Математички факултет

Мастер рад

Твербергова теорема: хијерархија ограничења

Аутор:
Никола Садовек

Ментор:
др Александар Вучић

У Београду, 2021. године

Садржај

1 Увод

Радонова теорема из 1921. године [21] тврди да је скуп од $d{+}2$ тачака у еуклидском простору $\mathbb{R}^d$ димензије d увек могуће поделити у два скупа чији конвексни омотачи имају непразан пресек. Уопштење ове теореме, данас познато као Твербергова теорема, се појавило 45 година касније. У њој се тврди да је скуп X од $(r-1)(d+1)+1$ тачке у $\mathbb{R}^d$ увек могуће поделити у r дисјунктних подскупова $X_1, \dots, X_r$, таквих да конвексни омотачи $\operatorname{conv}(X_1), \dots, \operatorname{conv}(X_r)$ имају непразан пресек [25].

Барањи, Шлосман и Сич су поставили хипотезу о уопштењу Твербергове теореме, тзв. *тополошка* верзија, у којој се тврди да свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_{(r-1)(d+1)} \to \mathbb{R}^d$ из симплекса димензије $(r-1)(d+1)$ у еуклидски простор димензије d шаље неких r тачака, које зовемо *Тверберг-тачке*, са r дисјунктних страна, који чине *Тверберг-партицију* симплекса, у исту тачку. Они су 1976. године потврдили хипотезу у случају када је r прост број [6], а Озајдин је 1987. доказао тврђење када је r степен простог броја [20]. Ови резултати су добијени коришћењем метода еквиваријантне топологије. Многима је деловало да тачност тополошке верзије Твербергове хипотезе не зависи од дељивости броја затражених пресека, те да је случај када је r степен простог броја први доказан само зато што је поступак доказа био такав.

У наредним годинама су формулисане различите надоградње тополошке верзије Твербергове теореме. Идеја је увек била иста: ако желимо да закључимо неку додатну информацију о Тверберг-партицији симплекса, морамо да повећамо димензију симплекса. Горње ограничење за димензију страна Тверберг-партиције су доказали Ван Кампен [26] и Флорес [12]. Верзије у којима се прво темена симплекса обоје у неколико боја, а онда тражи да темена страна које чине Тверберг-партицију буду обојена различитим бојама су покренули Барањи и Ларман [5] постављајући проблем који је данас познат као *Барањи–Ларман хипотеза*. Врећица и Живаљевић су објавили своје верзије обојених тврђења овог типа [29, 32, 34], а Благојевић, Мачке и Циглер [10] су касније доказали Оптималну обојену Твербергову теорему, која потврђује Барањи–Ларман хипотезу у одређеним случајевима.

Докази поменутих надоградњи тополошке Твербергове теореме су махом рађени методама еквиваријантне алгебарске топологије и из њих није било лако закључити да ли су последице или појачања оригиналне тополошке верзије. Громов [15] је у свом раду доказао за Ван Кампен – Флорес теорему, а Благојевић, Фрик и Циглер [8] су својом методом ограничења, која се заснива на комбинаторној редукцији, потврдили и за неке обојене верзије, да следе из тополошке верзије. Ови радови су поставили питање односа између теорема Твербергoвог типа, као и простор за размишљање о томе које је нове верзије и надоградње могуће доказати комбинаторним методама.

Благојевић, Фрик и Циглер су 2019. године [9], помоћу метода ограничења, r-тоструког Витнијевог трика Мабијара и Вагнера [18, 19] и резултата Озајдина [20], доказали да постоје контрапримери тополошке Твербергове хипотезе када r није степен простог броја. Скуп контрапримера су прво проширили Мабијар и Вагнер [19], а онда и Авакумов, Мабијар, Скопенков и Вагнер [2].

Инспирација за писање ове тезе је да делимично представи развој *тополошке Твербергове приче* [11] и укаже на њену занимљивост. Главни циљ је да се представе две методе ограничења, помоћу којих се врши комбинаторно-геометријска редукција надоградњи Твербергове теореме на оригиналну верзију, као и да успостави везу између неких, до сада познатих, надоградњи.

Желео бих да се захвалим свом ментору, др Александру Вучићу, као и др Павлу В. М. Благојевићу, на предлогу теме и помоћи при изради тезе. Њихов ентузијазам и несебично дељење знања су много допринели мојој заинтересованости за дискретну геометрију, топологију и везу између ове две области. Такође, желео бих да се захвалим члановима комисије др Браниславу Првуловићу и др Зорану Петровићу на корисним сугестијама и посвећености при читању текста.

2 Основни појмови и дефиниције

Главни објекат који ћемо изучавати у тези је *симплицијални комплекс*. Након споменуте коресподенције између геометријских и апстрактних симплицијалних комплекса, нећемо правити разлику између ова два појма. За више детаља о појмовима уведеним у овој глави видети [17]. Пре тога, наведимо неколико нотационих конвенција.

Ознаке.

- Скуп природних бројева и природних бројева са нулом ћемо означавати, редом, са $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$.
- Кардиналност скупа A означаваћемо са $|A|$, а партитивни скуп скупа A са 2^A.
- Скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$ ћемо означавати са $[n]$, за $n \in \mathbb{N}$, док је $[0] := \emptyset$.
- Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Са

  $$\operatorname{conv}(X) := \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i : \ N \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \ x_i \in X\}$$

  означаваћемо конвексни омотач скупа X.
- Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека су $A_1, \ldots, A_n$ скупови. Са

  $$A_1 \uplus \cdots \uplus A_n := \big(A_1 \times \{1\}\big) \sqcup \cdots \sqcup \big(A_n \times \{n\}\big)$$

  означавамо један модел дисјунктне уније ових скупова.
- Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Симетричну групу пермутација скупа од n елемената означаваћемо са $\mathfrak{S}_n$, а цикличну групу реда n са $\mathbb{Z}/n$.
- За $n \in \mathbb{N}_0$, са $S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ означавамо n-сферу.

2.1 Апстрактни симплицијални комплекси

Дефиниција 2.1. *Апстрактни симплицијални комплекс* је пар (V, K), где је V скуп и $K \subseteq 2^V$ скуп неких коначних подскупова од V, такав да $\sigma \in K$ и $\tau \subseteq \sigma$ имплицира

$\tau \in K$. Елементе скупа K зовемо *симплекси* или *стране*, елементе скупа V *темена*. Димензију симплекса $\sigma \in K$ симплицијалног комплекса (V, K) дефинишемо као $\dim(\sigma) := |\sigma| - 1$, а димензију комплекса $\dim(V, K) := \sup\{\dim(\sigma) : \ \sigma \in K\}$.

У даљем тексту ћемо често апстрактне симплицијалне комплексе називати само симплицијалним комплексима.

Конвенција 2.2. У овој тези ће бити посматрани искључиво коначни нетривијални симплицијални комплекси, тј. они код којих је скуп темена $V \neq \emptyset$ коначан – последично су број страна овог комплекса и димензија коначни бројеви. Често ћемо симплицијални комплекс (V, K) скраћено означавати његовом фамилијом симплекса K, док ћемо скуп темена означавати са $V(K)$.

Пример 2.3. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Тада је *n-димензиони симплекс*, или краће *n-симплекс*, $\Delta_n := ([n+1], 2^{[n+1]})$ један симплицијални комплекс димензије n.

Пример 2.4. Нека је (V, K) симплицијални комплекс и $C \subseteq V$. Тада је

$$\big(C, \quad \big\{\{x\} : \ x \in C\big\} \cup \{\emptyset\}\big)$$

један симплицијални комплекс димензије нула. Означаваћемо га његовим скупом темена C.

Дефиниција 2.5. Нека су K и L два симплицијална комплекса. Комплекс L зовемо *поткомплекс* комплекса K ако важи $L \subseteq K$.

Пример 2.6. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и K један симплицијални комплекс. Тада је

$$K^{\leq n} := \{\sigma \in K : \ \dim\sigma \leq n\}$$

један поткомплекс од K који зовемо *n-скелет комплекса K*.

Дефиниција 2.7. Нека су K и L два симплицијална комплекса.

1. Пресликавање $f : V(K) \longrightarrow V(L)$ се зове *симплицијално* ако је $f(\sigma) \in L$ за све симплексе $\sigma \in K$. Симплицијална пресликавања означавамо са $f : K \longrightarrow L$.

2. Симплицијално пресликавање $f : K \longrightarrow L$ је *изоморфизам* ако је бијекција и ако је његово инверзно пресликавање такође симплицијално. Постојање изоморфизма између K и L означавамо са $K \cong L$.

Напомена 2.8. Изоморфизам између симплицијалних комплекса значи да можемо преименовати темена једног комплекса тако да добијемо други. У случајевима када је изоморфизам чисто преименовање темена, често ћемо поистоветити таква два комплекса. Ипак, на неким местима ћемо оставити знак за изоморфизам, када то будемо желели да нагласимо.

Наведимо сада неколико конструкција потребних за даљи рад.

Дефиниција 2.9. Нека је K симплицијални комплекс. Тада комплекс

$$K' := \big\{\{\sigma_i\}_{i\in[m]} : \; m \in \mathbb{N}_0, \; \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_m \in K\big\}$$

зовемо *прва барицентрична подела* комплекса K. За $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$, *n-ту барицентричну поделу* дефинишемо индуктивно $K^{(n)} := (K^{(n-1)})'$.

Дефиниција 2.10. *Спој* симплицијалних комплекса K и L је симплицијални комплекс $K * L$, који као скуп темена има $V(K) \uplus V(L)$, а дефинисан је као

$$K * L := \{\sigma \uplus \tau : \; \sigma \in K, \; \tau \in L\}.$$

У дефиницији не захтевамо да комплекси K и L буду дефинисани на међусобно дисјунктним скуповима темена (нпр. дозвољено је да буде $L = K$), али то вештачки постижемо тиме што намећемо да скуп темена споја буде $V(K) \uplus V(L)$. Приметимо да је спој два комплекса такође комплекс, тј. дефиниција је добра.

Можемо приметити да је конструција споја два комплекса асоцијативна, у смислу да је $(K * L) * M \cong K * (L * M)$[1]. Ово нам омогућава да посматрамо n-тоструки спој симплицијалног комплекса K, за $n \in \mathbb{N}$, који ћемо означавати са K^{*n}. Овај комплекс као скуп темена има скуп $V(K) \uplus \cdots \uplus V(K) = (V(K) \times \{1\}) \sqcup \cdots \sqcup (V(K) \times \{n\})$.

[1] Асоцијативност је у контексту напомене 2.8.

Пример 2.11. Нека су $n, m \in \mathbb{N}_0$. Тада је $\Delta_n * \Delta_m \cong \Delta_{n+m+1}$. На пример, важи $\Delta_0^{*n+1} \cong \Delta_n$.

Дефиниција 2.12. Нека је K симплицијални комплекс и $n \in \mathbb{N}$. Симплицијални комплекс

$$K_\Delta^{*n} := \{\sigma_1 \uplus \cdots \uplus \sigma_n : \ \sigma_i \in K, \ \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset \text{ за } i \neq j\} \subseteq K^{*n}$$

зове се *n-тоструки избрисани спој* комплекса K.

Став 2.13. *Нека су $n, m \in \mathbb{N}$ и нека су $K_1, \ldots, K_m$ симплицијални комплекси. Тада важи*

$$(K_1 * \cdots * K_m)_\Delta^{*n} \cong (K_1)_\Delta^{*n} * \cdots * (K_m)_\Delta^{*n}.$$

Доказ. Због асоцијативности споја, довољно је показати тврђење у случају $m = 2$. Тада пресликавање између темена можемо задати са

$$\big((v,i),k\big) \longmapsto \big((v,k),i\big), \qquad \text{за } i \in [2], \ k \in [n] \text{ и } v \in V(K_i).$$

Индуковано симплицијално пресликавање

$$\biguplus_{k=1}^{n} (\sigma_k^{(1)} \uplus \sigma_k^{(2)}) \ \longmapsto \ \Big(\biguplus_{k=1}^{n} \sigma_k^{(1)}\Big) \uplus \Big(\biguplus_{k=1}^{n} \sigma_k^{(2)}\Big),$$

при чему су $\{\sigma_k^{(i)}\}_{k \in [n]}$ n међусобно дисјунктних страна комплекса K_i, представља бијекцију између страна комплекса, те је доказ завршен. $\square$

2.2 Геометријски симплицијални комплекси

Дефиниција 2.14. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Скуп $V \subseteq \mathbb{R}^n$ је *афино зависан* ако постоји $k \in \mathbb{N}$, тачке $v_1, \ldots, v_k \in V$ и реални бројеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такви да λ_i нису сви једнаки 0 и важе једнакости

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0.$$

Скуп $V \subseteq \mathbb{R}^n$ је *афино независан* ако није афино зависан.

Приметимо да је нумерички услов за афину зависност из претходне дефиниције еквивалентан томе да су $k-1$ вектора $v_1 - v_k, \dots, v_{k-1} - v_k$ линеарно зависни. (Једночлан скуп је афино независан, те је неопходни услов за афину зависност $k \geq 2$.) Дакле, афино независни скуп $V \subseteq \mathbb{R}^n$ не може имати више од $n+1$ елемената. Такође, празан скуп је афино независан.

Дефиниција 2.15. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. *Геометријски симплекс* σ у простору $\mathbb{R}^n$ је конвексни омотач афино независног скупа $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Тачке скупа V се зову *темена* симплекса σ, конвексни омотач било ког подскупа скупа темена се зове *страна* симплекса σ, док је димензија симплекса σ дефинисана као $\dim(\sigma) := |V| - 1$. *Барицентар* симплекса је тачка $\mathrm{bar}(\sigma) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} v \in \sigma$.

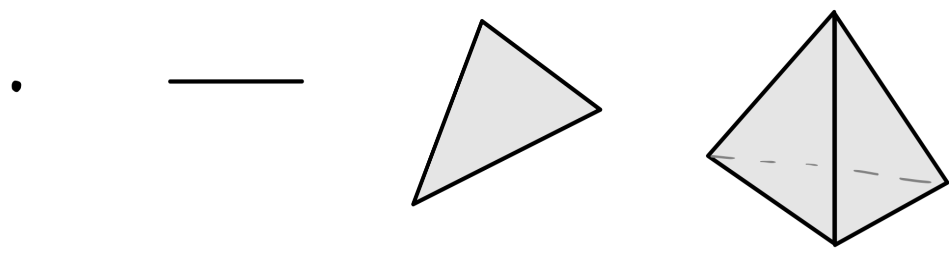
Примери 2.16.

1. Празан симплекс је конвексни омотач празног скупа. Димензија празног симплекса је -1.

2. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. *Стандардни n-симплекс* је геометријски симплекс

$$\Delta_n := \mathrm{conv}\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\},$$

где је $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ стандардна база еуклидског простора $\mathbb{R}^{n+1}$. Димензија стандардног n-симплекса је n.



Слика 1: Симплекси димензије 0, 1, 2 и 3, редом.

Дефиниција 2.17. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$.

1. *Геометријски симплицијални комплекс* K у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ је непразна фамилија симплекса у $\mathbb{R}^n$ за коју важе следећа два услова:

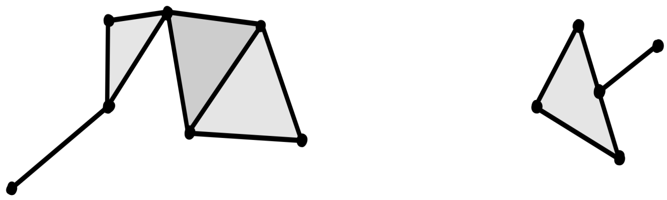
(а) свака страна симплекса $\sigma \in K$ такође је у K;

(б) за свака два симплекса $\sigma, \tau \in K$ важи да је њихов пресек $\sigma \cap \tau$ страна сваког од њих.

Димензија симплицијалног комплекса K је $\dim(K) := \max\{\dim\sigma : \sigma \in K\}$.

2. *Полиедар*, или *геометријска реализација*, геометријског симплицијалног комплекса K је $||K|| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

3. Скуп *темена* геометријског комплекса K је унија скупа темена свих његових страна и означава се са $V(K)$.



Слика 2: Дозвољено и недозвољено лепљење симплекса.

Празан симплекс је тзв. *тривијална* страна сваког симплекса. Приметимо да је димензија геометријског комплекса у простору $\mathbb{R}^n$ највише n.

Конвенција 2.18. Као и у апстрактном случају, посматраћемо искључиво коначне нетривијалне геометријске комплексе, тачније оне за које скуп K садржи коначно много (али бар један) нетривијалних симплекса. Комплекс K је коначан ако и само ако има коначно много темена.

Пример 2.19. Нека је $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ један геометријски симплекс. Скуп страна симплекса σ чини геометријски симплицијални комплекс, чији је полиедар σ. Ради илустрације, покажимо ово.

Нека је V скуп темена симплекса σ и нека су $F, G \subseteq V$ било која два подскупа. Желимо да покажемо $\mathrm{conv}(F) \cap \mathrm{conv}(G) = \mathrm{conv}(F \cap G)$. Инклузија десне стране у леву је јасна. Нека је $x \in \mathrm{conv}(F) \cap \mathrm{conv}(G)$. Тада x можемо представити као конвексну комбинацију темена на два начина

$$\sum_{v \in F} \lambda_v v = x = \sum_{u \in G} \mu_u u.$$

Одузимањем леве и десне стране добијамо да важи

$$\sum_{v\in F\setminus G}\lambda_v v-\sum_{u\in G\setminus F}\mu_u u+\sum_{w\in F\cap G}(\lambda_w-\mu_w)w=0.$$

Како су тачке из V афино независне, следи да су сви индекси у претходној једнакости једнаки нули, па су коефицијенти λ_v, за $v\in F\setminus G$, и μ_u, за $u\in G\setminus F$, једнаки нули. Дакле, x је конвексна комбинација тачака скупа $F\cap G$.

Пример 2.20. Нека је K један геометријски симплицијални комплекс. Тада важи да је

$$K' := \big\{\mathrm{conv}\{\mathrm{bar}(\sigma_i):\ i\in[m]\}:\ m\in\mathbb{N}_0,\ \sigma_i\in K \text{ и } \sigma_1\subsetneq\cdots\subsetneq\sigma_m\big\}$$

један симплицијални комплекс за који важи $||K'||=||K||$ и $\dim(K')=\dim(K)$.

Ово заиста јесте симплицијални комплекс, јер за ланац страна $\sigma_1\subsetneq\cdots\subsetneq\sigma_m$ су тачке $\{\mathrm{bar}(\sigma_i)\}_{i\in[m]}$ афино независне, а ако је $\tau_1\subsetneq\cdots\subsetneq\tau_l$ други ланац страна, онда је

$$\mathrm{conv}\{\mathrm{bar}(\sigma_i)\}_{i\in[m]}\cap\mathrm{conv}\{\mathrm{bar}(\tau_j)\}_{j\in[l]}=\mathrm{conv}\big(\{\mathrm{bar}(\sigma_i)\}_{i\in[m]}\cap\{\mathrm{bar}(\tau_j)\}_{j\in[l]}\big)\in K'.$$

Такође, за $\sigma\in K$ важи

$$\sigma=\bigcup\{\mathrm{conv}\{\mathrm{bar}(\sigma_i)\}_{i\in[m]}:\ m\in\mathbb{N}_0,\ \sigma_i\in K \text{ и } \sigma_1\subsetneq\cdots\subsetneq\sigma_m\subseteq\sigma\}$$

па важе тврдње о једнакости геометријских реализација и димензија.

Дефиниција 2.21. Нека су K и L два симплицијална комплекса. За комплекс L кажемо да је *поткомплекс* комплекса K ако важи $L\subseteq K$.

Пример 2.22. Нека је K геометријски комплекс и нека је $n\in\mathbb{N}_0$. Тада је

$$K^{\leq n} := \{\sigma\in K:\ \dim\sigma\leq n\}$$

један поткомплекс комплекса K, који се зове *n-скелет*.

Дефиниција 2.23. Нека је σ један геометријски симплекс. Скуп

$$\operatorname{relint}(\sigma) := \{x \in \sigma : \ x = \sum_{v \in V(\sigma)} \lambda_v v, \ \lambda_v > 0 \text{ за све } v \in V(\sigma)\}$$

зваћемо *релативна унутрашњост* симплекса σ.

Став 2.24. *За сваки геометријски симплекс σ важи*

$$\sigma = \bigsqcup_{\tau \subseteq \sigma \text{ страна}} \operatorname{relint}(\tau).$$

Доказ. Скуп темена симплекса је афино независан, те свака тачка $x \in \sigma$ може на јединствен начин да се представи као конвексна комбинација темена. Темена са позитивним коефицијентом одређују јединствену страну чијој релативној унутрашњости припада тачка x. Унија је дисјунктна због поменуте јединствености. □

Последица 2.25. *Нека је K геометријски симплицијални комплекс. Тада важи*

$$||K|| = \bigsqcup_{\sigma \in K} \operatorname{relint}(\sigma).$$

Дефиниција 2.26. Нека је K геометријски симплицијални комплекс и $x \in ||K||$. Јединствену страну $\sigma \in K$ за коју важи $x \in \operatorname{relint}(\sigma)$ означавамо за $\operatorname{supp}(x)$ и зовемо *носач* тачке x.

Нека је $x \in ||K||$ тачка геометријске реализације комплекса K. Тада је $\operatorname{supp}(x) = \operatorname{conv}(F)$, при чему је $F \subseteq V(K)$ такав да важи $x = \sum_{v \in F} \lambda_v v$, за неке $\lambda_v \in (0, 1]$ за које важи $\sum_{v \in F} \lambda_v = 1$.

Дефиниција 2.27. Нека су K и L два геометријска симплицијална комплекса.

1. Пресликавање $f : V(K) \longrightarrow V(L)$ такво да је $f(\sigma) \in L$, за све $\sigma \in K$ зовемо *геометријски симплицијално пресликавање.* Таква пресликавања означавамо са $f : K \longrightarrow L$. Ако f још и индукује бијекцију између скупова страна, онда га зовемо *изоморфизам.*

2. Нека је $f : K \longrightarrow L$ геометријски симплицијално пресликавање. Индуковано пресликавање $||f|| : ||K|| \longrightarrow ||L||$, које шаље по правилу

$$\sum_{v \in V(\sigma)} \lambda_v v \longmapsto \sum_{v \in V(\sigma)} \lambda_v f(v), \quad \text{за } \sigma \in K,$$

зове се *афино пресликавање* између комплекса K и L.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Пресликавање $f : ||K|| \longrightarrow \mathbb{R}^n$ зовемо *афино* ако за све $\sigma \in K$ важи

$$f(\sum_{v \in V(\sigma)} \lambda_v v) = \sum_{v \in V(\sigma)} \lambda_v f(v)$$

кад год су $\lambda_v \in [0,1]$ и $\sum_{v \in F} \lambda_v = 1$

Претходна дефиниција афиног пресликавања $||f||$ између два комплекса је добра, јер је пресликавање f било геометријски симплицијално и зато што свака тачка из $||K||$ има јединствену конвексну реализацију преко темена.

Геометријски комплекс $\longrightarrow$ апстрактни комплекс: сваком геометријском симплицијалном комплексу K одговара апстрактни симплицијални комплекс $(V(K), K^a)$, где је

$$K^a := \{F \subseteq V(K) : \mathrm{conv}(F) \in K\}.$$

Ово додељивање је јединствено (до на изоморфизам).

Апстрактни комплекс $\longrightarrow$ геометријски комплекс: сваком апстрактном симплицијалном комплексу K може се придружити геометријски симплицијални комплекс. Један начин да се то уради јесте следећи. Без умањења општости, претпоставимо да је $V(K) = [n]$, за $n \in \mathbb{N}$. Можемо му придружити геометријски комплекс

$$K^g := \big\{\mathrm{conv}\{e_i : \ i \in \sigma\} : \ \sigma \in K\big\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Можемо приметити да су ове две операције међусобно инверзне, до на одговарајући изоморфизам. Због тога ћемо убудуће поистоветити појам апстрактног и геометријског симплицијалног комплекса, када год то не буде доводило до забуне. На пример, можемо говорити о геометријској реализацији апстрактног симплицијалног комплекса. Овакав начин међусобног придруживања оправдава заједничку нотацију за n-симплекс (пример 2.3 и пример 2.16), нотацију за n-скелет (пример 2.6 и пример 2.22) као и нотацију за барицентричну поделу (пример 2.9 и пример 2.20).

Приметимо да афино пресликавање између комплекса одређује јединствено геометријски симплицијално пресликавање, и обрнуто. Због тога, надаље нећемо правити разлику између ове две врсте пресликавања.

Топологија комплекса K је топологија геометријске реализације $||K||$ наслеђена из еуклидског простора и не зависи од реализације. Дакле, поред афиних пресликавања, можемо говорити и о непрекидним пресликавањима $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

Ознаке. Стране симплицијалног комплекса ћемо означавати са $\sigma \in K$, а темена са $v \in K$, уместо $\{v\} \in K$. Тачке геометријске реализације комплекса означаваћемо са $x \in ||K||$ када будемо желели да их разликујемо од темена. У случају када нема забуне, за тачке реализације ћемо писати $x \in \sigma$, за страну $\sigma \in K$.

Нека су K, L два симплицијална комплекса. Без умањења општости, нека важи $V(K) = [n]$ и $V(L) = [m] \setminus [n]$, за неке $m, n \in \mathbb{N}$ за које је $m > n$. Такође, можемо претпоставити да је $V(K * L) = [m]$ и да је

$$K * L = \{F \subseteq [m] : \ F \cap [n] \in K \text{ и } F \setminus [n] \in L\}.$$

Нека је $\{e_1, \dots, e_m\}$ стандардна база еуклидског простора $\mathbb{R}^m$. Геометријске реализације можемо видети као

$$||K|| = \{\text{conv}\{e_i\}_{i\in\sigma} : \ \sigma \in K\}, \ ||L|| = \{\text{conv}\{e_j\}_{j\in\tau} : \ \tau \in L\}$$

и

$$\begin{aligned} ||K * L|| =& \{\text{conv}(\{e_i\}_{i\in\sigma} \cup \{e_j\}_{j\in\tau}) : \ \sigma \in K, \tau \in L\} \\ =& \{tx + (1-t)y : \ x \in ||K||, \ y \in ||L||, \ t \in [0,1]\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Слично, ако је у питању спој више комплекса, $K_1 * \cdots * K_n$, тачке (геометријске реализације тог комплекса) можемо означавати са $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, за $x_i \in K_i$, $\lambda_i \in [0,1]$ и $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Приметимо да ако је $\lambda_i = 0$, онда у запису тачке x може стајати било која тачка $x_i \in K_i$.

Лема 2.28. *Нека је $n \in \mathbb{N}$, нека су K_i симплицијални комплекси, за $1 \leq i \leq n$, и* *нека је* $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in K_1 * \cdots * K_n$. *Тада је* $\operatorname{supp}(x) = \sigma_1 * \cdots * \sigma_n$, *где је*

$$\sigma_i := \begin{cases} \operatorname{supp}(x_i) \in K_i, & \lambda_i \neq 0, \\ \emptyset, & \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Доказ. Тачка $x_i \in ||K_i||$ има конвексну репрезентацију преко темена

$$x_i = \sum_{v \in V(\operatorname{supp}(x_i))} \mu_v v, \quad \text{где су } \mu_v > 0.$$

Тада је

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{v \in V(\operatorname{supp}(x_i))} \lambda_i \mu_v v.$$

Дакле, теме $v \in \operatorname{supp}(x_i)$ је такође теме стране $\operatorname{supp}(x)$ ако и само ако је $\lambda_i > 0$. □

Наведимо сада геометријску верзију дефиниције споја два простора, која даје можда бољу интуицију.

Дефиниција 2.29. Нека су X и Y тополошки простори. Простор $X * Y := X \times Y \times [0,1]/\sim$, где је $\sim$ релација еквиваленција задата са

$$(x, y, 0) \sim (x', y, 0), \text{ за } x, x' \in X, y' \in Y, \text{ и } (x, y, 1) \sim (x, y', 1), \text{ за } x \in X, y, y' \in Y,$$

са топологијом количничког простора, зовемо *спој* простора X и Y.

Теорема 2.1. *Нека су* K, L *два симплицијална комплекса. Тада постоји хомеоморфизам*

$$||K|| * ||L|| \approx ||K * L||$$

такав да се за све $\sigma \in K$ *и* $\tau \in L$ *он рестрикује на*

$$||\sigma|| * ||\tau|| \approx ||\sigma * \tau||.$$

Доказ. Користићемо ознаке из (1). Дефинишимо пресликавање

$$\begin{aligned} f : ||K|| \times ||L|| \times [0,1] &\longrightarrow ||K * L|| \\ (x, y, t) &\longmapsto tx + (1-t)y \end{aligned}$$

Пресликавање је добро дефинисано због (1), непрекидно је и сурјективно. Пошто је домен компактан, а кодомен Хауздорфов, оно је и затворено. Приметимо да је $f(x,y,t) = f(x',y',t')$ еквивалентно са тим да је или $t = 0 = t'$ и $y = y'$, или $t = 1 = t'$ и $x = x'$ или $0 < t = t' < 1$, $x = x'$ и $y = y'$. Дакле, постоји индуковано непрекидно пресликавање

$$\overline{f} : ||K|| * ||L|| \longrightarrow ||K * L||$$

које је бијекција. Такође, $\overline{f}$ је затворено јер је f затворено, па је $\overline{f}$ хомеоморфизам. Део тврђења теореме везан за рестрикцију следи из конструкције пресликавања f.

□

Наведимо сада дефиницију производа и избрисаног производа комплекса. Она нам неће бити од круцијалне важности, тако да нећемо улазити у детаље.

Дефиниција 2.30. Нека је K симплицијални комплекс.

1. *Двоструки производ* комплекса K је скуп

$$K^{\times 2} := ||K|| \times ||K||.$$

2. *Избрисани* двоструки производ комплекса K је

$$K^{\times 2}_{\Delta} := \{(x_1, x_2) \in K^{\times 2} : \operatorname{supp}(x_1) \cap \operatorname{supp}(x_2) = \emptyset\}.$$

Појмови управо дефинисани су ћелијски комплекси. За више детаља о њима, погледати [17].

2.3 Дејство групе

У овом поглављу ћемо навести битне примере простора који допуштају дејства група. Примере ћемо користити кроз остатак тезе.

Дефиниција 2.31. Нека је X тополошки простор и G група.

1. *Лево дејство*, или само *дејство*, групе G на простор X је хомоморфизам група

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X),$$

где је $\mathrm{Homeo}(X)$ група хомеоморфизама простора X у односу на композицију. Тополошки простор заједно са дејством групе G зовемо *G-простор*. Уместо $\varphi(g)(x)$ писаћемо само $g \cdot x$.

2. Нека су X, Y два G-простора. Непрекидно пресликавање $f : X \longrightarrow Y$ зовемо *G-еквиваријантно*, или само *еквиваријантно*, ако важи $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ за све $x \in X$ и $g \in G$. Еквиваријантна пресликавања означавамо са $f : X \longrightarrow_G Y$.

3. Нека је X један G-простор. Дејство је *слободно* ако за све $x \in X$ и $g \in G$ једнакост $g \cdot x = x$ имплицира да је $g = e$ неутрал.

Дефиниција 2.32. Нека је K симплицијални комплекс и G група.

1. *Лево дејство*, или само *дејство*, групе G на комплекс K је хомоморфизам група
$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Iso}(K),$$
где је $\mathrm{Iso}(K)$ група изоморфизама комплекса K у односу на композицију. Комплекс заједно са дејством групе G зовемо *G-комплекс*.

2. Нека су K, L два G-комплекса. Симплицијално пресликавање $f : K \longrightarrow L$ зовемо *G-еквиваријантно*, или само *еквиваријантно*, ако је $f(g \cdot \sigma) = g \cdot f(\sigma)$ за све $\sigma \in K$ и $g \in G$. Еквиваријантна пресликавања означавамо са $f : K \longrightarrow_G L$.

Дејство неке групе на комплекс K је такође тополошко дејство, јер $\mathrm{Iso}(K) \subseteq \mathrm{Homeo}(||K||)$, при чему је симплицијално пресликавање из $\mathrm{Iso}(K)$ поистовећено са индукованим афиним пресликавањем из $\mathrm{Homeo}(||K||)$.

Пример 2.33. Нека је $d \in \mathbb{N}$ и $S^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$ сфера. Тада је S^{d-1} један $\mathbb{Z}/2$-простор са антиподалним дејством $\varepsilon \cdot x = -x$, где је $\mathbb{Z}/2 = \langle \varepsilon \rangle$. Ово дејство је слободно.

Пример 2.34. Нека је X тополошки простор и $r \in \mathbb{N}$. Производ X^r је један $\mathfrak{S}_r$ простор са дејством
$$\pi \cdot (x_1, \ldots, x_r) := (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(r)}), \quad \pi \in \mathfrak{S}_r,\ x_i \in X.$$

Другим речима, пермутација π дејствује на $(x_1, \dots, x_r)$ тако што елемент на i-toj кординати премести на $\pi(i)$-ту координату. То значи да је на i-ту координату дошао елемент са $\pi^{-1}(i)$-те координате.

Ово је заиста један хомеоморфизам, зато проверимо да се композиција слаже на одговарајући начин. Нека су $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_r$ и нека је $x = (x_1, \dots, x_r) \in X^r$. Означимо са $y_i := x_{\pi^{-1}(i)}$, тј. $y := \pi \cdot x$. Важи

$$\sigma \cdot (\pi \cdot x) = \sigma \cdot y = (y_{\sigma^{-1}(i)})_{i=1}^r = (x_{\pi^{-1}(\sigma^{-1}(i))})_{i=1}^r = (x_{(\sigma\circ\pi)^{-1}(i)})_{i=1}^r = (\sigma \circ \pi) \cdot x,$$

те ово заиста јесте лево дејство.

Примери 2.35.

1. Нека је $r \in \mathbb{N}$. Тада еуклидски простор $\mathbb{R}^r$ допушта дејство симетричне групе $\mathfrak{S}_r$, које делује по правилу

$$\pi \cdot (x_1, \dots, x_r) := (x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(r)}), \quad \pi \in \mathfrak{S}_r,\ (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r.$$

Фиксне тачке дејства чине дијагоналу

$$D_1 := \{(x, \dots, x) \in \mathbb{R}^r :\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ово дејство се рестрикује на

$$W_r := \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r :\ x_1 + \dots + x_r = 0\} = D_1^{\perp},$$

што је векторски потпростор димензије $r-1$.

2. За $r \in \mathbb{N}$ дефинишемо $S(W_r) := \{(x_1, \dots, x_r) \in W_r :\ x_1^2 + \dots + x_r^2 = 1\}$. Ово је пример $\mathfrak{S}_r$-дејства на $(r-2)$-сфери, при чему је дејство наслеђено од W_r.

3. Нека су $r, m \in \mathbb{N}$. Тада еуклидски простор $(\mathbb{R}^m)^{\oplus r}$ допушта дејство симетричне групе $\mathfrak{S}_r$, које делује по правилу

$$\pi \cdot (z_1, \dots, z_r) := (z_{\pi^{-1}(1)}, \dots, z_{\pi^{-1}(r)}), \quad \pi \in \mathfrak{S}_r,\ z_i \in \mathbb{R}^m.$$

Фиксне тачке дејства чине дијагоналу

$$D_m := \{(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{R}^m)^{\oplus r} :\ z_1 = \dots = z_r \in \mathbb{R}^m\}.$$

Индекс у ознаци дијагонале сугерише димензију r вектора које пермутујемо.

Приметимо да на скупу $(\mathbb{R}^r)^m$ такође постоји $\mathfrak{S}_r$-дејство задато бијекцијом

$$(\mathbb{R}^r)^m \to (\mathbb{R}^m)^{\oplus r},\ (x_{i,1}, \ldots, x_{i,r})_{i\in[m]} \mapsto (x_{1,j}, \ldots, x_{m,j})_{j\in[r]}.$$

У неким приликама нећемо правити разлику између ова два еуклидска $\mathfrak{S}_r$-простора (нпр. лема 2.37), те ћемо дијагоналу $D_m \subseteq (\mathbb{R}^m)^{\oplus r}$ видети као потпростор од $(\mathbb{R}^r)^m$. Ово радимо да бисмо олакшали запис.

Пример 2.36.

1. Ако су K и L два $\mathfrak{S}_r$-комплекса, онда је и $K * L$ један $\mathfrak{S}_r$-комплекс, при чему је подразумевано дејство координатно.

2. Нека је K симплицијални комплекс и $r \in \mathbb{N}$. Тада су K^{*r} и K^{*r}_{Δ} примери $\mathfrak{S}_r$-комплекса за дејством

   $$\pi \cdot (\sigma_1 * \cdots * \sigma_r) := \sigma_{\pi^{-1}(1)} * \cdots * \sigma_{\pi^{-1}(r)}, \quad \pi \in \mathfrak{S}_r,\ \sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in K^{*r} \text{ (или } K^{*r}_{\Delta}).$$

   Ово дејство посматрано као тополошко има облик

   $$\pi \cdot (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r) := \lambda_{\pi^{-1}(1)} x_{\pi^{-1}(1)} + \cdots + \lambda_{\pi^{-1}(r)} x_{\pi^{-1}(r)},$$

   за $\pi \in \mathfrak{S}_r,\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in K^{*r}$ (или K^{*r}_{Δ}).

Лема 2.37. *Нека је $r \geq 2$ природан број, K, L два симплицијална $\mathfrak{S}_r$-комплекса и*

$$f : K \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r \quad \text{и} \quad g : L \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r$$

два непрекидна еквиваријатна пресликавања. Тада за непрекидно пресликавање

$$f * g : K * L \to_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^r)^2, \quad tx + (1-t)y \mapsto (tf(x), (1-t)g(y))$$

важи $(f * g)^{-1}(D_2) = f^{-1}(D_1) * g^{-1}(D_1)$, при чему је $D_2 \subseteq (\mathbb{R}^2)^{\oplus r} \cong_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^r)^2$.

Доказ. Пресликавање $f * g$ је добро дефинисано, непрекидно и еквиваријантно. Како је $tf(x) \in D_1$ ако и само је $t = 0$ или $x \in f^{-1}(D_1)$, то је

$$(f * g)^{-1}(D_2) = \{tx + (1-t)y :\ tf(x) \in D_1,\ (1-t)g(x) \in D_1\} = f^{-1}(D_1) * g^{-1}(D_1).$$

$\square$

Наведимо сада битну теорему из еквиваријантне топологије, коју остављамо без доказа. Она представља једну од првих теорема еквиваријантне топологије, која показује непостојање еквиваријантних пресликавања.

Теорема 2.2 (Борсук-Улам, [17]). *Нека су S^n и S^m сфере са слободним $\mathbb{Z}/2$-дејствима. Тада, непрекидно $\mathbb{Z}/2$-еквиваријантно пресликавање*

$$f : S^m \longrightarrow_{\mathbb{Z}/2} S^n$$

постоји ако и само ако је $m \leq n$.

3 Теореме Твербергового типа

У овој глави, која је у великој мери описног карактера, навешћемо битна тврђења везана за Твербергову теорему, уз кратки историјски осврт. За више детаља, видети [11, 17, 33].

3.1 Радонова теорема

Радон [21] је 1921. године доказао следећу теорему, која је инспирисала људе за даља уопштења, као што ћемо видети у остатку овог текста.

Теорема 3.1 (Радон)**.** *Нека је $d \in \mathbb{N}$ и $X \subseteq \mathbb{R}^d$ скуп од (бар) $d+2$ елемената. Тада постоје дисјунктни подскупови $P, N \subseteq X$ за које важи*

$$\operatorname{conv}(P) \cap \operatorname{conv}(N) \neq \emptyset.$$

Доказ. Нека је $X = \{x_1, \ldots, x_{d+2}\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Тај скуп је афино зависан, па постоје $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+2} \in \mathbb{R}$ који нису сви нула, а за које важи

$$\sum_{i=1}^{d+2} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{d+2} \lambda_i = 0.$$

Скупови $P := \{x_i : \ \lambda_i > 0\}$ и $N := \{x_i : \ \lambda_i < 0\}$ јесу непразни. Нека је $\lambda := \sum_{i:x_i \in P} \lambda_i = \sum_{j:x_j \in N} -\lambda_j \neq 0$. Тада је

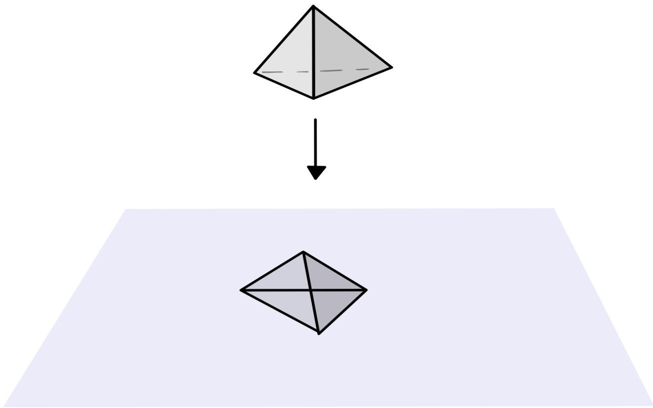
$$x := \sum_{i:x_i \in P} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{j:x_j \in N} \frac{-\lambda_j}{\lambda} x_j \in \operatorname{conv}(P) \cap \operatorname{conv}(N)$$

тражена тачка. □

Постоји реформулација Радонове теореме преко афиног пресликавања, која је корисна за даље уопштавање теорема Твербергового типа.

Теорема 3.2 (Радон, афина верзија)**.** *Нека је $d \in \mathbb{N}$ и $f : \Delta_{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ афино пресликавање. Тада постоје дисјунктне стране σ_1 и σ_2 симплекса $\Delta_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset.$$



Слика 3: Случај $d = 2$.

Оваква формулација отвара простор за питање: *Да ли теорема важи ако претпоставимо да је f непрекидно пресликавање?* Одговор су дали Бајмочи и Барањи [3], користећи Борсук-Уламову теорему (теорема 2.2).

Теорема 3.3 (Радон, непрекидна верзија)**.** *Нека је $d \in \mathbb{N}$ и $f : \Delta_{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоје дисјунктне стране σ_1 и σ_2 симплекса $\Delta_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset.$$

Доказ. Нека је $\Delta_{d+1} = \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_{d+2}\} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$ и нека је $X := (\Delta_{d+1})^{\times 2}_{\Delta}$ са $\mathbb{Z}/2$-дејством које пермутује координате. Претпоставимо да тврђење теореме није тачно. Онда постоји непрекидно пресликавање $f : \Delta_{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ за које је $f(x_1) \neq f(x_2)$ за све $(x_1, x_2) \in X$. Ово имплицира да је

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow_{\mathbb{Z}/2} S^{d-1} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{f(x_1) - f(x_2)}{||f(x_1) - f(x_2)||} \end{aligned}$$

непрекидно еквиваријантно пресликавање. Са друге стране, нека је

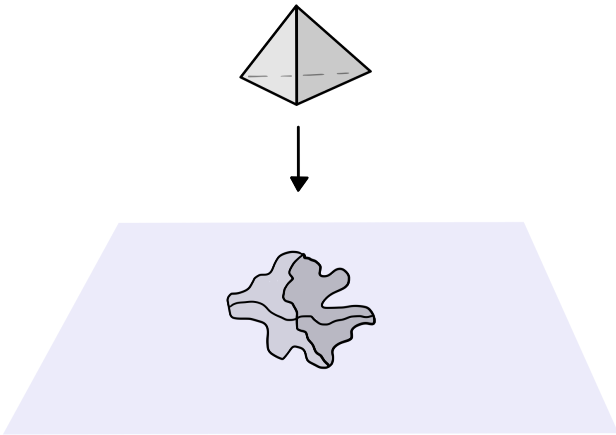
$$\begin{aligned} h : S(W_{d+2}) &\longrightarrow_{\mathbb{Z}/2} X \\ (a_1, \ldots, a_{d+2}) &\longmapsto (\sum_{i:a_i>0} \frac{a_i}{A} e_i, \sum_{j:a_j<0} \frac{-a_j}{A} e_j), \quad \text{за } A := \sum_{i:a_i>0} a_i. \end{aligned}$$

Ово пресликавање је непрекидно и еквиваријантно. Контрадикција следи из Борсук-

Уламове теореме због композиције

$$g \circ h : S(W_{d+2}) \longrightarrow_{\mathbb{Z}/2} S^{d-1}.$$

$\square$



Слика 4: Тополошка верзија Радонове теореме, случај $d = 2$.

Следеће питање које можемо да поставимо је: *Да ли под одређеним условима можемо знати нешто везано за димензије симплекса чије се слике при f секу?* Испоставља се да ако смо спремни да додамо једно теме на симплекс, под одређеним условима можемо нешто сазнати. Одговор су нашли Ван Кампен [26] и Флорес [12].

Теорема 3.4 (Ван Кампен – Флорес)**.** *Нека је $d \in \mathbb{N}$ паран број и $f : \Delta_{d+2} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоје дисјунктне стране $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta_{d+2}$ које су димензије највише $\frac{d}{2}$ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset.$$

Доказ. Нека је $g : \Delta_{d+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ непрекидно пресликавање задато преко

$$g(x) := (f(x), \mathrm{dist}(x, (\Delta_{d+2})^{\leq d/2}), \quad x \in ||\Delta_{d+2}||,$$

при чему је dist функција растојања. Приметимо да ако је $\mathrm{dist}(x, (\Delta_{d+2})^{\leq d/2}) = 0$, онда важи $\mathrm{supp}(x) \in (\Delta_{d+2})^{\leq d/2}$.

Применом тополошке верзије Радонове теореме следи да постоје тачке $x_1, x_2 \in ||\Delta_{d+2}||$ за које је $\mathrm{supp}(x_1) \cap \mathrm{supp}(x_2) = \emptyset$ и важи $g(x_1) = g(x_2)$. Специјално, важи

$f(x_1) = f(x_2)$. Пошто су $\mathrm{supp}(x_1)$ и $\mathrm{supp}(x_2)$ дисјунктне стране комплекса од $d+3$ темена, следи да бар једна, рецимо $\mathrm{supp}(x_1)$, има не више од $\frac{d}{2}+1$ од темена, односно припада поткомплексу $(\Delta_{d+2})^{\leq d/2}$. Дакле

$$0 = \mathrm{dist}(x_1, (\Delta_{d+2})^{\leq d/2}) = \mathrm{dist}(x_2, (\Delta_{d+2})^{\leq d/2}),$$

па и друга страна припада поткомплексу $(\Delta_{d+2})^{\leq d/2}$. $\square$

Доказ ове теореме је пример *метода ограничења* [8], о којој ће више речи бити у глави 4.

3.2 Твербергова теорема

Следећи ниво генерализације Радонове теореме је тзв. *r-тострука* генерализација коју је доказао Тверберг [25] 1966. године. Хипотезу о r-тоструком уопштењу је поставио Бирч [7] 1959. године, који је доказао специјалан случај $d = 2$. Од 1966. године је смишљено неколико доказа Твербергове теореме, али нам сами докази неће бити од круцијалног значаја за даљи рад.

Теорема 3.5 (Тверберг). *Нека су $d \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви, $N := (d+1)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ афино пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset. \tag{2}$$

Било коју колекцију r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N за које важи својство (2) зовемо *Тверберг-партиција*, или *Тверберг-r-партиција*, пресликавања f, а тачке $x_1 \in \sigma_1, \ldots, x_r \in \sigma_r$ за које важи $f(x_1) = \cdots = f(x_r)$ зовемо *Тверберг-тачке*.

Пример 3.1. Број $N = N(d, r)$ у исказу теореме је најмањи могућ, тј. исказ теореме је оптималан. Заиста, нека је $\Delta_{N-1} = \mathrm{conv}\{e_1, \ldots, e_N\} \subseteq \mathbb{R}^N$ и нека је $(u_0, u_1, \ldots, u_d) = (0, e_1, \ldots, e_d)$ $(d+1)$-торка која чини афино независан скуп. Дефинишимо афино пресликавање $h : \Delta_{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ које шаље по правилу

$$e_i \longmapsto u_{\lfloor (i-1)/(r-1) \rfloor}.$$

Претпоставимо да постоје дисјунктне стране $\{\sigma_i\}_{i\in[r]}$ такве да је $\bigcap_{i\in[r]} h(\sigma_i) \neq \emptyset$. Како је h афино, а $\{u_i\}_{i\in[d]_0}$ афино независан скуп, то је

$$\bigcap_{i\in[r]} h(\sigma_i) = \operatorname{conv}\Big(\bigcap_{i\in[r]} h\big(V(\sigma_i)\big)\Big) = \operatorname{conv}(\emptyset) = \emptyset$$

јер је за свако теме u_i симплекса $\operatorname{conv}\{u_0, \dots, u_d\}$ кардиналост инверзне слике

$$|h^{-1}(u_0)| = \dots = |h^{-1}(u_d)| = r - 1,$$

а скупови $V(\sigma_1), \dots, V(\sigma_r)$ су дисјунктни.

Као и у случају Радонове теореме, поставља се питање: *да ли теорема и даље важи ако се претпостави да је f непрекидно, уместо афино, пресликавање?*

Хипотеза 3.2 (Твербергова хипотеза, тополошка верзија)**.** *Нека су $d \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви, $N := (d+1)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset. \tag{3}$$

Случај $r = 2$ ове хипотезе је тополошка верзија Радонове теореме (теорема 3.3), док случај $d = 1$ следи из наредног примера.

Пример 3.3 (Тверберг, тополошка верзија, $d = 1$)**.** Нека је $r \geq 2$ природан број и нека је $f : \Delta_{2r-2} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_{2r-2} са својством

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset. \tag{4}$$

Заиста, нека је $\Delta_{2r-2} = \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_{2r-1}\}$. Постоји пермутација $\pi \in \mathfrak{S}_{2r-1}$ за коју важи

$$f(e_{\pi(1)}) \leq \dots \leq f(e_{\pi(2r-1)}).$$

Тада следећих r страна чине Твербергову партицију

$$\sigma_1 := [e_{\pi(1)}, e_{\pi(2r-1)}],\ \sigma_2 := [e_{\pi(2)}, e_{\pi(2r-2)}], \dots,\ \sigma_{r-1} := [e_{\pi(r-1)}, e_{\pi(r+1)}],\ \sigma_r := \{e_{\pi(r)}\}.$$

3.2.1 Еквиваријантна топологија

За $d \geq 1$ и $r \geq 2$ нека је $N := (d+1)(r-1)$. Даљи покушаји давања одговора на Твербергову хипотезу полазе од претпоставке да постоји непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ такво да за било који одабир међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N важи

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) = \emptyset. \tag{5}$$

Покушаћемо да преточимо ову особину контрапримера f тако што ћемо да параметризујемо све r-торке међусобно дисјунктних страна симплекса Δ_N.

Ово је пример тзв. ,,конфигурациони простор – тест пресликавање"метода. За више детаља, видети [1, 31, 33].

Претпоставимо да желимо да решимо проблем из дискретне геометрије, који укључује постојање одређеног распореда тачака (или других геометријских објеката) са неким својством. Жељену конфигурацију називамо решењем посматраног проблема. У циљу доказивања постојања решења, пратимо следећа упутства.

1. Одаберемо тополошки простор X, који зовемо *конфигурациони простор*, чији елементи представљају конкуренте за решења проблема.

2. Одаберемо тест пресликавање $F : X \longrightarrow Y$, које зовемо *тест пресликавање*, у пажљиво одабран простор Y, који зовемо *тест простор*, тако да унутар њега постоји потпостор $Z \subseteq Y$. Помоћу пресликавања F би требало да можемо да проверимо да ли је елемент $x \in X$ решење: $x \in X$ је решење ако и само ако је $F(x) \in Z$.

3. Под претпоставком да решење не постоји, можемо рестриковати домен пресликавања F
$$F : X \longrightarrow Y \setminus Z.$$

4. Све претходне одабире правимо под додатним условом, а то је да сви простори $X, Y, Y \setminus Z$ допуштају дејство неке групе G, а да је пресликавање F G-еквиваријантно.

5. Циљ је, за конструисану ,,конфигурациони простор – тест пресликавање"схему, доказати да еквиваријантно пресликавање
$$F : X \longrightarrow_G Y \setminus Z$$
не постоји. Ово се најчешће ради методима еквиваријантне топологије.

При покушају давања некаквог одговора на тополошку Твербергову хипотезу, посматрајмо проблем задат са (5). Конфигурациони простор који ћемо посматрати је

$$(\Delta_N)^{*r}_{\Delta} = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in \sigma_1 * \cdots * \sigma_r : \ \sigma_i \in \Delta_N, \ \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset \text{ за } i \neq j\}.$$

Овај простор допушта дејство симетричне групе $\mathfrak{S}_r$, која делује по правилу

$$\pi \cdot (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r) = \lambda_{\pi^{-1}(1)} x_{\pi^{-1}(1)} + \cdots + \lambda_{\pi^{-1}(r)} x_{\pi^{-1}(r)},$$

за $\pi \in \mathfrak{S}_r, \ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$.

Дефиниција 3.4. Нека су $d \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви, а $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Индуковано пресликавање

$$J_f : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}, \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \ \longmapsto \ (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)) \oplus \cdots \oplus (\lambda_r, \lambda_r f(x_r))$$

зовемо *спој-пресликавање.*

Приметимо да је J_f добро дефинисано, јер за $\lambda_i = 0$ слика не зависи од одабира тачке x_i. Такође је непрекидно, јер је f непрекидно. На пример, темена комплекса $(\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ шаље по правилу

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_r \ \longmapsto \ (0,0) \oplus \cdots \oplus (1, f(v_i)) \oplus \cdots \oplus (0,0).$$

Кодомен $(\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$ допушта дејство групе $\mathfrak{S}_r$

$$\pi \ \cdot \ (z_1, \ldots, z_r) = (z_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, z_{\pi^{-1}(r)}).$$

Ово је тест простор који ћемо посматрати. Пресликавање J_f је $\mathfrak{S}_r$-еквививаријантно:

$$\begin{array}{ccc}
\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r & \xrightarrow{\quad J_f \quad} & \bigoplus_{i=1}^r (\lambda_i, \lambda_i f(x_i)) \\
\downarrow{\scriptstyle \pi\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle \pi\cdot} \\
\lambda_{\pi^{-1}(1)} x_{\pi^{-1}(1)} + \cdots + \lambda_{\pi^{-1}(r)} x_{\pi^{-1}(r)} & \xrightarrow{J_f} & \bigoplus_{i=1}^r (\lambda_{\pi^{-1}(i)}, \lambda_{\pi^{-1}(i)} f(x_{\pi^{-1}(i)}))
\end{array}$$

и оно ће нам бити тест пресликавање. Нека је

$$D_{d+1} := \{(z_1, \ldots, z_r) \in (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} : \ z_1 = \cdots = z_r\}$$

тзв. *танка дијагонала*[2]. Приметимо:

$$f \text{ је решење проблема (5) ако и само ако } \operatorname{im}(J_f) \cap D_{d+1} = \emptyset.$$

Заиста, ако $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ чине Тверберг партицију и $x_i \in \sigma_i$ су такве да је $f(x_1) = \cdots = f(x_r)$, онда је тачка

$$x := \frac{1}{r}x_1 + \cdots + \frac{1}{r}x_r \in \sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$$

таква да је $J_f(x) \in D_{d+1}$. Обрнуто, ако је

$$x := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in \sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$$

тачка са својством да је $J_f(x) \in D_{d+1}$, онда обавезно важи $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \frac{1}{r}$ (те $\sigma_i \neq \emptyset$) и $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ чине Тверберг-партицију.

Дакле, одабрали смо конфигурациони простор – тест пресликавање схему, те можемо закључити да важи следеће.

Тврђење 3.5. *Нека су $d \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви и $N := (d+1)(r-1)$. Ако постоји контрапример за Твербергову тополошку хипотезу, онда постоји еквиваријантно пресликавање*

$$(\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_{d+1}.$$

3.2.2 Тополошка Твербергова теорема

Барањи, Шлосман и Сич, су 1981. године потврдили тачност тополошке верзије Тверберговe теореме (хипотеза 3.2) у случају када је r прост број [6]. Озајдин је 1987. проширио тврђење на случајеве када је r степен простог броја [20].

Теорема 3.6 ([20])**.** *Нека је $d \geq 1$ природан број, r степен простог броја и $N := (d+1)(r-1)$. Тада не постоји еквиваријантно пресликавање*

$$(\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D.$$

Ово за последицу има следећу теорему.

[2] Број $d+1$ у индексу означава димензију еуклидског простора којем вектори $z_1, \dots, z_r$ припадају.

Теорема 3.7 (Тверберг, тополошка верзија за r степен простог). *Нека је $d \geq 1$ природан број, r степен простог броја, $N := (d+1)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Поставља се питање: *да ли је тополошка верзија Твербергове хипотезе тачна када r није степен простог броја, или постоји контрапример?*

3.3 Варијације Твербергове теореме

У овом одељку ћемо представити неке познате верзије тополошке Твербергове теореме, као што су уопштена верзија Ван Кампен – Флорес, обојена верзија Ван кампен - Флорес, слаба обојена верзија, верзије Врећице и Живаљевића типа А и типа Б, теорему о Тверберг тачкама са једнаким барицентричним координатама као и Барањи–Ларман хипотеза и оптимална обојена верзија Твербергове теореме.

3.3.1 Проблем Барањи–Ларман: обојена верзија Твербергове теореме

Током изучавања проблема о половљењу правих и равни, Барањи, Фиреди и Ловас су 1990. године уочили потребу за обојеном верзијом Твербергове теореме [4]. Ово је отворило ново поглавље у погледу уопштења теорема Твербрговог типа - било афине или тополошке верзије. Недуго након тога, Барањи и Ларман су 1992. године формулисали проблем обојене верзије Твербергове теореме.

Нека су $N, l \in \mathbb{N}$. *Бојење* скупа темена $V(\Delta_N)$ симплекса помоћу l боја је партиција $(C_1, \dots, C_l)$ скупа $V(\Delta_N)$. Елементе те партиције називамо *класе боја.* Страна σ симплекса Δ_N је *дугина страна* ако важи $|\sigma \cap C_i| \leq 1$, за све $1 \leq i \leq l$. Поткомплекс

$$R_{(C_1,\dots,C_l)} := \{\sigma \in \Delta_N : \ \sigma \text{ је дугина страна}\} \subseteq \Delta_N$$

назива се *дугин поткомплекс.*

Лема 3.6. *Нека су $l, N \in \mathbb{N}$ и $(C_1, \dots, C_l)$ једно бојење темена симплекса Δ_N помоћу* *l боја. Тада важи*

$$R_{(C_1,\ldots,C_l)} \cong C_1 * \cdots * C_l.$$

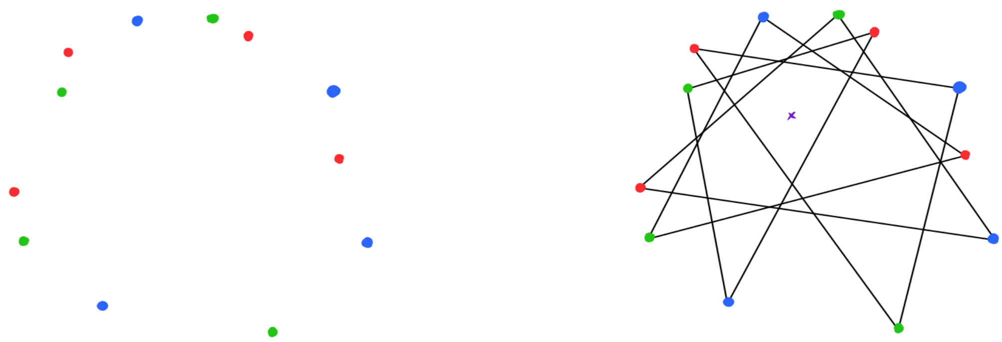
Доказ. Изоморфизам се постиже симплицијалним пресликавањем које дугину страну $\sigma \in R_{(C_1,\ldots,C_l)}$ шаље у $(\sigma \cap C_1) * \cdots * (\sigma \cap C_l)$. □

Проблем 3.7 (Барањи–Ларман, обојена афина верзија)**.** Нека су $d \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви. Одредити најмањи број $n = n(d, r)$ такав да за свако афино пресликавање $f : \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење $(C_1, \ldots, C_{d+1})$ скупа темена $V(\Delta_{n-1})$ помоћу $d+1$ боја такво да свака класа боја садржи бар r темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Оно што се може одмах рећи је да важи $n(d, r) \geq (d+1)r$. Барањи и Ларман су доказали да важи $n(1, r) = 2r$, $n(2, r) = 3r$, док је Ловас показао $n(d, 2) = 2(d+1)$. Сва три доказа се налазе у [4]. Видети [11]. Такође, поставили су следећу хипотезу.

Хипотеза 3.8 (Барањи–Ларман)**.** *Нека су $r \geq 2$ и $d \geq 1$ природни бројеви. Тада је $n(d, r) = (d+1)r$.*



Слика 5: Случај $r = 4$ и $d = 2$.

3.3.2 Проблем Врећица–Живаљевић

Као одговор на радове који су објавили Барањи и Ларман, Врећица и Живаљевић су представили модификовану верзију обојеног Твербергововг проблема у свом раду [34] из 1992. године.

Проблем 3.9. Нека су $d, N \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви. Одредити најмањи број $t = t(d,r)$ такав да за свако афино (или непрекидно) пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење $(C_1, \ldots, C_{d+1})$ скупа темена $V(\Delta_N)$ помоћу $d+1$ боја такво да свака класа боја садржи бар t темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

На језику функције $t(d,r)$, Барањи–Ларман хипотеза тврди да је $t(d,r) = r$, за $r \geq 2$ и $d \geq 1$. Врећица и Живаљевић су доказали наредну теорему у случају када је r прост број [34], а Живаљевић је проширио на степене простих [32].

Теорема 3.8 (Живаљевић–Врећица, обојена верзија, тип А)**.** *Нека је $d \geq 1$ природан број и r степен простог броја. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење $(C_1, \ldots, C_{d+1})$ скупа темена $V(\Delta)$ помоћу $d+1$ боја такво да свака класа боја садржи бар $2r-1$ темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

На језику функције $t(d,r)$, претходна теорема тврди да је $t(d,r) \leq 2r-1$ када је r степен простог броја. У раду [29], Врећица и Живаљевић су доказали следеће тврђење.

Теорема 3.9 (Живаљевић–Врећица, обојена верзија, тип Б)**.** *Нека су $d, k \geq 1$, r степен простог броја такви да важи $kr \geq (d+1)(r-1)+1$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење $(C_1, \ldots, C_k)$ скупа темена $V(\Delta)$ помоћу k боја такво да свака класа боја садржи бар $2r-1$ темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

3.3.3 Теореме типа Ван Кампен – Флорес

Наредна варијација коју спомињемо је уопштена верзија Ван кампен – Флорес теореме. Ову верзију су доказали Саркарија [22] за просте бројеве r и Воловиков [28] за степене простих. У глави 4 ћемо видети да је ово тврђење последица тополошке верзије Твербергове теореме ([8, 15]).

Теорема 3.10 (Уопштена верзија Ван Кампен – Флорес). *Нека је r степен простог броја, $d \geq 1$ и $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil$ природни бројеви, $N := (d+2)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ унутар k-скелета $(\Delta_N)^{\leq k}$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Теорема 3.11 (Ван Кампен – Флорес: обојена верзија). *Нека је r степен простог броја, $d \geq 1$ и $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil + 1$ природни бројеви, $N := (d+k+1)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада за свако бојење темена симплекса Δ_N у k боја, при чему је сваком бојом обојено највише $2r-1$ темена, постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

3.3.4 Тверберг-тачке са једнаким барицентричним координатама

Последња надоградња тополошке верзије Твербергове теореме коју наводимо у овој глави је тополошка верзија резултата који је објавио Соберон [23, 24], коју су добили Благојевић, Фрик и Циглер [8].

Нека су $N, l \geq 1$ природни бројеви, $(C_1, \ldots, C_l)$ бојење темена симплекса Δ_N помоћу l боја. Свака тачка дугиног комплекса $x \in R_{(C_1,\ldots,C_l)}$ има јединствену конвексну репрезентацију $x = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{x,j} v_{x,j}$, за $v_{x,j} \in C_j$. За две тачке $x = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{x,j} v_{x,j}$ и $y = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{y,j} v_{y,j}$ дугиног комплекса $R_{(C_1,\ldots,C_l)}$ кажемо да имају *једнаке барицентричне координате* ако важи $\lambda_{x,j} = \lambda_{y,j}$, за све $1 \leq j \leq l$.

Теорема 3.12. *Нека је $d \geq 1$ природан број, r степен простог броја и $N := (rd+1)(r-1)$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење скупа темена помоћу $(r-1)d+1$ боја такво да свака класа боја садржи r темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N и тачке $x_1 \in \sigma_1, \ldots, x_r \in \sigma_r$ са једнаким барицентричним координатама са својством*

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r).$$

3.4 Оптимална обојена верзија Твербергове теореме

За крај ове главе, наводимо тврђење које даје делимичан одговор на хипотезу Барањи–Ларман (хипотеза 3.8). Резултате из овог поглавља су доказали Благојевић, Мачке и Циглер [10].

Теорема 3.13 (Тверберг, оптимална обојена верзија)**.** *Нека су $d, m \geq 1$ природни бројеви, r прост број, $N \geq (d+1)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада за свако бојење темена симплекса Δ_N у m боја, при чему је сваком бојом обојено највише $r-1$ темена, постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Као последицу добијамо потврду Барањи–Ларман хипотезе (хипотеза 3.8) при претпоставци да је $r+1$ прост број.

Последица 3.10 (Барањи–Ларман за просте - 1)**.** *Нека су $r, d \in \mathbb{N}$ такви да је $r+1$ прост број. Тада важи $n(d,r) = (d+1)r$ и $t(d,r) = r$.*

Доказ. Нека је $N := (d+1)r$, $p := r+1$ прост број, $f : \Delta_{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидна функција и $(C_1, \ldots, C_{d+1})$ бојење темена симплекса Δ_{N-1} помоћу $d+1$ боја, при чему је сваком бојом обојено r темена. Симплекс Δ_{N-1} можемо видети као страну симплекса Δ_N. Нека је $(C_1, \ldots, C_{d+2})$ бојење темена симплекса Δ_N, при чему је додатно теме обојено бојом C_{d+2} (остатак бојења је наслеђен од стране Δ_{N-1} и важи $|C_{d+2}| = 1$). Нека је $v \in V(\Delta_N) \setminus V(\Delta_{N-1})$ то додатно теме и нека је $y \in \mathbb{R}^d$ произвољна тачка. Пресликавање $g : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ дефинисано са

$$g(tv + (1-t)x) := ty + (1-t)f(x), \quad \text{за } x \in \Delta_{N-1} \text{ и } t \in [0,1]$$

јесте непрекидно, те можемо применити теорему 3.13 јер је $N = (d+1)(p-1)$ и p је прост број. Дакле, постоји p међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ симплекса Δ_N таквих да је $g(\sigma_1) \cap \cdots \cap g(\sigma_p) \neq \emptyset$. Пошто највише једна од њих садржи теме v, осталих $p - 1 = r$ страна чине дугину Тверберг-партицију пресликавања f. □

4 Тверберг плус ограничења

Теореме из поглавља 3.3, а које су остављене без доказа, на први поглед делују као надоградње тополошке Твербергове теореме (теорема 3.7): ако смо спремни да повећамо број темена симплекса, онда смо у ситуацији да сазнамо нешто ново о Тверберг-партицији. Првобитно, већина њих је доказана методама еквиваријантне алгебарске топологије. Поставља се питање: *да ли су оне јача тврђења од тополошке верзије Твербергове теореме?*

У свом раду [8] који носи назив ове главе, Благојевић, Фрик и Циглер су развили тзв. *метод ограничења*, помоћу којег је могуће све теореме из поглавља 3.3 о варијацијама Твербергове теореме, видети као геометријско-комбинаторну последицу тополошке Твербергове теореме, дакле без коришћења тополошке машинерије.

Лема 4.1. *Нека су $d, c \in \mathbb{N}$, r степен простог броја, $N \geq N_c := (r-1)(d+1+c)$ природан број, а $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ и $g : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^c$ непрекидна пресликавања. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N и тачке $x_i \in \sigma_i$ у њима за које важи*

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r) \quad \text{и} \quad g(x_1) = \cdots = g(x_r).$$

Доказ. Тврђење следи из примене тополошке Твербергове теореме (теорема 3.7) на непрекидно прелискавање $\Delta_N \to \mathbb{R}^{d+c}$ које шаље по правилу $x \mapsto (f(x), g(x))$. $\square$

Природан број c из поставке претходне теореме је број ограничења које додајемо. Згодно одабране функције ограничења g ће нам омогућити да закључимо надоградње Твербергове теореме.

Дефиниција 4.2 (Тверберг-неизбежни комплекси)**.** Нека су $r \geq 2$, $d \geq 1$ и $N \geq r-1$ природни бројеви, а $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање са бар једном Тверберг-r-партицијом. Тада, за поткомплекс $\Sigma \subseteq \Delta_N$ кажемо да је *Тверберг-неизбежан* ако је за сваку Тверберг-партицију $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ пресликавања f бар једна страна σ_j садржана у Σ.

Приметимо да ако је $N' < N$ и $\Sigma \subseteq \Delta_N$ Тверберг-неизбежан за $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$, онда је $\Sigma \cap \Delta_{N'}$ Тверберг неизбежан за $f|_{\Delta_{N'}} : \Delta_{N'} \to \mathbb{R}^d$, под условом да $f|_{\Delta_{N'}}$ има Тверберг-партицију.

Одговор на питање зашто су нам Тверберг-неизбежни комплекси од интереса даје следеће тврђење. Оно показује да постоји Тверберг-партиција таква да се *све* стране налазе унутар унапред одабраних неизбежних поткомплекса, под условом да симплекс има довољно темена.

Теорема 4.1. *Нека је r степен простог броја, $d \geq 1$ и $N \geq N_c := (r-1)(d+1+c)$ природни бројеви, $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање и $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_c \subseteq \Delta_N$ Тверберг-неизбежни комплекси. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N, таквих да су све садржане у $\Sigma_1 \cap \cdots \cap \Sigma_c$, са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити да је $N = N_c$, јер у супротном можемо да посматрамо страну димензије N_c.

За $1 \leq i \leq c$, нека је $g_j : \Delta_N \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање задато са[3] $g_j(x) = \mathrm{dist}(x, \Sigma_j)$. Пошто је $\Sigma_j \subseteq \Delta$ затворен скуп, важи да је $g_i(x) = 0$ ако и само ако је $x \in \Sigma_j$. Нека је $g : \Delta_N \to \mathbb{R}^c$ непрекидно пресликавање задато са $x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_c(x))$. У ситуацији смо да применимо лему 4.1, те закључујемо да постоје тачке $x_1, \ldots, x_r$ у међусобно дисјунктним странама $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ за које важи

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r),\ g_1(x_1) = \cdots = g_1(x_r), \ldots,\ g_c(x_1) = \cdots = g_c(x_r)$$

Без умањења општости, можемо претпоставити да је $x_i \in \mathrm{relint}(\sigma_i)$, за $1 \leq i \leq r$. Нека је $1 \leq j \leq c$. Како је Σ_j Тверберг-неизбежан, то је бар једна страна σ_i унутар Σ_j, па важи $g_j(x_i) = 0$. Међутим, онда је $x_1, \ldots, x_r \in \Sigma_j$, али како је Σ_j поткомплекс, то важи $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \Sigma_j$. $\square$

Напомена 4.3. Претходна теорема остаје тачна кад год Твербергова теорема важи за бројеве r и $d+c$, па тај услов може заменити услов да је r степен простог броја.

Следеће опште тврђење нам даје оквир за примену претходне теореме.

[3]Под $\mathrm{dist}(x, \Sigma)$ се мисли на растојање тачке $x \in \Delta_N$ од геометријске реализације поткомплекса $\Sigma \subseteq \Delta$.

Лема 4.4. *Нека су* $r, N, d \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ *и* $S \subseteq V(\Delta_N)$ *такав да је* $|S| \leq (s+1)r - 1$ *Тада је поткомплекс*

$$\Sigma_{S,s} := \{\sigma \in \Delta_N : \ |\sigma \cap S| \leq s\} \subseteq \Delta_N$$

Тверберг-r-неизбежан за било које непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ *које има бар једну Тверберг-r-партицију.*

Доказ. Нека је $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ једна Тверберг-партиција за f. Ако ниједна страна σ_i не би била садржана у $\Sigma_{S,s}$, онда би важило

$$(s+1)r - 1 \geq |S| \geq \sum_{i=1}^{r} |S \cap \sigma_i| \geq (s+1)r$$

што је контрадикција. □

Последица 4.5 ([8])**.** *Нека су* $r \geq 2$ *и* $d \geq 1$. *Ако тополошка верзија Твербергове хипотезе важи за бројеве* r *и* $d+1$, *онда важи и за бројеве* r *и* d.

Доказ. Нека је $N := (r-1)(d+1)$ и $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Циљ нам је да докажемо постојање Твербергове-r-партиције за f.

Нека је $N_1 := (r-1)((d+1)+1) = N + r - 1$ и $g : \Delta_{N_1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ произвољно непрекидно продужење од f, тј. такво да важи $g|_{\Delta_N} = f$.

Из леме 4.4 примењене на $S := V(\Delta_{N_1}) \setminus V(\Delta_N)$, $s = 0$ и пресликавање g следи да је поткомплекс

$$\Sigma_{S,0} = \{\sigma \in \Delta_{N_1} : \ \sigma \cap S = \emptyset\} = \Delta_N$$

Тверберг неизбежан за g. Дакле, из теореме 4.1 примењене[4] на g и поткомплекс $\Delta_N \subseteq \Delta_{N_1}$ закључујемо да постоји Тверберг партиција $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ за g за коју важи да су све стране σ_i садржане у Δ_N. Међутим, те стране чине тражену Тверберг-партицију за f. □

Лема 4.6. *Нека су* $d \geq 1$, $r \geq 2$ *и* $N \geq r - 1$ *природни бројеви. Претпоставимо да* $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ *има Тверберг-r-партицију. Ако су* $k, s \in \mathbb{N}_0$ *такви да важи* $r(k+1)+s > N+1$ *и* $0 \leq s \leq r$, *онда је поткомплекс* $(\Delta_N)^{\leq k-1} \cup (\Delta_{N-(r-s)})^{\leq k} \subseteq \Delta_N$ *Тверберг-неизбежан за* f.

[4] Видети напомену 4.3.

Доказ. Нека је $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ Тверберг-партиција за f. Ако ниједна он њих није унутар поткомплекса $(\Delta_N)^{\leq k-1}$, онда важи $|V(\sigma_i)| \geq k+1$, за $1 \leq i \leq r$. Како су стране σ_i дисјунктне, то највише $r-s$ њих може имати теме у скупу $V(\Delta_N) \setminus V(\Delta_{N-(r-s)})$, што значи да осталих бар s страна има сва темена у скупу $V(\Delta_{N-(r-s)})$. Ако ниједна од њих није ни у поткомплексу $(\Delta_{N-(r-s)})^{\leq k}$, то значи да важи $|V(\sigma_i)| \geq k+2$, за бар s индекса $1 \leq i \leq r$. Контрадикцију добијамо из следећег:

$$r(k+1) + s > N + 1 \geq \sum_{i=1}^{r} |V(\sigma_i)| \geq s(k+2) + (r-s)(k+1) = r(k+1) + s.$$

□

У наредним поглављима нам је циљ да искористимо лему 4.4 и теорему 4.1 како бисмо извели теореме из поглавља 3.3 као последице тополошке верзије Твербергове теореме.

4.1 Варијације Твербергове теореме

4.1.1 Обојене верзије Твербергове теореме

Наведимо најпре тврђење о обојеној верзији тополошке Твербергове теореме које следи из метода ограничења.

Теорема 4.2 (Ван Кампен – Флорес: обојена верзија). *Нека је r степен простог броја, $d \geq 1$ и $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil + 1$ природни бројеви, $N \geq N_k := (d+k+1)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада за свако бојење темена симплекса Δ_N у k боја, при чему је сваком бојом обојено највише $2r-1$ темена, постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_N са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Доказ. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $N = N_k$. Такође, приметимо да је нумерички услов за број k неопходан из услова бојења. Наиме, како је сваком од боја $C_1, \dots, C_k$ обојено највише $2r-1$ темена, то важи

$$k(2r-1) \geq |C_1| + \cdots + |C_k| = |V(\Delta_N)| = (d+k+1)(r-1) + 1,$$

што је еквивалентно са $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil + 1$.

За сваку од k боја, нека је $\Sigma_i := \Sigma_{C_i,1}$. Из леме 4.4 следи да су комплекси Σ_i Тверберг-неизбежни[5] за f. Из теореме 4.1 следи да постоји Тверберг-партиција $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ за f, са својством да је $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_k = R_{(C_1,\dots,C_k)}$. $\square$

Приметимо да је тип А обојене верзије Твербергове теореме Врећице и Живаљевића (теорема 3.8) случај претходне теореме када је $k = d+1$, док је тип Б (теорема 3.9) следи не мењајући ознаке. Заиста, у оба исказа теорема Врећице и Живаљевића је тврдња исказана за бојења са бар $2r-1$ темена, али се без умањења општости може претпоставити да свака боја има тачно $2r-1$ темена, те можемо применити претходну теорему.

4.1.2 Теореме типа Ван Кампен – Флорес

У овом поглављу ћемо показати Уопштену верзију Ван Кампен – Флорес теореме (теорема 3.10), као и једно пооштрење.

Теорема 4.3. *Нека је r степен простог броја, $d \geq 1$ и $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil$ природни бројеви, $N := (d+2)(r-1)$ и нека је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ унутар k-скелета $(\Delta_N)^{\leq k}$ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Доказ. Без умањења општости, нека је $N = (r-1)(d+2)$. Применимо лему 4.4 за $S = V(\Delta_N)$ и $s = k+1$. Ово је могуће, јер је услов леме $|S| \leq (s+1)r - 1$ еквивалентан са нумеричким условом $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil$ из исказа тренутне теореме. Дакле,

$$\Sigma_{S,s} = \{\sigma \in \Delta_N : \ |V(\sigma)| \leq k+1\} = (\Delta_N)^{\leq k}$$

је Тверберг неизбежан поткомплекс. Применом теореме 4.1 (за $c = 1$) сазнајемо да постоји Тверберг партиција $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in (\Delta_N)^{\leq k}$ пресликавања f. $\square$

Теорема 4.4 (Уопштена верзија Ван Кампен – Флорес, пооштрење 1)**.** *Нека је r степен простог броја, $d \in \mathbb{N}$, $k, s \in \mathbb{N}_0$, $N \geq (r-1)(d+2)$ природан број и нека важи $r(k+1) + s > N + 1$ и $0 \leq s \leq r$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ унутар k скелета $(\Delta_N)^{\leq k}$ са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$$

[5] Пресликавање f дозвољава Тверберг-партицију због тополошке Твербергове теореме.

таквих да индекса i који задовољавају $\dim(\sigma_i) = k$ *има највише* $\frac{N-(r-s)+1}{k+1}$.

Доказ. Поткомплекс $(\Delta_N)^{\leq k-1} \cup (\Delta_{N-(r-s)})^{\leq k} \subseteq \Delta_N$ је Тверберг-неизбежан, по леми 4.6. Пресликавање f има Тверберг-партицију $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ због тополошке Твербергове теореме, те по теореми 4.1 (за $c = 1$) следи да све стране σ_i припадају неизбежном поткомплексу. Дакле, свака од њих има димензију највише k. Међутим, оне које имају димензију тачно k имају $k+1$ теме и налазе се у поткомплексу $(\Delta_{N-(r-s)})^{\leq k}$, који има $N-(r-s)+1$ темена, те их има највише $(N-(r-s)+1)/(k+1)$. □

У случају $s = r$ пооштрена верзија 1 се своди на Уопштену Ван Кампен – Флорес.

4.1.3 Тверберг-тачке са једнаким барицентричним координатама

У овом поглављу ћемо доказати тополошку верзију теореме Твербреговог типа са једнаким барицентричним координатама (теорема 3.12). Оригиналну, афину, верзију је добио Соберон [23, 24]. Пре формулације, подсетимо се следећег.

Нека су $N, l \geq 1$ природни бројеви и $(C_1, \ldots, C_l)$ бојење темена симплекса Δ_N помоћу l боја. Свака тачка дугиног комплекса $x \in R_{(C_1,\ldots,C_l)}$ има јединствену конвексну репрезентацију $x = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{x,j} v_{x,j}$, за $v_{x,j} \in C_j$. За две тачке $x = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{x,j} v_{x,j}$ и $y = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{y,j} v_{y,j}$ дугиног комплекса $R_{(C_1,\ldots,C_l)}$ каземо да имају *једнаке барицентричне координате* ако важи $\lambda_{x,j} = \lambda_{y,j}$, за све $1 \leq j \leq l$.

Теорема 4.5. *Нека је $d \geq 1$ природан број, r степен простог броја и $N := N_{(r-1)d} = (r-1)((d+1)+(r-1)d)$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење скупа темена помоћу $(r-1)d+1$ боја такво да свака класа боја садржи r темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N и тачке $x_1 \in \sigma_1, \ldots, x_r \in \sigma_r$ са једнаким барицентричним координатама са својством*

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r).$$

Доказ. Назовимо класе боја $C_0, \ldots, C_{(r-1)d}$. Нека је $V(\Delta_N) = \{v_0, \ldots, v_N\}$. За сваку боју C_j, нека је $g_j : \Delta_N \to \mathbb{R}$ пресликавање које шаље по правилу

$$x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_{x,i} v_i \mapsto \sum_{v_i \in C_j} \lambda_{x,i},$$

где је $x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_{x,i} v_i$ јединствена конвексна репрезентација тачке x преко темена симплекса Δ_N. Пресликавање g_j је афино и једнако је један на страни $\operatorname{conv}(C_j) \subseteq \Delta_N$, а нула на теменима $V(\Delta_N) \setminus C_j$.

Нека је $g : \Delta_N \to \mathbb{R}^{(r-1)d}$ пресликавање $x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_{(r-1)d}(x))$. (Дакле, изостављамо пресликавање g_0.) По леми 4.1, постоје тачке $x_1, \ldots, x_r \in \Delta_N$, такве да су стране $\sigma_i := \mathrm{relint}(x_i) \ni x_i$ међусобно дисјунктне, и важи $f(x_1) = \cdots = f(x_r)$ и $g_j(x_1) = \cdots = g_j(x_r)$ за све $1 \leq j \leq (r-1)d$. Пошто је $g_0 + \cdots + g_{(r-1)d} = 1$, важи и $g_0(x_1) = \cdots = g_0(x_r)$.

Нека је $0 \leq j \leq (r-1)d$. Ако за неко i страна σ_i има бар једно теме унутар C_j, то значи да је $g_j(x_1) = \cdots = g_j(x_r) \neq 0$, јер су тачке x_i у релативној унутрашњости стране σ_i. Ово даље значи да све стране Тверберг партиције имају бар једно теме унутар C_j, али како је $|C_j| = r$, то оне имају тачно једно теме унутар C_j. Пошто је j било произвољно, ово значи да су све стране Твербергове партиције дугине. Бројеви $g_j(x_i)$, за $0 \leq j \leq (r-1)d$, су тачно барицентричне координате тачке x_i и оне су једнаке за све $1 \leq i \leq r$ јер је $g_j(x_1) = \cdots = g_j(x_r)$. □

4.2 Контрапример за тополошку Твербергову хипотезу

У овом поглављу ћемо дати кратку скицу о томе како су Благојевић, Фрик и Циглер у [9] добили контрапример за тополошку Твербергову хипотезу (хипотеза 3.2).

Теорема 4.6. *Нека је $r \geq 6$ природан број који није степен простог броја, а $k \geq 3$ природан број. Тада за сваки симплицијални комплекс K димензије највише $(r-1)k$ постоји непрекидно пресликавање $K \to \mathbb{R}^{rk}$ такво да за било којих r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ комплекса K важи да је $f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.*

Доказ се ослања на две чињенице.

1. Постоји $\mathfrak{S}_r$-еквиваријантно пресликавање $K_\Delta^{\times r} \to S(W_r^{\oplus rk})$ када је $r \geq 6$ природан број који није степен простог броја, $k \geq 3$ природан број, а симплицијални комплекс K димензије највише $(r-1)k$ [9]. Доказ се заснива на раду Озајдина [20].

2. У случају када су $r \geq 2$ и $k \geq 3$ природни бројеви, а K комплекс димензије $(r-1)k$, следећа два исказа су еквивалентна [18, 19].

   (а) Постоји $\mathfrak{S}_r$-еквиваријантно пресликавање $K_\Delta^{\times r} \to S(W_r^{\oplus d})$.

   (б) Постоји непрекидно пресликавање $f : K \to \mathbb{R}^{rk}$ такво да за било којих r дисјунктних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ комплекса K важи да је $f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.

Контрапример за тополошку Твербергову хипотезу следи из претходног.

Теорема 4.7. *Нека је $r \geq 6$ природан број који није степен простог броја, $k \geq 3$ природан број и $N := (r-1)(rk+2)$. Тада постоји непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^{rk+1}$ такво да за било којих r дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_N важи да је $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.*

Доказ. Нека је $K := (\Delta_N)^{\leq (r-1)k}$. Теорема 4.6 гарантује постојање пресликавања $g : K \to \mathbb{R}^{rk}$ без r-тоструког преклапања било којих r дисјунктних страна. Пресликавање g можемо проширити до непрекидног пресликавања $h : \Delta_N \to \mathbb{R}^{rk+1}$, које је дефинисано на целом симплексу[6].

Претпоставимо да важи тополошка Твербергова теорема за

$$f := (h, \mathrm{dist}(\cdot, K)) : \Delta_N \to \mathbb{R}^{rk+1}$$

и r, тј. да постоје Тверберг-тачке $x_1 \in \sigma_1, \dots, x_r \in \sigma_r$ у релативној унутрашњости Тверберг-r-партиције за f. Тада је

$$h(x_1) = \dots = h(x_r) \quad \text{и} \quad \mathrm{dist}(x_1, K) = \dots = \mathrm{dist}(x_r, K).$$

Приметимо да Уопштена верзија Ван Кампен – Флорес (теорема 3.10) не важи за пресликавање h, број r и $(r-1)k$-скелет $(\Delta_N)^{\leq (r-1)k}$, па $\sigma_1, \dots, \sigma_r \notin (\Delta_N)^{\leq (r-1)k}$. Из низа неједнакости

$$(r-1)(rk+2) + 1 = |V(\Delta_N)| \geq \sum_{i=1}^{r} |V(\sigma_i)| \geq r((r-1)k+2) = (r-1)(rk+2) + 2$$

добијамо контрадикцију, па f не допушта Тверберг-r-партицију. $\square$

Присетимо се последице 4.5, која тврди да ако важи тополошка Твербергова теорема за r и $d+1$, онда сигурно важи и за r и d. Дакле, из претходне теореме следи да тополошка Твербергова теорема не важи када $r \geq 6$ није степен простог броја и $d \geq 3r+1$. Доња граница за d, када $r \geq 6$ није степен простог броја, је временом побољшана. Мабијар и Вагнер [19] су другачијим методама добили границу $d \geq 3r$, коју су касније Авакумов, Мабијар, Скопенков и Вагнер [2] спустили на $d \geq 2r+1$.

[6]Пошто је $V(K) = V(\Delta)$, а домен $\mathbb{R}^{rk}$ конвексан, g можемо продужити до h конвексном екстензијом.

5 Инверзне слике дијагонале

У овој глави ћемо приказати технику *инверзних слика дијагонале* [14], којом ћемо покушати да проширимо скуп теорема које је могуће добити методом ограничења.

5.1 Опис метода

Подсетимо се одељка 3.2.1. Нека су $d, N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ и $r \geq 2$ природан број. За непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$, постоји индуковано пресликавање

$$J_f : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}, \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \longmapsto (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)) \oplus \cdots \oplus (\lambda_r, \lambda_r f(x_r))$$

које зовемо спој-пресликавање. Скуп

$$D_{d+1+m} = \{(v_1, \ldots, v_r) \in (\mathbb{R}^{d+1+m})^{\oplus r} : \ v_1 = \cdots = v_r \in \mathbb{R}^{d+1+m}\}$$

је танка дијагонала. Теорема 3.6 тврди да не постоји $\mathfrak{S}_r$-еквиваријантно пресликавање

$$(\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{d+1+m})^{\oplus r} \setminus D_{d+1+m} \tag{7}$$

кад год је $N \geq N_m = (r-1)(d+1+m)$ и r степен простог броја.

Идеја је следећа. Претпоставимо да је $\Gamma \subseteq (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ неки инваријантан поткомплекс у односу на дејство групе $\mathfrak{S}_r$ такав да би чињеница да за Тверберг партицију важи $\sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in \Gamma$ имплицирало неко својство те партиције које желимо да докажемо. (На пример чињеницу да су стране σ_i дугине, или горње ограничење за $\dim(\sigma_i)$.) Претпоставимо да смо успели да конструишемо непрекидно еквиваријантно пресликавање

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^m)^{\oplus r}$$

такво да је $\Phi^{-1}(D_m) = \Gamma$. Како не постоји пресликавање облика (7), то слика

$$J_f \oplus \Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{d+1+m})^{\oplus r}$$

има нетривијални пресек са танком дијагоналом $D_{d+1+m} \subseteq (\mathbb{R}^{d+1+m})^{\oplus r}$. Дакле, постоји тачка $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ за коју важи $(J_f(x), \Phi(x)) \in D_{d+1+m}$, односно

$$J_f(x) \in D_{d+1} \text{ и } \Phi(x) \in D_m.$$

Дакле, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ чине једну Тверберг партицију за f, где је $\sigma_1 * \dots * \sigma_r := \mathrm{supp}(x) \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$, и важи $\sigma_1 * \dots * \sigma_r \in \Gamma$, јер је $\Gamma \subseteq (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ поткомплекс.

Даљи циљ нам је да разумемо који се поткомплекси $\Gamma \subseteq (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ могу добити као инверзне слике дијагонале, и да ли нам то даје занимљиве варијације тополошке Тверберговe теореме. Приметимо да метод као основу користи непостојање пресликавања (7). Сумирајмо метод у следећем тврђењу.

Став 5.1. *Нека је $d, m \in \mathbb{N}$, r степен простог броја, $N \geq N_m = (r-1)(d+1+m)$ и $\Gamma \subseteq (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ поткомплекс. Ако постоји еквиваријантно пресликавање*

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^m)^{\oplus r}$$

такво да је $\Phi^{-1}(D_m) = \Gamma$, онда за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ постоји Тверберг-партиција $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ за f за коју важи $\sigma_1 * \dots * \sigma_r \in \Gamma$.

5.1.1 Рецепт за конструкцију пресликавања Φ

Овде наводимо један илустративни пример конструкције. Као што ћемо видети, користићемо и нешто другачије задате функције од (8).

Пресликавање Φ ћемо конструисати као афино пресликавање на првој барицентричној подели комплекса $(\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ у случају $m = 1$, тј.

$$\Phi : \left((\Delta_N)^{*r}_{\Delta}\right)' \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r.$$

Темена барицентричне поделе (геометријске реализације) комплекса $(\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ су барицентри страна $\sigma_1 * \dots * \sigma_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ и у бијекцији су са непразним странама тог комплекса. Како желимо да Φ буде афино, довољно је дефинисати Φ на теменима барицентричне поделе на еквиваријантан начин. Нека су

$$V := V\Big((\Delta_N)^{*r}_{\Delta}\Big) \quad \text{и} \quad V' := V\Big(\big((\Delta_N)^{*r}_{\Delta}\big)'\Big).$$

Са $\{e_1, \dots, e_r\}$ означавамо стандардну базу векторског простора $\mathbb{R}^r$. Пресликавање Φ ћемо задати на теменима $v \in V'$ по правилу[7]

$$\Phi(v) := \begin{cases} 0, & v \in \Gamma, \\ e_{i(v)}, & v \notin \Gamma, \end{cases} \quad \text{где је } i : V' \setminus \Gamma \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} [r]. \tag{8}$$

[7] Дејство групе $\mathfrak{S}_r$ на $V' \setminus \Gamma$ је наслеђено од $(\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$, док је дејство на $[r]$ задато са $\pi \cdot j = \pi(j)$.

Како је i еквиваријантна функција, то је и $\Phi|_{V'} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^r$ еквиваријантна. Заиста, нека је $\pi \in \mathfrak{S}_r$, $v \in V'$. Ако је $v \in \Gamma$, онда је $\pi \cdot v \in \Gamma$, те важи

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\cdot"] & 0 \arrow[d, "\pi\cdot"] \\ \pi \cdot v \arrow[r, mapsto, "\Phi"] & 0. \end{tikzcd}$$

Са друге стране, ако је $v \notin \Gamma$, онда и $\pi \cdot v \notin \Gamma$, па важи

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\cdot"] & e_{i(v)} \arrow[d, "\pi\cdot"] \\ \pi \cdot v \arrow[r, mapsto, "\Phi"] & e_{i(\pi\cdot v)} = e_{\pi\cdot i(v)}. \end{tikzcd}$$

Пошто је Φ афино пресликавање, следи да је $\mathfrak{S}_r$-еквиваријантно.

Из дефиниције одмах следи да важи $\Gamma \subseteq \Phi^{-1}(D_1)$, те је циљ показати да је $\Phi^{-1}(D_1) \setminus \Gamma = \emptyset$.

Претпоставимо да постоји $x \in \Phi^{-1}(D_1) \setminus \Gamma$. Како су стране барицентричне поделе комплекса заправо ланци страна тог комплекса, нека је $\operatorname{supp}(x) := \{T_1, \dots, T_m\} \in \big((\Delta_N)^{*r}_{\Delta}\big)'$, за $m \in \mathbb{N}$, где су $T_j \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$. Нека су $t_j := \operatorname{bar}(T_j) \in V'$ барицентри. Тада је x (строго) позитивна конвексна комбинација $x = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_m t_m$, па важи

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi(t_j).$$

Ако је $\Phi(x) = 0$, то значи да $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, па је $x \in \operatorname{relint}(T_m) \subseteq T_m \in \Gamma$, што је немогуће. Дакле $\Phi(x)$ има строго позитивне све координате.

Можемо претпоставити да је $m = r$ и да је $\Phi(\{t_1, \dots, t_r\}) = \{e_1, \dots, e_r\}$. Заиста, како је $\Phi(x)$ на дијагонали са позитивним координатама, то важи да је

$$\{j : \ \Phi(t_j) = e_1\}, \dots, \{j : \ \Phi(t_j) = e_r\} \neq \emptyset.$$

Дакле, постоје $t_{j_1}, \dots, t_{j_r} \in \{t_1, \dots, t_r\}$ такве да је $\Phi(t_{j_1}) = e_1, \dots, \Phi(t_{j_r}) = e_r$, па можемо посматрати тачку $y := \frac{1}{r} t_{j_1} + \cdots + \frac{1}{r} t_{j_r}$ уместо x. Дакле, важи

$$x \in \operatorname{relint}\{T_1 \subseteq \cdots \subseteq T_r\} \quad \text{и} \quad \Phi(\{t_1, \dots, t_r\}) = \{e_1, \dots, e_r\}. \tag{9}$$

Наш циљ ће бити да под претпоставком постојања $x \in \Phi^{-1}(D_1) \setminus \Gamma$ изведемо контрадикцију из (9), где је Φ дефинисано преко (8).

5.2 Тверберг неизбежни комплекси

У овом поглављу ћемо показати да се за све неизбежне комплексе може применити метод инверзне слике дијагонале.

Лема 5.2. *Нека су $N, r \in \mathbb{N}$, $\Sigma \subseteq \Delta_N$ поткомплекс такав да је за било којих r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_N бар једна од њих садржана у Σ. Тада постоји еквиваријантно пресликавање*

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r$$

такво да важи $\Phi^{-1}(D_1) = \Sigma^{*r}_{\Delta}$.

Доказ. Без умањења општости, нека је $V(\Delta_N) = [N+1]$. Дефинишемо Φ на теменима V' барицентричне поделе комплекса $(\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$. Довољно је дефинисати еквиваријантно пресликавање $i : V' \setminus \Sigma^{*r}_{\Delta} \longrightarrow [r]$ (видети (8)). Нека је $t \in V' \setminus \Sigma^{*r}_{\Delta}$ барицентар стране $\sigma_1 * \dots * \sigma_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$. Како тачка t није у Σ^{*r}_{Δ}, то бар једна страна σ_j није у Σ. Дакле, скуп

$$\bigcup \big\{ V(\sigma_j) : \ \sigma_j \notin \Sigma, \ 1 \le j \le r \big\} \subseteq [N+1]$$

је непразан. Дефинишимо $i(t) \in [r]$ као онај (јединствени) индекс за који је минимални елемент горе поменутог скупа важи

$$\min \Big(\bigcup \big\{ V(\sigma_j) : \ \sigma_j \notin \Sigma, \ 1 \le j \le r \big\} \Big) \in \sigma_{i(t)}.$$

Проверимо да је i еквиваријантно пресликавање. Ако то важи, онда ће и Φ бити еквиваријантно. Нека је $\pi \in \mathfrak{S}_r$. Тада је $\pi \cdot t$ барицентар стране $\sigma_{\pi^{-1}(1)} * \dots * \sigma_{\pi^{-1}(r)}$. Како је скуп по ком се узима минимум, тј. скуп темена страна које не припадају поткомплексу Σ, исти за стране $\sigma_1 * \dots * \sigma_r$ и $\sigma_{\pi^{-1}(1)} * \dots * \sigma_{\pi^{-1}(r)}$, то је и минимум исти. Ако је у споју $\sigma_1 * \dots * \sigma_r$ тај минимум припадао страни на позицији $i(t)$, онда ће у споју $\sigma_{\pi^{-1}(1)} * \dots * \sigma_{\pi^{-1}(r)}$ он припадати страни на позицији $\pi(i(t))$, тј важи $i(\pi \cdot t) = \pi \cdot i(t)$. Дакле, i је еквиваријантно.

Ослонимо се на приказани метод у одељку 5.1.1. Како важи $\Sigma^{*r}_{\Delta} \subseteq \Phi^{-1}(D_1)$, претпоставимо да постоји $x \in \Phi^{-1}(D_1) \setminus \Sigma^{*r}_{\Delta}$ и потражимо контрадикцију из (9), тј. из

$$x \in \operatorname{relint}\{T_1 \subseteq \dots \subseteq T_r\} \text{ и } \Phi(\{t_1, \dots, t_r\}) = \{e_1, \dots, e_r\},$$

где су $T_j = \sigma_{j,1} * \dots * \sigma_{j,r} \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ и t_j су барицентри од T_j. Из дефиниције пресликавања Φ следи да за сваку од страна T_j важи да је $\sigma_{j,i(t_j)} \notin \Sigma$, и при том је $\{i(t_1), \dots, i(t_r)\} = [r]$. Међутим, страна T_r садржи све остале, па је $\sigma_{j,i(t_j)} \subseteq \sigma_{r,i(t_j)} \notin \Sigma$. Ово значи да ниједна од дисјунктних страна из скупа $\{\sigma_{r,i(t_1)}, \dots, \sigma_{r,i(t_r)}\} = \{\sigma_{r,1}, \dots, \sigma_{r,r}\}$ не припада поткомплексу Σ, што је контрадикција са задатим условом на Σ. $\square$

На језику неизбежних комплекса, услов на Σ из исказа леме је Тверберг-неизбежност у односу на константно (па и било које које допушта Тверберг-партицију) пресликавање. Овакве комплексе можемо звати и само *Тверберг-неизбежни.*

Лема 5.3. *Нека су $N, r, c \in \mathbb{N}$, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_c \subseteq \Delta_N$ Тверберг-неизбежни поткомплекси и $\Sigma := \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_c$. Тада постоји еквиваријантно пресликавање*

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^c)^r$$

такво да важи $\Phi^{-1}(D_c) = \Sigma^{*r}_{\Delta}$.

Доказ. За $1 \leq i \leq c$, нека су $\Phi_i : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \to \mathbb{R}^r$ еквиваријантна пресликавања из леме 5.2 за које важи $\Phi_i^{-1}(D_1) = (\Sigma_i)^{*r}_{\Delta}$. Тада за пресликавање

$$\Phi := \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_c : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \to_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^r)^c \cong_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^c)^r$$

важи

$$\Phi^{-1}(D_c) = \bigcap_{i=1}^{c} \Phi_i^{-1}(D_1) = \bigcap_{i=1}^{c} (\Sigma_i)^{*r}_{\Delta} = \Sigma^{*r}_{\Delta}.$$

$\square$

Теорема 5.1. *Нека је r степен простог броја, $d, c \in \mathbb{N}$ и $N \geq N_t := (r-1)(d+1+c)$ природан број. Претпоставимо да је $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање и да су $\Sigma_1, .., \Sigma_c \in \Delta_N$ Тверберг-неизбежни поткомплекси за константно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ_N, таквих да су све садржане у $\Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_c$, са својством*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Доказ. Из леме 5.3 следи да постоји пресликавање

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^c)^r$$

са својством $\Phi^{-1}(D_c) = (\Sigma_1 \cap \cdots \cap \Sigma_c)^{*r}_{\Delta}$. Применом става 2.13 добијамо жељено тврђење. $\square$

Приметимо да је ова теорема благо уопштење теореме 4.1, те методом инверзне слике дијагонале можемо добити обојену верзију Ван Кампен – Флорес теореме (теорема 4.2), из које следе тип А и тип Б обојене верзије Врећице и Живаљевића, пооштрену Уопштену верзију 1 Ван Кампен – Флорес (теорема 4.4). Доказ верзије о једнаким барицентричним координатама (теорема 3.12) је јако сличан доказу који смо приказали у одељку 4.1.3, те ћемо овде навести само скицу.

Теорема 5.2. *Нека је $d \geq 1$ природан број, r степен простог броја и $N := (rd+1)(r-1)$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ и свако бојење скупа темена помоћу $(r-1)d+1$ боја такво да свака класа боја садржи r темена, важи да постоји r међусобно дисјунктних дугиних страна $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ симплекса Δ_N и тачке $x_1 \in \sigma_1, \ldots, x_r \in \sigma_r$ са једнаким барицентричним координатама са својством*

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r).$$

Доказ. Нека је $l := (r-1)d + 1$ број боја, које означавамо са $(C_1, \ldots, C_l)$. Нека је скуп темена симеплекса означен са $V(\Delta_N) = \{v_0, \ldots, v_N\}$. Свака тачка $x \in \Delta_N$ се јединствено представља као конвексна комбинација $x = \sum_{i=0}^{N} \mu_{x,i} v_i$. Присетимо се спој-пресликавања изведеног из f:

$$J_f : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \longmapsto \big(\lambda_i, \lambda_i f(x_i)\big)_{i=1}^{r}.$$

Нека је еквиваријантно пресликавање $\Psi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{l-1})^r = (\mathbb{R}^{(r-1)d})^r$ задато са

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \;\longmapsto\; \Big(\sum_{j: v_j \in C_1} \mu_{x_i,j}, \ldots, \sum_{j: v_j \in C_{l-1}} \mu_{x_i,j}\Big)_{i=1}^{r}.$$

Сада је $J_f \oplus \Psi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^{d+1+(l-1)})^{\oplus r}$ еквиваријантно пресликавање које, због теореме 3.6, погађа дијагоналу. Нека је $x = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} x_i \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ таква да је $J_f(x) \in D_{d+1}$ и $\Psi(x) \in D_{l-1}$, и нека је $\sigma_1 * \cdots * \sigma_r := \operatorname{relint}(x) \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$. Сада закључујемо да су $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ дугине стране, а тачке $x_1, \ldots, x_r$ имају исте барицентричне координате на исти начин као у доказу теореме 4.5. $\square$

5.3 Обојена верзија преко инверзне слике дијагонале

Овде представљамо тврђење (теорема 5.3) које мало уопштење Обојене верзије Ван Кампен – Флорес (теорема 4.2). Иако доказ може да се изведе из методе ограничења (глава 4), односно могуће га је добити методама из [8], наводимо га овде јер може да представља мотивацију за даља уопштења. Формулишимо прво следећу лему.

Лема 5.4. *Нека су $l \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ и $N \leq l(2\lceil \frac{r}{l} \rceil - 1) - 1$ природни бројеви, $(C_1, \ldots, C_l)$ бојење темена симплекса Δ_N такво да за сваку боју важи $|C_i| \leq 2\lceil \frac{r}{l} \rceil - 1$. Тада постоји непрекидно пресликавање*

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r$$

за које важи $\Phi^{-1}(D_1) = (R_{(C_1,\ldots,C_l)})^{*r}_{\Delta}$.

Доказ. Према леми 5.2, довољно је показати да је $R_{(C_1,\ldots,C_l)}$ Тверберг-неизбежан. Нека су зато $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \Delta_N$ међусобно дисјунктне.

Ако претпоставимо да ниједна од њих није у $R_{(C_1,\ldots,C_l)}$, то значи да постоји функција $b : [r] \to [l]$ таква да је за свако $j \in [r]$ испуњено $|\sigma_j \cap C_{b(j)}| \geq 2$. Како је $r = \sum_{i=1}^{l} |b^{-1}(i)|$, то по Дирихлеовом принципу бар један од скупова $b^{-1}(i)$ има кардиналност не мању од $\lceil r/l \rceil$. Означимо одговарајући елемент са $i \in [l]$. За њега важи да је $|\sigma_j \cap C_i| \geq 2$ за бар $\lceil r/l \rceil$ индекса $j \in [r]$, а како су стране σ_j дисјунктне, неједнакости

$$2\left\lceil \frac{r}{l} \right\rceil - 1 \geq |C_i| \geq 2\left\lceil \frac{r}{l} \right\rceil$$

дају контрадикцију. □

Последица 5.5. *Нека су $l, k \in \mathbb{N}$, $c := lk$, $N \leq c(2\left\lceil \frac{r}{l} \right\rceil - 1) - 1$ природан број, $(C_1, \ldots, C_c)$ бојење темена симплекса Δ_N у c боја, такво да је сваком бојом обојено највише $2\lceil \frac{r}{l} \rceil - 1$ темена. Тада постоји непрекидно пресликавање*

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^k)^r$$

за које важи $\Phi^{-1}(D_k) = (R_{(C_1,\ldots,C_c)})^{*r}_{\Delta}$.

Доказ. Боје $(C_1, \ldots, C_c)$ можемо поделити у k блокова од по l боја: за $1 \leq b \leq k$ нека је b-ти блок индексиран са $(C_{(b-1)l+1}, \ldots, C_{(b-1)l+l})$ и нека је $V_b := C_{(b-1)l+1} \cup$

$\cdots\cup C_{(b-1)l+l}$ одоварајући скуп темена. Злоупотребимо нотацију и означимо са $\Delta_{|V_b|-1}$ страну симплекса Δ_N са теменима V_b. Та страна има бојење $(C_{(b-1)l+1},\dots,C_{(b-1)l+l})$. Према леми 5.4, за свако $1\le b\le k$ постоји еквиваријантно пресликавање

$$\Phi_b : (\Delta_{|V_b|-1})^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r$$

за које је $\Phi_b^{-1}(D_1)=R_{(C_{(b-1)l+1},\dots,C_{(b-1)l+l})}$. Како је

$$(\Delta_{|V_1|-1})^{*r}_{\Delta} * \cdots * (\Delta_{|V_k|-1})^{*r}_{\Delta} \cong_{\mathfrak{S}_r} (\Delta_{|V_1|-1} * \cdots * \Delta_{|V_k|-1})^{*r}_{\Delta} \cong_{\mathfrak{S}_r} (\Delta_N)^{*r}_{\Delta},$$

то пресликавање $\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow (\mathbb{R}^k)^{\oplus r}$ дефинишемо као еквиваријантну композицију

$$(\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \xrightarrow{\cong} (\Delta_{|V_1|-1})^{*r}_{\Delta} * \cdots * (\Delta_{|V_k|-1})^{*r}_{\Delta} \xrightarrow{\Phi_1*\cdots*\Phi_k} (\mathbb{R}^r)^m \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^m)^r.$$

Како важи

$$\begin{aligned}(R_{(C_1,\dots,C_l)})^{*r}_{\Delta} * \cdots * (R_{(C_{(k-1)l+1},\dots,C_{(k-1)l+l})})^{*r}_{\Delta} &\cong_{\mathfrak{S}_r} (R_{(C_1,\dots,C_l)} * \cdots * R_{(C_{(k-1)l+1},\dots,C_{(k-1)l+l})})^{*r}_{\Delta}\\ &\cong_{\mathfrak{S}_r} (R_{(C_1,\dots,C_{(k-1)l+l})})^{*r}_{\Delta},\end{aligned}$$

то се $\Phi^{-1}(D_k)=\Phi_1^{-1}(D_1)*\cdots*\Phi_k^{-1}(D_1)$ може поистоветити са $(R_{(C_1,\dots,C_{(k-1)l+l})})^{*r}_{\Delta}$. □

Сада наводимо тврђење обојеног типа које садржи Обојену верзију Ван Кампен – Флорес.

Теорема 5.3. *Нека су $l,k,N\in\mathbb{N}$ и $c:=lk$ такви да важи*

$$c\Big(2\Big\lceil\frac{r}{l}\Big\rceil-1\Big)-1\ge N\ge (r-1)(d+1+k).$$

Тада за сваку непрекидну функцију $f:\Delta_N\to\mathbb{R}^d$ и свако бојење $(C_1,\dots,C_c)$ темена симплекса Δ_N помоћу c боја, при чему је сваком бојом обојено највише $2\lceil\frac{r}{l}\rceil-1$ темена, постоји r међусобно дисјунктних гудиних страна $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ симплекса Δ_N са својством

$$f(\sigma_1)\cap\cdots\cap f(\sigma_r)\neq\emptyset.$$

Доказ. Применом леме 5.5 добијамо да постоји пресликавање

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} (\mathbb{R}^k)^r$$

за које важи $\Phi^{-1}(D_k)=(R_{(C_1,\dots,C_c)})^{*r}_{\Delta}$. Тврђење теореме следи применом става 5.1. □

У случају $l = 1$ добијамо Обојену Ван Кампен – Флорес теорему (теорема 4.2).

5.4 Верзија типа Ван Кампен – Флорес

Овде ћемо извести доказ хипотезе 1 у [8] преко метода инверзне слике дијагонале. Наведимо прво лему о инверзној слици. Представљамо доказ нешто другачији од оног из [14].

Лема 5.6. *Нека су $r \geq 2$, $0 \leq s < r$, $N \leq r(k+1)+s-2$ природни бројеви са нулом, и нека је*

$$\Sigma := \{\sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in (\Delta_N^{\leq k})^{*r}_{\Delta} : \ \sigma_i \in \Delta_N^{\leq k-1} \text{ за бар } r-s \text{ индекса } i \in [r]\}$$

један поткомплекс од $(\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$. Тада постоји непрекидно пресликавање

$$\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \longrightarrow_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r$$

за које важи $\Phi^{-1}(D_1) = \Sigma$.

Доказ. Као што је представљено раније, и овде ћемо пресликавање Φ дефинисати на теменима барицентричне поделе $\big((\Delta_N)^{*r}_{\Delta}\big)'$, али мало другачије (8). Без умањења општости, претпоставимо да је $V(\Delta_N) = [N+1]$. Нека је t барицентар једне стране $T := \sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in (\Delta_N)^{*r}_{\Delta}$ и дефинишимо скупове

$$I(t) := \{i \in [r] : \ |\sigma_i| \leq k\}, \quad J(t) := \{j \in [r] : \ |\sigma_j| = k+1\}.$$

Тада важи $I(t) \cup J(t) \neq \emptyset$. У супротном би свака од страна $|\sigma_i|$ имала бар $k+2$ темена, па би цео симплекс имао бар $(k+2)r > r(k+1)+s-2 \geq N+1$ темена, што је контрадикција.

Приметимо да за страну T важи да је $T \in \Sigma$ ако и само ако је $I(t) \cup J(t) = [r]$ и $J(t) \leq s$.

Дефинишимо

$$\Phi(t) := \begin{cases} 0, & t \in \Sigma, \\ \sum_{i \in I(t)} e_i, & I(t) \neq \emptyset, \\ e_j, & I(t) = \emptyset, \end{cases}$$

где је у последњем случају $j \in J(t)$ јединствено за које важи

$$\min\left(\bigcup\{V(\sigma_l):\ l \in J(t)\}\right) \in \sigma_j.$$

Као и у доказу леме 5.2, ово је једно еквиваријантно пресликавање и важи $\Sigma \subseteq \Phi^{-1}(D_1)$. Претпоставимо да постоји $x \in \Phi^{-1}(D_1) \setminus \Sigma$.

Означимо са

$$\{T_1 \subsetneq \cdots \subsetneq T_m\} := \operatorname{supp}(x) \in ((\Delta_N)^{*r}_\Delta)',$$

а са t_l барицентре страна $T_l = \sigma_{l,1} * \cdots * \sigma_{l,r} \in (\Delta_N)^{*r}_\Delta$. Тачка x има позитивну конвексну репрезентацију $x = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_m t_m$ и важи

$$\Phi(x) = \lambda_1 \Phi(t_1) + \cdots + \lambda_m \Phi(t_m).$$

Како x није у Σ, то сигурно ни T_m није, па $\Phi(x) \neq 0$. Тачније, $\Phi(x)$ има све позитивне координате.

Без умањења општости, можемо претпоставити да ниједна од тачака $t_1, \ldots, t_m$ није у Σ, јер бисмо у супротном посматрали тачку

$$y := \sum_{t_l \notin \Sigma} \frac{\lambda_l}{\lambda} t_l, \qquad \text{за } \lambda := \sum_{t_l \notin \Sigma} \lambda_l \neq 0.$$

За тачку t_1 важи $I(t_1) \cup J(t_1) = [r]$, јер би у супротном постојао индекс $i \in [r]$ за који би важило $|\sigma_{1,i}| \geq k+2$. Међутим, онда би за све $1 \leq j \leq m$ важило $|\sigma_{j,i}| \geq k+2$, па би i-та координата тачке $\Phi(x)$ била нула, што је контрадикција. Због описане карактеризације припадање поткомплексу Σ примењене на тачку t_1 закључујемо да је $|J(t)| \geq s+1$.

Приметимо да важи

$$I(t_1) \supset \cdots \supset I(t_m).$$

Ако би скуп $I(t_m)$ био непразан, онда би $\Phi(t_1), \ldots, \Phi(t_m) \in \operatorname{span}\{e_i:\ i \in I(t_1)\}$. Како $t_1 \notin \Sigma$, то $I(t_1) \neq [r]$, па контрадикција следи из

$$\Phi(x) \in \operatorname{span}\{e_i:\ i \in I(t_1)\} \cap D_1 = \{0\}.$$

Нека је $p \in [m]$ најмањи индекс за који је $I(t_p) = \emptyset$. Како је $\Phi(t_1), \ldots, \Phi(t_{p-1}) \in \operatorname{span}\{e_i:\ i \in I(t_1)\}$, то скуп $\{\Phi(t_p), \ldots, \Phi(t_m)\}$ мора да садржи све остале базне векторе, који су индексирани скупом $[r] \setminus I(t_1) = J(t_1)$. Дакле, сигурно важи

$$m - p + 1 \geq |J(t_1)| \geq s+1.$$

Како је $I(t_p) = \emptyset$, то за страну T_p важи $|\sigma_{p,1}|, \dots, |\sigma_{p,r}| \geq k+1$. Свака од наредних страна $T_{p+1}, \dots, T_m$ има бар једно теме више у односу на претходну, тако да за последњу страну T_m важи

$$|V(\Delta_N)| \geq \sum_{i\in[r]} |\sigma_{m,r}| \geq (m-p+1) + \sum_{i\in[r]} |\sigma_{p,r}| \geq (s+1) + (k+1)r \geq N+2,$$

што је контрадикција. $\square$

У раду [16], у ком је наредна теорема доказана другачијим методама, Јојић, Врећица и Живаљевић називају Тверберг-партиције из наредне теореме *балансираним Тверберг партицијама.* Доказ који представљамо је из [14].

Теорема 5.4 (Уопштена верзија Ван Кампен – Флорес, пооштрење 2,). *Нека су r степен простог броја, $N, k, d \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{Z}$ такви да важи*

$$r(k+1) + s - 2 \geq N \geq (r-1)(d+2) \quad \text{и} \quad 0 \leq s < r.$$

Тада за свако непрекидно пресликавање $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ постоји r међусобно дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ унутар k-скелета $(\Delta_N)^{\leq k}$ са својством

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$$

таквих да је бар њих $r-s$ унутар $(k-1)$-скелета $(\Delta_N)^{\leq k-1}$.

Доказ. Према леми 5.6 постоји пресликавање $\Phi : (\Delta_N)^{*r}_{\Delta} \to_{\mathfrak{S}_r} \mathbb{R}^r$ за које је

$$\Phi^{-1}(D_1) = \Sigma = \{\sigma_1 * \dots * \sigma_r \in (\Delta_N^{\leq k})^{*r}_{\Delta} : \ \sigma_i \in \Delta_N^{\leq k-1} \text{ за бар } r-s \text{ индекса } i \in [r]\}.$$

Тврђење теореме следи из става 5.1. $\square$

Приметимо да ова теорема у себи садржи теорему 4.4.

6 Закључак и простор за даљи рад

У овој тези смо изложили метод ограничења (глава 4) и метод инверзних слика (глава 5) који су послужили као начини да се добију верзије тополошке Твербергове теореме из ње саме. На илустративној схеми је приказана последичност између поменутих варијанти.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{топол. Тверберг} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{Уоп. Ван Кампен – Флорес, п.2} \arrow[d] & \text{Теорема 5.3} \arrow[d] & \text{Једнаке бариц. коорд.} \arrow[d, equal] \\
\text{Уоп. Ван Кампен – Флорес, п.1} \arrow[dd] & \text{Обојена Ван Кампен – Флорес} \arrow[d] & \text{Једнаке бариц. коорд.} \\
 & \text{Врећица–Живаљевић, тип Б} \arrow[d] & \\
\text{Уопшт. Ван Кампен – Флорес} & \text{Врећица–Живаљевић, тип А} &
\end{tikzcd}
$$

Тврђење у првом реду је тополошка Твербергова теорема. У другом реду се налазе тврђења која је могуће добити методом инверзних слика, док се у трећем реду налазе тврђења су добијена методом ограничења у [8].

Простор за даљи рад, и за потенцијално нове верзије Твербергове теореме, јесте да би се модификацијом ових метода схема могла допунити тако што би се нове надоградње Твербергове теореме ставиле између првог и другог реда, уколико су појачања тренутних, или у четврту колону, ако су тврђења новог типа.

Литература

[1] M. Јелић, *Комбинаторна топологија и графовски комплекси*, докторска теза, Београд, 2021.

[2] S. Avvakumov, I. Mabillard, A. Skopenkov, U. Wagner, *Eliminating higher-multiplicity intersections, III. Codimension 2*, Preprint, 16 pages, November 2015, arXiv:1511.03501, 2015.

[3] E. G. Bajmóczy, I. Bárány, *On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem*, Acta Math. Hungar. **34** (1979), 347–350.

[4] I. Bárány, Z. Füredi, L. Lovász, *On the number of halving planes*, Combinatorica **10** (1990), 175–183.

[5] I. Bárány and D. G. Larman, *A colored version of Tverberg's theorem*, J. Lond. Math. Soc. **2** (1992), 314–320.

[6] I. Bárány, S. B. Shlosman, A. Szűcs, *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. Lond. Math. Soc. **23** (1981), 158–164.

[7] B. J. Birch, *On 3N points in a plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **55** (1959), 289–293.

[8] P. V. M. Blagojević, F. Frick, G. M. Ziegler, *Tverberg plus constraints,* Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), no. 5, 953-967.

[9] P. V. M. Blagojević, F. Frick, G. M. Ziegler, *Barycenters of polytope skeleta and counterexamples to the topological Tverberg conjecture, via constraints,* J. Europ. Math. Soc. (JEMS) **21** (7), (2019) 21072116

[10] P. V. M. Blagojević, B. Matschke, and G. M. Ziegler *Optimal bounds for the colored Tverberg problem*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), 739–754.

[11] P. V. M. Blagojević, G. M. Ziegler, Beyond the Borsuk–Ulam Theorem: The Topological Tverberg Story. Journey Through Discrete Mathematics. A Tribute to Jiří Matoušek (Martin Loebl, Jaroslav Nešetřil, Robin Thomas, eds.), Springer 2017.

[12] A. Flores, *Über n-dimensionale Komplexe, die im R 2n+1 absolut selbstverschlungen sind*, Ergebnisse eines Math. Kolloquiums **6** (1932/1934), 4–7.

[13] F. Frick, *Counterexamples to the topological Tverberg conjecture*, Oberwolfach Reports **12** (2015), 318–322.

[14] F. Frick, On affine Tverberg-type results without continuous generalization,arXiv preprint, arXiv:1702.05466.

[15] M. Gromov, Singularities, expanders and topology of maps. II: From combinatorics to topology v Geom. Funct. Anal. (GAFA) **20** (2010), 416–526.

[16] D. Jojić, S. Vrećica, R. T. Živaljević, *Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type*, Journal of Algebraic Combinatorics volume **46**, pages15–31 (2017).

[17] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003, second corrected printing 2008.

[18] I. Mabillard, U. Wagner, *Eliminating Tverberg points, I. An analogue of the Whitney trick*, Proc. 30th Annual Symp. Comput. Geom. (SoCG), Kyoto, June 2014, ACM, 2014, pp. 171–180.

[19] I. Mabillard, U. Wagner, *Eliminating higher-multiplicity intersections, I. A Whitney trick for Tverberg-type problems*, Preprint, 46 pages, arXiv:1508.02349, August 2015.

[20] M. Özaydin, *Equivariant maps for the symmetric group*, Preprint, 17 pages, `http://digital.library.wisc.edu/` 1793/63829, 1987.

[21] J. Radon, *Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten*, Math. Annalen **83** (1921), 113–115.

[22] K. S. Sarkaria, *A generalized van Kampen–Flores theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1991), 559–565.

[23] P. Soberón, *Equal coefficients and tolerance in coloured Tverberg partitions*, Proc. 29th Annual Symp. Comput. Geom. (SoCG), Rio de Janeiro, June 2013, ACM, 2013, pp. 91–96.

[24] P. Soberón, Equal coefficients and tolerance in coloured Tverberg partitions, Combinatorica **35** (2015), 235–252.

[25] H. Tverberg, *A generalization of Radon's theorem*, J. Lond. Math. Soc. *41* (1966), 123–128.

[26] E. R. Van Kampen, *Komplexe in euklidischen Räumen*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 9 (1933), 72–78.

[27] A. Y. Volovikov, *On a topological generalization of Tverberg's theorem*, Math. Notes **59** (1996), no. 3, 454–456.

[28] A. Y. Volovikov, *On the van Kampen-Flores theorem*, Math. Notes **59** (1996), no. 5, 477–481.

[29] S. Vrećica, R. T. Živaljević, New cases of the colored Tverberg theorem, Jerusalem Combinatorics '93 (H. Barcelo and G. Kalai, eds.), Contemp. Math., vol. 178, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 325–325.

[30] G. M. Ziegler, *3N colored points in a plane*, Notices Amer. Math. Soc. **58** (2011), no. 4, 550–557.

[31] R. T. Živaljević, *User's guide to Equivariant methods in Combinatorics*, Publications de l'Institut Mathématuque **59(73)** (1996), 114–130.

[32] R. T. Živaljević, *User's Guide to Equivariant Methods in Combinatorics II*, Publications de l'Institut Mathématique **64(78)** (1998), 107–132.

[33] R. T. Živaljević, *Topological methods in discrete geometry*, Handbook of discrete and computational geometry (Csaba D. Toth, Joseph O'Rourke, and Jacob E. Goodman, eds.), CRC press, 2017.

[34] R. T. Živaljević and S. Vrećica, *The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions*, J. Combin. Theory Ser. A **61** (1992), 309–318.