

Математички факултет



МАСТЕР РАД

**МЕТОД ЦЕНТАРА МАСА И ЊЕГОВЕ
ПРИМЕНЕ**

Студент:

Бојана Ђурасовић

Ментор:

Ђорђе Кртинић

Београд

Септембар 2021.

Садржај

Предговор	1
1 Центри маса у дискретној ситуацији	3
1.1 Основна својства	4
1.2 Почетни примери примене у геометрији	7
1.3 Сложенији примери примене у геометрији	27
2 Лајбницова функција	41
2.1 Основне дефиниције и својства	41
2.2 Примери примене Лајбницове функције	44
3 Центри маса у континуалној ситуацији	55
3.1 Тежиште хомогене линије, површине и запремине	55
3.2 Принцип симетрије и Архимедова теорема	56
3.3 Примери одређивања тежишта	60
Закључак	62

Предговор

Идеја центра масе се у историји математике појављује још у 3. веку пре нове ере, у Сиракузи на Сицилији и приписује се Архимеду. Архимед је открио својства полуге променом растојања између ослонаца и крајева полуге. Позната је његова реченица „*Дајте ми ослонац и довољно дугачку полуку и померићу свет*”. Поред Архимеда, велики допринос развоју ове теорије су дали Папус Александријски и Паул Гулдин. Сматра се да су они независно један од другог открили формуле којима се описују везе између тежишта и обртних површина.

Шта је центар масе најсликовитије се може описати примером клацкалице. Где треба поставити ослонац да би клацкалица била у равнотежи ако на њој седе две особе исте масе? А ако је на једном крају дечак, а на другом његова мајка дупло веће масе? Математичким језиком формулисано, где се налази тежиште дужи у првом, а где центар масе дужи у чијим крајевима су постављене масе m и $2m$ у другом случају? Ово су основни примери. Следећи по сложености је пример троугла, посматраног као система од три тачке са придруженим масама. При погодном одабиру маса, центар масе ће бити нека од значајних тачака троугла. Такође, троугао се може гледати као парче хомогеног лима. Онда је реч о континуалној ситуацији. Истоветно, у случају просторног објекта, на пример тетраедра, дискретно се може тражити центар масе система од четири тачке са придруженим масама, а континуално центар масе тетраедра одређене запремине и хомогене густине.

Из саме дефиниције биће јасно да је центар масе тачка чији је вектор положаја помножен збиром свих придружених маса једнак линеарној комбинацији вектора положаја појединачних тачака система са коефицијентима једнаким појединачним масама. Одавде, грубо говорећи, читав систем или објекат се може третирати као једна тачка, њен центар масе са придруженом укупном масом система, те да се кретање целог система може поистоветити са кретањем ове материјалне тачке. Центар масе се дефинише за системе материјалних тачака, за хомогене линије, површи и тела.

Техника центра масе се показује као веома корисна при решавању разних геометријских проблема, и то не само тривијалних. Главно својство ових метода које их чини јако популарним и изван оквира математике је једноставност правила и лакоћа примене без обзира на димензију простора. У томе се крије главна намена овог мастер рада. Специфичан циљ је осветљавање учесталости овог приступа у градиву математике основних и средњих школа у Србији, као и могућности за његову интезивнију примену.

Фокус рада је на дискретним објектима, тј. системима коначног броја тачака које су на коначном растојању. То је садржај прве главе која је најдетаљније обр-

ађена. У оквиру ње биће дефинисани центар масе и тежиште, изведена њихова основна својства, урађени примери који илуструју рад ове методе, са акцентом на основним својствима троуглова и његових значајних тачака. Даље, добар део прве главе ће бити посвећен познатим геометријским тврђењима која се могу доказати техником центара маса. Реч је најпре о Чевиној и Менелајевој теореми, а затим и Симсоновој, Гаусовој, Папосовој и Дезарговој. Такође, тврђења о значајним тачкама троугла биће изведена на још један начин, преко ових теорема.

У другој глави техника центра масе ће бити приказана из другог угла, увођењем векторске и скаларне Лајбницево функције. Биће доказана њихова основна својства кроз Лајбницову и Стјуартову теорему, изложена примена кроз разне примере и на одређеним местима направљена аналогија са примерима из Хилбертовог простора.

Могући су разни смерови даљег уопштавања ове методе. Један од њих ће бити изнет у трећој глави кроз континуалну ситуацију. Наиме, очекивано долази до преласка са коначних на бесконачне суме, те на интегрални рачун. У оквиру ове главе, незаобилазно је поменути Архимедову теорему, правила симетрије, као и неколико основних примера у различитим димензијама простора.

Аутор се овим путем захваљује ментору, проф. др Ђорђу Кртинићу, на идеји за израду рада, као и на бескрајном стрпљењу, сугестијама и помоћи при изради истог. Такође, аутор се захваљује члановима комисије проф. др Зорану Петровићу и др Тијани Шукиловић на примедбама, сугестијама и указаним грешкама. Искуство ментора и чланова комисије значајно је унапредило квалитет рада. На крају, аутор се искрено захваљује породици и пријатељима, који су га бодрили при изради рада.

1 Центри маса у дискретној ситуацији

Посматраћемо системе коначног броја материјалних тачака на коначним растојањима. Под материјалном тачком се подразумева уређен пар чија је прва координата тачка, а друга њој придружена маса.

На самом почетку, дефинисаћемо центар масе и један његов специјалан случај — геометријско тежиште.

Дефиниција 1.1. Нека је дат систем материјалних тачака са придруженим масама $\{(A_i, m_i) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, m_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$ тако да је $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$. Тачка $C \in \mathbb{R}^k$ таква да је $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{CA_i} = \vec{0}$ се зове центар масе датог система материјалних тачака.

Дефиниција 1.2. Специјално, ако је дат систем материјалних тачака са придруженим једнаким масама $\{(A_i, m) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i = \overline{1, n}\}$, онда се тачка $T \in \mathbb{R}^k$ таква да је $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$ се зове геометријско тежиште датог система материјалних тачака.

Центар масе постоји и јединствен је под условом о ненула збиру маса из његове дефиниције, о чему говори следећа примедба.

Примедба 1.3. За сваки систем материјалних тачака постоји јединствени центар масе.

Доказ: Нека је C тачка из дефиниције 1.1 и O произвољна тачка различита од C . Једнакости $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{CA_i} = \vec{0}$ додајмо на обе стране $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A_iO}$.

Добијамо

$$\sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{CA_i} + \overrightarrow{A_iO}) = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A_iO}$$

тј.

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{CO} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A_iO}$$

одакле је коначно

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

Десна страна претходне једнакости јединствено одређује вектор $\overrightarrow{OC}$, одакле закључујемо да тачка C постоји и јединствена је. $\square$

Последица 1.4. Специјално, ако је T тежиште из дефиниције 1.2, а O произвољна тачка, онда важи

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}}{n}. \quad (2)$$

Приметимо да је у случају свих позитивних маса, услов из дефиниције 1.1 тривијално задовољен. Дакле, ово је специјалан случај наше дефиниције, тј. приступ дефинисања је дедуктивни, од општег, ка појединачном.

Није сувишно напоменути да смо центар масе могли дефинисати и индуктивно. Најпре за случај позитивних маса, а онда проширити на реалне под датим условом.

У случају да услов није задовољен, тј. ако је збир маса неког система баш једнак нули, центар масе или не постоји или није јединствен. На пример, за систем $\{(A_1, 1), (A_2, -1)\}$ не постоји тачка C из дефиниције 1.1 ако су тачке A_1 и A_2 различите, док је тачка C произвољна ако је $A_1 \equiv A_2$.

Да бисмо избегли коментарисање дегенерисаних случајева, налик овом из претходног контрапримера, у остатку рада ћемо различито означене тачке сматрати различитим. Такође, где год не будемо специјално проверавали да ли је, претпостављаћемо да је збир маса различит од нуле.

1.1 Основна својства

Најпре нађимо аналитичку везу између центара маса два система материјалних тачака и центра масе њихове уније.

Лема 1.5. Ако су C и C' центри маса система материјалних тачака $B = \{(A_i, m_i) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, m_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$ и $B' = \{(A'_i, m'_i) \mid A'_i \in \mathbb{R}^k, m'_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n'}\}$, редом, онда за центар масе X система материјалних тачака $B \cup B'$ важи

$$\overrightarrow{OX} = \frac{M \cdot \overrightarrow{OC} + M' \cdot \overrightarrow{OC'}}{M + M'}$$

где је $M = \sum_{i=1}^n m_i$, $M' = \sum_{i=1}^{n'} m'_i$ и $M, M', M + M' \neq 0$.

Доказ: Примењујући (1) на C и C' , добијамо редом

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}}{M}, \quad \overrightarrow{OC'} = \frac{\sum_{i=1}^{n'} m'_i \overrightarrow{OA'_i}}{M'}$$

тј.

$$M \cdot \overrightarrow{OC} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}, \quad M' \cdot \overrightarrow{OC'} = \sum_{i=1}^{n'} m'_i \overrightarrow{OA'_i}$$

Сабирањем последње две једнакости, па поделом обе стране са $M + M'$, добијамо

$$\frac{M \cdot \overrightarrow{OC} + M' \cdot \overrightarrow{OC'}}{M + M'} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n'} m'_i \overrightarrow{OA'_i}}{M + M'}$$

Како је десна страна ове једнакости на основу (1) једнака са $\overrightarrow{OX}$, долазимо до тражене једнакости. $\square$

Последица 1.6. Специјално, ако су T_k и T_l тежишта $B = \{A_i \mid A_i \in \mathbb{R}^s, i = \overline{1, k}\}$ и $B' = \{A'_i \mid A'_i \in \mathbb{R}^s, i = \overline{1, l}\}$, редом, онда за тежиште T скупа $B \cup B'$ важи

$$\overrightarrow{OT} = \frac{k \cdot \overrightarrow{OT_k} + l \cdot \overrightarrow{OT_l}}{k + l}.$$

Одредимо најпре центар масе дужи у чијим крајњим тачкама су одређене масе. Наравно, најједноставнији случај је случај тежишта, односно када су у крајњим тачкама дужи исте масе.

Пример 1.7. Тежиште дужи је њено средиште.

Посматрајмо дуж AB са масама 1 у крајевима. Означимо њено средиште са C . Како су $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ супротни вектори, то је $1 \cdot \overrightarrow{CA} + 1 \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ што по дефиницији 1.2 говори да је C тежиште дужи AB . $\triangle$

Убудуће нећемо водити рачуна да ли употребљавамо реч средиште или центар дужи јер смо управо показали да оба именују исту тачку.

Затим нађимо центар масе дужи у чијим крајевима су различите масе. Овај пример ће бити од нарочитог значаја при решавању задатака који следе нешто испод.

Пример 1.8. Центар масе система материјалних тачака $\{(A, 1), (B, \lambda)\}$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$ је тачка C колинеарна са A и B таква да је $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$ и за произвољну тачку O важи $\overrightarrow{OC} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$. Дискутуј положај тачке C у односу на вредност реалног параметра λ .

Прву тражену једнакост добијамо из $1 \cdot \overrightarrow{CA} + \lambda \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, по дефиницији 1.1 јер је C центар масе система $\{(A, 1), (B, \lambda)\}$. Јасно је да је C колинеарна са A и B јер су вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ линеарно зависни. Друга једнакост је директна последица једнакости (1).

Одредимо сада положај тачке C у зависности од параметра λ .

Тривијални случај $\lambda = 0$ се своди на систем $\{(A, 1)\}$, па је и $C \equiv A$. Ако је $\lambda > 0$, онда су вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ истог смера, па је тачка C на дужи AB , тј. важи распоред тачака $A - C - B$. Специјално, за $\lambda = 1$, C је центар дужи. Ако је $\lambda < 0$, онда су вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ супротног смера, тј. $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ су истог смера, па је тачка C ван дужи AB . Могућ је један од два распореда тачака: $A - B - C$ или $B - A - C$. Ако је $\lambda \in (-\infty, -1)$, онда је вектор $\overrightarrow{AC}$ дужи од $\overrightarrow{AB}$, па је $A - B - C$. Ако је $\lambda \in (-1, 0)$, онда је вектор $\overrightarrow{AC}$ краћи од $\overrightarrow{AB}$, па је $B - A - C$. Специјално, за $\lambda = -1$, центар масе није дефинисан јер је збир маса нула. $\triangle$

Последица 1.9. *Центар масе система материјалних тачака $\{(A, a), (B, b)\}$, где су $a, b \in \mathbb{R}$ је тачка C колинеарна са A и B таква да је $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{b}{a}$ и за произвољну тачку O важи $\overrightarrow{OC} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$. Такође, није тешко уочити да је тачка C на дужи AB ако су a и b оба позитивна или оба негативна, а ван дужи ако су a и b различитог знака. $\triangle$*

Због велике важности за даље примене у класичној геометрији, издвајамо специјалан случај последице 1.6. Реч је о вези између тежишта система материјалних тачака и тежишта његовог подскупа насталог елиминисањем само једне тачке. Наиме, ова два тежишта су колинеарна са елиминисаном тачком и може се одредити однос у ком се налазе.

Лема 1.10. *Нека су $\{A_i \mid A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n}\}$ и $\{A_i \mid A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n} \wedge i \neq j\}$ системи материјалних тачака са тежиштима T и T_j , редом. Онда се за свако $i = \overline{1, n}$ $A_i T_i$ секу у тачки T и важи $\overrightarrow{A_i T} : \overrightarrow{T T_i} = (n - 1) : 1$.*

А сада формулишимо везу између центара маса два система различитих тачака, са истим придруженим масама.

Лема 1.11. *Дати су системи материјалних тачака са придруженим масама $\{(A_i, m_i) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n}\}$ и $\{(A'_i, m_i) \mid A'_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n}\}$, где је $m_i \in \mathbb{R}$ и $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$. Нека су центри маса ових система C и C' , редом. Онда важи*

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A_i A'_i} = \overrightarrow{CC'} \sum_{i=1}^n m_i.$$

Доказ: Из следећег низа једнакости, преко дефиниције центара маса C и C' ,

доказујемо тврђење. Наиме,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{CC'} &= \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{CA_i} + \overrightarrow{A_iA'_i} + \overrightarrow{A'_iC'}) \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{CA_i} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A_iA'_i} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A'_iC'} \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{A_iA'_i}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Где се мора налазити центар масе неког система тачака са придруженим позитивним масама? Приметимо да је у случају дужи центар масе баш на њој. Да ли је центар масе троугла у његовој унутрашњости? А многоугла? Наредна теорема даје одговоре на ова питања.

Теорема 1.12. *(О конвексном омотачу)*

Дат је систем материјалних тачака $\{(A_i, m_i) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, m_i > 0, i = \overline{1, n}\}$. Његов центар масе припада конвексном омотачу тачака $A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n}$.

Доказ: Индукцијом по n :

База: За $n = 2$ имамо систем од две тачке са неким позитивним масама. Центар масе припада дужи чије су те тачке крајеви, а како је дуж конвексан омотач својих крајњих тачака, то је база задовољена (видети пример 1.8);

И.Х.: Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A_i, m_i) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, m_i > 0, i = \overline{2, n}\}$. Нека C_1 , његов центар масе, припада конвексном омотачу тачака $A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{2, n}$;

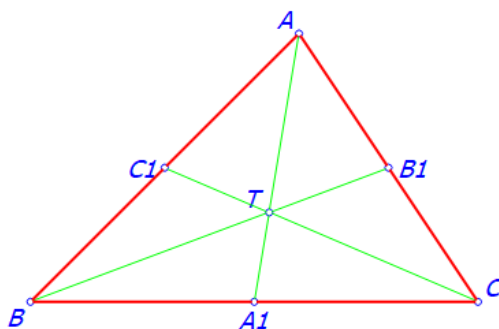
И.К.: Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A_i, m_i) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, m_i > 0, i = \overline{1, n}\}$ са центром масе C . Како је C_1 центар масе система материјалних тачака $\{(A_i, m_i) \mid m_i > 0, i = \overline{2, n}\}$, то према леми 1.10, $C \in A_1C_1$. С друге стране, по И.Х. C_1 припада конвексном омотачу тачака $A_i, i = \overline{2, n}$, одакле C_1 припада и конвексном омотачу тачака $A_i, i = \overline{1, n}$, па тиме и дуж A_1C_1 припада конвексном омотачу тачака $A_i, i = \overline{1, n}$. Из ова два закључка је јасно да тачка C припада конвексном омотачу тачака $A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n}$. $\square$

1.2 Почетни примери примене у геометрији

Већ смо одредили центар масе дужи, у случају једнаких, а и различитих маса у њеним крајевима. Пређимо сада на троугао и неке сложеније фигуре.

Најпре ћемо наћи тежиште троугла, у смислу дефиниције 1.2. Како је термин тежишта веома добро познат у контексту значајних тачака, наслућујемо да је реч о истим појмовима.

Пример 1.13. *Тежиште троугла је на тежишним дужима и дели их у односу 2 : 1.*



Слика 1: Тежиште троугла

Посматрамо систем материјалних тачака $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ и одређујемо његов центар масе, тј. тежиште T . Тежиште T целог система на основу последице 1.6 остаје непромењено ако масе из A и B пребацимо у њихово тежиште, што је по примеру 1.7 средиште C_1 дужи AB . Сада је у C_1 маса 2, а у C је 1, па је на основу примера 1.8 T тачка на дужи CC_1 дата са $\overrightarrow{CT} : \overrightarrow{TC_1} = 2 : 1$. Аналогно се показује да T припада и другим двема тежишним дужима и да и њих дели у истом односу. Такође, како T припада трима тежишним дужима, то су оне конкурентне. $\triangle$

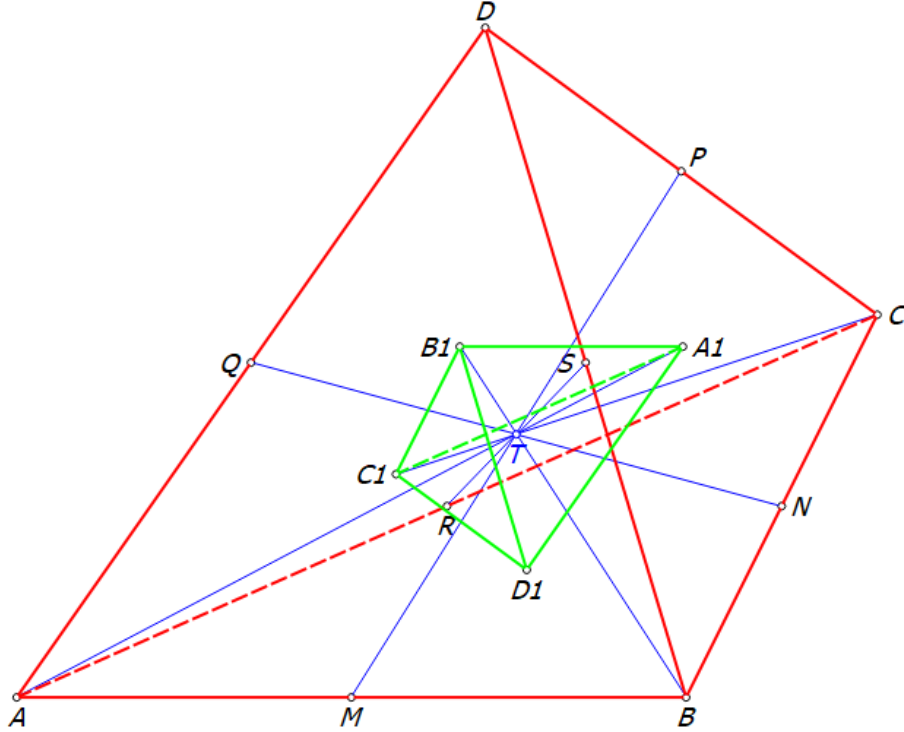
Логика проналажења тежишта у равни се преноси и у простор, о чему говори следећи пример.

Пример 1.14. *Дат је $ABCD$ тетраедар. Нека су M, N, P, Q, R, S средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, BD и A_1, B_1, C_1, D_1 тежишта троуглова BCD, CDA, DAB, ABC , редом. Тада се дужи $MP, NQ, RS, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ секу у истој тачки T која прве три дужи полови, а преостале четири дели у односу 3 : 1 и тежишта тетраедара $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ су једнака тачки T .*

Посматрамо систем материјалних тачака $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$. Означимо његов центар масе са X .

Најпре ћемо показати да X полови дужи MP, NQ, RS . Како је центар масе система $\{(A, 1), (B, 1)\}$ тачка M , а центар масе система $\{(C, 1), (D, 1)\}$ је тачка P , то покупио масе из A и B и убацимо у M , а из C и D убацимо у P и добијамо систем материјалних тачака $\{(M, 2), (P, 2)\}$ са истим тежиштем као почетни систем.

Одавде је јасно да је X баш средиште дужи MP . Аналогно, ако групишемо A и D , а B и C , добијамо да је X средиште од NQ и ако групишемо A и C , а B и D , добијамо да је X средиште од RS .



Слика 2: Тежиште тетраедра

Даље, показујемо да X дели дужи AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 у односу $3 : 1$. Покупимо масе из B, C, D и сместимо у тежиште троугла BCD , тј. у A_1 . Добијамо систем $\{(A_1, 3), (A, 1)\}$ са истим тежиштем као почетни. Дакле, X је тачка са дужи AA_1 таква да важи $AX : XA_1 = 3 : 1$. Аналогно, смештањем маса из темена троуглова ACD, ABD и BCD у њихова тежишта, добијамо редом да X припада дужима BB_1, CC_1 и DD_1 и да их дели у истом односу. Доказали смо да се све тражене дужи секу у тежишту тетраедра $ABCD$, тј. $X \equiv T$ и да важе сви тражени односи.

Најзад, остаје да покажемо да су тежишта тетраедара $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ иста. Ако покупимо масу $\frac{1}{3}$ из сваког од темена B, C, D и сместимо у њихово тежиште A_1 , по $\frac{1}{3}$ из A, C, D и сместимо у B_1 , по $\frac{1}{3}$ из A, B, D и сместимо у C_1 , а по $\frac{1}{3}$ из A, B, C и сместимо у D_1 , онда уместо почетног система добијамо систем $\{(A_1, 1), (B_1, 1), (C_1, 1), (D_1, 1)\}$ са истим тежиштем. $\triangle$

Да је техника центара маса алат широке примене и да решава прегршт типова геометријских задатака, види се у следећем примеру који илуструје доказивање колинеарности неке три тачке.

Пример 1.15. Нека је $\frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{B_1C_1}} = \frac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{B_2C_2}}$, где су A_i, B_i, C_i две тројке разних колинеарних тачака. Тада тачке A_3, B_3, C_3 које деле дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 у истом односу припадају једној правој.

Уведимо следеће ознаке:

$$\frac{\overrightarrow{A_2A_3}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \frac{\overrightarrow{B_2B_3}}{\overrightarrow{B_3B_1}} = \frac{\overrightarrow{C_2C_3}}{\overrightarrow{C_3C_1}} = a, \quad \frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{B_1A_1}} = \frac{\overrightarrow{C_2B_2}}{\overrightarrow{B_2A_2}} = b.$$

Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A_1, ab), (C_1, a), (A_2, b), (C_2, 1)\}$. Како су све тачке система различите, то је $ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1) \neq 0$, па је центар масе система коректно дефинисан. Одредимо центар масе овог система на два начина користећи се притом лемом 1.5 и последицом 1.9.

Најпре, како је центар масе система $\{(A_1, ab), (A_2, b)\}$ тачка A_3 са придруженом масом $(a+1)b$, а центар масе $\{(C_1, a), (C_2, 1)\}$ тачка C_3 са придруженом масом $a+1$, то је центар масе целог система на дужи A_3C_3 . ♡

С друге стране, како је центар масе система $\{(A_1, ab), (C_1, a)\}$ тачка B_1 са придруженом масом $(b+1)a$, а центар масе $\{(A_2, b), (C_2, 1)\}$ тачка B_2 са придруженом масом $b+1$, то је центар масе целог система баш тачка B_3 . ♣

Из ♡ и ♣ директно закључујемо да су тачке A_3, B_3 и C_3 колинеарне. △

Сада ћемо навести пример једне векторске функције, чије се слике могу једноставно одредити ако их тражимо у контексту система материјалних тачака са одређеним центром масе.

Пример 1.16. Дате су тачке $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^k$ и пресликавање $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$f(P) = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA_1} + \dots + \overrightarrow{PA_n}.$$

1. Шта је пресликавање f ?
2. Ако је $n = 3$ и тачке A_1, A_2, A_3 неколинеарне, шта описује тачка Q ако се P креће по описаној кружници око троугла $A_1A_2A_3$?
3. Ако је $n = 3$ и тачке A_1, A_2, A_3 неколинеарне, шта описује тачка Q ако се P креће по Ојлеровој кружници троугла $A_1A_2A_3$?

Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A_i, 1) \mid A_i \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, n}\}$ и означимо његово тежиште са T .

1. Ако је P произвољна тачка, из (2) добијамо

$$\overrightarrow{PT} = \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i}}{n}$$

тј.

$$n\overrightarrow{PT} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA_i} = \overrightarrow{PQ}.$$

Ако у ову једнакост уместо P уврстимо T , добијамо $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$, тј. $f(T) = T$. Одавде је T фиксна тачка пресликавања f , па ћемо је узети за координатни почетак. Нађимо сада везу између вектора $\overrightarrow{TP}$ и његове слике $\overrightarrow{TQ}$. Како је

$$\overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{TP} + n\overrightarrow{PT} = -(n-1)\overrightarrow{TP},$$

то можемо описати пресликавање f као композицију $h \circ g$, где је h централна симетрија са центром у T , а g хомотетија са центром у T и коефицијентом $n-1$.

2. Како је

$$\overrightarrow{TA_i} \mapsto -2\overrightarrow{TA_i} =: \overrightarrow{TB_i}$$

то је

$$\overrightarrow{B_iT} = 2\overrightarrow{TA_i}$$

тј. тежиште троугла $A_1A_2A_3$ је уједно и тежиште троугла $B_1B_2B_3$, па су A_i средишта од B_jB_k , где је $i \neq j, k$. Из свега реченог се види да се описана кружница око троугла $A_1A_2A_3$ слика у описану кружницу око троугла $B_1B_2B_3$.

3. Како Ојлерова кружница садржи средишта страница троугла, на основу претходног дела, директно закључујемо да се Ојлерова кружница слика у описану кружницу око троугла $A_1A_2A_3$. $\triangle$

Урадимо још два примера са троуглом.

Пример 1.17. Дат је једнакостраничан троугао ABC и тачке M и N на страницама AB и BC такве да је $\frac{AM}{MB} = m$ и $\frac{CN}{NB} = n$. Нека је $MN \cap BD = \{O\}$ и $BD \perp AC$. Наћи односе $\frac{DO}{BO}$ и $\frac{MO}{NO}$.

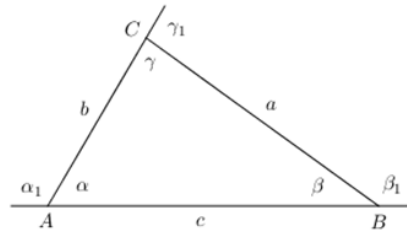
Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A, 1), (B, m+n), (C, 1)\}$ и одредимо његов центар масе T на два начина. Најпре, како је центар масе дужи AC са масама 1 у крајевима њено средиште D , онда T припада BD . С друге стране, како је центар масе система $\{(A, 1), (B, m)\}$ тачка M , а центар масе система $\{(C, 1), (B, n)\}$ тачка N , онда T припада MN . Из ова два закључка је јасно да је $T \equiv O$ и да важи

$$\frac{DO}{BO} = \frac{m+n}{2}, \quad \frac{MO}{NO} = \frac{1+n}{1+m}. \quad \triangle$$

Пример 1.18. На страницама AB и AC троугла ABC су дате тачке K и L такве да је $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Тежиште троугла ABC припада дужи KL .

Означимо $\frac{KB}{AK} = k$. Онда је $\frac{LC}{AL} = 1 - k$, где је $k \in (0, 1)$. Посматрамо систем материјалних тачака $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ и одредимо његов центар масе на два начина. Најпре, центар масе троугла са истим масама у теменима је тежиште троугла T . С друге стране, поделимо масу из A на k и $1 - k$, па тако уместо почетног посматрамо два система $\{(A, k), (B, 1)\}$ и $\{(C, 1), (A, 1 - k)\}$. Како је центар масе првог тачка K , а центар масе другог система тачка L , онда тежиште припада дужи KL . Из ова два закључка је јасно да је $T \in KL$. $\triangle$

Нашли смо тежиште троугла, тј. центар масе у случају да су теменима придружене једнаке масе. Шта се дешава када су масе различите? Да ли се може поставити такав систем маса у темена троугла, да њихов центар буде нека друга значајна тачка? Наравно да може. Наредни примери говоре о центру уписане кружнице и центрима приписаних кружница у троуглу као центара маса одговарајућих система, што за последицу доказује одговарајуће распореде тачака и односе дужи.



Слика 3: Стандардне ознаке елемената троугла

Пример 1.19. Нека су a, b, c дужине страница стандардно означеног троугла ABC (види слику изнад). Одреди центре маса следећих система материјалних тачака: $\{(B, b), (C, c)\}$, $\{(B, -b), (C, c)\}$, $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$, $\{(A, -a), (B, b), (C, c)\}$, $\{(A, a), (B, -b), (C, c)\}$, $\{(A, a), (B, b), (C, -c)\}$.

Најпре, центар масе система $\{(B, b), (C, c)\}$ је тачка X_1 таква да

$$(b + c)\overrightarrow{AX_1} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Како су оба сабирка са десне стране ове једнакости вектори интезитета bc , то је њихов збир вектор чији се правац поклапа са правцем дијагонале ромба странице bc , тј. симетрале угла α . А тражени центар масе X_1 је крај тог вектора.

Даље, сличном анализом система $\{(B, -b), (C, c)\}$ закључујемо да је његов центар масе X_2 крајња тачка вектора чији се правац поклапа са правцем симетрале спољашњег угла код темена A , а који задовољава једнакост

$$(-b + c)\overrightarrow{AX_2} = -b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

У потрази за центром масе X система $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$, послужићемо се следећим једнакостима:

$$\begin{aligned}(a + b + c)\overrightarrow{AX} &= a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}, \\(a + b + c)\overrightarrow{BX} &= a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC} = a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}, \\(a + b + c)\overrightarrow{CX} &= a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} + c\overrightarrow{CC} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Из њих редом закључујемо да X припада симетралама углова α, β, γ , тј. тражени центар масе је центар уписане кружнице у троугао ABC .

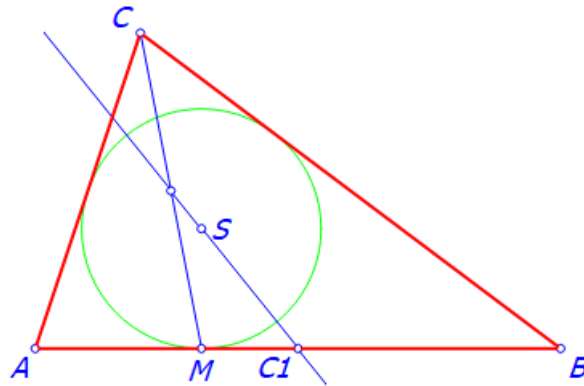
Најзад, међу последња три система, довољно је пронаћи центар масе једног. За друга два ћемо закључак извести по аналогiji.

Посматрамо систем $\{(A, a), (B, -b), (C, c)\}$ са центром масе Y . Као и малопре, послужићемо се следећим једнакостима:

$$\begin{aligned}(a - b + c)\overrightarrow{AY} &= a\overrightarrow{AA} - b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = -b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}, \\(a - b + c)\overrightarrow{BY} &= a\overrightarrow{BA} - b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC} = a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}, \\(a - b + c)\overrightarrow{CY} &= a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB} + c\overrightarrow{CC} = a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Из њих редом закључујемо да Y припада симетралама углова $\alpha_1, \beta, \gamma_1$, тј. тражени центар масе је центар споља приписане кружнице наспрам темена B троугла ABC . Дакле, центар масе система $\{(A, -a), (B, b), (C, c)\}$ је S_a , система $\{(A, a), (B, -b), (C, c)\}$ је S_b , а система $\{(A, a), (B, b), (C, -c)\}$ је S_c . $\triangle$

Пример 1.20. Нека је S центар уписаног круга троугла ABC , M додирна тачка круга са AB , C_1 средиште странице AB , O произвољна тачка равни. Права SC_1 полови дуж CM и важи $\overrightarrow{OS} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$.



Слика 4: Центар уписане кружнице троугла 1.

Како је по претходном задатку S центар масе система $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$, то важи једнакост

$$\overrightarrow{OS} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}.$$

Из једнакости парова тангентних дужи из темена на уписану кружницу троугла ABC , добијамо да је $AM = s - a$, а $MB = s - b$ где је s полуобим троугла. Посматраћемо систем материјалних тачака $\{(A, s - b), (B, s - a), (C, c)\}$ и пронаћи његов центар масе на два начина.

Најпре, како је центар масе система $\{(A, s - b), (B, s - a)\}$ тачка M са придруженом масом $2s - b - a = c$ јер је $\frac{AM}{MB} = \frac{s-a}{s-b}$, онда је центар масе целог система средиште дужи MC .

С друге стране, ако покупимо масе a, b, c из A, B, C и придружимо их тачки S која је по претходном задатку њихов центар масе, онда почетни систем има исти центар масе као и систем $\{(A, s - a - b), (B, s - a - b), (S, a + b + c)\}$. Како је центар масе система $\{(A, s - a - b), (B, s - a - b)\}$ тачка C_1 , то је центар масе целог система на дужи SC_1 . Одавде је јасно да права SC_1 полови CM . $\triangle$

Пример 1.21. Нека су P, Q, R тачке додира приписаних кругова троугла ABC и страница BC, CA, AB , редом. Тада се праве AP, BQ, CR секу у једној тачки X која припада правој ST , где су S и T центар уписаног круга и тежиште тог троугла и важи $S - T - X$ и $ST : TX = 1 : 2$. Изрази OX преко OA, OB, OC и страница троугла.

Познато је да су дужине тангентних дужи на споља приписане кругове троугла једнаке

$$BR = CQ = s - a, \quad AR = CP = s - b, \quad AQ = BP = s - c.$$

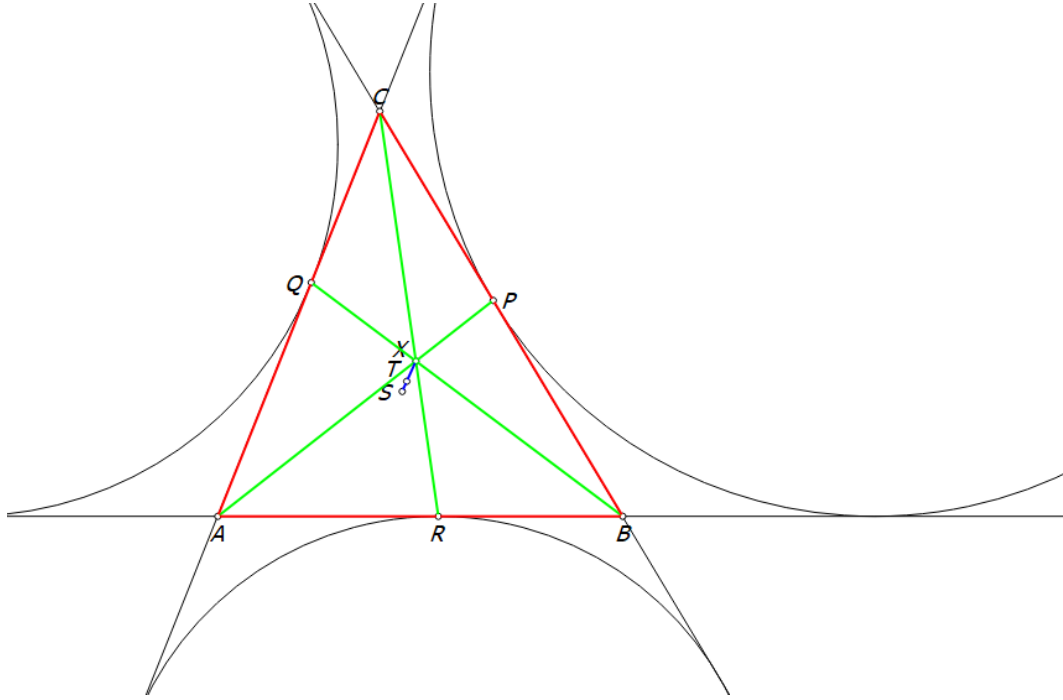
Због тога је згодно посматрати систем $\{(A, s - a), (B, s - b), (C, s - c)\}$. Како је центар масе система $\{(B, s - b), (C, s - c)\}$ тачка P са масом $2s - b - c = a$, то центар масе почетног система припада дужи AP и дели је у односу $a : (s - a)$. Аналогно се показује да центар масе припада и дужима BQ и CR и њих дели редом у односима $b : (s - b)$ и $c : (s - c)$. Дакле, праве AP, BQ, CR су конкурентне у X .

Како је X центар масе поменутог система материјалних тачака, то важи

$$(s - a + s - b + s - c)\overrightarrow{OX} = (s - a)\overrightarrow{OA} + (s - b)\overrightarrow{OB} + (s - c)\overrightarrow{OC},$$

тј.

$$\overrightarrow{OX} = \frac{(-a + b + c)\overrightarrow{OA} + (a - b + c)\overrightarrow{OB} + (a + b - c)\overrightarrow{OC}}{a + b + c}.$$



Слика 5: Споља приписани кругови 1.

Да бисмо нашли везу између тачака S , X и T извршимо другачију расподелу маса. Наиме, уместо почетног система, посматрамо два нова $\{(A, -a), (B, -b), (C, -c)\}$ и $\{(A, s), (B, s), (C, s)\}$. Центар масе првог је S са придруженом масом $-(a+b+c)$, а центар масе другог је T са придруженом масом $\frac{3}{2}(a+b+c)$. Одавде је центар масе почетног система тачка X са праве ST таква да важи $S-T-X$ и $ST : TX = 1 : 2$.

Још само треба проверити добру дефинисаност свих поменутих центара маса. Наиме, сви зборови маса $s, -2s, 3s, a, b, c$ су различити од нуле. $\triangle$

Пример 1.22. Нека су P, Q, R тачке додира уписаног круга у троугао ABC и страница BC, CA, AB . Тада се праве AP, BQ, CR секу у једној тачки X . Такође, праве $S_a A_1, S_b B_1, S_c C_1$ се секу у једној тачки Y која припада правој XT , важи $X-T-Y$ и $XT : TY = 2 : 1$. Са S_a, S_b, S_c су означени центри споља приписаних кругова наспрам темена A, B, C , редом, са A_1, B_1, C_1 центри страница BC, AC, AB , редом, а са T тежиште троугла.

Познато је да су дужине тангентних дужи на уписану кружницу троугла једнаке

$$AR = AQ = s - a, \quad BR = BP = s - b, \quad CQ = CP = s - c.$$

Због тога је згодно посматрати систем материјалних тачака $\{(A, m_A = (s-b)(s-c)), (B, m_B = (s-a)(s-c)), (C, m_C = (s-a)(s-b))\}$. Како

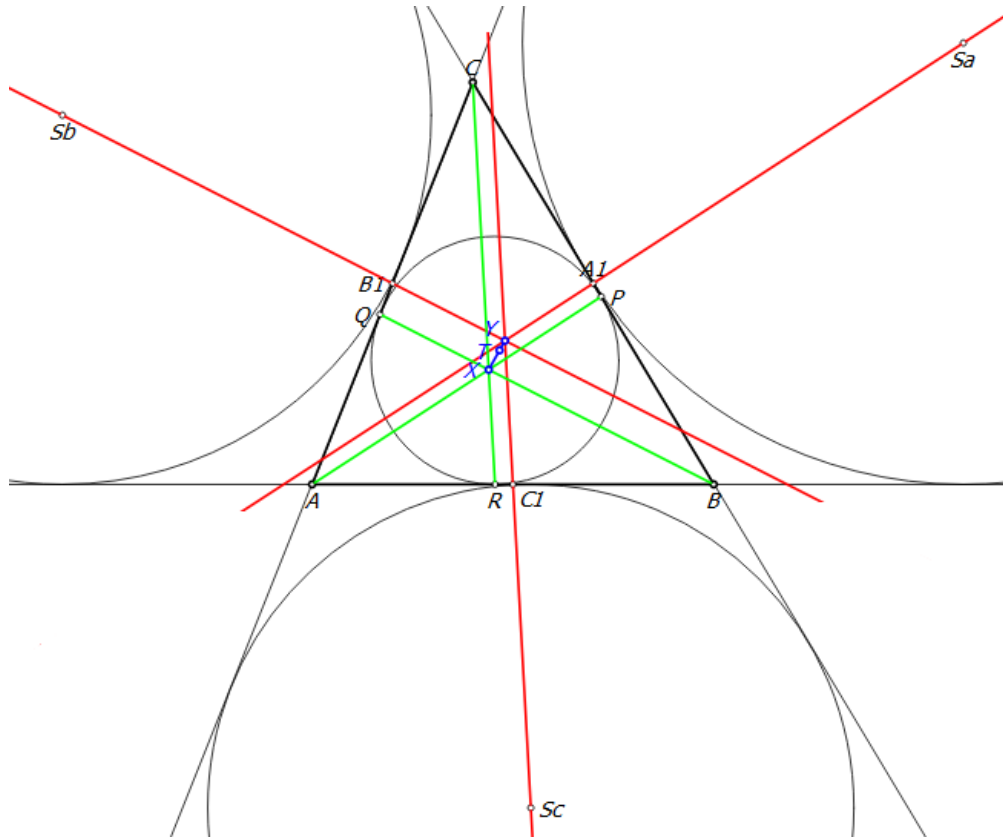
је центар масе система $\{(B, (s-a)(s-c)), (C, (s-a)(s-b))\}$ тачка P , то центар масе почетног система припада дужи AP . Аналогно се показује да центар масе припада и дужима BQ и CR . Дакле, праве AP, BQ, CR су конкурентне у X . X је центар масе система $\{(A, (s-b)(s-c)), (B, (s-a)(s-c)), (C, (s-a)(s-b))\}$ са придруженом укупном масом $m = (s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)$. Остало је још да нађемо распоред тачака T, X, Y и однос дужи XT и TY , па ћемо кренути од система $\{(A, m), (B, m), (C, m)\}$ чији је центар масе T .

Придружене масе претходном систему треба адекватно расподелити у два система, тако да центар масе једног буде X , а другог Y . У том циљу, приметимо да је

$$m = (s-b)(s-c) + (s-a)(2s-c-b) = (s-b)(s-c) + a(s-a),$$

$$m = (s-a)(s-c) + (s-b)(2s-a-c) = (s-a)(s-c) + b(s-b),$$

$$m = (s-a)(s-b) + (s-c)(2s-a-b) = (s-a)(s-b) + c(s-c).$$



Слика 6: Споља приписани кругови 2.

Ако центар масе $\{(A, a(s-a)), (B, b(s-b)), (C, c(s-c))\}$ означимо са Y_1 , а како је центар масе $\{(A, (s-b)(s-c)), (B, (s-a)(s-c)), (C, (s-a)(s-b))\}$ тачка

X , то важи

$$X - T - Y_1, \quad XT : TY_1 = 2 : 1.$$

Ако покажемо да је $Y \equiv Y_1$, имамо тражено тврђење. Како је

$$b(s - b) = -b(s - a) + bc,$$

$$c(s - c) = -c(s - a) + bc,$$

то уместо система $\{(A, a(s - a)), (B, b(s - b)), (C, c(s - c))\}$, можемо посматрати следећа два

$$\{(A, a(s - a)), (B, -b(s - a)), (C, -c(s - a))\},$$

$$\{(B, bc), (C, bc)\}.$$

Центар масе првог система је по примеру 1.19 тачка S_a са придруженом масом $(s - a)(a - b - c) = -2(s - a)^2$, док је центар масе другог система тачка $A_1 = S(BC)$ са придруженом масом $2bc$. Закључујемо да $Y_1 \in S_a A_1$. Аналогно се показује да $Y_1 \in S_b B_1$ и $Y_1 \in S_c C_1$, па је заиста $Y \equiv Y_1$. $\triangle$

Пример 1.23. Нека су A', B', C' тачке пресека бисектриса углова код темена A, B, C са наспрамним страницама и S центар уписаног круга троугла ABC . Тада важи: $\frac{1}{4} < \frac{AS}{AA'} \cdot \frac{BS}{BB'} \cdot \frac{CS}{CC'} \leq \frac{8}{27}$.

Из примера 1.19 имамо да је

$$\overrightarrow{AS} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a + b + c}, \quad \overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b + c}.$$

Одавде је

$$\frac{AS}{AA'} = \frac{b + c}{a + b + c}.$$

Аналогно добијамо и да је

$$\frac{BS}{BB'} = \frac{a + c}{a + b + c}, \quad \frac{CS}{CC'} = \frac{a + b}{a + b + c}.$$

Дакле,

$$\frac{AS}{AA'} \cdot \frac{BS}{BB'} \cdot \frac{CS}{CC'} = \frac{(b + c)(a + c)(a + b)}{(a + b + c)^3} = \frac{(s + x)(s + y)(s + z)}{8s^3},$$

где су x, y, z редом дужине тангентних дужи из A, B, C на уписану кружницу, а s полуобим троугла ABC .

Прва неједнакост важи захваљујући:

$$\begin{aligned} \frac{(s+x)(s+y)(s+z)}{8s^3} &= \frac{1}{8} \left(\frac{s^3 + (x+y+z)s^2 + (xy+xz+yz)s + xyz}{s^3} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{(x+y+z)}{s} + \frac{xy+xz+yz}{s^2} + \frac{xyz}{s^3} \right) \\ &> \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

док је друга последица неједнакости аритметичке и геометријске средине, тј.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8s^3}(s+x)(s+y)(s+z) &\leq \frac{1}{8s^3} \left(\frac{s+x+s+y+s+z}{3} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8s^3} \cdot \left(\frac{4s}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

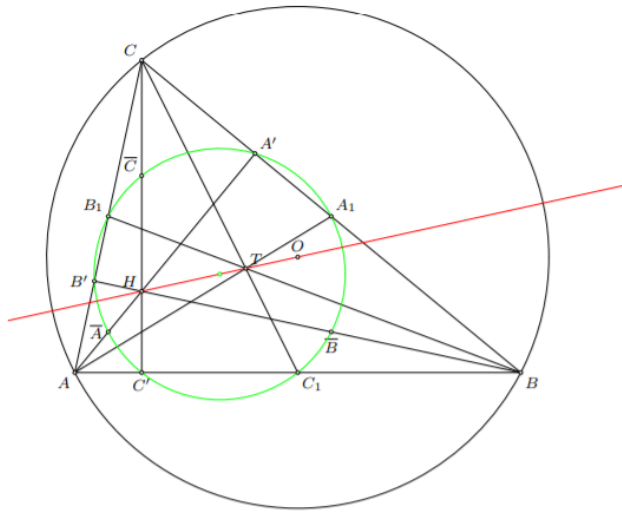
Приметимо да се једнакост у другој неједнакости достиже за $a = b = c$, тј. у случају једнакостраничног троугла. Такође, прва неједнакост се не може побољшати јер

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists(x, y, z)) : \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{8} \left(1 + \frac{(x+y+z)}{s} + \frac{xy+xz+yz}{s^2} + \frac{xyz}{s^3} \right) = \frac{1}{4}$$

На пример, узети $x = y = \epsilon, z = 1 - 2\epsilon$. $\triangle$

Ево примера са још неким значајним тачкама — ортоцентром и центром Ојлеровог круга.

Пример 1.24. Ако су H, E редом ортоцентар и центар Ојлеровог круга троугла ABC , тада је E тежиште четвороугла $ABCH$.



Слика 7: Ојлеров круг

Тежиште X четвороугла $ABCH$ је исто као центар масе система $\{(T, 3), (H, 1)\}$, где је T тежиште троугла ABC . Дакле, то је тачка X таква да важи

$$H - X - T, \quad HX : XT = 3 : 1.$$

С друге стране, за тачке са Ојлерове праве важи

$$H - E - T - O, \quad HT : TO = 2 : 1, \quad HE = EO.$$

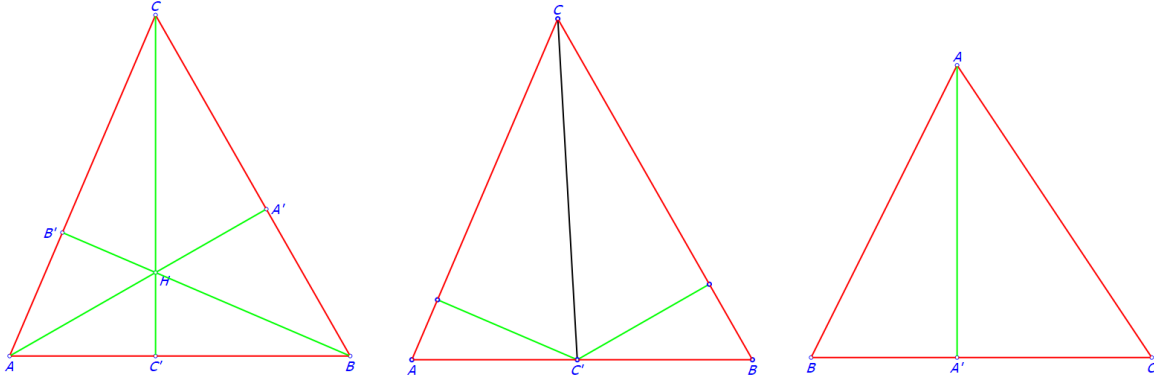
Из ових пропорција се види да је $X \equiv E$. $\triangle$

Резимирајмо шта смо до сада урадили, уз приказивање још неких начина доказивања.

Пример 1.25. *Тежишне линије, висине, симетрале углова троугла се секу у једној тачки.*

1. Случај тежишних линија је показан у примеру 1.13.
2. Код висина, са A', B', C' означимо подножја висина из темена A, B, C на наспрамне странице редом (видети слику доле лево). Зато нам одговара да посматрамо следећи систем материјалних тачака: $\{(A, a \cos \beta \cos \gamma), (B, b \cos \alpha \cos \gamma), (C, c \cos \alpha \cos \beta)\}$. Како је центар масе система $\{(B, b \cos \alpha \cos \gamma), (C, c \cos \alpha \cos \beta)\}$ тачка A' , то центар масе целог система припада висини AA' . Аналогно, центар масе припада и другим двема висинама, па су висине троугла конкурентне.
3. Најзад, случај симетрала углова је већ показан у примеру 1.19. Овде ћемо показати на други начин. Наиме, означимо са A', B', C' редом пресеке симетрала углова α, β, γ са наспрамним страницама. Даље, нека је x растојање тачке C' од страница a и b троугла ABC (видети слику доле у средини). Онда је јасно да је $AC' = x \sin \alpha$ и $C'B = x \sin \beta$. На сличан начин нађемо дужине дужи $BA', A'C, CB', B'A$. Посматрајмо $\{(A, \sin \beta \sin \gamma), (B, \sin \alpha \sin \gamma), (C, \sin \alpha \sin \beta)\}$ систем материјалних тачака. Систем $\{(B, \sin \alpha \sin \gamma), (C, \sin \alpha \sin \beta)\}$ има центар масе A' , па је центар масе почетног система на дужи AA' . Аналогно показујемо да центар масе почетног система припада и дужима BB' и CC' , па су симетрале углова конкурентне.

Наравно, да би центар масе био добро дефинисан, свуда треба проверити да ли су суме маса различите од нуле. $\triangle$



Слика 8: Ортоцентар, симетрала угла, висина троугла

А сада приступимо ортоцентру троугла из једног новог угла. Најпре уз помоћ скаларног производа и косинусне теореме распишимо вектор висине троугла као линеарну комбинацију вектора страница које полазе из истог темена као та висина. Затим, уочимо систем темена троугла са новим масама (у односу на оне из претходног примера) чији је центар баш ортоцентар троугла. Овај систем ће нам касније бити од користи при доказивању једне леме.

Пример 1.26. Ако је AA' висина стандардно означеног троугла ABC , онда је $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{a^2}[(b^2 - bc \cos \alpha)\overrightarrow{AB} + (c^2 - bc \cos \alpha)\overrightarrow{AC}]$.

Како су A', B, C колинеарне тачке (видети слику горе десно), онда за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ важи

$$\overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AB}.$$

Даље, ако са $\cdot$ означимо скаларни производ, онда је

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos \alpha,$$

па због нормалности правих AA' и BC важи $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Одатле је:

$$\begin{aligned} (\lambda \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \lambda b^2 - \lambda bc \cos \alpha + (1 - \lambda) bc \cos \alpha - (1 - \lambda) c^2 &= 0 \\ \lambda(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) &= c^2 - bc \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{c^2 - bc \cos \alpha}{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}, \quad 1 - \lambda = \frac{b^2 - bc \cos \alpha}{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

Најзад, приметимо да је по косинусној теореме

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2,$$

уз помоћ чега долазимо до тражене једнакости. $\triangle$

Пример 1.27. *Центар масе система $\{(A, \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma), (B, \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma), (C, \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta)\}$, где је ABC стандардно означен троугао је његов ортоцентар.*

Користећи ознаке и слику из претходног примера, можемо закључити следеће:

$$a = CA' + BA' = b \cos \gamma + c \cos \beta.$$

Аналогно је

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha, \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Запишимо прву једнакост из претходног реда на други начин

$$b - c \cos \alpha = a \cos \gamma,$$

па је затим помножимо са $\frac{b}{a^2}$. Тиме добијамо коефицијент уз $\overrightarrow{AB}$ у претходном примеру, који се може преуредити на следећи начин:

$$\frac{b}{a^2} \cdot (b - c \cos \alpha) = \frac{b \cos \gamma}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \gamma = \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta}.$$

Краћењем последњег разломка са $\sin \beta \sin \gamma$, добијамо коефицијент уз $\overrightarrow{AB}$:

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta}.$$

Аналогно се показује да је коефицијент уз $\overrightarrow{AC}$ једнак

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}.$$

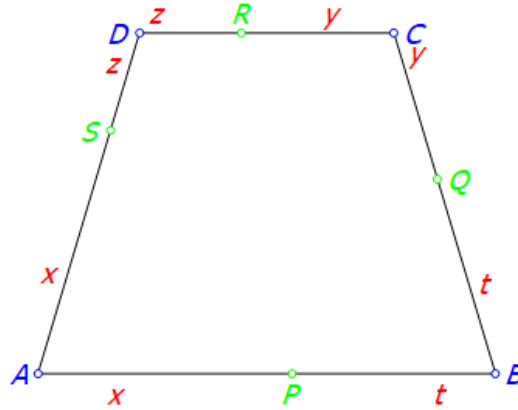
Најзад добијамо

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta} \overrightarrow{AB} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma} \overrightarrow{AC}.$$

Одавде је јасно да је A' центар масе система $\{(B, \operatorname{ctg} \gamma), (C, \operatorname{ctg} \beta)\}$. Аналогно је B' центар масе $\{(A, \operatorname{ctg} \gamma), (C, \operatorname{ctg} \alpha)\}$ и C' центар масе $\{(A, \operatorname{ctg} \beta), (B, \operatorname{ctg} \alpha)\}$ система. Из ова три закључка изводимо и тај да центар масе почетног система припада правама AA' , BB' и CC' , па се он баш подудара са ортоцентром троугла. $\triangle$

Ево још једног примера у простору. Наиме, треба показати да додирне тачке сфере и просторног четвороугла припадају једној равни.

Пример 1.28. *Ако су AB, BC, CD, DA тангенте неке сфере, тада су додирне тачке копланарне.*



Слика 9: Тангенте сфере

Нека су тачке додира сфере и дужи AB, BC, CD, DA редом P, Q, R, S . Уведимо следеће ознаке за дужине тангентних дужи користећи притом једнакост оних које си повучене из исте тачке:

$$AS = AP = x, BP = BQ = t, CQ = CR = y, DR = DS = z.$$

Ради лакшег праћења, ово је приказано на слици изнад. Идеја је изабрати адекватне масе и поставити их у три уведене тачке тако да центар масе добијеног система буде баш у четвртој тачки.

Посматрајмо систем

$$\{(P, \frac{1}{x} + \frac{1}{t}), (Q, -\frac{1}{t} - \frac{1}{y}), (S, -\frac{1}{z} - \frac{1}{x})\}.$$

Центар масе овог система је добро дефинисан јер је збир маса различит од нуле. Наиме,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \neq 0.$$

Како је, на основу теореме 1.12 центар масе посматраног система у равни одређеној тачакама P, Q, S , остаје да покажемо да је тај центар тачка R , одакле ћемо имати закључак да су P, Q, R, S копланарне тачке. У том циљу расподелимо масе на други начин. Пребацимо масу $\frac{1}{t}$ из P у B , а $\frac{1}{x}$ из P у A . Добијамо два система.

Први систем је

$$\{(B, \frac{1}{t}), (Q, -\frac{1}{t} - \frac{1}{y})\}.$$

Како је

$$(-\frac{1}{t} - \frac{1}{y})\overrightarrow{CQ} + \frac{1}{t}\overrightarrow{CB} = -\frac{y+t}{yt} \cdot \frac{y}{y+t}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{t}\overrightarrow{CB} = (-\frac{1}{t} + \frac{1}{t})\overrightarrow{CB} = \vec{0},$$

то је његов центар масе тачка C са придруженом целокупном масом система

$$m_C = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{y}.$$

Други систем је

$$\{(A, \frac{1}{x}), (S, -\frac{1}{z} - \frac{1}{x})\}.$$

Како је

$$(-\frac{1}{z} - \frac{1}{x})\overrightarrow{DS} + \frac{1}{x}\overrightarrow{DA} = -\frac{x+z}{xz} \cdot \frac{z}{x+z}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{x}\overrightarrow{DA} = (-\frac{1}{x} + \frac{1}{x})\overrightarrow{DA} = \vec{0},$$

то је његов центар масе тачка D са придруженом масом

$$m_D = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{z}.$$

На основу изведених закључака, центар масе почетног система је исти као центар масе система

$$\{(C, m_C = -\frac{1}{y}), (D, m_D = -\frac{1}{z})\}.$$

Како је

$$\frac{\overrightarrow{RC}}{\overrightarrow{RD}} = -\frac{y}{z} = -\frac{m_D}{m_C},$$

то је баш тачка R центар масе система тачака C и D , а тиме и почетног, чиме смо доказ комплетирали. $\triangle$

Наредна два примера, као и пример 1.27 ће нам користити у доказивању тврђења о тзв. Симсоновој правој, које у целости наводимо нешто испод.

Пример 1.29. *Ако је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, онда је $\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = 1$. Наравно, под условом да су све вредности котангенсне функције дефинисане, што је свакако испуњено ако су α, β, γ углови троугла.*

Како је

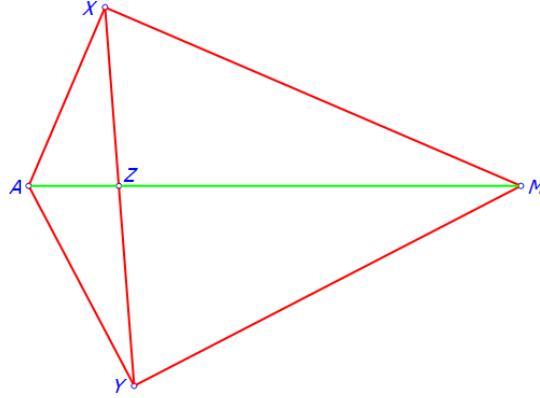
$$-\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma},$$

то добијамо следећи низ једнакости

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = \\ & = \frac{1 - \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma} \cdot (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1 - \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1, \end{aligned}$$

чиме доказујемо тражено. $\triangle$

Пример 1.30. Нека су AXM и AMY правоугли троуглови са заједничком хипотенузом AM , тачке X и Y са различитих страна праве AM , $\sphericalangle MAX = \gamma_1$ и $\sphericalangle YAM = \beta_1$. Одреди однос у коме XY дели AM .



Слика 10: Два правоугла троугла са заједничком хипотенузом

Нека је $AM \cap XY = \{Z\}$ и $\sphericalangle XZA = \phi$. Јасно је да треба да одредимо $\frac{AZ}{ZM}$. Како је збир наспрамних углова π , то је четвороугао $AXMY$ тетиван. На основу овога је $\sphericalangle MYZ = \gamma_1$. Применом синусне теореме на троугао YZM добијамо

$$\frac{ZM}{YM} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \phi},$$

док је из троугла AMY

$$YM = AM \sin \beta_1.$$

Комбиновањем ове две једнакости добијамо да је

$$ZM = \frac{AM \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \phi}. \heartsuit$$

Слично, применом синусне теореме на троугао AXZ добијамо

$$\frac{AZ}{AX} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta_1)}{\sin \phi} = \frac{\cos \beta_1}{\sin \phi},$$

док је из троугла AXM

$$AX = AM \cos \gamma_1.$$

Комбиновањем ове две једнакости добијамо да је

$$AZ = \frac{AM \cos \beta_1 \cos \gamma_1}{\sin \phi}. \clubsuit$$

Најзад, из $\heartsuit$ и $\clubsuit$, добијамо

$$\frac{AZ}{ZM} = \operatorname{ctg} \gamma_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1. \triangle$$

Лема 1.31. (*Симсон*)

Ако је M тачка са описане кружнице троугла ABC различита од темена, докажи да подножја нормала из M на BC, CA, AB припадају једној правој (тзв. Симсонова права). Такође, тој правој припада и средиште дужи MH , где је H ортоцентар троугла.

Доказ: Без умањења општости, нека тачка M припада оном кружном луку BC који не садржи тачку A . Уведимо следеће ознаке:

$$\sphericalangle MCA = \alpha_1, \sphericalangle MAB = \beta_1, \sphericalangle CAM = \gamma_1.$$

Из једнакости одговарајућих периферијских углова, добијамо

$$\alpha = \beta_1 + \gamma_1, \gamma = \alpha_1 - \beta_1, \beta = \pi - \alpha_1 - \gamma_1.$$

Означимо са P, Q, R подножја нормала из BC, CA, AB редом. Најпре доказујемо први део тврђења, тј. да су тачке P, Q, R колинеране. Посматрајмо систем материјалних тачака

$$\{(A, 0), (B, \operatorname{ctg} \beta_1), (C, \operatorname{ctg} \gamma_1)\}.$$

Одредимо његов центар масе на два начина.

С једне стране, како су β_1 и γ_1 углови троугла MBC , то применом примера 1.27 на тај троугао, закључујемо да је центар масе посматраног система тачка P јер је она подножје висине из M на BC .

С друге стране, како је

$$0 = \operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha_1),$$

то уместо почетног, можемо посматрати следећа два система материјалних тачака

$$\{(A, \operatorname{ctg} \alpha_1), (C, \operatorname{ctg} \gamma_1)\}, \{(A, \operatorname{ctg}(\pi - \alpha_1)), (B, \operatorname{ctg} \beta_1)\}.$$

Што се тиче првог наведеног система, како су α_1 и γ_1 углови троугла MAC , то применом примера 1.27 на тај троугао, закључујемо да је његов центар масе тачка Q јер је она подножје висине из M на AC . Слично и за други систем. Како су β_1 и $\pi - \alpha_1$ углови троугла MAB , то применом примера 1.27 на тај троугао, закључујемо да је његов центар масе тачка R јер је она подножје висине из M на AB . Најзад, добијамо да $P \in RQ$, па су ове три тачке заиста колинеарне.

У другом делу тврђења треба доказати да је средиште дужи MH на Симсоновој правој. Посматрајмо систем материјалних тачака

$$\{(M, k), (H, k)\}, \quad k = \operatorname{ctg} \gamma_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1,$$

и одредимо његов центар масе на два начина. Најпре, тривијално је центар масе баш средиште дужи MH . Довољно је показати да центар масе поменутог система припада Симсоновој правој. У ту сврху, посматрајмо систем

$$\{(M, k), (A, k \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma), (B, k \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma), (C, k \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta)\},$$

који има исти центар масе као почетни на основу примера 1.27 и 1.29. Приметимо да је на основу примера 1.27 центар масе система

$$\{(A, \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1), (C, \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \operatorname{ctg} \gamma_1)\},$$

тачка Q , док је на основу истог центар масе система

$$\{(A, -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 \cdot \operatorname{ctg} \gamma_1), (B, \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \operatorname{ctg} \gamma_1)\},$$

тачка R . На основу овога, добијамо систем

$$\{(M, k), (A, m_A), (Q, m_Q), (R, m_R)\},$$

са истим центром као почетни. Довољно је показати да центар масе система тачака $\{(M, k), (A, m_A)\}$ припада правој QR . Израчунајмо колико је m_A , док нам m_Q и m_R нису од значаја. У томе ће нам користити следеће једнакости:

На основу примера 1.29 је

$$\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta. \heartsuit$$

Даље, како је $\alpha_1 + \gamma_1 = \pi - \beta$, то је

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 - 1 = (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \gamma_1) \operatorname{ctg}(\pi - \beta) = -\operatorname{ctg} \beta (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \gamma_1). \heartsuit\heartsuit$$

Такође, како је $\alpha_1 - \beta_1 = \gamma$, то је

$$1 + \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1 = \operatorname{ctg} \gamma (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \alpha_1). \clubsuit$$

Најзад, како је $\pi - \alpha + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, то по примеру 1.29 важи

$$\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \gamma_1 = 1. \clubsuit\clubsuit$$

Дакле,

$$m_A = \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma,$$

што је на основу $\heartsuit$ једнако

$$\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \gamma_1) + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \gamma_1 (\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \beta_1).$$

Даље, заменом једнакости $\heartsuit$ и $\clubsuit$ у претходни израз, добијамо

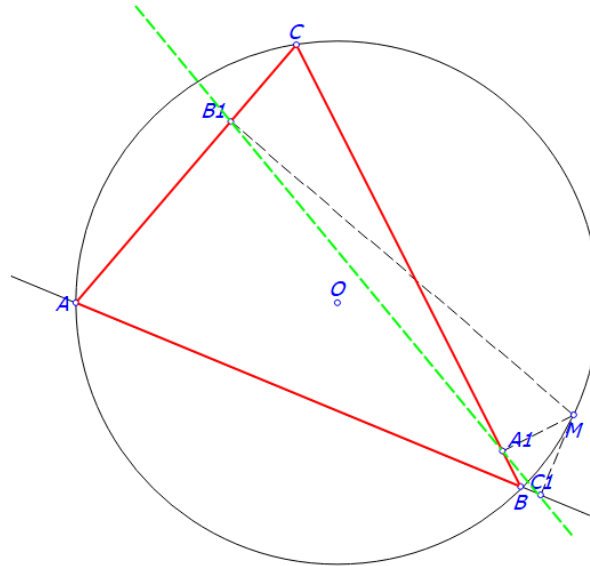
$$\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 - 1) - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma_1 (1 + \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1) =$$

$$\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma_1 = \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \gamma_1$$

Ово је, најзад, на основу $\clubsuit$ једнако 1. Дакле $m_A = 1$. И на крају, по примеру 1.30, имамо да центар масе система

$$\{(M, k), (A, m_A)\} = \{(M, \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \gamma_1), (A, 1)\}$$

припада дужи QR , што је и требало показати. $\square$



Слика 11: Симсонова права

Касније ћемо егзистенцију Симсонове праве доказати и на други начин.

1.3 Сложенији примери примене у геометрији

Међу бројним познатим геометријским резултатима несумњиво велику примену имају Чевина и Менелајева теорема од којих једна говори о конкурентности одговарајућих правих, а друга о колинеарности одговарајућих тачака. Уз помоћ њих се може доказати прегршт тврђења која имају велику важност у геометрији. Нека од њих ћемо доказати у наставку. Што се тиче самих доказа Чеве и Менелаја,

најпознатији су они преко сличности троуглова и Талесове теореме. Показаћемо да је њихове доказе могуће извести и техником центара маса.

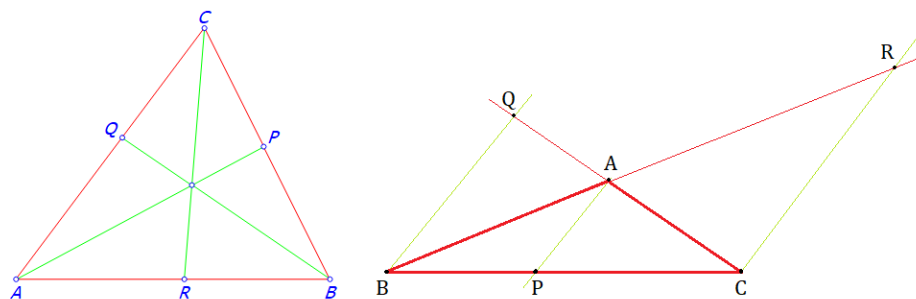
Приметите да смо Симсоново и тврђења о значајним тачакама већ доказали методом одређивања центара маса. Сада ћемо их доказати на други начин, применом Менелајеве теореме. А како ћемо саму Менелајеву теорему доказати техником центара маса, то ће изведени докази бити еквиваленти. Наравно, оба начина доказивања су могућа и у свим преосталим случајевима.

Чевина теорема даје неопходан и довољан аналитички услов да праве које спајају теме са тачком наспрамне странице неког троугла буду праве једног прамена.

Теорема 1.32. (Чева)

Нека тачке P, Q, R припадају страницама BC, AC, AB троугла ABC , редом. Тада $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$ ако и само ако су праве AP, BQ, CR праве једног прамена.

Доказ:



Слика 12: Чевина теорема 1.

$\Leftarrow$: Нека су најпре праве AP, BQ, CR конкурентне (слика горе лево). Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A, pq), (B, 1), (C, p)\}$. Нека важе односи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = p$ и $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = q$. Одредићемо центар масе поменутог система на два начина. Најпре, како је P центар масе $\{(B, 1), (C, p)\}$, онда центар масе целог система припада дужи AP . С друге стране, како је Q центар масе $\{(A, pq), (C, p)\}$, онда центар масе целог система припада дужи BQ . Из ова два закључујемо да је центар масе у пресеку правих AP и BQ . Како су по претпоставци те две праве конкурентне са CR , то је R центар масе система $\{(A, pq), (B, 1)\}$, па је одатле

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{1}{pq}.$$

Из свих добијених односа, долазимо до

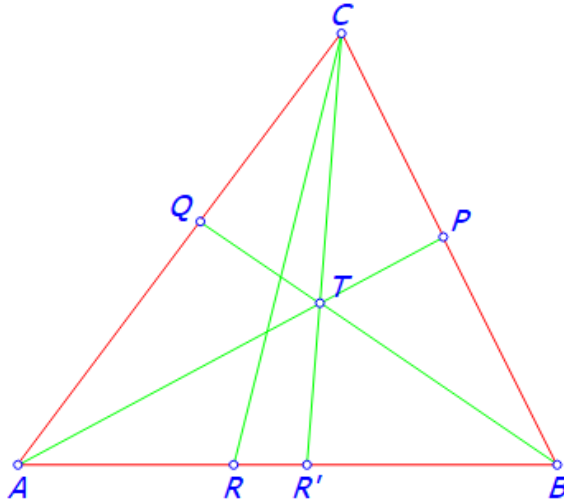
$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{1}{pq} \cdot p \cdot q = 1.$$

Нека су сада праве AP, BQ, CR паралелне (слика горе десно). По Телесовој теореме $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{BC}}$ и $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PB}}$. Заменом ових једнакости у тражени производ, добија се:

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{PB}} = 1.$$

$\Rightarrow$: Праве AP и BQ могу да се секу или буду паралелне.

Нека се AP и BQ секу. Претпоставимо супротно, тј. CR није конкурентна са њима. Онда постоји нека тачка $R' \neq R$ таква да $R' \in AB$ и $T \in CR'$, где је $\{T\} = AP \cap BQ$.



Слика 13: Чевина теорема 2.

Одавде је јасно да су AP, BQ, CR' конкуренте. Онда је за њих задовољен претходан смер теореме, па важи

$$\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1.$$

Такође, по претпоставци овог смера је

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1.$$

Из ова два је

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}},$$

а како обе тачке $R, R' \in AB$, то су оне једнаке што је у контрадикцији са дефиницијом тачке R' .

Нека су AP и BQ паралелне. Претпоставимо супротно да права CR није паралелна са њима. Онда на пример за CR и BQ важи претходни случај права које се секу, па се и AP сече са њима што је у контрадикцији са паралелношћу правих AP и BQ .

Овим је доказ завршен. $\square$

Менелајева теорема даје неопходан и довољан аналитички услов да тачке са правих које одређују странице троугла буду колинеарне.

Теорема 1.33. (Менелај)

Нека тачке P, Q, R припадају страницама BC, AC, AB троугла ABC , редом. Тада $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$ ако и само ако су тачке P, Q, R колинеарне.

Доказ:

$\Leftarrow$: Претпоставимо да су тачке P, Q, R колинеарне и да припадају правој p . Права p може сећи две странице троугла и продужетак треће или продужетке све три странице троугла. Који год да је од ова два случаја, доказ изводимо на исти начин. Уведимо следеће ознаке

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = r, \quad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = p,$$

па посматрајмо систем материјалних тачака

$$\{(A, 1), (B, r), (P, -r(1 + p))\}$$

и одредимо његов центар масе на два начина.

Прво, центар масе система $\{(A, 1), (B, r)\}$ је R јер је $r \cdot \overrightarrow{RB} + 1 \cdot \overrightarrow{RA} = \vec{0}$ на основу дефиниције броја r . Одатле закључујемо да центар масе посматраног система припада правој RP .

Друго, центар масе система $\{(B, r), (P, -r(1 + p))\}$ је C јер је

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} = \frac{\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -1 - \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1 - p = \frac{-r(1 + p)}{r}.$$

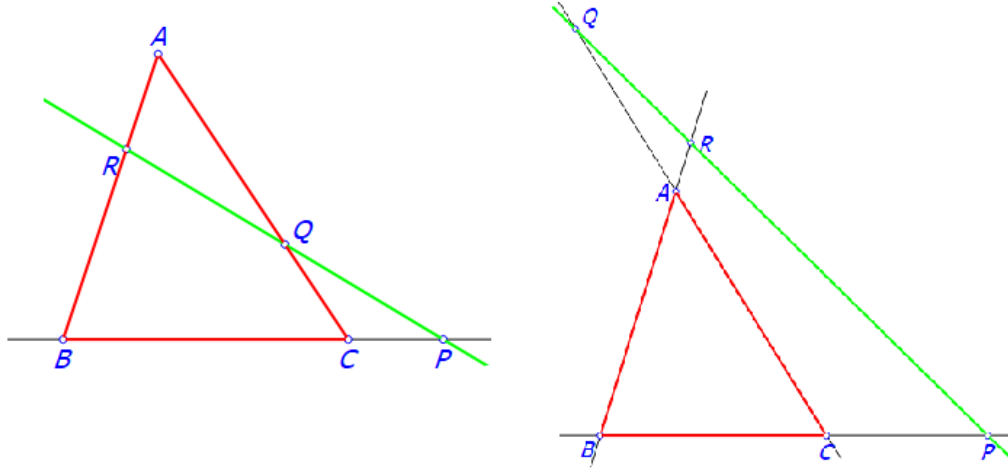
Одатле закључујемо да центар масе посматраног система припада правој AC . Из два добијена закључка, изводимо и тај да је центар масе баш $PR \cap AC$, а то је управо тачка Q по претпоставци овог смера. Дакле, Q је и центар масе система $\{(A, 1), (C, -pr)\}$, одакле добијамо

$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{1}{-pr}.$$

Најзад, простом заменом добијамо да је

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = r \cdot p \cdot \frac{1}{-pr} = -1,$$

што је требало доказати.



Слика 14: Менелајева теорема

$\Rightarrow$: Претпоставимо супротно, тј. тачке P, Q, R нису колинеарне. Онда постоји нека тачка $R' \neq R$ таква да $R' \in AB$ и P, Q, R' су колинеарне, па је за ове три тачке задовољен претходан смер теореме одакле је

$$\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1.$$

Такође, по претпоставци овог смера је

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1.$$

Из ова два је

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}},$$

а како обе тачке $R, R' \in AB$, то су оне једнаке што је у контрадикцији са дефиницијом тачке R' .

Овим је доказ завршен. $\square$

Најпре наводимо последице Менелајеве теореме, исто значајне резултате са великом применом у еуклидској геометрији.

Лема 1.34. *Нека су P, Q, R тачке пресека страница BC, CA, AB са тангентама на круг описан око троугла ABC у тачкама A, B, C . Докажи да су P, Q, R колинеарне тачке.*

Доказ: По Менелајевој теореме је довољно показати

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1.$$

Означимо најпре са A_1, B_1, C_1 пресеке тангенти кроз B и C , A и C , A и B , редом. Применом Менелајеве теореме на троуглове CA_1B , CB_1A , AC_1B и колинеарне тачке $P - B_1 - C_1$, $C_1 - A_1 - Q$, $R - B_1 - A_1$ добијамо редом

$$\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A_1}} \frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B_1}} \frac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C_1}} \frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

Множењем ове три једнакости добија се

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A_1}} \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = -1,$$

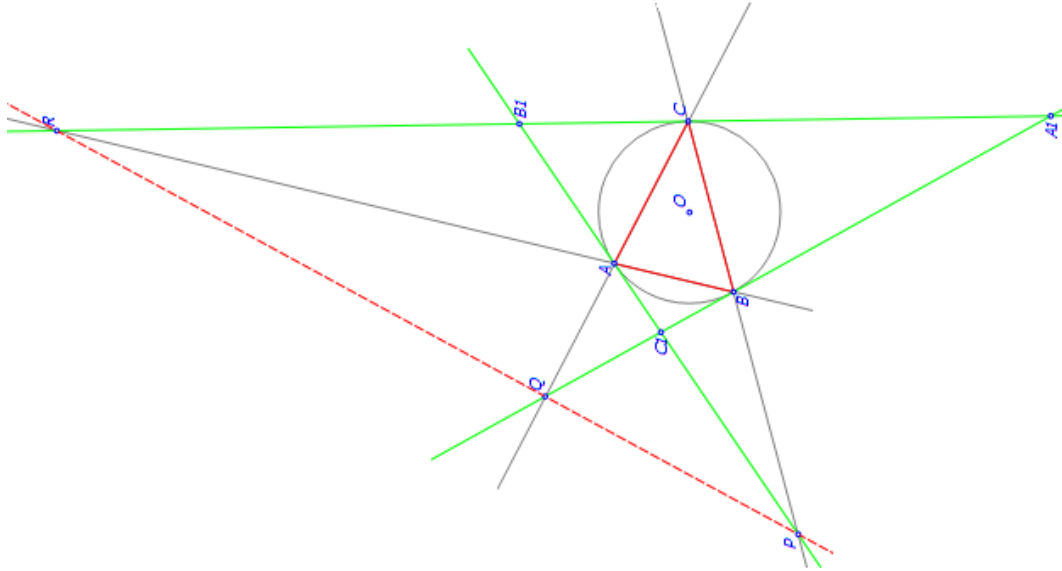
па је за завршетак доказа још потребно показати да је

$$\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = 1.$$

То ће по Чевиној теореме важити ако су AA_1, BB_1, CC_1 конкурентне праве. Њихову конкурентност ћемо показати методом одређивања центра масе. Посматрајмо следећи систем материјалних тачака $\{(A_1, \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma), (B_1, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma), (C_1, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)\}$, где су α, β, γ унутрашњи углови стандардно означеног троугла ABC . Како је центар масе система $\{(B_1, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma), (C_1, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)\}$ тачка A , то центар масе почетног система припада правој AA_1 . Аналогно се показује да центар масе припада и правима BB_1 и CC_1 , те су оне конкурентне (видети слику испод).

Приметимо да коришћење уведеног система материјалних тачака није могуће у случају правоуглог троугла, али је овде тај део доказа заправо тривијалан. Наиме, у правоуглом троуглу ABC , са хипотенузом AB центар описане кружнице је

средиште од AB , па су тангенте на ову кружницу у тачкама A и B паралелне, тј. секу се у бесконачној тачки која је колинеарна са две произвољне у овом моделу. $\square$



Слика 15: Лема 1.34.

Примедба 1.35. Приметимо да је претходна лема специјалан случај познате Паскалове теореме из пројективне геометрије, примењене на тротеменик и круг. Подсетимо, Паскалова теорема гласи: Ако је шестотеменик $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ уписан у овалну криву, тада су тачке добијене пресецањем правих A_1B_2 са A_2B_1 , A_1B_3 са A_3B_1 и A_2B_3 са A_3B_2 колинеарне.

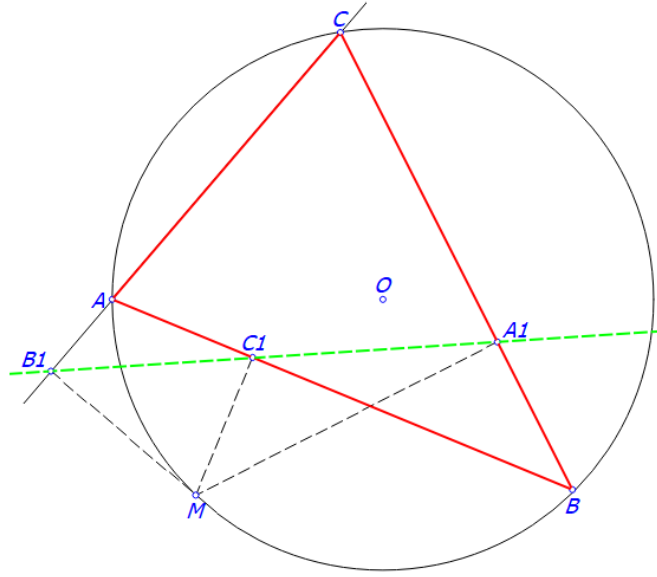
Лема 1.36. (Симсон)

Ако је M тачка са описане кружнице троугла ABC различита од темена, докажи да подножја нормала из M на BC, CA, AB припадају једној правој (тзв. Симсонова права).

Доказ: Већ смо доказали ово тврђење(и више од тога). Сада ћемо доказ извести на други начин, служећи се Менелајевом теоремом.

Без умањења општости, претпоставимо да је M тачка на кружном луку AB који не садржи C . Ако означимо подножја нормала из M на BC, CA, AB са A_1, B_1, C_1 , редом, по Менелајевој теореме је довољно доказати

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$



Слика 16: Симсонова права

Уведимо следеће ознаке: $\alpha_1 = \angle MBC_1$, $\beta_1 = \angle MBC$, $\gamma_1 = \angle BCM$. Приметимо да је $\angle MCA = \alpha_1$ и $\angle MAB = \gamma_1$ због једнакости периферијских углова над истим кружним луком, као и да је $\angle MAC = 180^\circ - \beta_1$ због тетивности четвороугла $BCAM$. Одавде је и $\angle B_1AM = \beta_1$. Најпре, из троуглова A_1CM и A_1BM је редом

$$A_1C = \operatorname{ctg} \gamma_1 A_1M, \quad A_1B = \operatorname{ctg} \beta_1 A_1M,$$

па је

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\operatorname{ctg} \gamma_1},$$

или другим речима A_1 је центар масе система $\{(B, \operatorname{ctg} \gamma_1), (C, \operatorname{ctg} \beta_1)\}$. Даље, из троуглова AMC_1 и BMC_1 је редом

$$AC_1 = \operatorname{ctg} \gamma_1 MC_1, \quad BC_1 = \operatorname{ctg} \alpha_1 MC_1,$$

па је

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\operatorname{ctg} \alpha_1},$$

тј. C_1 центар масе система $\{(B, \operatorname{ctg} \gamma_1), (A, \operatorname{ctg} \alpha_1)\}$. Најзад, из троуглова B_1CM и B_1AM је редом

$$B_1C = \operatorname{ctg} \alpha_1 MB_1, \quad B_1A = \operatorname{ctg} \beta_1 MB_1,$$

па је

$$\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{\operatorname{ctg} \beta_1},$$

тј. B_1 центар масе система $\{(A, \operatorname{ctg} \alpha_1), (C, -\operatorname{ctg} \beta_1)\}$. Производ добијена три ко-личника је заиста -1 , чиме доказујемо тражену колинеарност подножја нормала. $\square$

Лема 1.37. (*Гаус*)

Ако се праве AB и CD секу у тачки E , а AD и BC секу у F (тј. четвороугао $ABCD$ није трапез), онда средишта дужи AC, BD, EF припадају једној правој (тзв. Гаусова права).

Доказ: Како су тачке E, D, C колинеарне и припадају правама на којима леже странице троугла ABF , то по Менелају важи

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CF}} \cdot \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{DA}} = -1.$$

Такође, како су тачке B, C, F колинеарне и припадају правама на којима леже странице троугла EAD , то по Менелају важи

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BE}} \cdot \frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{CD}} \cdot \frac{\overrightarrow{DF}}{\overrightarrow{FA}} = -1.$$

Уведимо ознаке $\alpha = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}}$ и $\beta = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CF}}$ и одредимо још неке од горњих количника.

Јасно је да је

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{DA}} &= \frac{-1}{\alpha\beta}, \\ \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BE}} &= \frac{\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EB}} = -(\alpha + 1), \\ \frac{\overrightarrow{DF}}{\overrightarrow{FA}} &= \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}} = \frac{1}{\alpha\beta - 1}. \end{aligned}$$

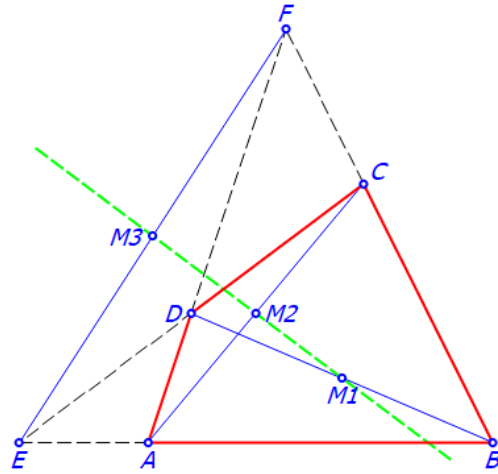
Посматрајмо систем материјалних тачака $\{(A, 1), (C, 1)\}$ и одредимо његов центар масе на два начина.

Најпре, тривијално је центар масе система средиште дужи AC . $\heartsuit$

На други начин ћемо до центра масе доћи тако што масу придружену тачки C распоредимо у B и F , а из A у B, E, D, F . Наиме, како је $\beta = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CF}}$, то тачкама B и F доделимо масе $\frac{1}{1+\beta}$ и $\frac{\beta}{1+\beta}$ пренете из C , тако да у C не остане ништа. Даље, масу 1 из A најпре поделимо на a и $1-a$, где је a неки број који ћемо касније адекватно изабрати. Онда, како је $-(1+\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BE}}$, то тачкама B и E доделимо масе $-\alpha a$ и $(\alpha+1)a$ и како је $\frac{-1}{\alpha\beta} = \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{DA}}$, то тачкама D и F доделимо масе $(1-\alpha\beta)(1-a)$ и $\alpha\beta(1-a)$, све пренето из A , тако да ни у A не остане ништа. Најзад, добијамо

$\{(A, 0), (C, 0), (B, \frac{1}{1+\beta} - \alpha a), (E, (\alpha + 1)a), (D, (1 - \alpha\beta)(1 - a)), (F, \frac{\beta}{1+\beta} + \alpha\beta(1 - a))\}$ систем материјалних тачака. Сада изаберемо a тако да масе придружене тачкама E и F буду једнаке. Након краћег рачуна, добијамо да је $a = \frac{\beta}{1+\beta}$. Када ту вредност за a уврстимо у масе придружене тачкама B и D , испоставиће се да су оне једнаке и износе $\frac{1-\alpha\beta}{1+\beta}$. Дакле, центар масе целог система припада правој која пролази кроз центре дужи EF и BD . ♣

Најзад, из ♡ и ♣ изводимо тврђење. □



Слика 17: Гаусова права

Лема 1.38. (Панос)

Нека су тачке A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 са правих a и b , редом.

Тада се праве $A_i B_j, i \neq j$ секу у колинеарним тачкама.

Доказ: Уведимо ознаке

$$C_1 = A_2 B_3 \cap A_3 B_2, \quad C_2 = A_1 B_3 \cap A_3 B_1, \quad C_3 = A_1 B_2 \cap A_2 B_1,$$

$$X = A_3 B_1 \cap A_1 B_2, \quad Y = A_3 B_1 \cap A_2 B_3, \quad Z = A_1 B_2 \cap A_2 B_3.$$

Применом Менелајеве теореме на троугао XYZ и колинеарне $C_3 - C_2 - C_1$, да бисмо дошли до тврђења, довољно је показати да важи

$$\frac{\overrightarrow{ZC_3}}{\overrightarrow{C_3X}} \cdot \frac{\overrightarrow{XC_2}}{\overrightarrow{C_2Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC_1}}{\overrightarrow{C_1Z}} = -1.$$

Најпре ћемо применити Менелаја на колинеране тројке $A_1 - C_2 - B_3$, $B_1 - C_3 - A_2$, $A_3 - C_1 - B_2$ и троугао XYZ , такође. Одатле добијамо редом:

$$\frac{\overrightarrow{XC_2}}{\overrightarrow{C_2Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YB_3}}{\overrightarrow{B_3Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA_1}}{\overrightarrow{A_1X}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{XB_1}}{\overrightarrow{B_1Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YA_2}}{\overrightarrow{A_2Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZC_3}}{\overrightarrow{C_3X}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{XA_3}}{\overrightarrow{A_3Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC_1}}{\overrightarrow{C_1Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB_2}}{\overrightarrow{B_2X}} = -1.$$

Множењем претходне три једнакости добијамо:

$$\frac{\overrightarrow{XC_2}}{\overrightarrow{C_2Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YB_3}}{\overrightarrow{B_3Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA_1}}{\overrightarrow{A_1X}} \cdot \frac{\overrightarrow{XB_1}}{\overrightarrow{B_1Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YA_2}}{\overrightarrow{A_2Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZC_3}}{\overrightarrow{C_3X}} \cdot \frac{\overrightarrow{XA_3}}{\overrightarrow{A_3Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC_1}}{\overrightarrow{C_1Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB_2}}{\overrightarrow{B_2X}} = -1. \heartsuit$$

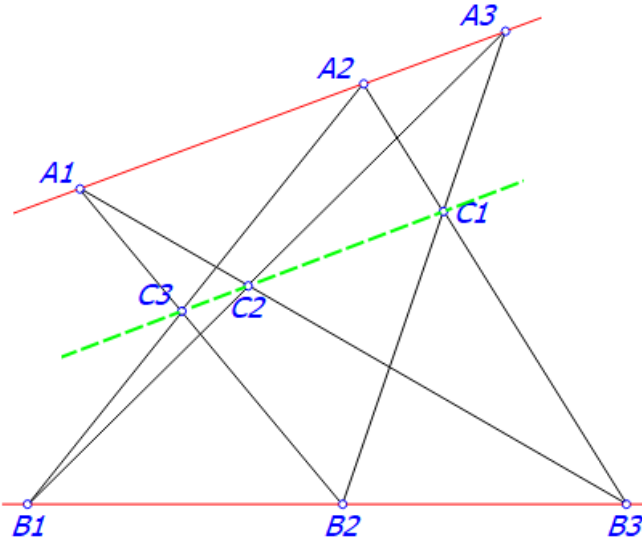
Како, такође на основу Менелајеве теореме примењене на троугао XYZ и колинеарне $A_1 - A_2 - A_3$ и $B_1 - B_2 - B_3$ важи

$$\frac{\overrightarrow{XA_1}}{\overrightarrow{A_1Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA_2}}{\overrightarrow{A_2Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YA_3}}{\overrightarrow{A_3X}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{XB_1}}{\overrightarrow{B_1Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YB_3}}{\overrightarrow{B_3Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB_2}}{\overrightarrow{B_2X}} = -1,$$

онда из $\heartsuit$ добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZC_3}}{\overrightarrow{C_3X}} \cdot \frac{\overrightarrow{XC_2}}{\overrightarrow{C_2Y}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC_1}}{\overrightarrow{C_1Z}} = -1$$

што је и требало показати. $\square$



Слика 18: Папосова теорема

Лема 1.39. (Дезарг)

Ако темена троугла припадају правама једног снопа, тада се њихове странице секу у колинеарним тачкама. Тј. ако су ABC и $A_1B_1C_1$ троуглови такви да су AA_1, BB_1, CC_1 праве једног снопа, онда су тачке $BC \cap B_1C_1 = \{X\}$, $AC \cap A_1C_1 = \{Y\}$ и $AB \cap A_1B_1 = \{Z\}$ колинеарне.

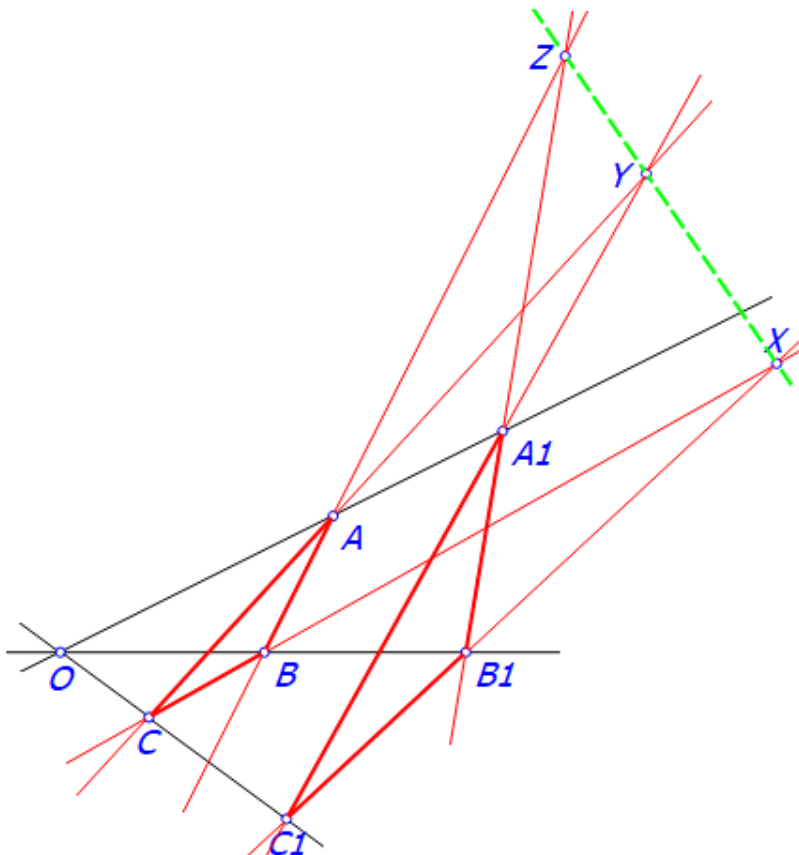
Доказ: Применом Менелајеве теореме на троугао ABC , да бисмо дошли до тврђења, довољно је показати да важи

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1.$$

Применом Менелаја на колинеране тројке $Z - B_1 - A_1$, $X - B_1 - C_1$, $Y - A_1 - C_1$ и троуглове OAB , OBC , OAC добијамо редом:

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{A_1A}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{B_1B}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC_1}}{\overrightarrow{C_1C}} = -1.$$

Множењем претходне три једнакости и краћењем добијамо баш оно што смо желе-
ли. $\square$



Слика 19: Дезаргова теорема

Најзад, илуструјмо неке примене Чевине теореме.

Пример 1.40. Докажи да су следеће дужи у троуглу конкурентне:

1. тежишне дужи;
2. висине;
3. симетрале углова;
4. дужи које спајају теме са тачком додира наспрамне стране и уписаног круга;

5. *дужи које спајају теме са тачком додира наспрамне странице и споља приписаног круга;*

Приметимо да смо претходно тврђење већ показали, али сада ћемо доказ извести користећи се Чевином теоремом. Уведимо ознаке

$$k = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}, \quad l = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}, \quad m = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}},$$

где су P, Q, R тачке које ћемо за сваки пример посебно дефинисати. Дакле, циљ је добити $klm = 1$.

1. У случају тежишних линија, важи $k = l = m = 1$ јер су P, Q, R средишта страница, па је услов задовољен.
2. Код висина, са P, Q, R означимо подножја висина из темена A, B, C на наспрамне странице редом. Тада је јасно да важи

$$AR = b \cdot \cos \alpha, \quad RB = a \cdot \cos \beta, \quad AQ = c \cdot \cos \alpha,$$

$$QC = a \cdot \cos \gamma, \quad CP = b \cdot \cos \gamma, \quad PB = c \cdot \cos \beta.$$

Одавде се лако добија да је $klm = 1$. Приметимо да су поменути количници добро дефинисани сем у случају правоуглог троугла, а како све његове висине садрже теме правог угла, то су оне тривијално конкурентне.

3. Најзад, случај симетрала углова ћемо показати на два начина. Пре тога напоменимо да су овде P, Q, R пресеци симетрала углова код A, B, C са наспрамним страницама. Најпре, како је

$$P_{\triangle APC} = \frac{1}{2}bAP \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bCP \sin \gamma, \quad P_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}cAP \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}cBP \sin \beta,$$

то је

$$CP = \frac{AP \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \gamma}, \quad BP = \frac{AP \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta},$$

па је

$$l = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Аналогно се добија и

$$k = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad m = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma},$$

па је $klm = 1$ што смо и желели да покажемо.

За други начин доказивања користимо се особином симетрале угла да су све њене тачке на једнакој удаљености од кракова угла. Означимо са x растојање тачке P од страница c и b . Како је

$$\sin \gamma = \frac{x}{CP}, \quad \sin \beta = \frac{x}{PB},$$

то је

$$l = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Аналогним поступком добијамо и k и m , те да је $klm = 1$.

4. Означимо додирне тачке уписане кружнице и страница BC, AC, AB редом са P, Q, R . Због дужина тангентних дужи на уписану кружницу које смо раније рачунали долазимо до следећих вредности за

$$k = \frac{s-a}{s-b}, \quad l = \frac{s-b}{s-c}, \quad m = \frac{s-c}{s-a}.$$

Одавде је јасно да је $klm = 1$.

5. Означимо додирне тачке приписаних кружница и страница BC, AC, AB редом са P, Q, R . Због дужина тангентних дужи на приписане кружнице које смо раније рачунали долазимо до следећих вредности за

$$k = \frac{s-b}{s-a}, \quad l = \frac{s-c}{s-b}, \quad m = \frac{s-a}{s-c}.$$

Одавде је јасно да је $klm = 1$. $\triangle$

2 Лајбницова функција

2.1 Основне дефиниције и својства

Разматраћемо систем од n тачака $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^k$ којима су респективно придружени бројеви $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, и над њим дефинисати две функције, једну векторску, а другу скаларну.

Дефиниција 2.1. *Лајбницова векторска функција је пресликавање $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ такво да је*

$$f(P) = \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n}$$

за $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^k$.

Дефиниција 2.2. *Лајбницова скаларна функција је пресликавање $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ такво да је*

$$\psi(P) = \alpha_1 |PA_1|^2 + \dots + \alpha_n |PA_n|^2$$

за $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^k$.

Примедба 2.3. У претходној дефиницији је са $|PA_i|$ означена дужина вектора $\overrightarrow{PA_i}$. У наставку ћемо користити једноставно PA_i .

Теорема 2.4. *(Лајбниц)*

Нека су $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^k$, f, ψ Лајбницова векторска и скаларна функција, редом, $P, Q \in \mathbb{R}^k$ произвољне тачке.

Тада:

1. $f(P) = f(Q) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{PQ}$;
2. $\psi(P) = \psi(Q) + 2 \overrightarrow{PQ} \cdot f(Q) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) PQ^2$;
3. ако је $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, онда је f константна функција, а ако је $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, онда је f бијекција;
4. ако је $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ и C је центар масе $\{(A_i, \alpha_i) | i = \overline{1, n}, A_i \in \mathbb{R}^k, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ система материјалних тачака, онда је $\psi(P) = \psi(C) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) PC^2$ и $f(X) = 0 \Leftrightarrow X \equiv C$.

Доказ:

1.

$$\begin{aligned} f(P) &= \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_1}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_n}) \\ &= \alpha_1 \overrightarrow{QA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{QA_n} + \overrightarrow{PQ} (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \\ &= f(Q) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{PQ}; \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\psi(P) &= \alpha_1 PA_1^2 + \dots + \alpha_n PA_n^2 \\
&= \alpha_1 (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_1})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_n})^2 \\
&= \alpha_1 (PQ^2 + 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QA_1} + QA_1^2) + \dots + \alpha_n (PQ^2 + 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QA_n} + QA_n^2) \\
&= PQ^2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) + 2\overrightarrow{PQ} \cdot (\alpha_1 \overrightarrow{QA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{QA_n}) + \alpha_1 QA_1^2 + \dots + \alpha_n QA_n^2 \\
&= \psi(Q) + 2\overrightarrow{PQ} \cdot f(Q) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)PQ^2;
\end{aligned}$$

3. нека су $P, Q \in \mathbb{R}^k$ произвољне тачке. Ако је $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, онда из 1. добијамо $f(P) = f(Q)$. Одатле је јасно да је f константна функција. Ако је $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, онда, с једне стране, како је

$$f(X) = \alpha_1 \overrightarrow{XA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{XA_n} = \overrightarrow{x},$$

то за сваку тачку $X \in \mathbb{R}^k$ постоји јединствени вектор $\overrightarrow{x}$ тако да је $f(X) = \overrightarrow{x}$. С друге стране, из 1. је

$$f(X) = f(O) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{XO} = \overrightarrow{x},$$

$$\overrightarrow{OX} = \frac{f(O) - \overrightarrow{x}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$$

за произвољну тачку O . Одавде закључујемо да је сваки вектор $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^k$ слика само једне тачке $X \in \mathbb{R}^k$. Из свега поменутог је јасно да је функција f бијекција;

4. како је за $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, f бијекција, то постоји јединствена тачка $C \in \mathbb{R}^k$ таква да је $f(C) = \overrightarrow{0}$, тј.

$$\alpha_1 \overrightarrow{CA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{CA_n} = \overrightarrow{0},$$

што је дефиниција центра масе система материјалних тачака $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i=1}^n$, па је

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow X \equiv C.$$

Даље, ако у 2. уместо Q ставимо центар масе C и искористимо претходно доказано, добијамо

$$\psi(P) = \psi(C) + 2\overrightarrow{PC} \cdot f(C) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)PC^2 = \psi(C) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)PC^2,$$

што је требало доказати. $\square$

Примедба 2.5. У делу 2. Лајбнице теореме је $sa \cdot$ означено скаларно множење вектора.

Из претходне теореме уочавамо блиску везу појма центра масе и Лајбницове функције, односно могућност употребе Лајбницове функције при добијању резултата који говоре о центру масе одговарајућег система. У томе се крије разлог проучавања Лајбницове функције у овом раду.

Сада ћемо посматрати три колинеарне тачке и четврту ван праве коју оне одређују, па наћи везу између квадрата растојања четврте од прве три тачке. Ово је тзв.Стјуартово тврђење и природно произилази из Лајбницове теореме јер је реч о квадратима растојања који фигуришу у дефиницији Лајбницове скаларне функције.

Лема 2.6. (*Стјуарт*)

Нека важи распоред тачака $A - B - C$ и нека је $AB = m$, $BC = n$, P произвољна тачка. Тада је $nPA^2 + mPC^2 = (n + m)(PB^2 + nm)$.

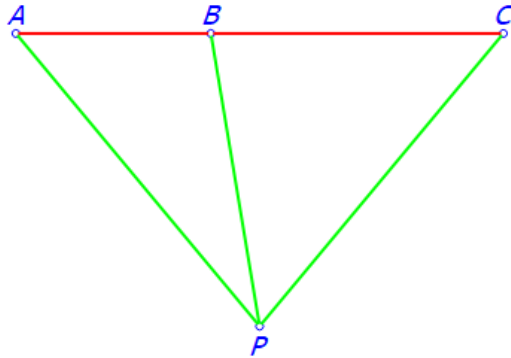
Доказ: Како је

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{m}{n},$$

тј.

$$n\overrightarrow{BA} + m\overrightarrow{BC} = \vec{0},$$

то је B центар масе система $\{(A, n), (C, m)\}$.



Слика 20: Стјуартова лема

Сада, применом дела 3. теореме 2.4 на систем $\{(A, n), (C, m), (B, -n - m)\}$ масе 0, закључујемо да је Лајбницова векторска функција f овог система константна. Дале, из

$$f(A) = n\overrightarrow{AA} + m\overrightarrow{AC} - (n + m)\overrightarrow{AB} = \vec{e}(0 + m(m + n) - (n + m)m) = \vec{0}$$

је јасно да је $f \equiv \vec{0}$. Из дела 2. теореме 2.4 је

$$\psi(P) = \psi(A) + 2\vec{PA} \cdot f(A) + (n + m - n - m)PA^2 = \psi(A),$$

тј.

$$nPA^2 + mPC^2 - (n + m)PB^2 = nAA^2 + mAC^2 - (n + m)AB^2.$$

Одавде је

$$\begin{aligned} nPA^2 + mPC^2 &= m(n + m)^2 - (n + m)m^2 + (n + m)PB^2 \\ &= m(n + m)(m + n - m) + (n + m)PB^2 \\ &= (n + m)(mn + PB^2) \end{aligned}$$

што је требало доказати. $\square$

2.2 Примери примене Лајбницеve функције

Примену дефинисаних функција и њихових својстава ћемо илустровати кроз примере.

Најпре ћемо пронаћи геометријско место тачака за које је линеарна комбинација квадрата растојања од n фиксираних тачака са фиксираним коефицијентима константна.

Пример 2.7. Нека су $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$, $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^k$ и $l \in \mathbb{R}$. Одредимо геометријско место тачака $P \in \mathbb{R}^2$ таквих да је

$$\alpha_1 PA_1^2 + \dots + \alpha_n PA_n^2 = l.$$

Нека је C центар масе система материјалних тачака $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i=1}^n$. Из дела 4. теореме 2.4 је

$$\psi(P) = \psi(C) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)PC^2,$$

тј.

$$\alpha_1 PA_1^2 + \dots + \alpha_n PA_n^2 = \alpha_1 CA_1^2 + \dots + \alpha_n CA_n^2 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)PC^2.$$

Ово можемо записати као

$$l = d + \alpha PC^2,$$

где је $\alpha_1 CA_1^2 + \dots + \alpha_n CA_n^2 = d = \text{const}$ због јединствености центра масе, а $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Најзад је

$$PC^2 = \frac{l - d}{\alpha}.$$

Одавде је тражено геометријско место:

1. круг са центром C и полупречником $\sqrt{\frac{l-d}{\alpha}}$ ако је $\frac{l-d}{\alpha} > 0$;
2. тачка C ако је $\frac{l-d}{\alpha} = 0$;
3. $\emptyset$ ако је $\frac{l-d}{\alpha} < 0$. $\triangle$

У наредном примеру ћемо наћи геометријско место тачака за које је збир квадрата растојања од фиксираних тачака константан, али у случају да једна од тих фиксираних тачака припада траженом геометријском месту.

Пример 2.8. У равни су дате тачке $A_1, \dots, A_n$. Одредимо геометријско место тачака у равни које садржи тачку A_1 и чији је збир квадрата растојања од датих тачака константан.

Тачка $P \in \mathbb{R}^2$ припада геометријском месту које тражимо ако је

$$PA_1^2 + \dots + PA_n^2 = l.$$

Аналогно претходном примеру, добијамо

$$PA_1^2 + \dots + PA_n^2 = CA_1^2 + \dots + CA_n^2 + nPC^2,$$

што се може записати као

$$l = d + nPC^2,$$

где је $CA_1^2 + \dots + CA_n^2 = d = \text{const.}$ Јасно је да је $l > d$, а како је $n > 0$, закључујемо да је тражено геометријско место $k(C, A_1C)$ јер он садржи тачку A_1 . $\triangle$

Наредни примери показују неке познате везе основних елемената троугла, које су непосредне последице особина Лајбницове функције.

Пример 2.9. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB и T тежиште троугла ABC . Покажимо да је тада:

1. $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$;
2. $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$;
3. $AT^2 + BT^2 + CT^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Наиме,

1. Применом леме 2.6 на тачке A, B, C, A_1 и користећи да је A_1 средиште дужи BC , добијамо

$$\begin{aligned} BC \cdot AA_1^2 - A_1B \cdot AC^2 - A_1C \cdot AB^2 &= -A_1C \cdot A_1B \cdot BC \\ BC \cdot AA_1^2 &= -\frac{1}{4}BC^3 + \frac{1}{2}BC \cdot AB^2 + \frac{1}{2}BC \cdot AC^2 \\ AA_1^2 &= \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2); \end{aligned}$$

2. на основу дела под 1. је

$$\begin{aligned} AA_1^2 &= \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) \\ BB_1^2 &= \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) \\ CC_1^2 &= \frac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2) \end{aligned}$$

Сабирањем ових једнакости, добијамо тражено тврђење;

3. на основу дела под 2. овог примера и 1.13, добијамо

$$\begin{aligned} AT^2 + BT^2 + CT^2 &= \frac{4}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2) \\ &= \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2). \triangle \end{aligned}$$

Пример 2.10. Нека су H, T, O, E редом ортоцентар, тежиште, центар описаног круга и центар Ојлеровог круга, а R полупречник описане кружнице троугла ABC . Покажимо да је тада:

1. $OT^2 = R^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2);$
2. $OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2);$
3. $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 3R^2 + OH^2;$
4. $AE^2 + BE^2 + CE^2 = 3R^2 - \frac{1}{4}OH^2.$

Наиме,

1. Применом дела 4. теореме 2.4 на тежиште T и примера 2.9 добијамо

$$\begin{aligned}\psi(O) &= \psi(T) + 3OT^2 \\ OA^2 + OB^2 + OC^2 &= AT^2 + BT^2 + CT^2 + 3OT^2 \\ OT^2 &= \frac{1}{3}(3R^2 - (AT^2 + BT^2 + CT^2)) \\ OT^2 &= R^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2);\end{aligned}$$

2. применом претходно доказаног, добијамо

$$9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9 \cdot \left(R^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)\right) = 9OT^2.$$

Још треба доказати да је

$$OH^2 = 9OT^2,$$

тј.

$$OH = 3OT.$$

То је јасно из својства Ојлерове праве $H - T - O$ и T дели HO у односу $2 : 1$;

3. применом дела 4. теореме 2.4, примера 2.9, претходно доказаног и својства Ојлерове праве да важи

$$H - E - T - O, HT : TO = 2 : 1, HE = EO,$$

добијамо следећи низ једнакости:

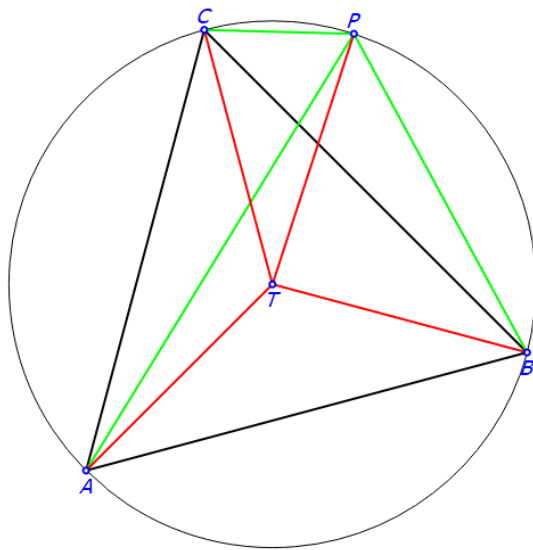
$$\begin{aligned}AH^2 + BH^2 + CH^2 &= \psi(H) = \psi(T) + 3HT^2 \\ &= AT^2 + BT^2 + CT^2 + 3 \cdot \frac{4}{9}OH^2 \\ &= \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2) + \frac{4}{3}OH^2 \\ &= \frac{1}{3}(9R^2 - OH^2) + \frac{4}{3}OH^2 \\ &= 3R^2 + OH^2;\end{aligned}$$

4. слично претходном делу, закључујемо да је:

$$\begin{aligned}AE^2 + BE^2 + CE^2 &= \psi(E) = \psi(T) + 3TE^2 \\ &= AT^2 + BT^2 + CT^2 + 3 \cdot \frac{1}{36}OH^2 \\ &= \frac{1}{3}(9R^2 - OH^2) + \frac{1}{12}OH^2 \\ &= 3R^2 - \frac{1}{4}OH^2. \triangle\end{aligned}$$

Наредни примери илуструју примену Лајбницевој теореме на троугао, четвороугао и петоугао.

Пример 2.11. *Ако тачка P припада описаној кружници око једнакостарничног троугла ABC , тада је $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2AB^2$.*



Слика 21: Једнакостранични троугао, описана кружница и тежиште

Применом дела 4. теореме 2.4 на систем материјалних тачака $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ чији је центар масе T , добијамо

$$\psi(P) = \psi(T) + 3PT^2,$$

тј.

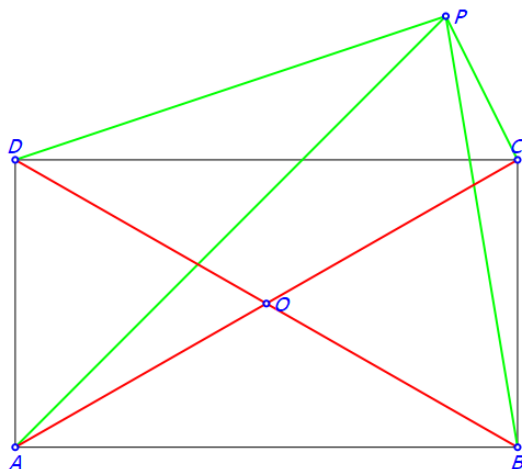
$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= AT^2 + BT^2 + CT^2 + 3PT^2 \\ &= 6R^2 = 6\left(\frac{AB\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2AB^2. \triangle \end{aligned}$$

Пример 2.12. *Ако је P тачка из равни правоугаоника $ABCD$, тада је $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.*

Применом дела 4. теореме 2.4 на системе материјалних тачака $\{(A, 1), (C, 1)\}$ и $\{(B, 1), (D, 1)\}$ чији је центар масе у пресеку дијагонала O , добијамо редом

$$PA^2 + PC^2 = OA^2 + OC^2 + 2PO^2,$$

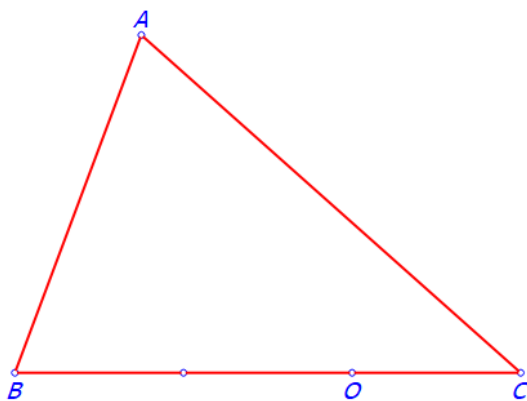
$$PB^2 + PD^2 = OB^2 + OD^2 + 2PO^2.$$



Слика 22: Правоугаоник

Сабирањем ове две једнакости заиста добијамо $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. $\triangle$

Пример 2.13. Ако је O тачка са странеце BC троугла ABC таква да је $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OC}$, тада је $AB^2 + 2AC^2 = 3AO^2 + 6CO^2$.



Слика 23: Једна тачка на страници троугла

Из $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OC}$ је O центар масе система $\{(B, 1), (C, 2)\}$. Применимо на тај систем 4. део теореме 2.4. Добијамо

$$\psi(A) = \psi(O) + 3OA^2,$$

тј.

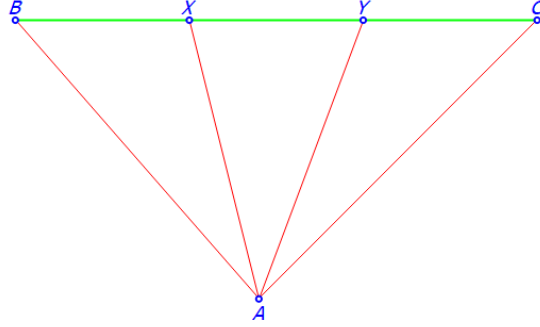
$$AB^2 + 2AC^2 = OB^2 + 2OC^2 + 3OA^2.$$

Најзад, из

$$BO^2 = 4OC^2,$$

долазимо до $AB^2 + 2AC^2 = 3AO^2 + 6CO^2$. $\triangle$

Пример 2.14. Дат је троугао ABC . Ако су $X, Y \in BC$ такве да важи распоред тачака $B-X-Y-C$ и $BX = XY = YC$, онда је $AB^2 + AC^2 = AX^2 + AY^2 + 4XY^2$.



Слика 24: Две тачке на страници троугла

Како је X средиште дужи BY , из 4. дела теореме 2.4, добијамо

$$AB^2 + AY^2 = XB^2 + XY^2 + 2AX^2,$$

тј.

$$AB^2 + AY^2 = 2XY^2 + 2AX^2. \heartsuit$$

С друге стране, како је Y средиште дужи XC , на исти начин је

$$AX^2 + AC^2 = YX^2 + YC^2 + 2AY^2,$$

тј.

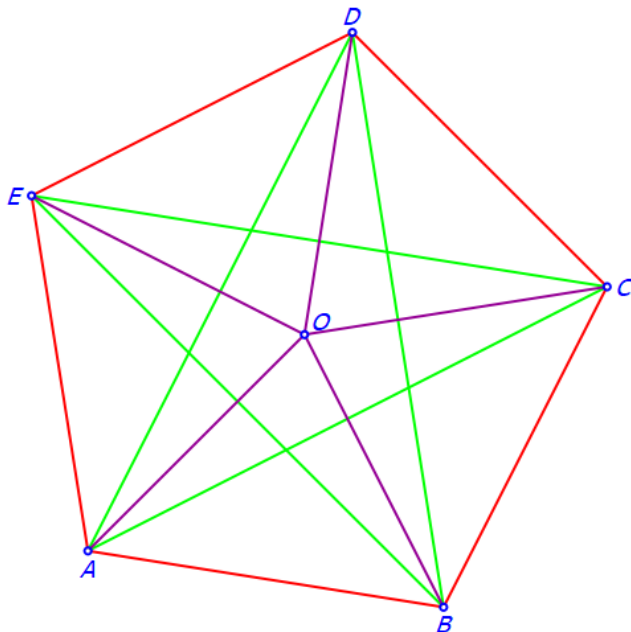
$$AX^2 + AC^2 = 2XY^2 + 2AY^2. \clubsuit$$

Сабирањем једнакости $\heartsuit$ и $\clubsuit$ добијамо тражену једнакост. $\triangle$

Пример 2.15. Ако је O центар правилног петоугла $ABCDE$, тада је $AB^2 + AC^2 = 5OA^2$.

Тачка O је тежиште правилног петоугла, па је из 4. дела теореме 2.4 јасно

$$\psi(D) = \psi(O) + 5OD^2,$$



Слика 25: Правилан петоугао

тј.

$$DA^2 + DB^2 + DC^2 + DD^2 + DE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + OE^2 + 5OD^2.$$

Дужине свих страница правилног петоугла из ове једнакости означимо са AB , дијагонала са AC , а полупречника уписане кружнице са OA . Добићемо

$$2AC^2 + 2AB^2 = 10OA^2,$$

што је након краћења са 2 тражена једнакост. $\triangle$

Пример 2.16. Ако су P, Q редом средишта дијагонала AC, BD раванског четвороугла $ABCD$, тада је $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

Најпре, тачка P је средиште дужи AC , па је из 4. дела теореме 2.4

$$DA^2 + DC^2 = PA^2 + PC^2 + 2DP^2, \quad BA^2 + BC^2 = PA^2 + PC^2 + 2BP^2.$$

Сабирањем ове две једнакости, а на основу

$$PA^2 + PC^2 = \frac{1}{2}AC^2$$

добијамо

$$AD^2 + DC^2 + BA^2 + BC^2 = AC^2 + 2(DP^2 + BP^2). \quad \heartsuit$$

Слично, тачка Q је средиште дужи DB , па је

$$PD^2 + PB^2 = QD^2 + QB^2 + 2PQ^2,$$

тј.

$$PD^2 + PB^2 = \frac{1}{2}BD^2 + 2PQ^2,$$

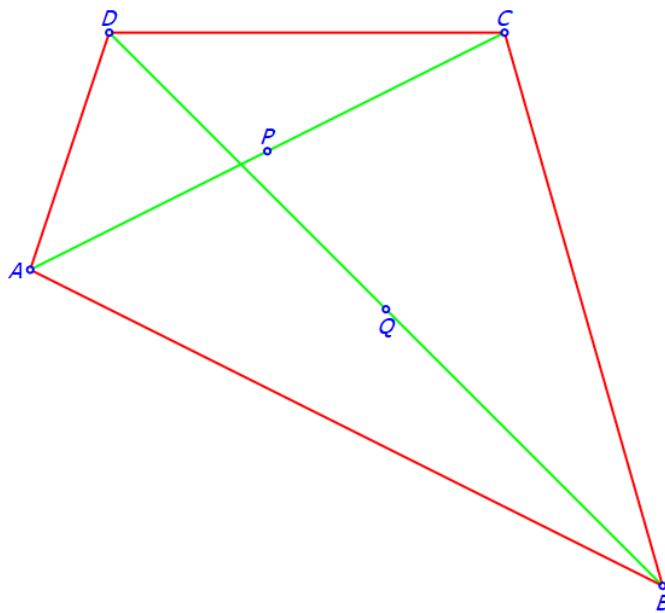
што након множења са 2 даје

$$2PD^2 + 2PB^2 = BD^2 + 4PQ^2. \clubsuit$$

Најзад, сабирањем $\heartsuit$ и $\clubsuit$, добијамо

$$AD^2 + DC^2 + BA^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2,$$

што је требало доказати. $\triangle$



Слика 26: Равански четвороугао

У следећем примеру ћемо показати да је тачка за коју је збир квадрата растојања од фиксираних n тачака заправо тежиште система који чине те тачке.

Пример 2.17. Дате су тачке $A_1, \dots, A_n$. Одредимо тачку X такву да $XA_1^2 + \dots + XA_n^2$ буде минималан.

Применом дела 4. теореме 2.4 на систем материјалних тачака $\{(A_i, 1)\}_{i=1}^n$ чији је центар масе C , добијамо

$$\psi(X) = \psi(C) + nXC^2,$$

где је X произвољна тачка. Како је

$$nXC^2 \geq 0,$$

то је

$$\psi(X) \geq \psi(C),$$

па је јасно да функција ψ достиже минимум у тачки C . $\triangle$

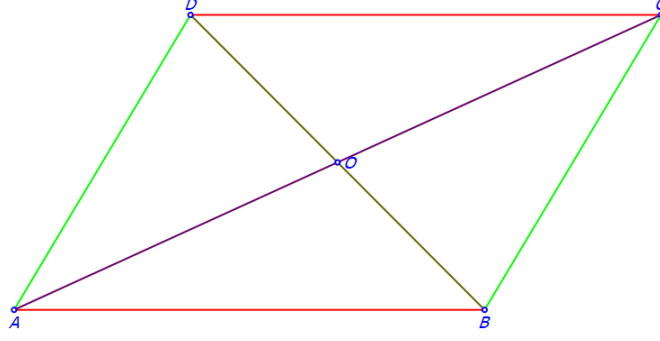
Наведимо кроз наредни пример потврду за још један од могућих смерова уопштавања методе центара маса. У питању је аналогон претходног примера у Хилбертовом простору (нормиран простор са нормом индукованом скаларним производом). Испоставља се да се апарат из Лајбницове теореме који повезује центар масе и Лајбницову функцију, коришћен у претходном доказу, на идејном нивоу преноси и у ово бесконачно димензионо окружење.

Пример 2.18. Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, $\|\cdot\|$ норма индукована скаларним производом у том простору, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ такви да је $x_1 + \dots + x_n = 0$ и $\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 = 1$. Одреди $\min_{x \in \mathcal{H}} \sum_{k=1}^n \|x - x_k\|^2$.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{H}} \sum_{k=1}^n \|x - x_k\|^2 &= \min_{x \in \mathcal{H}} (\|x - x_1\|^2 + \dots + \|x - x_n\|^2) = \\ &= \min_{x \in \mathcal{H}} (\langle x - x_1, x - x_1 \rangle + \dots + \langle x - x_n, x - x_n \rangle) = \\ &= \min_{x \in \mathcal{H}} (\|x\|^2 - \langle x_1, x \rangle - \langle x, x_1 \rangle + \|x_1\|^2 + \dots + \|x\|^2 - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle + \|x_n\|^2) = \\ &= \min_{x \in \mathcal{H}} (n\|x\|^2 - \langle x_1 + \dots + x_n, x \rangle - \langle x, x_1 + \dots + x_n \rangle + \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2) = \\ &= \min_{x \in \mathcal{H}} (n\|x\|^2 + \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2) = \min_{x \in \mathcal{H}} (n\|x\|^2 + 1) = 1. \triangle \end{aligned}$$

Пример 2.19. (Једнакост паралелограма)

У паралелограму $ABCD$ важи једнакост $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.



Слика 27: Једнакост паралелограма

Применом дела 4. теореме 2.4 на систем материјалних тачака $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$ чији је центар масе пресек дијагонала O , добијамо

$$\psi(D) = \psi(O) + 4DO^2,$$

тј.

$$DA^2 + DB^2 + DC^2 + DD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 4DO^2.$$

Одавде из особине половљења дијагонала паралелограма, добијамо

$$BC^2 + DB^2 + AB^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2 + 4 \cdot \frac{1}{4}DB^2,$$

тј.

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2. \triangle$$

И најзад, аналогон овог примера у $\mathcal{H}$ је познато правило паралелограма које важи за сваку квадратну форму. Чак је и начин доказивања потпуно исти, само са апаратом простора у коме радимо. Заправо, то је исто тврђење, али ради прегледности их наводимо засебно.

Пример 2.20. (Правило паралелограма у Хилбертовом простору)

Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, $\|\cdot\|$ норма индукована скаларним производом у том простору и $f, g \in \mathcal{H}$. Онда важи $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$.

По дефиницији норме $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$, где је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ, а $f \in X$, где је X векторски простор и на основу особина скаларног производа, добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle + \langle f - g, f - g \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \\ &= 2\langle f, f \rangle + 2\langle g, g \rangle = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2. \triangle \end{aligned}$$

3 Центри маса у континуалној ситуацији

Сетимо се да смо на самом почетку рада кроз једну примедбу, извели израз

$$\vec{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

који јединствено одређује центар масе система од n тачака.

Ако уведемо ознаке $\vec{r}_c$, $\vec{r}_i$ за векторе положаја центра масе C и тачака A_i , редом, овај израз ће добити облик

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Одавде је јасно да су координате центра масе $C(x_c, y_c, z_c)$ одређене са:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Сада ћемо посматрати тела која су хомогена (константне густине), крута (честице тела су на константном растојању) и налазе се у хомогеном гравитационом пољу (гравитационо убрзање је константно).

Замислимо да је тело подељено на елементарне масе dm . Тиме прелазимо са суме на интеграл и добијамо следеће изразе за вектор положаја центра масе и његове координате:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm}, \quad x_c = \frac{\int_m x dm}{\int_m dm}, \quad y_c = \frac{\int_m y dm}{\int_m dm}, \quad z_c = \frac{\int_m z dm}{\int_m dm}.$$

Како су маса и запремина (такође, маса и површина, као и маса и дужина) директно пропорционалне величине повезане константном густином, то ћемо интеграње у претходним изразима вршити по јединици запремине (тј. површине, као и дужине). Тако долазимо до наредних закључака.

3.1 Тежиште хомогене линије, површине и запремине

Тежиште хомогене линије

Нека је у простору дата хомогена линија дужине l . Координате тежишта те линије се налазе на следећи начин:

$$x_c = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad y_c = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad z_c = \frac{\int_l z dl}{l},$$

где је $l = \int_l dl$.

Тежиште хомогене површине

Нека је у равни дата хомогена фигура површине P . Без умањења општости, сматраћемо да је фигура у xy равни. Координате тежишта те фигуре се налазе на следећи начин:

$$x_c = \frac{\iint_P x dy dx}{P}, \quad y_c = \frac{\iint_P y dy dx}{P}, \quad z_c = 0,$$

где је $P = \iint_P dy dx$.

Тежиште хомогене запремине

Нека је у простору дато хомогено тело запремине V . Координате тежишта тог тела се налазе на следећи начин:

$$x_c = \frac{\iiint_V x dz dy dx}{V}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y dz dy dx}{V}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z dz dy dx}{V},$$

где је $V = \iiint_V dz dy dx$.

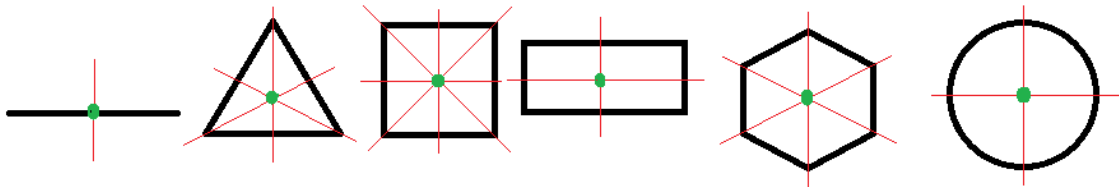
3.2 Принцип симетрије и Архимедова теорема

Нека је T тежиште хомогеног тела. Ако је тело равански, осно или централно симетрично, поступак проналажења тежишта се поједностављује.

Наиме, важе следећа правила:

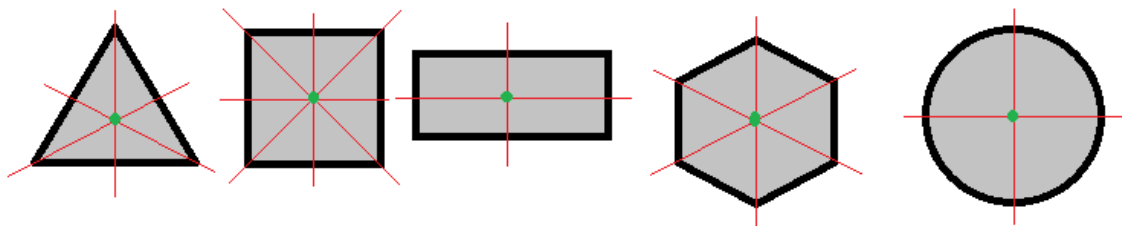
1. Ако тело има раван симетрије α , онда $T \in \alpha$;
2. Ако тело има осу симетрије a , онда $T \in a$;
3. Ако тело има центар симетрије C , онда је $T \equiv C$.

Пример 3.1. На слици испод дати су примери неких линија чија тежишта налазимо једноставно у пресеку оса симетрије, тј. уочавањем њиховог центра симетрије. То су дуж, једнакостранична троугаона линија, граница квадрата, граница правоугаоника, правилна шестоугаона линија, кружница редом.



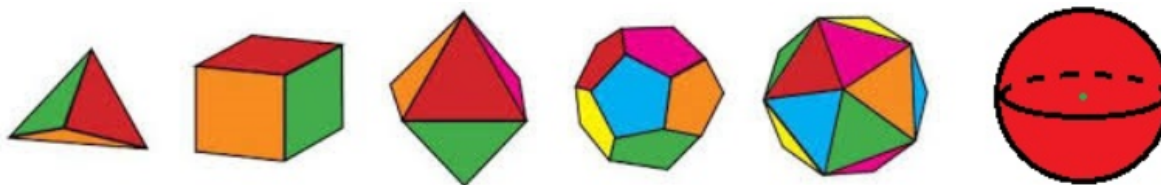
Слика 28: Симетричне линије

Пример 3.2. На слици испод дати су примери неких фигура чија тежишта налазимо једноставно у пресеку оса симетрије, тј. уочавањем њиховог центра симетрије. То су једнакостраничан троугао, квадрат, правоугаоник, правилан шестоугао, круг, редом.



Слика 29: Симетричне фигуре

Пример 3.3. На слици испод дати су примери неких тела чија тежишта налазимо једноставно у пресеку равни симетрије, тј. уочавањем њиховог центра симетрије. То су Платонова тела (тетраедар, хексаедар/коцка, октаедар, додекаедар, икосаедар, редом) и лопта.



Слика 30: Симетрична тела

Теорема 3.4. (Архимед) Ако се геометријско тело T састоји из два дисјунктна тела T_1 и T_2 , тј. $T_1 \sqcup T_2 = T$, онда су тежишта C , C_1 , C_2 почетног тела и два мања, редом колинеарне тачке.

Доказ: Нека тела T , T_1 , T_2 имају запремине V , V_1 , V_2 и тежишта $C(x_c, y_c, z_c)$, $C_1(x_1, y_1, z_1)$, $C_2(x_2, y_2, z_2)$, респективно. Јасно је да је $V = V_1 + V_2$. Како је

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad x_1 = \frac{\int_{V_1} x dV}{V_1}, \quad x_2 = \frac{\int_{V_2} x dV}{V_2},$$

то је на основу $V = V_1 + V_2$

$$V \cdot x_c = \int_V x dV = \int_{V_1+V_2} x dV = \int_{V_1} x dV + \int_{V_2} x dV = V_1 x_1 + V_2 x_2,$$

тј.

$$(V_1 + V_2) \cdot x_c = V_1 x_1 + V_2 x_2.$$

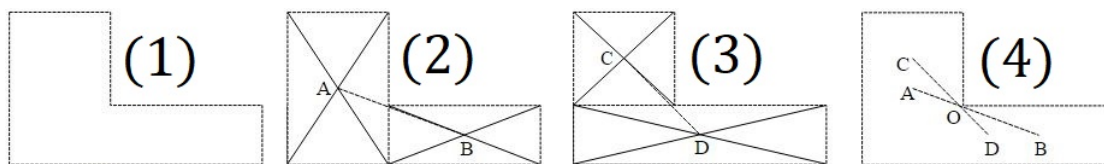
Понављањем аналогног поступка за y и z координату, добијамо

$$x_c = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2}{V_1 + V_2}, \quad y_c = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}, \quad z_c = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2}.$$

Дакле, тачка C је конвексна комбинација тачака C_1 и C_2 , па су ове три тачке заиста колинеарне и важи $C_1 C : C C_2 = V_2 : V_1$. $\square$

Показали смо случај тела у простору. Приметимо да би се теорема аналогно доказала и у случају раванске фигуре. Управо тај случај ћемо користити у следећем примеру.

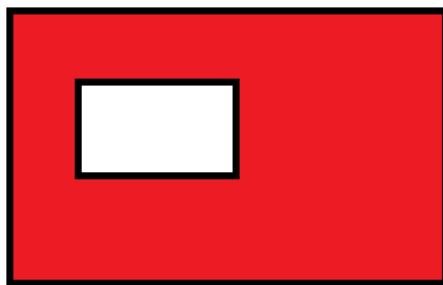
Пример 3.5. (Одређивање тежишта L -фигуре) Коришћењем Архимедове теореме, одредићемо тежиште фигуре са слике (1), испод.



Слика 31: Тежиште L -фигуре

Најпре, поделимо дату L -фигуру на правоугаонике са тежиштима A и B који се налазе у пресеку њихових дијагонала, као на слици (2). Тежиште O L -фигуре припада дужи AB . Затим извршимо другачију поделу, као на слици (3). Слично, O припада дужи CD , где су C и D пресеци дијагонала правоугаоника из ове поделе. Одавде је јасно да је O у пресеку поменутих дужи, тј. $\{O\} = AB \cap CD$. $\triangle$

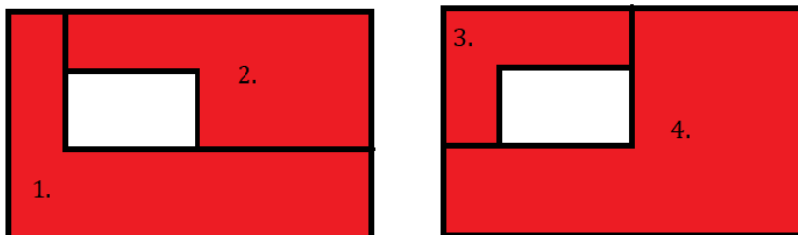
Пример 3.6. Одредити тежиште црвене фигуре са слике испод.



Слика 32

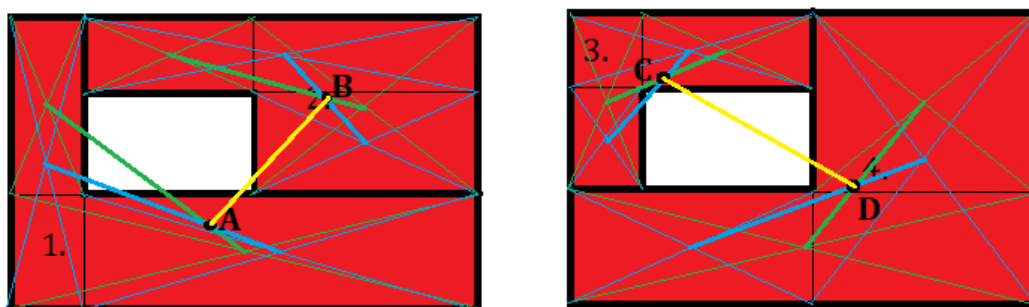
Приказаћемо два решења.

Најпре, користећи се претходним примером. Дату фигуру можемо на више начина поделити на две L-фигуре. Две могуће поделе су приказане на слици испод.



Слика 33

Опет коришћењем Архимедове теореме закључујемо да тежиште O ове фигуре припада дужима AB и CD , где су A, B, C, D редом тежишта L-фигура 1, 2, 3, 4 (видети слику испод). $\triangle$



Слика 34

Тежиште се може наћи и директном применом Архимедове теореме. Наиме, нека су T_1 и T_2 , P_1 и P_2 , O_1 и O_2 редом већи и мањи правоугаоник, те њихове површине и тежишта, редом. Даље, нека је $T = T_1 \setminus T_2$ дата фигура и нека је њена површина P и њено тежиште O . Јасно је да је $T_1 = T \sqcup T_2$ и $P_1 = P + P_2$. По Архимедовој теорему је

$$x_{O_1} = \frac{P \cdot x_O + P_2 \cdot x_{O_2}}{P + P_2}, \quad y_{O_1} = \frac{P \cdot y_O + P_2 \cdot y_{O_2}}{P + P_2}.$$

Одавде је

$$x_O = \frac{P_1 \cdot x_{O_1} - P_2 \cdot x_{O_2}}{P}, \quad y_O = \frac{P_1 \cdot y_{O_1} - P_2 \cdot y_{O_2}}{P}.$$

Дакле, одредимо тежиште већег правоугаоника и доделимо му позитивну масу, затим одредимо тежиште мањег правоугаоника и доделимо му негативну масу. Онда се одредимо тежиште за те две добијене тачке.

3.3 Примери одређивања тежишта

Пример 3.7. *Одреди координате тежишта хомогене дужи.*

Без умањења општости, посматраћемо дуж OA , где је $O(0, 0)$ и $A(x_1, 0)$. Јасно је да је $y_c = 0$. Даље, како је $l = \int_l dl = \int_0^{x_1} dl = x_1$, а $\int_l x dl = \int_0^{x_1} t dt = \frac{x_1^2}{2}$, то је $x_c = \frac{\frac{x_1^2}{2}}{x_1} = \frac{x_1}{2}$. Дакле, C је баш средиште дужи OA , тј. $C(\frac{x_1}{2}, 0)$. $\triangle$

Пример 3.8. *Одреди координате тежишта хомогеног троугла.*

Без умањења општости, посматрајмо троугао OAB где је $O(0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, y_2)$. Најпре, површина троугла OAB је

$$P = \frac{OA \cdot h_{OA}}{2} = \frac{x_1 \cdot y_2}{2}.$$

Затим, да бисмо израчунали потребне интеграле, треба наћи једначине правих OB и AB . На основу формуле за једначину праве кроз две тачке, добијамо

$$(OA) : y - y_2 = \frac{0 - y_2}{0 - x_2}(x - x_2), \quad (AB) : y - y_2 = \frac{0 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2),$$

тј.

$$(OA) : x = \frac{x_2}{y_2}y, \quad (AB) : x = \frac{x_2 - x_1}{y_2}y + x_1.$$

Даље,

$$\begin{aligned} \int_P x dP &= \iint_P x dx dy = \int_0^{y_2} \int_{\frac{x_2}{y_2}y}^{\frac{x_2 - x_1}{y_2}y + x_1} x dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{y_2} \left[\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2}y + x_1 \right)^2 - \left(\frac{x_2}{y_2}y \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{y_2} \left[y^2 \cdot \left(-\frac{2x_1x_2}{y_2^2} + \frac{x_1^2}{y_2^2} \right) + y \cdot 2 \frac{x_2 - x_1}{y_2} x_1 + x_1^2 \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y_2^3}{3} \cdot \frac{x_1(x_1 - 2x_2)}{y_2^2} + \frac{y_2^2}{2} \cdot \frac{2x_1(x_2 - x_1)}{y_2} + x_1^2 y_2 \right] \\ &= \frac{1}{6} (y_2 x_1^2 + y_2 x_1 x_2) = \frac{x_1 y_2 (x_1 + x_2)}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_P y dP &= \iint_P x dx dy = \int_0^{y_2} \int_{\frac{x_2}{y_2}y}^{\frac{x_2-x_1}{y_2}y+x_1} y dx dy \\
&= \int_0^{y_2} y \left(\frac{x_2}{y_2}y - \frac{x_1}{y_2}y + x_1 - \frac{x_2}{y_2}y \right) dy \\
&= \int_0^{y_2} \left(-\frac{x_1}{y_2}y^2 + x_1y \right) dy \\
&= -\frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{y_2^3}{3} + \frac{x_1 y_2^2}{2} = \frac{x_1 y_2^2}{6}.
\end{aligned}$$

Најзад, добијамо координате тежишта

$$x_c = \frac{x_1 y_2 (x_1 + x_2)}{6} \cdot \frac{2}{x_1 y_2} = \frac{x_1 + x_2}{3}, \quad y_c = \frac{x_1 y_2^2}{6} \cdot \frac{2}{x_1 y_2} = \frac{y_2}{3}. \triangle$$

Пример 3.9. *Одреди координате тежишта хомогене купе.*

Без умањења општости, посматрајмо купу чији је центар основе у координатном почетку, а основа лежи у xz равни. Како је y оса заправо оса симетрије ове купе, то тежиште купе припада баш њој. Дакле, $x_c = z_c = 0$. Нека је R полупречник основе, а h висина купе. Ако пресечемо купу са равни паралелном основи на висини y по кругу полупречника r , из сличности одговарајућих троуглова, добијамо $\frac{r}{R} = \frac{h-y}{h}$, тј. $r = \frac{R}{h}(h-y)$. Даље,

$$dV = r^2 \pi dy = \left(\frac{R}{h}(h-y) \right)^2 \pi dy = \frac{\pi R^2}{h^2} (h^2 - 2hy + y^2) dy = \pi R^2 \left(1 - \frac{2}{h}y + \frac{1}{h^2}y^2 \right) dy,$$

па је

$$V = \int_V dV = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{2}{h}y + \frac{1}{h^2}y^2 \right) dy = \pi R^2 \left(h - \frac{2}{h} \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi R^2 h}{3},$$

$$\int_V y dV = \int_0^h \pi R^2 \left(y - \frac{2}{h}y^2 + \frac{1}{h^2}y^3 \right) dy = \pi R^2 \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2}{h} \frac{h^3}{3} + \frac{1}{h^2} \frac{h^4}{4} \right) = \frac{\pi R^2 h^2}{12},$$

и најзад

$$y_c = \frac{\pi R^2 h^2}{12} \cdot \frac{3}{\pi R^2 h} = \frac{h}{4},$$

па је $C(0, \frac{h}{4}, 0)$. $\triangle$

Закључак

Идеје центра масе се природно појављују и у другим областима математике, поготово при раду са конвексним фигурама.

Међу најпознатијим са којима се студенти срећу у току школовања, поменимо аритметичке или Чезарове средине (Теплицова, Кошијева, Штолцова теорема). Такође, метод сумирања аритметичким срединама примењује се и у теорији Фуријеових тригонометријских редова где се n -то Фејерово језгро може видети као центар масе система састављеног од првих n Дирихлеових језгара. Наравно, касније се виђају бројна уопштења ових резултата рецимо, приликом рада са апроксимативним јединицама.

Што се тиче наставе математике, утисак је да ова тема није довољно обрађена у средњошколској литератури. На пример, већи део резултата прве главе се обично доказује елементарном геометријом, без приказивања ученицима других метода, а често наставници кажњавају било какав аналитички приступ. Код резултата другог дела се обично форсира приступ рада са класичном аналитичком геометријом, док се, на пример, приликом примена Стјуартове теореме обично форсира решавање косинусном теоремом, без и помињања приступа који је приказан у овом раду. Приликом рада са ученицима видљиво је да често лакше прихватају везе које се добију, нарочито у векторској алгебри, ако им се прикаже и овакав приступ. На старијим годинама средње школе, приликом обраде делова линеарне алгебре, већина наставника се више времена задржава на решавањима система, па за ову тематику не остане времена, а на часовима физике је уобичајно да се неке формуле, које нам се чини да се овом методом могу представити ученицима као логичне, изложе као аксиоме (често се и по уџбеницима физике виђа тврђење о тежишту неке фигуре без доказа или икаквог образложења).

Идеје које нам центри маса нуде, претварају сувопарно доказивање геометријских тврђења и задатака у неки облик игре. Овај приступ делује доста флексибилније и пријемчивије читаоцу, па се стиче утисак да би и на децу деловао мотивирајуће. Надамо се да ће овај материјал бар мало поправити садашње стање у настави математике и заинтересовати наставнике ентузијасте и ученике да изласком из устаљених токова, освеже своје знање и почну посматрати геометријске проблеме и из друге перспективе.

Литература

- [1] Александар Липковски, *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, Завод за уџбенике, Београд, 2007
- [2] Драгомир Лопандић, *Геометрија*, Математички факултет, Београд
- [3] М.Ђорић, О.Миленковић, *Збирка задатака из аналитичке геометрије*, Математички факултет, Београд, 1999
- [4] В.Јанковић, З.Каделбург, П.Младеновић, *Међународне и балканске математичке олимпијаде, 1984-1995. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 32, Друштво математичара Србије, Београд, 1996
- [5] В.Балтић, Д.Ђукић, Ђ.Кртинић, И.Матић, *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији*, Материјали за младе математичаре, свеска 49, друго издање, Друштво математичара Србије, Београд, 2011
- [6] Ђ.Кртинић, *Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 52, друго издање, Друштво математичара Србије, Београд, 2012
- [7] Рајка Милетић, *Чевијева теорема и последице*, Математички факултет, Београд, 2010
- [8] Анита Пустаи, *Тежиште фигура и система материјалних тачака — могућност излагања неких делова овог садржаја у настави математике у основној или средњој школи*, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2016
- [9] Марјан Стојановић, *Барицентрични систем координата*, Природно-математички факултет, Ниш, 2017