Математички факултет - Универзитет у Београду

Мастер рад

Анализа осетљивости у линеарном програмирању и примене

Студент:
Стефан Радмилац
1048/2018

Ментор:
проф. др Зорица Станимировић

Београд, 2021.

Ментор:

проф. др Зорица Станимировић
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

доц. др Зорица Дражић
Универзитет у Београду, Математички факултет

доц. др Сандра Живановић
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 24. август 2021.

Велико Хвала менторки проф. Зорици за издвојено време и велику подршку!

Садржај

Глава 1

Линарно програмирање

Теоријске основе које су изложене у Глави 1 су преузете из [2], [4], [7], [8], [12], [13], [14]. Многи проблеми савременог друштва могу се описати математичким моделима, а затим решити користећи математичке методе. Приликом процеса решавања проблема из реалног живота применом математичког апарата издвајају се четири фазе:

- препознавање проблема,
- формулација математичког модела,
- решавање математичког модела,
- тумачење резултата у погледу оригиналног проблема.

Ове четири фазе нису строго дефинисане, али представљају основ математичког моделирања.

Задатак линеарног програмирања је да одреди минимум (максимум) линеарне функције која зависи од више променљивих под условом да су ове променљиве ненегативне и да задовољавају линеарна ограничења у облику једначина и/или неједначина. Линеарно програмирање (ЛП) је један од најефикаснијих приступа формулисању и решавању сложених проблема доношења одлука и као такво представља једну од основних грана операционих истраживања.

Проблеми ЛП-а јављају се у различитим дисциплинама. На пример, менаџер на берзи мора да одабере улагања која ће генерисати највећи могући профит, а да при томе ризик од великог губитка буде на унапред задатом нивоу. Менаџер производње организује производњу у фабрици тако да количина производа и квалитет буду максимални, а утошак материјала, времена и шкарт минимални, при чему има на располагању и ограничене ресурсе (број радника, капацитет машина, радно време).

Још неки проблеми из реалног живота који могу бити формулисани као преблеми ЛП-а су: проблем статике, проблем дијете, транспортни проблем, проблем организације, проблем распоређивања, итд.

У општем случају, приликом решавања реалног проблема, најпре је неопходно описати проблем математичким моделом, што подразумева следеће кораке:

1. одабрати једну или више променљивих одлуке,
2. одабрати функцију циља и
3. формирати скуп ограничења.

Након тога се идентификује класа проблема којој добијени математички модел припада и бира се метода за његово решавање. Пожељно је да модел буде што једноставнији у циљу ефикасног решавања, али да адекватно описује дати проблем. Најпознатија општа метода за решавање проблема ЛП-а позната је као **симплекс метода.**

ЛП се као дисциплина појављује четрдесетих година прошлог века као потреба за решавањем сложених проблема планирања у ратним операцијама. Даљи развој се убрзао у послератном периоду, јер су многе индустрије препознале драгоцену употребу ЛП-а. Сматра се да су ЛП основали математичари Џ. Данциг[1], који је у свом раду 1947. године изложио симплекс методу и Џ. Нојман[2] који је исте године изложио теорију дуалности. Нобелова награда за економију додељена је 1975. године математичару Л. Канторовичу[3] и економисти Т. Копмансу[4] за допринос теорији оптималне алокације ресурса у чему је ЛП играло кључну улогу.

1.1 Општи проблем линеарног програмирања

Дефиниција 1.1. ***Стандардни облик*** *проблема линеарног програмирања је*

$$\min \quad f + f_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

при условима

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{1.1}$$

где су a_{ij}, b_i, c_j и f_0 константе и $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Реална константа f_0, која може бити позитивна, негативна или нула, омогућава укључивање константе у функцију која се оптимизује. На пример, таква константа може представљати фиксни трошак. Сваки проблем ЛП-а може се представити у стандардном облику применом следећих правила:

1. максимизација неке функције f може се заменити минимизацијом функције $-f$, при чему се оптимална решења не мењају,
2. неједнакости се могу додавањем или одузимањем изравнавајућих ненегативних променљивих (engl. *slack variable*) претворити у једнакости,
3. слободни чланови у једнакостима се могу евентуалним множењем са -1 претворити у ненегативне,
4. с обзиром на то да се сваки број може написати као разлика два ненегативна броја, променљива којој недостаје ненегативност може се заменити разликом две нове ненегативне променљиве.

[1] Georege Bernard Dantzig (1914-2005), амерички математичар
[2] John von Neumann (1903-1957), мађарско-амерички математичар
[3] Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912-1986), совјетски математичар и економиста
[4] Tjalling Charles Koopmans (1910-1985), холандско-амерички математичар и економиста

У проблему ЛП-а, функција чији минимум треба одредити под задатим условима назива се **циљна функција** или **функција циља.** Било која тачка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ са ненегативним координатама која задовољава скуп ограничења назива се **допустиво решење проблема.** Задатак је одредити бар једну тачку, ако постоји, из скупа свих допустивих решења у којој посматрана циљна функција има најмању вредност.

1.2 Линеарне једначине и базисно допустиво решење

Операција **пивотирање** која се користи у Гаусовом[5] методу елиминације за решавање система линеарних једначина огледа се у замени система линеарних једначина еквивалентним системом у коме је одабрана променљива елиминисана из свих једначина, осим једне. **Пивот** се састоји од изабране променљиве са коефицијентом који је различит од нуле и може бити изабран из било које једначине, а након тога се посматрана једначина дели са коефицијентом у пивоту, чиме се добија једначина у којој изабрана променљива има коефицијент 1. Погодним множењем ове једначине и додавањем осталим једначинама, постиже се да се изабрана променљива елиминише из осталих једначина. Уколико се примени пивотирање довољан број пута, под условом да је матрица система регуларна, добија се еквивалентан систем линеарних једначина такав да се свака променљива појављује у једној и само једној једначини и у тој једначини има коефицијент 1. Операција пивотирања је кључна за симплекс методу.

Нека је $B = \{k_p : p \in P\}$ једна база простора колона матрице A и нека је $|P| = r$, где је $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и r ранг матрице A. Нека је са Q означен скуп индекса небазисних колона матрице A. Променљиве $x_p, p \in P$ се називају **базисне променљиве** (за базу B), а $x_q, q \in Q$ су **слободне променљиве** или **небазисне променљиве**.

Дефиниција 1.2. *Систем од m једначина са n непознатих, где је $m \leq n$, је у* ***канонској форми****, са скупом од m* ***базисних променљивих****, ако свака базисна променљива има коефицијент 1 у једној једначини и 0 у осталим једначинама, а свака једначина има тачно једну базисну променљиву са коефицијентом 1.*

За проблем ЛП-а датог у стандардном облику, један од начина да се поједностави проблем је замена скупа ограничења еквивалентним системом једначина у канонском облику. За примену симплекс алгоритма систем ограничења мора бити у канонском облику и придружено базисно решење мора бити допустиво. Избором да су небазисне променљиве једнаке нули, добија се решење система једначина у канонској форми које се назива **базисно решење** (за базу B). У проблему ЛП-а интересантна су решења система са ненегативним координатама. Такво базисно решење са својством да су све координате ненегативне назива се **базисно допустиво решење.**

Дефиниција 1.3. *Проблем линеарног програмирања је у* ***канонском облику*** *са скупом базисних променљивих ако је:*

1. *проблем у стандардном облику са скупом базисних променљивих,*

2. *базисно решење је допустиво,*

3. *функција циља зависи само од небазисних променљивих.*

[5] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), немачки математичар

Ако су за проблем ЛП-а задовољена само прва два услова претходне дефиниције, систем ограничења може се користити да се елиминишу базисне променљиве из циљне функције.

Опширније о линерном програмирању може се пронаћи у [2], [4], [7], [8], [12], [13], [14].

Глава 2

Симплекс метода и алгоритми симплекс методе

Теоријске основе које су изложене у Глави 2 су преузете из [2], [4], [12], [13], [14].

2.1 Симплекс метода

Нека је дат проблем ЛП-а у канонском облику са m ограничења и n променљивих, а првих m променљивих су базисне променљиве

$$\begin{aligned}
&\min \quad f + f_0 = c_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c_n x_n \\
&\text{при условима} \\
&\begin{cases}
x_1 + \cdots + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
x_2 + \cdots + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \ddots \\
x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0,
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

a_{ij}, b_i, c_j и f_0 су константе, $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ и придружено базисно решење је допустиво.

Теорема 2.1. *Ако је $c_j \geq 0, j = m+1, \ldots, n$, тада је минимална вредност функције циља за проблем линеарног програмирања* (2.1) *једнака $-f_0$ и постиже се у тачки* $(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$.

Доказ. За било коју тачку која задовољава задати скуп ограничења, вредност функције циља дата је са $f = c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_n x_n - f_0$. Како свако допустиво решење има ненегативне координате, најмања вредност за збир $c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_n x_n$ је нула. Дакле, минимална вредност функције f је $-f_0$ и она се постиже у тачки

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0).$$

□

На основу Теореме 2.1 следи да је проблем ЛП-а решен ако су сви $c_j \geq 0$. Нека је бар једно c_j, на пример нека је то c_{j_0} негативно. Сада се јавља потреба за увођењем променљиве x_{j_0} у скуп базисних променљивих. Да би се одредила променљива која излази из скупа базисних променљивих, нека су све небазисне променљиве осим x_{j_0} једнаке нули. Добија се,

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1j_0}x_{j_0} &= b_1 \\ x_2 + a_{2j_0}x_{j_0} &= b_2 \\ &\vdots \\ x_m + a_{mj_0}x_{j_0} &= b_m \end{aligned} \quad \text{, односно} \quad \begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j_0}x_{j_0} \\ x_2 &= b_2 - a_{2j_0}x_{j_0} \\ &\vdots \\ x_m &= b_m - a_{mj_0}x_{j_0} \end{aligned} \quad . \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. *За проблем линеарног програмирања* (2.1) *важи следеће: ако постоји индекс* j_0, $j_0 = m+1, \ldots, n$, *такав да је* $c_{j_0} < 0$ *и* $a_{ij_0} \leq 0$ *за све* $i = 1, 2, \ldots, m$, *тада је фунцкија циља неограничена одоздо.*

Доказ. Нека постоји индекс j_0 који задовољава услове теореме. Нека је S скуп свих тачака облика $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0, x_{j_0}, 0, \ldots, 0)$, при чему је $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дато са (2.2) и $x_{j_0} \geq 0$. Пошто су сви коефицијенти $a_{ij_0} \leq 0$, S је скуп допустивих решења за проблем (2.1). Функција циља је облика

$$f = c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_{j_0}x_{j_0} + \cdots + c_n x_n - f_0,$$

и на скупу допустивих решења S, се своди на $f = c_{j_0}x_{j_0} - f_0$. Пошто је $c_{j_0} < 0$, f је неограничена одоздо на скупу S. □

Нека је $c_{j_0} < 0$ и нека је бар један коефицијент $a_{ij_0} > 0$. Тада се из једначине

$$x_i = b_i - a_{ij_0}x_{j_0},$$

применом услова ненегативности променљиве x_i добија неједначина

$$b_i - a_{ij_0}x_{j_0} \geq 0,$$

односно горња граница за променљиву x_{j_0}

$$x_{j_0} \leq \frac{b_i}{a_{ij_0}}.$$

Идеја је да се замени нека од базисних променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_m$ променљивом x_{j_0}. Због израза $c_{j_0}x_{j_0}$ у циљној функцији, вредност f ће бити смањена за ново допустиво решење. Потребно је одредити која базисна променљива ће постати небазисна тако да ново базисно решење буде допустиво. Једначине (2.2) за које је $a_{ij_0} > 0$ ће ограничити избор променљивих за излазак из скупа базисних променљивих. С обзиром на услов

$$x_{j_0} \leq \frac{b_i}{a_{ij_0}},$$

за све i за које је $a_{ij_0} > 0$, највећа допустива вредност за x_{j_0} је

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}} : a_{ij_0} > 0\right\}.$$

Нека се минимална вредност постиже за $i = i_0$. Стављајући да је $x_{j_0} = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}$, добија се да су сви $x_i \geq 0$ за $i = 1, \ldots, m$ и посебно

$$x_{i_0} = b_{i_0} - a_{i_0j_0}x_{j_0} = b_{i_0} - a_{i_0j_0}\frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}} = 0.$$

С обзиром, да је $x_{i_0} = 0$ то значи да x_{i_0} променљива која излази из скупа базисних променљивих. Такође, у (2.1) i_0-тој једначини у ограничењима се елиминише променљива x_{i_0}, па се проблем трансформише у канонски облик са скупом базисних променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_m, x_{j_0}$ једном применом операције пивотирања, при чему је $a_{i_0j_0}x_{j_0}$ пивот у i_0-тој једначини.

Теорема 2.3. *У проблему датом са* (2.1)*, нека постоји индекс* j_0 *такав да је* $c_{j_0} < 0$ *и нека је бар један коефицијент* $a_{ij_0} > 0$, $i = 1, \ldots, m$. *Нека је*

$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}} = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}} : a_{ij_0} > 0\right\}.$$

Тада се проблем може представити у канонском облику са скупом базисних променљивих

$$x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_m, x_{j_0}.$$

Вредност функције циља у придруженом базично допустивом решењу је

$$-f_0 + \frac{c_{j_0}b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}.$$

Доказ. Нека проблем (2.1) задовољава претпоставке теореме. Како је коефицијент $a_{i_0j_0} \neq 0$, израз $a_{i_0j_0}x_{j_0}$ у i_0-тој једначини може употребити као пивот за операцију пивотирања. Након примене пивотирања, систем ограничења биће представљен у канонском облику са скупом базисних променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_m, x_{j_0}$. Новодобијени коефицијенти са десне стране једначина $b_i^*, i = 1, \ldots, m$, ће бити:

$$b_i^* = b_i - \frac{a_{ij_0}b_{i_0}}{a_{i_0j_0}},\ \text{за } i = 1, \ldots, m, i \neq i_0 \text{ и } b_{i_0}^* = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}. \tag{2.3}$$

Очигледно је $b_{i_0}^* \geq 0$, јер је $b_{i_0} \geq 0$ и $a_{i_0j_0} > 0$. Ако је $a_{ij_0} \leq 0$ онда је $b_i^* \geq b_i \geq 0$. Ако је $a_{ij_0} > 0$ и $i \neq i_0$, на основу тога како је изабран i_0, добија се

$$\frac{b_i}{a_{ij_0}} \geq \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}},$$

односно

$$b_i \geq \frac{a_{ij_0}b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}.$$

Из претходне неједнакости следи $b_i^* \geq 0$, па је придружено базисно решење допустиво. Функција циља (2.1) је облика

$$f + f_0 = c_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c_{j_0}x_{j_0} + \cdots + c_nx_n.$$

Након операције привотирања долази до елиминације променљиве x_{j_0} у функцији циља, односно до добијања једначине

$$f + f_0^* = c_{i_0}^*x_{i_0} + c_{m+1}^*x_{m+1} + \cdots + c_{j_0-1}^*x_{j_0-1} + c_{j_0+1}^*x_{j_0+1} + \cdots + c_n^*x_n, \tag{2.4}$$

при чему је $f_0^* = f_0 - \dfrac{c_{j_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}$, $c_j^* = c_j - \dfrac{c_{j_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}$, за $j = m+1, \ldots, n, j \neq j_0$ и $c_{j_0}^* = -\dfrac{c_{j_0}}{a_{i_0 j_0}}$. Функција циља се састоји само од нових небазисних променљивих и нова вредност циљне функције у новом базисно допустивом решењу је $-f_0 + \dfrac{c_{j_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}$. □

Базисно решење са неком базисном променљивом једнаком нули назива се **дегенерисано решење.** Уколико је базисно решење недегенерисано и ако су испуњени услови Теореме 2.3. вредност функције циља се смањује, па неће доћи до понављања базисно допустивог решења. Различите вредности фукције циља гарантују да се одређено базисно допустиво решење може појавити највише једном у процесу симплекс методе. Како постоји коначно много

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

начина да се одабере m базисних променљивих из скупа од n променљивих, симплекс метода се мора завршити у коначном броју корака. На крају се достиже минимална вредност функције циља (према Теореми 2.1.) или ће се показати да је функција циља неограничена одоздо (према Теореми 2.2.).

Алгоритам 2.1. ***(Симплекс метода)***
Улаз. *Проблем линеарног програмирања у канонском облику.*
Корак 1. *Ако је $c_j \geq 0$ за све j, минимална вредност функције циља је постигнута.*
Корак 2. *Ако постоји индекс j_0 такав да је $c_{j_0} < 0$ и $a_{ij_0} \leq 0$ за све i, функција циља је неограничена одоздо.*
Корак 3. *У супротном, треба одредити пивот. Пивот се одређује на следећи начин:*

1. *Пивот елемент се налази у било којој колони за коју је $c_j < 0$. Уколико има више $c_j < 0$ онда се пивот бира у колони са најмањим c_j или најмањим j. Нека се пивот налази у колони j_0.*

2. *Да би се одредила врста где се налази пивот, треба наћи индекс врсте i_0 такав да је*
$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}} : a_{ij_0} > 0\right\}.$$
Уколико се минимум постиже за више врста, једноставно изабрати врсту за пивот са најмањим индексом.

Корак 4. *После пивотирања, проблем линеарног програмирања остаје у канонском облику са новим базисно допустивим решењем. Вратити се на корак 1.*

Због једноставније употребе алгоритма симплекс методе, свакој итерацији алгоритма придружује се **симплекс таблица** (Табела 2.1) из које се једноставно може прочитати базисно допустиво решење.

Табела 2.1: Облик симплекс таблице

Симплекс таблица				
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$f + f_0$

Пример 2.1. *Предузеће "Стакло" се бави производњом чаша. Предузеће поседује три машине за проиводњу чаша, које се разликују према броју произведених чаша у једном процесу и временском трајању тог процеса. Због спецификација машина, укупно време рада свих машина не сме бити веће од* $60h$ *у току једне радне седмице. Недељна производња складишти се у складишту предузећа капацитета* $15000m^3$*. Познати су следећи подаци о машинама овог предузећа:*

1. *Са првом машином за* $6h$ *може се произвести* 100 *чаша за сок које се пакују у кутије. Свака кутија заузима* $10m^3$ *и садржи* 100 *чаша за сок. Цена чаша за сок је* 5$ *по чаши.*

2. *Са другом машином за* $5h$ *може се произвести* 100 *чаша за коктел које се пакују у кутије. Свака кутија заузима* $20m^3$ *и садржи* 100 *чаша за коктел. Цена чаша за коктел је* 4.5$ *по чаши.*

3. *Са трећом машином за* $8h$ *може се произвести* 100 *чаша за шампањац које се пакују у кутије. Свака кутија заузима* $10m^3$ *и садржи* 100 *чаша за шампањац. Цена чаша за шампањац је* 6$ *по чаши.*

Једини расположиви купац чаша за сок неће прихватити више од 800 *комада недељно, док за остале чаше постоји више купаца и не постоји ограничење у обиму продаје. Колико комада сваке врсте чаша треба произвести сваке седмице како би се постигла највећа могућа добит и колико износи та добит?*

Решење. Нека су уведене следеће ознаке:

- x_1-број чаша за сок у стотинама
- x_2-број чаша за коктел у стотинама
- x_3-број чаша за шампањац у стотинама

Добија се следећи проблем ЛП-а

$$\begin{aligned} &\max \quad f = 500x_1 + 450x_2 + 600x_3 \\ &\text{при условима} \\ &\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 \leq 150 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Након пребацивања проблема у канонски облик, запис проблема постаје:

$$\begin{aligned} &\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3 \\ &\text{при условима} \\ &\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оваквом проблему може се придружити Табела 2.2.

Табела 2.2: Почетна симплекс таблица проблема из Примера 2.1

Почетна симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
6	5	8	1	0	0	60
10	20	10	0	1	0	150
1	0	0	0	0	1	8
-500	-450	-600	0	0	0	$-f$

Сада се може применити алгоритам симлекс методе.
1. итерација. Пошто је $c_1 = -500 < 0$, потребно је одредити пивот.

$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 1}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i1}} : a_{i1} > 0\right\} = \min\left\{\frac{60}{6}, \frac{150}{10}, \frac{8}{1}\right\} = 8.$$

Дакле, пивот је елемент $a_{31} = 1$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 2.3.

Табела 2.3: Симплекс таблица на крају 1. итерације

Симплекс таблица 1. итерације						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	5	8	1	0	-6	12
0	20	10	0	1	-10	70
1	0	0	0	0	1	8
0	-450	-600	0	0	500	$-f+4000$

2. итерација. Пошто је $c_2 = -450 < 0$, потребно је одредити пивот.

$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 2}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i2}} : a_{i2} > 0\right\} = \min\left\{\frac{12}{5}, \frac{70}{20}\right\} = \frac{12}{5}.$$

Дакле, пивот је елемент $a_{12} = 5$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 2.4.

Табела 2.4: Симплекс таблица на крају 2. итерације

Симплекс таблица 2. итерације						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$8/5$	$1/5$	0	$-6/5$	$12/5$
0	0	-22	-4	1	14	22
1	0	0	0	0	1	8
0	0	120	90	0	-40	$-f+5080$

3. итерација. Пошто је $c_6 = -40 < 0$, потребно је одредити пивот.

$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 6}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i6}} : a_{i6} > 0\right\} = \min\left\{\frac{22}{14}, \frac{8}{1}\right\} = \frac{11}{7}.$$

Дакле, пивот је елемент $a_{26} = 14$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 2.5.

Табела 2.5: Оптимална симплекс таблица проблема проблема из Примера 2.1

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	$45/7$
0	0	$400/7$	$550/7$	$20/7$	0	$-f+36000/7$

С обзиром да је $c_j \geq 0$ за све j, последња таблица је и оптимална симплекс таблица.

Оптимално решење датог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(\frac{45}{7}, \frac{30}{7}, 0, 0, 0, \frac{11}{7}\right),$$

а оптимална вредност функције циља је

$$f^* = \frac{36000}{7}.$$

Дакле, сваке седмице треба производити $\frac{45}{7}$ стотина чаша за сок, $\frac{30}{7}$ стотина чаша за коктел, 0 стотина чаша за шампањац, како би се постигла максимална добит при наведеним условима која износи $\frac{36000}{7}\$$.

2.2 Матрични облик симплекс алгоритма

Теорема 2.4. *Нека је дат проблем линеарног програмирања у стандардном облику,*

$$\begin{aligned}&\min \quad f + f_0 = cx\\&\textit{при условима}\\&\begin{cases} Ax = b\\ x \geq 0,\end{cases}\end{aligned}$$

где је $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ и $f_0 \in \mathbb{R}$. Нека је проблему придружена почетна симплекс таблица. Нека је проблем решен и нека је након примене симплекс мотеде добијена оптимална симплекс таблица. (Слика 2.1).

Почетна симплекс таблица	
A	b
c	f_0

$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$

Оптимална симплекс таблица	
A^*	b^*
c^*	f_0^*

Слика 2.1: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику

Оптимална симплекс таблица је у канонском облику са скупом базисних променљивих. Нека су базисне променљиве означене са $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$. Нека је

$$B = \begin{pmatrix} A^{(j_1)} & A^{(j_2)} & \ldots & A^{(j_m)} \end{pmatrix}$$

матрица димензије $m \times m$, при чему је $A^{(j)}$, j-та колона матрице A. Нека је

$$c_B = (c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_m})$$

вектор димензије $1 \times m$, при чему је c_j, j-ти елемент вектора c. Тада је

$$\begin{cases} A^* = B^{-1}A \\ b^* = B^{-1}b \\ c^* = c - c_B A^* \\ f_0^* = f_0 - c_B b^*. \end{cases} \tag{2.5}$$

Доказ. Нека је пермутација индекса променљивих извршена тако да $j_1, j_2, \ldots, j_m$ представљају индексе првих m променљивих. Нека је

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

вектор димензије $n \times 1$, при чему је $x_B = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})^T$ вектор димензије $m \times 1$, а $x_N = \left(x_{j_{m+1}}, x_{j_{m+2}}, \ldots, x_{j_n}\right)^T$ вектор димензије $(n-m) \times 1$. Нека је пермутација колона матрице A и вектора c извршена на исти начин. Нека је

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix},$$

при чему је $N = \begin{pmatrix} A^{(j_{m+1})} & A^{(j_{m+2})} & \ldots A^{(j_n)} \end{pmatrix}$ матрица димензије $m \times (n-m)$ и $A^{(j)}$, j-та колона матрице A,

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_B & c_N \end{pmatrix},$$

при чему је $c_N = \left(c_{j_{m+1}}, c_{j_{m+2}}, \ldots, c_{j_n}\right)$ вектор димензије $1 \times (n-m)$ и c_j, j-ти елемент вектора c,

$$\bar{A}^* = \begin{pmatrix} I & N^* \end{pmatrix},$$

при чему је I јединична матрица димензије $m \times m$, $N^* = \begin{pmatrix} A^{(m+1)*} & A^{(m+2)*} & \ldots A^{(n)*} \end{pmatrix}$ матрица димензије $m \times (n-m)$ и $A^{(j)*}$, j-та колона матрице A^*,

$$\bar{c}^* = \begin{pmatrix} 0 & c_N^* \end{pmatrix},$$

при чему je 0, нула вектор димензије $1 \times m$, $c_N^* = \left(c_{m+1}^*, c_{m+2}^*, \ldots, c_n^*\right)$ вектор димензије $1 \times (n-m)$.

Након примене симплекс методе добија се оптимална симплекс таблица (Слика 2.2)

Почетна симплекс таблица			Оптимална симплекс таблица	
$\bar{A}$	b	$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$	$\bar{A}^*$	b^*
$\bar{c}$	f_0		$\bar{c}^*$	f_0^*

Слика 2.2: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику након пермутације индекса

односно (Слика 2.3).

Почетна симплекс таблица			Оптимална симплекс таблица	
$\begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$	b	$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$	$\begin{pmatrix} I & N^* \end{pmatrix}$	b^*
$\begin{pmatrix} c_B & c_N \end{pmatrix}$	f_0		$\begin{pmatrix} 0 & c_N^* \end{pmatrix}$	f_0^*

Слика 2.3: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику након еквивалентног записа матрица

Трансформација почетне симплекс таблице у оптималну симплекс таблицу може се интерпретирати као множење непознатом матрицом $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Потребно је одредити непознату матрицу M

$$\bar{A}^* = M \cdot \bar{A} \Rightarrow M \cdot \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & N^* \end{pmatrix}.$$

Добија се

$$M \cdot B = I \Rightarrow M = B^{-1},$$
$$M \cdot N = N^*,$$

односно

$$\bar{A}^* = M \cdot \bar{A} \Rightarrow \bar{A}^* = B^{-1} \cdot \bar{A} \Rightarrow A^* = B^{-1}A, \tag{2.6}$$
$$\bar{b}^* = M \cdot \bar{b} \Rightarrow \bar{b}^* = B^{-1} \cdot \bar{b} \Rightarrow b^* = B^{-1}b. \tag{2.7}$$

Из прве врсте оптималне симплекс таблице може се приметити да важи

$$\begin{pmatrix} I & N^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b^* \Rightarrow x_B + N^* x_N = b^* \Rightarrow x_B = b^* - N^* x_N.$$

Из друге врсте почетне симплекс таблице може се приметити да важи

$$\begin{pmatrix} c_B & c_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = f_0 + f \Rightarrow c_B x_B + c_N x_N = f_0 + f \Rightarrow c_B(b^* - N^* x_N) + c_N x_N = f_0 + f.$$

Добија се једнакост

$$(c_N - c_B N^*)x_N = f_0 - c_B b^* + f$$

чија је десна стана означена са LHM.

$$LHM = (c_N - c_B N^*)x_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x_B + (c_N - c_B N^*)x_N$$

$$LHM = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c_N - c_B N^* \end{pmatrix}}_{\bar{c}^*} \underbrace{\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}}_{\bar{x}}$$

Како је $LHM = \bar{c}^* \bar{x}$, добија се

$$f_0^* = f_0 - c_B b^*. \tag{2.8}$$

Важи и

$$\bar{c}^* = \bar{c} - c_B B^{-1} \bar{A}.$$

Заиста,

$$\bar{c} - c_B B^{-1}\bar{A} = \begin{pmatrix} c_B & c_N \end{pmatrix} - c_B B^{-1} \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B & c_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_B B^{-1} B & c_B B^{-1} N \end{pmatrix}$$

$$\bar{c} - c_B B^{-1}\bar{A} = \begin{pmatrix} c_B & c_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_B & c_B N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & c_N - c_B N^* \end{pmatrix} = \bar{c}^*.$$

Добија се

$$\bar{c}^* = \bar{c} - c_B \bar{A}^*. \tag{2.9}$$

Тврђење теореме следи из (2.6), (2.7), (2.8) и (2.9). □

2.3 Вештачке променљиве

Као што је већ речено, многи проблеми ЛП-а могу се свести на канонски облик. Међутим, могуће је да за систем ограничења није познато базисно допустиво решење. Дакле, треба пронаћи технику за одређивање почетног базисног решења за произвољни систем једначина.

Основна идеја је увођење одређеног броја нових променљивих, које се називају **вештачке променљиве** (engl. *artificial variable*) тако да систем ограничења буде у канонском облику чије су базисне променљиве управо вештачке променљиве. Симплекс метода се примењује на нову фунцкију циља која је дефинисана тако да се њена минимална вредност постиже у допустивом решењу почетног проблема.

Нека је дат проблем ЛП-а у облику (1.1). Множењем са (-1), ако је потребно, може се постићи да је свака константа $b_i,\ i = 1, \dots, m$ ненегативна. Нека се у систем ограничења уводи нових m променљивих $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Добија се проблем

$$\min \quad w = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}$$

при условима

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Добијени проблем је у канонском облику са базисним променљивим $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ и придружено базисно решење је допустиво јер су сви $b_i,\ i = 1, \ldots, m$ ненегативни. С обзиром да су све променљиве ненегативне, функција w не може бити негативна. Функција w ће узимати вредност нула за свако допустиво решење проблема (2.10) у коме су све вештачке променљиве једнаке нули. Вредност функције w на придруженом базисном решењу биће нула, његова минимална вредност, а симплекс метода би се тада могла применити на почетном проблему, као што је наведено у (1.1). Уколико систем ограничења (1.1) има најмање једно допустиво решење, систем (2.10) мора имати допустива решења у којима су све вештачке променљиве једнаке нули. У овом случају би минимална вредност функције w била, у ствари, нула. Према томе, када се примени симплекс метода на функцију w, ако се на крају процеса добије вредност функције w већа од нуле, може се закључити да проблем нема допустивих решења.

2.4 Двофазна симплекс метода

Могуће је да једначина или неке једначине у почетном систему ограничења представљају линеарне комбинације преосталих једначина у систему. То се често дешава, када се, ради лакше формулације, у проблем уврсте једначине за које се испостави да су заправо сувишне. Међутим, ако је систем у канонском облику не може бити сувишних једначина због природе базисних променљивих.

Метода за решавање проблема ЛП-а за који није познато почетно базисно допустиво решење позната је као **двофазна симплекс метода.**

Нека је после примене симплекс методе на проблем (2.10) помоћна функција w једнака нули. Ако у овом тренутку нема вештачких променљивих које су базисне, почетни систем ограничења мора бити у канонском облику и тиме не садржи сувишне једначине. Нека је после примене симплекс методе на проблем (2.10) помоћна функција w једнака нули и нека су неке вештачке променљиве базисне променљиве. С обзиром да је минимална вредност фунцкије w једнака нули и да је дефинисана као збир вештачких променљивих, морају бити једнаке нули, односно константе b_i^* у оним ограничавајућим једначинама које садрже вештачке променљиве морају бити једнаке нули. Треба заменити ове вештачке променљиве неким променљивим из почетног скупа. Нека i-та једначина у скупу ограничења садржи вештачку променљиву која је базисна. Нека су $a_{ij}^*,\ j = 1, \ldots, n$ коефицијенти у i-тој врсти. Ако је неко $a_{ij}^* \neq 0$ онда се избором тог елемента за пивот може заменити вештачка променљива која је базисна неком оригиналном променљивом која је небазисна. Пошто је та вештачка променљива једнака нули десна страна ће остати непромењена након пивотирања. Наставити овај поступак докле год је могуће. Ако се, међутим, дође до ситуације у којој i-та врста садржи преосталу вештачку променљиву, али је за све $j = 1, \ldots, n$ $a_{ij}^* = 0$, може се закључити да је због вишка немогуће пронаћи скуп од m базисних променљивих из почетног скупа. У ствари, број сувишних једначина био би једнак броју вештачких променљивих са коефицијентом једнаким нули у датом реду. Међутим, друга фаза симплекс методе се и даље може применити, а врсте са нулама који одговарају преосталим вештачким променљивим могу се занемарити.

Алгоритам 2.2. ***(Двофазна симплекс метода)***
Улаз. *Проблем линеарног програмирања у стандардном облику.*

Корак 1. *По потреби додати вештачке променљиве сваком ограничењу.*
Корак 2. *Дефинисати помоћну функцију циља w једнаку збиру вештачких променљивих.*
Корак 3. *Користећи ограничења проблема, изразити функцију w у облику без вештачких променљивих.*
Корак 4. *Применити алгоритам симплекс методе да би се пронашла минимална вредност функције w.*
Корак 5. *Ако је минимум функције w већи од нуле, онда почетни проблем нема допустиво решење.*
Корак 6.

1. *Ако је минимум функције w једнак нули и ниједна вештачка променљива није базисна, почетни проблем је у канонском облику и може се применити симплекс метода.*

2. *Ако је минимум функције w једнак нули и постоји вештачка променљива која је базисна, онда применити операцију пивотирања како би се та вештачка променљива заменила оригиналном променљивом која је небазисна. За пивот изабрати произвољан елемент $a^*_{ij} \neq 0, j = 1, \ldots, n$, при чему i означава врсту која одговара вештачкој променљивој која је базисна. Уколико су сви елементи $a^*_{ij} = 0, j = 1, \ldots, n$ онда се врста i може занемарити. Након замене свих вештачких променљивих које су базисне, почетни проблем је у канонском облику и може се применити симплекс алгоритам.*

Пример 2.2. *Нека је дат проблем линеарног програмирања*

$$\max \quad f = 3x + y + 4z$$

при условима

$$\begin{cases} x + 3y + z \leq 10 \\ 3x + y - z \geq 2 \\ 3x + y + 3z \leq 6 \\ x \leq 1 \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

Одредити оптимално решење и оптималну вредност за дати проблем.

Решење. Након пребацивања проблема у канонски облик, запис проблема постаје:

$$\min \quad -f = -3x - y - 4z$$

при условима

$$\begin{cases} x + 3y + z + p = 10 \\ 3x + y - z - q = 2 \\ 3x + y + 3z + r = 6 \\ x + s = 1 \\ x, y, z, p, q, r, s \geq 0. \end{cases}$$

Како у проблему ЛП-а није познато почетно базисно допустиво решење (проблем је у стандардном облику) може се применити двофазна симплекс метода. Може се приметити да систем ограничења проблема није у канонској форми, али је систем једначина

$$\begin{cases} x + 3y + z + p = 10 \\ 3x + y + 3z + r = 6 \\ x + s = 1 \end{cases}$$

у канонској форми чије су базисне променљиве p, r и s. Једначини

$$3x + y - z - q = 2$$

је потребно придружити вештачку променљиву w_1 како би се добио ситем ограничења у канонској форми чије су базисне променљиве p, w_1, r и s. Сада се могу применити фазе двофазне симплекс методе.

1. фаза. Након дефинисања нове функције циља добија се проблем

$$\min \quad w = w_1$$

при условима

$$\begin{cases} x + 3y + z + p = 10 \\ 3x + y - z - q + w_1 = 2 \\ 3x + y + 3z + r = 6 \\ x + s = 1 \\ x, y, z, p, q, r, s, w_1 \geq 0, \end{cases}$$

који се може решити симплекс методом. Оваквом проблему може се придружити Табела 2.6.

Табела 2.6: Почетна симплекс таблица проблема из Примера 2.2

Почетна симплекс таблица								
x	y	z	p	q	r	s	w_1	b
1	3	1	1	0	0	0	0	10
3	1	-1	0	-1	0	0	1	2
3	1	3	0	0	1	0	0	6
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	w

Након примене симплекс методе добија се Табела 2.7.

Табела 2.7: Оптимална симплекс таблица на крају 1. фазе.

Оптимална симплекс таблица								
x	y	z	p	q	r	s	w_1	b
0	8/3	4/3	1	1/3	0	0	−1/3	28/3
1	1/3	−1/3	0	−1/3	0	0	1/3	2/3
0	0	4	0	1	1	0	−1	4
0	−1/3	1/3	0	1/3	0	1	−1/3	1/3
0	0	0	0	0	0	0	1	w

Пошто је минимална вредност помоћне функције циља једнака нули, полазни проблем има допустивих решења.

2. фаза. Како вештачка променљива w_1 није базисна може се уколнити колона која одговара вештачкој променљивој w_1. Након замене помоћне функције циља почетном функцијом циља, полазни проблем се из стандардног облика трансформише у канонски облик чија је Табела 2.8.

Табела 2.8: Почетна симплекс таблица 2. фазе.

Почетна симплекс таблица							
x	y	z	p	q	r	s	b
0	8/3	4/3	1	1/3	0	0	28/3
1	1/3	−1/3	0	−1/3	0	0	2/3
0	0	4	0	1	1	0	4
0	−1/3	1/3	0	1/3	0	1	1/3
−3	−1	−4	0	0	0	0	$-f$

Након примене симплекс методе добија се Табела 2.9.

Табела 2.9: Оптимална симплекс таблица на крају 2. фазе.

Оптимална симплекс таблица							
x	y	z	p	q	r	s	b
0	8/3	0	1	0	−1/3	0	8
1	1/3	0	0	−1/4	1/12	0	1
0	0	1	0	1/4	1/4	0	1
0	−1/3	0	0	1/4	−1/12	1	0
0	0	0	0	1/4	5/4	0	$-f+7$

Оптимално решење датог проблема је

$$(x^*, y^*, z^*) = (1, 0, 1)\,,$$

а оптимална вредност функције циља је

$$f^* = 7.$$

2.5 Теорема о коначности симплекс методе

Лема 2.1. *Ако су све константе b_i, $i = 1, \ldots, m$ система ограничења проблема линеарног програмирања једнаке нули, тада су након примене операције пивотирања, сви $b_i^* = 0$. Ако је барем један $b_i \neq 0$, онда је након примене операције пивотирања најмање један $b_i^* \neq 0$.*

Лема 2.2. *Нека је дат проблем линеарног програмирања са бар једним коефицијентом $b_i \neq 0$. Ако постоји низ корака који води до завршетка симплекс методе, онда исти тај низ корака води до завршетка симплекс методе за проблем добијен заменом свих $b_i \neq 0$ са $b_i = 0$.*

Теорема 2.5. *За сваки проблем линеарног програмирања у канонском облику, постоји коначан низ корака симплекс мотеде који се завршава једном од следеће две могућности:*

1. *сви коефицијенти c_j^* небазисних промењљивих у функцији циља су ненегативни,*
2. *за неку колону са индексом j_0, $c_{j_0}^* < 0$ и $a_{ij_0}^* \leq 0$ за све i.*

Доказ. Доказ се изводи индукцијом по броју једначина m у систему ограничења. За $m = 1$ добија се проблем са само једном једначином у ограничењу. Ако је $b_1 \neq 0$, према Леми 2.1, овај коефицијент ће остати непромењен после операције пивотирања. Како је базисно решење недегенерисано према Теореми 2.3, симплекс метода се мора завршити након коначног броја корака. Ако је $b_1 = 0$ онда се може заменити било којом позитивном константом и применити Лема 2.2. Дакле, и у овом случају се симплекс метода мора завршити.

Нека теорема важи за систем ограничења са највише $m - 1$ једначина. Треба показати да теорема важи и за m једначина.

Нека је дат проблем ЛП-а (2.1) са m ограничења и бар једним $b_i \neq 0$. Применом симплекс методе у некој итерацији добиће се дегенерисано базисно решење и функција циља се неће умањити. Ограничења се тада могу распоредити тако да слодобни члан буде једнак нули у првих r-једначина, односно $b_i = 0$ за $i = 1, \dots, r$ и $b_i > 0$ за $i = r+1, \dots, m$. Према Леми 2.1, важи $r < m$. Добија се

$$\begin{aligned}
&\min \quad f + f_0^* = c_{m+1}^* x_{m+1} + c_{m+2}^* x_{m+2} + \cdots + c_n^* x_n \\
&\begin{cases}
x_1 + a_{12}^* x_2 + \cdots + a_{1,m+1}^* x_{m+1} + a_{1,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{1n}^* x_n = b_1^* = 0 \\
x_2 + \cdots + a_{2,m+1}^* x_{m+1} + a_{2,m+2}^* m + 2 + \cdots + a_{2n}^* n = b_2^* = 0 \\
\ddots \\
x_r + \cdots + a_{r,m+1}^* x_{m+1} + a_{r,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{rn}^* x_n = b_r^* = 0 \\
x_{r+1} + \cdots + a_{r+1,m+1}^* x_{m+1} + a_{r+1,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{r+1,n}^* x_n = b_{r+1}^* > 0 \\
\ddots \\
x_m + a_{m,m+1}^* x_{m+1} + a_{m,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{mn}^* x_n = b_m^* > 0 \\
x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Брисањем последњих $m-r$ једначина у систему ограничења елиминише се и $m-r$ базисних променљивих чиме настаје нови проблем у канонском облику

$$\begin{aligned}
&\min \quad f + f_0^* = c_{m+1}^* x_{m+1} + c_{m+2}^* x_{m+2} + \cdots + c_n^* x_n \\
&\begin{cases}
x_1 + a_{12}^* x_2 + \cdots + a_{1,m+1}^* x_{m+1} + a_{1,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{1n}^* x_n = b_1^* = 0 \\
x_2 + \cdots + a_{2,m+1}^* x_{m+1} + a_{2,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{2n}^* x_n = b_2^* = 0 \\
\ddots \\
x_r + \cdots + a_{r,m+1}^* x_{m+1} + a_{r,m+2}^* x_{m+2} + \cdots + a_{rn}^* x_n = b_r^* = 0 \\
x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

На проблем (2.12) се може применити индуктивна хипотеза. Помоћу индуктивне хипотезе, проналази се низ корака пивотирања такав да је проблем у канонском облику са једном од следећих могућности:

1. сви $c_j^* \geq 0,\ j = 1, \dots, n$,
2. барем један $c_{j_0}^* < 0$ и сви $a_{ij_0}^* \leq 0$ за све $i = 1, \dots, r$.

Применом истих корака на проблем (2.11) добија се проблем у канонском облику, јер се последњих $m-r$ базисних променљивих из (2.11) комбинује са r базисних променљивих из првих r једначина чиме се добија m базисних променљивих. Пошто се сваки пивот налази у врсти са коефицијентима $b_i = 0$, колона b остаје непромењена па ће и базисно решење остати допустиво. Резултат операција пивотирања на врсту c_j^* је независан од додатних $m-r$ ограничења. Постоје три могућности:

1. ако је редослед корака примењених на r једначина достигао први услов, тада су сви $c_j^* \geq 0$ и функција циља постиже минималну вредност,

2. ако је редослед корака примењених на r једначина достигао други услов и $a^*_{ij_0} \leq 0$ за све $i, i = r+1, \dots, m$ онда функција циља је неограничена одоздо,

3. ако је редослед корака примењених на r једначина достигао други услов и $a^*_{ij_0} > 0$ за неко i, $i = r+1, \dots, m$, тада се нови пивот може пронаћи у колони j_0 и врсти i тако да важи
$$\min\left\{\frac{b^*_i}{a^*_{ij_0}} : a^*_{ij_0} > 0\right\}.$$
Пошто је $b^*_i > 0$, операција пивотирања смањује вредност функције циља.

Показано је да проблем ЛП-а са бар једним $b_i \neq 0$ у кораку симплекс методе:

1. постиже минималну вредност функције циља или проналази скуп на коме функција циља неограничено опада,

2. може се пронаћи пивот или низ корака пивотирања који доводе до смањења функције циља.

Како постоји само ограничен број базисно допустивих решења, а смањење вредности функције циља гарантује да се не могу поновити, процес симплекс алгоритма се мора завршити.

Нека је дат проблем ЛП-а са m ограничења и свим $b_i = 0$. У овом случају, заменом $b_i = 0$ било којом позитивном константом и применом већ доказаног дела и Леме 2.2, добијамо тврђење теореме. □

Лема 2.3. *Ако дат проблем линеарног програмирања са системом ограничења који има допустива решења и ако је функција циља која се минимизује ограничена одоздо, онда постоји бар једно допустиво решење (практично, и базисно допустиво решење) за које функција циља достиже минималну вредност.*

Приликом рада алгоритма симплекс методе могуће је да вредност функције циља остане непромењена. У том случају не постоји гаранција да ће се алгоритам симплекс методе завршити у коначном броју итерација.

Дефиниција 2.1. ***(Блендово[1] правило)*** *Међу променљивим које улазе односно излазе из базе увек бирати колону са минималним индексом.*

Теорема 2.6. *Ако се у свакој итерацији симплекс алгоритма улазна и излазна променљива бирају Блендовим правилом, алгоритам се завршава после коначно много итерација.*

Доказ Теореме 2.6 се може пронаћи у [4].

2.6 Ефикасност симплекс методе

Поставља се питање колико је симплекс алгоритам заиста ефикасан. Како је симплекс таблица формата $(m+1) \times (n+1)$, то значи да симплекс алгоритам у свакој итерацији ажурира управо толико елемената, односно приближно mn уколико

[1] Robert Gary Bland (рођен 1948), амерички математичар

занемаримо јединице које не долазе до изражаја при већим вредностима m и n. То значи да је број аритметичких операција по једној итерацији приближно пропорционалан са mn.

Рачунање колико временски троши једна итерација је једноставнији део посла. Компликованији део је одредити колико ће итерација симплекс алгоритма бити потребно до добијања оптималног решења, јер од тога суштински зависи трајање извршења симплекс алгоритма. Разни емпиријски тестови на великом броју практичних проблема показали су да број итерација готово никад неће прећи $2(m+n)$ или $3\max\{m,n\}$, тако да је, у том случају, укупан број операција у симплекс алгоритму ограничен неким мањим умношком од n^3 односно m^3. Дуго времена за такву емпиријску процену није било никаквих доказа. Међутим, с обзиром на чињеницу да број темена допустиве области може експоненцијално расти са порастом m односно n природно је очекивати да би симплекс алгоритам могао захтевати експоненцијално много итерација (изражено у функцији од m и n). Кли[2] и Минти[3] су 1971. године показали да уколико допустива област има облик једне врсте благо деформисане n-димензоналне коцке (прецизније квадра) познате под именом **Кли-Минти-јева коцка**, постоје функције циља које ће на таквој допустивој области захтевати експоненцијално много итерација.

Кли и Минти су показали да за неке проблеме, симплекс алгоритам налази решење у 2^n-1 итерација, што значи да проблем није полиномијалан већ експоненцијалан. Овакви примери су ретки у пракси. Познати Кли-Минти-јев пример, који потврђује претходни резултат, је проблем облика

$$\min \quad f = -\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$$

при условима

$$\left(2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j\right) + x_i \le 100^{i-1}, \text{ за } i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0.$$

За $n=3$ проблем је облика

$$\min \quad f = -100x_1 - 10x_2 - x_3$$

при условима

$$\begin{cases} x_1 \le 1 \\ 20x_1 + x_2 \le 100 \\ 200x_1 + 20x_2 + x_3 \le 10000 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

и има допустиву област која има $2^3 = 8$ темена. Поласком од базисно допустивог решења који следи из канонског облика проблема у којем почетну базу чине изравнавајуће промењљиве, симплекс алгоритам ће обићи сва темена пре него што стигне до

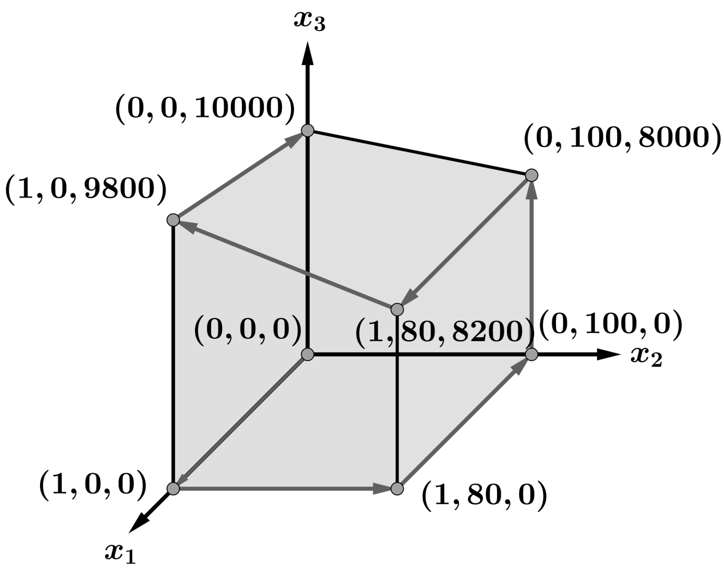
[2] Victor Klee (1925-2007), амерички математичар
[3] George James Minty (1929-1986), амерички математичар

оптималне тачке, односно извршиће се тачно $2^3 - 1 = 7$ итерација. На Слици 2.4 приказано је кретање по коме се обилазе темена Кли-Минти-јеве коцке од почетног базисно допустивог решења

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

до оптималног решења

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 10000).$$



Слика 2.4: Кретање по теменима Кли-Минти-јеве коцке у случају $n = 3$ током итерација симплекс алгоритма

Опширније о симплекс методи и алгоритмима симплекс методе може се пронаћи у [2], [4], [12], [13], [14].

Глава 3

Дуалност у линеарном програмирању

Теоријске основе које су изложене у Глави 3 су преузете из [2], [4], [12], [13], а пример је преузет из [4].

3.1 Дефиниција дуалног проблема

Дефиниција 3.1. *Проблем линеарног програмирања* ***типа максимума*** *дефинисан је на следећи начин*

$$
\begin{aligned}
&\max \quad f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\textit{при условима} \\
&\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Проблем ЛП-а типа максимума укључује само знакове неједнакости мање или једнако ($\leq$). Нема ограничења за коефицијенте a_{ij}, b_i и $c_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Дефиниција 3.2. *Проблем линеарног програмирања* ***типа минимума*** *дефинисан је на следећи начин*

$$
\begin{aligned}
&\min \quad f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\textit{при условима} \\
&\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Проблем ЛП-а типа минимума укључује само знакове неједнакости веће или једнако ($\geq$). Нема ограничења за коефицијенте a_{ij}, b_i и $c_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Дефиниција 3.3. ***Примал*** *проблема линеарног програмирања је проблем дефинисан са* (3.1).

Дефиниција 3.4. ***Дуал*** *проблема линеарног програмирања* (3.1) *дефинисан је на следећи начин*

$$\min \quad g = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

при условима

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Дуал проблема типа максимума (3.1) са m ограничења са знаком неједнакости ($\leq$) и n ненегативних променљивих је проблем типа минимума са m ненегативних променљивих и n ограничења са знаком неједнакости ($\geq$). За свако i, $i = 1, \ldots, m$ променљиве y_i дуал проблема одговарају i-том ограничењу проблема типа максимума. Коефицијенти који одговарају y_i у i-тој колони у ограничењима (3.3) су коефицијенти i-тог ограничења у (3.1). За свако j, $j = 1, \ldots, n$, j-то ограничење у дуалу одговара j-тој променљивој x_j у (3.1), коефицијенти променљивих у j-том ограничењу у дуалу су коефицијенти променљиве x_j у ограничењима (3.1). Промена настаје и у слободним члановима ограничења, као и у коефицијентима уз променљиве у циљној функцији.

Полазећи од (3.1) и (3.3) може се дефинисати матрица A и вектори b, c, x и y на следећи начин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}^T, \ c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \ y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix}^T.$$

Проблем типа максимума (3.1) односно његов дуал (3.3) се могу записати у матричном облику

$$\begin{array}{lcl} \max \quad f = cx & & \min \quad g = b^Ty \\ \text{при условима} & \text{односно} & \text{при условима} \\ \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} & & \begin{cases} A^Ty \geq c^T \\ y \geq 0. \end{cases} \end{array} \tag{3.4}$$

Уколико проблем ЛП-а није типа максимума, онда се применом следећих правила може трансформисати у проблем типа максимума:

1. минимизација функције циља f може се заменити максимизацијом функције $-f$,
2. неједнакости облика $(\geq)$ се могу множењем са (-1) трансформисати у неједнакости облика $(\leq)$,
3. ограничења облика $(=)$, односно $A = B$, се могу разложити на два ограничења $A \leq B$ и $B \leq A$.

Након примене претходних правила добија се проблем типа максимума чији се дуал може одредити (Слика 3.1).

Проблем типа максимума		Проблем типа минимума
i-то ограничење је облика $(\leq)$		i-та променљива је ненегативна
i-то ограничење је облика $(=)$		i-та променљива је неограничена
j-та променљива је ненегативна	$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$	j-то ограничење је облика $(\geq)$
j-та променљива је неограничена		j-то ограничење је облика $(=)$
Координате вектора c		Координате вектора b^T
Коориднате вектора b		Координате вектора c^T
Коефицијенти матрице A		Коефицијенти матрице A^T

Слика 3.1: Шематски приказ поступка трансформације до дуала проблема типа максимума

Уколико проблем ЛП-а није типа минимума, онда се применом следећих правила може трансформисати у проблем типа минимума:

1. максимизација функције циља f може се заменити минимизацијом функције $-f$,
2. неједнакости облика $(\leq)$ се могу множењем са (-1) трансформисати у неједнакости облика $(\geq)$,
3. ограничења облика $(=)$, односно $A = B$, се могу разложити на два ограничења $A \leq B$ и $B \leq A$.

Након примене претходних правила добија се проблем типа минимума чији се дуал може одредити (Слика 3.2).

Проблем типа минимума		Проблем типа максимума
i-то ограничење је облика $(\geq)$		i-та променљива је ненегативна
i-то ограничење је облика $(=)$		i-та промнељива је неограничена
j-та променљива је ненегативна	$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$	j-то ограничење је облика $(\leq)$
j-та промнељива је неограничена		j-то ограничење је облика $(=)$
Координате вектора c		Коефицијенти матрице b^T
Координате вектора b		Коефицијенти матрице c^T
Коефицијенти матрице A		Коефицијенти матрице A^T

Слика 3.2: Шематски приказ поступка трансформације до дуала проблема типа минимума

3.2 Теореме о јакој и слабој дуалности

Теорема 3.1. ***(Теорема о слабој дуалности)*** *Нека је x_0 допустиво решење за проблем типа максимума*

$$\begin{aligned} &\max \quad f = cx \\ &\textit{при условима} \\ &\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

и y_0 допустиво решење за дуални проблем

$$\begin{aligned} &\min \quad g = b^T y \\ &\textit{при условима} \\ &\begin{cases} A^T y \geq c^T \\ y \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Тада је

$$c \cdot x_0 \leq b^T \cdot y_0.$$

Доказ. Како је x_0 допустиво решење за проблем (3.5), важи

$$u = b - Ax_0 \geq 0,$$

односно

$$Ax_0 = b - u.$$

Како је y_0 допустиво решење за дуални проблем (3.6), важи

$$v = A^T y_0 - c^T \geq 0,$$

односно

$$A^T y_0 = c^T + v.$$

Пошто је производ $\underbrace{y_0^T}_{1\times m} \cdot \underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{x_0}_{n\times 1}$ реалан број, добија се

$$y_0^T A x_0 = (y_0^T A x_0)^T = x_0^T A^T y_0$$

и

$$y_0^T A x_0 = y_0^T (b - u),$$
$$x_0^T A^T y_0 = x_0^T (c^T + v).$$

Из претходне две једнакости следи

$$y_0^T b - y_0^T u = x_0^T c^T + x_0^T v.$$

Пошто је $u, v, x_0, y_0 \geq 0$, следи

$$b^T y_0 - c x_0 = \underbrace{v^T x_0}_{\geq 0} + \underbrace{u^T y_0}_{\geq 0} \geq 0,$$

односно,

$$c x_0 \leq b^T y_0.$$

□

Последица 3.1. *Ако је x_0 допустиво решење проблема (3.5) и y_0 је допустиво решење за дуал проблема (3.6), онда*

$$b^T y_0 - c x_0 = (A^T y_0 - c^T)^T x_0 + (b - A x_0)^T y_0.$$

Последица 3.2. *Ако су x_0 и y_0 допустива решења за проблем (3.5) и проблем (3.6) редом, и ако је*

$$c \cdot x_0 = b^T \cdot y_0$$

онда су оптималне вредности функција циља f и g једнаке, а x_0 и y_0 су оптимална решења за проблем максимума и проблем минимума редом.

Последица 3.3. *Ако функција циља f проблема (3.5) није ограничена одозго, онда проблем (3.6) нема допустивих решења. Слично, ако функција циља g проблема (3.6) није ограничена одоздо, проблем (3.5) нема допустивих решења.*

Теорема 3.2. ***(Теорема о јакој дуалности)*** *Нека било који од проблема*

$$\max \quad f = cx$$

при условима

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\min \quad g = b^T y$$

при условима

$$\begin{cases} A^T y \geq c^T \\ y \geq 0. \end{cases}$$

има оптимално решење. Тада и други проблем има оптимално решење и отималне вредности функција циља f и g су једнаке.

Доказ. Нека проблем максимума има оптимално решење. Дакле, нека постоји x_0 такво да је

$$\begin{cases} Ax_0 \leq b \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$$

и за свако друго допустиво решење x важи

$$c \cdot x \leq c \cdot x_0.$$

Решење проблема типа минимума може се одредити применом симплекс методе на проблем типа максимума. Прво треба записати проблем типа максимума у стандардном облику додавањем m изравнавајућих промењљивих x_j, $j = n+1, \dots, n+m$, и множењем функције циља са (-1). Добија се проблем

$$\begin{aligned} &\min \quad -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n \\ &\text{при условима} \\ &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Нека су константе b_i, $i = 1, \dots, m$ ненегативне. У овом случају, проблем (3.7) је у канонском облику са базисним промењљивим $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, придружено базисно решење је допустиво, па се може применити симплекс метода.
На основу Теореме 2.5. знамо да постоји коначан низ корака за одређивање оптималног решења проблема (3.7). Нека је почетна симплекс таблица дата у Табели 3.1.

Табела 3.1: Почетна симплекс таблица проблема у стандардном облику

Почетна симплекс таблица							
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	b
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	b_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	$\cdots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	1	b_m
$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	$-c_{n+1}$	$\cdots$	$-c_{n+m}$	0

и нека је оптимална симплекс таблица дата у Табели 3.2.

Табела 3.2: Оптимална симплекс таблица проблема у стандардном облику

Оптимална симплекс таблица							
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	b
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
r_1	r_2	$\cdots$	r_n	s_1	$\cdots$	s_m	$c \cdot x_0$

Из оптималне таблице се добија да је $r_j \geq 0$ и $s_i \geq 0$ за $j = i, \dots, n, i = 1, \dots, m$, а оптимална вредност је $-f = -c \cdot x_0$.
Нека је $y_0 = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T$. Треба показати

1. $y_0 \geq 0$,
2. $A^T y_0 \geq c^T$,
3. $b^T y_0 \geq c x_0$.

На основу оптималне симплекс таблице важи $y_0 \geq 0$. Из оптималне симплекс таблице добија се

$$c \cdot x_0 + (-f) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n + s_1 x_{n+1} + \cdots + s_m x_{n+m}.$$

Последња једначина представља резултат свих корака симплекс методе примењених на почетну функцију циља

$$0 + (-f) = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n.$$

У сваком кораку нека линеарна комбинација ограничења је додата претходној једначини. Дакле, постоји m константи t_i, $i = 1, \dots, m$ таквих да $(m+1)$-на једначина

$$\begin{aligned}
&t_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1}) = t_1 b_1 \\
&t_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2}) = t_2 b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
&t_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m}) = t_m b_m \\
&-c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n = -f
\end{aligned}$$

у збиру дају једначину

$$c \cdot x_0 + (-f) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n + s_1 x_{n+1} + \cdots + s_m x_{n+m}.$$

Поређењем коефицијената изравнавајућих променљивих, добија се да је $s_i = t_i$, за $i = 1, \dots, m$. Поређењем коефицијената уз променљиву x_1 добија се,

$$r_1 = t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \cdots + t_m a_{m1} - c_1 \geq 0,$$

одакле се због $s_i = t_i, i = 1, \dots, m$ добија да је

$$s_1 a_{11} + s_2 a_{21} + \cdots + s_m a_{m1} \geq c_1.$$

Слично, поређењем коефицијената уз промењљиву x_j за било које $j = 1, \dots, n$ добија се,

$$r_j = t_1 a_{1j} + t_2 a_{2j} + \cdots + t_m a_{mj} - c_j \geq 0,$$

одакле се због $s_i = t_i, i = 1, \dots, m$ добија да је

$$s_1 a_{1j} + s_2 a_{2j} + \cdots + s_m a_{mj} \geq c_j.$$

Одавде се добија

$$A^T y_0 \geq c^T.$$

С друге стране, посматрањем коефицијената b_i добија се,

$$s_1 b_1 + s_2 b_2 + \cdots + s_m b_m = c \cdot x_0,$$

одакле се добија да је

$$b^T y_0 = c x_0.$$

Пошто је, $y_0 \geq 0$ и $A^T y_0 \geq c^T$ тачка y_0 је допустива за проблем минимума. На основу Последице 3.2 вредности функција циља f i g у тачкама x_0 и y_0, редом, су једнаке. Нека проблем минимума има оптимално решење. Проблем се може трансформисати у проблем типа максимума. Применом већ доказаног дела, добија се тврђење теореме. □

Лема 3.1. *Ако проблеми типа максимума* (3.1) *и типа минимума* (3.2) *имају допустива решења, онда оба проблема имају оптимална решења и њихове оптималне вредности су једнаке.*

Доказ. Како оба проблема имају допустива решења, на основу Теореме 3.1, следи да је функција циља f ограничена одозго, а функција циља g одоздо. Према Последици 2.3, оба проблема имају оптималне вредности и према Теореми 3.2 ове оптималне вредности су једнаке. □

Постоје следеће четири могућности за решења прималног проблема (типа максимума) и дуалног проблема (типа минимума).

1. Оба проблема имају допустива решења.

2. Фунцкија циља f је неограничена одозго и проблем типа минимума нема допустивих решења.

3. Фунцкија циља g је неограничена одоздо и проблем типа максимума нема допустивих решења.

4. Оба проблема немају допустивих решења.

3.3 Услови комплементарности

Теорема 3.3. ***(Услови комплементарности)*** *Нека је* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ *допустиво решење прималног проблема* (3.5) *и* $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^T$ *допустиво решење за његов дуални проблем* (3.6). *Тада су* x^* *и* y^* *оптимална решења ових проблема редом ако и само ако*

1. *за свако* i, $i = 1, \ldots, m$ *или је изравнавајућа променљива из* i*-тог ограничења проблема* (3.5) *једнака*
$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = 0,$$
или је
$$y_i^* = 0,$$

2. *за свако* j, $j = 1, \ldots, n$ *или је изравнавајућа променљива из* j*-тог ограничења проблема* (3.6) *једнака*
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j^T = 0,$$
или је
$$x_j^* = 0.$$

Доказ.
($\Leftarrow$) Према Последици 3.1, за допустиво решење x^* за проблем типа максимума (3.5) и допустиво решење y^* за проблем типа минимума (3.6) важи
$$b^T y^* - cx^* = (A^T y^* - c^T)^T x^* + (b - Ax^*)^T y^*.$$
Ако x^* и y^* задовољавају претпоставке теореме, онда за свако i, $i = 1, \ldots, m$ важи
$$y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0,$$
односно, у матричном облику
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0.$$
Слично, се добија
$$(A^T y^* - c^T)^T x^* = 0.$$
Из претходне две једнакости следи,
$$b^T y^* = cx^*.$$
Према Последици 3.2, x^* и y^* су оптимална решења за проблеме (3.5) и (3.6) редом.
($\Rightarrow$) Ако су x^* и y^* оптимална решења за проблеме (3.5) и (3.6) редом, онда је
$$0 = b^T y^* - cx^* = (A^T y^* - c^T)^T x^* + (b - Ax^*)^T y^*. \tag{3.8}$$
Међутим, због оптималности решења важи $x^* \geq 0$ и $y^* \geq 0$. Да би једнакост (3.8) била задовољена мора да важи
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \text{ и } (A^T y^* - c^T)^T x^* = 0.$$
односно, допустива решења x^* и y^* задовољавају услове теореме. □

3.4 Дуална симплекс метода

Нека је дат проблем линеарног програмирања у облику

$$\max \quad f + f_0 = cx$$
$$\text{при условима}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

или таблично, после увођења m изравнавајућих промењивих $\bar{x}$ (Табела 3.3).

Табела 3.3: Симплекс таблица прималног проблема

Симплекс таблица		
x	$\bar{x}$	
A	I	b
c	0	$f + f_0$

Њему одговарајући дуални проблем гласи,

$$\min \quad f_0 - g = b^T y$$
$$\text{при условима}$$
$$\begin{cases} A^T y \geq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

или таблично, после увођења n изравнавајућих промењивих $\bar{y}$ (Табела 3.4),

Табела 3.4: Симплекс таблица дуалног проблема

Симплекс таблица		
y	$\bar{y}$	
$-A^T$	I	$-c^T$
b^T	0	$-f_0 - g$

Применом операције пивотирања на Табелу 3.5

Табела 3.5: Симплекс таблица прималног проблема у развијеном облику

Симплекс таблица							
$\cdots$	$\bar{x}_j$	$\cdots$	x_α	$\cdots$	x_j	$\cdots$	b
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	1	$\cdots$	$a_{i\alpha}$	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	b_i
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{\beta\alpha}$	$\cdots$	$a_{\beta j}$	$\cdots$	b_β
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	c_α	$\cdots$	c_j	$\cdots$	$f + f_0$

са избором произвољног пивот елемента $a_{ij} \neq 0$ који се налази на месту (i, j) матрице A, j-та колона таблице се трансформише у јединичну колону, док се јединична колона са јединицом у i-тој врсти трансформише у колону која није јединична.

Пивотирањем у Табели 3.6,

Табела 3.6: Симплекс таблица дуалног проблема у развијеном облику

Сиимплекс таблица							
$\cdots$	$\bar{y}_i$	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_β	$\cdots$	b
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	$-a_{\alpha i}$	$\cdots$	$-a_{\alpha\beta}$	$\cdots$	$-c_\alpha$
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	1	$\cdots$	$-a_{ji}$	$\cdots$	$-a_{j\beta}$	$\cdots$	$-c_j$
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_β	$\cdots$	$-f_0 - g$

са избором произвољног пивот елемента $-a_{ji}$ који се налази на месту (j, i) матрице $-A^T$, i-та колона таблице се трансформише у јединичну колону, док се јединична колона са јединицом у j-тој врсти трансформише у колону која није јединична.

Након пивотирања, заменом места одговарајуће колоне и јединичне колоне добија се Табела 3.7

Табела 3.7: Симплекс таблица прималног проблема након пивотирања

Симплекс таблица							
$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_α	$\cdots$	$\bar{x}_j$	$\cdots$	b
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{a_{i\alpha}}{a_{ij}}$	$\cdots$	$\frac{1}{a_{ij}}$	$\cdots$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{\beta\alpha} - \frac{a_{\beta j}a_{i\alpha}}{a_{ij}}$	$\cdots$	$-\frac{a_{\beta j}}{a_{ij}}$	$\cdots$	$b_\beta - \frac{a_{\beta j}b_i}{a_{ij}}$
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	$c_\alpha - \frac{c_j a_{i\alpha}}{a_{ij}}$	$\cdots$	$-\frac{c_j}{a_{ij}}$	$\cdots$	$f + f_0 - \frac{c_j b_i}{a_{ij}}$

односно Табела 3.8.

Табела 3.8: Симплекс таблица дуалног проблема након пивотирања

Симплекс таблица							
$\cdots$	y_i	$\cdots$	$\bar{y}_i$	$\cdots$	y_β	$\cdots$	b
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{a_{\alpha i}}{a_{ji}}$	$\cdots$	$-a_{\alpha\beta} + \frac{a_{\alpha i}a_{j\beta}}{a_{ji}}$	$\cdots$	$-c_\alpha + \frac{c_j a_{\alpha i}}{a_{ji}}$
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	1	$\cdots$	$-\frac{1}{a_{ji}}$	$\cdots$	$\frac{a_{j\beta}}{a_{ji}}$	$\cdots$	$\frac{c_j}{a_{ji}}$
$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{b_i}{a_{ji}}$	$\cdots$	$b_\beta + \frac{b_i a_{j\beta}}{a_{ji}}$	$\cdots$	$-f_0 - g + \frac{c_j b_i}{a_{ji}}$

Из Таблица 3.7 и 3.8 уочава се да таблице остају упарене и након операције пивотирања. Уколико таблица прималног проблема не задовољава услове симплекс методе, али таблица придружена његовом дуалном проблему задовољава, онда се решавањем дуал проблема добија оптимално решење и за примални проблем. Ради чувања упарености таблица, може се модификовати симплекс метода, тако да се може применити и на проблем у канонском облику код кога је $c \geq 0$, али постоји i такво да је $b_i < 0$.

Алгоритам 3.1. ***(Дуална симплекс метода)***
Улаз. *Проблем линеарног програмирања у канонском облику при чему нису све константе $b_i \geq 0$.*
Корак 1. *Ако је $b_i \geq 0$ за све i, минимална вредност функције циља је постигнута (Теорема 2.1.).*

Корак 2. *Ако постоји индекс i_0 такав да је $b_{i_0} < 0$ и $a_{i_0 j} \geq 0$ за све j, систем ограничења нема допустиво решење. У супротном, треба одредити пивот (Теорема 2.3.). Пивот се одређује на следећи начин:*

1. *Пивот елемент се налази у било којој врсти за коју је $b_i < 0$. Уколико има више $b_i < 0$ онда избором пивота у врсти са најмањим b_i може се смањити укупан број корака потребних за завршавање процеса. Нека се пивот налази у врсти i_0.*

2. *Да би се одредила колона где се налази пивот, треба наћи колону j_0 такву да је*
$$\frac{c_{j_0}}{a_{i_0 j_0}} = \max\left\{\frac{c_j}{a_{i_0 j}} : a_{i_0 j} < 0\right\}.$$

Корак 4. *После пивотирања, проблем линеарног програмирања остаје у канонском облику са новим базисно допустивим решењем. Вратити се на корак 1.*

Пример 3.1. *Нека је дат проблем линеарног програмирања*

$$\min \quad f = x + 2y$$

при условима

$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ -2x + y \geq 0 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Одредити оптимално решење и оптималну вредност за дати проблем.

Решење. Након пребацивања проблема у канонски облик, запис проблема постаје:

$$\min \quad f = x + 2y$$

при условима

$$\begin{cases} -x - y + m = -3 \\ 2x - y + n = 0 \\ x, y, m, n \geq 0. \end{cases}$$

Оваквом проблему може се придружити Табела 3.9.

Табела 3.9: Почетна симплекс таблица проблема из Примера 3.1

Почетна симплекс таблица				
x	y	m	n	b
-1	-1	1	0	-3
2	-1	0	1	0
1	2	0	0	f

Сада се може применити алгоритам дуалне симлекс методе.

1. итерација. Пошто је $b_1 = -3 < 0$, потребно је одредити пивот у првој врсти.

$$\frac{c_{j_0}}{a_{1j_0}} = \max\left\{\frac{c_j}{a_{1j}} : a_{1j} < 0\right\} = \max\left\{\frac{1}{-1}, \frac{2}{-1}\right\} = -1.$$

Дакле, пивот је елемент $a_{11} = -1$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 3.10.

Табела 3.10: Симплекс таблица на крају 1. итерације из Примера 3.1

Симплекс таблица 1. итерације				
x	y	m	n	b
1	1	-1	0	3
0	-3	2	1	-6
0	1	1	0	$f-3$

2. итерација. Пошто је $b_2 = -6 < 0$, потребно је одредити пивот у другој врсти.

$$\frac{c_{j_0}}{a_{2j_0}} = \max\left\{\frac{c_j}{a_{2j}} : a_{2j} < 0\right\} = \max\left\{\frac{1}{-3}\right\} = -\frac{1}{3}.$$

Дакле, пивот је елемент $a_{22} = -3$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 3.11.

Табела 3.11: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 3.1

Оптимална симплекс таблица				
x	y	m	n	b
1	0	$-1/3$	$1/3$	1
0	1	$-2/3$	$-1/3$	2
0	0	$5/3$	$1/3$	$f-5$

С обзиром да је $b_i \geq 0$ за све i, последња таблица је и оптимална симплекс таблица. Оптимално решење датог проблема је

$$(x^*, y^*) = (1, 2)\,,$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = 5.$$

Опширније о дуалности у линерном програмирању може се пронаћи у [2], [4], [12], [13].

Глава 4

Анализа осетљивости

Теоријске основе које су изложене у Глави 4 су преузете из [2], [12], [13], [14], а идеја за примере је пронађена у [2]. Приликом решавања проблема из свакодневног живота често се дешава да се улазни подаци математичког модела мењају, те је неопходно проблем решавати изнова. Поставља се питање да ли је могуће искористити знање о оптималном решењу за један скуп улазних података за брже добијање оптималног решења истог проблема ако се неки од података промени. У случају проблема ЛП-а, познавање **анализе осетљивости** омогућава да се из оптималног решења оригиналног проблема утврди како промена параметара проблема ЛП-а утиче на оптимално решење.

Поступак примене анализе осетљивости биће описан кроз осам случајева.
Случај 1. Промена коефицијента у функцији циља,
Случај 2. Промена коефицијента са десне стране ограничења,
Случај 3. Промена коефицијента са леве стране ограничења,
Случај 4. Додавање нове променљиве или активности,
Случај 5. Додавање новог ограничења,
Случај 6. Избацивање променљиве,
Случај 7. Избацивање ограничења,
Случај 8. Замена врсте (или колоне) новом врстом (или колоном).

4.1 Промена коефицијента у функцији циља

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се коефицијент c_i мења у коефицијент $c_i(\Delta c_i) = c_i + \Delta c_i, \Delta c_i \neq 0$. Нека су овако добијеном новом проблему придружене почетна и оптимална симплекс таблица (Слика 4.1).

Почетна симплекс таблица			Оптимална симплекс таблица	
A	b	$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$	$A^*(\Delta c_i)$	$b^*(\Delta c_i)$
$c(\Delta c_i)$	f_0		$c^*(\Delta c_i)$	$f_0^*(\Delta c_i)$

Слика 4.1: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику примењеног на нови проблем

На основу Теореме 2.4 важе услови (2.5). С обзиром да се промена дешава у вектору c почетне симплекс таблице, неће доћи до промене матрице A и вектора b. Пошто је матрица $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$, неће доћи до промене матрице B, а тиме ни до промене матрице B^{-1}, па се могу одредити $A^*(\Delta c_i)$ и $b^*(\Delta c_i)$. На основу Теореме 2.4. добија се

$$A^*(\Delta c_i) = B^{-1}(\Delta c_i)A(\Delta c_i) = B^{-1}A = A^*, \tag{4.1}$$

$$b^*(\Delta c_i) = B^{-1}(\Delta c_i)b(\Delta c_i) = B^{-1}b = b^*. \tag{4.2}$$

Уколико је x_i небазисна промењива у оптималној симплекс таблици (Слика 2.1), неће доћи до промене вектора c_B, па на основу Теореме 2.4. и (4.2) добија се оптимална вредност функције циља која одговара новом проблему

$$f_0^*(\Delta c_i) = f_0 - c_B(\Delta c_i)b^*(\Delta c_i) = f_0 - c_B b^* = f_0^*,$$

при услову да је $c_q^*(\Delta c_i) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$. На основу Теореме 2.4 и (4.1) добија се

$$c^*(\Delta c_i) = c(\Delta c_i) - c_B(\Delta c_i)A^*(\Delta c_i) = c(\Delta c_i) - c_B A^*.$$

Уколико је $e_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ јединични вектор врсте са јединицом на i - том месту, онда је

$$c^*(\Delta c_i) = c(\Delta c_i) - c_B A^* = (c + \Delta c_i e_i) - c_B A^* = (c - c_B A^*) + \Delta c_i e_i = c^* + \Delta c_i e_i. \tag{4.3}$$

Из једнакости (4.3) може се приметити да у вектору $c^*(\Delta c_i)$ једино се мења i-ти елемент. Дакле, уместо услова $c_q^*(\Delta c_i) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$ може се посматрати услов $c_i^*(\Delta c_i) \geq 0$, при чему је

$$c_i^*(\Delta c_i) = c_i(\Delta c_i) - c_B A^{(i)*}.$$

Из (4.2) може се приметити да је $b_p^*(\Delta c_i) \geq 0$ за све $p = 1, \ldots, m$. Уколико је $c_i^*(\Delta c_i) \geq 0$, оптимално решење полазног проблема је истовремено и оптимално решење новог проблема, а уколико је $c_i^*(\Delta c_i) < 0$, добија се таблица из које се не може прочитати оптимално решење, али испуњава све услове како би се могла применити симплекс метода. Након примене још корака алгоритма симплекс методе, добиће се ново оптимално решење.

Уколико је x_i базисна промењива у оптималној симплекс таблици (Слика 2.1), доћи ће до промене вектора c_B, па на основу Теореме 2.4 и (4.2) добија се оптимална вредност функције циља која одговара новом проблему

$$f_0^*(\Delta c_i) = f_0 - c_B(\Delta c_i)b^*(\Delta c_i) = f_0 - c_B(\Delta c_i)b^*,$$

при услову да је $c_q^*(\Delta c_i) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$. Може се закључити да ће се оптимално решење променити. На основу Теореме 2.4 и (4.1) добија се

$$c^*(\Delta c_i) = c(\Delta c_i) - c_B(\Delta c_i)A^*(\Delta c_i).$$

Из (4.2) може се приметити да је $b_p^*(\Delta c_i) \geq 0$ за све $p = 1, \ldots, m$. Из услова $c_q^*(\Delta c_i) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$, добија се систем линеарних неједначина по непознатој Δc_i. Решавањем система добија се интервал за Δc_i. За фиксирано $\Delta c_i = \lambda$ из добијеног интервала, може се израчунати нова оптимална вредност

$$f_0^*(\lambda) = f_0 - c_B(\lambda)b^* = f_0 - (c_B + \lambda e_j)b^* = f_0 - c_B b^* - \lambda e_j b^* = f_0^* - \lambda b_j^*,$$

при чему је $e_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ јединични вектор врсте са јединицом на j-том месту.

Уколико је $c_q^*(\Delta c_i) < 0$ за неко $q = 1, \ldots, n$, добија се симплекс таблица из које се не може прочитати оптимално решење, али испуњава све услове како би се могла применити симплекс метода. Након примене још корака алгоритма симплекс методе, добиће се ново оптимално решење.

Уколико је $\Delta c_i = 1$ добија се нова оптимална вредност

$$f_0^*(1) = f_0^* - 1 \cdot b_i^* = f_0^* - b_j^*.$$

Ако је $c_i(1) = c_i + 1$, тада ће се оптимална вредност смањити за b_j^*, при чему је j број врсте у којој се налази јединица која одговара базисној променљивој x_i у оптималној симплекс таблици почетног проблема.

Пример 4.1. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да промени цену чаша за шампањац. Одредити интервал за ту цену тако да добит овог предузећа остане непромењена.*

Решење. Променом цена чаша за шампањац са 600 на $600 + \Delta c_3$, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - (600 + \Delta c_3)x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 2.1 добијена је почетна и оптимална симплекс таблица проблема пре промене цена чаша за шампањац као и оптимално решење за такав проблем. Из почетне симплекс таблице једноставно се може уочити

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$b = \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \\ 8 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$c = \begin{pmatrix} -500 & -450 & -600 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

као и вредност

$$f_0 = 0, \tag{4.7}$$

док се из оптималне симплекс таблице може уочити

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/7 & -1/7 & 3/35 & 0 \\ 0 & 0 & -11/7 & -2/7 & 1/14 & 1 \\ 1 & 0 & 11/7 & 2/7 & -1/14 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

$$b^* = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 11/7 \\ 45/7 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

$$c^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400/7 & 550/7 & 20/7 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

као и оптимална вредност

$$f_0^* = \frac{36000}{7}. \tag{4.11}$$

С обзиром да чашама за шампањац одговара променљива x_3, да би се одредио тражени интервал потребно је одредити $c^*(\Delta c_3)$:

$$c^*(\Delta c_3) = c(\Delta c_3) - c_B(\Delta c_3) A^*(\Delta c_3).$$

Пошто се промена дешава у вектору c, важи

$$A^*(\Delta c_3) = A^*,$$

$$b^*(\Delta c_3) = b^*,$$

$$c(\Delta c_3) = \begin{pmatrix} -500 & -450 & -600 - \Delta c_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Променљива x_3 је небазисна, што значи да важи

$$c_B(\Delta c_3) = \begin{pmatrix} -450 & 0 & -500 \end{pmatrix}.$$

Добија се

$$c^*(\Delta c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400/7 - \Delta c_3 & 550/7 & 20/7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta c_3) = f_0 - c_B(\Delta c_3) b^*(\Delta c_3) = \frac{36000}{7}.$$

Да би претходна вредност заиста била оптимална вредност проблема мора да буде испуњен услов $c_q^*(\Delta c_3) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 6$. Претходни услов ће бити испуњен уколико је

$$\Delta c_3 \leq \frac{400}{7}.$$

Трежени интервал за цену $c_3^{novo} = 600 + \Delta c_3$ је

$$c_3^{novo} \in \left(-\infty, \frac{4600}{7}\right].$$

До истог резултата се могло доћи и на други начин.

$$c_3^*(\Delta c_3) = c_3(\Delta c_3) - c_B(\Delta c_3) A^{(3)*}$$

$$c_3^*(\Delta c_3) = -600 - \Delta c_3 - \begin{pmatrix} -450 & 0 & -500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/7 \\ -11/7 \\ 11/7 \end{pmatrix}$$

$$c_3^*(\Delta c_3) = \frac{400}{7} - \Delta c_3$$

Из услова $c_3^*(\Delta c_3) \geq 0$ добија се

$$\Delta c_3 \leq \frac{400}{7},$$

односно

$$c_3^{novo} \in \left(-\infty, \frac{4600}{7}\right].$$

Пример 4.2. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да повећа цену чаша за шампањац за* 1$. *Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Променом цена чаша за шампањац са 600 на 700 добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 700x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 4.1, решење овог проблема се добија за $\Delta c_3 = 100$, што значи да ће се добит овог предузећа променити. Једноставно се проверава да важи

$$c^*(\Delta c_3) = c^*(100) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -300/7 & 550/7 & 20/7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta c_3) = f_0^*(100) = \frac{36000}{7}.$$

Дакле, сада није испуњен услов $c_q^*(\Delta c_3) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 6$ и може се наставити са применом алгоритма симплекс методе на Табелу 4.1.

Табела 4.1: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.2

Ажурирана симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	$45/7$
0	0	$-300/7$	$550/7$	$20/7$	0	$-f+36000/7$

Након примене алгоритма симплекс методе добија се Табела 4.2.

Табела 4.2: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.2

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
$2/11$	1	0	$-1/11$	$4/45$	0	$60/11$
1	0	0	0	0	1	8
$7/11$	0	1	$2/11$	$-1/22$	0	$45/11$
$300/11$	0	0	$950/11$	$10/11$	0	$-f+58500/11$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(0, \frac{60}{11}, \frac{45}{11}, 0, 0, 8\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = \frac{58500}{11}.$$

Ова примена ће утицати на повећање добити овог предузећа.

Пример 4.3. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да промени цену чаша за сок. Одредити интервал за ту цену тако да добит овог предузећа остане непромењена.*

Решење. Променом цене чаша за сок са 500 на $500 + \Delta c_1$, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -(500+\Delta c_1)x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 2.1 добијена је почетна и оптимална симплекс таблица проблема пре промене цена чаша за шампањац као и оптимално решење за такав проблем. Из почетне симплекс таблице се једноставно може уочити (4.4), (4.5), (4.6), као и вредност (4.7), док се из оптималне симплекс таблице може уочити (4.8), (4.9), (4.10), као и оптимална вредност (4.11). С обзиром да чашама за сок одговара променљива x_1, да би се одредио тражени интервал потребно је одредити $c^*(\Delta c_1)$.

$$c^*(\Delta c_1) = c(\Delta c_1) - c_B(\Delta c_1)A^*(\Delta c_1).$$

Пошто се промена дешава у вектору c, важи

$$A^*(\Delta c_1) = A^*,$$

$$b^*(\Delta c_1) = b^*,$$

$$c^*(\Delta c_1) = \begin{pmatrix} -500 - \Delta c_1 & -450 & -600 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Променљива x_1 је базисна, што значи да важи

$$c_B(\Delta c_1) = \begin{pmatrix} -450 & 0 & -500 - \Delta c_1 \end{pmatrix}.$$

Добија се

$$c^*(\Delta c_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11\Delta c_1/7 + 400/7 & 2\Delta c_1/7 + 550/7 & 20/7 - \Delta c_1/14 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta c_1) = f_0 - c_B(\Delta c_1)b^*(\Delta c_1) = \frac{36000}{7} + \frac{45}{7}\Delta c_1.$$

Да би претходна вредност заиста била оптимална вредност проблема, мора бити испуњен услов $c_q^*(\Delta c_1) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 6$. Претходни услов ће бити испуњен уколико су задовољени услови

$$\begin{cases} \Delta c_1 \geq -\dfrac{400}{11} \\ \Delta c_1 \geq -275 \\ \Delta c_1 \leq 40, \end{cases}$$

односно

$$\Delta c_1 \in \left[-\frac{400}{11}, 40\right].$$

Може се приметити да ће се, за избор Δc_1 из претходног интервала, добит овог предузећа променити за

$$\frac{45}{7}\Delta c_1,$$

па тражени интервал за који се f^* неће променити не постоји.
Међутим, за цену $c_1^{novo} = 500 + \Delta c_1$, за коју важи

$$c_1^{novo} \in \left[\frac{5100}{11}, 540\right],$$

оптимална вредност ће се променити за $\dfrac{45}{7}\Delta c_1$.

Пример 4.4. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да повећа цену чаша за сок за* 0.5$. *Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Променом цене чаша за сок са 500 на 550, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -550x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 4.3, решење овог проблема се добија за $\Delta c_1 = 50$, што значи да ће се добит овог предузећа променити. Једноставно се проверава да важи

$$c^*(\Delta c_1) = c^*(50) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 950/7 & 650/7 & -5/7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta c_1) = f_0^*(50) = \frac{38250}{7}.$$

Дакле, сада није испуњен услов $c_q^*(\Delta c_1) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 6$ и може се наставити са применом алгоритма симплекс методе на Табелу 4.3.

Табела 4.3: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.4

Ажурирана симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	$45/7$
0	0	$950/7$	$650/7$	$-5/7$	0	$-f + 38250/7$

Након примене алгоритма симплекс методе добија се Табела 4.4.

Табела 4.4: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.4

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$8/5$	$1/5$	0	$-6/5$	$12/5$
0	0	-22	-4	1	14	22
1	0	0	0	0	1	8
0	0	120	90	0	10	$-f + 5480$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(8, \frac{12}{5}, 0, 0, 22, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = 5480.$$

Ова промена ће утицати на повећање добити овог предузећа.

4.2 Промена коефицијента са десне стране

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се коефицијент b_i мења у коефицијент $b_i(\Delta b_i) = b_i + \Delta b_i, \Delta b_i \neq 0$. Нека су овако добијеном новом проблему придружене почетна и оптимална симплекс таблица (Слика 4.2).

Почетна симплекс таблица			Оптимална симплекс таблица	
A	$b(\Delta b_i)$	$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$	$A^*(\Delta b_i)$	$b^*(\Delta b_i)$
c	f_0		$c^*(\Delta b_i)$	$f_0^*(\Delta b_i)$

Слика 4.2: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику примењеног на нови проблем

На основу Теореме 2.4 важе услови (2.5). С обзиром да се промена дешава у вектору b почетне симплекс таблице (Слика 2.1), неће доћи до промене матрице A и вектора c. Пошто неће доћи до промене матрице A неће доћи ни до промене матрице B, а тиме ни до промене матрице B^{-1}. На основу Теореме 2.4 добија се

$$A^*(\Delta b_i) = B^{-1}(\Delta b_i)A(\Delta b_i) = B^{-1}A = A^*,$$

$$c^*(\Delta b_i) = c(\Delta b_i) - c_B(\Delta b_i)A^*(\Delta b_i) = c - c_B A^* = c^*,$$

$$b^*(\Delta b_i) = B^{-1}(\Delta b_i)b(\Delta b_i) = B^{-1}b(\Delta b_i).$$

Уколико је $b_p^*(\Delta b_i) \geq 0$ за све $p = 1, \ldots, m$, онда је оптимална вредност функције циља која одговара новом проблему

$$f_0^*(\Delta b_i) = f_0 - c_B(\Delta b_i)b^*(\Delta b_i) = f_0 - c_B b^*(\Delta b_i).$$

Уколико је $b_p^*(\lambda) < 0$ за неко $p = 1, \ldots, m$ и неко фиксирано $\Delta b_i = \lambda$, онда је десна страна негативна за неко $b_i^*(\lambda)$. С обзиром, да је $c^*(\Delta b_i) = c^*$ и $c_q^* \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$, може се применити алгоритам дуалне симплекс методе, чиме се добија ново оптимално решење.

Пример 4.5. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да промени број сати рада у току једне недеље. Одредити интервал за број сати рада у току једне седмице тако да добит овог предузећа остане непромењена.*

Решење. Променом броја сати рада у току једне седмице са 60 на $60 + \Delta b_1$, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 + \Delta b_1 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 2.1 добијена је почетна и оптимална симплекс таблица проблема пре промене радних сати током једне седмице као и оптимално решење за такав проблем. Из почетне симплекс таблице се једноставно може уочити (4.4), (4.5), (4.6), као и вредност (4.7), док се из оптималне симплекс таблице може уочити (4.8), (4.9), (4.10), као и оптимална вредност (4.11).

С обзиром да броју радних сати у току једне седмице одговара вредност b_1, потребно је одредити $b^*(\Delta b_1)$:

$$b^*(\Delta b_1) = B^{-1}b(\Delta b_1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 20 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 60 + \Delta b_1 \\ 150 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30/7 - \Delta b_1/7 \\ 11/7 - 2\Delta b_1/7 \\ 45/7 + 2\Delta b_1/7 \end{pmatrix}.$$

Пошто се промена дешава у вектору b, важи

$$A^*(\Delta b_1) = A^*,$$

$$c^*(\Delta b_1) = c^*,$$

$$c_B(\Delta b_1) = c_B = \begin{pmatrix} -450 & 0 & -500 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta b_1) = f_0 - c_B b^*(\Delta b_1) = \frac{36000}{7} + \frac{550\Delta b_1}{7}.$$

Да би претходна вредност заиста била оптимална вредност проблема, мора да буде испуњен услов $b_p^*(\Delta b_1) \geq 0$ за све $p = 1, \dots, m$. Претходни услов ће бити испуњен уколико су задовољени услови

$$\begin{cases} \Delta b_1 \leq 30 \\ \Delta b_1 \leq \dfrac{11}{2} \\ \Delta b_1 \geq -\dfrac{45}{2}, \end{cases}$$

односно

$$\Delta b_1 \in \left[-\frac{45}{2}, \frac{11}{2}\right].$$

Може се приметити да ће се, за избор Δb_1 из претходног интервала, добит овог предузећа променити за

$$\frac{550}{7}\Delta b_1,$$

па тражени интервал не постоји.
Међутим, за број сати рада у току једне седмице $b_1^{novo} = 60 + \Delta b_1$, за који важи

$$b_1^{novo} \in \left[\frac{75}{2}, \frac{131}{2}\right],$$

оптимална вредност ће се променити за $\dfrac{550}{7}\Delta b_1$.

Пример 4.6. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да повећа број сати рада у току једне седмице за $10h$. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Променом броја сати рада у току једне седмице са 60 на 70, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 70 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 4.5, решење овог проблема се добија за $\Delta b_1 = 10$, што значи да ће се добит овог предузећа променити. Једноставно се проверава да важи

$$b^*(\Delta b_1) = b^*(10) = \begin{pmatrix} 20/7 \\ -9/7 \\ 65/7 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta b_1) = f_0^*(10) = \frac{41500}{7}.$$

Дакле, сада није испуњен услов $b_p^*(\Delta b_1) \geq 0$ за све $p = 1, \ldots, m$ и може се наставити са применом алгоритма дуалне симплекс методе на Табелу 4.5.

Табела 4.5: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.6

Ажурирана симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$20/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	$-9/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	$65/7$
0	0	$400/7$	$550/7$	$20/7$	0	$-f + 41500/7$

Након примене алгоритма симплекс методе добија се Табела 4.6.

Табела 4.6: Оптимална симплекс таблица

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	0	$-1/11$	$4/55$	$-2/11$	$34/11$
0	0	1	$2/11$	$-1/22$	$-7/11$	$9/11$
1	0	0	0	0	1	8
0	0	0	$750/11$	$60/11$	$400/11$	$-f+64700/11$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(8, \frac{34}{11}, \frac{9}{11}, 0, 0, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = \frac{64700}{11}.$$

Ова промена ће утицати на повећање добити овог предузећа.

4.3 Промена коефицијента са леве стране

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се коефицијент a_{ij} мења у кофицијент $a_{ij}(\Delta a_{ij}) = a_{ij} + \Delta a_{ij}, \Delta a_{ij} \neq 0$. Нека су овако добијеном новом проблему придружене почетна и оптимална симплекс таблица (Слика 4.3).

Почетна симплекс таблица	
$A(\Delta a_{ij})$	b
c	f_0

$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$

Оптимална симплекс таблица	
$A^*(\Delta a_{ij})$	$b^*(\Delta a_{ij})$
$c^*(\Delta a_{ij})$	$f_0^*(\Delta a_{ij})$

Слика 4.3: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику примењеног на нови проблем

На основу Теореме 2.4 важе услови (2.5). С обзиром да се промена дешава у матрици A почетне симлекс таблице, неће доћи до промене вектора c и b. Пошто је матрица $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$, долази до промене матрице B, а тиме и до промене матрице B^{-1}. На основу Теореме 2.4. добија се

$$A^*(\Delta a_{ij}) = B^{-1}(\Delta a_{ij}) A(\Delta a_{ij}),$$

$$c^*(\Delta a_{ij}) = c(\Delta a_{ij}) - c_B(\Delta a_{ij})A^*(\Delta a_{ij}) = c - c_B A^*(\Delta a_{ij}),$$
$$b^*(\Delta a_{ij}) = B^{-1}(\Delta a_{ij})b(\Delta a_{ij}) = B^{-1}(\Delta a_{ij})b.$$

Уколико је $c_q^*(\Delta a_{ij}) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$, оптимално решење је

$$f_0^* = f_0 - c_B(\Delta a_{ij})b^*(\Delta a_{ij}) = f_0 - c_B b^*(\Delta a_{ij}).$$

Уколико је $c_q^*(\Delta a_{ij}) < 0$ за неко $q = 1, \ldots, n$ или $b_p^*(\Delta a_{ij}) < 0$ за неко $p = 1, \ldots, m$, онда применом одговарајуће симплекс методе добија се ново оптимално решење. Уколико је x_i небазисна променљива онда матрица B, односно матрица B^{-1} неће зависити од промене коефицијента a_{ij}.

Пример 4.7. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да промени кутију за паковање* 100 *чаша за шампањац. Одредити интервал за величину тих кутија тако да добит овог предузећа остане непромењена.*

Решење. Променом величине кутија чаша за шампањац са 10 на $10 + \Delta a_{23}$, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + (10 + \Delta a_{23})x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 2.1 добијена је почетна и оптимална симплекс таблица проблема пре промене кутија за паковање чаша за шампањац као и оптимално решење за такав проблем. Из почетне симплекс таблице се једноставно може уочити (4.4), (4.5), (4.6), као и вредност (4.7), док се из оптималне симплекс таблице може уочити (4.8), (4.9), (4.10), као и оптимална вредност (4.11). С обзиром да величини кутија за чаше за шампањац одговара вредност a_{23}, потребно је одредити $A^*(\Delta a_{23})$, $b^*(\Delta a_{23})$ и $c^*(\Delta a_{23})$.

$$A^*(\Delta a_{23}) = B^{-1}(\Delta a_{23})A(\Delta a_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/7 + 3\Delta a_{23}/35 & -1/7 & 3/35 & 0 \\ 0 & 0 & -11/7 + \Delta a_{23}/14 & -2/7 & 1/14 & 1 \\ 1 & 0 & 11/7 - \Delta a_{23}/14 & 2/7 & -1/14 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^*(\Delta a_{23}) = B^{-1}(\Delta a_{23})b = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 11/7 \\ 45/7 \end{pmatrix},$$

$$c_B(\Delta a_{23}) = c_B = \begin{pmatrix} -450 & 0 & -500 \end{pmatrix},$$

$$c^*(\Delta a_{23}) = c - c_B A^*(\Delta a_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400/7 + 20\Delta a_{23}/7 & 550/7 & 20/7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta a_{23}) = f_0 - c_B b^*(\Delta a_{23}) = \frac{36000}{7}.$$

Да би претходна вредност заиста била оптимална вредност проблема мора да буде испуњен услов $c_q^*(\Delta a_{23}) \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$. Претходни услов ће бити испуњен уколико је

$$\Delta a_{23} \geq -20.$$

Тражени интервал за величину кутије $a_{23}^{novo} = 10 + \Delta a_{23}$ је

$$a_{23}^{novo} \in [-10, +\infty).$$

Међутим, како величина кутије не може бити негативан број и не може бити већа од капацитета складишта, онда било каква промена величине кутије за чаше за сок неће утицати на промену добити овог предузећа.

Пример 4.8. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да промени кутију за паковање* 100 *чаша за сок. Одредити интервал за величину тих кутија тако да добит овог предузећа остане непромењена.*

Решење. Променом величине кутија чаша за сок са 10 на $10 + \Delta a_{21}$, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ (10 + \Delta a_{21})x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 2.1 добијена је почетна и оптимална симплекс таблица проблема пре промене кутија за паковање чаша за сок као и оптимално решење за такав проблем. Из почетне симплекс таблице се једноставно може уочити (4.4), (4.5), (4.6), као и вредност (4.7), док се из оптималне симплекс таблице може уочити (4.8), (4.9), (4.10), као и оптимална вредност (4.11). С обзиром да величини кутија за чаше за сок одговара вредност a_{21}, потребно је одредити $A^*(\Delta a_{21})$, $b^*(\Delta a_{21})$ и $c^*(\Delta a_{21})$.

$$A^*(\Delta a_{21}) = B^{-1}(\Delta a_{21})A(\Delta a_{21}),$$

$$A^*(\Delta a_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{8\Delta a_{21} + 20}{5(14 - \Delta a_{21})} & -\frac{x + 10}{5(14 - \Delta a_{21})} & \frac{6}{5(14 - \Delta a_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{14 - \Delta a_{21}} & -\frac{4}{14 - \Delta a_{21}} & \frac{1}{14 - \Delta a_{21}} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{22}{14 - \Delta a_{21}} & \frac{4}{14 - \Delta a_{21}} & -\frac{1}{14 - \Delta a_{21}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^*(\Delta a_{21}) = B^{-1}(\Delta a_{21})b = \begin{pmatrix} \frac{60 - 12\Delta a_{21}}{14 - \Delta a_{21}} \\ \frac{22 - 8\Delta a_{21}}{14 - \Delta a_{21}} \\ \frac{90}{14 - \Delta a_{21}} \end{pmatrix},$$

$$c_B(\Delta a_{21}) = c_B = \begin{pmatrix} -450 & 0 & -500 \end{pmatrix},$$

$$c^*(\Delta a_{21}) = c - c_B A^*(\Delta a_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{800-120\Delta a_{21}}{14-\Delta a_{21}} & \dfrac{1100-90\Delta a_{21}}{14-\Delta a_{21}} & \dfrac{40}{14-\Delta a_{21}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta a_{21}) = f_0 - c_B b^*(\Delta a_{21}) = \frac{72000-5400\Delta a_{21}}{14-\Delta a_{21}}.$$

Да би претходна вредност заиста била оптимална вредност проблема мора да буде испуњен услов $c_q^*(\Delta a_{21}) \geq 0$ за све $q = 1, \dots, n$ и $b_p^*(\Delta a_{21}) \geq 0$ за све $p = 1, \dots, m$. Претходни услов ће бити испуњен уколико је

$$\Delta a_{21} \in \left(-\infty, \frac{11}{4}\right].$$

За избор Δa_{21} из претходног интервала добит овог предузећа ће се променити за

$$-\frac{1800\Delta a_{21}}{7(14-\Delta a_{21})},$$

па тражени интервал не постоји.
Међутим, за величину кутије за чаше за сок $a_{21}^{novo} = 10 + \Delta a_{21}$ за коју важи

$$a_{21}^{novo} \in \left(-\infty, \frac{51}{4}\right]$$

оптимална вредност ће се променити за $-\dfrac{1800\Delta a_{21}}{7(14-\Delta a_{21})}$.

Пример 4.9. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да промени кутије за паковање* 100 *чаше за сок. Нова кутија заузима* $10m^3$ *више од претходне. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Променом величине кутија чаша за сок са 10 на 20, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 20x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 4.8, решење овог проблема се добија за $\Delta a_{21} = 10$, што значи да ће се добит овог предузећа променити. Може се проверити да важи

$$A^*(\Delta a_{21}) = A^*(10) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & -1 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & -11/2 & -1 & 1/4 & 1 \\ 1 & 0 & 11/2 & 1 & -1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^*(\Delta a_{21}) = b^*(10) = \begin{pmatrix} -15 \\ -29/2 \\ 45/2 \end{pmatrix},$$

$$c^*(\Delta a_{21}) = c^*(10) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -100 & 50 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_0^*(\Delta a_{21}) = f_0^*(10) = 4500.$$

Дакле, сада није испуњен услов $b_p^*(\Delta a_{21}) \geq 0$ за неко $p = 1, \ldots, m$ као ни услов $c_q^*(\Delta a_{21}) \geq 0$ за неко $q = 1, \ldots, n$ и може се наставити са применом алгоритма дуалне симплекс методе на Табелу 4.7.

Табела 4.7: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.9

Ажурирана симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	-5	-1	$3/10$	0	-15
0	0	$-11/2$	-1	$1/4$	1	$-29/2$
1	0	$11/2$	1	$-1/4$	0	$45/2$
0	0	-100	50	10	0	$-f + 4500$

Након примене алгоритма двофазне симплекс методе добија се Табела 4.8.

Табела 4.8: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.9

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
1	0	0	0	0	1	8
$2/11$	0	1	$2/11$	$-1/22$	0	$45/11$
$10/11$	1	0	$-1/11$	$4/55$	0	$60/11$
$200/11$	0	0	$750/11$	$60/11$	0	$-f + 54000/11$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(0, \frac{60}{11}, \frac{45}{11}, 0, 0, 8\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = \frac{54000}{11}.$$

Ова промена ће утицати на смањење добити овог предузећа.

4.4 Додавање нове промењиве или активности

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се додаје нова промењива x_{n+1}. Добија се нови проблем

$$\min \quad f + f_0 = cx + c_{n+1}x_{n+1}$$

при условима

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A & A^{(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = b \\ x, x_{n+1} \geq 0, \end{cases}$$

при чему је $A^{(n+1)}$ нова колона која се додаје матрици A и која одговара промењивој x_{n+1}. Нека је овако добијеном проблему придружена почетна и оптимална симплекс таблица (Слика 4.4).

Почетна симплекс таблица	
$\begin{pmatrix} A & A^{(n+1)} \end{pmatrix}$	b
$\begin{pmatrix} c & c_{n+1} \end{pmatrix}$	f_0

$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$

Оптимална симплекс таблица	
A^*_{novo}	b^*_{novo}
c^*_{novo}	$f^*_{0,novo}$

Слика 4.4: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику примењеног на нови проблем

На основу Теореме 2.4 важе услови (2.5). Нека је $x_{n+1} = 0$. Тада је

$$\begin{pmatrix} A & A^{(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix} = Ax^* + A^{(n+1)} \cdot 0 = Ax^* = b.$$

Следи да је

$$\begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

допустиво решење за нови проблем, што значи да је претходно оптимално решење допустиво за нови проблем. С обзиром да је додата нова колона матрици A небазисна, јер није постојала у почетном проблему, матрица B (односно матрица B^{-1}) ће остати непромењена. Десна страна ограничења, односно вектор b је према формулацији новог проблема непромењен. Вектор c се разликује у елементу c_{n+1}. На основу Теореме 2.4. добија се

$$A^*_{novo} = B^{-1}_{novo}A_{novo} = B^{-1} \begin{pmatrix} A & A^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}A & B^{-1}A^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & A^{(n+1)*} \end{pmatrix},$$

$$b^*_{novo} = B^{-1}_{novo}b_{novo} = B^{-1}b = b^*,$$

$$c^*_{novo} = c_{novo} - c_B^{novo} A^*_{novo} = \begin{pmatrix} c & c_{n+1} \end{pmatrix} - c_B \begin{pmatrix} A^* & A^{(n+1)*} \end{pmatrix},$$

односно добија се

$$c^*_{novo} = \begin{pmatrix} c & c_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_B A^* & c_B A^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - c_B A^* & c_{n+1} - c_B A^{(n+1)*} \end{pmatrix},$$

$$c^*_{novo} = \begin{pmatrix} c^* & c^*_{n+1} \end{pmatrix}.$$

С обзиром да је $c^*_q \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$, уколико је $c^*_{n+1} \geq 0$ тренутно оптимално решење ће бити оптимално решење новог проблема, при чему је

$$c^*_{n+1} = c_{n+1} - c_B B^{-1} A^{(n+1)} = c_{n+1} - c_B A^{(n+1)*},$$

$$f^*_{0,novo} = f_0 - c_B^{novo} b^*_{novo} = f_0 - c_B b^* = f^*_0.$$

Уколико је $c^*_{n+1} < 0$, онда се може применити симплекс метода и на тај начин одредити ново оптимално решење.

Пример 4.10. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да производи и теглице за лимунаду. Са четвртом машином се за* $7h$ *може произвести* 100 *теглица за лимунаду које се пакују у кутију која заузима* $15m^3$. *Не постоји ограничење о потражњи ових чаша. Одредити интервал за цену ових теглица тако да добит овог предузећа остане непромењена?*

Решење. Проширењем понуде овог предузећа теглицама за лимунаду, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3 - c_7 x_7$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_7 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 15x_7 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_7, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 2.1 добијена је почетна и оптимална симплекс таблица проблема пре проширења понуде теглицама за лимунаду као и оптимално решење за такав проблем. Из почетне симплекс таблице се једноставно може уочити (4.4), (4.5), (4.6), као и вредност (4.7), док се из оптималне симплекс таблице може уочити (4.8), (4.9), (4.10), као и оптимална вредност (4.11). Сада се могу одредити неопходне матрице и вектори.

$$A^{(n+1)*} = B^{-1} A^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ -13/14 \\ 13/14 \end{pmatrix},$$

$$c_B A^{(n+1)*} = -\frac{4150}{7},$$

$$A^*_{novo} = \begin{pmatrix} A^* & A^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/7 & -1/7 & 3/35 & 0 & 2/7 \\ 0 & 0 & -11/7 & -2/7 & 1/14 & 1 & -13/14 \\ 1 & 0 & 11/7 & 2/7 & -1/14 & 0 & 13/14 \end{pmatrix},$$

$$c^*_{novo} = \begin{pmatrix} c & c_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_B A^* & c_B A^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400/7 & 550/7 & 20/7 & 0 & 4150/7 - c_7 \end{pmatrix},$$

$$b^*_{novo} = b^*,$$

$$f^*_{0,novo} = f^*_0 = \frac{36000}{7}.$$

Да би претходна вредност заиста била оптимална вредност проблема мора да буде испуњен услов $c^*_{novo,q} \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 7$. Претходни услов ће бити испуњен уколико је

$$c_7 \in \left(-\infty, \frac{4150}{7}\right],$$

чиме је одређен тражени интервал.

Пример 4.11. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да производи и теглице за лимунаду по цени од* 6.5$. *Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Проширењем понуде овог предузећа теглицама за лимунаду, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3 - 650x_7$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_7 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 15x_7 + y_2 + = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_7, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 4.10, решење овог проблема се добија за $c_7 = 650$, што значи да ће се добит овог предузећа променити. Може се проверити да важи,

$$c^*_{novo} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400/7 & 550/7 & 20/7 & 0 & -400/7 \end{pmatrix},$$

$$f^*_{0,novo} = \frac{36000}{7}.$$

Дакле, сада није испуњен услов $c^*_{novo,q} \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 7$ и може се наставити са применом алгоритма симплекс методе на Табелу 4.9.

Табела 4.9: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.11

Ажурирана симплекс таблица							
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	x_7	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$2/7$	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	$-13/14$	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	$13/14$	$45/7$
0	0	$400/7$	$550/7$	$20/7$	0	$-400/7$	$-f + 36000/7$

Након примене алгоритма симплекс методе добија се Табела 4.10.

Табела 4.10: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.11

Оптимална симплекс таблица							
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	x_7	b
$-20/7$	$65/7$	$-50/7$	$-15/7$	1	0	0	$150/7$
1	0	0	0	0	1	0	8
$6/7$	$5/7$	$8/7$	$1/7$	0	0	1	$60/7$
$400/7$	$100/7$	$1000/7$	$650/7$	0	0	0	$-f + 39000/7$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*, x_7^*) = \left(0, 0, 0, 0, \frac{150}{7}, 8, \frac{60}{7}\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = \frac{39000}{7}.$$

Ова промена ће утицати на повећање добити овог предузећа.

4.5 Додавање новог ограничења

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се јавља потреба за новим $(m+1)$-вим ограничењем. Нови проблем се разликује од почетног једино у новом ограничењу. Постоје две могућности:

1. оптимално решење почетног проблема задовољава ново ограничење (оптимално решење остаје непромењено) и

2. оптимално решење почетног проблема не задовољава ново ограничење (потребно је одредити ново оптимално решење).

Ново ограничење је неопходно превести у канонски облик и додати на крај оптималне симплекс таблице. Након ажурирања симплекс таблице тако да тренутна база остане непромењена и примене одговарајуће симплекс методе добија се ново оптимално решење.

Пример 4.12. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да ограничи производњу чаша за шампањац на највише* 500 *комада. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Ограничењем производње чаша за шампањац, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

$$\text{при условима}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_3 + y_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је оптимално решење

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(\frac{45}{7}, \frac{30}{7}, 0, 0, 0, \frac{11}{7}\right), \tag{4.12}$$

и оптимална вредност проблема

$$f^* = \frac{36000}{7}. \tag{4.13}$$

Како је $x_3^* = 0$ ново ограничење $x_3 \leq 5$ ће бити задовољено, што значи да се добит овог предузећа неће променити.

Пример 4.13. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да ограничи производњу чаша за коктел на највише* 400 *комада. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Ограничењем производње чаша за коктел, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

$$\text{при условима}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_2 + y_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је оптимално решење (4.12), оптимална вредност проблема (4.13) и Табела 4.11.

Табела 4.11: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 2.1

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	$45/7$
0	0	$400/7$	$550/7$	$20/7$	0	$-f+36000/7$

Како је $x_2^* = \dfrac{30}{7}$ ново ограничење

$$x_2 \leq 4$$

неће бити задовољено. Након додавања новог ограничења добија се Табела 4.12.

Табела 4.12: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.13

Ажурирана симплекс таблица							
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	0	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	0	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	0	$45/7$
0	1	0	0	0	0	1	4
0	0	$400/7$	$550/7$	$20/7$	0	0	$-f+36000/7$

Како претходна таблица нема базисно допустиво решење неопходно је ажурирати таблицу применом операције пивотирања. Добија се Табела 4.13 на коју се може применити алгоритам дуалне симплекс методе.

Табела 4.13: Симплекс таблица на коју се може применити дуал симплекс метода

Почетна дуал симплекс таблица							
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	b
0	1	$-2/7$	$-1/7$	$3/35$	0	0	$30/7$
0	0	$-11/7$	$-2/7$	$1/14$	1	0	$11/7$
1	0	$11/7$	$2/7$	$-1/14$	0	0	$45/7$
0	1	$2/7$	$1/7$	$-3/35$	0	1	$-2/7$
0	0	$400/7$	$550/7$	$20/7$	0	0	$-f + 36000/7$

Након примене алгоритма дуалне симплекс методе добија се Табела 4.14.

Табела 4.14: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.13

Оптимална симплекс таблица							
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	b
0	1	0	0	0	0	1	4
0	0	$-4/3$	$-1/6$	0	1	$5/6$	$4/3$
1	0	$4/3$	$1/6$	0	0	$-5/6$	$20/3$
0	0	$-10/3$	$-5/3$	1	0	$-35/3$	$10/3$
0	0	$200/3$	$250/3$	0	0	$100/3$	$-f + 15400/3$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = \left(\frac{20}{3}, 4, 0, 0, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = \frac{15400}{3}.$$

Ова промена ће утицати на смањење добити овог предузећа.

4.6 Избацивање променљиве

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се избацује променљива x_i. Постоје две могућности:

1. променљива x_i је небазисна и као таква не утиче на оптимално решење (може се избацити из оптималног решења) и

2. променљива x_i је базисна и као таква утиче на оптимално решење (потребно је елиминисати променљиву x_i из оптималног решења).

Базисна променљива x_i се најпре избаци из базе ажурирањем таблице по правилима симплекс методе. Након тога уклања се колона која одговара променљивој x_i, чиме се добија нова почетна симплекс таблица (Слика 4.5).

Почетна симплекс таблица	
$\bar{A}$	$\bar{b}$
$\bar{c}$	$\bar{f}_0$

$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$

Оптимална симплекс таблица	
$\bar{A}^*$	$\bar{b}^*$
$\bar{c}^*$	$\bar{f}_0^*$

Слика 4.5: Шематски приказ симплекс алгоритма у матричном облику примењеног на почетни проблем

На основу Теореме 2.4 важе услови (2.5) и применом Теореме 2.4 на нови проблем добија се

$$\bar{A}^* = \bar{B}^{-1}\bar{A},$$
$$\bar{b}^* = \bar{B}^{-1}\bar{b},$$
$$\bar{c}^* = \bar{c} - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^*.$$

Уколико је $\bar{c}_q^* \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ и $\bar{b}_p^* \geq 0$ за све $p = 1, \ldots, m$ добија се

$$\bar{f}_0^* = \bar{f}_0 - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{b}^*.$$

У супротном, добија се таблица на коју треба применити одговарајућу симплекс методу. Након примене одговарајуће симплекс методе добија се ново оптимално решење.

Пример 4.14. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да престане са производњом чаша за шампањац. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Престанком производње чаша за шампањац, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је оптимално решење (4.12) и оптимална вредност проблема (4.13).

Како је x_3 небазисна променљива, онда је оптимално решење

$$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(\frac{45}{7}, \frac{30}{7}, 0, 0, \frac{11}{7}\right),$$

а оптимална вредност

$$f^* = \frac{36000}{7},$$

што значи да се добит овог предузећа неће променити.

Пример 4.15. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да престане са производњом чаша за сок. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Престанком производње чаша за сок, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је оптимално решење (4.12), оптимална вредност проблема (4.13) и Табела 4.11. Како је x_1 базисна променљива, неопходно је ажурирати таблицу тако да променљива x_1 постане небазисна. Након ажурирања добија се Табела 4.15.

Табела 4.15: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.15

Ажурирана симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
$1/2$	1	1	0	$1/20$	0	$15/2$
1	0	0	0	0	1	8
$7/2$	0	$11/2$	1	$-1/4$	0	$45/2$
-275	0	-375	0	45	0	$-f + 3375$

Пошто је променљива x_1 изашла из базе, сада се може уклонити прва колона из симплекс таблице чиме се добија Табела 4.16.

Табела 4.16: Симплекс таблица добијена избацивањем прве колоне

Симплекс таблица након избацивања					
x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
1	1	0	$1/20$	0	$15/2$
0	0	0	0	1	8
0	$11/2$	1	$-1/4$	0	$45/2$
0	-375	0	45	0	$-f+3375$

Након примене алгоритма симплекс методе на претходну таблицу добија се Табела 4.17.

Табела 4.17: Оптимална симплекс таблица новог проблема

Оптимална симплекс таблица					
x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
1	0	$-1/11$	$4/55$	0	$60/11$
0	0	0	0	1	8
0	1	$2/11$	$-1/22$	0	$45/11$
0	0	$750/11$	$60/11$	0	$-f+54000/11$

Изравнавајућа промењлива y_3 може се избацити с обзиром да ће последње ограничење увек бити задовољено (из Примера 2.1).

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*) = \left(\frac{60}{11}, \frac{45}{11}, 0, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = \frac{54000}{11}.$$

Ова промена ће утицати на смањење добити овог предузећа.

4.7 Избацивање ограничења

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се избацује i-то ограничење. На основу Теореме 2.4 важе услови (2.5). Приликом избацивања i-тог ограничења долази до промене матрице A и вектора b, а тиме и до промене матрице B односно матрице B^{-1}. Матрица се мења уклањањем

i-те врсте и колоне која одговара промењивој која је базисна са јединицом на i-том месту. Након уклањања одговарајуће врсте и колоне добија се нови проблем чије је оптимално решење потребно одредити. Нека је овако добијеном проблему придружена почетна и оптимална симплекс таблица (Слика 4.5).

На основу Теореме 2.4. добија се

$$\bar{A}^* = \bar{B}^{-1}\bar{A},$$

$$\bar{b}^* = \bar{B}^{-1}\bar{b},$$

$$\bar{c}^* = \bar{c} - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^*.$$

Уколико је $\bar{c}_q^* \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, n$ и $\bar{b}_p^* \geq 0$ за све $p = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$ добија се

$$\bar{f}_0^* = \bar{f}_0 - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{b}^*.$$

У супротном, добија се таблица на коју треба применити одговарајућу симплекс методу. Након примене одговарајуће симплекс методе добија се ново оптимално решење.

Пример 4.16. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је проширило продају тако да више не постоји ограничење у обиму продаје чаша за сок. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Проширењем продаје добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је (4.4), (4.5) и (4.6). Нека су придружене одговарајуће матрице и вектори новом проблему.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{b} = \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \end{pmatrix}, \ \bar{c} = \begin{pmatrix} -500 & -450 & -600 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сада се може одредити $\bar{A}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*$.

$$\bar{A}^* = \bar{B}^{-1}\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/7 & -1/7 & 3/35 \\ 1 & 0 & 11/7 & 2/7 & -1/14 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b}^* = \bar{B}^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 45/7 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c}^* = \bar{c} - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400/7 & 550/7 & 20/7 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_0^* = \bar{f}_0 - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{b}^* = \frac{36000}{7}.$$

Како је $\bar{c}_q^* \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 5$ и $\bar{b}_p^* \geq 0$ за све $p = 1, 2$ претходна вредност је оптимална вредност, односно ова промена неће утицати на добит овог предузећа.

4.8 Замена врсте (колоне) новом врстом (колоном)

Нека је дат почетни проблем ЛП-а и нека је познато његово оптимално решење (Слика 2.1).

Нека се врста i (колона j) мења новом врстом (колоном).

Добијени проблем се може решити применом две фазе.

Фаза 1. Решавање новог проблема добијеног избацивањем i-те врсте (j-те колоне).

Фаза 2. Решавање новог проблема добијеног додавањем жељене врсте (колоне) у проблем добијен као резултат Фазе 1.

Пример 4.17. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да изврши замену постојећих машина новим како би унапредили производњу. Прва машина за* $5h$ *произведе* 100 *комада чаша за сок, друга машина за* $4h$ *произведе* 100 *комада чаша за коктел и трећа машина за* $7h$ *произведе* 100 *комада чаша за шампањац. Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Заменом постојећих машина новим, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је (4.4), (4.5) и (4.6).

Фаза 1. Нека су придружене одговарајуће матрице и вектори новом проблему.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{b} = \begin{pmatrix} 150 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \bar{c} = \begin{pmatrix} -500 & -450 & -600 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сада се може одредити $\bar{A}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*$.

$$\bar{A}^* = \bar{B}^{-1}\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1/10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1/10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b}^* = \bar{B}^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c}^* = \bar{c} - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 550 & -100 & 50 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_0^* = \bar{f}_0 - \bar{c}_{\bar{B}}\bar{b}^* = 7500.$$

Како је $\bar{c}_3^* < 0$ и $b_1^* < 0$ може се наставити са применом алгоритма двофазне симплекс методе на Табелу 4.18.

Табела 4.18: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.17

Ажурирана симплекс таблица					
x_1	x_2	x_3	y_2	y_3	b
0	-2	-1	$-1/10$	1	-7
1	2	1	$1/10$	0	15
0	550	-100	50	0	$-f + 7500$

Након примене алгоритма двофазне симплекс методе на претходну таблицу добија се Табела 4.19.

Табела 4.19: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.17

Оптимална симплекс таблица					
x_1	x_2	x_3	y_2	y_3	b
1	2	1	$1/10$	0	15
1	0	0	0	1	8
100	750	0	60	0	$-f + 9000$

Оптимално решење новог проблема на крају прве фазе је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_2^*, y_3^*) = (0, 0, 15, 0, 8),$$

а оптимална вредност проблема на крају прве фазе је

$$f_1^* = 9000.$$

Фаза 2. На нови проблем додаје се нова врста

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + y_1 = 60,$$

чиме се добија Табела 4.20.

Табела 4.20: Почетна симплекс таблица након додавања нове врсте

Почетна симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_2	y_3	y_1	b
1	2	1	1/10	0	0	15
1	0	0	0	1	0	8
5	4	7	0	0	1	60
100	750	0	60	0	0	$-f+9000$

Како претходна таблица нема базисно допустиво решење неопходно је ажурирати таблицу применом операције пивотирања. Добија се Табела 4.21 на коју се може применити алгоритам дуалне симплекс методе.

Табела 4.21: Симплекс таблица на коју се може применити дуална симплекс метода

Почетна дуална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_2	y_3	y_1	b
1	2	1	1/10	0	0	15
1	0	0	0	1	0	8
-2	-10	0	$-7/10$	0	1	-45
100	750	0	60	0	0	9000

Након примене дуалне симплекс мотоде добија се Табела 4.22.

Табела 4.22: Оптимална симплекс таблица новог проблема

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_2	y_3	y_1	b
0	0	1	$-1/25$	$-3/5$	1/5	6/5
0	1	0	7/100	$-1/5$	$-1/10$	29/10
1	0	0	0	1	0	8
0	0	0	15/2	50	75	6025

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(8, \frac{29}{10}, \frac{6}{5}, 0, 0, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = 6025.$$

Ова промена ће утицати на повећање добити овог предузећа.

Пример 4.18. *Предузеће "Стакло" (из Примера 2.1) је одлучило да изврши редизајн чаша за коктел. На другој машини се за* $3h$ *произведе* 100 *комада нових чаша које се пакују у појединачне кутије величине* $15m^3$. *Како ће та промена утицати на добит овог предузећа?*

Решење. Редизајном чаша за коктел, добија се следећи проблем ЛП-а у канонском облику

$$\min \quad -f = -500x_1 - 450x_2 - 600x_3$$

при условима

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + y_1 = 60 \\ 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + y_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

На основу резултата из Примера 2.1, познато је оптимално решење (4.12), оптимална вредност проблема (4.13) и Табела 4.11.

Фаза 1. Како је x_2 базисна променљива, неопходно је ажурирати таблицу тако да променљива x_2 постане небазисна. Након ажурирања добија се Табела 4.23.

Табела 4.23: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 4.18

Ажурирана симплекс таблица						
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	$35/3$	$-10/3$	$-5/3$	1	0	50
0	$-5/6$	$-4/3$	$-1/6$	0	1	-2
1	$5/6$	$4/3$	$1/6$	0	0	10
0	$-100/3$	$200/3$	$250/3$	0	0	$-f + 5000$

Пошто је променљива x_2 изашла из базе, сада се може уклонити друга колона из симплекс таблице чиме се добија Табела 4.24.

Табела 4.24: Симплекс таблица добијена избацивањем друге колоне

Симплекс таблица након избацивања					
x_1	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	$-10/3$	$-5/3$	1	0	50
0	$-4/3$	$-1/6$	0	1	-2
1	$4/3$	$1/6$	0	0	10
0	$200/3$	$250/3$	0	0	$-f+5000$

Након примене алгоритма дуал симплекс методе на претходну таблицу добија се Табела 4.25.

Табела 4.25: Оптимална симплекс таблица за Фазу 1.

Оптимална симплекс таблица					
x_1	x_3	y_1	y_2	y_3	b
0	0	$-5/4$	1	$-5/2$	55
0	1	$1/8$	0	$-3/4$	$3/2$
1	0	0	0	1	8
0	0	75	0	50	$-f+4900$

Оптимално решење новог проблема на крају прве фазе је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_2^*, y_3^*) = \left(8, \frac{3}{2}, 0, 55, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема на крају прве фазе је

$$f_1^* = 4900.$$

Фаза 2. На основу резултата из Примера 2.1 и избацивања промењљиве x_2 важи

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{b} = \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \bar{c} = \begin{pmatrix} -500 & -600 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а на основу Табеле 4.25. важи

$$\bar{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5/4 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1/8 & 0 & -3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{b}^* = \begin{pmatrix} 55 \\ 3/2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \bar{c}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 & 0 & 50 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_0^* = 4900, \ \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сада се могу одредити неопходне матрице и вектори након додавања нове колоне

$$\bar{A}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Добијају се следеће матрице и вектори

$$\bar{A}^{(n+1)*} = \bar{B}^{-1}\bar{A}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 45/4 \\ 3/8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c}_{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -600 & -500 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^{(n+1)*} = -225,$$

$$A^*_{novo} = \begin{pmatrix} \bar{A}^* & \bar{A}^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5/4 & 1 & -5/2 & 45/4 \\ 0 & 1 & 1/8 & 0 & -3/4 & 3/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c^*_{novo} = \begin{pmatrix} \bar{c} & \bar{c}_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^* & \bar{c}_{\bar{B}}\bar{A}^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 & 0 & 50 & -225 \end{pmatrix},$$

$$b^*_{novo} = \bar{b}^*,$$

$$f^*_{0,novo} = \bar{f}_0^* = 4900.$$

Дакле, сада није испуњен услов $c^*_{novo,q} \geq 0$ за све $q = 1, \ldots, 6$ и може се наставити са применом алгоритма симплекс методе на Табелу 4.26.

Табела 4.26: Почетна симплекс таблица добијена у току Фазе 2.

Почетна симплекс таблица						
x_1	x_3	y_1	y_2	y_3	x_2	b
0	0	$-5/4$	1	$-5/2$	$45/4$	55
0	1	$1/8$	0	$-3/4$	$3/8$	$3/2$
1	0	0	0	1	0	8
0	0	75	0	50	-225	$-f + 4900$

Након примене алгоритма симплекс методе добија се Табела 4.27.

Табела 4.27: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 4.18

Оптимална симплекс таблица						
x_1	x_3	y_1	y_2	y_3	x_2	b
0	$-3/2$	$-1/4$	$1/20$	1	0	$1/2$
0	$-1/3$	$-1/6$	$1/10$	0	1	5
1	$3/2$	$1/4$	$-1/20$	0	0	$15/2$
0	0	50	20	0	0	$-f+6000$

Оптимално решење новог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(\frac{15}{2}, 5, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$f^* = 6000.$$

Ова промена ће утицати на повећање добити овог предузећа.

Опширније о анализи осетљивости може се пронаћи у [2], [12], [13], [14].

Глава 5

Анализа осетљивости у фази проблему

Теоријске основе које су изложене у Глави 5 су преузете из [1], [3], [5], [6], [9], [10], [11], а идеја за примере је пронађена у [5].

5.1 Дефиниција и основни појмови

У теорији скупова, ако се посматра скуп X у класичном смислу и одређени елемент x, постоје две могућности: елемент x или у потпуности припада скупу X или у потпуности не припада скупу X. Припадност елемента x скупу X се описује карактеристичном функцијом

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Теорија фази скупова проширује концепт припадности скупу дефинисањем делимичне (парцијалне) припадности скупу увођењем функције припадности [3].

Дефиниција 5.1. ***Функција припадности*** *је функција која сваком елементу из X додељује вредност из интервала $[0,1]$ која представља степен припадности скупу.*

Дефиниција 5.2. *Нека је X универзални скуп.* ***Фази скуп*** *A над X дефинише се као скуп уређених парова $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, где је $\mu_A(x)$ функција припадности за фази скуп.*

Надаље се претпоставља да је универзални скуп X скуп реалних бројева $\mathbb{R}$.

Дефиниција 5.3. ***Носач*** *фази скупа A је скуп свих елемената $x \in X$ за које важи $\mu_A(x) > 0$.*

Дефиниција 5.4. ***Језгро*** *фази скупа A је скуп свих елемената $x \in X$ за које важи $\mu_A(x) = 1$.*

Дефиниција 5.5. *Фази скуп A је* ***нормалан*** *ако је његово језгро непразан скуп, односно, ако постоји бар један елемент $x \in X$ такав да је $\mu_A(x) = 1$.*

Дефиниција 5.6. ***$\alpha-$усечен*** *скуп фази скупа A је скуп дефинисан са*

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

где је $\alpha \geq 0$.
Јако $\alpha-$усечен *скуп фази скупа A је скуп дефинисан са*

$$\bar{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\},$$

где је $\alpha > 0$.

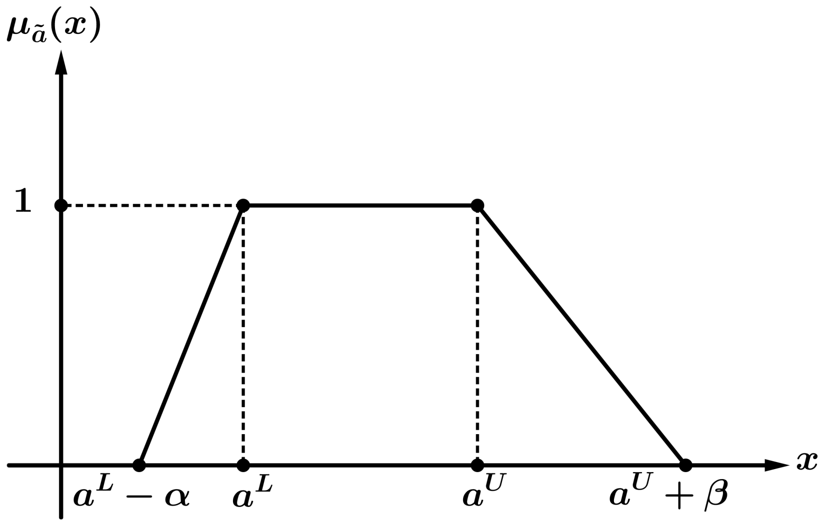
Дефиниција 5.7. *Фази скуп A над X је* ***конвексан*** *ако за свако $x, y \in X$ и свако $\lambda \in [0,1]$ важи*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}.$$

Дефиниција 5.8. ***Фази број*** *$\tilde{a}$ је фази скуп над $X = \mathbb{R}$ који је нормалан и конвексан.*

Сваки фази број је дефинисан својом функцијом припадности. Нека је функција припадности (Слика 5.1) било ког фази броја $\tilde{a}$

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a^L - x}{\alpha}, & a^L - \alpha \leq x < a^L \\ 1, & a^L \leq x \leq a^U \\ 1 - \dfrac{x - a^U}{\beta}, & a^U < x \leq a^U + \beta \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.1}$$



Слика 5.1: График функције припадности $\mu_{\tilde{a}}$ дефинисан са (5.1)

Фази број са функцијом припадности облика (5.1) назива се **трапезоидни фази број**. Трапезоидни фази број може бити приказан у облику $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$. Носач фази броја $\tilde{a}$ је $(a^L - \alpha, a^U + \beta)$, а његово језгро је $[a^L, a^U]$. Нека је скуп свих трапезоидних фази бројева означен са $\mathcal{F}_\mathbb{R}$.

Нека су $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ и $\tilde{b} = (b^L, b^U, \gamma, \theta)$ два трапезоидна фази броја и $x \in \mathbb{R}$. Тада је

$$x\tilde{a} = (xa^L, xa^U, x\alpha, x\beta), \text{ за } x \geq 0,$$
$$x\tilde{a} = (xa^U, xa^L, -x\beta, -x\alpha), \text{ за } x < 0,$$
$$\tilde{a} + \tilde{b} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha + \gamma, \beta + \theta).$$

Ефикасан начин за упоређивање елемената из $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ је помоћу **функције рангирања** $\mathcal{R} : \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, која трапезоидном фази броју додељује реалан број. Нека су $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. Поредак елемената $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ се дефинише на следећи начин:

$$\tilde{a} \succeq \tilde{b}, \text{ ако је } \mathcal{R}(\tilde{a}) \geq \mathcal{R}(\tilde{b}),$$

$$\tilde{a} \succ \tilde{b}, \text{ ако је } \mathcal{R}(\tilde{a}) > \mathcal{R}(\tilde{b}),$$
$$\tilde{a} \approx \tilde{b}, \text{ ако је } \mathcal{R}(\tilde{a}) = \mathcal{R}(\tilde{b}).$$

Такође важи да је $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$, ако је $\tilde{b} \succeq \tilde{a}$.

Лема 5.1. *За било коју линеарну функцију рангирања $\mathcal{R}$ важи:*

1. *$\tilde{a} \succeq \tilde{b}$ ако и само ако је $\tilde{a} - \tilde{b} \succeq \tilde{0}$,*
2. *$\tilde{a} \succeq \tilde{b}$ ако и само ако је $-\tilde{b} \succeq -\tilde{a}$,*
3. *ако је $\tilde{a} \succeq \tilde{b}$ и $\tilde{c} \succeq \tilde{d}$ онда је $\tilde{a} + \tilde{c} \succeq \tilde{b} + \tilde{d}$.*

Ако постоје $\varepsilon \geq 0$ и $\alpha \geq 0$ такви да је $\tilde{a} \succeq (-\varepsilon, \varepsilon, \alpha, \alpha)$, онда за трапезоидни фази број $\tilde{a}$ важи релација $\tilde{a} \succeq \tilde{0}$, где је $\tilde{0} = (0, 0, 0, 0)$ трапезоидни фази број нула. Дакле, $\mathcal{R}(-\varepsilon, \varepsilon, \alpha, \alpha) = 0$, што значи да је $\tilde{a} \approx \tilde{0}$ ако и само ако је $\mathcal{R}(\tilde{a}) = 0$.

Линеарна фунцкија рангирања у тачки $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ је облика

$$\mathcal{R}(\tilde{a}) = c_L a^L + c_U a^U + c_\alpha \alpha + c_\beta \beta,$$

где су c_L, c_U, c_α и c_β реалне константе од којих је бар једна различита од нуле. У наставку ће бити посматран специјалан случај линеарне функције рангирања, коју је први предложио Јагер[1], за $c_L = c_U = \dfrac{1}{2}$, $c_\alpha = -\dfrac{1}{4}$ и $c_\beta = \dfrac{1}{4}$ односно

$$\mathcal{R}(\tilde{a}) = \frac{1}{2}\left(a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right). \tag{5.2}$$

Лема 5.2. *Нека су $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ и $\tilde{b} = (b^L, b^U, \gamma, \theta)$ трапезоидни фази бројеви и нека је функција рангирања облика* (5.2). *Тада је $\tilde{a} \succeq \tilde{b}$, ако и само ако је*

$$a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \geq b^L + b^U + \frac{1}{2}(\theta - \gamma).$$

[1] Ronald Robert Yager, амерички информатичар

5.2 Фази линеарно програмирање са трапезоидним фази промењљивим

Проблем ЛП-а са трапезоидним фази промењљивим (ФЛП) је проблем облика

$$\begin{aligned} &\max \quad \tilde{f} \approx \tilde{c}\tilde{x} \\ &\text{при условима} \\ &\begin{cases} A\tilde{x} \approx \tilde{b} \\ \tilde{x} \succeq \tilde{0}, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

при чему је $\tilde{b} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^m$, $\tilde{x} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\tilde{c}^T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^n$.

Дефиниција 5.9. *Фази вектор $\tilde{x} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^n$ је* ***фази допустиво решење*** *за проблем (5.3) уколико $\tilde{x}$ задовољава ограничења $A\tilde{x} \approx \tilde{b}$ и $\tilde{x} \succeq \tilde{0}$.*

Дефиниција 5.10. *Фази допустиво решење $\tilde{x}^*$ је* ***фази оптимално решење*** *за проблем (5.3) уколико за свако фази допустиво решење $\tilde{x}$ за проблем (5.3) важи $c\tilde{x}^* \succeq c\tilde{x}$.*

Нека је $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $rang(A) = m$. Нека су колоне матрице A преуређене тако да је $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$, где је B регуларна матрица димензије $m \times m$. Нека је са y_j означено решење једначине $By = a_j, j = 1, \ldots, n$ где је са a_j означена j-та колона матрице A. Базисно решење дато са

$$\tilde{x}_B = (\tilde{x}_{B_1}, \tilde{x}_{B_2}, \ldots, \tilde{x}_{B_n})^T \approx B^{-1}\tilde{b},\ \tilde{x}_N = \tilde{0}$$

је решење једначине $A\tilde{x} \approx \tilde{b}$. Дакле, $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_B^T, \tilde{x}_N^T\right)^T$ је фази базисно решење које одговара бази B. Ако је $\tilde{x}_B \succeq \tilde{0}$ онда је фази базисно решење и допустиво. За сваку фази небазисну промењљиву $\tilde{x}_j, j = 1, \ldots, n, j \neq B_i, i = 1, \ldots, m$, где је са B_i означен индекс i-те колоне матрице B, може се дефинисати

$$\tilde{f}_j = \tilde{c}_B y_j = \tilde{c}_B B^{-1} a_j.$$

Теорема 5.1. *Фази базисно допустиво решење $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_B^T, \tilde{x}_N^T\right)^T$ је оптимално решење проблема (5.3) ако и само ако је $\tilde{f}_j \succeq \tilde{c}_j$ за свако $j = 1, \ldots, n$, где је $\tilde{x}_B \approx B^{-1}\tilde{b}$, $\tilde{x}_N \approx \tilde{0}$ и $\tilde{f}_j = \tilde{c}_B B^{-1} a_j$.*

Доказ Теореме 5.1 се може пронаћи у [10].

5.3 Симплекс метода за фази линеарно програмирање

Проблем (5.3) се може записати у облику

$$\begin{aligned} &\max \quad \tilde{f} \approx \tilde{c}_B \tilde{x_B} + \tilde{c}_N \tilde{x_N} \\ &\text{при условима} \\ &\begin{cases} B\tilde{x}_B + N\tilde{x}_N \approx \tilde{b} \\ \tilde{x}_B \succeq \tilde{0} \\ \tilde{x}_N \succeq \tilde{0}. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Важи да је $\tilde{x}_B \approx B^{-1}\tilde{b} - B^{-1}N\tilde{x}_N$, $\tilde{f} \approx c_B(B^{-1}\tilde{b} - B^{-1}N\tilde{x}_N) + c_N\tilde{x}_N$, па је

$$\tilde{x}_B + B^{-1}N\tilde{x}_N \approx B^{-1}\tilde{b},$$

$$\tilde{f} + (c_B B^{-1}N - c_N)\tilde{x}_N \approx c_B B^{-1}\tilde{b}.$$

Како је $\tilde{x}_N \approx \tilde{0}$ добија се $\tilde{x}_B \approx B^{-1}\tilde{b}$ и $\tilde{f} \approx \tilde{c}_B\tilde{y}_0$, где је $\tilde{y}_0 = B^{-1}\tilde{b}$. Нека су са $\tilde{f}_N$ и Y означене матрице $\tilde{c}_B B^{-1}N$ и $B^{-1}N$ редом. Сада проблем (5.3) може бити записан у табличном облику (Табела 5.1).

Табела 5.1: Симплекс таблица за проблем фази линеарног програмирања

Симплекс таблица		
$\tilde{x}_B$	$\tilde{x}_N$	$\tilde{b}$
I	$Y = B^{-1}N$	$\tilde{y}_0 \approx B^{-1}\tilde{b}$
$\tilde{0}$	$\tilde{f}_N - \tilde{c}_N = \tilde{c}_B B^{-1}N - \tilde{c}_N$	$\tilde{y}_{00} \approx c_B B^{-1}\tilde{b}$

Табела 5.1 даје све потребне информације за симплекс методу и нека је са $\tilde{y}_{0j}$ означен j-ти елемент вектора $(\tilde{0}, \tilde{f}_N - \tilde{c}_N)$ такав да

$$\tilde{y}_{0j} = \tilde{0}, j = B_i, i = 1, \ldots, m,$$

$$\tilde{y}_{0j} = \tilde{c}_B y_j - \tilde{c}_j = \tilde{f}_j - \tilde{c}_j, j \neq B_i, i = 1, \ldots, m.$$

На основу Теореме 5.1 решење проблема је оптимално уколико је $\tilde{y}_{0j} \succeq \tilde{0}$ за све $j = 1, \ldots, n, j \neq B_i, i = 1, \ldots, m$. У супротном, уколико је $\tilde{y}_{0k} \prec \tilde{0}$ за неко $k = 1, \ldots, n$, $k \neq B_i$, $i = 1, \ldots, m$, онда је проблем неограничен или се може променити скуп базисних променљивих.

Теорема 5.2. *Ако у симплекс таблици постоји колона k која није у бази таква да је $\tilde{f}_k - \tilde{c}_k \prec \tilde{0}$ и $y_{ik} \leq 0, i = 1, \ldots, m$ тада је проблем неограничен, где је y_{ik} елемент матрице Y.*

Доказ Теореме 5.2 се може пронаћи у [10].

Теорема 5.3. *Ако у симплекс таблици постоји колона k која није у бази таква да је $\tilde{f}_k - \tilde{c}_k \prec \tilde{0}$ и постоји базисни индекс B_i такав да је $y_{ik} > 0$, онда применом операције пивотирања са избором пивот елемента y_{rk} у вртси r даје фази допустиво решење које не умањује вредност фунцкије циља, где је y_{ik} елемент матрице Y.*

Доказ Теореме 5.3 се може пронаћи у [10].

Ако променљива $\tilde{x}_k$ улази у базу, а променљива $\tilde{x}_{B_r}$ излази из базе, онда се операција пивотирања са пивот елементом y_{rk} у симплекс таблици изводи у два корака

1. поделити ред r са y_{rk},

2. за $i = 0, 1, \ldots, m$ и $i \neq r$ ажурирати i-ти ред додавањем њему r-тог реда помноженог са $-y_{ik}$.

Алгоритам 5.1. ***(Симплекс метода за проблем ФЛП-а)***
Улаз. *Проблем фази линеарног програмирања са одговарајућом базом B.*
Корак 1. *Базисно дипустово решење дато је са $\tilde{x}_B \approx \tilde{y}_0$ и $\tilde{x}_N \approx \tilde{0}$, а вредност фази фунцкије циља је $\tilde{f} \approx \tilde{y}_{00} \approx c_B \tilde{y}_0$.*
Корак 2. *Нека је $\bar{y}_{0k} = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \{\bar{y}_{0j}\}, j \neq B_i, i = 1, \ldots, m$. Ако је $\bar{y}_{0k} \geq 0$ онда је тренутно решење оптимално, при чему је $\bar{y}_{0j} = \mathcal{R}(\tilde{f}_j - \tilde{c}_j)$.*
Корак 3. *Ако су сви $y_{ik} \leq 0, i = 1, \ldots, n$ за неко k онда је проблем неограничен. У супротном, одредити индекс r променљиве $\tilde{x}_r$ која напушта базу на следећи начин:*

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

где је $\bar{b}_i = \mathcal{R}(\tilde{b}_i), i = 1, \ldots, m$.
Корак 4. *Изабрати за пивот елемент y_{rk} и применити операцију пивотирања. Иђи на Корак 2.*

Пример 5.1. *Дат је проблем фази линеарног програмирања*

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

при условима

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \preceq (5,7,2,2) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \preceq (3,5,1,1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \succeq \tilde{0}. \end{cases}$$

Одредити оптимално решење и оптималну вредност за дати проблем, при чему је функција рангрирања облика (5.2).

Решење. Проблем се може записати у еквивалентном облику

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

при условима

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 \approx (5,7,2,2) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_5 \approx (3,5,1,1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5 \succeq \tilde{0}. \end{cases}$$

Сада се проблем може записати у табличном облику (Табела 5.2).

Табела 5.2: Таблични запис проблема из Примера 5.1

Почетна симплекс таблица					
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{b}$
1	1	1	1	0	$(5,7,2,2)$
-1	2	0	0	1	$(3,5,1,1)$
-2	1	-1	0	0	$\tilde{f}+(0,0,0,0)$

1. итерација. На основу Табеле 5.2 може се приметити да је

$$(\tilde{y}_{01},\tilde{y}_{02},\tilde{y}_{03})=(-2,1,-1),$$

па није потребна примена функције рангирања (5.2).

Пошто је

$$\bar{y}_{01}=\min\{-2,1,-1\}=-2<0,$$

потребно је одредити пивот у колони 1. Како је само елемент $y_{11}>0$ у колони 1 добија се

$$\frac{\bar{b}_1}{y_{11}}=\min\left\{\frac{\mathcal{R}((5,7,2,2))}{1}\right\}=\min\left\{\frac{6}{1}\right\}=6.$$

Дакле, пивот је елемент $y_{11}=1$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 5.3.

Табела 5.3: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 5.1

Оптимална симплекс таблица					
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{b}$
1	1	1	1	0	$(5,7,2,2)$
0	3	1	1	1	$(8,12,3,3)$
0	3	1	2	0	$\tilde{f}+(10,14,4,4)$

2. итерација. На основу Табеле 5.3 може се приметити да је

$$(\tilde{y}_{02},\tilde{y}_{03},\tilde{y}_{04})=(3,1,2),$$

па није потребна примена функције рангирања (5.2).

Пошто је

$$\bar{y}_{03}=\min\{3,1,2\}=1\geq 0,$$

последња таблица је оптимална симплекс таблица.

Оптимално решење датог проблема је

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*, \tilde{x}_5^*) \approx ((5,7,2,2), \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, (8,12,3,3)),$$

а оптимална вредност проблема је

$$\tilde{f}^* \approx (-14, -10, 4, 4),$$

при чему је $\mathcal{R}(\tilde{f}^*) = -12$ на основу (5.2).

Пример 5.2. *Дат је проблем фази линеарног програмирања*

$$\begin{aligned}
&\min \quad \tilde{f} \approx (-1,-3,1,1)x_1 + (0,2,1,1)x_2 + (-2,0,1,1)x_3 \\
&\textit{при условима} \\
&\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Одредити оптимално решење и оптималну вредност за дати проблем, при чему је функција рангрирања облика (5.2).

Решење. Проблем се може записати у еквивалентном облику

$$\begin{aligned}
&\min \quad \tilde{f} \approx (-1,-3,1,1)x_1 + (0,2,1,1)x_2 + (-2,0,1,1)x_3 \\
&\text{при условима} \\
&\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Сада се проблем може записати у табличном облику (Табела 5.4).

Табела 5.4: Таблични запис проблема из Примера 5.2

Почетна симплекс таблица					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	1	1	1	0	6
-1	2	0	0	1	4
$(-1,-3,1,1)$	$(0,2,1,1)$	$(-2,0,1,1)$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{f} + (0,0,0,0)$

1. итерација. На основу Табеле 5.4 може се приметити да је

$$(\tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02}, \tilde{y}_{03}) = ((-1,-3,1,1), (0,2,1,1), (-2,0,1,1)),$$

односно на основу (5.2)

$$(\mathcal{R}(\tilde{y}_{01}), \mathcal{R}(\tilde{y}_{02}), \mathcal{R}(\tilde{y}_{03})) = (-2, 1, -1).$$

Пошто је

$$\bar{y}_{01} = \min\{-2, 1, -1\} = -2 < 0,$$

потребно је одредити пивот у колони 1.

$$\frac{\bar{b}_1}{y_{11}} = \min\left\{\frac{6}{1}\right\} = 6.$$

Дакле, пивот је елемент $y_{11} = 1$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 5.5.

Табела 5.5: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 5.2

Оптимална симплекс таблица проблема					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	1	1	1	0	6
0	3	1	1	1	10
$\tilde{0}$	$(3, 3, 2, 2)$	$(1, 1, 2, 2)$	$(3, 1, 1, 1)$	$\tilde{0}$	$\tilde{f} + (18, 6, 6, 6)$

2. итерација. На основу Табеле 5.5 може се приметити да је

$$(\tilde{y}_{02}, \tilde{y}_{03}, \tilde{y}_{04}) = ((3, 3, 2, 2), (1, 1, 2, 2), (3, 1, 1, 1)),$$

односно на основу (5.2)

$$(\mathcal{R}(\tilde{y}_{01}), \mathcal{R}(\tilde{y}_{02}), \mathcal{R}(\tilde{y}_{03})) = (3, 1, 2).$$

Пошто је

$$\bar{y}_{0k} = \min\{3, 1, 2\} = 1 \geq 0,$$

последња таблица је оптимална симплекс таблица.

Оптимално решење датог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (6, 0, 0, 0, 10),$$

а оптимална вредност проблема је

$$\tilde{f}^* \approx (-6, -18, 6, 6),$$

при чему је $\mathcal{R}(\tilde{f}^*) = -12$ на основу (5.2).

Алгоритам 5.2. ***(Дуална симплекс метода за проблем ФЛП-а)***
Улаз. *Проблем фази линеарног програмирања са одговарајућом базом B такав да је $\tilde{f}_j - \tilde{c}_j \succeq \tilde{0}$.*
Корак 1. *Ако је $\tilde{b} \succeq \tilde{0}$ онда је тренутно решење оптимално решење. У супротном, изабрати пивот у врсти r за које је $\tilde{b}_r \prec \tilde{0}$ (односно $\mathcal{R}(\tilde{b}_r) < 0$).*
Корак 2. *Ако је $y_{rj} \geq 0$ за све $j = 1, \ldots, n$ онда је проблем неограничен. У супротном, изабрати пивот у колони k за коју важи*

$$\frac{\mathcal{R}(\tilde{f}_k - \tilde{c}_k)}{y_{rk}} = \max_{j \neq B_i} \left\{ \frac{\mathcal{R}(\tilde{f}_j - \tilde{c}_j)}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

Корак 3. *Изабрати за пивот елемент y_{rk} и применити операцију пивотирања. Ићи на Корак 1.*

Пример 5.3. *Дат је проблем фази линеарног програмирања*

$$\min \quad \tilde{f} \approx (1,3,1,1)x_1 + (2,4,1,1)x_2 + (3,5,1,1)x_3$$

при условима

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Одредити оптимално решење и оптималну вредност за дати проблем, при чему је функција рангрирања облика (5.2).

Решење. Проблем се може записати у еквивалентном облику

$$\min \quad \tilde{f} \approx (1,3,1,1)x_1 + (2,4,1,1)x_2 + (3,5,1,1)x_3$$

при условима

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Сада се проблем може записати у табличном облику (Табела 5.6).

Табела 5.6: Таблични запис проблема из Примера 5.3

Почетна симплекс таблица					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	-2	-1	1	0	-3
-2	1	-3	0	1	-4
$(1,3,1,1)$	$(2,4,1,1)$	$(3,5,1,1)$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$(0,0,0,0)$

1. итерација. Пошто је $b_2 < 0$, потребно је одредити пивот у врсти 2.

$$\frac{\mathcal{R}(\tilde{f}_1 - \tilde{c}_1)}{y_{21}} = \max\left\{\frac{\mathcal{R}((1,3,1,1))}{-2}, \frac{\mathcal{R}((3,5,1,1))}{-3}\right\} = \max\left\{\frac{2}{-2}, \frac{4}{-3}\right\} = -1.$$

Дакле, пивот је елемент $y_{21} = -2$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 5.7.

Табела 5.7: Симплекс таблица на крају итерације 1

Симплекс таблица итерације 1					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$-5/2$	$1/2$	1	$-1/2$	-1
1	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$	2
$\tilde{0}$	$(5/2,11/2,3/2,3/2)$	$(-3/2,7/2,5/2,5/2)$	$\tilde{0}$	$(1/2,3/2,1/2,1/2)$	$(-6,-2,2,2)$

2. итерација. Пошто је $b_1 < 0$, потребно је одредити пивот у врсти 1.

$$\frac{\mathcal{R}(\tilde{f}_2 - \tilde{c}_2)}{y_{12}} = \max\left\{\frac{\mathcal{R}\left(\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)}{-\frac{5}{2}}, \frac{\mathcal{R}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)}{-\frac{1}{2}}\right\} = -\frac{8}{5}.$$

Дакле, пивот је елемент $y_{12} = -\frac{5}{2}$. Након примене операције пивотирања добија се ново базисно допустиво решење и Табела 5.8.

Табела 5.8: Оптимална симплекс таблица проблема из Примера 5.3

Оптимална симплекс таблица					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$	$2/5$
1	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$	$11/5$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$(-1, 23/5, 14/5, 14/5)$	$(1, 11/5, 3/5, 3/5)$	$(-3/5, 1, 4/5, 4/5)$	$-\tilde{f}^*$

С обзиром да је $b_i \geq 0$ за све $i = 1, 2$, последња таблица је и оптимална симплекс таблица.

Оптимално решење датог проблема је

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0\right),$$

а оптимална вредност проблема је

$$\tilde{f}^* \approx \left(3, \frac{41}{5}, \frac{13}{5}, \frac{13}{5}\right),$$

при чему је $\mathcal{R}(f^*) = \dfrac{28}{5}$ на основу (5.2).

5.4 Примери примене анализе осетљивости у фази линеарном програмирању

У овој секцији ће, на конретним примерима, бити илустрована примена неких резултата анализе осетљивости описаних у Глави 5 на ФЛП. Прецизније, биће приказани примери који илуструју примену анализе осетљивости у следећим случа-јевима:

1. Промена фази коефицијената у функцији циља,
2. Промена фази коефицијената са десне стране,
3. Промена у коефицијентима са леве стране,
4. Додавање нове променљиве или активности,
5. Додавање новог ограничења.

5.4.1 Промена коефицијената у функцији циља

Пример 5.4. *Нека је дошло до промене фази коефицијента $\tilde{c}_3$ у функцији циља проблема датог у Примеру 5.2. Нека је $\tilde{c}_3 = (-4, 0, 2, 2)$ нова вредност фази коефицијента. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?*

Решење. Променом фази коефицијента $\tilde{c}_3$ добија се следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx (-1,-3,1,1)x_1 + (0,2,1,1)x_2 + (-4,0,2,2)x_3$$

при условима

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.2 добијена је оптимална симплекс таблица из које се може уочити

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$$b^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$\tilde{c}^* \approx \begin{pmatrix} \tilde{0} & (3,3,2,2) & (1,1,2,2) & (3,1,1,1) & \tilde{0} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Пошто је промена настала у вектору $\tilde{c}$, важи

$$A^*(\Delta\tilde{c}_3) = A^*,\ b^*(\Delta\tilde{c}_3) = b^*,$$

$$\tilde{c}(\Delta\tilde{c}_3) \approx \begin{pmatrix} (-1,-3,1,1) & (0,2,1,1) & (-4,0,2,2) & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Променљива x_3 је небазисна, што значи да важи

$$\tilde{c}_B(\Delta\tilde{c}_3) \approx \begin{pmatrix} (-1,-3,1,1) & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Из

$$\tilde{c}^*(\Delta\tilde{c}_3) \approx \tilde{c}(\Delta\tilde{c}_3) - \tilde{c}_B(\Delta\tilde{c}_3)A^*(\Delta\tilde{c}_3),$$

добија се

$$\tilde{c}^*(\Delta\tilde{c}_3) \approx \begin{pmatrix} \tilde{0} & (3,3,2,2) & (-1,1,3,3) & (3,1,1,1) & \tilde{0} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_0^*(\Delta\tilde{c}_3) \approx \tilde{f}_0 - \tilde{c}_B(\Delta\tilde{c}_3)b^*(\Delta\tilde{c}_3) \approx (18,6,6,6),$$

$$\tilde{f}^* + \tilde{f}_0^*(\Delta\tilde{c}_3) \approx \tilde{0} \Rightarrow \tilde{f}^* \approx (-6,-18,6,6).$$

Како је $\tilde{c}_i^*(\Delta\tilde{c}_3) \succeq \tilde{0}$, односно $\mathcal{R}(\tilde{c}_i^*(\Delta\tilde{c}_3)) \geq 0$ за свако i, оптимална вредност $\tilde{f}^*$ остаје непромењена.

Пример 5.5. *Нека је дошло до промене фази коефицијента $\tilde{c}_1$ у фунцкији циља проблема датог у Примеру 5.2. Нека је $\tilde{c}_1 = (-2,-6,2,2)$ нова вредност фази коефицијента. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?*

Решење. Променом фази коефицијента $\tilde{c}_1$ добија следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx (-2,-6,2,2)x_1 + (0,2,1,1)x_2 + (-2,0,1,1)x_3$$

при условима

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.2 добијена је оптимална симплекс таблица из које се може уочити (5.5), (5.6) и (5.7). Пошто је промена настала у вектору $\tilde{c}$, важи

$$A^*(\Delta\tilde{c}_1) = A^*, \; b^*(\Delta\tilde{c}_1) = b^*,$$

$$\tilde{c}(\Delta\tilde{c}_1) \approx \begin{pmatrix} (-2,-6,2,2) & (0,2,1,1) & (-2,0,1,1) & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Променљива x_1 је базисна, што значи да важи

$$\tilde{c}_B(\Delta\tilde{c}_1) \approx \begin{pmatrix} (-2,-6,2,2) & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Из

$$\tilde{c}^*(\Delta\tilde{c}_1) \approx \tilde{c}(\Delta\tilde{c}_1) - \tilde{c}_B(\Delta\tilde{c}_1)A^*(\Delta\tilde{c}_1),$$

добија се

$$\tilde{c}^*(\Delta\tilde{c}_1) \approx \begin{pmatrix} \tilde{0} & (6,4,3,3) & (4,2,3,3) & (6,2,2,2) & \tilde{0} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_0^*(\Delta\tilde{c}_1) \approx \tilde{f}_0 - \tilde{c}_B(\Delta\tilde{c}_1)b^*(\Delta\tilde{c}_1) \approx (36,12,12,12) \Rightarrow \tilde{f}^* \approx (-12,-36,12,12).$$

Како је $\tilde{c}_i^*(\Delta\tilde{c}_1) \succeq \tilde{0}$, односно $\mathcal{R}(\tilde{c}_i^*(\Delta\tilde{c}_1)) \geq 0$ за свако i, $\tilde{f}^*$ је оптимална вредност. Како је

$$\mathcal{R}((-12,-36,12,12)) < -12,$$

следи да ће се оптимална вредност смањити.

5.4.2 Промена фази коефицијената са десне стране

Пример 5.6. *Нека је дошло до промене фази коефицијента $\tilde{b}_1$ са десне стране ограничења проблема датог у Примеру 5.1. Нека је нова вредност фази коефицијента $\tilde{b}_1 = (2,4,1,1)$. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?*

Решење. Променом фази коефицијента $\tilde{b}_1$ добија се следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

при условима

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \preceq (2,4,1,1) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \preceq (3,5,1,1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \succeq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.1 добијена је оптимална симплекс таблица из које се може уочити (5.5),

$$\tilde{b}^* \approx \begin{pmatrix} (5,7,2,2) \\ (8,12,3,3) \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

$$c^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Пошто је промена настала у вектору $\tilde{b}$, важи

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}^*(\Delta\tilde{b}_1) \approx B^{-1}\tilde{b}(\Delta\tilde{b}_1) \approx \begin{pmatrix} (2,4,1,1) \\ (5,9,2,2) \end{pmatrix},$$

$$A^*(\Delta\tilde{b}_1) = A^*,$$

$$c^*(\Delta\tilde{b}_1) = c^*,$$

$$c_B(\Delta\tilde{b}_1) = c_B,$$

$$\tilde{f}_0^*(\Delta\tilde{b}_1) \approx \tilde{f}_0 - c_B(\Delta\tilde{b}_1)b^*(\Delta\tilde{b}_1) \approx (4,8,2,2) \Rightarrow \tilde{f}^* \approx (-8,-4,2,2).$$

Како је $\tilde{b}_i^*(\Delta\tilde{b}_1) \succeq \tilde{0}$, односно $\mathcal{R}(\tilde{b}_i^*(\Delta\tilde{b}_1)) \geq 0$ за свако i, $\tilde{f}^*$ је оптимална вредност. Како је

$$\mathcal{R}((-8,-4,2,2)) > -12,$$

следи да ће се оптимална вредност повећати.

5.4.3 Промена у коефицијентима са леве стране

Пример 5.7. *Нека је дошло до промене коефицијента a_{12} са леве стране ограничења проблема датог у Примеру 5.1. Нека је нова вредност коефицијента $a_{12} = -1$. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?*

Решење. Променом коефицијента a_{12} добија се следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

при условима

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \preceq (5,7,2,2) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \preceq (3,5,1,1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \succeq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.1 добијена је оптимална симплекс таблица из које се може уочити (5.5), (5.8) и (5.9). Пошто је промена настала у матрици A, а коефицијент a_{12} одговара небазисној променљивој $\tilde{x}_2$, важи

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}^*(\Delta a_{12}) \approx \tilde{b}^*,$$
$$A^*(\Delta a_{12}) = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$c_B(\Delta a_{12}) = c_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$c^*(\Delta a_{12}) = c - c_B A^*(\Delta a_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{f}_0^*(\Delta a_{12}) \approx \tilde{f}_0 - c_B\tilde{b}^*(\Delta a_{12}) \approx (10, 14, 4, 4) \Rightarrow \tilde{f}^* \approx (-14, -10, 4, 4).$$

Како није $c_2^*(\Delta a_{12}) \geq 0$, $\tilde{f}^*$ није оптимална вредност. На Табелу 5.9 се може применити симплекс алгоритам.

Табела 5.9: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 5.7

Ажурирана симплекс таблица					
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{b}$
1	-1	1	1	0	$(5, 7, 2, 2)$
0	1	1	1	1	$(8, 12, 3, 3)$
0	-1	1	2	0	$\tilde{f} + (10, 14, 4, 4)$

Након примене симплекс алгоритма добија се Табела 5.10.

Табела 5.10: Оптимална симплекс таблица новог проблема

Оптимална симплекс таблица					
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{b}$
1	0	2	2	1	$(13, 19, 5, 5)$
0	1	1	1	1	$(8, 12, 3, 3)$
0	0	2	3	1	$\tilde{f} + (18, 26, 7, 7)$

Оптимално решење је

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*, \tilde{x}_5^*) \approx ((13, 19, 5, 5), (8, 12, 3, 3), \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}),$$

а оптимална вредност проблема је

$$\tilde{f}^* \approx (-26, -18, 7, 7).$$

Како је

$$\mathcal{R}((-26, -18, 7, 7)) < -12,$$

следи да ће се оптимална вредност смањити.

Пример 5.8. *Нека је дошло до промене коефицијента a_{11} са леве стране ограничења проблема датог у Примеру 5.1. Нека је нова вредност коефицијента $a_{11} = 2$. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?*

Решење. Променом коефицијента a_{11} добија се следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

$$\text{при условима}$$

$$\begin{cases} 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \preceq (5,7,2,2) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \preceq (3,5,1,1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \succeq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.1 добијена је оптимална симплекс таблица из које се може уочити (5.5), (5.8) и (5.9). Пошто је промена настала у матрици A, а коефицјент a_{11} одговара базисној променљивој $\tilde{x}_1$, важи

$$B(\Delta a_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}^*(\Delta a_{11}) \approx B^{-1}(\Delta a_{11})\tilde{b} \approx \begin{pmatrix} (5/2, 7/2, 1, 1) \\ (11/2, 17/2, 2, 2) \end{pmatrix},$$

$$A^*(\Delta a_{11}) = B^{-1}(\Delta a_{11})A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_B(\Delta a_{11}) = c_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c^*(\Delta a_{11}) = c - c_B A^*(\Delta a_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_0^*(\Delta a_{11}) \approx \tilde{f}_0 - c_B \tilde{b}^*(\Delta a_{11}) \approx (5,7,2,2) \Rightarrow \tilde{f}^* \approx (-7,-5,2,2).$$

Како је $c_i^*(\Delta a_{11}) \geq 0$ за свако i, $\tilde{f}^*$ је оптимална вредност. Како је

$$\mathcal{R}((-7,-5,2,2)) > -12,$$

следи да ће се оптимална вредност повећати.

5.4.4 Додавање нове променљиве или активности

Пример 5.9. *Нека је дошло до увођења нове променљиве $\tilde{x}_6$ са леве стране ограничења проблема датог у Примеру 5.1. Нека су нове вредности коефицијенти $c_6 = 1$, $a_{16} = -1$, $a_{26} = 2$. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?*

Решење. Увођењем нове променљиве $\tilde{x}_6$ добија се следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + \tilde{x}_6$$

при условима

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 - \tilde{x}_6 \preceq (5,7,2,2) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_6 \preceq (3,5,1,1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_6 \succeq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.1 добијена је оптимална симплекс таблица из које се може уочити (5.5), (5.8) и (5.9). Сада се могу одредити неопходне матрице и вектори.

$$\tilde{b}^*_{novo} \approx \tilde{b},$$

$$A^{(n+1)*} = B^{-1}A^{(n+1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A^*_{novo} = \begin{pmatrix} A^* & A^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_B A^{(n+1)*} = 2,$$

$$c^*_{novo} = \begin{pmatrix} c & c_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_B A^* & c_B A^{(n+1)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}^*_{0,novo} \approx \tilde{f}_0 - c_B \tilde{b}^*_{novo} \approx (10,14,4,4) \Rightarrow \tilde{f}^* \approx (-14,-10,4,4).$$

Како није $c^*_{novo,6} \geq 0$, $\tilde{f}^*$ није оптимална вредност. На симплекс таблицу (Табела 5.11) може се применити симплекс алгоритам.

Табела 5.11: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 5.9

Ажурирана симплекс таблица						
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{b}$
1	1	1	1	0	−1	(5, 7, 2, 2)
0	3	1	1	1	1	(8, 12, 3, 3)
0	3	1	2	0	−1	$\tilde{f} + (10, 14, 4, 4)$

Након примене симплекс алгоритма добија се Табела 5.12.

Табела 5.12: Оптимална симплекс таблица новог проблема

Оптимална симплекс таблица						
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{b}$
1	4	2	2	1	0	$(13, 19, 5, 5)$
0	3	1	1	1	1	$(8, 12, 3, 3)$
0	6	2	3	1	0	$\tilde{f} + (18, 26, 7, 7)$

Оптимално решење је

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*, \tilde{x}_5^*, \tilde{x}_6^*) \approx ((13, 19, 5, 5), \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, (8, 12, 3, 3)),$$

а оптимална вредност проблема је

$$\tilde{f}^* \approx (-26, -18, 7, 7).$$

Како је

$$\mathcal{R}((-26, -18, 7, 7)) < -12,$$

следи да ће се оптимална вредност смањити.

5.4.5 Додавање новог ограничења

Пример 5.10. *Нека је дошло до увођења новог ограничења*

$$2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \preceq (2, 4, 1, 1)$$

у преблему датог у Примеру 5.1. Како ће ова промена утицати на оптимално решење оригиналног проблема?

Решење. Увођењем новог ограничења добија се следећи проблем ФЛП-а

$$\min \quad \tilde{f} \approx -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

$$\text{при условима} \quad \begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \preceq (5, 7, 2, 2) \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \preceq (3, 5, 1, 1) \\ 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \preceq (2, 4, 1, 1) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \succeq 0. \end{cases}$$

У Примеру 5.1 добијено је оптимално решење

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*, \tilde{x}_5^*) \approx ((5, 7, 2, 2), \tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}, (8, 12, 3, 3)),$$

оптимална вредност

$$\tilde{f}^* \approx (-14, -10, 4, 4),$$

и Табела 5.3. Може се проверити да оптимално решење незадовољава ново ограничење. Након додавања новог ограничења добија се Табела 5.13.

Табела 5.13: Ажурирана симплекс таблица проблема из Примера 5.10

Ажурирана симплекс таблица						
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{b}$
1	1	1	1	0	0	$(5, 7, 2, 2)$
0	3	1	1	1	0	$(8, 12, 3, 3)$
2	-1	0	0	0	1	$(2, 4, 1, 1)$
0	3	1	2	0	0	$\tilde{f} + (10, 14, 4, 4)$

Како претходна таблица нема базисно допустиво решење, неопходно је ажурирати таблицу применом операције пивотирања. Добија се симплекс Табела 5.14 на коју се може применити алгоритам дуалне симплекс методе за ФЛП.

Табела 5.14: Симплекс таблица на коју се може применити дуал симплекс метода

Почетна дуал симплекс таблица						
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{b}$
1	1	1	1	0	0	$(5, 7, 2, 2)$
0	3	1	1	1	0	$(8, 12, 3, 3)$
0	-3	-2	-2	0	1	$(-12, -6, 5, 5)$
0	3	1	2	0	0	$\tilde{f} + (10, 14, 4, 4)$

Након примене алгоритма дуал симплекс методе добија се Табела 5.15.

Табела 5.15: Оптимална симплекс таблица новог проблема

Оптимална симплекс таблица						
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{b}$
1	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	$(-1, 4, 9/2, 9/2)$
0	$3/2$	0	0	1	$1/2$	$(2, 9, 11/2, 11/2)$
0	$3/2$	1	1	0	$-1/2$	$(3, 6, 5/2, 5/2)$
0	$3/2$	0	1	0	$1/2$	$\tilde{f} + (4, 11, 13/2, 13/2)$

Оптимално решење је

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*, \tilde{x}_5^*, \tilde{x}_6^*) \approx ((-1, 4, 9/2, 9/2), \tilde{0}, (3, 6, 5/2, 5/2), \tilde{0}, (2, 9, 11/2, 11/2), \tilde{0}),$$

а оптимална вредност проблема је

$$\tilde{f}^* \approx (-11, -4, 13/2, 13/2).$$

Како је

$$\mathcal{R}((-11, -4, 13/2, 13/2)) > -12,$$

следи да ће се оптимална вредност повећати.

Опширније о анализи осетљивости у фази линеарном програмирању може се пронаћи у [1], [3], [5], [6], [9], [10], [11].

Глава 6

Закључак

Анализа осетљивости је ефикасан поступак за утврђивање промене у решењу проблема ЛП-а након мале измене улазних података. Најчешће измене ових података подразумевају следеће промене у моделирању самог проблема ЛП-а:

- Промене коефицијената у функцији циља,
- Промене коефицијената у ограничењима,
- Додавање и избацивање променљивих,
- Додавање и избацивање ограничења.

Већина проблема који се добијају из неког већ познатог решеног проблама, могу се решити помоћу анализе осетљивости примењене на тај проблем. Анализа осетљивости се често користи у различитим областима примене ЛП-а, као што су: инжењерство, телекомуникације, економија, друштвене науке, епидемиологија, итд.

У овом раду наведене су најпре основне дефиниције које се односе на проблем ЛП-а, као и симлекс метода и њене модификације. Затим су изложене теоријске основе анализе осетљивости и начин примене у зависности од тога где је дошло до промене улазних података. На крају рада илустрована је и примена анализе осетљивости на фази проблеме ЛП-а.

Литература

[1] N. M. Amiri, S. H. Nasseri, A. Yazdani. *Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems*, Vol. 1, 68-84, Iranian Journal of Operations Research, 2009.

[2] S. P. Bradley, A. C. Hax and T. L. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, 1977.

[3] M. Bergmann. *An introduction to many-valued and fuzzy logic: semantics, algebras, and derivation systems*, Cambridge University Press, 2008.

[4] Đ. Dugošija. *Linearno programiranje*, Zavod za udžbenike, 2011.

[5] A. Ebrahimnejad. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 53, 1878-1888, Elsevier, 2011.

[6] A. Ebrahimnejad, S. H. Nasseri, F. H. Lotfi and M. Soltanifar. *A primal-dual method for linear programming problems with fuzzy variables*, Vol. 4, 189-209, European J. Industrial Engineering, 2010.

[7] H. A. Eiselt and C. L. Sandblom. *Linear programming and its Applications*, Springer, 2007.

[8] S. I. Gass. *Linear programing: Methods and Applications*, fifth edition, Courier Corporation, 2003.

[9] B. Kheirfam, J. L. Verdegay. *The dual simplex method and sensitivity analysis for fuzzy linear programing with symetric trapezoidal numbers*, Fuzzy Optim Decis Making 12, 171-189, Springer, 2013.

[10] H. R. Maleki, M. Tata and M. Mashinchi. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 109, 21-33, Elsevier, 2000.

[11] S. H. Nasseri and A. Ebrahimnejad. *A fuzzy dual simplex method for a fuzzy number linear programming problem*, Vol. 5, 81-95, Pushpa Publishing House, 2010.

[12] P. R. Thie and G. E. Keough. *An introduction to Linear programing and game theory*, third edition, Wiley, 2008.

[13] R. J. Vanderbei. *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 4th edition, Springer, 2010.

[14] W. L. Winston and J. B. Goldberg. *Operation research: applications and algorithms*, fourth edition, Thomson Brooks/Cole, 2004.