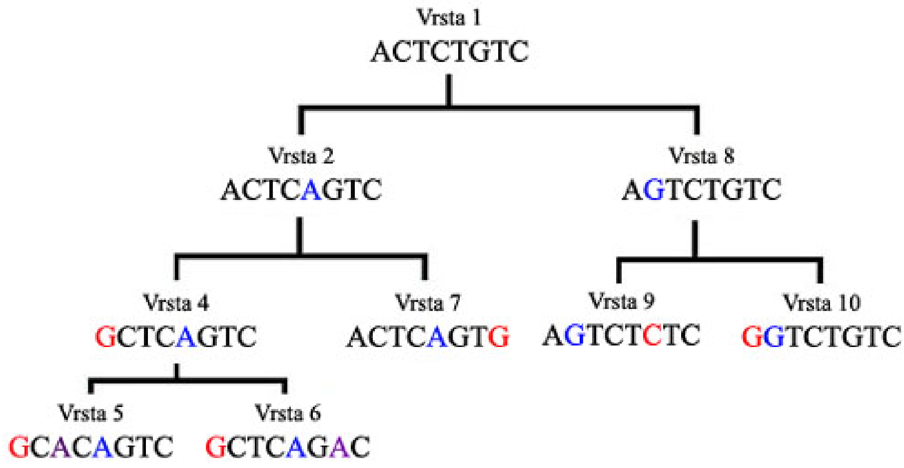


Слика 3.1: Структура ДНК

Током еволуције долази до појединачних промена ДНК нуклеотида. На једној позицији у ДНК секвенци један нуклеотид замењује други (слика 3.2) тако да се процес може налазити у четири различита стања у зависности од тога која се нуклеобаза налази на тој позицији (аденин, гуанин, цитозин, тимин).

Главна идеја која стоји иза овог модела је претпоставка да је вероватноћа прелаза из једног стања у друго стање увек иста и да су позиције у ДНК секвенци међусобно независне. Стога, матрица вероватноћа прелаза има следећи облик

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{AA}(t) & p_{AG}(t) & p_{AC}(t) & p_{AT}(t) \\ p_{GA}(t) & p_{GG}(t) & p_{GC}(t) & p_{GT}(t) \\ p_{CA}(t) & p_{CG}(t) & p_{CC}(t) & p_{CT}(t) \\ p_{TA}(t) & p_{TG}(t) & p_{TC}(t) & p_{TT}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3f(t) & f(t) & f(t) & f(t) \\ f(t) & 1-3f(t) & f(t) & f(t) \\ f(t) & f(t) & 1-3f(t) & f(t) \\ f(t) & f(t) & f(t) & 1-3f(t) \end{bmatrix}.$$



Слика 3.2: Супституција нуклеотида ДНК секвенце

Да видимо како изгледа инфинитезимални генератор овог ланца,

$$P'(t) = \begin{bmatrix} -3f'(t) & f'(t) & f'(t) & f'(t) \\ f'(t) & -3f'(t) & f'(t) & f'(t) \\ f'(t) & f'(t) & -3f'(t) & f'(t) \\ f'(t) & f'(t) & f'(t) & -3f'(t) \end{bmatrix}$$

$$Q = P'(0) = \begin{bmatrix} -3f'(0) & f'(0) & f'(0) & f'(0) \\ f'(0) & -3f'(0) & f'(0) & f'(0) \\ f'(0) & f'(0) & -3f'(0) & f'(0) \\ f'(0) & f'(0) & f'(0) & -3f'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & -3\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & -3\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & -3\alpha \end{bmatrix},$$

где је $\alpha = f'(0)$.

Искористићемо диференцијалну једначину унапред да покушамо да дођемо до $f(t)$.

$$P'(t) = P(t)Q$$

На позицији $[1, 1]$ матрица са леве и десне стране једнакости имамо

$$-3f'(t) = -3\alpha(1 - 3f(t)) + \alpha f(t) + \alpha f(t) + \alpha f(t)$$

$$f'(t) = \alpha(1 - 4f(t)).$$

Ово је диференцијална једначина која раздваја променљиве и једноставно се долази до решења.

$$\int \frac{f'(t)}{\alpha(1 - 4f(t))} dt = \int dt$$

Увођењем смене $u = 1 - 4f(t) \implies du = -4f'(t)dt$ се добија

$$-\frac{1}{4\alpha}\int \frac{1}{u}du = t + c_1$$

$$-\frac{1}{4\alpha}\ln|u| + c_2 = t + c_1$$

$$u = c_3 e^{-4\alpha t}$$

$$f(t) = \frac{1}{4} - ce^{-4\alpha t}.$$

Треба још одредити константу c.

$$f'(t) = 4\alpha c e^{-4\alpha t}$$

$$f'(0) = 4\alpha c$$

$$\alpha = 4\alpha c \implies c = \frac{1}{4}$$

$$f(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4\alpha t})$$

$$f'(t) = \alpha e^{-4\alpha t}$$

Према томе ланац има следеће вероватноће прелаза

$$p_{ii}(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4\alpha t},$$

$$p_{ij}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4\alpha t}, \quad j \neq i$$

Испитајмо да ли постоји стационарна расподела овог ланца.

$$\pi Q = 0$$

$$\begin{aligned}
-3\alpha\pi_A + \alpha\pi_G + \alpha\pi_C + \alpha\pi_T &= 0 \\
\alpha\pi_A - 3\alpha\pi_G + \alpha\pi_C + \alpha\pi_T &= 0 \\
\alpha\pi_A + \alpha\pi_G - 3\alpha\pi_C + \alpha\pi_T &= 0 \\
\alpha\pi_A + \alpha\pi_G + \alpha\pi_C - 3\alpha\pi_T &= 0 \\
\pi_A + \pi_G + \pi_C + \pi_T &= 1
\end{aligned}$$

Лако је показати да систем има јединствено решење (овде га нећемо изводити јер технички део захтева доста времена и простора)

$$\pi_A = \pi_G = \pi_C = \pi_T = \frac{1}{4},$$

односно, гледајући не дуге стазе, систем у сваком од четири стања проведе четвртину времена.

При $Jukes - Cantor$ процени еволутивне удаљености између две секвенце користи се следећа вредност која се добија посматрањем почетне секвенце и секвенце након t времена, $p = \frac{m}{n}$, где је n дужина секвенце, а m број позиција на којима се те две секвенце разликују. Какву зависност уочавамо између вредности p и времена t? Вероватноћа да ланац промени стање за време t је $3f(t)$. Стога је очекивано да ће удео позиција на којима се секвенце разликују бити $3f(t)$ па је

$$p \approx \frac{3}{4}(1 - e^{-4\alpha t}),$$

односно t се апроксимира са

$$t \approx -\frac{1}{4\alpha} \ln(1 - \frac{4}{3}p).$$

Може се показати да је ова оцена баш оцена која се добија методом максималне веродостојности, али се тиме овде нећемо бавити.

За писање овог примера је коришћена следећа литература [6]. Ту се могу наћи и други модели еволуције ДНК који се ослањају на ланце Маркова и притом узимају у обзир претпоставку да је већа вероватноћа да једна пиримидинска база пређе у пиримидинску него у пуринску и обрнуто.

3.3 Модел ширења заразне болести COVID-19

Централна тема актуелна већ више од годину дана на глобалном нивоу је епидемија изазвана вирусом $SARS\ COV\ 2$. Како сачувати животе људи, одржати нормално функционисање здравствених система и спречити велике економске последице данас су кључна питања. Да ли је одмах требало увести радикалне мере или је можда те мере требало одложити? У духу овог времена, и у овом раду ћемо направити кратак осврт на ту тему.

Група научника са Универзитета у Мајнцу је у марту 2020-те моделирала еволуцију броја регистрованих инфицираних вирусом $SARS\ COV\ 2$ у Немачкој. Модел је заснован на ланцима Маркова са непрекидним временом са скупом од четири стања, $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Особа може бити здрава неинфицирана ($s = 1$), оболела од $COVID-19$ ($s = 2$), преминула од последица инфекције ($s = 3$) и инфицирана без симптома или излечена ($s = 4$). Посматра се популација која је у почетном тренутку величине N. Нека је $X_k(t)$ стање k-те особе у тренутку t. Јасно је да ланац креће из стања 1, тј.

$$P[X_k(0) = 1] = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

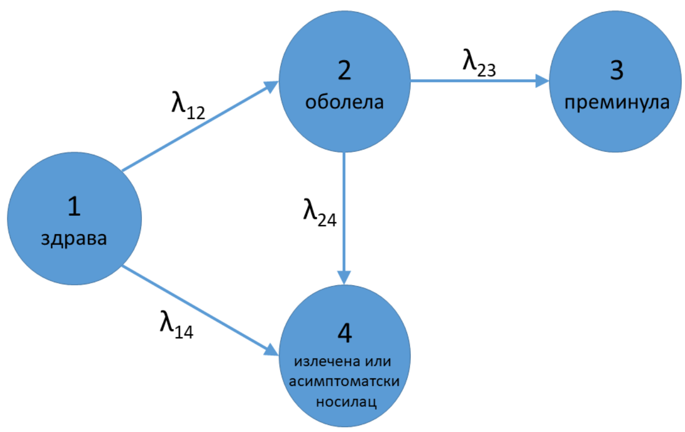
Интензивност прелаза из стања i у стање j означавамо са λ_{ij}. Сасвим је јасно да је стање 3 апсорбујуће и да важи

$$\lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{34} = 0.$$

У овом моделу је коришћена претпоставка да излечена особа не може поново да буде инфицирана и да је стога стање 4 апсорбујуће. Пошто се из стања 1 не може директно прећи у стање 3 важи $\lambda_{13} = 0$. Имамо следећу матрицу интензивности прелаза

$$Q = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12}+\lambda_{14}) & \lambda_{12} & 0 & \lambda_{14} \\ 0 & -(\lambda_{23}+\lambda_{24}) & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и припадни граф овог ланца (слика 3.3).



Слика 3.3: Интензитети прелаза између стања

Нека је $N_1(t)$ број здравих неинфицираних особа у популацији у тренутку t, $N_2(t)$ број оболелих у тренутку t, $N_3(t)$ број преминулих до тренутка t и

$N_4(t)$ број инфицираних без симптома у тренутку t и излечених до тренутка t. Свака здрава особа остварује одређени број контаката са другим људима у току дана. Просечан број контаката које у једном дану оствари здрава особа описујемо стопом контаката a. При остваривању контаката постоји извесна вероватноћа да је особа са којом је контакт остварен носилац инфекције. Та вероватноћа је баш

$$\frac{N_2(t) + \eta N_4(t)}{N_1(t) + N_2(t) + N_4(t)}.$$

Укупан број особа у популацији са којим контакт може бити остварен је $N_1(t)+N_2(t)+N_4(t)$, $N_3(t)$ искључујемо јер су те особе до тренутка t преминуле и не играју више никакву улогу у социјалним интеракцијама. Носиоци инфекције су $N_2(t)$ особа које су оболеле у тренутку t и још $\eta N_4(t),\ \eta \in [0,1]$ особа које су "тихи", односно асимптоматски носиоци вируса.

Количник

$$\rho(t) = \frac{N_2(t) + N_4(t)}{N_1(t) + N_2(t) + N_4(t)}.$$

зовемо стопа инфицираности популације у тренутку t. Она говори који удео популације преживелих је до момента t већ био инфициран. Епидемиолози и вирусолози предвиђају да ће до краја епидемије две трећине укупне популације бити инфицирано у неком моменту током епидемије, а да једна трећина популације никада неће бити инфицирана, те ће ρ достићи свој максимум $\bar{\rho} \approx \frac{2}{3}$.

Интензивност оболевања у тренутку t зависи од броја здравих особа у тренутку t, броја инфицираних у тренутку t, као и стопе инфицираности популације у тренутку t. Такође зависи и од стопе контаката a. Према томе имамо временски зависне интензитете оболевања

$$\lambda_{12}(t) \equiv \lambda_{12}(a, N_1(t), N_2(t), \eta N_4(t), \rho(t)).$$

Сасвим је логично да се интензитет оболевања повећава са порастом броја заражених у популацији па је

$$\frac{\partial \lambda_{12}(t)}{\partial N_2(t)} > 0, \quad \frac{\partial \lambda_{12}(t)}{\partial(\eta N_4(t))} > 0 \quad i \quad \frac{\partial \lambda_{12}(t)}{\partial N_1(t)} < 0.$$

Међутим, гледано на дуге стазе, када стопа инфицираности популације достигне одређени ниво $\bar{\rho}$, интензитет оболевања постаје нула, односно долази до ефекта колективног имунитета.

Када је у популацији $N_1(t)$ здравих особа, акумулирана интензивност оболевања је

$$\phi_{12}(t) = \lambda_{12}(t)N_1(t).$$

Једно од важних питања је који проценат инфицираних испољава симптоме инфекције, тј. који проценат инфицираних су само асимптоматски носиоци инфекције. Мало је доступних података о томе јер се у главном тестирају особе које испољавају неке од симптома. Да би се то утврдило потребно је тестирати и здраве особе што је тешко изводљиво, бар за сада, јер је тестирање по особи скупо, захтева доста времена и медицинског особља. Из тих разлога епидемиолози претпостављају да удео r инфицираних испољава симптоме и да је константан током епидемије. Према томе, имамо следеће

$$r\big(\lambda_{14}(t)N_1(t) + \lambda_{12}(t)N_1(t)\big) = \lambda_{12}(t)N_1(t).$$

Интензивност прелаза из стања 1 у стање 4 је

$$\lambda_{14}(t) = \frac{1-r}{r}\lambda_{12}(t),$$

акумулирано

$$\phi_{14}(t) = \lambda_{14}(t)N_1(t).$$

Занимају нас још интензитети смртности и опоравка. У овој анализи претпостављамо да су они константни, иако зависе од неких фактора, старости оболелог, придружених болести... Имамо интензитете смртности и опоравка оболелог дела популације

$$\phi_{23}(t) = \lambda_{23}N_2(t)$$

$$\phi_{24}(t) = \lambda_{24}N_2(t)$$

Пошто је дужина чекања до опоравка експоненцијално расподељена са параметром λ_{24}, онда је просечна дужина трајања опоравка

$$n_{rec} = \frac{1}{\lambda_{24}}.$$

Нека је $p_s(t)$ вероватноћа да се нека особа из поулације у тренутку t налази у стању s. Пошто је стање 1 увек почетно, та вероватноћа је $p_s(t) = P[X_k(t) = s|X_k(0) = 1] = p_{1s}(0,t)$.

Директни систем диференцијалних једначина Колмогорова има следећи облик

$$\begin{aligned}
p_1'(t) &= -(\lambda_{12}(t) + \lambda_{14}(t))p_1(t)\\
p_2'(t) &= \lambda_{12}(t)p_1(t) - (\lambda_{23}(t) + \lambda_{24}(t))p_2(t)\\
p_3'(t) &= \lambda_{23}(t)p_2(t)\\
p_4'(t) &= \lambda_{14}(t)p_1(t) + \lambda_{24}(t)p_2(t).
\end{aligned}$$

Вероватноћа да се особа разболи у току једног дана је

$$p_{12}(t, t+1) = 1 - e^{-\int_t^{t+1} \lambda_{12}(u)du}$$

јер је у тренутку u дужина чекања до преласка у стање 2 експоненцијано расподељена са параметром $\lambda_{12}(u)$.

Очигледно је да важи

$$E(N_s(t)) = p_s(t)N.$$

Медији свакодневно извештавају о регистрованом броју новооболелих у претходна двадесет четири сата. Ево како би се тај број могао унапред предвидети. С обзиром на то да је акумулирана интензивност оболевања у тренутку u

$$\phi_{12}(u) = \lambda_{12}(u)N_1(u),$$

а очекивани број здравих особа у трнутку u

$$E(N_1(u)) = p_1(u)N,$$

очекивани број новооболелих у претходна двадесет четири сата се може израчунати на следећи начин

$$E(N_2^{new}(t)) = \int\limits_{t-1}^{t} \lambda_{12}(u)p_1(u)Ndu.$$

Очекивани број преминулих до тренутка t је

$$E(N_3(t)) = \int\limits_{0}^{t} \lambda_{23}p_2(u)Ndu.$$

Приметимо да се увођењем мера регулише стопа контаката a и тако утиче на ток епидемије. Радикалне мере смањују стопу контаката, смањујући уједно и интензивност оболевања, чиме се успорава ширење епидемије. Нагло попуштање мера доводи до драстичног скока стопе контаката и наглог пораста интензитета оболевања, што није добро у случају да је велики део популације и даље здрав, односно налази се у стању 1. Међутим, радикалне мере доводе до негативног утицаја првенствено на економију, али имају и многих других негативних утицаја, на пример на ментално здравље људи услед изолације. Тако да остаје отворено питање како регулисати стопу контаката на најбољи могући начин.

Смисао модела који смо изложили је да послужи за предвиђање ширења заразне болести $COVID - 19$ у различитим околностима. И да на тај начин помогне при доношењу добрих одлука тако да се на крају епидемије прође са што мање губитака, како изгубљених људских живота, тако и економских губитака и са што мање последица по здравље, образовање и других лоших последица.

Представљени модел је примењен на податке којима се у марту 2020-те располагало за Немачку. Више о томе и добјеним резултатима може се наћи у [5] .

Закључак

Циљ овог рада је био да на прегледан и сликовит начин прикаже кључна својства ланаца Маркова са непрекидним временом као класе случајних процеса. На првом месту, да објасни шта је то својство Маркова и јасно дефинише ланац Маркова са непрекидним временом. Затим, да покаже и појасни законитости које важе за вероватноће прелаза и интензивности прелаза ланца. Задатак је био и да објасни класификацију стања ланаца на основу тога из којих стања и у која стања ланац може доспети, колико често посећује одређена стања и колико се у њима задржава и да критеријуме за ту класификацију. Потом се фокусира на испитивање понашања ланаца у будућности - гледано на дуге стазе. Покушали смо све то да поткрепимо адекватним примерима.

С обзиром на то да је подручје примене ланаца Маркова са непрекидним временом веома широко, изабрали смо неколико конкретних примера и њима се посветили. Када је реч о системима масовног опслуживања, дат је један вештачки конструисан пример, поједностављене ситуације која се јавља у реалном животу. Иако упрошћен, овај пример веома лепо осликава употребу свих претходно изложених својстава, правила и закона за одређивање перформанси система опслуживања у реалном животу. То може послужити за доношење важних одлука, у конкретном случају при избору система који боље фукционише, што можда на први поглед није тако очигледно. У раду је представљен један од познатих модела из ДНК еволуције који је заснован на ланцима Маркова са непрекидним временом. На крају је изложен један модел ширења заразне болести $COVID-19$. Циљ је био да овим примером уверимо читаоца у драгоценост ланаца Маркова.

Литература

[1] David Stirzaker. *Stochastic Processes and Models.* Oxford University Press, New York, 2005.

[2] Howard M. Taylor and Samuel Karlin. *An Introduction to Stochastic Modeling.* Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[3] Павле Младеновић. *Вероватноћа и статистика.* Математички факултет, Београд, 2008.

[4] Ленка Главаш, Слободанка Јанковић. *Стохастички модели у операционим истраживањима.* Математички факултет, Београд, 2016.

[5] Jean Donsimoni, René Glawion, Bodo Plachter, Klaus Wälde. *IZA DP No. 13094: Projecting the Spread of COVID-19 for Germany.* IZA - Institute of Labor Economics, Bonn, march 2020.

[6] Richard E. Neapolitan. *Probabilistic Methods for Bioinformatics.* Morgan Kaufmann Publishers, Burlington, MA, 2009.

[7] William Feller. *On Boundaries and Lateral Conditions for the Kolmogorov Differential Equations.* Annals of Mathematics, 65(3): 527-570, 1957.

[8] Jean T. Johnson. *Ergodic properties of nonhomogeneous, continuous-time Markov chains.* Ph.D. dissertation, Iowa State University, Ames, Iowa, 1984.

[9] J. R. Blum, M. Reichaw. *Two integral inequalities.* Israel Journal of Mathematics, 1971.

Биографија аутора

Рођена сам 1995. године у Ужицу. Одрасла сам у Сирогојну, где и данас често боравим. Током основне школе сам показивала интересовање за математиком, радо сам одлазила на летње школе и математичка такмичења, са усхићењем примала сваку похвалу и награду и то доба чувам у веома лепом сећању. Похађала сам Ужичку гимназију и завршила 2014. године као математичар генерације. Основне академске студије сам завршила на Математичком факултету у Београду, на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика, 2018. године. Током студирања сам живела у Студентском граду, у друштву студената како са Математичког, тако и са других факултета, што истичем као вредан период живота, током ког сам стекла нова знања и искуства, а на који стављам тачку управо овим радом. Тренутно радим у Народној банци Србије на актуарским пословима.