Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Smalijanov pristup Gedelovoj teoremi nepotpunosti

Master rad

Student:
Milica Tanović

Mentor:
dr Slavko Moconja

Beograd,
septembar 2021.

Sadržaj

Uvod

Rejmond Smalijan[1] (1919 – 2017) je bio američki matematičar, logičar i filozof, a takođe i muzičar i mađioničar. Popularnost je stekao svojim knjigama namenjenim širokom krugu čitalaca u kojima je kroz logičke zagonetke uspevao da približi apstraktne matematičke ideje običnom čoveku, da pokaže da je matematika primenljiva i zanimljiva, da nije bauk. Većina njegovih knjiga je puna logičkih zagonetaka i smicalica koje je tokom celog života kreirao, a rešavanje mnogih od njih predstavlja zabavu, kako odraslima, tako i deci školskog uzrasta. Stekao je paralelno matematičko i mužičko obrazovanje. Bio je koncertni pijanista, a izučio je i mađioničarski zanat. Svoja umeća je kombinovao u svakoj prigodnoj situaciji, bilo da se radi o matematičkom kongresu ili druženju sa prijateljima. Uvek i u svakoj prilici je imao spremnu neku novu logičku zagonetku i špil karata u džepu, a još ako bi se klavir našao u blizini ...

Svoju naučnu karijeru Rejmond Smalijan započinje kao student doktorskih studija na Prinston univerzitetu. Posebno interesovanje pokazuje za ne samo najsloženije u to vreme, nego i najfascinantnije ikad, teoreme matematičke logike, Gedelove[2] teoreme nepotpunosti. 1957. godine je objavio rad [3] u časopisu The Journal of Symbolic Logic u kome pokazuje da se nepotpunost formalnih matematičkih sistema može izložiti na elementarniji i neuporedivo jednostavniji način od originalnog Gedelovog iz 1931. godine ([1]). Na tu temu je i doktorirao 1959. godine na Prinston univerzitetu, a mentor mu je bio poznati matematičar Alonzo Čerč[3]. Osim popularnih knjiga, objavio je par naučnih monografija i univerzitetskih udžbenika. Njegov specifičan, netradicionalan način prezentacije matematičke logike je danas široko priznat i prihvaćen u nastavi matematičke logike širom sveta.

Općinjenost logikom i Gedelovim idejama ga je držala celog života i u svojim popularnim knjigama uspeva da te ideje približi mnogima i objasni njihovu suštinu na jeziku koji mogu da razumeju. I sami naslovi tih njiga “The Chess Mysteries of Sherlock Homes”, “The Lady or the Tiger?”, “Alice in the Puzzle-Land, “The Riddle of Scheherazade” ili “The Magic Garden of George B and Other Logic Puzzles”, govore dosta o načinu na koji su pisane. Te knjige su imale visoke tiraže, a prodavale su se ne samo u akademskim knjižarama, već i na aerodromima i autobuskim stanicama.

Osnovne logičke ideje Smalijan uspeva da opiše kroz priče koje se događaju u izmišljenim zajednicama u kojima svaki član ili uvek govori istinu, ili uvek laže. U takvu zajednicu dolazi neki od fiktivnih Smalijanovih likova, na primer detektiv inspektor Krejg, koji ima odličnu moć logičkog rasuđivanja i priče počinju ...

[1]eng. Raymond Smullyan
[2]Kurt Gödel (1906 - 1978) austrijski matematičar, filozof i logičar
[3]Alonzo Church (1903 - 1995), američki matematičar

Cilj rada je da se kroz izabrane Smalijanove zagonetke i priče dođe do prve Gedelove teoreme o nepotpunosti. Prvo poglavlje rada sadrži izabrane Smalijanove zagonetke iz iskazne logike. Radnja tih zagonetki se dešava na Ostrvu Iskrenih i Lažova. U drugom pogavlju je opisana formalna iskazna logika i formulisana teorema potpunosti za nju. Na kraju poglavlja, kroz dve Smalijanove zagonetke se motiviše problem nepotpunosti. Treće poglavlje sadrži nekoliko prepričanih Smalijanovih priča kroz koje on ilustruje neke poznate apstraktne matematičke činjenice, kao što su Paradoks lažova, Raselov paradoks i Kantorova teorema. Te priče služe kao uvod u složenije priče o Gedeovoj teoremi nepotpunosti koje su u četvrtom poglavlju. U delu 4.2 je priča o Logičaru, Knjizi rečenica i Knjizi skupova. Iza te priče se krije suština prve Gedelove teoreme nepotpunosti. U petom poglavlju je definisan pojam apstraktnog Gedelovog sistema i dokazana Gedelova teorema nepotpunosti.

1 Ostrva Iskrenih i Lažova

Da bi približio osnovne logičke zakone, zakone iskazne logike, širokom krugu čitalaca Smalijan radnje svojih priča smešta na izmišljena ostrva na kojima je stanovništvo podeljeno u dva plemena: pleme Iskrenih i pleme Lažova. Na svakom od njih važe *pravila ostrva*:

- Svaki stanovnik je ili Iskren ili Lažov;
- Iskreni uvek govore istinu;
- Lažovi uvek lažu.

Pripadnost određenog stanovnika plemenu se ne može utvrditi ni po njegovom izgledu, ni po polu kome pripada. Na takvo ostrvo dolazi jedan od fiktivih Smalijanovih likova Logičar, koji ima izraženu moć logičkog rasuđivanja. Logičar je unapred upoznat sa plemenskom situacijom na ostrvu, tj. upoznat je sa pravilima ostrva. Osim toga, on nema nikakvih dodatnih informacija o ostrvu ili o plemenskoj pripadnosti ma kog stanovnika.

1.1 Prvo ostrvo

Radoznali turista Logičar dolazi na prvo ostrvo.

Zagonetka 1.1. Kada stanovinik ostrva Iskrenih i Lažova kaže: "Ja sam Iskren", da li Logičar može odrediti iz kog je on plemena?

Rešenje. Nije moguće utvrditi iz kog je plemena, jer takav iskaz može dati svaki stanovnik ostrva. Ako bi dati stanovnik bio Iskren, tada bi "Ja sam Iskren" bio tačan iskaz, što može izjaviti svaki Iskren stanovnik. A ako bi stanovnik bio iz plemena Lažova, iskaz "Ja sam Iskren" bi bio laž, koju bi svaki Lažov i rekao.

Razmišljajući na sličan način kao u prethodnoj zagonetci, Logičar može da zaključi da nijedan stanovnik ostrva nikada neće izjaviti "Ja sam Lažov". Ukoliko dati stanovnik pripada plemenu Iskrenih, onda on govori istinu tj. on je Lažov, što nije moguće. Slično, ukoliko laže, onda bi njegov iskaz "Ja sam Lažov" bio lažan sto bi značilo da je Iskren. Opet nemoguće.

U sledećih par zagonetki, šetajući ostrvom Logičar sreće stanovnike A i B i pokušava da utvrdi iz njihovih iskaza ko je od njih Lažov, a ko Iskren. Svaki primer koji je naveden je nezavistan od ostalih.

Zagonetka 1.2.
A: "B je Iskren i ja sam Iskren"
B: "A je Lažov".
Ko pripada kom plemenu?

Rešenje. Neka je stanovnik B Iskren, tada će njegov iskaz biti tačan, tj. A je Lažov, što se slaže sa iskazom stanovnika A koji je netačan.

Ukoliko bi stanovnik B bio Lažov, to bi značilo da A nije Lažov, već da je Iskren, pa je iskaz stanovnika A tačan, tj. B je Iskren i A isto. To je nemoguće, jer B je Lažov.

Dakle, jedino moguće je da stanovnik B pripada plemenu Iskrenih, a A plemenu Lažova.

Zagonetka 1.3. Stanovnik B kaže: "A i ja smo iz istog plemena". Da li se može zaključiti iz kojeg je plemena stanovnik A?

Rešenje. Ako je stanovnik B iz plemena Iskrenih, tada on govori istinu pa će njegov iskaz da su A i B iz istog plemena biti tačan, da pripadaju plemenu Iskrenih.

Da je stanovnik B lagao, iskaz "A i ja smo iz istog plemena" bi bio netačan, tj. A i B su iz različitih plemena. Kako je B Lažov, tada će stanovnik A biti iz plemena Iskrenih.

Može se zaključiti da će stanovnik A u oba slučaja biti iz plemena Iskrenih.

Zagonetka 1.4. Stanovnik B daje izjavu da su on i stanovnik A Lažovi. Šta se može zaključiti iz ovakve izjave?

Rešenje. Jasno je da će stanovnik B biti Lažov, jer ukoliko bi bio Iskren njegov iskaz da su oboje stanovnika Lažovi morao bi da bude tačan, što bi značilo da je B Lažov. Kontradikcija.

Kako je stanovnik B Lažov, njegov iskaz je netačan, pa će iskaz "Oboje smo Lažovi" biti netačan. Tačnije, najviše jedan stanovnik je Lažov, i to bi bio stanovnik B. Stanovnik A mora biti iz plemena Iskrenih.

Zagonetka 1.5. Stanovnik A kaže Logičaru da ako je on Lažov, onda je stanovnik B Iskren. Šta Logičar može da zaključi iz ove izjave?

Rešenje. Neka je stanovnik A Iskren, tada njegov iskaz mora biti tačan. Ali kako je A Iskren, početni deo iskaza je netačan, pa će ceo iskaz nezavisno od drugog dela biti tačan. Tačnije, ne može se zaključiti kom plemenu stanovnik B pripada.

A da je stanovnik A bio Lažov, njegov iskaz bi bio netačan. Prvi deo iskaza je tačan, da je A Lažov, i da bi ceo iskaz bio netačan, stanovnik B mora biti Lažov.

Zaključak, iz iskaza "Ako sam je Lažov, onda je B Iskren" je neodređen, ne mogu se tačno odrediti tipovi stanovnika A i B.

Sledeća zagonetka je naizgled slična prethodnoj, ali će moći da se dobije konkretan odgovor.

Zagonetka 1.6. Logičar pita stanovnika A da li on pripada plemenu Iskrenih. A odgovara: "Ako sam je Iskren, onda je na ostrvu zakopano gusarsko blago". Šta može da zaključi Logičar iz ove izjave, ima li blaga na ostrvu?

Rešenje. Neka je stanovnik A Iskren, tada je njegov iskaz tačan, pa na ostrvu ima blaga. Ovo pokazuje da *ako* je stanovnik A iskren, *onda* na ostrvu ima blaga, a to je ono što je stanovnik A i rekao. Njegov iskaz je tačan, pa onda on mora biti Iskren. Sada se zna da je stanovnik A Iskren, a već je pokazano da ako je on Iskren, onda na ostrvu ima blaga. Dakle, na ostrvu je zakopano blago.

Zagonetka 1.7. Ako je stanovnik A izjavio Logičaru : "Ja sam Lažov ili je B Iskren", šta bi Logičar mogao da zaključi iz ovakvog iskaza?

Rešenje. Ako je stanovnik A Iskren, tada je on rekao istinu, tj. on je Lažov (što nije), ili je drugi stanovnik Iskren, pa stanovnik B mora biti Iskren.

Da je stanovnik A lagao, iskaz "Ja sam Lažov ili je B Iskren" će biti tačan nezavisno kojem plemenu pripada drugi stanovnik. To je nemoguće jer Lažov uvek laže.

Dakle, iskaz "Ja sam Lažov ili je B Iskren" jedino može reći stanovnik koji pripada plemenu Iskrenih, pa i stanovnik B pripada plemenu Iskrenih.

Zagonetka 1.8. Stanovnik A kaže: "Ili sam ja Lažov ili je 2 plus 2 jednako 5". Da li je moguće čuti ovakav iskaz na ostrvu?

Rešenje. U iskazu stanovnika A imamo netačnu izjavu da je 2 plus 2 je 5. Dakle imamo ili je on Lažov ili je netačno. Da je on Iskren, iskaz bi bio netačan, kako je on rekao da je Lažov. A da je lagao, njegov iskaz bi bio tačan, pošto on jeste Lažov. Ali to je nemoguće, jer iskazi Lažova su uvek netačni.

Napomena: Da je stanovnik rekao "Ili sam ja Iskren ili je 2 plus 2 jednako 5", ovakav iskaz bi se mogao čuti na ostrvu.

U međuvremenu prilazi i stanovnik C Logičaru, i rasprava se nastavlja.

Zagonetka 1.9. A i B izjavljuju sledeće:
A: "Svi smo Lažovi"
B: "Tačno jedan od nas je Lažov".
Da li se može odrediti ko pripada kojem plemenu od stanovnika A, B i C?

Rešenje. Iskaz stanovnika A je laž, jer da su svo troje stanovnika Lažovi, onda bi iskaz stanovnika A bio tačan. Dakle, A je Lažov. Ako bi stanovnik B bio Iskren, to bi značilo da je samo stanovnik A Lažov dok su B i C Iskreni. A da je B lagao, onda je iskaz "Tačno jedan od nas je Lažov" je netačan. Što bi značilo da ima ili nijedan ili dva ili tri Lažova. Sva tri stanovnika da budu Lažovi je nemoguće, a znamo da je A Lažov kao i B. Dakle C bi bio Iskren.

Tipovi A i C su određeni, dok za stanovnika B ne može se odrediti kojem plemenu pripada.

Zagonetka 1.10. Stanovnik A kaže : "B i C su iz istog plemena". Zatim Logičar pita B da li su A i C iz istog plemena. Koji odgovor će B dati?

Rešenje. Neka je A Iskren stanovnik ostrva. Tada su B i C iz istog plemena. Ukoliko je B Iskren, tada bi i C takođe bio Iskren. Stanovnik B na pitanje da li su A i C iz istog plemena odgovara sa "da". Sledeći slučaj da je stanovnik B Lažov, on bi odgovorio sa "da" na pitanje da li su A i C iz istog plemena, kako je to laž, jer stanovnik C je Lažov (isto kao i B), a stanovnik A je Iskren. Do sada stanovnik B odgovara sa "da" na dato postavljeno pitanje. I to sve pod pretpostavkom da je stanovnik A Isken.

Sada neka je stanovnik A Lažov, tada bi stanovnici B i C pripadali različitim plemenima. Neka je stanovnik B Iskren, tada će stanovnik C biti Lažov kao i A, pa će na pitanje da li su A i C iz istog plemena reći "da". Preostaje još da je stanovnik B Lažov, tada će C biti Iskren (različiti od stanovnika B koji je Lažov). Na pitanje da li su A i C iz istog plemena stanovnik B će lagati i reći da A i C jesu iz istog plemena. Na kraju, bilo kojem plemenu da pripada, na pitanje da li su A i C iz istog plemena, B će odgovoriti sa "da".

Logičar se pozdravlja sa stanovnicima A, B i C, zatim nastavlja da istražuje ostrvo. Prolazeći pored sudnice zainteresuje se za suđenje koje je bilo u toku.

Zagonetka 1.11. Neko iz plemena Iskrenih je opljačkao banku na ostrvu. Zna se da je pljačkaš jedan od stanovnika D, E, F ili G. Osumnjičeni su dali sledeće izjave:
D : "G je kriv, a E je Lažov"
E : "Ako D nije kriv, onda je F Iskren"
F : "Krivac je E ili G"
G : "Ako su E i F Iskreni, onda je D kriv".
Šta je Logičar mogao zaključiti: ko je krivac, a ko pripada kom plemenu?

Rešenje. Slušajući izjave osumnjičenih, Logičar lako dolazi do zaključka da D nije kriv.

Ako bi D bio kriv, onda bi izjava stanovnika E bila tačna, jer D jeste kriv, pa bi E bio Iskren. To bi značilo da je izjava stanovnika D laž. Zna se da krivac nije Lažov. Dakle, D nije kriv.

Da bi Logičar pronašao krivca, on dodatno pretpostavlja da je stanovnik E Lažov. Tada bi izjava stanovnika E bila laž, tj. da D nije kriv i da je F Lažov. Kako je F Lažov, onda iz njegove izjave zna se da krivci nisu ni E ni G. U tom slučaju izjava stanovnika G je tačna, pa je on jedini stanovnik koji može biti krivac, ali to je u kontradikciji sa izjavom stanovnika F, da G nije kriv. Dakle, pretpostavka da je stanovnik E Lažov nije dobra.

Dakle, E je Iskren. Takođe, zna se da D nije kriv, pa iz izjave stanovnika E stanovnik F mora biti Iskren. Iskaz stanovnika D je netačan jer D tvrdi da je E Lažov, što nije tačno. D mora biti Lažov. Ostaje da se utvrdi kom plemenu pripada stanovnik G. On kaže da ako su E i F Iskreni, što jeste tačno, ali onda netačno tvrdi da je D kriv. Time je stanovnik G Lažov. Preostaje odrediti ko je opljačkao banku. Logičar zna da je to Iskren stanovnik. Iskreni osumnjičeni su stanovnici E i F. Iz iskaza stanovnika F krivac je E ili G. Ali kako je G Lažov, onda G ne može biti kriv. Dakle, Logičar je znao da su E i F iz plemena Iskrenih, i da su D i G Lažovi, prema tome stanovnik E je opljačkao banku.

Logičar u međuvremenu razmišlja kakvu izjavu bi trebao da da stanovnik ostrva koji je nevin, pa da se iz njegove izjave, a nezavisno od plemenske pripadnosti, može zaključi da je nevin.

Zagonetka 1.12. Sledeće suđenje je došlo na red, optužen je bio stanovnik H. Optuženom H bilo je dozvoljeno da kaže samo jedan iskaz u svoju odbranu. Posle nekog vremena H je rekao: “Osoba koja je stvarno kriva za ovaj zločin je Lažov”.

Da li je stanovnik H kriv? Da li se može odrediti kom plemenu pripada?

Rešenje. Neka je optuženi stanovnik Iskren. Tada je njegov iskaz tačan, tj. osoba koja je kriva jeste iz plemena Lažova, što ga oslobađa optužbe.

Ako bi H pripadao plemenu Lažova, njegov iskaz bi bio lažan i krivac bi bio iz plemena Iskrenih. To ga takođe oslobađa optužbe.

Zaključak je da je stanovnik H nevin kome god plemenu pripadao.

Kada su se završila suđenja Logičar je naišao na jedan bračni par sa ostrva i pokušao je da zaključi ko je Iskren, a ko Lažov, kao i ko je muž, a ko žena. U početku je navedeno da stanovnici ostrva se ne razlikuju jedni od drugih po izgledu, bilo da su muškarci ili žene.

Zagonetka 1.13. Logičar prilazi bračnom paru i pita jedno od njih: “Kom plemenu pripadaš i kog si pola?”. Dobija odgovor: “Ja sam muškarac i pripadam plemenu Lažova”. Na to drugi dodaje: “To nije istina”. Ko je ko?

Rešenje. Logičar rezonuje, neka je iskaz prvog stanovnika tačan, da je on muškarac i da je iz plemena Lažova. Ali to nije moguće, jer Lažovi nikada ne govore istinu. Dakle, prvi stanovnik mora biti Lažov. Kako je prvi lagao, iskaz drugog je tačan, pa je drugi stanovnik Iskren.

Kako prvi supružnik pripada plemenu Lažova, njegov iskaz je laž, tj. prvi supružnik je žena. Pa je prvi supružnik žena Lažov, a drugi supružnik mora biti Iskren muškarac.

1.2 Drugo ostrvo

Pored prvog ostrva nalazi se jedno manje ostrvo gde su se nastanili Iskreni i Lažovi. Ali na tom ostrvu, Logičar saznaje da su neki stanovnici ostrva ludi. Ludi stanovnici ostrva su u potpunoj zabludi u svojim uverenjima, svi tačni iskazi u koje veruju misle da su netačni i svi netačni iskazi u koje veruju misle da su tačni. Stanovnici koji nisu ludi znaju koji su tačni, a koji netačni iskazi. Ako je stanovnik iz plemena Iskrenih i lud, on će govoriti laži, kao i Lažov koji je pri zdravom razumu. Lažovi koji su ludi govoriće istinu, kao i svaki stanovnik plemena Iskrenih koji je razuman.

Na primer, zdravorazuman stanovnik plemena Iskrenih će za iskaz “Dva plus dva je pet” reći da je netačan, ali će i lud Lažov takođe reći da je netačan, pri čemu on stvarno veruje da dva plus dva jeste pet. Lud Iskren stanovnik će reći da je iskaz tačan, jer veruje da jeste tačan iskaz. Takođe i zdravorazuman Lažov će reći da dva plus dva jeste pet, jer zna da to nije tačno, pa će lagati da jeste tačno.

Zagonetka 1.14. Stanovnik ostrva kaže Logičaru : “Ja sam lud Iskren stanovnik.” Šta se može zaključiti iz ovakvog iskaza?

Rešenje. Logičar rezonuje, lud Iskren stanovnik ostrva takvu izjavu neće dati, jer takav stanovnik uvek laže. Ako bi stanovnik bio zdravorazuman Iskren onda bi rekao da nije lud Iskren, jer on uvek govori istinu (u koju i veruje). Prema tome, stanovnik nije Iskren, već Lažov.

Da je stanovnik lud Lažov, govorio bi istinu (u koju ne veruje), pa će reći da nije lud Iskren stanovnik. Prema tome, stanovnik nije lud Lažov.

Iz iskaza “Ja sam lud Iskren stanovnik” može se zaključiti da je stanovnik zdravorazuman Lažov.

Zagonetka 1.15. Stanovnik ostrva kaže Logičaru : “Ja sam Lažov.” Šta se može zaključiti iz ovakvog iskaza?

Rešenje. Ako bi stanovnik pripada plemenu Iskrenih i bio zdravog razuma, on nikada ne bi lagao i rekao da je Lažov. Ali zato bi lud Iskren stanovnik rekao da jeste Lažov, jer stvarno misli da jeste Lažov.

Da je stanovnik zdravorazuman Lažov, on nikada ne bi rekao istinu, da je Lažov, ali bi zato ludi Lažov rekao da jeste, jer misli da nije Lažov.

Iz iskaza “Ja sam Lažov” može se jedino zaključiti u kom mentalnom stanju je stanovnik, tj. stanovnik je lud.

2 Iskazna logika

Iskazi su rečenice govornog jezika koje imaju logičku vrednost, ili tačno ili netačno, ne mogu biti u istom trenutku i tačne i netačne. Iskazom se za nešto tvrdi da li je tačno ili ne. Na primer, iskazi su "Ja sam čovek", "2+2=5" i "Ako je nebo plavo, onda će se veš osušiti". Prvi iskaz je tačan, pošto ga je rekao čovek, drugi iskaz je netačan, a treći iskaz je neodređen, tj. zavisi od trenutka u kome je kazan; na primer, da je zima i ako jeste nebo plavo, veš se neće osušiti u svim prilikama.

Od jednostavnijih iskaza mogu se praviti složeniji iskazi korišćenjem logičkih veznika : *ne, i, ili, ako ... onda ... , ako i samo ako.*

- **Negacija**
  Negacija iskaza P je iskaz *ne* P, ili *nije P*, a moze se čitati i kao *u suprotnom od P.* Na primer, negacija iskaza "Pada kiša" jeste "Ne pada kiša", dok negacija iskaza "Sunce je crveno" nije iskaz "Sunce je žuto" nego iskaz "Sunce nije crveno".

- **Konjunkcija**
  Konjukcija iskaza P i iskaza Q je iskaz čije je značenje "P *i* Q", ili "*I* P *i* Q". Na primer, iskaz "Voda je slana i topla" je konjunkcija iskaza "Voda je slana" i "Voda je topla". Ukoliko su iskazi P i Q tačni, tada je i njihova konjunkcija tačna; u slučaju da je bar jedan od iskaza netačan, netačna je i njihova konjunkcija.

- **Disjunkcija**
  Logički veznik "*ili*", formalno, *disjunkcija.* Iskazna formula P *ili* Q je tačna ako barem jedan od iskaza P i Q je tačan, inače je netačna. Na primer, "Pada kiša ili pada grad" je tačan iskaz ako pada nešto od dva, a mogu i oba. Ovaj iskaz je netačan samo u slučaju kada ne pada ni kiša ni grad.

- **Implikacija**
  Implikacija je najzanimljiviji logički veznik koji se koristi u iskaznoj logici. Ona znači *"Ako je P onda je i Q"* i njome se tvrdi da ako je tačan prvi iskaz P, tada mora biti i tačan drugi iskaz Q; ona je netačna samo u slučaju da je iskaz P tačan, a iskaz Q netačan. Na primer, iskaz "Ako mačka ode, onda miševi kolo vode" će biti netačan samo u slučaju ako je mačka otišla, a miševi ne vode kolo.

- **Ekvivalencija**
  Ima značenje *"P ako i samo ako Q"*, ili da iskazi P i Q imaju istu logičku vrednost. Primer netačne ekvivalencije "Zemlja se okreće oko Sunca ako i samo ako se Sunce okreće oko Zemlje".

2.1 Iskazne formule

Do sada je bilo reči o iskazima govornog jezika, ali matematika se ne bavi govornim jezikom. Dosadašnji iskazi u ovom poglavlju bili su u govornom jeziku, ali potrebno je definisati iskaze u matematičkom jeziku. Iskazna logika se ne bavi iskazima, već se bavi iskaznim formulama kao i posledicama pretpostavki i izvođenjem zaključaka iz njih.

Kao i što običan govorni jezik ima slova, za formalni jezik iskazne logike postojaće alfabet koji će se koristiti prilikom građenja logičkih iskaza i formula.

Iskazne formule su algebarski izrazi, koji su nastali građenjem koristeći logičke veznike i simbole po kasnije datim pravilima. Alfabet iskazne logike je skup unapred izabranih simbola. Sledeći skupovi simbola čine *alfabet*:

- iskazna slova, uglavnom se označavaju malim latiničnim slovima $p, q, r, ..., p_1, q_1, r_1, ...$ Skup svih iskaznih slova obeležava sa $Prop$.
- logički veznici: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$
- logičke konstante :$\top \ \ \bot$
- zagrade : ( )

Logička konstanta $\top$ se čita kao “tačno”, a logička konstanta $\bot$ ima značenje “netačno”.

Reč je bilo koji konačan niz simbola alfabeta. Kako bi reči imale smisla u formalnom jeziku one se definišu rekurzijom. Takve reči se zovu iskazne formule.

Definicija 2.1. Skup iskaznih formula For jeste najmanji (u smislu inkluzije, $\subseteq$) skup reči nad alfabetom iskazne logike takav da:

- $Prop \cup \{\top, \bot\} \subseteq For$, tj. svako iskazno slovo ili konstanta je jedna iskazna formula
- ako $\alpha \in For$, onda i $\neg\alpha \in For$
- ako α, $\beta \in For$, onda i $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ i $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ pripadaju skupu iskaznih formula For.

Skup iskaznih formula je rekurzivno definisan, najpre se uvedu najjednostavnije iskazne formule (iskazna slova ili logička konstanta), zatim se formiraju nove, složenije formule uz pomoć gore navedenih pravila.

Zato, da bi se dodelila logička vrednost iskaznim formulama, potrebno je samo dodeliti logičke vrednosti iskaznim slovima, jer se logička vrednost složenijih formula računa uz pomoć pravila (tj. tablica) za logičke operacije negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije.

Definicija 2.2. *Valuacija* je preslikavanje skupa iskaznih slova u skup $\{0,1\}$, $v : Prop \to \{0,1\}$.

Definicija 2.3. *Proširenje valuacije* v je funkcija $\hat{v}$ koja preslikava skup svih iskaznih formula u skup $\{0,1\}$ tj. $\hat{v} : For \to \{0,1\}$, pri čemu za sve formule α i β vrednosti valuacija su sledeće:

- $\hat{v}(\top) = 1$ i $\hat{v}(\bot) = 0$.
- **Negacija**

  Ako je $\hat{v}(\alpha) = 1$, onda je $\hat{v}(\neg\alpha) = 0$. Ukoliko je $\hat{v}(\alpha) = 0$, onda je $\hat{v}(\neg\alpha) = 1$.
- **Konjunkcija**

  Ukoliko su $\hat{v}(\alpha) = \hat{v}(\beta) = 1$ tada je vrednost formule $\hat{v}(\alpha \wedge \beta) = 1$, u ostalim slučajevima vrednost formule biće $\hat{v}(\alpha \wedge \beta) = 0$.
- **Disjunkcija**

  Ako je valuacija bar jedne od formula α ili β jednaka 1, onda će i valuacija formule $\alpha \vee \beta$ biti 1. Ako je $\hat{v}(\alpha) = \hat{v}(\beta) = 0$, onda je $\hat{v}(\alpha \vee \beta) = 0$.
- **Implikacija**

  Ako je valuacija formula $\hat{v}(\alpha) = 1$ i $\hat{v}(\beta) = 0$, onda je valuacija formule $\alpha \Rightarrow \beta$ je $\hat{v}(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$. U ostalim slučajevima valuacija je jednaka 1.
- **Ekvivalencija**

  Ako su formule iste tačnosti, onda je $\hat{v}(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1$. Inače je vrednost 0.

Ako za iskaznu formulu F i valuaciju v važi $\hat{v}(F) = 1$, onda se kaže da je formula F tačna pri valuaciji v, ili da je v jedan *model* formule F.

Princip istinitosne funkcionalnosti. Valuacija iskazne formule isključivo zavisi od valuacije iskaznih slova koja se u njoj pojavljuju. Ako su v_1, v_2 valuacije koje imaju istu vrednost za svako iskazno slovo p koje se pojavljuje u formuli F, onda je i $\hat{v}_1(F) = \hat{v}_2(F)$.

Definicija 2.4. *Tautologija* je iskazna formula F koja je tačna pri svim valuacijama po slovima. tj. ako pri svakoj valuaciji formula F ima vrednost 1, u oznaci $\models F$.

Suprotno od tautologija, postoje iskazne formule koje će uvek biti netačne. *Kontradikcija* je iskazna formula koja je netačna po svim valuacijama slova u njoj. Najjednostavniji primer kontradikcije je $p \wedge \neg p$.

Dve iskazne formule F i G su *logički ekvivalentne* akko pri svakoj valuaciji v imaju iste vrednosti, $\hat{v}(F) = \hat{v}(G)$. Iskazne formule $F \wedge \top$ i F kao i

$\neg(p \wedge q)$ i $\neg p \vee \neg q$ su primeri logički ekvivalentnih formula. Ako u formuli F zamenimo neku potformulu logički joj ekvivalentnom formulom dobija se formula logički ekvivalentna formuli F.

Teorija je proizvoljan skup iskaznih formula.

Definicija 2.5. Za valuaciju v se kaže da je *model* teorije T, što se označava sa $v \models T$, ako i samo ako za svaku formulu $F \in T$ važi $\hat{v}(F) = 1$.

Za neku teoriju kaže se da je *zadovoljiva* akko ima barem jedan model.

Definicija 2.6. Formula F je *semantička posledica* (ili logička posledica) teorije T, što se označava sa $T \models F$, ako i samo ako svaka valuacija v koja je model teorije T mora biti i model formule F.

2.2 Iskazna logika na ostrvu Iskrenih i Lažova

Pretpostavljeno je da Logičar ima izraženu moć logičkog rasuđivanja. Podrazumeva se da on odlično poznaje iskaznu logiku, pa se postavlja pitanje kako mu ona može pomoći na ostrvu.

Potrebno je izabrati skup iskaznih slova *Prop*, čiji će elementi odgovarati osnovnim iskazima koji će se pominjati na ostrvu. Zato svakom stanovniku ostrva se dodeli jedno iskazno slovo, koje odgovara osnovnom iskazu da je dati stanovnik pripadnik plemena Iskrenih. Zbog jednostavnosti zapisa pretpostavlja se da stanovnicima ostrva A, B, C,... odgovaraju redom slova $a, b, c, ...$ Prema tome, slovo a odgovara iskazu "A je Iskren". Skup *Prop* po potrebi sadrži i dodatna slova koja odgovaraju iskazima koji se ne odnose na pripadnost stanovnika plemenima ostrva. Primeri takvih iskaza su "Na ostrvu ima blaga" koji se pojavljuje u zagonetci 1.6, ili "Optuženi je kriv", u zagonetci 1.11.

Kada je izabran skup iskaznih slova koji odgovaraju iskazima koji se odnose na dešavanja na ostrvu, onda se iskaznim formulama na prirodan način dodeljuju složeniji iskazi. Pri tome, iskaz koji odgovara iskaznoj formuli ne mora biti jedinstven. Na primer, ako su A i B stanovnici ostrva, onda formuli $\neg a$ odgovara iskaz *"A nije Iskren"* ili *"A je Lažov"*, formuli $a \wedge b$ odgovara iskaz *"A je Iskren i B je Iskren"* ili *"A i B su Iskreni"*. Ako iskaznoj formula p odgovara iskaz P, onda se formula p može smatrati prevodom iskaza P u jezik iskazne logike.

Neka je valuacija $v : Prop \to \{0, 1\}$ takva da je $v(x) = 1$ ako je osnovni iskaz kome odgovara iskazno slovo x tačan, a u suprotnom je $v(x) = 0$. Tada će vrednost svake iskazne formule F $\hat{v}(F)$ biti 1 ako i samo ako je neki (ekvivalentno svaki) iskaz koji odgovara formuli F tačan. Drugim rečima, valuacija v je model iskazne formule F, odnosno formula F je tačna pri valuaciji v, ako i samo ako je iskaz koji odgovara formuli F tačan. Zato se kaže da je iskazna formula F tačna na ostrvu, ako je $\hat{v}(F) = 1$.

Smalijan koristi sledeće jednostavno tvrđenje za prevod izjava stanovnika ostrva na jezik iskazne logike.

Tvrđenje 2.7. Neka je A stanovnik ostrva Iskrenih i Lažova i P iskaz koji odgovara iskaznoj formuli p. Ako je stanovnik A dao iskaz P, tada je iskazna formula $a \Leftrightarrow p$ tačna.

Dokaz. Neka je A iz plemena Iskrenih, tj. formula a je tačna. Budući da A govori uvek istinu, iskaz P je tačan, pa je i formula p tačna. Zato je i formula $a \Leftrightarrow p$ tačna.

Ako je stanovnik A Lažov, onda je njegov iskaz P netačan. To znači da je i p netačna formula. Pošto je stanovnik A Lažov i formula a je netačna, pa je formula $a \Leftrightarrow p$ tačna. □

Dakle, sve to pod pretpostavkom da je Logičar došao na ostrvo znajući da na njemu važe pravila ostrva, ali ne znajući unapred plemensku pripadnost ni jednog od stanovnika ostrva. Takođe, pretpostavlja se da Logičar unapred ne zna da li su tačni drugi osnovni iskazi koji se pojavljuju u primerima kao što su "Na ostrvu ima blaga" i "Optuženi je kriv". Dakle, Logičar unapred ne zna da li je bilo koji od osnovnih iskaza tačan ili nije, tj. on unapred ne zna vrednost valuacije ni jednog iskaznog slova iz skupa $Prop$. Njemu sve valuacije izgledaju jednako moguće. Jedine iskazne formule za koje on unapred zna da su tačne na ostrvu su one koje su tačne pri svim valuacijama, a to su tautologije.

Tokom boravka na ostrvu Logičar susreće stanovnike i iz njihovih izjava dolazi do novih saznanja. Na primer, kada od stanovnika A čuje izjavu P, tada (prema tvrđenju 2.7) on sazna da je formula $a \Leftrightarrow p$ tačna. Skup svih formula do kojih dođe na ovaj način čini jednu teoriju. Na primer, neka je od stanovnika A_1, A_2 i A_3 dobio redom izjave P_1, P_2 i P_3. On zaključuje da je svaka od formula teorije $T = \{a_1 \Leftrightarrow p_1, a_2 \Leftrightarrow p_2, a_3 \Leftrightarrow p_3\}$ tačna (pri valuaciji ostrva v), što znači da je valuacija v jedan model teorije T. Sada se postavlja pitanje koje zaključke Logičar može da izvede iz ovih dodatnih saznanja, odnosno koje su to formule čija tačnost sledi iz tačnosti svih formula teorije T? Budući da on nema nikakvih informacija o valuaciji ostrva v, jedine formule čija tačnost garantovano sledi su logičke posledice teorije T! Prema definiciji logičke posledice to su formule koje su tačne za svaku valuaciju pri kojoj su tačne sve pretpostavke teorije T.

Primer 2.8. U zagonetci 1.2 iz izjava stanovnika:
A: "B je Iskren i ja sam Iskren"
B: "A je Lažov".
trebalo je utvrditi ko od njih pripada kom plemenu.

Prevod prve izjave u iskaznu logiku je formula $a \Leftrightarrow (b \wedge a)$, a druge $b \Leftrightarrow \neg a$, pa Logičar zna da je valuacija ostrva v model teorije . Treba odrediti pripadnost stanovnika plemenu, odnosno vrednosti $v(a)$ i $v(b)$ (znajući da je $\hat{v}(a \Leftrightarrow (b \wedge a)) = 1$ i $\hat{v}(b \Leftrightarrow \neg a) = 1$). Prevedena na jezik iskazne logike, treba odrediti sve modele teorije T.

Rešenje zagonetke je bilo metodom diskusije po slovu b, tj. analizom slučajeva kada je stanovnik B Iskren i kada je Lažov.

Prvi slučaj je kada je Iskren, tj. $v(b) = 1$. Kako je $v(b \Leftrightarrow \neg a) = 1$, iz ove dve činjenice se dobije $\hat{v}(\neg a) = 1$, pa je $v(a) = 0$. Za $v(a) = 0$ i $v(b) = 1$ je $\hat{v}(a \Leftrightarrow (b \wedge a)) = 1$ i $\hat{v}(b \Leftrightarrow \neg a) = 1$, tj. v je model teorije T. Znači jedna mogućnost je $v(a) = 0$ i $v(b) = 1$.

Drugi slučaj je $v(b) = 0$. Iz $\hat{v}(b \Leftrightarrow \neg a) = 1$ se dobije $\hat{v}(\neg a) = 0$, tj. $v(a) = 1$. Sada je $\hat{v}(a \Leftrightarrow (b \wedge a)) = 0$, što znači da v nije model za T. Ovaj slučaj je nemoguć.

Dakle, jedina mogućnost jeste $v(a) = 0$ i $v(b) = 1$, što i potvrđuje rešenje zagonetke 1.2.

U prethodnom primeru je dato matematičko rešenje zagonetke 1.2. Rešavanje sličnih zadataka metodom diskusije po slovu je skoro pravolinijsko za svakog matematičara. Pogotovo je njime zgodno rešavati zadatke u kojima se pojavljuje više iskaznih slova.

Medjutim, da Smalijanova knjiga umesto zagonetki tipa 1.2 sadrži zadatke tipa: Odrediti sve modele teorije $T = \{a \Leftrightarrow (b \wedge a), b \Leftrightarrow \neg a\}$, takva knjiga bi ostala potpuno nezapažena u vanmatematičkim krugovima.

2.3 Teorema potpunosti iskazne logike

U matematici, pod *formalnim sistemom* $\mathcal{F}$ se podrazumeva uređena četvorka skupova $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, For, Ax, Pr)$ koja ima sledeće osobine:

- $\mathcal{L}$ je neki skup simbola, koji se zove jezik ili alfabet sistema $\mathcal{F}$. Reč jezika je bilo koji niz simbola jezika;
- For je podskup skupa reči, a njegovi elementi se zovu formule sistema $\mathcal{F}$;
- $Ax \subseteq For$ je skup aksioma sistema $\mathcal{F}$;
- Pr je skup pravila izvođenja sistema $\mathcal{F}$. Svako pravilo izvođenja dužine n je neka relacija $R \subseteq For^{n+1}$, takvo da $(F_1, ..., F_n, F_{n+1}) \in R$ ima značenje da se formula F_{n+1} može izvesti ("dokazati") iz formula $F_1, ..., F_n$ (kao pretpostavki).

U većini primera se pravila izvođenja zadaju shemom aksioma. Neka se na primer uzme jezik iskazne logike i pravilo *modus ponens*: $MP = \{(X, X \Rightarrow Y, Y) \mid X, Y \in For\}$ koje dozvoljava da se za bilo koje dve formule X i Y iz formula X i $X \Rightarrow Y$ izvede formula Y. Ovo pravilo se zapisuje sa:

$$\frac{X \quad X \Rightarrow Y}{Y}$$

Teorija u formalnom sistemu $\mathcal{F}$ je podskup skupa formula. Formula F je *sintaksna posledica* teorije T (ili teorema teorije T), oznaka je $T \vdash_{\mathcal{F}} F$, ako postoji niz formula $G_1, G_2, ..., G_n$ sa sledećim svojstvima:

1. G_n je formula F;
2. svaka formula G_k zadovoljava jedan od sledećih uslova:

   2.1 $G_k \in Ax$, ili

   2.2 $G_k \in T$, ili

   2.3 G_k je dobijena primenom nekog pravila na formule koje joj prethode u navedenom nizu.

   Niz $G_1, ..., G_n$ se zove i *dokaz* formule F iz pretpostavki T, a kaže se i da je formula F *dokaziva* u sistemu $\mathcal{F}$ iz pretpostavki T.

Postoji više formalnih sistema za klasičnu iskaznu logiku. Razlikuju se po alfabetima i skupovima aksioma, a skoro svi imaju samo jedno pravilo izvođenja, a to je modus ponens.

Jedan od sistema je Hilbertov[4] sistem $\mathcal{H}$ iz knjige [2]. Alfabet ima skup iskaznih slova *Prop* i simbole $\neg \ \wedge \ \vee \ \Rightarrow \ (\ ) $ i $\perp$. Skup formula je definisan kao u odeljku 2.1. Skup aksioma je zadat shemama tautologija:

$(H1)$	$F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$		
$(H2)$	$(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$		
$(H3)$	$(F \wedge G) \Rightarrow F$	$(H4)$	$(F \wedge G) \Rightarrow G$
$(H5)$	$(F \Rightarrow (G \Rightarrow (F \wedge G)))$		
$(H6)$	$F \Rightarrow (F \vee G)$	$(H7)$	$G \Rightarrow (F \vee G)$
$(H8)$	$(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((F \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \vee H)))$		
$(H9)$	$\neg F \Rightarrow (F \Rightarrow \perp)$	$(H10)$	$(F \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg F$
$(H11)$	$\perp \Rightarrow F$	$(H12)$	$F \vee \neg F$

Pravilo izvođenja: $\dfrac{F \quad F \Rightarrow G}{G}$ (modus ponens)

Zajedničko za sve formalne sisteme klasične iskazne logike je teorema potpunosti.

Teorema potpunosti Za svaku teoriju T i formulu F važi

$$T \models F \text{ ako i samo ako } T \vdash_{\mathcal{H}} F.$$

[4]David Hilbert (1862 - 1943) nemački matematičar

Informativno, smisao teoreme potpunosti za dati sistem je da je neka formula "tačna" ako i samo ako je dokaziva u sistemu. To se može najlakše videti u specijalnom slučaju teoreme potpunosti za $T = \emptyset$:

$$\models F \text{ ako i samo ako } \vdash_{\mathcal{H}} F.$$

Ako se uzme da za formulu biti "tačna" znači da je tautologija, onda je formula F tačna ako i samo ako je dokaziva (u sistemu $\mathcal{H}$). U tom smislu je sistem $\mathcal{H}$ *potpun*, jer sve što je tačno može se i dokazati.

Teorema 2.9. Ako se u Hilbertovom sistemu $\mathcal{H}$ proširi skup aksioma i uzmu sve tautologije, dobijeni sistem $\mathcal{H}'$ će (za svaku teoriju T) imati isti skup dokazivih formula kao i sistem $\mathcal{H}$ i biće potpun.

Dokaz. Svaki dokaz u sistemu $\mathcal{H}$ je i dolaz u sistemu $\mathcal{H}'$, pa $T \vdash_{\mathcal{H}} F$ povlači $T \vdash_{\mathcal{H}'} F$. Neka je $T \vdash_{\mathcal{H}'} F$ i $G_1, ..., G_n$ dokaz formule F u sistemu $\mathcal{H}'$. Ako je formula G_k tautologija koja nije aksioma u sistemu $\mathcal{H}$, tada prema teoremi potpunosti ona ima dokaz u sistemu $\mathcal{H}$, pa ako u dokazu $G_1, ..., G_n$ se zameni G_k tim dokazom, dobiće se opet dokaz u sistemu $\mathcal{H}'$. A ako se zameni svaka formula u dokazu koja nije Hilbertova aksioma njenim dokazom u $\mathcal{H}$, dobiće se dokaz u sistemu $\mathcal{H}$. Time je dokazano da $T \vdash_{\mathcal{H}'} F$ povlači $T \vdash_{\mathcal{H}} F$. $\square$

Smalijan u svojim popularnim knjigama ne spominje formalne sisteme i teoremu potpunosti. Ulogu formalnih sistema u njegovim pričama imaju *logički kvalifikovane mašine*. Njegova imaginarna mašina je isprogramirana da dokazuje iskaze, a kada dokaže neki iskaz, ona ga i odštampa. Kao takva može raditi večno. Mašina je logički kvalifikovana ako ima sledeće dve osobine:

- Svaka tautologija će kad tad biti odštampana;
- Za bilo koja dva iskaza P i Q, ako mašina ikada dokaže iskaze P i $P \Rightarrow Q$, ona će kad tad dokazati i iskaz Q.

I Smalijanov Logičar je u nekom smislu logički kvalifikovana mašina koja dokazuje, jedino što možda ne zapisuje sve što dokaže. Tokom boravka na ostrvu Logičar iz iskaza stanovnika sakuplja informacije i iz njih izvodi sve moguće zaključke. Za skup svih njegovih uverenja (iskaza koje smatra tačnim) tokom boravka na nekom od ostrva, odnosno za opis svih izjava koje logički kvalifikovana mašina može da dokaže, Smalijan koristi pojam logički zatvorenog skupa.

Za skup S se kaže da je *logički zatvoren* ako ima sledeće dva osobine:

- S sadrži sve tautologije;
- S je zatvoren za modus ponens, tj. za svake dve formule P i Q, ako su P i $P \Rightarrow Q$ u skupu S, onda će i Q biti u njemu.

Iz teoreme 2.9 sledi da je za svaku teoriju T skup svih njenih logičkih posledica jedan logički zatvoren skup. Najjednostavniji primeri logički zatvorenih skupova su skup svih tautologija, skup svih formula koje su tačne na određenom ostrvu, kao i skup svih formula.

2.4 Logičareva uverenja

Po dolasku na neko od ostrva Iskrenih i Lažova Smalijanov Logičar zna (uveren je) da na njemu važe pravila ostrva. Uveren je i u svaku tautologiju. Do svih dodatnih saznanja dolazi na samom ostrvu družeći se sa stanovnicima i slušajući njihove iskaze. Na taj način pravi nekakvu teoriju T. On ima i odličnu moć logičkog zaključivanja: ako je uveren u neke iskaze, onda je uveren i u sve njihove logičke (tj. sintaksne) posledice.

Neka $\mathcal{B}$ označava skup svih iskaza u koje Logičar postaje ubeđen tokom boravka na nekom ostrvu. Za skup $\mathcal{B}$ zna se da je logički zatvoren. Osim toga nema drugih informacija o njemu, jer on se može razlikovati od ostrva do ostrva. Ukoliko je Logičar, na primer, nezainteresovan da sluša priče stanovnika A, naravno da neće saznati da li je on Iskren ili Lažov, pa ni a ni $\neg a$ neće biti u skupu $\mathcal{B}$.

U poglavlju 1 u nekim zadacima bilo je situacija koje se ne bi mogle dogoditi na ostrvu Iskrenih i Lažova, tj. postoje iskazi koje on ne može čuti. Sada se postavlja pitanje šta sve Logičar može zaključiti na ostrvu Iskrenih i Lažova. Posebno je zanimljivo sledeće pitanje:

Može li Logičar tokom boravka na ostrvu postati ubeđen
u nešto što nije tačno?

Drugim rečima, pitanje je da li skup $\mathcal{B}$ može sadržati neki netačan (na tom ostrvu) iskaz.

Za Logičara se kaže da je *korektan* ako nikad neće postati ubeđen u nešto što nije tačno. U suprotnom je *nekorektan*.

Zagonetka 2.10. Na ostrvu Iskrenih i Lažova korektan Logičar sreće stanovnika po imenu W koji mu izjavi "Ti nikad nećeš verovati da sam ja Iskren". Da li će Logičar moći da utvrdi da li je W Iskren ili Lažov?

Rešenje. Neće moći.

Ako je W Lažov, tada je njegova izjava lažna, što znači da će Logičar poverovati da je on Iskren i time biti nekorektan. To je nemoguće, pa W nije Lažov već Iskren. Samim tim, njegova izjava je tačna, pa Logičar nikada neće ustanoviti da je W Iskren.

Prema tome, stanovnik W jeste Iskren, ali korektan Logičar to nikada neće moći da sazna. Plemenska pripadnost stanovnika W će ostati *zauvek neodlučiva*[5] za korektnog Logičara.

[5] Priča je iz Smalijanove knjige "Forever Undecided" [7]

U prethodnoj zagonetci može se zaključiti i da korektan Logičar posle susreta sa stanovnikom W nikada neće moći da sazna sve istine na ostrvu. Smalijan koristi ovu zagonetku da ilustruje Gedelovu teoremu nepotpunosti, poredeći skup Logičarevih uverenja $\mathcal{B}$ sa skupom dokazivih rečenica u nekom formalnom matematičkom sistemu, a Iskrene stanovnike sa tačnim rečenicama. Zaključak zagonetke je Gedelovski: postoji istinita rečenica koja nije dokaziva.

Da je u prethodnoj zagonetci stanovnik W rekao korektnom Logičaru: "Ti ćeš saznati da sam ja Lažov", zaključak bi bio sličan: W je Lažov, ali Logičar to nikada neće saznati. Pomenuti iskaz je *dual* iskaza "Ti nikada nećeš saznati da sam ja Iskren", kao što postoji i dual Gedelove teoreme: postoji lažna rečenica koju nije moguće opovrgnuti (dokazati njenu negaciju) u sistemu.

U prethodnoj zagonetci Logičar je bio korektan. U sledećoj se ne pretpostavlja da je korektan, već da samo veruje da je korektan.

Zagonetka 2.11. Logičar koji veruje da je korektan sreće stanovnika W koji mu izjavi "Ti nikad nećeš znati da sam ja Iskren". Da li je Logičar korektan?

Rešenje. Logičar rezonuje ovako: "Ako je W Lažov, tada je njegova izjava lažna, što znači da ću ja poverovati da je on Iskren i time biti nekorekatan. To je nemoguće, jer sam ja korektan. Prema tome, on nije Lažov već Iskren." Zato će Logičar poverovati da je stanovnik W Iskren. Time je izjava stanovnika W lažna i on je Lažov. Prema tome, Logičar veruje da je W Iskren, a W je u stvari Lažov.

Logičar *nije* korektan, iako veruje da je korektan!

Iako situacije u prethodne dve zagonetke naizgled deluju slično, zaključi su različiti. Ove zagonetke se razlikuju od dosadašnjih, jer se odnose ne samo na situaciju i događanja na ostrvu, već i na način Logičarevog razmišljanja. Ove zagonetke nisu prevodive u klasičnoj iskaznoj logici i da bi se formalizovale, potrebno je uvesti i formule $B\,F$, čije je značenje "Logičar veruje u iskaz F". Na primer, iz iskaza stanovnika W "Ti nikad nećeš saznati da sam ja Iskren" se zna da je formula $w \Leftrightarrow \neg Bw$ tačna. Takođe, pošto Logičar zna pravila Ostrva i pošto je čuo taj iskaz, i formula $B(w \Leftrightarrow \neg Bw)$ je tačna. Naravno da se pretpostavlja da Logičar veruje u modus ponens, tj. da iz $B\,F$ i $B(F \Rightarrow G)$ sledi $B\,G$. Logičareva korektnost je izraziva sa $B\,F \Rightarrow F$ itd. U ovom radu se neće uvoditi modalna logika u kojoj se ove zagonetke mogu formalizovati, ali treba napomenuti da su svakom matematičaru formalne verzije zagonetki jasnije i preciznije od onih u govornom jeziku.

3 Paradoksi i teoreme kroz priče

Paradoks je izjava koja, uprkos valjanom obrazloženju iz istinitnih premisa, dovodi do naizgled kontradiktornog ili logički neprihvatljivog zaključka. Paradoksi čine prirodni predmet filozofskog istraživanja još od nastanka racionalne misli, izmišljeni su kao deo složenih argumenata i kao oruđe za probijanje filozofskih teza.

U ovom poglavlju će biti prepričane neke Smalijanove priče

3.1 Paradoks lažova

U 6. veku pre nove ere filozof i pesnik Epimenides[6] sa Krita je u jednom svom delu o Zevsu napisao i paragraf:

"Cretans, always liars, evil beasts, idle bellies"

koji bi u prevodu glasio: "Krićani, uvek lažovi, zle zveri, besposlene utrobe". Deo "Krićani, uvek lažovi" postaje jedan od najranijih primera paradoksa. Iz ovog dela paragrafa engleski akademik Tomas Fauler[7] tumači da ako su svi Krićani lažovi, a i sam Epimenides je Krićanin, tada je on takođe lažov. Ali kako je on lažov, njegov iskaz je netačan, tj. *svi* Krićani su iskreni, pa je i Epimenides iskren. Tada je njegova izjava istinita, pa su svi Krićani lažovi, a samim time je i Epimenides lažov. Ovim procesom zaključivanja nikada se neće doći do kraja zaključivanja (do konkretnog odgovora), tj. iz premise da je Epimenides iskren dolazi se do zaključka da je on lažov, kao i da ako je on lažov govoriće istinu. Time se dolazi do dve uzajamno kontradiktorne činjenice. Zato je Fauler nazvao ovo paradoksom.

Pod pretpostavkom da osim Epimenidesa postoji bar još jedan Krićanin, greška u Faulerovom načinu zaključivanja je ta što za negaciju izraza "Krićani su lažovi" uzima "Krićani su iskreni". Pravilna negacija je ta da postoji bar jedan Krićanin koji govori istinu, pa jedino što se ispravno može zaključiti iz Epimenidesove izjave je to da je Epimenidesova izjava netačna. Međutim, u slučaju da je Epimenides jedini Krićanin, Faulerovo zaključivanje jeste ispravno i time Epimenidesov iskaz "Krićani su lažovi" jeste paradoks.

Ovo je jedan od najpoznatijih primera paradoksa logike, koji kasnije dobija naziv Paradoks lažova [8]. Danas postoji više oblika ovog paradoksa. Na primer: "Ova rečenica je netačna" ili "Ja lažem". Ako bi izraz "Ova rečenica je netačna" bio tačan iskaz, onda bi njegovo tvrđenje da je on netačan bilo tačno, ali to bi značilo da je "Ova rečenica je netačna" netačan iskaz, tj. da je to tačan iskaz...

---

[6] grčki: *Επιμενιδησ*

[7] eng. Thomas Fowler (1832 - 1904)

[8] engleski: Liar's paradox

U osnovi paradoksa Lažova krije se odnošenje značenja izraza samoga na sebe. Izrazi ovakvog tipa zovu se *samoreferencirajući* izrazi. Samoreferencija je pojam koji se koristi za referiranje nekog objekta na samog sebe. U ovom slučaju to su izrazi koji govore o sebi samima. U svojoj knjizi "Koji je naslov ove knjige?" Smalijan u samom naslovu knjige "Koji je naslov ove knjige?" koristi takav primer izraza.

Paradoksi vezani za samoreferenciju se dele u tri grupe: semantički, epistemički i skupovno-teorijski paradoksi. Paradoks Lažova je primer semantičkog paradoksa, budući da je zasnovan na semantičkom pojmu istine. Još neki semantički paradoksi koji se odnose na samereferenciju jesu Grelingov[9] paradoks, Berijev paradoks[10] i Rišarov[11] paradoks. Iako se ovi paradoksi razlikuju po predmetima na koje se odnose, oni dele istu osnovnu strukturu i često se mogu razrešavati istim matematičkim sredstvima.

Najpoznatiji primer skupovno-teorijskog paradoksa je Raselov[12] paradoks, poznat i kao Paradoks berberina. O njemu govori sledeća priča.

3.2 Inspektor Krejg u poseti prijatelju

Jedan od poznatijih Smalijanovih fiktivnih likova jeste detektiv inspektor Krejg. Inspektor Krejg uglavnom se bavi rešavanjem zločina, ali u nekoliko situacija rešavao je i probleme nevezane za kriminal.

Problem 3.1. Inspektor Krejg dolazi u posetu svom prijatelju sociologu gospodinu MekSnurdu. Njih dvojica pričajući dolaze i do teme vezane za zajednicu u kojoj MekSnurd živi. MekSnurd objašnjava Krejgu da u njegovoj zajednici postoje razni klubovi, i da važe sledeća pravila:

- Svaki stanovnik zajednice može biti član više klubova;
- Svaki klub nosi ime nekog stanovnika;
- Različiti klubovi nose različita imena;
- Stanovnik ne mora pripadati klubu koji nosi njegovo ime, a ako pripada onda se za njega kaže da je *socijalan*, inače je *asocijalan*;
- Skup svih asocijalnih članova zajednice formira klub.

Saslušavši priču o MekSnurdovoj zajednici inspektor Krejg se zamisli i shvati da takva zajednica, kakvu je MekSnurd opisao, ne postoji. Inspektor Krejg se veoma razočarao u svog prijatelja sociologa.

Pitanje. Šta nije u redu sa MekSnurdovom pričom?

[9]Kurt Grelling (1886 - 1942), nemački logičar i filozof
[10]G. G. Berry (1867 – 1928), bibliotekar Oksfordske biblioteke
[11]Jules Richard (1862 - 1956), francuski matematičar
[12]Bertrand Russell (1872 - 1970), britanski filozof, matematičar i logičar

Odgovor. Ako bi priča bila istinita, onda bi klub svih asocijalnih stanovnika nosio ime, na primer "A-klub", po stanovniku A. Stanovnik A može biti socijalan ili asocijalan.

Neka je stanovnik A socijalan. Tada on ne pripada A-klubu, jer je članstvo kluba asocijalno. Pošto A ne pripada A-klubu, on je asocijalan, što nije slučaj.

Ako bi stanovnik A bio asocijalan, pripadao bi A-klubu, jer taj okuplja sve asocijalne stanovnike. Dakle, A pripada A-klubu, pa je socijalan. Kontradikcija.

Kako je inspektor Krejg došao do zaključka da ne postoji takva zajednica koja zadovoljava uslove koje je MekSnurd rekao, jedino je preostalo to da je sam MekSnurd pogrešno protumačio pravila svoje zajednice. □

U osnovi prethodne priče je Paradoks berberina: U nekom selu berberin brije sve one koji se ne briju sami. Pitanje je da se berberin brije sam ili ne. U prethodnoj priči ulogu berberina ima klub svih asocijanih stanovnika.

3.3 Špijun u zajednici

Drugom prilikom inspektor Krejg dobija poziv od svog starog prijatelja sociologa gospodina MekSnafa, sa kojim je zajedno studirao, da dođe u posetu. Prilikom posete inspektor Krejg saznaje pravi razlog poziva gospodina MekSnafa. MekSnaf je imao problem, koji nije mogao sam da odgonetne, pa je zatražio inspektorovu pomoć. MekSnaf ispriča inspektoru Krejgu da se u njegovoj zajednici zna da:

- Postoje razni klubovi i da svaki stanovnik ima tačno jedan klub nazvan po njemu;
- Svaki klub nosi ime nekog stanovnika;
- Ako je stanovnik član nekog kluba, onda on može da bude tajni ili javni član tog kluba, svako ko nije javni član kluba je *sumnjiv*;
- Ako se za nekoga zna da tajno pripada klubu nazvanom po njemu, onda je takav stanovnik *špijun*;
- Ono što je najčudnije u zajednici je to da skup svih sumnjivih osoba takođe formira jedan klub.

Inspektor Krejg je znao da je MekSnaf bio nepogrešiv u svojim zaključivanjima, pa nije ni sumnjao u verodostojnost MekSnafovih iskaza. Medjutim, MekSnaf nije znao odgovor na pitanje:

Da li uopšte postoje špijuni unutar zajednice?

Inspektor detektiv Krejg rezonuje na sledeći način: “Neka je klub svih sumnjivih nazvan po nekom stanovniku A. Sam stanovnik A ili pripada A-klubu ili ne. Ako stanovnik A ne pripada tom klubu, onda on nije sumnjiv. Ovo bi značilo da je stanovnik A javno član A-kluba. Došlo je do zaključka da: Ako A nije član A-kluba, onda on javno pripada A-klubu. Nemoguće. Znači da A mora biti član A-kluba. Kako on pripada klubu, A je sumnjiv, a to bi značilo da on javno ne pripada klubu, pa bi on bio tajni član kluba. Znači da je A špijun. ”

Dakle, u MekSnafovoj zajednici postoji barem jedan špijun.

3.4 Problem Univerzuma

Radnja ovog problema se događa u Univerzumu u kome moguće ima i beskonačno mnogo stanovnika. U Univerzumu postoje klubovi koje formiraju stanovinici i svaki skup stanovnika čini jedan klub. U Univerzumu živi i Večni Popisnik koji daje sebi zadatak da, umesto da izvrši popis stanovništva, popiše sve klubove u Univerzumu. Popisnikova namera je da klubove imenuje po stanovnicima Univerzuma, ali tako da različiti klubovi nose različita imena.

Problem Da li će Popisnik uspešno završiti svoj zadatak?

Rešenje. Pokazaće se da Popisnik postavlja sebi nemogući zadatak.

Slično kao u problemu 1. neka je stanovnik A asocijalan ako nije član “A-klub” kluba. Skup svih asocijalnih stanovnika jeste skup, jer svaki skup formira klub, pa će i skup svih asocijalnih biti takođe klub. Nemoguće, slično kao i u problemu 3.1. jer bi ime tog kluba nosilo ime osobe koja nije socijalna, a ni asocijalna. □

Ova priča ilustruje Kantorovu teoremu iz teorije skupova koja glasi: ne postoji NA funkcija iz skupa u njegov partitivni skup. Naime, ako je U skup svih stanovnika Univerzuma, Popisnik definiše funkciju $k : U \to \mathcal{P}(U)$ koja stanovniku A dodeljuje klub imenovan po njemu. Po Kantorovoj teoremi, takva funkcija nije NA, tj. uvek će postojati nepopisan klub. Prema rešenju problema, to je klub svih asocijalnih stanovnika. Takav je i dokaz Kantorove teoreme: Neka je $k : U \to \mathcal{P}(U)$ funkcija i $A = \{X \in U \mid X \notin k(X)\}$. Ako je $A = k(Y)$ za neki $Y \in U$, onda važi:

$$Y \in A \Leftrightarrow Y \notin k(Y) \Leftrightarrow Y \notin A,$$

što je nemoguće. Prema tome, skup A nije k-slika nekog elementa skupa U i k nije NA funkcija.

3.5 Problem izlistanih skupova

U ovoj priči se pretpostavlja da postoji izvesna knjiga koja se zove Knjiga skupova i koja ima beskonačno mnogo stranica numerisanih (uzastopnim) prirodnim brojevima. Na svakoj stranici se nalazi opis neke osobine prirodnih brojeva. Taj opis može biti bliže objašnjen i kao program koji za svaki prirodni broj odredi da li taj broj ima dotičnu osobinu ili je nema. Za podskup X skupa prirodnih brojeva se kaže da je *izlistan* ukoliko postoji stranica takva da je X skup svih brojeva koji imaju osobinu opisanu na toj stranici; ako je n redni broj te stranice, onda se kaže i da je skup X izlistan na stranici n.

Skup svih izlistanih skupova je prebrojiv, pa pošto prema Kantorovoj teoremi ima neprebrojivo mnogo podskupova skupa prirodnih brojeva, mora postojati neki podskup $X \subseteq \mathbb{N}$ koji nije izlistan.

Problem. Kako opisati skup koji nije izlistan u Knjizi skupova?

U rešenju ovog problema uvedeni su pojmovi običnih i izuzetnih brojeva. Za broj n se kaže da je *izuzetan* ukoliko pripada skupu izlistanom na stranici n; u suprotnom kaže se da je n *običan* broj. Rešenje problema je:

Skup svih običnih brojeva nije izlistan.

Dokaz. Označimo sa X skup svih običnih brojeva. Pretpostavimo suprotno, da je X izlistan skup na strani n.

Ako je n običan broj, onda on pripada skupu X po definiciji skupa X. Znači da broj n pripada skupu koji je izlistan na strani n, tj. da je n izuzetan broj, što je nemoguće.

Ako je n izuzetan broj, onda on ne pripada skupu X, pa nije izlistan na strani n. Znači da n ne pripada skupu izlistanom na strani n, tj. da je n običan broj, što je nemoguće.

U oba slučaja dolazi se do kontradikcije, pa X nije izlistan skup. □

3.6 Atinjani i Krićani

Ova priča je proširena verzija priče o Epimenidisu i Krićanima. Radnja priče se događa u zemlji u kojoj svaki stanovnik ili govori uvek istinu ili uvek laže. Neki od stanovnika su Atinjani a neki su Krićani. Atinjani uvek govore istinu, dok Krićani uvek lažu.

Pitanje Šta treba neki stanovnik da izjavi pa da se može sa sigurnošću zaključiti da on uvek govori istinu, a da nije Atinjanin?

Odgovor. Dovoljno je reći "Ja nisam Atinjanin". Lažov neće moći da kaže da nije Atinjanin, jer bi onda rekao istinu. Dakle, stanovnik govori istinu. A kako je njegov iskaz tačan, onda on nije Atinjanin. Dolazi se do zaključka da je dati stanovnik iskren, ali nije Atinjanin. □

Ovu priču i sam Gedel pominje kao ilustraciju suštine teoreme nepotpunosti, odnosno Gedelove rečenice. Poredjenje je sledeće: Stanovnici imaju ulogu rečenica u nekom formalnom aritmetičkom sistemu. Oni koji govore uvek istinu imaju ulogu tačnih, a Atinjani ulogu dokazivih rečenica. Stanovnik koji izjavi "Ja nisam Atinjanin" ima ulogu Gedelove rečenice.

4 Gedelova teorema nepotpunosti

4.1 Inspektor Krejg na Gedelovskim ostrvima

Detektiv inspektor Krejg odlazi na turneju po jednom manjem arhipelagu ostrva Iskrenih i Lažova. Na svakom od tih ostrva stanovnici su osnovali raznorazne klubove, a svaki stanovnik može biti član i više klubova. Neka od tih ostrva su Gedelovska, a to su ona na kojima važi uslov:

(G) Za svaki klub C postoji najmanje jedan stanovnik ostrva koji će reći da je član kluba C.

Inspektora Krejga zanimaju Gedelovska ostrva.

4.1.1 Ostrvo $\mathcal{G}$

Prvo ostrvo koje Krejg obilazi na turneji je ostrvo $\mathcal{G}$. Krejg je unapred znao da je ovo ostrvo Gedelovsko, kao i da su na njemu neki pripadnici plemena Iskrenih nekom prilikom na neki način dokazali svoju iskrenost i time zaslužili naziv dokazano Iskrenih. Takođe, neki pripadnici plemena Lažova su zaslužili naziv dokazanih Lažova. Krejg je saznao da na ovom ostrvu važi i:

(E_1) Skup svih dokazano Iskrenih stanovnika formira klub;

(E_2) Skup svih dokazanih Lažova formira klub;

(C) Za svaki klub C skup svih stanovnika ostrva koji nisu članovi kluba C takođe formira klub;

Iz ovih podataka inspektor Krejg je izveo sledeće zaključke:

(1) Postoji bar jedan iskren stanovnik koji nije dokazano Iskren.

(2) Postoji bar jedan lažov koji nije dokazani Lažov.

(3) Pleme Lažova nije klub.

(4) Pleme Iskrenih nije klub.

Pitanje. *Kako je inspektor Krejg mogao doći do ovih zaključaka?*

(1) Iz uslova (E_1) Krejg je znao da svi dokazano Iskreni stanovnici formiraju klub, pa iz uslova (C) sledi da svi stanovnici koji nisu dokazano Iskreni formiraju takođe klub K. Iz uslova (G) sledi da postoji bar jedan stanovnik, neka je to A, koji će za sebe reći da pripada klubu K, tj. izjaviće: "Ja nisam dokazano Iskren". Takvu izjavu ne može dati stanovnik koji laže, jer bi time

rekao istinu. Dakle, A je Iskren. Zato je i njegova izjava tačna, pa A nije dokazano Iskren. Tako je Krejg zaključio da je A Iskren, ali da nije dokazano Iskren,.

(2) Iz uslova (E_2) Krejg zna da svi dokazani Lažovi formiraju klub, pa iz uslova (G) zaključuje da postoji bar jedan stanovnik, neka je to B, koji će izjaviti "Ja sam dokazani Lažov". Da je stanovnik B Iskren, on bi u tom slučaju lagao, što se neće nikada dogoditi. Dakle stanovnik B je iz plemena Lažova. Stanovnik B nije dokazani Lažov, jer bi u tom slučaju govorio istinu. Stanovnik B je Lažov, ali nije dokazani Lažov.

(3) Ako bi pleme Lažova bio klub, tada bi po uslovu (G) postojao stanovnik koji bi izjavio da je pripadnik tog kluba, odnosno da je Lažov. Od ranije, zna se da to nijedan stanovnik nikada neće izjaviti.

(4) Ako pleme Iskrenih formira klub, tada iz uslova (C) i njegov komplement, tj. pleme Lažova čini klub, što nije zbog prethodnog. Prema tome, pleme Iskrenih nije klub.

Iz prethodnog problema, stavka 3. predstavlja jednu neformalnu verziju dokaza tereme Tarskog. Jer komplement skupa Iskrenih stanovnika jeste skup Lažova, pri čemu je skup Iskrenih ekvivalent skupu tačnih iskaza. Stavka 1. iz prethodnog problema jeste jedan primer Gedelove tereme na delu, jer postoji barem jedan ne dokazani Iskren, pri čemu bi dokazani bio ekvivalentan pojmu dokaziv. Te postoji tačan iskaz, ali se on ne može dokazati u datom sistemu iliti na ostrvu postoji nedokazan Iskreni stanovnik.

4.1.2 Gedelovsko ostrvo?

Završivši posetu ostrvu $\mathcal{G}$, Krejg odlazi na sledeće ostrvo, za koje ne zna da li je Gedelovsko ili nije. Tamo saznaje da svaki klub na ostrvu nosi ime nekog stanovnika, kao i da je po svakom stanovniku imenovan neki klub. Za stanovnike koji su članovi kluba imenovanim po njima se kaže da su socijalni; u suprotnom da su asocijalni. Kaže se i da je stanovnik X *poznanik* stanovnika Y ako X može da izjavi da je Y socijalan. Krejgu to nije bilo dovoljno da zaključi da li je ostrvo Gedelovo, tj. da li na njemu važi uslov (G). Nastavivši istraživanje, posle nekog vremena otkriva da na ostrvu važi i sledeći uslov:

(H) Za svaki klub C postoji klub D takav da svaki član kluba D ima bar jednog poznanika u klubu C i da svaki stanovnik koji nije član kluba D ima bar jednog poznanika koji nije član kluba C.

Tek tada Krejg zaključuje da se nalazi na Gedelovom ostrvu!

Pitenje. *Kako je inspektor Krejg mogao doći do ovog zaključka?*

Krejg je mogao rezonovati na sledeći način: Neka je C proizvoljan klub i neka je D klub određen uslovom (H). Klub D nosi ime nekog stanovnika, neka je to stanovnik A. Postoje dve mogućnosti: da je A član kluba D, ili da nije.

Ako A ne pripada klubu D, onda je A asocijalan zato što klub D nosi njegovo ime. Prema uslovu (H) A ima poznanika, neka je to stanovnik B, koji ne pripada klubu C. Kao poznanik, B može tvrditi da je A socijalan, što je laž. Dakle, B je Lažov koji ne pripada klubu C i on može izjaviti da pripada klubu C.

Ako A pripada klubu D, on je socijalan. Prema uslovu (H), on ima poznanika E u klubu C koji tvrdi da je A socijalan, što je istina. Dakle, E je Iskren. Pošto pripada klubu C, on može tvrditi da je član kluba C. U oba slučaja, Krejg dolazi do zaključka da postoji stanovnik koje može izjaziti da pripada klubu C, što potvrđuje uslov (G). Ostrvo jeste Gedelovsko.

4.1.3 Epilog turneje

Priča o ovoj turneji se završava tako što je po povratku sa turneje Logičar sabrao utiske, i zaključio da na svakom ostrvu na kome važe uslovi (E_1), (E_2), (C) i (H), važi i:

(1) Postoji bar jedan Iskren stanovnik koji nije dokazano Iskren;

(2) Postoji bar jedan Lažov koji nije dokazani Lažov;

(3) Pleme Iskrenih nije klub;

(4) Pleme Lažova nije klub.

Zaključak (1) je neformalna verzija Gedelove teoreme nepotpunosti. Naime, ako pleme Iskrenih predstavlja skup svih tačnih rečenica u nekom formalnom matematičkom sistemu, a dokazano Iskreni predstavljaju dokazive rečenice, onda je zaključak (1) ta neformalna verzija: postoji tačna rečenica koja nije dokaziva.

Uslov (G) je analog postojanju Gedelove rečenice, a o toj analogiji će kasnije biti više reči. Uslov (H) takođe ima svoj analog u svakom formalnom matematičkom sistemu, a njegova prednost u odnosu na uslov (G) je ta što se njegova validnost u sistemu može tehnički mnogo lakše utvrditi.

4.2 Logičar, Knjiga rečenica i Knjiga skupova

Glavni lik ove priče je Logičar. Jednom prilikom on dobije na poklon dve čudne, ali njemu jako zanimljive knjige. Naziv prve knjige je “Knjiga rečenica”. Stranice ove knjige su numerisane i na svakoj stranici se nalazi po jedna rečenica. Svaka napisana rečenica je izjava, ona je ili tačna ili netačna. Među tačnim rečenicama ima nekih koje su očigledno tačne, pa njih Logičar uzima za aksiome svog sistema. Deo tog sistema su i neka pravila logičkog izvođenja, koja on koristi da dokaže neke od preostalih rečenica, kao i da opovrgne neke od njih; opovrgnuti, ili osporiti, neku rečenicu znači dokazati njenu negaciju. Logičar je prilično uveren u *korektnost* svog sistema, tj. da je tačna svaka rečenica koju može da dokaže, a da je netačna svaka koju može da opovrgne. Ali, on ne zna da li je njegov sistem *potpun*, tj. da li je svaka rečenica dokaziva ili osporiva. Logičar želi da pronađe odgovore na sledeća dva pitanja:

(1) Da li je svaka tačna rečenica dokaziva?

(2) Da li je svaka netačna rečenica osporiva?

Druga knjiga koju je Logičar dobio je Knjiga skupova, koja je već pominjana u Problemu izlistanih skupova u odeljku 3.5. Na svakoj njenoj stranici se nalazi opis neke osobine prirodnih brojeva. Za podskup A skupa prirodnih brojeva se kaže da je *izlistan* ukoliko postoji stranica takva da je A skup svih brojeva koji imaju osobinu opisanu na toj stranici; ako je n redni broj te stranice, onda se kaže i da je skup X izlistan na stranici n. Prirodan broj n je *izuzetan* ukoliko pripada skupu izlistanom na stranici n, a u suprotnom je n *običan* broj. Za svaki broj n iskaz "n je izuzetan broj" se nalazi na nekoj strani Knjige rečenica i ako je h redni broj te strane, onda se kaže da je broj h je *pridružen* broju n. Rezonujući kao u 3.5 Logičar je mogao da zaključi da skup svih običnih brojeva nije izlistan, ali to mu nije mnogo pomagalo da razreši svoje nedoumice. Naknadno je saznao da važe sledeći uslovi:

(E_1) Skup brojeva strana dokazivih rečenica je izlistan;

(E_2) Skup brojeva strana osporivih rečenica je izlistan;

(C) Za svaki izlistan skup A, njegov komplement (u $\mathbb{N}$) $\overline{A}$ je takođe izlistan.

(H) Za svaki izlistan skup A postoji izlistan skup B takav da svaki broj iz B ima pridružen broj u A i svaki broj van B ima pridružen broj van A.

Nakon nekog vremena Logičar uspeva da razreši svoje nedoumice. Prvo je uvideo da važi i sledeći uslov:

(G) Za svaki izlistan skup A u Knjizi rečenica se može naći rečenica koja je tačna ako i samo ako redni broj strane na kojoj se nalazi pripada skupu A.

Neka je A izlistan skup i neka je skup B određen uslovom (H). Skup B je izlistan na nekoj strani, neka je to n-ta strana; tada je n izuzetan ako i samo ako pripada skupu B. Ako bi broj n pripadao skupu B, onda bi njemu bio pridružen neki broj iz A. Neka je to h. Slično i da n ne pripada skupu

B, pridružen broj bi bio iz komplemena skupa A. Kako je broj h pridružen broju n, na stranici h se nalazi rečenica T koja tvrdi da je n izuzetan broj, tj. da n pripada skupu B. Ukoliko bi T bila tačna rečenica, broj n bi pripadao skupu B, pa bi pri uslovu (H) broj h pripadao skupu A. Ako bi rečenica T bila netačna, onda broj n ne pripada skupu B, pa ni broj h pripada skupu A. Dakle, rečenica T je tačna ako i samo ako se njen broj strane nalazi u skupu A, što potvrđuje uslov (G).

Dokazavši uslov (G), Logičar sada jednostavno dolazi do odgovora koje je tražio.

Iz uslova (E_1) i (C) komplement skupa brojeva dokazivih rečenica je izlistan. Kako je on izlistan, po uslovu (G) postoji tačna rečenica ako i samo ako je njen broj u tom skupu. Neka je to rečenica T. Rečenica T je tačna ako i samo ako je njen broj u komplementu skupa brojeva dokazivih rečenica. A ako broj pripada komplementu skupa brojeva dokazivih rečenica, to znači da on ne pripada skupu brojeva dokazivih rečenica. Na kraju, rečenica T je tačna ako i samo ako ona nije dokaziva. Ovim, rečenica T je tačna i nije dokaziva ili je netačna i dokaziva. Ali netačne rečenice nisu dokazive zbog korektnosti sistema.

Logičaru preostaje da proveri da li su sve netačne rečenice osoporive.

Kao i u prethodnom delu, iz uslova (E_2) skup brojeva strana osporivih rečenica je izlistan. Po uslovu (C) komplement skupa osporivih rečenica je takođe izlistan. Neka je to skup F. Pošto je skup F izlistan, onda po uslovu (G) postoji rečenica T koja je tačna ako i samo ako broj strane na kojoj se ona nalazi jeste u skupu F.

Rečenica T je tačna ako i samo ako je ona osporiva. To znači da rečenica T može biti tačna i osporiva ili netačna i neosporiva. Da je T tačna i osporiva nije moguće zbog korektnosti sistema. Dakle, rečenica T je netačna i nije osporiva.

Odgovore koje je Logičar dobio nisu bili oni koje je očekivao. Duboko se razočarao u rezultate svoga zaključivanja.

4.3 Neformalna forma teoreme nepotpunosti

Mnogima bi delovalo da su priče o Gedelovskim ostrvima i o Logičaru i njegovim knjigama nepovezane, da nije uslova (E_1), (E_2), (C), (H) i (G). Ovi uslovi su namerno označeni istim oznakama, zato što su potpuno analogni. Zapravo su te dve priče analogne, a analogija je sledeća:

stanovnik	$\sim$	broj strane Knijge rečenica
Iskren	$\sim$	broj strane tačne rečenice
Lažov	$\sim$	broj strane netačne rečenice
dokazano Iskren	$\sim$	broj strane dokazive rečenince
dokazani Lažov	$\sim$	broj strane osporive rečenice
klub	$\sim$	izlistan skup
klub imenovan po stanovniku	$\sim$	skup izlistan na strani broj
socijalan	$\sim$	izuzetan broj
asocijalan	$\sim$	običan broj
poznanik	$\sim$	pridružen

I glavni zaključci priča su analogni i predstavljaju neformalne verzije Teoreme nepotpunosti:

(1) Postoji Iskren stanovnik koji nije dokazano Iskren;

(1)′ Postoji tačna rečenica koja nije dokaziva.

(2) Postoji Lažov koji nije dokazani Lažov.

(2)′ Postoji netačna rečenica koja nije osporiva.

Dokazi ovih tvrđenja su potpuno analogni, s tim da je formulacija (2)′ bliža formalnoj formulaciji teoreme. Isto bi važilo i za tvrđenja (3) i (4) iz priče o Gedelovskim ostrvima, da su formulisana u priči o Logičaru i njegovim knjigama:

(3) Pleme Iskrenih nije klub.

(3)′ Skup tačnih rečenica nije izlistan.

(4) Pleme Lažova nije klub.

(4)′ Skup netačnih rečenica nije izlistan.

Tvrđenje (3) je informativna varijanta Teoreme Tarskog o nemogućnosti definisanja istine (tj. svih istinitih rečenica) u formalnim matematičkim sistemima. Apstraktni oblik te teoreme će biti formulisan u narednom poglavlju.

5 Apstraktna forma Gedelove teoreme

Postoji više formalnih matematičkih sistema. Neki od njih se odnose na skupove, a najpoznatiji primer takvog sistema danas je Cermelo[13] - Frankelova[14] teorija skupova. Druga grupa sistema se odnosi samo na prirodne brojeve i aritmetičke operacije među njima. Najpoznatiji primeri aritmetičkih sistema su Peanova[15] aritmetika i Robinsonova[16] aritmetika. Gedelova teorema nepotpunosti važi za svaki od ovih sistema: u svakom od njih postoji rečenica koja je neodlučiva, tj. niti se može dokazati, niti osporiti (dokazati njena negacija) u sistemu. Originalni Gedelov dokaz se odnosio na Vajthed[17]-Raselovu teoriju skupova *Principia mathematica*, a kasnije su njegove ideje oblikovane i prilagođene ostalim matematičkim sistemima koji sadrže dovoljnu količinu aritmetike.

Neodlučiva rečenica koju Gedel konstruiše ima neke sličnosti sa rečenicom "Ova rečenica je netačna" iz Paradoksa lažova; u njoj se tačnost zamenjuje dokazivošću (unutar određenog formalnog sistema). Gedelova rečenica G za formalni matematički sistem $\mathcal{F}$ informativno tvrdi da "G nije dokaziva u sistemu $\mathcal{F}$". Takva rečenica ne može biti ni netačna niti dokaziva ni u jednom korektnom sistemu (u kome su dokazive rečenice tačne). U takvoj rečenici nije moguće zameniti pridev "dokaziva" sa "tačna", što su dokazali sam Gedel i Alfred Tarski[18], po kome teorema i nosi ime: Teorema Tarskog o nemogućnosti definisanja istine[19].

Shema dokaza Gedelove teoreme nepotpunosti za svaki pominjani aritmetički sistem je slična, iako sistemi mogu biti u različitim jezicima. Izdvoje se skupovi tačnih, dokazivih i osporivih rečenica jezika, kao i skup predikata, a to su određeni izrazi jezika koji opisuju neku osobinu prirodnih brojeva. Svaki izraz se kodira nekim prirodnim brojem koji se zove Gedelov broj izraza. Kodiranjem se postiže to da kada treba sastaviti rečenicu jezika koja bi se odnosila na neki izraz čiji je kod prirodan broj n (koji nije u jeziku), sastavi se rečenica koja se odnosi na numeral $\mathbf{n}$ (koji jeste u jeziku). Na primer, postojanje rečenice G koja informativno tvrdi da "G nije dokaziva u sistemu $\mathcal{F}$", se utvrđuje dokazivanjem da postoji rečenica čiji je Gedelov broj n, a koja tvrdi da "rečenica čiji je Gedelov kod $\mathbf{n}$ nije dokaziva u sistemu $\mathcal{F}$".

Sve bitne osobine izdvojenih skupova su sadržane u sledećoj definiciji.

[13]Ernst Zermelo (1871 - 1953), nemački logičar i matematičar
[14]Abraham Fraenkel (1891 - 1965), izraelski matematičar
[15]Guiseppe Peano (1858 - 1932), italijanski matematičar
[16]Raphael M. Robinson (1911 - 1995), američki matematičar
[17]Alfred N. Whitehead (1861 - 1947), engleski matematičar i filozof
[18]Alfred Tarski (1901 - 1983), poljsko-američki logičar i matematičar
[19]eng. Tarski's undefinability theorem

Definicija 5.1. Uređena osmorka $\mathcal{G} = (\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{H}, \Phi, g)$ je *Gedelov sistem* ako važe sledeći uslovi:

- Skup $\mathcal{E}$ je prebrojiv i njegovi elementi zovu se izrazi jezika $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ je skup čiji elementi se zovu *rečenice* jezika $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ je skup čiji elementi se zovu *dokazive* rečenice jezika $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ je skup čiji elementi se zovu *osporive* rečenice jezika $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ je skup čiji elementi se zovu *tačne* rečenice jezika $\mathcal{L}$;
- $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ je skup čiji elementi se zovu *predikati* jezika $\mathcal{L}$. Neformalno, svaki predikat H imenuje neki podskup skupa $\mathbb{N}$;
- $\Phi : \mathcal{E} \times \mathbb{N} \to \mathcal{E}$ je funkcija koja izrazu E i prirodnom broju n dodeljuje izraz koji se označava sa $E(n)$. Funkcija Φ zadovoljava i uslov:

  $$\text{ako } H \in \mathcal{H} \text{ i } n \in \mathbb{N}, \text{ onda } H(n) \in \mathcal{S}.$$

  Neformalno, ovaj uslov kaže da rečenica $H(n)$ izražava to da prirodan broj n pripada podskupu skupa $\mathbb{N}$ koji imenuje predikat H.
- $g : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ je 1–1 funkcija. Ona svakom izrazu E dodeljuje prirodan broj $g(E)$ koji se zove Gedelov broj izraza E.

Gedelov broj izraza se nekad zove i Gedelov kod, pa je svaki izraz kodiran nekim prirodnim brojem. U svim sistemima koje Smalijan posmatra funkcija g je bijekcija, pa se to nadalje može pretpostaviti. Zato je svaki prirodan broj ujedno i kod nekog izraza, pa se uvodi sledeća oznaka:

- E_n je izraz čiji je Gedelov broj n.

Važi da je $g(E_n) = n$, kao i da je $E_{g(F)} = F$ za svaki izraz F.

Potrebno je uvesti i sledeće oznake:

- $\mathbb{P} := g[\mathcal{P}] \quad \mathbb{R} := g[\mathcal{R}] \quad \mathbb{T} := g[\mathcal{T}]$.

Sledeća definicija precizira neformalni smisao toga da svaki predikat imenuje neki podskup prirodnih brojeva.

Definicija 5.2. Za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ se kaže da je *izraziv* u sistemu $\mathcal{G}$ ako postoji predikat $H \in \mathcal{H}$ takav da za sve prirodne brojeve n važi:

$$H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A. \tag{1}$$

Ako je tako, kaže se i da je skup A izraziv predikatom H, ili da predikat H definiše skup A.

Skup svih izraza $\mathcal{E}$ je prebrojiv zato što je Gedelova funkcija $g : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ bijekcija. Zato je i skup predikata $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ prebrojiv, pa to važi i za skup svih izrazivih podskupova. Prema Kantorovoj[20] teoremi partitivni skup $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je neprebrojiv, pa sledi da nisu svi podskupovi skupa prirodnih brojeva izrazivi u sistemu $\mathcal{G}$.

Definicija 5.3. *Dijagonalizacija* izraza E je izraz $E(g(E))$. *Dijagonalna funkcija* je funkcija $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa $d(n) = g(E_n(n))$.

Iz definicije sledi da je dijagonalizacija izraza E_n izraz $E_n(n)$, pa je $d(n)$ Gedelov broj dijagonalizacije izraza E_n.

Za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ definiše se skup $A^* = d^{-1}[A]$, tj. za svaki $n \in g[\mathbb{N}]$ je:

$$n \in A^* \Leftrightarrow d(n) \in A \Leftrightarrow g(E_n(n)) \in A. \tag{2}$$

Definicija 5.4. Rečenica $S \in \mathcal{S}$ je *Gedelova rečenica* za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ ako važi:

$$S \in \mathcal{T} \Leftrightarrow g(S) \in A. \tag{3}$$

Neformalno, Gedelova rečenica S izjavljuje "Moj Gedelov broj je u skupu A" i kao takva je samoreferencirajuća.

Lema 1. (Dijagonalna lema) Ako je skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je A^* izraziv u sistemu $\mathcal{G}$ predikatom $H \in \mathcal{H}$, onda je $H(g(H))$ Gedelova rečenica za A.

Dokaz. Kako je skup A^* izraziv u $\mathcal{G}$ sa H važi:

$$H(g(H)) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow g(H) \in A^*. \tag{4}$$

Po formuli (2) važi:

$$g(H) \in A^* \Leftrightarrow g(E_{g(H)}(g(H))) \in A. \tag{5}$$

Na kraju iz (4) i (5) zamenom $E_{g(H)} = H$ dobija se:

$$H(g(H)) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow g(H(g(H))) \in A,$$

što znači da je $H(g(H))$ Gedelova rečenica za skup A. $\square$

Teorema 5.5. (Teorema Tarskog) Skup $\overline{\mathbb{T}}^*$ nije izraziv u sistemu $\mathcal{G}$.

Dokaz. Ako se pretpostavi da je skup $\overline{\mathbb{T}}^*$ izraziv, tada prema Dijagonalnoj lemi postoji Gedelova rečenica $R \in \mathcal{S}$ za $\overline{\mathbb{T}}$. Važi:

$$R \in \mathcal{T} \Leftrightarrow g(R) \in \overline{\mathbb{T}},$$

Kako je $\overline{\mathbb{T}}$ komplement skupa $\mathbb{T} = g^{-1}[\mathcal{T}]$ važi:

$$g(R) \in \overline{\mathbb{T}} \Leftrightarrow g(R) \notin \mathbb{T} \Leftrightarrow R \notin \mathcal{T}.$$

Početna pretpostavka je bila da je R tačna rečenica, a na kraju se došlo do zaključka da ona nije tačna, kontradikcija. Dakle, skup $\overline{\mathbb{T}}^*$ nije izraziv u sistemu $\mathcal{G}$. $\square$

[20]Georg Cantor 1845 - 1918, nemački matematičar

Za Gedelov sistem $\mathcal{G}$ kaže se da je:

- *korektan* ako $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ i $\mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset$;
- *konzistentan* ako $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$;
- *potpun* ako je $\mathcal{S} = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$; u suprotnom je *nepotpun*.

Teorema 5.6 (**Prva Gedelova teorema o nepotpunosti**)**.** Ako je sistem $\mathcal{G}$ korektan i skup $\overline{\mathbb{P}}^*$ izraziv u $\mathcal{G}$, onda $\mathcal{T} \setminus \mathcal{P} \neq \emptyset$, tj. postoji tačna rečenica koja nije dokaziva.

Dokaz. Neka je $\overline{\mathbb{P}}^*$ izraziv sa $H \in \mathcal{H}$. Prema Dijagonalnoj lemi $H(g(H))$ je Gedelova rečenica za $\overline{\mathbb{P}}$:

$$H(g(H)) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow g(H(g(H))) \in \overline{\mathbb{P}}.$$

Pošto je $\overline{\mathbb{P}}$ komplement skupa $\mathbb{P}$, a i zbog definicije skupa $\mathbb{P}$ važi

$$g(H(g(H))) \in \overline{\mathbb{P}} \Leftrightarrow g(H(g(H))) \notin \mathbb{P} \Leftrightarrow H(g(H)) \notin \mathcal{P}.$$

Iz gornjih ekvivalencija sledi:

$$H(g(H)) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow H(g(H)) \notin \mathcal{P}.$$

Postoje dve mogućnosti za rečenicu $H(g(H))$ za koje je ova ekvivalencija tačna: da je $H(g(H))$ netačna i dokaziva, ili da je tačna ali ne i dokaziva. Zbog korektnosti sistema je svaka dokaziva rečenica tačna, pa prva mogućnost otpada. Zaključak je da je rečenica $H(g(H))$ tačna, ali ne i dokaziva. □

Rečenica $S \in \mathcal{S}$ je *odlučiva* u Gedelovom sistemu $\mathcal{G}$ ako su ona ili njena negacija dokazive, tj. ako $S \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$. Rečenica S je *neodlučiva* u sistemu $\mathcal{G}$ ako nije odlučiva, tj. ako ni ona ni njena negacija nisu dokazive. Gedelov sistem je potpun ($\mathcal{S} = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$) ako i samo ako u njemu ne postoji neodlučiva rečenica.

Posledica 5.1. Ako je sistem $\mathcal{G}$ korektan i skup $\overline{\mathbb{P}}^*$ izraziv u njemu, onda je $\mathcal{G}$ nepotpun.

Dokaz. Prema Gedelovoj teoremi 5.6 postoji rečenica $S \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{P}$. Zbog korektnosti sistema, $\mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset$, pa je $S \notin \mathcal{P}$ i $S \notin \mathcal{R}$, tj. S je neodlučiva, pa je $\mathcal{G}$ nepotpun sistem. □

Teorema 5.7. Ako je $\mathcal{G}$ korektan, skup $\overline{\mathbb{P}}^*$ izraziv u $\mathcal{G}$ i važi sledeće uslov:

$$(\forall H \in \mathcal{H})(\exists H' \in \mathcal{H})(\forall n \in \mathbb{N})(H'(n) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow H(n) \in \mathcal{R}),$$

onda je $\mathcal{G}$ nepotpun.

Dokaz. Neka $H \in \mathcal{H}$ definiše skup $\mathbb{P}^*$, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in \mathbb{P}^*. \tag{6}$$

Po formuli (2) važi:

$$n \in \mathbb{P}^* \Leftrightarrow g(E_n(n)) \in \mathbb{P}. \tag{7}$$

Prirodan broj pripada skupu $\mathbb{P}$ ako i samo ako je :

$$g(E_n(n)) \in \mathbb{P} \Leftrightarrow E_n(n) \in \mathcal{P}. \tag{8}$$

Iz (6), (7) i (8) može se zaključiti:

$$H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow E_n(n) \in \mathcal{P}. \tag{9}$$

Neka je $H' \in \mathcal{H}$ takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H'(n) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow H(n) \in \mathcal{R}.$$

U slučaju kada je $n = g(H')$ u (9) dobija se:

$$H(g(H')) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow E_{g(H')}(g(H')) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow H'(g(H')) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow H(g(H')) \in \mathcal{R}.$$

Dakle, $H(g(H')) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow H(g(H')) \in \mathcal{R}$, ali kako je sistem saglasan ($\mathcal{T} \setminus \mathcal{R} = \emptyset$), onda $H(g(H')) \notin \mathcal{T} \cup \mathcal{R}$. Slično i $H(g(H')) \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, jer $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$. Dakle rečenica $H(g(H'))$ je neodlučiva, pa je sistem $\mathcal{G}$ nepotpun. □

Teorema 5.8. Ako je sistem $\mathcal{G}$ korektan i skup $\mathbb{R}^*$ izraziv u njemu, onda je $\mathcal{G}$ nepotpun sistem.

Dokaz. Neka je $\mathbb{R}^*$ izraziv sa $H \in \mathcal{H}$. Prema Dijagonalnoj lemi $H(g(H))$ je Gedelova rečenica za $\mathbb{R}$, pa važi:

$$H(g(H)) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow g(H(g(H))) \in \mathbb{R},$$

broj $g(H(g(H)))$ pripada skupa $\mathbb{R}$ pa će i $H(g(H))$ pripadati $\mathcal{R}$, tj.

$$g(H(g(H))) \Leftrightarrow H(g(H)) \in \mathcal{R}.$$

To znači da je rečenica $H(g(H))$ tačna ako i samo ako je osporiva. A kako je sistem $\mathcal{G}$ korektan u njemu ne postoji rečenica koja je ujedno i tačna i osporiva, pa $H(G(H))$ nije ni tačna ni osporiva. Kako nije tačna, zbog korektnosti ona nije ni dokaziva. Znači da je neodlučiva, pa je $\mathcal{G}$ nepotpun sistem. □

Definicija 5.9. Neka je $\mathcal{G}$ Gedelov sistem. Skup $A \subseteq \mathbb{N}$ je *predstavljiv* u sistemu $\mathcal{G}$ ako postoji predikat $H \in \mathcal{H}$ tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H(n) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow n \in A. \tag{10}$$

Ako je to tačno, kaže se i da je skup A predstavljiv u sistemu $\mathcal{G}$ predikatom H, ili da predikat H predstavlja skup A.

Definicija 5.10. Skup $A \subseteq \mathbb{N}$ je *kopredstavljiv* u sistemu $\mathcal{G}$ ako postoji predikat $H \in \mathcal{H}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H(n) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow n \in A. \tag{11}$$

Ako je to tačno, kaže se i da je skup A kopredstavljiv u sistemu $\mathcal{G}$ sa P, kao i da P kopredstavlja A.

Ova teorema je dual posledice 5.1.

Teorema 5.11. Ako je sistem $\mathcal{G}$ konzistentan i skup $\mathbb{R}^*$ predstavljiv u njemu, onda je $\mathcal{G}$ nepotpun.

Dokaz. Neka predikat $H \in \mathcal{H}$ predstavlja skup $\mathbb{R}^*$, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H(n) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow n \in \mathbb{R}^*,$$

takođe iz (2) važi:

$$n \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow g(E_n(n)) \in \mathbb{R}.$$

Kako Gedelov broj izraza pripada skupu $\mathbb{R}$, onda:

$$g(E_n(n)) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow E_n(n) \in \mathcal{R}.$$

Dakle važi da : $H(n) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow E_n(n) \in \mathcal{R}$. Za $n = g(H)$ važi:

$$H(g(H)) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow E_{g(H)}(g(H)) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow H(g(H)) \in \mathcal{R}.$$

Zbog konzistencije sistema $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$, pa je rečenica $H(g(H)) \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, tj. rečenica $H(g(H))$ je neodlučiva i sistem $\mathcal{G}$ je nepotpun. □

Teorema 5.12. Ako je $\mathcal{G}$ konzistentan i $\mathbb{P}^*$ kopredstavljiv u $\mathcal{G}$, onda je $\mathcal{G}$ nepotpun.

Dokaz. Slično kao i u prethonoj teoremi, neka $H \in \mathcal{H}$ kopredstavlja $\mathbb{P}^*$, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H(n) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow n \in \mathbb{P}^* \Leftrightarrow g(E_n(n)) \in \mathbb{P} \Leftrightarrow E_n(n) \in \mathcal{P}.$$

Za $n = g(H)$ važi:

$$H(g(H)) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow E_{g(H)}(g(H)) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow H(g(H)) \in \mathcal{P}.$$

Zbog konzistencije sistema $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$, pa je rečenica $H(g(H)) \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, tj. rečenica $H(g(H))$ je neodlučiva i sistem $\mathcal{G}$ je nepotpun. □

Teorema 5.13. Ako postoji predstavljiv skup A u $\mathcal{G}$ takav da $\mathbb{R}^* \subseteq A$ i $\mathbb{P}^* \cap A = \emptyset$, onda je $\mathcal{G}$ nepotpun.

Dokaz. Neka predikat $H \in \mathcal{H}$ predstavlja skup A, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$H(n) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow n \in A.$$

Specijalno, neka je $n = g(H)$ tada važi:

$$H(g(H)) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow g(H) \in A.$$

Ako $g(H) \in A$, tj. $H(g(H)) \in \mathcal{P}$, tada $g(H) \notin \mathbb{P}^*$ jer $\mathbb{P}^* \cap A = \emptyset$, pa $g(E_{g(H)}(g(H))) \notin \mathbb{P}$, tj. $g(H(g(H))) \notin \mathcal{P}$. Kontradikcija.

Dakle, $g(H) \notin A$, tj. $H(g(H)) \notin \mathcal{P}$. Tada $g(H) \notin \mathbb{R}^*$ jer $\mathbb{R}^* \subseteq A$, pa $g(E_{g(H)}(g(H))) \notin \mathbb{R}$, tj. $g(H(g(H))) \notin \mathcal{R}$. Prema tome, $H(g(H)) \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, tj. rečenica $H(g(H))$ je neodlučiva pa je sistem $\mathcal{G}$ nepotpun. $\square$

6 Zaključak

U radu je pokazano kako se mnoge teoreme matematičke logike mogu približiti i učiniti zanimljivim široj populaciji. Zagonetke Smalijanovog tipa privlače pažnju jednako odraslih, đaka i studenata, i matematčara i nematematičara. Rešavanje zagonetki iz iskazne logike, kakve su u poglavlju 1, mnogi će doživeti kao izazov i vid lagane umne rekreacije. Medjutim, zagonetke koje ilustruju složenije teoreme su zahtevnije, a najzahtevnije su one iz 4. poglavlja koje ilustruju jednu od najsloženijih teorema matematičke logike, prvu Gedelovu teoremu nepotpunosti.

Ipak, priče iz 4. poglavlja su samo ilustracije teorema, a svaki pravi matematičar ne prihvata priče kao teoreme, pa će potražiti precizniju verziju teoreme nepotpunosti u apstraktnoj, matematičkoj formi, kakva se nalazi u 5. poglavlju.

Literatura

[1] Kurt Gödel, *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931.

[2] Nebojša Ikodinović. *Uvod u matematičku logiku.* Skripta, Beograd, 2014.

[3] Raymond M. Smullyan. Languages in which self-reference is possible. *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 22/1, 1957.

[4] Raymond M. Smullyan. *Theory of formal systems.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961.

[5] Raymond M. Smullyan. *What is the name of this book - Riddle of Drakula and Other Logical Puzzles.* Prantice-Hall Inc. Engelewood Cliffs, New Jersey, 1978.

[6] Raymond M. Smullyan. *Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge.* Morgan Kaufmann Publishers, Burlington, Massachusetts, 1986.

[7] Raymond M. Smullyan. *Forever undecided, a puzzle guide to Gödel.* Alfred A. Knoff Inc., New York, 1986.

[8] Raymond M. Smullyan. *Gödel's incompleteness theorems.* Oxford University Press, Oxford, New York, 1992.

[9] Raymond M. Smullyan. *Diagonalization and Self-Reference.* Clarendon Press, Oxford, New York, 1994.

[10] https://plato.stanford.edu/