Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Master rad

Božanski broj

Mentor:
Dr Tanja Stojadinović

Student:
Dorijana Ardeljan
1120/2018

Beograd,
2021.

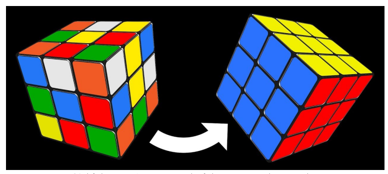
Sadržaj

1 Uvod

Božanski algoritam (eng. God's algorithm) je pojam koji je nastao u diskusiji o optimalnom rešenju *Rubikove kocke*, ali se koristi i kod drugih zadataka ili igara kombinatornog tipa. Odnosi se na algoritam koji, sledeći pravila igre, daje rešenje u najmanjem broju uzastopnih poteza. Ovaj broj zove se **Božanski broj** (eng. God's number). Ponekad se ovaj pojam upotrebljava za maksimalan broj poteza ukoliko je cilj igre/zadatka ostvarivanje maksimalnog broja poteza (primer: Skakačev krug).
Takođe, bitno je napomenuti da za neke igre nije pronađen Božanski broj. Najpoznatiji primer ovakve igre je **šah**, zatim i japanska igrica **go**. Obe ove igre imaju osobinu da se prilikom svakog poteza ubrzano poveća broj pozicija. Ukupan broj svih mogućih pozicija, otprilike 10154 za šah i 10180 za go je preveliki da bi se dobilo rešenje korišćenjem trenutne tehnologije. Dakle, zaključak je da određivanje Božanskog algoritma za ove igre nije moguće.
U ovom radu će se kroz primer Rubikove kocke doći do *Božanskog broja*, a zatim će biti uključeni i drugi primeri u kojima se traži takav broj.

2 Rubikova kocka

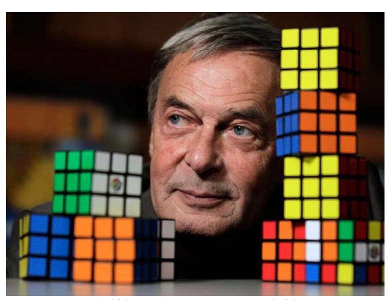
Rubikova kocka (poznata i kao **Magična kocka** odnosno **Mađarska kocka**) je mehanička 3D kombinaciona slagalica koju je 1974. godine izumeo mađarski profesor arhitekture, pronalazač i vajar *Erne Rubik (Ernõ Rubik)*. Strane kocke su sastavljene od 54 manjih kvadrata koji se vrte oko središnjeg jezgra. Svaka od šest stranica koje čine kocku u rešenom obliku je različite boje. Na slici 1 prikazana je Rubikova kocka.



Slika 1: Rubikova kocka

2.1 Istorijat

Sredinom 1970-tih, Erne Rubik je radio u Odeljenju za dizajn enterijera na Akademiji primenjenih umetnosti i zanata u Budimpešti. Iako je opšte poznata priča da je kocka napravljena kao nastavno sredstvo koje bi pomoglo studentima da bolje razumeju 3D objekte, njena stvarna svrha je bila rešavanje strukturnih problema kretanja pokretnih delova samostalno, bez raspada celog sistema. Erne zapravo nije shvatio da je stvorio slagalicu dok je nije prvi put pomešao, nakon čega je pokušao da je popravi. Bilo mu je potrebno mesec dana da reši sopstvenu enigmu. Rubik je dobio mađarski patent za njegovu **Magičnu kocku** 1975. godine. *Rubikova kocka* je prvo nazvana **Magična kocka** u Mađarskoj. Slagalica nije patentirana međunarodno iste godine kao originalni patent. Zakon o patentima je kasnije sprečio mogućnost patentiranja. Kompanija *Ideal* je želela prepoznatljivo ime za zaštitni znak. Tada je Rubik došao u centar pažnje, jer je magična kocka preimenovana u ime njenog izumitelja 1980. godine.



Slika 2: Erne Rubik

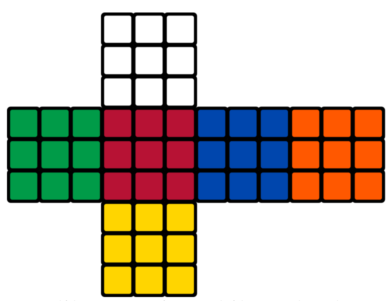
Prva test serija **Magičnih kocki** je proizvedena krajem 1977. godine i izdana je u trgovinama igračaka u Budimpešti. Magična kocka je držana zajedno pomoću blokade od komada plastike koji je sprečavao da se slagalica lako rastavi. U septembru 1979.

godine, potpisan je ugovor sa *Idealom* da izda **Magičnu kocku** širom sveta, i slagalica je napravila svoj međunarodni debi na sajmovima igračaka u Londonu, Parizu, Nirnbergu i Njujorku, tokom januara i februara 1980. godine.

Slika 3: Pakovanje Rubikove kocke

Nakon njenog međunarodnog debija, napredak kocke na zapadu je nakratko zaustavljen, tako da bi se na zapadu mogla proizvoditi sigurno i sa ambalažnim specifikacijama. Proizvedena je lakša kocka i *Ideal* je odlučio da je preimenuje. Razmatrani su „Gordijev čvor" i „Zlato Inka", ali kompanija se konačno odlučila za ime „**Rubikova kocka**", i prva serija je izvezana iz Mađarske u maju 1980. godine.

Kod klasične **Rubikove kocke**, koja se sastoji od 26 malih kocki (svaka kocka sa po 6 strana - ukupno 156 strane od kojih su samo 54 obojene), svako od šest lica Rubikove kocke je prekriveno sa devet nalepnica, a svaka je jedne od šest boja: bela, crvena, plava, narandžasta, zelena i žuta. U trenutno prodavanim modelima, bela je nasuprot žute, plava je nasuprot zelene i narandžasta je nasuprot crvene, a crvena, bela i plava su raspoređene u smeru kazaljke na satu. Na pređašnjim kockama, pozicija boja je varirala.



Slika 4: Boje Rubikove kocke

2.2 Takmičenja

Slagači kocke i dalje treniraju slaganje ove i drugih modifikovanih slagalica, te se takmiče za najbrže vreme u različitim kategorijama. Od 2003. godine, Svetska asocijacija kocke, međunarodno upravno telo Rubikove kocke, organizuje takmičenja i vrši evidenciju svetskih rekorda. Postoje pravila i kompjuterski programi po kojima se određuje (isti) početni položaj kocke i kao takav ostavlja takmičarima za rešavanje. Trenutni svetski rekord u rešavanju Rubikove kocke drži Kinez *Jušeng Du (Yusheng Du)* sa 3,47 sekundi.

Čak se i naučnici takmiče ko će izraditi najboljeg robota koji će najbrže složiti Rubikovu kocku. Najbrži robot koji je rešio Rubikovu kocku je „Sub1 Reloaded“ sa vremenom od 0,637 sekundi, a napravio ga je Nemac *Albert Ber (Albert Beer)* 2016. godine. Dakle, pomoću robota Rubikova kocka može da se složi za 0,637 sekundi.

Godine 2010., 134 učenika jedne osnovne škole u Engleskoj su oborili svetski Ginisov rekord za najveći broj ljudi koji su složili Rubikovu kocku u 12 minuta. Prethodni rekord je ostvaren 2008. godine u SAD-u kada je učestvovalo 96 ljudi.

Do danas, prodato je preko 450 miliona kocki širom sveta, čime je ova slagalica postala najprodavanija na svetu.

2.3 Matematika i Rubikova kocka

Broj permutacija koje je moguće izvesti sa najprodavanijom igračkom na svetu se jednostavnim kombinatornim računom može odrediti. Originalna Rubikova kocka dimenzija $3 \times 3 \times 3$ ima osam ugaonih kockica i dvanaest ivičnih kockica. Postoji 8! načina da se rasporede kocke na uglovima. Od toga, sedam se može postaviti sa tri obojene ivice proizvoljno, dok orijentacija osme zavisi od prethodnih sedam, što daje 37 mogućnosti. Ivice je moguće rasporediti na 12!2 načina, pošto neparna permutacija uglova povlači za sobom neparnu permutaciju ivica. Jedanaest ivica je moguće rasporediti nezavisno, dok položaj dvanaeste ivice zavisi od rasporeda prethodnih jedanaest, pa postoji 2^{11} različitih mogućnosti.
Broj različitih položaja je tačno $\mathbf{b} = 43\ \ 252\ \ 003\ \ 274\ \ 489\ \ 856\ \ 000$.

2.3.1 Singmasterova notacija

Dejvid Singmaster (David Singmaster) (rođen 1938. u SAD) je penzionisani profesor matematike na Londonskom Univerzitetu. Ima ogromnu ličnu kolekciju mehaničkih slagalica i knjiga mozgalica. Najpoznatiji je entuzijastični promoter Rubikove kocke. Njegove beleške o Rubikovoj „**Magičnoj kocki**“ koje je počeo da sastavlja 1979. pružaju prvu matematičku analizu Kocke, kao i jedno od prvih objavljenih rešenja. Knjiga je sadržala *označavanje Rubikove kocke* koje je ubrzo postalo standard.

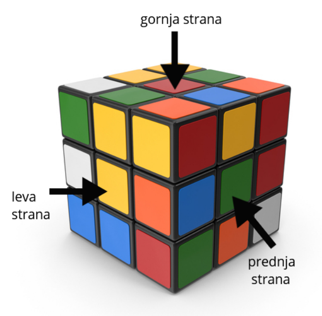
Singmasterovo povezivanje sa Rubikovom kockom datira od avgusta 1978. godine, kada je video Kocku na Međunarodnom kongresu matematičara u Helsinkiju. Ubrzo ju je nabavio i uspeo da je reši do početka septembra 1978. godine. Rekao je da mu je trebalo više od dve nedelje da pronađe opšte rešenje za Kocku. Smislio je svoj zapis, notaciju za snimanje poteza (*Singmaster notacija*) u decembru 1978. U junu 1979. napisao je jedan od prvih članaka o Kocki.

U oktobru 1979. objavio je svoje beleške o „**Magičnoj kocki**“. Brošura je sadržala njegovu matematičku analizu Rubikove kocke, omogućavajući konstruisanje rešenja korišćenjem osnovne teorije grupa. U avgustu 1980. objavio je prošireno peto izdanje knjige s naslovom „Beleške o Rubikovoj Magičnoj kocki“. Knjiga je sadržala njegovo sopstveno „korak-po-korak“ rešenje za Kocku. Procenjuje se da je prodao između 50000 i 60000 primeraka svoje knjige.

Singmaster je opisan kao „jedan od najoduševljenijih i najplodnijih promotera Kocke“. U septembru 1981. godine rečeno je da je posvetio „skoro 100 %“ svog vremena promovisanju, izveštavanju, marketingu i analizi Kocke.

Singmasterova notacija

Oznake za šest strana Rubikove kocke su: desna strana - **r**, leva strana - **l**, gornja strana - **u**, donja strana - **d**, prednja strana - **f**, te zadnja strana - **b**. Za početak, bira se koja će strana biti gore, napred i desno i to se neće menjati, tako što će se zapamtiti boje središta gornje, prednje i desne strane.



Slika 5: Označavanje strana Rubikove kocke

Rubikova kocka sastoji se, kao što je pre pomenuto, od 26 kockica (u sredini nije kockica, već mehanizam za obrtanje). Od toga imamo:

1. 8 ugaonih kockica (tri vidljive strane)
2. 12 ivičnih kockica (dve vidljive strane)
3. 6 centralnih kockica (jedna vidljiva strana)

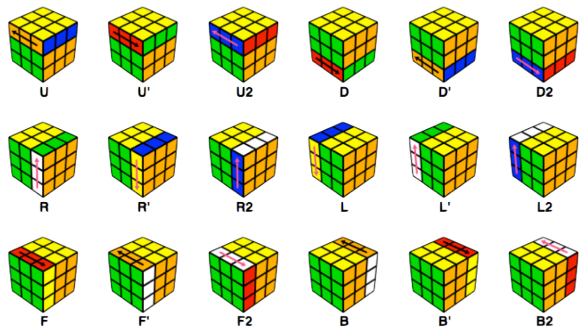
Za imenovanje ugaonih kockica koristimo njihovu lokaciju. Npr, kockica koja se nalazi u gornjem, desnom, prednjem uglu se naziva urf (ili rfu ili fur). Slično imenujemo i ivične i centralne kockice.

Osnovni potez na Rubikovoj kocki je **rotacija** jedne strane za prav ugao u smeru kretanja kazaljke na satu. Singmasterove oznake za šest osnovnih poteza su:

- F (eng. Front) - rotacija prednje strane za 90 °
- B (eng. Back) - rotacija zadnje strane za 90 °
- U (eng. Up) - rotacija gornje strane za 90 °
- D (eng. Down) - rotacija donje strane za 90 °
- L (eng. Left) - rotacija leve strane za 90 °
- R (eng. Right) - rotacija desne strane za 90 °

Takođe, bitne su i sledeće oznake:

- F' (eng. Front) - rotacija prednje strane za 90 °suprotno od smera kazaljke na satu
- B' (eng. Back) - rotacija zadnje strane za 90 °suprotno od smera kazaljke na satu
- U' (eng. Up) - rotacija gornje strane za 90 °suprotno od smera kazaljke na satu
- D' (eng. Down) - rotacija donje strane za 90 °suprotno od smera kazaljke na satu
- L' (eng. Left) - rotacija leve strane za 90 °suprotno od smera kazaljke na satu
- R' (eng. Right) - rotacija desne strane za 90 °suprotno od smera kazaljke na satu
- F2 (eng. Front) - rotacija prednje strane za 180 °u smeru kretanja kazaljke na satu
- B2(eng. Back) - rotacija zadnje strane za 180 °u smeru kretanja kazaljke na satu
- U2 (eng. Up) - rotacija gornje strane za 180 °u smeru kretanja kazaljke na satu
- D2 (eng. Down) - rotacija donje strane za 180 °u smeru kretanja kazaljke na satu
- L2 (eng. Left) - rotacija leve strane za 180 °u smeru kretanja kazaljke na satu
- R2 (eng. Right) - rotacija desne strane za 180 °u smeru kretanja kazaljke na satu



Slika 6: Rotacije i oznake rotacija Rubikove kocke

Kućice su prazna mesta na kojima se nalaze kockice. Označavaju se isto. **Potez** na Rubikovoj kocki je konačan niz osnovnih poteza (koji vodi od jedne konfiguracije do druge). **Konfiguracija** je neka permutacija kockica. Primetimo da ugaone mogu da se permutuju samo sa drugim ugaonim kockicama, a ivične samo sa ivičnim. Konfiguraciju u kojoj su sve kockice u odgovarajućim kućicama sa odgovarajućim orijentacijama zovemo početna koniguracija. Dakle, početna koniguracija predstavlja položaj u kome je svaka strana kocke u jednoj boji (odnosno rešena konfiguracija). Smatramo da su dva poteza jednaka ako dovode do iste konfiguracije. Rešenje za slaganje neke kocke će biti niz poteza i važno je napomenuti kako se određuje dužina rešenja. Naime, prirodno se nameće pristup gde bi poteze oblika F i F' gledali kao dužine 1 (jer se ne mogu rastaviti na jednostavnije), a poteze oblika F2 gledali kao da su dužine 2, jer predstavljaju kompoziciju dva poteza oblika F. Međutim, svaki od mogućih 18 poteza posmatra se kao dužine 1.

2.3.2 Grupa i podgrupe Rubikove kocke

Pre daljeg razmatranja Rubikove kocke, treba se prisetiti šta je grupa.

Definicija 1. *Neka je G neprazan skup. Svako preslikavanje $*: G \times G \to G$ Dekartovog proizvoda skupa G sa samim sobom u skup G zove se* ***binarna operacija*** *na skupu G.*

Definicija 2. ***Grupa*** *je algebarska struktura koja se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $*$ za koje važi:*

1. *Zatvorenost operacije: Ako $a, b \in G$, onda važi i : $a * b \in G$*
2. *Asocijativnost: $\forall a, b, c \in G$ važi: $(a * b) * c = a * (b * c)$.*
3. *Neutralni element: $\exists e \in G$ tako da za $\forall a \in G$ važi: $a * e = e * a = a$.*
4. *Inverzni element: $\forall a \in G, \exists a' \in G$ tako da važi: $a * a' = a' * a = e$.*

Dakle, grupa je par $(G, *)$. Skup G se naziva ***nosač grupe****.*

Definicija 3. *Grupa $(G, *)$ je* ***komutativna*** *ili* ***Abelova*** *ako $\forall a, b \in G$ važi: $a * b = b * a$.*

Definicija 4. *Grupa se naziva **konačnom** ukoliko je skup G konačan.*

Definicija 5. *Broj elemenata neke konačne grupe G se označava sa $|G|$ i zove se **red** grupe G. Red elementa $a \in G$ je najmanji prirodan broj n takav da $a^n = e$ (a^n je 'umnožak' a sa samim sobom n puta).*

Tada, skup svih mogućih poteza na Rubikovoj kocki se može označiti sa G. Ako dva poteza daju isti rezultat, smatraju se istim (npr. okret desne strane je isti kao i okret desne strane u suprotnom smeru tri puta). Red elementa grupe G, u kontekstu Rubikove kocke, označava dovoljan broj ponovljenih poteza da bi se izgled kocke vratio u prvobitno stanje. Binarnu operaciju $*$, u kontekstu kocke, možemo ovako posmatrati: ako su X i Y dva poteza, tada $X * Y$ označava potez gde se prvo izvršio potez X, a zatim i potez Y. Treba dokazati da je skup $(G, *)$ grupa.

Dokaz.

1. Zatvorenost: jedan potez, nakon kog sledi drugi potez ponovo daje potez koji je element skupa G.
2. Asocijativnost: ovde se radi o operaciji koja je kompozicija funkcija, a kompozicija funkcija je uvek asocijativna.
3. Neutralni element: potez koji ništa ne menja na kocki (prazan potez, dakle potez u kojem ne radimo ništa).
4. Inverzni element: nakon svakog poteza, kocka se može vratiti u početno stanje nekim potezom iz skupa. Dakle, za potez X inverzni potez X^{-1} je onaj gde ponovimo sve pojedinačne osnovne poteze obrnutim redosledom u suprotnom smeru. □

Dakle, skup $(G, *)$ jeste grupa.

Grupa Rubikove kocke $(G, *)$ **nije** Abelova grupa, jer ne zadovoljava svojstvo komutativnosti.

Dokaz. Lako se može proveriti da svojstvo komutativnosti ne važi, posmatrajući kocku. Kocka različito izgleda npr. nakon poteza R i D, a različito nakon poteza D i R. □

Nekomutativnost grupe Rubikove kocke je izuzetno važno svojstvo. Kada bi svaka dva poteza komutirala, rešavanje kocke bi bilo trivijalno. Trebalo bi se samo prebrojati koliko puta su izvedeni potezi na pojedinim stranama i svaku stranu okrenuti do sledećeg sadržaoca broja 4, jer je 4 red grupe čiji se elementi sastoje od kombinacija jednog od osnovnih poteza. Na primer, ako je 5 puta izveden osnovni potez R i 2 puta osnovni potez D, da važi komutativnost, kocka bi se vratila u svoj početni položaj ako se izvede 3 puta osnovni potez R i 2 puta osnovni potez D. Izvođenje poteza je komutativno samo ako se radi o potezima sa samo jednom stranom.

Red grupe Rubikove kocke je broj koji označava koliko ima različitih konfiguracija kocke koje se mogu dobiti primenom osnovnih poteza, a taj broj, uveden ranije, je **b**.

Definicija 6. *Neka je $(G, *)$ grupa. Za neprazan podskup H skupa G kažemo da je **podgrupa** grupe G ako je u odnosu na operaciju $*$ i sam grupa. Oznaka je $H \leq G$.*

Kako bi se shvatila grupa Rubikove kocke čiji je red ogroman, treba početi od jednostavnije situacije: razmatranja njenih podgrupa.

Za rešavanje Rubikove kocke veliku ulogu imaju **klase** tj. **koseti** (eng. coset) koji se definišu na sledeći način:

Definicija 7. *Neka je H podgrupa grupe G. Tada za $g \in G$ važi:*

1. *$gH = \{gh \mid h \in H\}$ je **levi koset** podgrupe H u grupi G;*
2. *$Hg = \{hg \mid h \in H\}$ je **desni koset** podgrupe H u grupi G.*

2.3.3 Generatori i ciklične grupe

Lema 1. *Neka je $(G, *)$ grupa i $S \subseteq G$ neprazan skup. Skup $H = \{s_1 * s_2 * ... * s_n \mid s_i \in S \cup S^{-1}, i = 1, ..., n, n \in \mathbb{N}\}$ čini podgrupu grupe G. ($S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$).*

Definicija 8. *Za podgrupu H iz* Leme 1 *kažemo da je **generisana** elementima iz S, odnosno S je **skup generatora** podgrupe H, u oznaci $H = \langle S \rangle$. Napomena: Za $S = \{a_1, ..., a_n\}$ pišemo $H = \langle a_1, ..., a_n \rangle$.*

Primer 1. *Svaki element grupe Rubikove kocke može se zapisati kao konačan sled osnovnih poteza Rubikove kocke, stoga na osnovu definicije, vidimo da je $G = \langle R, L, U, D, F, B \rangle$.*

Definicija 9. *Grupa $(G, *)$ je **ciklična** ako postoji $g \in G$ takvo da $G = \langle g \rangle$. Element g zove se **generator** grupe G.*

Lema 2. *Neka je $(G, *)$ konačna grupa i $g \in G$. Tada postoji prirodan broj n takav da je $g^n = e$. Takođe važi: $g^{-1} = g^{n-1}$.*

Lema 3. *Neka je $(G, *)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Tada $G = \langle S \rangle$ ako i samo ako svaki element iz G može da se napiše kao konačan proizvod elemenata iz S (dakle, nisu nam potrebni inverzni elementi elemenata iz S).*

Dokaz. ($\Leftarrow$) : Trivijalno.
($\Rightarrow$): Neka važi $G = \langle S \rangle$. To znači da se svakog $g \in G$ može napisati u obliku $g = s_1 * ... * s_n$, $s_i \in S \cup S^{-1}$. Dakle, treba da pokažemo da se inverz svakog elementa iz S može napisati kao proizvod elemenata iz S. To ćemo dokazati indukcijom. Za n=1, tj. $g = s_1$ imamo sledeće mogućnosti:

1. $s_1 \in S$: Ovo važi.
2. $s_1^{-1} \in S$: Prema *Lemi 2*, $s_1^{-1} = s_1^m$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Dakle, $g = s_1^m$, što smo i hteli. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje od n. Neka je $g = s_1 * ... * s_n$. Po induktivnoj hipotezi znamo da se elementi $s_1 * ... * s_{n-1}$ i s_n mogu prikazati kao proizvod elemenata iz S. Sledi da to važi i za g.

$\square$

Lema 4. *Neka je $(G, *)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Ako važi:*

1. *Svaki element iz S zadovoljava neko svojstvo P,*

2. *Ako $g, h \in G$ zadovoljavaju P, onda $g * h$ zadovoljava P, tada svaki element iz $\langle S \rangle$ zadovoljava P.*

Dokaz. Sledi iz *Leme 3*, indukcijom. $\square$

2.3.4 Simetrična grupa

Lema 5. *Neka je X neprazan skup. Skup svih bijekcija skupa X na samog sebe sa operacijom kompozicije čini grupu.*

Definicija 10. *Grupa iz* Leme 5 *se naziva* ***simetrična grupa*** *skupa X, u oznaci $Sym(X)$. Ako je $X = \{1, 2, ..., n\}$, simetričnu grupu od X označavamo sa S_n.*

Možemo primetiti da su elementi grupe S_n sve permutacije skupa $\{1, 2, ..., n\}$. Ove permutacije možemo prikazati na sledeći način: za $\sigma \in S_n$ pišemo:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Primer 2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:
$1 \to 7 \to 3 \to 6 \to 10 \to 1$
$2 \to 5 \to 8 \to 2$
$4 \to 4$
$9 \to 9$

Pišemo $\sigma = (1\ \ 7\ \ 3\ \ 6\ \ 10)(2\ \ 5\ \ 8)(4)(9)$

Definicija 11. ***Ciklus***

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

je element $\tau \in S_n$ definisan na sledeći način:

1. *$\tau(i_1) = i_2$, $\tau(i_2) = i_3$,...,$\tau(i_{k-1}) = i_k$, $\tau(i_k) = i_1$,*
2. *$\tau(j) = j$, $j \neq i_r$, $r = 1, 2, ..., k$*
   k je ***dužina ciklusa*** *(kažemo da je τ k-ciklus), a skup $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ je* ***nosač ciklusa****, u oznaci* suppτ*. Kažemo da su ciklusi σ i τ disjunktni ako $supp\sigma \cap supp\tau = \emptyset$.*

Lema 6. *Disjunktni ciklusi komutiraju.*

Dokaz. Neka su $\sigma, \tau \in S_n$ dva disjunktna ciklusa, tj. $supp\sigma \cap supp\tau = \emptyset$. Neka je $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Imamo dve mogućnosti:

1. $i \notin supp\sigma$ i $i \notin supp\tau$. Tada $\sigma(i) = \tau(i) = i$, pa je $(\sigma\tau)(i) = (\tau\sigma)(i) = i$.

2. i pripada tačno jednom od nosača σ i τ. Neka je to, bez umanjenja opštosti, $supp\tau$. Tada $\sigma(i) = i$, pa je $\tau(\sigma(i)) = \tau(i)$. Pošto je $\tau(i) \in supp\tau$ i važi da su ciklusi σ i τ disjunktni ako $supp\sigma \cap supp\tau = \emptyset$, sledi $\tau(i) \notin supp\sigma$, odnosno $\sigma(\tau(i)) = \tau(i)$. Zato je $(\sigma\tau(i))$=$(\tau\sigma(i))$.

□

Važi sledeće: Svaka permutacija se može napisati kao proizvod, tj. kompozicija disjunktnih ciklusa.
Ciklus dužine 2 se naziva **transpozicija**.

Lema 7. *Svaki ciklus je proizvod transpozicija.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je $(1\ \ 2\ \ 3\ \ \cdots\ \ k) = (1\ \ 2)(1\ \ 3)\cdots(1\ \ k)$, a ovo se lako proverava indukcijom ili neposredno množenjem transpozicija na desnoj strani. □

Dakle, sledi da se svaka permutacija može predstaviti kao proizvod transpozicija.

Definicija 12. *Neka je data permutacija $\sigma \in S_n$. Kažemo da σ čini **inverziju** s obzirom na elemente $i, j \leq n$ ako i samo ako je $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Broj svih inverzija permutacije σ obeležavamo sa $I(\sigma)$. Kažemo da je σ **parna permutacija** ako je $I(\sigma)$ paran broj, a u suprotnom je **neparna**.*

Primer 3.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$I(\sigma) = 6$

Lema 8. *Permutacije σ i $(i\ \ j)\sigma$ su suprotne parnosti.*

Dokaz. Neka je

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Posmatrajmo sledeće slučajeve:

1. $j = i + 1$
   $(i\ \ i+1)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & i+1 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i+1} & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix}$
   Vidimo da u tom slučaju važi: $I((i\ \ i+1)\sigma) = \begin{cases} I(\sigma)+1 & a_i < a_{i+1} \\ I(\sigma)-1 & a_i > a_{i+1} \end{cases}$

2. $j > i + 1$
   Lako se može pokazati da je $(i\ \ j) = (i\ \ i+1)(i+1\ \ i+2)\cdots(j-2\ \ j-1)(j-1\ \ j)(j-1\ \ j-2)\cdots(i+2\ \ i+1)(i+1\ \ i)$,
   pa je $(i\ \ j)\sigma$ sukcesivno množenje $2(j-i)-1$ transpozicija tipa (k k+1). Iz prvog slučaja vidimo da se menja parnost σ kada se pomnoži transpozicijom.

□

Posledica 1. *Permutacija je parna ako i samo ako je proizvod parnog broja transpozicija.*

Napomena 1. *Jedna permutacija se može na bezbroj načina predstaviti kao proizvod transpozicija, ali parnost uvek ostaje ista. Na primer,* $\sigma = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 2)(1\ 4) = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(1\ 5)(1\ 2)(1\ 4)$

Lema 9. *Parnih permutacija u grupi S_n ima jednako kao i neparnih.*

Dokaz. Neka je A_n skup svih parnih permutacija u S_n (ovo je zapravo podgrupa od S_n i naziva se **alternirajuća podgrupa** od S_n). Definišimo funkciju f na S_n sa $f(\sigma) = (1\ 2)\sigma$. Tvrdimo da je f bijekcija skupa A_n u skup svih neparnih permutacija. Zbog *Leme 8* znamo da f slika parne permutacije u neparne. Neka je $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Tada postoji neko $i \in \{1,...,n\}$ takvo da $\sigma_1(i) \neq \sigma_2(i)$. Tada je i $(1\ 2)\sigma_1(i) \neq (1\ 2)\sigma_2(i)$, pa sledi da je f injektivna funkcija.
Za neko neparno preslikavanje θ, $(2\ 1)\theta$ je parno preslikavanje i važi $(1\ 2)(2\ 1)\theta = \theta$. Dakle, f je i surjektivno preslikavanje. Ovime je dokaz završen. □

2.3.5 Homomorfizam grupa

Definicija 13. *Neka su $(G,*)$ i $(H,\star)$ grupe.* ***Homomorfizam*** *grupe G u grupu H je preslikavanje $\phi\colon G \to H$ za koje važi:*

$$\phi(a*b) = \phi(a)\star\phi(b), \forall a,b \in G$$

Homomorfizam je preslikavanje među algebarskim strukturama koje se može jednostavno prikazati na Rubikovoj kocki.

Primer 4. *Može se definisati preslikavanje $\phi_{ugao}\colon G \to S_8$ na sledeći način: svaki potez iz G preuređuje ugaone kockice, te je na takav način definisana permutacija 8 neorijentisanih ugaonih kockica. Znači, svaki $M \in G$ definiše neku permutaciju $\phi \in S_8$. Neka je $\phi_{ugao}(M) = \sigma$, tj. $\phi_{ugao}(M)$ je element od S_8 koji opisuje šta M radi s neorijentisanim ugaonim kockicama. Na primer, može se videti iz prethodnog da se R sastoji od dva disjunktna ciklusa $(rfu\ \ rub\ \ rbd\ \ rdf)$ i $(ru\ \ rb\ \ rd\ \ rf)$. Stoga, $\phi_{ugao}(R) = (rfu\ \ rub\ \ rbd\ \ rdf)$.*

Definicija 14. ***Jezgro*** *$Ker(\phi)$ homomorfizma ϕ grupe G u grupu H je skup svih elemenata iz G koje ϕ preslikava u neutralni element 1_H grupe H, tj. $Ker(\phi) = \{g \in G : \phi(g) = 1_H\}$.*

Na temelju definisanih pojmova: parnost permutacija i homomorfizam grupa, može se opisati još jedan pojam vezan za grupu Rubikove kocke, a to je **alternirajuća grupa** (eng. alternating group). Taj pojam je važan prilikom dokazivanja valjanosti konfiguracija Rubikove kocke. Proizvod parne i neparne permutacije je neparna permutacija. Proizvod dveju parnih ili dveju neparnih permutacija je parna permutacija. Inverz parne permutacije je parna, a inverz neparne je neparna permutacija. Stoga, može se definisati podgrupa od S_n koja se sastoji od svih parnih permutacija. Ta grupa se zove **alternirajuća grupa** i označava se sa A_n.

2.3.6 Dejstvo grupe

Definicija 15. ***(Desno) dejstvo grupe*** *$(G,*)$ na neprazni skup A je preslikavanje $A \times G \to A$ koje zadovoljava sledeća svojstva:*

1. *$(a \cdot g_1) \cdot g_2 = a \cdot (g_1 * g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G, a \in A$*
2. *$a \cdot e = a$, $\forall a \in A$ (e je neutralni element grupe G).*

Definicija 16. *Neka grupa G deluje na skup A.* ***Orbita*** *od $a \in A$ je skup $\{a \cdot g \mid g \in G\}$.*

Definicija 17. *Konfiguracija Rubikove kocke je* ***valjana*** *ako se može dobiti nizom poteza na kocki koji se nalazi u početnom položaju.*

Primer 5. *Grupa G deluje na skup svih konfiguracija Rubikove kocke (skup sadrži i konfiguracije koje nisu valjane).*
Orbita početne konfiguracije je skup svih valjanih konfiguracija Rubikove kocke.

2.3.7 Graf

Svaka permutacijska grupa ima svoju grafičku interpretaciju. U nastavku će biti definisan graf.

Definicija 18. ***Neorijentisani graf*** *G je uređeni par (V,E) , gde je V konačan neprazan skup, a $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$. Elementi skupa V se zovu čvorovi, a elementi skupa E grane neorijentisanog grafa G.*

Definicija 19. ***Digraf (usmereni graf)*** *je uređeni par (V,E) gde je V konačan neprazan skup, a $E \subseteq \{(u,v) \mid u,v \in V\}$. Ovi uređeni parovi se nazivaju* ***orijentisane grane*** *ili* ***lukovi*** *(eng. arcs). Ako je $G = (V,E)$ koriste se i oznake $V = V(G)$, $E = E(G)$.*

Graf i digraf se predstavljaju geometrijskom figurom sastavljenom od tačaka i linija koje spajaju pojedine parove tačaka. Tačke predstavljaju čvorove grafova, dok linije predstavljaju grane grafa ili orijentisane grane grafa. U prvom slučaju linije su neorijentisane dok se u drugom slučaju linije orijentišu (obeležene su strelicom).

Definicija 20. *U nastavku slede određene specifičnosti grafova:*

- *Graf oblika $\{a,a\}$ odnosno (a,a) se naziva* ***petlja*** *(grana koja spaja čvor sa samim sobom).*
- *Graf sa samo jednim čvorom se naziva* ***trivijalnim grafom****, inače je* ***netrivijalan****.*
- *Graf je* ***jednostavan*** *ili* ***prost*** *ako nema petlje i nikoje dve grane ne spajaju isti par čvorova.*
- *Za dva čvora grafa kažemo da su* ***susedni*** *ako su spojeni granom.*

- *Dva susedna čvora nazivamo krajnjim tačkama grane koja ih spaja.*
- *Kažemo da su čvor i grana* ***susedni*** *ako grana počinje, odnosno završava se u tom čvoru.*
- *Broj susednih čvorova za čvor x se naziva* ***stepen*** *čvora x.*
- ***Put*** *je niz čvorova i grana koje ih spajaju.*
- ***Dužina puta u grafu*** *je jednaka broju grana koje se nalaze u putu.*
- ***Rastojanje čvorova x i y*** *se u grafu definiše kao dužina $d(x,y)$ najkraćeg puta koji povezuje ta dva čvora. Ako x i y nisu povezani, tada je $d(x,y) = \infty$.*
- *Graf je* ***povezan*** *ako se proizvoljna dva njegova čvora mogu povezati putem. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je* ***nepovezan****.*
- ***Dijametar grafa*** *je najveća udaljenost: $diam(V,E) = max\{d(v,w) \mid v,w \in V\}$.*

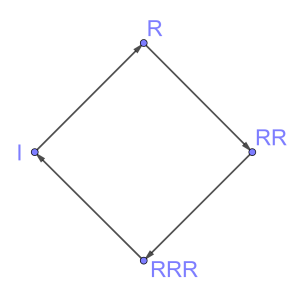
Neka je G grupa definisana elementima $g_1, g_2, \cdots, g_n$, $G = \langle g_1, g_2, \cdots, g_n \rangle$.

Definicija 21. ***Kejlijev graf*** *grupe G je graf (V,E) čiji su čvorovi V elementi od G, a grane se određuju na sledeći način: ako x i y pripadaju $V = G$, tada postoji grana od x do y (ili od y do x) ako i samo ako $y = g * x$ ili $x = g * y$, za neki generator g grupe G.*

Kejlijev graf je koristan način da se dobije uvid u strukturu grupe i podgrupa Rubikove kocke. Svojstva koja opisuju Kejlijev graf za grupu Rubikove kocke su:

- Svaki $g \in G$ je čvor.
- Svakom generatoru grupe $s \in S$ dodeljena je boja c_s.
- Za neke $g \in G, s \in S$, elementi koji odgovaraju g i gs su spojeni usmerenom granom koje je boje c_s.

Kejlijev graf za grupu Rubikove kocke bi imao 43 triliona čvorova, ali može se prikazati Kejlijev graf za manje podgrupe. Na primer, Kejlijev graf za podgrupu grupe Rubikove kocke generisan osnovnim potezom R izgleda:

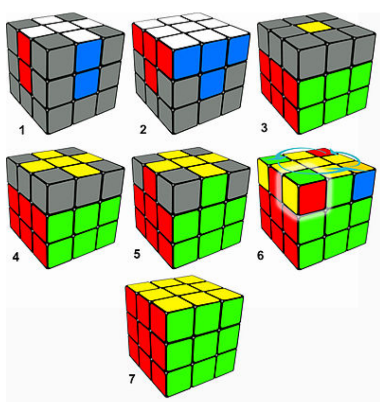


Slika 7: Kejlijev graf

Kejlijev graf za grupu generisanu sa U bi izgledao isto kao i za grupu generisanu sa R. Ako dve grupe imaju isti Kejlijev graf, tada one imaju istu strukturu, pa se za njih kaže da su **izomorfne**. Dve izomorfne grupe imaju isti red i isti uticaj na kocku. Na primer, potez $FFRR$ ima isti uticaj na kocku kao i potez $RRBB$ kad bi L strana sada bila prednja. Štaviše, rešenje Rubikove kocke je zapravo put u grafu od čvorova koji su povezani u trenutni položaj kocke do čvorova koji su povezani u identitetu. Broj poteza u najkraćem mogućem rešenju je udaljenost između tih čvorova. Dijametar Kejlijevog grafa od G je broj poteza najboljeg mogućeg rešenja najgoreg mogućeg slučaja.

2.4 Slaganje Rubikove kocke

Osnovni problem Rubikove kocke je pronaći algoritam koji će složiti kocku u početni položaj, tj. u položaj gde je svaka strana kocke u jednoj boji. Prve ideje su, poput većine algoritama kojima se koriste ljudi, te faze delili po nekim karakterističnim osobinama po pitanju pozicija kockica. Generalna ideja je da se rešavanje Rubikove kocke podeli na više faza i da se svaka od njih pojedinačno rešava, dok se ne dođe do složene kocke. Najpopularnija je metoda koju je razvio *David Singmaster* i objavio je 1981. godine u knjizi *"Notes on Rubik's 'Magic Cube'"*. Ta metoda uključuje slaganje kocke "sloj po sloj". To podrazumeva sledeće: prvo se slaže krst na jednoj strani, zatim ta strana, pa onda naredni sloj i na kraju poslednji sloj, odnosno strana.



Slika 8: Prikaz slaganja Rubikove kocke

Slaganje jedne faze mnogo je lakše od slaganja cele kocke,odnosno u slučaju računara, ima manje pozicija kroz koje treba proći. Za računar kod takvog načina podele ima nekoliko problema. Prvi je što je broj faza generalno veliki, pa čak i ako bi svaku od njih rešili optimalno, konačno rešenje bi moglo da ispadne dosta duže nego optimalno. Osim toga, takva podela je lakša samo ljudima za slaganje, neke od tih faze su po broju slučajeva gotovo isto zahtevne kao i sama kocka.

Danas postoje razni pristupi koji se razlikuju po kompleksnosti i broju poteza. Na zvaničnom sajtu Rubikove kocke nalazi se uputstvo za njeno rešavanje, zasnovano na popularnim metodama.

3 Božanski broj

3.1 Božanski algoritam

Drugi naziv za traženje dijametra Kejlijevog grafa grupe Rubikove kocke je **Božanski algoritam**. To je algoritam koji daje osnovne poteze koji iz bilo koje konfiguracije vode ka početnom položaju, a broj tih osnovnih poteza se zove Božanski broj. Dijametar Kejlijevog grafa je nerešen problem za mnoge slagalice, te ga je čak i uz pomoć računara jako teško pronaći.
Mnogi ljudi su se bavili otkrivanjem Božanskog algoritma za Rubikovu kocku. Taj problem je i danas veoma interesantan matematičarima i obožavateljima Rubikove kocke. Postoje dva načina traženja Božanskog algoritma i Božanskog broja:

1. Osnovni potezi su okreti bilo koje strane za 90° ili za 180°. Stoga, u ovom slučaju, Božanski broj je dijametar Kejlijevog grafa grupe G koja je generisana skupom $G = \langle L, R, U, D, F, B, L2, R2, U2, D2, F2, B2 \rangle$. Takva metrika u kojoj je i okret za 180° osnovni potez zove se, odnosno označava **HTM** (eng.half-turn metric).

2. Osnovni potezi su okreti bilo koje strane za 90°. Božanski broj je dijametar Kejlijevog grafa grupe G koja je generisana skupom $G = \langle L, R, U, D, F, B \rangle$. Takva metrika se zove, odnosno označava **QTM** (eng.quarter-turn metric).

Prvi korak prema slutnji da je Božanski broj jednak 20 dogodio se 1980. godine, kada se zaključilo da je taj broj zasigurno veći ili jednak 18. Do tog zaključka se došlo na osnovu posmatranja svih različitih nizova poteza na Rubikovoj kocki koji se sastoje od 17 ili manje poteza. Ustanovilo se da takvih nizova ima manje nego svih mogućih stanja kocke. Odande je direktno sledilo da je Božanski broj strogo veći od 17, dakle sigurno je veći ili jednak 18.
Da bi se utvrdio Božanski broj, ograničavan je sa gornje i donje strane. Dakle, Božanski broj sigurno nije manji od 18 i taj broj označava donju granicu. Dalje je važno, koliko je potrebno najviše poteza, tj. koliko iznosi gornja granica, u najgorem slučaju.

Smatralo se svojevremeno da je najteži slučaj za rešavanje Rubikove kocke kada se sve ugaone i ivične kockice na Rubikovoj kocki nalaze u pravilnom položaju, a ivične kockice nisu pravilno orijentisane. Taj slučaj, kada je položaj kocke najdalji od početnog položaja, nazvan je *"superflip"*. *Dik Vinter (Dik Winter)* je 1992. godine pokazao da se taj slučaj može optimalno rešiti u 20 osnovnih poteza u HTM, a *Majkl Rid (Michael Reid)* i *Džeri Brajan (Jerry Bryan)* su 1995. godine pokazali da je potrebno 24 osnovnih poteza u QTM. Međutim, 1998. godine Rid je otkrio položaj kome treba 26 osnovnih poteza u QTM kako bi se vratio u početni položaj, taj položaj je nazvan *"superflip sastavljen od* 4 *tačkice"*.

Prve gornje granice su utemeljene na "ljudskim" algoritmima. Smatralo se da Božanski broj iznosi oko 100. No, takav pristup nije bio zadovoljavajući, te su se tražili novi načini i počeli su se koristiti računari.

Kombinujući najgore moguće slučajeve, *Morven Tisltvejt (Morwen Thistlethwaite)* je otkrio da gornja granica iznosi oko 52. *Daglas Hofstater (Douglas Hofstadter)* je detaljno opisao Tisltvejtov algoritam u časopisu *'Scientific American'*, 1981. godine. Nemački profesor matematike *Herbert Kosiemba (Herbert Kociemba)* je 1992. godine poboljšao Tisltvejtov algoritam. Kosiembin algoritam daje rešenja bliža optimalnom. Ovaj algoritam je unapređivan kroz godine i uzimao razne druge ideje, tako da je on danas jedan od najkorišćenijih algoritama za slaganje Rubikove kocke jer daje rešenja vrlo bliska optimalnom (ako ne i optimalna) za jako kratko vreme. Majkl Rid je 1995. godine dokazao da se svaka konfiguracija može rešiti u najviše 29 osnovnih poteza u HTM i u 42 osnovna poteza u QTM.

Ričard Korf (Richard Korf) je 1997. godine objavio svoj algoritam. Korfov algoritam daje optimalno rešenje, ali ne analizira najgore slučajeve i ne zna se koliko osnovnih poteza je potrebno ovom algoritmu.
Za dalja poboljšanja, veliku ulogu je imao *Silviju Radu (Silviu Radu)* koji je svojom metodom pokazao da se svaka konfiguracija može rešiti u 27 osnovnih poteza u HTM i 35 osnovnih poteza u QTM.

No, čak ni računari nisu mogli istražiti sve moguće konfiguracije kako bi se pronašao najbolji put do rešenja. Profesor *Džin Kupermen (Gene Cooperman)* i njegov student *Danijel Kankl (Daniel Kunkle)* sa Northeastern Univerziteta u Bostonu razvili su inteligentnu matematičku i računarsku strategiju kako bi računaru olakšali zadatak. Na primer, ako je jedna strana u istoj boji, zadatak je rešen. Takođe, dve konfiguracije smatrane su istim ako su dve boje samo međusobno zamenjene. Na temelju toga, broj konfiguracija je smanjen na nešto više od 1×10^{18}. Nadalje, otkrili su da se 15000 konfiguracija može rešiti okretanjem za pola kruga bez okreta za četvrtinu kruga, te da je za njihovo rešavanje potrebno 13 ili manje poteza. Te konfiguracije nazvali su *"posebne konfiguracije"*. Potom su istražili kako bilo koju konfiguraciju pretvoriti u "posebnu konfiguraciju".

U proces računanja uključili su i računar kojem su omogućili da direktno dolazi do podataka preciznim čuvanjem na hard disku bez pretraživanja. Račun je dodatno ubrzalo i korišćenje njihovih strategija. Nakon 63 sata rada, uz pomoć računara dolazi se do zaključka da je potrebno izvesti najviše 16 osnovnih poteza da bi se bilo koja konfiguracija složila u posebnu. Na osnovu tog podatka, došli su do zaključka da je 29 osnovnih poteza dovoljno za rešavanja svih konfiguracija Rubikove kocke. Budući da to nije bilo dovoljno za ostvarenje rekorda, dalje su istraživali i utvrdili su da se svaka konfiguracija može rešiti u najviše 26 osnovnih poteza u HTM. Sve te rezultate, Džin Kupermen i Danijel Kankl su predstavili 29. jula 2007. godine u Ontariju.

Kalifornijski programer *Tomas Rokiki (Tomas Rokicki)* je 2008. godine dokazao da je dovoljno najviše 25 osnovnih poteza za rešavanje Rubikove kocke, a iste godine je objavio da ima dokaz da su dovoljna 22 osnovna poteza u HTM. Godinu dana kasnije dao je dokaz da je taj broj jednak 29 u QTM.

Metode za traženje Božanskog broja lakše se primenjuju u HTM nego u QTM. Konačno, smatra se, ali nije još dokazano da Božanski broj u QTM iznosi 26. Važi da se $n \times n \times n$ Rubikova kocka može optimalno rešiti u $\Theta = O(n^2/log(n))$ osnovnih poteza, o čemu će biti reči kasnije u radu.

Tomas Rokiki, *Herbert Kosiemba*, *Morli Dejvidson (Morley Davidson)* i *Džon Detridž (John Dethridge)* su 2010. godine obavili trenutno poslednji dokaz u nalaženju Božanskog broja. Uz pomoć računara pokazali su da se sve konfiguracije Rubikove kocke mogu rešiti sa maksimalno 20 osnovnih poteza u HTM. Istraživači su došli do rezultata tako što su problem sveli na potprobleme koji su bili dovoljno mali kako bi stali u memoriju modernog računara, te se na takav način problem brže rešavao. Koristeći znanje o simetrijama i program koji su sami napisali, svaki potproblem je uspešno rešen, te su na kraju došli do rezultata. Računanje je trajalo nekoliko nedelja i bilo je izvršeno na Guglovom serveru (ekvivalentno vreme koje bi bilo potrebno nekom današnjem procesoru je oko 35 godina za takav račun).
Dakle, istraživači *Tomas Rokiki*, *Herbert Kosiemba*, *Morli Dejvidson (Morley Davidson)* i *Džon Detridž (John Dethridge)* tvrde:
"Trebalo je 15 *godina nakon predstavljanja kocke da se nađe raspored kockica iz koga se zagonetka može rešiti u* 20 *osnovnih poteza. 15 godina nakon toga možemo dokazati da se kockice mogu posložiti u* 20 *osnovnih poteza iz svih pozicija"* .

Postoji još jedan problem vezan za graf grupe Rubikove kocke, koji sadrži pitanje je li Kejlijev graf za grupu Rubikove kocke zapravo Hamiltonov graf.

Definicija 22. ***Hamiltonov ciklus*** *na grafu G je ciklus koji sadrži sve čvorove od G, to jest, to je niz ivica koje formiraju ciklus u grafu tako da se kroz svaki čvor prođe tačno jedanput.*
Graf koji ima Hamiltonov ciklus zove se ***Hamiltonov graf****.*

Tada, problem grupe Rubikove kocke glasi:
Neka je G grupa Rubikove kocke. Ima li Kejlijev graf od G Hamiltonov ciklus, tj. može li se svaka konfiguracija Rubikove kocke "posetiti" tačno jedanput koristeći osnovne poteze R, L, U, D, F, B? To je poseban slučaj nerešenog problema:
Za proizvoljnu permutacijsku grupu sa datim skupom generatora, da li je njen Kejlijev graf Hamiltonov? Do danas još nije pronađen efikasan algoritam za rešavanje tog problema.

3.2 Težina rešavanja problema

Od svog začetka, teorijsko računarstvo bavilo se rešavanjem problema uz pomoć opipljivih ili zamišljenih mašina koje pokreću i izvršavaju algoritme. Ono što su primetili matematičari i računarski naučnici koji su se ovim bavili jeste da postoje problemi koji su nerešivi, dok su kasnije našli da se oni rešivi lako mogu razvrstati po vremenu (ili memoriji) koje je potrebno da bi se algoritam izvršio. Tako je nastala *teorija izračunljivosti*.
Klasa **P** predstavlja one probleme koji se za ulazni podatak veličine n mogu rešiti u najviše n^k koraka (u najviše polinomijalnom vremenu rešavanja), gde je k konstanta (ne zavisi od veličine ulaznog podatka). Klasa **NP** predstavlja probleme čije je rešenje moguće proveriti polinomijalnim algoritmom. Ovo se može objasniti na sledeći način: u klasu **P** spadaju problemi za koje postoje efikasni (polinomijalni) algoritmi, dok u klasu **NP** spadaju problemi za koje se ponuđeno rešenje može efikasno (polinomijalno) proveriti. Iz ove definicije izvodimo da svi problemi iz **P** spadaju i u **NP** klasu, jer ono što je lako rešiti, lako je i proveriti. Ostatak **NP** čine problemi za koje se ne zna da li postoje efikasni algoritmi za konstruisanje rešenja - zasad su poznati samo eksponencijalni. Još jedan bitan podskup klase **NP** su **NP-kompletni problemi** – specifični su po tome što se svaki drugi problem iz klase **NP** na njih može svesti. Kada bi neko za ovaj ili neki od ostalih takvih problema našao „lako” rešenje (ono koje se izvršava u polinomijalnom vremenu) i tako ga svrstao u grupu **P**, dokazao bi da se, u stvari, cela grupa **NP** može svesti na jedan **P** problem, što bi dovelo do njihove jednakosti (**P=NP**). Međutim, mišljenje stručnjaka je da je to vrlo malo verovatno.
Problem P=NP su nezavisno jedan od drugog definisali *Stiven Kuk (Stephen Cook)* i *Leonid Levin*, 1971. godine. Zajedno sa još šest drugih otvorenih pitanja je 2000. godine svrstan među „Milenijumske probleme”, pa je tako nagrada za njegovo rešavanje u iznosu od milion dolara ponuđena od strane Klejovog matematičkog instituta.

Uvedimo sledeće pojmove: **STM** (eng. Slice Turn Metric) Potez: rotacija pojedinačnog preseka kocke za 90° u određenom smeru.
SKTM (eng. Slice Quarter Turn Metric) Potez: rotacija pojedinačnog preseka kocke za 90° u bilo kom smeru.

NP-kompletnost problema Rubikove kocke je pre par godina dokazana od strane *Erika Demejna (Erik Demaine)*:

Teorema 1. *Problem rešavanja $n \times n \times n$ Rubikove kocke i problem grupe STM / SKTM Rubikove kocke je NP-kompletan.*

Slika 9: Erik Demejn

Celokupan dokaz kao i detalji vezani za to kako se došlo do rezultata mogu se naći ovde [5] i [6].

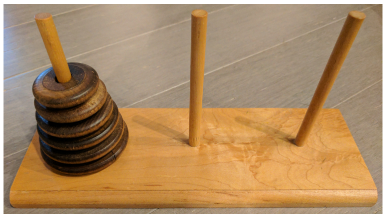
Kao što je ranije pomenuto, Demejn je dokazao da je prečnik, najveći broj potrebnih poteza Θ (n je stepen kocke). (Za Rubikovu kocku dimenzija $3 \times 3 \times 3$ utvrđeno je da je prečnik 20).
Takođe, svi Kejlijevi grafovi imaju Hamiltonov put, problem Hamiltonovog puta svodi se na Kejlijeve grafove. Kako je moguće da svaka konfiguracija i svaki potez Rubikove kocke budu predstavljeni Kejlijevim grafom, Kejlijev graf se svodi na Rubikovu kocku.

$$HAMILTONOVPUT \leq_p KEJLIJEVGRAF \leq_p RUBIKOVA\ KOCKA$$

3.3 Primeri

3.3.1 Hanojska kula

Hanojska kula (takođe i Brahma kula ili Lukasova kula) je matematička igra ili slagalica. Zagonetku je izmislio francuski matematičar *Eduar Lukas (Edouard Lucas)* 1883. godine.
Sastoji se od tri šipke i velikog broja diskova različitih veličina koji mogu da klize na bilo koju šipku. Zagonetka počinje uređivanjem diskova u rastućem redosledu na jednoj palici, gde je najmanji na vrhu, pa daje izgled konusnog oblika.



Slika 10: Model Hanojske kule

Cilj ove slagalice je da se sve sa jednog štapa premesti na drugi štap, poštujući sledeća pravila:

- Samo jedan disk može da se pomera istovremeno.
- Svaki potez se sastoji od uzimanja gornjeg diska sa jedne gomile i stavljanja tog istog diska na vrh druge gomile, odnosno disk može samo da se pomera ako je na poslednjem mestu na štapu.
- Nijedan disk ne sme biti smešten na manji disk na štapu.

Sa tri diska ovaj problem može da se reši u sedam koraka. Pitanje je, koliki je najmanji broj poteza potreban za prebacivanje za početnih n diskova.
Označimo traženi minimalan broj poteza sa h_n. Očigledno je $h_1 = 1$ i $h_2 = 3$. Za premeštanje najvećeg diska sa prvog na drugi štap, prethodno moramo da napravimo kulu od preostalih $n-1$ diskova na trećem štapu. Minimalan broj poteza neophodnan za ovo premeštanje je h_{n-1}. Zatim, dovoljan je jedan potez za prebacivanje najvećeg diska na drugi štap i najmanje h_{n-1} poteza za razmeštaj $n-1$ diskova sa trećeg štapa na drugi štap.
Dakle, traženi broj zadat je rekurentnom relacijom:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1, n \geq 2, h_1 = 1.$$

Prethodna relacija daje:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1$$
$$h_{n-1} = 2h_{n-2} + 1$$
$$h_{n-2} = 2h_{n-3} + 1$$

$$\vdots$$

$$h_3 = 2h_2 + 1$$

$$h_2 = 2h_1 + 1$$

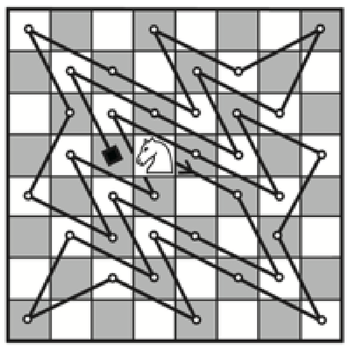
Množeći gornje relacije redom sa: $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-2}$ i sabirajući levu i desnu stranu pomnoženih relacija dobijamo:

$$h_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Dakle, $2^n - 1$ je minimalan broj poteza potreban za premeštanje n diskova, odnosno $\mathbf{2^n - 1}$ je *Božanski broj za Hanojsku kulu*.

3.3.2 Skakačev krug

Skakačev krug ili **Skakačeva zatvorena putanja** je čuveni klasičan problem na šahovskoj tabli 8×8 kojim su se bavili brojni vrhunski matematičari.
To je putanja skakača kojom on posećuje svako polje šahovske table samo jednom, a zatim se vraća na početno polje.
Jednu varijantu *skakačeve putanje* dao je *T. R. Dozen (T. R. Dosan)* 1938. godine. Dakle, skakač ne sme posetiti nijedno polje više nego jednom. Međutim, dato je još jedno ograničenje: *putanja ne sme da seče samu sebe.* Odatle proizilazi sledeći zadatak: *Koliko najviše polja na šahovskoj tabli može da obiđe skakač, računajući i početno polje, a da putanja ne sme da seče samu sebe?*



Slika 11: Najduži nepresecajući put skakača na tabli 8 x 8

Rešenje ovog problema u 35 poteza (36 polja) dao je *D. Džerbro (D. Jardbrou)* u časopisu *Journal of Recreational Mathematics* 1968. godine, ali bez dokaza o optimalnosti rešenja.
Donald Knut (Donald Knuth), profesor Univerziteta u Stenfordu, dao je kompletno rešenje ovog teškog problema osamdesetih godina dvadesetog veka uz pomoć računara. Knut je našao da postoje samo 4 osnovna rešenja do kojih se može doći ispitivanjem 3 137 317 289 slučajeva.
Maksimalan broj poteza je 35 (36 polja) i on se ne može prevazići.
Dakle, u ovom primeru *Božanski broj* je **36**.

4 Zaključak

U ovom radu želja je bila da se prvenstveno kroz primer Rubikove kocke, približi pojam *Božanskog broja*.
Rad se sastoji iz dva poglavlja u kojima je akcenat stavljen na Rubikovu kocku i Božanski broj. Na početku prvog poglavlja se nalazi opis nastanka Rubikove kocke, zatim su prikazani rezultati takmičenja u slaganju Rubikove kocke koji su jako zanimljivi. Zatim je prikazano koja se matematika nalazi u Rubikovoj kocki i kako Rubikova kocka može biti vrlo koristan primer za objašnjenje određenih matematičkih pojmova (grupa, podgrupa, generatori, ciklična grupa, homomorfizam grupa, graf i mnogi drugi). Na kraju prvog poglavlja opisan je algoritam za slaganje Rubikove kocke.
Nadalje, u drugom poglavlju se opisuje razvoj i značenje Božanskog algoritma i Božanskog broja, kao i težina rešavanja problema. Na kraju su ilustrovana još dva primera slagalice odnosno zadatka (Hanojska kula i Skakačev krug) u kojima se traži Božanski broj.
Što se zanimljivih igara tiče, jedno je sigurno: popularnost Rubikove kocke ne prestaje. Već su otkrivene njene velike prednosti, a ko zna šta još donosi budućnost.

Literatura

[1] Singmaster David, Notes on Rubik's Magic Cube, Lecturer in Mathematical Sciences and Computing Polytechnic of the South Bank, London, 1981.

[2] Petković Miodrag, Zanimljivi matematički problemi velikih matematičara, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[3] Rokicki Tomas, Kociemba Herbert, Davidson Morley, Dethridge John, God's Number is 20., https://cube20.org/

[4] Kalajdžić Gojko, Algebra, Matematički fakultet, Četvrto izdanje, 2008.

[5] Demaine Erik, Eisenstat Sarah, Rudoy Mikhail, Solving the Rubik's Cube Optimally is NP-complete, https://arxiv.org/pdf/1706.06708.pdf/

[6] Majid Nukhbah, Berrada Imane, Ninohira Wakana, Rubik's Cube Problem is NP-Complete, https://jcrouser.github.io/CSC250/projects/rubiks-cube/index.html/