УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александар З. Јовић

УСЛОВИ ЕКСТРЕМУМА ЗА ЈЕДНУ КЛАСУ ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИЈЕ СА НЕПРЕКИДНИМ ВРЕМЕНОМ

докторска дисертација

Београд, 2021.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Aleksandar Z. Jović

OPTIMALITY CONDITIONS IN CONTINUOUS-TIME PROGRAMMING PROBLEMS

doctoral dissertation

Belgrade, 2021.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Бобан Маринковић,
редовни професор,
Универзитет у Београду, Технолошко-металуршки факултет

Чланови комисије:

др Бобан Маринковић,
редовни професор,
Универзитет у Београду, Технолошко-металуршки факултет

др Милан Дражић,
редовни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Александар Савић,
ванредни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Родитељима, Будимки и Зорану Јовићу

Захвалница

Захвалио бих се ментору проф. др Бобану Маринковићу на преузимању врло одговорне функције ментора и времену које ми је посветио, на увођењу у теорију екстремалних проблема и несебичном ангажовању током реализације ове дисертације. Овом приликом се захваљујем и члановима комисије проф. др Милану Дражићу и проф. др Александру Савићу, који су пажљиво прегледали рукопис, дали корисне примедбе и сугестије и на тај начин допринели квалитету ове дисертације. Посебно се захваљујем мајци која ме је прва увела у свет математике.

Наравно, велику захвалност дугујем супрузи Бојани и ћерки Николији, које су ме осмесима и вером у мој успех бодриле ових година и умногоме олакшале остварење мојих професионалних циљева. Хвала им на толерисању мојих обавеза, позитивној енергији и безусловном разумевању.

У Владичином Хану, августа 2021. *Аутор*

Наслов дисертације: Услови екстремума за једну класу проблема оптимизације са непрекидним временом

Резиме

Проблем оптимизације са непрекидним временом састоји се у минимизацији интегралног функционала, са фазним ограничењима различитих типова.

Предмет ове докторске дисертације је добијање услова екстремума као и теорема дуалности за класу конвексних и глатких проблема оптимизације са непрекидним временом, са фазним ограничењима типа неједнакости. Нажалост, неки објављени резултати из ове области су нетачни, што је потврђено 2019. године.

У раду су добијени нови услови екстремума за поменуту класу проблема. Доказане су теореме слабе и јаке дуалности. Главни апарат за извођење ових резултата је нова теорема алтернативе за конвексан систем строгих и нестрогих неједнакости у бесконачно-димензионим просторима. За примену поменуте теореме, одговарајући услов регуларности мора бити задовољен. Неки услови екстремума су изведени уз додатне претпоставке регуларности ограничења. Теоријски резултати су потврђени практичним примерима.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: Проблеми оптимизације са непрекидним временом, Нелинеарно програмирање, Услови екстремума, Неопходни услови, Довољни услови, Дуалност, Теореме алтернативе, Вишекритеријумски проблеми оптимизације са непрекидним временом, Рационални проблеми оптимизације са непрекидним временом

Научна област: Математика

Ужа научна област: Оптимизација

УДК број:

АМС 2010 класификација: $90C25$, $90C29$, $90C30$, $90C46$, $90C32$, $47N10$

Dissertation title: Optimality conditions in continuous-time programming problems

Abstract

The continuous-time programming problem consists in minimizing an integral functional, with phase constraints of different types.

The subject of this doctoral dissertation is to establish extremum conditions as well as duality theorems for a class of convex and smooth continuous-time programming problems, with phase constraints of the inequality type. Unfortunately, some of the results in this field are not valid, which is confirmed in 2019.

In this paper, new optimality conditions for the aforementioned class of problems are obtained. The theorems of weak and strong duality are proved. The main tool for deriving these results is a new theorem of the alternative for a convex system of strict and nonstrict inequalities in infinite dimensional spaces. In order to apply the aforementioned theorem, a suitable regularity condition must be satisfied. Some optimality conditions are obtained with additional constraint regularity qualification. Theoretical results are confirmed by practical examples.

Keywords: Continuous-time programming problems, Nonlinear programming, Optimality conditions, Necessary conditions, Sufficient conditions, Duality, Theorems of the alternative, Multiobjective continuous-time programming problems, Fractional continuous-time programming problems

Research area: Mathematics

Research sub-area: Optimization

UDC number:

AMS 2010 Classification: $90C25$, $90C29$, $90C30$, $90C46$, $90C32$, $47N10$

Садржај

1 Увод **1**

2 Теореме алтернативе и примене **6**

2.1 Теореме алтернативе у коначно-димензионим просторима 7

2.2 Решивост система конвексних неједнакости и нова уопштења 10

2.3 Неке примене теорема алтернативе. Услови оптималности у математичком програмирању 12

2.4 Теореме алтернативе у бесконачно-димензионим просторима и примене на неке класе проблема оптимизације са непрекидним временом 19

2.5 Нова теорема алтернативе у функционалним просторима за систем строгих и нестрогих конвексних неједнакости 24

3 Услови оптималности и дуалност у конвексним проблемима оптимизације са непрекидним временом **28**

3.1 Лагранжов принцип минимума 28

3.2 Теореме дуалности 35

4 Услови оптималности у конвексним проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом **40**

4.1 Каруш-Кун-Такерови услови екстремума 41

4.2 Довољни услови 44

4.3 Услови екстремума за проблем (ВПНВ) уз додатне претпоставке регуларности ограничења 46

5 Услови оптималности и дуалност у глатким проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом **52**

5.1 Формулација проблема и основне дефиниције 52

5.2 Неопходни услови 54

5.3 Довољни услови 59

5.4 Дуалност у проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом 64

5.5 Монд-Веиров дуал 64

5.6 Волфов дуал 67

6 Услови оптималности и дуалност у глатким рационалним проблемима оптимизације са непрекидним временом **72**

6.1 Формулација проблема и основне дефиниције 73

6.2 Неопходни услови 73

6.3 Довољни услови 79

6.4 Волфов дуал 83

6.5 Лагранжов дуал 87

7 Закључак и правци будућег истраживања **91**

Литература **93**

8 Биографија аутора **101**

1 Увод

Предмет ове докторске дисертације је добро познат проблем оптимизације са непрекидним временом. Од интереса су значајне примене овог проблема у различитим сферама економије, операционих истраживања, машинства и системима контроле лета. Зато је занимљиво разматрати услове оптималности који би помогли проналажењу практичних метода за решавање ових проблема.

Овај проблем поставио је 1953. године Ричард Белман[1] у раду [7]. Његов рад је проширио Тиндал у раду [83] и добио теореме дуалности за линеаран проблем оптимизације са непрекидним временом. Почев од тада, теорија из ове области интензивно се развијала. У раду [29] 1968. године, аутори су уопштили ове теореме дуалности на случај када је функција циља конкавна, а затим добили Каруш-Кун-Такерове неопходне и довољне услове оптималности. Они су разматрали нелинеаран проблем оптимизације са непрекидним временом са линеарним ограничењима, тако што су заменили реалне матрице A и K из рада [28] временски зависним матрицама $A(t)$ и $K(s,t)$, чији су елементи део по део непрекидне функције. Њихов доказ теореме дуалности заснива се на проширењу неких резултата из [45]. Нажалост, њихови докази су били некоректни, што је касније показано и исправљено 1970. године у раду [84]. Након тога, Хансон је у раду [28] доказао теореме дуалности за гладак линеаран проблем оптимизације са непрекидним временом. У раду [21], аутори су решавали овај проблем увођењем нелинеарних глатких ограничења и добили Каруш-Кун-Такерове услове оптималности. Недуго затим, у раду [75], разматран је општији проблем оптимизације са непрекидним временом

$$\begin{aligned} F(x(\cdot)) = \int_0^T f(x(t))dt \to \sup; \\ \text{п.о. } h(x(t)) \le c(t) + \int_0^t l(s,t,x(s))ds, \ \text{с.с. на } [0,T], \\ x(t) \ge 0, \ \text{с.с. на } [0,T], \end{aligned} \tag{П}$$

где је $f(\cdot)$ функција дефинисана у $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, $x(\cdot)$ $n\times 1$ реална мерљива и ограничена вектор функција дефинисана на $[0,T]$, $h(\cdot)$ $k\times 1$ вектор функција дефинисана у $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, $l(\cdot,\cdot,\cdot)$ $k\times 1$ вектор функција дефинисана на $[0,t]\times[0,T]\times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ за свако $t\in[0,T]$ и $c(\cdot)$ $k\times 1$ вектор функција дефинисана на $[0,T]$. Такође, у раду се претпоставља да су сви интеграли дати у Лебеговом смислу. Они су извели Фриц-Џонове и Каруш-Кун-Такерове услове оптималности за проблем (П) без претпоставки диференцијабилности. Може се приметити да су дотад сви претходни аутори претпостављали да су функције конвексне или конкавне. Ипак, главни резултати у овом раду засновани су на теореми алтернативе (Теорема 7 [75]). Нажалост, доказ њихове главне теореме алтернативе потребне за добијање неопходних услова оптималности,

[1]Richard Bellman (1920-1984)- Амерички математичар

није тачан. Наиме, аутори се у свом доказу позивају на теорему о раздвајању како би раздвојили $\{(0,0)\}$ од скупа $\mathbb{R} \times L_1([0,T];\mathbb{R}^n)$ који може да нема унутрашњу тачку. Овде је $L_1([0,T];\mathbb{R}^n)$ означавао простор n-димензионих есенцијално ограничених и Лебег интеграбилних функција на сегменту $[0,T]$. Теорија дуалности нелинеарних проблема оптимизације са непрекидним временом проширена је у раду [66].

Реијланд је 1980. године у радовима [67,68] разматрао конвексне и глатке нелинеарне проблеме оптимизације са непрекидним временом. Добијени су услови екстремума и теореме дуалности уз додатне рестриктивне претпоставке. Аутор је користио уопштену Фаркашеву лему, коју су претходно доказали Крејвен и Колиха 1977. године у раду [17]. За извођење услова оптималности Реијланд је применио поменуту лему, али је морао да претпостави да језгро датог оператора има коначну димензију, а слика истог оператора је затворени потпростор. Ови услови оптималности су добијени још уз додатни уопштен Слејтеров услов регуларности ограничења. Ипак, услови које је добио Рејиланд у поменутим радовима, јако су тешки за испитивање, па заправо ови радови нису много користили у каснијим истраживањима поменутих проблема.

Због претходно наведеног, Залмаи је 1985. године објавио серију радова [96–101] за нелинеаран проблем оптимизације са непрекидним временом. Он је обрадио гладак, конвексан, рационални као и хомогени проблем који је специјалан случај глатког проблема уз додатне претпоставке. Добијени су неопходни услови оптималности Фриц-Џоновог и Каруш-Кун-Такеровог типа за гладак проблем у [98] и довољни услови уз додатне претпоставке конвексности и генерализоване конвексности у [100]. Лагранжова теорема о седластој тачки и теорија дуалности за конвексан проблем добијена је у раду [99] коришћењем пертурбованог метода и основа субдиференцијалног рачуна. Међутим, неопходан услов за добијање Каруш-Кун-Такерове теореме о седластој тачки, била је претпоставка стабилности. Ово је постигнуто уопштавањем неких резултата из [24]. Више о поменутом апарату може се прочитати и у [2, 31]. Залмаи је у раду [97], користећи неопходне услове оптималности добијене у [98], решио и хомоегени проблем оптимизације са непрекдиним временом. Поменуте неопходне услове користио је и у раду [101] приликом извођења теорема дуалности за рационални хомогени проблем оптимизације са непрекидним временом. Главни апарат за добијање свих ових резултата била је уопштена Горданова теорема алтернативе у бесконачно-димензионим просторима формулисана и публикована у раду [96]. Нажалост, Арјутунов, Жуковски и Маринковић су 2019. године у [4] доказали да поменута теорема није тачна. Сходно томе валидност свих претходно поменутих радова је доведена у питање. Више о овоме биће речи у наредној глави.

Довољни и неопходни услови оптималности за негладак проблем оптимизације са непрекидним временом први пут су добијени 1998. и 2001. године редом у радовима [70] и [10]. Такође, за добијање неопходних услова оптималности у [10], коришћена је опет већ поменута нетачна уопштена Горданова теорема алтернативе.

Дати проблем са скаларном функцијом циља први пут је проширен 1989. године на проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом у [74], и исти је касније изучаван од стране великог броја математичара. Залмаи је, у већини радова при крају прошлог века, више пажње посветио рационалним скаларним и проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Ови проблеми, услови оптималности и резултати дуалности могу се наћи у [103–106, 108].

Нобакхтиан и Поурјајевали су тек 2008. године у [59] добили услове оптималности првог реда за неглатке проблеме вишекритеријумске оптимизације са генерализованим конвексним функцијама циља и ограничења уз задовољен Липшицов услов. Решења су разматрана у смислу Парето оптималности. За ове проблеме такође су добијени и дуални модели Волфовог и Монд-Веировог типа уз додатне претпоставке инвексности. Доказане су поред осталог и теореме слабе и јаке дуалности у раду [58]. Нажалост, за добијање ових резултата аутори су користили неопходне услове оптималности добијене у [10].

Затим је Оливеира 2010. године у [61] извео услове екстремума и дуалне теореме за преинвексан вишекритеријумски проблем, користећи дефиницију својствене Парето оптималности решења, следећи сличан приступ за коначно димензиони случај који је увео Цефријан 1968. године у [25]. Касније је Маринковић 2012. године у раду [49] добио неопходне и довољне услове оптималности за вишекритеријумски преинвексан проблем, али за класу Парето оптималних решења. У оба рада је као главни апарат, коришћена поменута уопштена Горданова теорема алтернативе у преинвексном контексту.

Истовремено, Нобакхтиан и Поурјајевали су 2012. године у [60] извели неопходне и довољне услове за рационални негладак проблем оптимизације са непрекидним временом. Користећи те услове, добили су два дуална модела као и теореме дуалности. Наведене резултате су доказали коришћењем неопходних Каруш-Кун-Такерових услова из рада [10] и очигледну везу између скаларног и рационалног проблема.

Након тога су 2015. године, у [71] изведени услови екстремума Каруш-Кун-Такеровог типа у псеудоинвексном концепту, за негладак проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Доказане су уједно теореме слабе и јаке дуалности за дати проблем. У овом раду, као главни апарат коришћена је уопштена Моцкинова Теорема алтернативе из [96], чија је тачност, такође доведена у питање на основу контрапримера из [4], јер је она заправо директна последица поменуте уопштене Гордановe теореме.

Као што се може приметити из свега наведеног, тачност многих поменутих резултата из ове области је доведена у питање што је потврђено у радовима [4, 32]. О свему овоме биће више речи у наредној глави.

Недавно, 2020. године, Монте и Оливеира су у раду [53] добили нове неопходне Каруш-Кун-Такерове услове за гладак проблем оптимизације са непрекидним временом са ограничењима типа неједнакости и једнакости. Прво су решили проблем са ограничењима типа неједнакости користећи нову Теорему алтернативе коју су доказали 2019. године Арјутунов, Жуковски и Маринковић у [4]. Затим су за проблем са ограничењима типа неједнакости и једнакости добили неопходне услове користећи неопходне услове добијене за проблем само са ограничењима типа неједнакости и теорему о имплицитној функцији. Све ове резултате су добили уз додатан услов регуларности који је био неопходан за примену нове Теореме алтернативе из [4].

Резултати у радовима [53,54] представљају прву корекцију и продужење Залмаијевих резулата [98] из 1985. године за гладак случај. Такође, гладак скаларни проблем оптимизације са непрекидним временом детаљно је обрађен у тези [52].

Може се приметити да остаје доста нерешених и отворених проблема из области оптимизације са непрекидним временом. Не постоје валидни резултати из ове области без претпоставки глаткости. Такође, нема резултата за конвексне скаларне проблеме и проблеме вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Неки од њих су обрађени у овом раду.

Дисертација је подељена на седам глава, рачунајући и ову у којој је дата мотивација и преглед резултата.

Друга глава садржи основне познате теореме алтернативе у коначно димензионим просторима, као и неке њихове примене у извођењу услова екстремума у математичком програмирању. У овој глави су дата нека уопштења ових теорема у функционалним просторима. Теорија која се тиче теорема алтернативе у коначно димензионим просторима је добро позната и може се наћи у многим књигама и радовима који се баве теоријом екстремалних проблема и нелинеарног програмирања. Ипак, бесконачно-димензиона уопштења поменутих теорема нису тако позната и представљају занимљиво поље за истраживање. Такође, неки резултати који се тичу поменутих уопштења у бесконачно-димензионим просторима су нетачни, па су и одговарајући услови оптималности као и резултати теорије дуалности, добијени применом таквих теорема, некоректни. У тези ће бити изучавани такви проблеми и циљ је добијање нових услова оптималности као и теорема дуалности уз додатне претпоставке регуларности. Полазна тачка биће нова теорема алтернативе у функционалним просторима уместо већ поменуте уопштене Горданове теореме. У овој глави је показано да поменута теорема није тачна, а самим тим и још неке теореме из литературе. Дат је један контрапример као илустрација некоректности поменуте теореме.

Трећа глава се бави скаларним конвексним проблемима оптимизације са непрекидним временом. Добијени су неопходни и довољни услови екстремума за конвексан проблем. Доказане су теореме слабе и јаке дуалности као и неке њихове директне последице. Дати су конкретни примери који потврђују теоријске резултате. Резултат ове главе је у поступку публиковања у [37].

У четвртој глави се решава конвексан проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Добијени су неопходни и довољни услови екстремума нултог реда за конвексан проблем уз додатне претпоставке регуларности. Решења се разматрају у смислу Парето оптималности. Добијени су општији услови нетривијалности Лагранжових множилаца. Дати су конкретни примери који потврђују теоријске резултате. Резултат ове главе је публикован у раду [38].

Пета глава се бави глатким проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Добијени су неопходни и довољни услови екстремума. Дата су два дуална модела и доказане теореме слабе и јаке дуалности. Представљен је илустративан пример који потврђује теоријске резултате. Резултат ове главе представља проширење рада публикованог у [35]. Мотивација за решавање глатког вишекритеријумског проблема били су резултати добијени за скаларан случај [53] и добро познати услови оптималности добијени у [50, 73]. Такође, неки резултати из ове главе који се односе на теорију дуалности, су на рецензији [34].

У шестој глави је разматран гладак рационални проблем оптимизације са непрекидним временом. Добијена је веза између скаларног и рационалног проблема. Изведени су неопходни и довољни услови екстремума уз додатне претпоставке регуларности. Формулисана су два дуална модела и доказане теореме слабе и јаке дуалности. Такође су дати конкретни примери који потврђују теоријске резултате. Резултати из ове главе су прихваћени за штампу у [36].

Закључак је дат у последњој глави.

2 Теореме алтернативе и примене

Сврха ове главе је дати преглед теорема алтернативе које играју важну улогу у линеарном и нелинеарном програмирању при добијању услова оптималности и теорема дуалности. За више информација, видети [48]. Такође, треба нагласити да се поменуте теореме користе и у вишекритеријумској оптимизацији за добијање поменутих услова екстремума. Видети [12, 51].

Нека је дат вектор $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. У даљем излагању, $x \leq 0$ скраћено значи да је $x_i \leq 0$, за свако $i = 1, \ldots, k$. Слично томе $x < 0$ скраћено значи да је $x_i < 0$, за свако $i = 1, \ldots, k$. Јасно је да за обрнуте релације $\geq$ и $>$ важе сличне дефиниције.

Тип теореме о коме ћемо говорити у овој глави укључиваће два система, I и II, неједнакости и/или једнакости. Типична теорема алтернативе тврди да тачно један од система I и II има решење, али никад оба, а може се формулисати на следећи начин:

Или систем I има решење,

или систем II има решење, али никад оба.
Математички ово можемо записати:

$$(I \Leftrightarrow \neg II) \text{ или еквивалентно } (\neg I \Leftrightarrow II)\,.$$

Типичан начин доказивања теорема алтернативе је:

$$I \Rightarrow \neg II \,\text{или еквивалентно}\, \neg I \Leftarrow II$$

и

$$\neg I \Rightarrow II \,\text{или еквивалентно}\, I \Leftarrow \neg II.$$

Доказ $I \Rightarrow \neg II$, у конкретним теоремама, обично се спроводи елементарно, али доказ

$\neg I \Rightarrow II$ обично захтева постојање и других помоћних теорема. Користећи матрични запис ситем

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \; i = 1, \ldots, k$$

добија облик

$$Ax \leq b$$

где је је $A = (a_{ij})$ реална матрица димензије $k \times n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)'$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, при чему ће у даљем тексту $'$ означавати транспоновање.

2.1 Теореме алтернативе у коначно-димензионим просторима

У овом поглављу, споменућемо неке од најпознатијих теорема алтернативе у коначно--димензионим просторима, које ће укључивати два линеарна система I и II неједнакости и/или једнакости. Први који је предложио теорему овог типа за линеарне алгебарске системе био је Гордан[2] 1873. године у раду [27]. Затим је 1902. Фаркаш[3] [20], са оним што је данас познато као Фаркашева лема, дао велики допринос теоремама алтернативе, иако, на први поглед ова лема нема класичну структуру алтернативе, њена формулација јасно показује да је то теорема алтернативе. Познато је да ова лема има кључну улогу у теорији математичког програмирања. Остале теореме објавили су редом 1915. Штимке[4] [79], 1936. Моцкин[5] [55], 1951. Слејтер[6] [76], 1956. Такер[7] [82] и 1960. Гејл[8] [23]. У наставку наводимо детаљне формулације ових теорема и њихова уопштења.

Теорема 2.1. *[Гордан 1873. [27]] Нека је дата матрица $A \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Онда, или систем*

$$\begin{aligned} I:\ Ax < 0 \ \text{ има решење } \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{или } \ II:\ A'y = 0 \, \text{има решење } \ y \in \mathbb{R}^k, \ \text{такво да је } y \geq 0,\, y \neq 0, \end{aligned}$$

али никад оба.

Теорема 2.2. *[Фаркаш (1898.) 1902. [20]] Нека је дата матрица $A \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ и вектор $b \in \mathbb{R}^n$. Онда, или систем*

$$\begin{aligned} I:\ Ax \leq 0,\, bx > 0 \ \ \text{има решење } \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{или } \ II:\ A'y = b,\ y \geq 0 \ \ \text{има решење } \ y \in \mathbb{R}^k, \end{aligned}$$

али никад оба.

Знамо да се Фаркашева Теорема 2.2 користи за добијање услова оптималности у теорији линеарног програмирања. За више инфорамција видети [15].

Теорема 2.3. *[Штимке 1915. [79]] За сваку матрицу $A \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, или систем*

$$\begin{aligned} I:\ Ax \geq 0 \, (Ax \neq 0) \ \text{ има решење } \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{или } \ II:\ A'y = 0,\ y > 0 \ \text{ има решење } \ y \in \mathbb{R}^k, \end{aligned}$$

али никад оба.

Теорема 2.4. *[Моцкин 1936. [55]] Нека су $A \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$ и $C \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$*

[2] Paul Albert Gordan (1837-1912) - Немачки математичар
[3] Julius Farkas (1847-1930)-Мађарски математичар и физичар
[4] Erich Stiemke (1892-1915)-Немачки математичар
[5] Theodore Samuel Motzkin (1908 –1970)-Израелски математичар
[6] Morton Lincoln Slater (1921-2002)-Амерички математичар
[7] Albert William Tucker (1905-1995)-Канадски математичар
[8] David Gale (1921-2008)-Амерички математичар

дате матрице. Онда, или систем

$$I: \ Ax > 0, \ Bx \geq 0, \ Cx = 0 \ \textit{има решење} \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\textit{или} \ \ II: \ \exists (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times R^m, \ y_1 \geq 0, \, y_1 \neq 0, \, y_2 \geq 0, \ \ \textit{такви да је}$$
$$A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 = 0.$$

Теорема 2.5. *[Слејтер 1951. [76]] Нека су A, B, C, D дате матрице које имају исти број колона. Тада, тачно један од система:*

$$I: \begin{cases} Ax > 0, \\ Bx \geq 0, (Bx \neq 0) \\ Cx \geq 0, \\ Dx = 0, \end{cases}$$

и

$$II: \begin{cases} A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 + D'y_4 = 0, \\ \textit{за} \\ y_1 \geq 0, \, y_1 \neq 0, \, y_2 \geq 0, \, y_3 \geq 0, \ \textit{или} \\ y_1 \geq 0, \, y_2 > 0, \, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

има решење.

Теорема 2.6. *[Такер 1956. [82]] Нека су A, B, C дате матрице које имају исти број колона. Тада, или систем*

$$I: \ \begin{cases} Ax \geq 0, \ (Ax \neq 0) \\ Bx \geq 0, \\ Cx = 0, \textit{има решење} \ \ x, \end{cases}$$

или систем

$$II: \begin{cases} A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 = 0, \\ y_1 > 0, \, y_2 \geq 0, \\ \textit{има решење} \, y = (y_1, y_2, y_3), \end{cases}$$

али никад оба.

Теорема 2.7. *[Гејл 1960. [23]] За дату матрицу $A \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ и вектор $b \in \mathbb{R}^k$ или систем*

$$I: \ Ax = b \ \ \textit{има решење} \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\textit{или} \ \ II: \ A'y = 0, \ by = 1 \ \textit{има решење} \ \ y \in \mathbb{R}^k,$$

али никад оба.

Теорема 2.8. *[Гејл 1960. [23]] За дату матрицу $A \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ и вектор $b \in \mathbb{R}^k$ или систем*

$$I: \ Ax \leq b \ \text{ има решење } \ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\text{или } \ II: \ A'y = 0, \ by = -1, \ y \geq 0, \ \text{ има решење } \ y \in \mathbb{R}^k,$$

али никад оба.

У наставку представаљамо фундаменталну теорему алтернативе за конвексне функције.

Теорема 2.9. *[Ки Фан[9] 1957. [19]] Нека су функције $f_1, \ldots, f_m$ конвексне на конвексном скупу G у $\mathbb{R}^n$. Тада или систем*

$$I: f_1(x) < 0, \ldots, f_m(x) < 0, \quad \text{има решење } x \in G,$$
$$\text{или } \ II: \text{постоји ненула вектор } \ y \in \mathbb{R}^m, \ y = (y_1, ..., y_m) \geq 0 \ \ \text{такав да је}$$
$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) y_i \geq 0, \ \forall x \in G.$$

Сада дајемо једну битну теорему из Конвексне анализе о систему конвексних неједнакости.

Теорема 2.10. *[9] Нека је G непразан конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$. Даље, нека је $\{f_i\}_{i \in I}$, фамилија (коначна или бесконачна) конвексних функција полунепрекидних одоздо на G, $\{h_i\}_{i \in J}$ фамилија (коначна или бесконачна) линеарних функција на $\mathbb{R}^n$. Ако ситем*

$$I: \begin{cases} f_i(x) \leq 0, \, i \in I, \\ h_i(x) = 0, \, i \in J \\ \text{нема решења } \ x \in G, \end{cases}$$

тада, за неке коначне подфамилије $\{f_{i1}, ..., f_{im}\}$ и $\{h_{i1}, ..., h_{ik}\}$ постоје $p \in R^m$ и $q \in \mathbb{R}^k$ такви да је

$$II: \begin{cases} p \geq 0, \, (p, q) \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{m} p_j f_{ij}(x) + \sum_{j=1}^{k} q_j h_{ij}(x) \geq 0 \ \forall x \in G. \end{cases}$$

Ако је $J = \emptyset$, тј ако у систему нема једнакости $h_i(x) = 0$, онда последња неједнакост горе ($\geq$) постаје строга неједнакост (> 0).

Треба напоменути да су направљена многа уопштења поменутих теорема у функционалним просторима. О овоме ће бити речи у наредним поглављима.

[9]Ky Fan (1914-2010)-Кинески математичар

2.2 Решивост система конвексних неједнакости и нова уопштења

Нека је L линеаран простор и $I = \{1, \ldots, k\} = I_1 \sqcup I_2$ где $\sqcup$ означава дисјунктну унију два скупа. Нека је $A : L \to \mathbb{R}^m$ линеаран оператор, $b \in \mathbb{R}^m$, функције $f_i : L \to \bar{\mathbb{R}}$ су конвексне, X конвексан скуп у L и $X \subset dom(f_i)$ за свако $i \in I$, где је $dom(f) = \{x \in L : f(x) < \infty\}$ ефективни домен конвексне функције f. Такође $span(S)$, $int(S)$ и $relint(S)$ означаваће редом линеаран омотач, унутрашњост и релативну унутрашњост неког скупа S. Основни појмови конвексне анализе могу се наћи у монографијама [2, 31, 69].

Дефиниција 2.1. *[4] Систем*

$$\begin{cases} f_i(x) \le 0, \quad i \in I_1 \\ Ax = b, \\ x \in X, \end{cases} \tag{2.1}$$

је строго решив ако постоји $\bar{x} \in X$ тако да је $A\bar{x} = b$ и $f_i(\bar{x}) < 0$ за свако $i \in I_1$.

Теорема 2.11. *[4, 69] Нека је систем* (2.1) *строго решив и $b \in relint(AX)$. Тада су следећа тврђења алтернативна.*

(а) Постоји решење $x \in L$ система

$$\begin{cases} f_i(x) \le 0, \quad i \in I_1 \\ f_i(x) < 0, \quad i \in I_2 \\ Ax = b, \\ x \in X. \end{cases} \tag{2.2}$$

(б) Постоји ненула вектор $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k, \tilde{\mu}) \in \mathbb{R}^{k+m}$, такав да је

$$\sum_{i \in I} f_i(x)\mu_i + \langle Ax - b, \tilde{\mu} \rangle \ge 0, \, \forall x \in X,$$

где је $\mu_i \ge 0$ за свако $i \in I$, $\tilde{\mu} \in span(AX - b)$ и $\mu_i > 0$ за неко $i \in I_2$.

У случају да систем (2.2) не садржи трећу једначину $Ax = b$, Теорема 2.11 има следећи облик.

Теорема 2.12. *[4] Нека постоји $\bar{x} \in X$ такво да је $f_i(\bar{x}) < 0$ за свако $i \in I_1$. Тада су следећа тврђења алтернативна.*

(а) Постоји решење $x \in L$ система

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i \in I_1 \\ f_i(x) < 0, & i \in I_2 \\ x \in X. \end{cases} \tag{2.3}$$

(б) Постоји ненула вектор $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$, такав да важи

$$\sum_{i \in I} f_i(x)\mu_i \geq 0, \forall x \in X, \tag{2.4}$$

где је $\mu_i \geq 0$ за свако $i \in I$ и $\mu_i > 0$ за неко $i \in I_2$.

Треба напоменути да уколико систем (2.2) садржи само строге неједнакости, Теорема 2.11 се у ствари своди на добро познату Теорему 2.9. Теорема 2.11 не важи без претпоставке строге решивости (2.1). Чак и ако се претпостави да је систем (2.1) решив, (али не и строго решив) тада тврђење Теореме 2.11 не важи. Показаћемо ово у наредним примерима.

Пример 2.13. *[4] Нека је $L = X = \mathbb{R}$. За $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$, разматрајмо систем:*

$$\begin{cases} f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) < 0, \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где је

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \geq 0 \\ x^2, & \text{за } x < 0 \end{cases}$$

и $f_2(x) = x$. Видимо да систем (2.5) има облик (2.3) и $x = 0$ је решење неједнакости $f_1(x) \leq 0$. Очигледно, $f_1(x) < 0$ нема решења, па тврђење (а) Теореме 2.12 није тачно. На основу Теореме 2.12 онда је тврђење (б) тачно. Показаћемо да и тврђење (б) ипак није тачно. Узмимо произвољне $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 > 0$. Очигледно постоји $x < 0$ такво да важи

$$\varphi_1 f_1(x) + \varphi_2 f_2(x) = \varphi_1 x^2 + \varphi_2 x < 0.$$

Закључујемо да и тврђење (б) Теореме 2.12 није тачно.

Пример 2.14. *[4] Нека је $L = \mathbb{R}^2$, $X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$, $f_i : \mathbb{R}^2 \to \bar{\mathbb{R}}$,*

$i = 1, 2, 3,\ I_1 = \{1, 2\},\ I_2 = \{3\}$. *Разматрајмо систем:*

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 \ \le 0, \\ f_2(x) = -x_1 \ \le 0, \\ f_3(x) < 0, \\ x \in X, \end{cases} \tag{2.6}$$

где је

$$f_3(x) = \begin{cases} -\sqrt{x_1} + x_2^2, & \text{за } \ x_1 \ge 0 \\ +\infty, & \text{за } \ x_1 < 0. \end{cases}$$

Видимо да систем (2.6) *има облик* (2.3) *и* $x = (x_1, x_2) = 0$ *је решење система*

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 \ \le 0, \\ f_2(x) = -x_1 \ \le 0, \\ x \in X. \end{cases} \tag{2.7}$$

Јасно је да (2.6) *нема решења, тј. тврђење (а) Теореме 2.12 није тачно. Показаћемо да и тврђење (б) ипак није тачно. Узмимо произвољне* $\varphi_1 \ge 0$, $\varphi_2 \ge 0$ *и* $\varphi_3 > 0$. *Очигледно да за довољно мало* $\varepsilon > 0$ *и* $x = (\varepsilon, 0) \in X$, *важи*

$$\sum_{j=1}^{3} \varphi_j f_j(x) = \varphi_1 \varepsilon - \varphi_2 \varepsilon - \varphi_3 \sqrt{\varepsilon} < 0.$$

Закључујемо да и тврђење (б) Теореме 2.12 није тачно.

2.3 Неке примене теорема алтернативе. Услови оптималности у математичком програмирању

Разматрајмо проблем математичког програмирања:

$$\begin{aligned} & f_0(x) \to \inf; \\ \text{п.о.} \quad & f_i(x) \le 0, \ \ i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{П1}$$

где је X подскуп од $\mathbb{R}^n$ и f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ функције дефинисане на скупу X. Скуп $\Omega = \{x \in X : f_i(x) \le 0,\, i \in I\}$ зваћемо допустиви скуп проблема (П1).

Дефиниција 2.2. *Допустива тачка* $\hat{x}$ *је оптимално решење проблема* (П1) *ако важи*

$$f_0(\hat{x}) \le f_0(x), \, \forall x \in \Omega.$$

Ако је X конвексан скуп и f_i, $i \in I$ конвексне функције на скупу X, проблем (П1) постаје проблем конвексног програмирања. Наредне две теореме први пут су доказане у [39] а могу се наћи и у монографији [48]. Овде ћемо опет формулисати и доказати теореме које дају неопходне услове оптималности за проблем (П1). Овај приступ ће уједно бити мотивација за решавање неких конвексних проблема оптимизације са непрекидним временом у функционалним просторима, о чему ће бити речи у наредним поглављима.

Теорема 2.15. *[Фриц-Џонови неопходни услови] Нека је $\hat{x}$ оптимално решење конвексног проблема* (П1)*. Тада постоји множилац $\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ различит од нуле такав да су задовољени следећи услови:*

0. $\hat{u} \geq 0$,

1. $\hat{u}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i \in I$,

2. $\sum_{i=0}^{m} \hat{u}_i f_i(x) \geq \sum_{i=0}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x})$, $\forall x \in X$.

Доказ. Ако је $\hat{x}$ оптимално решење проблема (П1) очигледно систем

$$\begin{cases} f_0(x) - f_0(\hat{x}) < 0, \\ f_i(x) \leq 0, \, i \in I \end{cases} \tag{2.8}$$

нема решења $x \in X$. (Јер ако би систем (2.8) имао друго оптимално решење $\bar{x} \in X$, очигледно би то решење $\bar{x}$ било допустиво и уједно задовољавало $f_0(\bar{x}) < f_0(\hat{x})$, што је супротно претпоставци теореме да је $\hat{x}$ оптимално решење проблема (П1)). Ако систем (П1) нема решење онда и систем

$$\begin{cases} f_0(x) - f_0(\hat{x}) < 0, \\ f_i(x) < 0, \, i \in I \end{cases} \tag{2.9}$$

нема решење $x \in X$, па на основу Теореме 2.9 постоји ненула множилац
$\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\hat{u} \geq 0$ такав да важи

$$\hat{u}_0 \left(f_0(x) - f_0(\hat{x})\right) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(x) \geq 0 \;\forall x \in X. \tag{2.10}$$

Стављањем $x = \hat{x}$ у (2.10), добијамо

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) \geq 0. \tag{2.11}$$

Како је $\hat{x} \in \Omega$, то је $f_i(\hat{x}) \le 0$, $i \in I$. Из услова $\hat{u} \ge 0$, закључујемо да важи

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) \le 0, \tag{2.12}$$

што заједно са (2.11) даје

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) = 0$$

и услов комплементарности 1. Из претходног закључка и неједнакости (2.10) добијамо

$$\hat{u}_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(x) \ge \hat{u}_0 f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) \;\; \forall x \in X. \tag{2.13}$$

Овим смо доказали и услов трансверзалности 2. $\square$

Дефиниција 2.3. *Нека је X конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$. Кажемо да ограничења задовољавају Слејтеров услов регуларности (СУ) , ако постоји $\bar{x} \in X$ такав да је $g_i(\bar{x}) < 0$, $i \in I$.*

Теорема 2.16. *[Кун-Такерови неопходни услови] Нека је $\hat{x}$ оптимално решење проблема конвексног програмирања* (П1). *Ако је задовољен Слејтеров услов (СУ), онда постоји $\hat{u} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in \mathbb{R}^m$ такав да су задовољени следећи услови :*

0. $\hat{u} \ge 0$,

1. $\hat{u}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i \in I$,

2. $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(x) \ge f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) \;\; \forall x \in X$.

Доказ. Ако је $\hat{x}$ оптимално решење проблема (П1) онда систем

$$\begin{cases} f_0(x) - f_0(\hat{x}) < 0, \\ f_i(x) \le 0, \, i \in I \end{cases} \tag{2.14}$$

нема решења $x \in X$. Како су сви услови Теореме 2.12 испуњени, постоји ненула множилац $\hat{v} = (\hat{v}_0, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\hat{v} \ge 0$, $\hat{v}_0 > 0$, такав да важи

$$\hat{v}_0 \left(f_0(x) - f_0(\hat{x})\right) + \sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i f_i(x) \ge 0 \; \forall x \in X, \tag{2.15}$$

тј.

$$\hat{v}_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i f_i(x) \ge \hat{v}_0 f_0(\hat{x}) \; \forall x \in X. \tag{2.16}$$

Дељењем неједнакости (2.16) са $\hat{v}_0 > 0$ и стављањем

$$\hat{u}_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{v}_0} \; i \in I,$$

добијамо

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(x) \geq f_0(\hat{x}) \ \forall x \in X. \tag{2.17}$$

Стављањем $x = \hat{x}$ у (2.15), добијамо

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) \geq 0. \tag{2.18}$$

Како је $\hat{x} \in \Omega$, то је $f_i(\hat{x}) \leq 0$, $i \in I$. Из услова $\hat{u} \geq 0$, слично као у доказу Теореме 2.15, закључујемо да важи и супротна неједнакост у претходној неједнакости што заједно са (2.18) даје услов комплементарности 1. Из услова 1 и неједнакости (2.17) коначно добијамо

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(x) \geq f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) \ \ \forall x \in X. \tag{2.19}$$

Овим смо доказали и услов трансверзалности 2. □

Сада ћемо извести неопходне услове оптималности за проблем (П1), користећи додатне претпоставке диференцијабилности. Овде дајемо занимљив геометријски приступ за решавање овог проблема.

Нека је у проблему (П1) скуп X непразан, отворен у $\mathbb{R}^n$, функције $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ диференцијабилне и $\Omega \neq \emptyset$. Дефинишимо скуп активних индекса ограничења са $A(\hat{x}) = \{i \in I : f_i(\hat{x}) = 0\}$.

Дефиниција 2.4. *За тачку $\hat{x}$ кажемо да је локално оптимално решење проблема* (П1) *на скупу Ω ако важи*

$$f_0(\hat{x}) \leq f_0(x), \ \forall x \in \mathcal{N}(\hat{x}) \cap \Omega,$$

где је $\mathcal{N}(\hat{x})$ нека околина тачке $\hat{x}$ или нека кугла у некој метрици са центром у $\hat{x}$.

Дефиниција 2.5. *За вектор $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, кажемо да је вектор допустивог правца у тачки $\hat{x} \in \Omega$ ако постоји $\epsilon > 0$ такав да $\hat{x} + \theta d \in \Omega$ за свако $\theta \in (0, \varepsilon]$. Скуп свих допустивих праваца скупа Ω у $\hat{x}$ означаваћемо са $\mathcal{F}(\Omega, \hat{x})$.*

Услови оптималности Каруш-Кун-Такеровог и Фриц-Џоновог типа за гладак случај у нелинеарном програмирању добро су изучени у [5, 48]. Поменути услови, уз додатне претпоставке регуларности ограничења могу се наћи у [1, 3, 33, 42, 109]. Добро је познато да су приликом извођења ових услова коришћене Горданова и Моцкинова теорема алтернативе. Овде ћемо дати један геометријски приступ за извођење услова оптималности Фриц-Џоновог и Каруш-Кун-Такеровог типа. Користићемо Горданову теорему алтернативе. Овај приступ ће уједно бити мотивација за решавање неких глатких проблема оптимизације са непрекидним временом у функционалним просторима, о чему ће бити речи у наредним поглављима.

Дефинишимо конусе:

$$K(f_0, \hat{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n : \nabla f_0(\hat{x})' h < 0\},$$
$$K(\Omega, \hat{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n : \nabla f_i(\hat{x})' h < 0,\ i \in A(\hat{x})\}.$$

Лема 2.17. *[5] Ако је $\hat{x}$ локално оптимално решење проблема* (П1)*, онда је*

$$\mathcal{F}(\Omega, \hat{x}) \cap K(f_0, \hat{x}) = \emptyset. \tag{2.20}$$

Лема 2.18. *[5] Ако је $\hat{x}$ локално оптимално решење проблема* (П1)*, онда је*

$$K(\Omega, \hat{x}) \subseteq \mathcal{F}(\Omega, \hat{x}). \tag{2.21}$$

Теорема 2.19. *Ако је $\hat{x}$ локално оптимално решење проблема* (П1)*, онда је*

$$K(f_0, \hat{x}) \cap K(\Omega, \hat{x}) = \emptyset. \tag{2.22}$$

Доказ. Доказ директно следи из Леме 2.17 и Леме 2.18. □

Користићемо претходну Теорему да изведемо неопходне услове Фриц-Џоновог и Каруш-Кун-Такеровог типа за проблем (П1). Сличан доказ се може наћи у [48] уз различите претпоставке регуларности. Приступ примењен овде је геометријског типа, а више о конусима и дуалним конусима у теорији екстремалних проблема, као и сличним геометријским приступима може се прочитати у [26].

Теорема 2.20. *[Фриц-Џонови неопходни услови] Ако је допустива тачка $\hat{x}$ локално решење проблема* (П1)*, тада постоји множилац*
$\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ различит од нуле такав да су задовољени услови:

0. $\hat{u} \geq 0$,

1. $\hat{u}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i \in I$,

2. $\hat{u}_0 \nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \nabla f_i(\hat{x}) = 0$.

Доказ. Ако је $\hat{x}$ локално оптимално решење (П1) на основу Теореме 2.19 је
$K(f_0, \hat{x}) \cap K(\Omega, \hat{x}) = \emptyset$, одакле следи да не постоји $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$ тако да систем

$$\begin{cases} f_0(\hat{x})' \tilde{u} < 0, \\ f_i(\hat{x})' \tilde{u} < 0,\ i \in A(\hat{x}), \end{cases} \tag{2.23}$$

има решење. Сада на основу Теореме 2.1 постоји ненула множилац $\bar{u} \in \mathbb{R}^{|A(\hat{x})|+1}$, $\bar{u} \geq 0$ тако да важи

$$\bar{u}_0 \nabla f_0(\hat{x})' \tilde{u} + \sum_{i \in A(\hat{x})} \bar{u}_i \nabla f_i(\hat{x})' \tilde{u} = 0,\ \forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n,$$

тј.

$$\left(\bar{u}_0\nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i\in A(\hat{x})} \bar{u}_i\nabla f_i(\hat{x})\right)' \tilde{u} = 0,\ \forall \tilde{u}\in\mathbb{R}^n. \tag{2.24}$$

Како једнакост (2.24) важи за свако $\tilde{u}\in\mathbb{R}^n$, закључујемо да је

$$\bar{u}_0\nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i\in A(\hat{x})} \bar{u}_i\nabla f_i(\hat{x}) = 0. \tag{2.25}$$

Стављањем $\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m)$ где је

$$\hat{u} = \begin{cases} \bar{u}_0, & i = 0 \\ \bar{u}_i, & i\in A(\hat{x}) \\ 0, & i\in \bar{A}(\hat{x}), \end{cases}$$

добијамо да услови 0 и 2 важе. Услов 1 (услов комплементарности) директно следи из тога да уколико су ограничења активна тада је $f_i(\hat{x}) = 0$ за $i\in A(\hat{x})$ а ако нису онда је одговарајуће $\hat{u}_i = 0$ за $i\in\bar{A}(\hat{x})$. □

Услови овог типа први пут су добијени 1948. године у раду [33]. Недостатак претходне теореме је у томе што немамо гаранцију да је множилац $\hat{u}_0$ придружен функцији циља различит од нуле. Заправо, ако је он нула, изгубићемо информације о изводу функције циља, а то ће отежати потрагу за оптималним решењем. Ово се у теорији екстремалних проблема може избећи уз додатне претпоставке регуларности ограничења. Више о условима регуларности може се наћи у [5, 48, 109]. У наредном тексту, разматраћемо један занимљив услов регуларности ограничења.

Дефиниција 2.6. *Кажемо да је задовољен услов регуларности типа Мангасарјан--Фромовица у тачки $\hat{x}\in\Omega$ ако постоји $h\in\mathbb{R}^n$ такво да је*

$$\nabla f_i(\hat{x})'h < 0, \forall i\in A(\hat{x}). \tag{МФУ}$$

Добро је познат услов регуларности овог типа за проблем нелинеарног програмирања са ограничењима типа неједнакости и једнакости.

Теорема 2.21. *[Каруш-Кун-Такерови неопходни услови] Ако је допустива тачка $\hat{x}$ локално решење проблема* (П1) *и задовољен је услов регуларности* (МФУ), *онда постоји множилац $\hat{v} = (\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m)\in\mathbb{R}^m$ такав да су задовољени услови:*

0. $\hat{v}\geq 0$,

1. $\hat{v}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i\in I$,

2. $\nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{v}_i\nabla f_i(\hat{x}) = 0$.

Доказ. Из Теореме 2.20, следи да постоји ненула множилац $\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ такав да важи

$$\left(\hat{u}_0 \nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i \in A(\hat{x})} \hat{u}_i \nabla f_i(\hat{x})\right)' \tilde{u} = 0, \ \forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.26}$$

Доказаћемо да мора бити $\hat{u}_0 \neq 0$. Претпоставимо супротно. Нека је $\hat{u}_0 = 0$. Из (2.26) добијамо да је

$$\left(\sum_{i \in A(\hat{x})} \hat{u}_i \nabla f_i(\hat{x})\right)' \tilde{u} = 0, \ \forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Како претходни систем има решење, на основу Теореме 2.1 систем

$$\nabla f_i(\hat{x})' \tilde{u} < 0, \ i \in A(\hat{x})$$

нема решење $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$, што је супротно услову регуларности (МФУ). Дакле, мора бити $\hat{u}_0 \neq 0$. Дељењем израза (2.26) са $\hat{u}_0$ и стављањем

$$\hat{v}_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{u}_0}, \ i \in I,$$

добијамо, слично као у претходној Теореми, да су услови 0-2 задовољени. □

Заправо, уз једну додатну претпоставку регуларности ограничења отклонили смо недостатак Теореме 2.20 и добили услов да множилац $\hat{u}_0$ придружен функцији циља мора бити различит од нуле.

Знамо да уз додатну претпоставку (АХУ)-регуларности (видети [3]) можемо такође добити неопходне услове оптималности Каруш-Кун-Такеровог типа у којима се гарантује да је множилац придружен функцији циља различит од нуле. Такође, ово се може постићи уз претпоставку да је X конвексан, отворен и да су ограничења проблема (П1) конвексна и задовољавају Слејтеров услов регуларности.

Још један познат услов регуларности у теорији нелинеарног програмирања, који треба поменути овде је линеарна независност градијената функција ограничења активних у тачки $\hat{x}$. Наиме, могуће је доказати да су услови 0-2 неопходни за оптималност у глатком случају, при чему се користи споменути услов регуларности градијената. Више о условима регуларности у нелинеарном програмирању може се наћи у [5, 48, 109].

Следећи сличан геометријски приступ у коначно-димензионом случају, представљен у претходним параграфима, аутори су у раду [53] добили неопходне услове оптималности за скаларан проблем оптимизације са непрекидним временом. Поменуте услове су добили применом нове теореме алтернативе за систем конвексних неједнакости у функционалним просторима (уместо уопштене Гордանове теореме), користећи уопштени услов регуларности (МФУ) у функционалним просторима.

Услови оптималности за проблеме вишекритеријумске оптимизације могу се такође извести уз додатне претпоставке регуларности примењујући Теореме 2.1 и 2.4. Поменути услови, као и детаљни докази могу се наћи у [12, 51]. За још примена теорема алтернативе у вишекритеријумском програмирању може се погледати рад [47].

2.4 Теореме алтернативе у бесконачно-димензионим просторима и примене на неке класе проблема оптимизације са непрекидним временом

Претходно наведене теореме алтернативе имају велике примене у различитим проблемима оптимизације. Подсетили смо се неких битних примена у претходном поглављу. У последњих тридесет година, добијена су многа уопштења ових теорема за различите класе функција. Уз додатне претпоставке генерализоване конвексности доказане су теореме алтернативе које се примењују за добијање услова оптималности у различитим областима оптимизације. Више о претходно поменутом може се наћи у [18, 22, 64, 93, 94, 102].

Теорија која се тиче теорема алтернативе за системе са линеарним неједнакостима и једнакостима је добро позната и може се наћи у многим монографијама и радовима који се баве теоријом нелинеарног програмирања, оптимизације и применама. Ипак, бесконачно-димензиона уопштења поменутих теорема нису тако позната и представљају занимљиво поље за изучавање. Такође, неки резултати који се тичу поменутих уопштења у бесконачно-димензионим просторима су нетачни, па су одговарајући услови оптималности и резултати теорије дуалности, добијени применом таквих теорема, некоректни. У тези ће бити изучавани такви проблеми и циљ је добијање нових услова оптималности као и теорема дуалности уз додатне претпоставке регуларности. Полазна тачка за дисертацију је нова теорема алтернативе у бесконачно-димензионим просторима уместо већ поменуте уопштене Гордановe теореме.

Још у уводу смо навели да су главни резултати у раду [75] засновани на теореми алтернативе у функционалним просторима, која је коришћена за извођење Фриц-Џонових и Каруш-Кун-Такерових услова оптималности за негладак проблем оптимизације са непрекидним временом. Међутим, Залмаи је 1985. године први пут приметио у раду [99] да доказ ове теореме није тачан. Зато је Реијланд 1980. године у раду [67] следио мало другачији приступ за добијање неопходних услова за скаларне проблеме оптимизације са непрекидним временом. Уместо поменуте теореме, у његовом раду је примењена уопштена Фаркашева лема, коју су доказали Крејвен и Колиха 1977. године у [17]. Поменута лема је касније представљена и у монографији [16]. У наставку дајемо ово тврђење.

Дефиниција 2.7. *Нека је X локално конвексан простор. За $K \subset X$ кажемо да је* *конвексан конус ако важи*

1. $x \in K,\ \lambda \geq 0 \implies \lambda x \in K$,
2. $x, y \in K \implies x + y \in K$.

Дефиниција 2.8. *Дуалан конус K^* конвексног конуса $K \subset X$ је скуп*

$$K^* = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle \geq 0,\ \forall x \in K\},$$

где је X^* тополошки дуал од X.

Теорема 2.22. *[17] [Крејвен и Колиха 1977.] (***Уопштена Фаркашева лема***) Нека су X и Y локално конвексни простори, $K \subseteq X$ конвексан конус у X и $A : X \to Y$ непрекидно линеарно пресликавање. Ако је $A(K)$ строго затворен, онда су следећи услови за $b \in Y$ еквивалентни:*

I: $Ax = b$ има решење $x \in K$.

II: $A^* y^* \in K^* \implies \langle b, y^* \rangle \geq 0$.

Међутим, Реијланд је морао да доста појача претпоставке за дати проблем, које су практично веома тешке за проверу. Како би применио уопштену Фаркашеву лему, он је морао да претпостави да језгро датог оператора (између бесконачно димензионих простора) има коначну димензију, а слика овог оператора је затворени потпростор, а касније да би добио и неопходне услове оптималности за поменути проблем, поред поменутог услова, морао је и да претпостави уопштени Слејтеров услов регуларности. Дакле, поменута уопштена Фаркашева лема се није показала погодна за примену у даљим истраживањима за добијање услова оптималности и дуалних резултата у области проблема оптимизације са непрекидним временом. Зато је Залмаи 1985. године у раду [96], покушао да уопшти Горданову теорему алтерантиве (видети Теорему 2.1), без додатних услова регуларности, која би се примењивала на ове класе проблема. Овде дајемо формулацију поменуте теореме.

Теорема 2.23. *[96] [Залмаи 1985.] (***Уопштена Горданова теорема***) (***Нетачна теорема***) Нека је U непразан конвексан подскуп од $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ и функција $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ дефинисана са $g(t, x(t)) = \gamma(x)(t)$, $\gamma : U \to L_\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$ конвексна по другом аргументу на $[0,T]$. Тада, или*

$$\begin{aligned}
&I:\ \exists x(\cdot) \in U \text{ тако да је } g(t, x(t)) < 0 \text{ с.с. на } [0,T],\\
&\text{или је}\\
&II:\ \int_0^T \varphi'(t) g(t, x(t))dt \geq 0,\ \forall x(\cdot) \in U \text{ и за неко } \varphi(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^k)\\
&\qquad \varphi(t) \geq 0,\ \varphi(t) \neq 0 \text{ с.с. на } [0,T].
\end{aligned}$$

Велика важност наведеног тврђења и његових директних последица (видети [96]) за решавање различитих класа проблема оптимизације у функционалним просторима довела је до различитих уопштења. Видети радове [16, 32, 49, 57, 61, 63, 71, 102].

Као неке од последица горе наведене Теореме 2.23, доказане су уопштена Моцкинова теорема алтернативе (видети рад [96]) и уопштена Теорема 2.10 у функционалним просторима.

Након тога, у многим радовима из ове области, добијене теореме алтернативе примењиване су за добијање неопходних и довољних услова оптималности. У [98, 100, 103] добијени су услови оптималности за одређене класе конвексних, фракционих и глатких екстремалних проблема у функционалним просторима. У [99] је добијена теорија оптималности и дуалности, увођењем Лагранжове функције за конвексан проблем оптимизације са непрекидним временом. У раду [98] добијене су теореме Фриц--Џоновог и Каруш-Кун-Такеровог типа за гладак проблем оптимизације са непрекидним временом. Ови услови представљају уопштења услова добијених у Теореми 2.20 и Теореми 2.21. Чак је геометријски приступ и начин доказивања тих теорема био сличан доказима поменутих теорема у коначно-димензионим просторима. Резултати из поменутог рада су касније коришћени у радовима [97, 101] за добијање услова оптималности и теорема дуалности за класе фракционих и хомогених проблема оптимизације са непрекидним временом. Треба напоменути да су поменути резултати служили као инспирација многим математичарима у овој области да добију нове услове оптималности Фриц-Џоновог и Каруш-Кун-Такеровог типа уз додатне претпоставке генерализоване конвексности. Ови резултати се могу наћи у радовима [10, 56–59, 62, 63, 70].

У раду [10] аутори су, следећи сличан приступ као у раду [98], добили неопходне услове оптималности Фриц-Џоновог (Теорема 4.1) и Каруш-Кун-Такеровог типа (Теорема 5.1) за скаларни негладак проблем оптимизације са непрекидном временом уз додатни Липшицов услов. Главни апарат за добијање ових услова је била Теорема 2.23.

Нажалост, 2013. године у раду [32], показано је да је приступ у доказивању Теореме 2.23 и њених последица био погрешан. Наиме, дат је једноставан контрапример који показује да доказ ове теореме није тачан. Недуго затим, 2019. године у раду [4], аутори су конструисали контрапример за Теорему 2.23, а затим доказали нову теорему алтернативе у функционалним просторима за систем строгих и нестрогих конвексних неједнакости. Такође, у овом раду је показано да нова теорема алтернативе важи уз додатну претпоставку регуларности. Дакле, директно одатле следи да ни поменуте теореме о неопходним условима за негладак проблем у раду [10], нису тачне као и неки претходни резултати.

Нека је $L_\infty([0,1];\mathbb{R})$ простор Лебег-мерљивих, есенцијално ограничених функција $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ на сегменту $[0,1]$. Нека за конвексан скуп $U \subset L_\infty([0,1];\mathbb{R})$ и функцију $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важе следеће претпоставке:

(а) $g(t,\cdot)$ је непрекидна и конвексна за скоро свако $t \in [0,1]$,

(б) $g(\cdot,x)$ је Лебег-мерљива $\forall x \in \mathbb{R}$,

(ц) $\forall K \geq 0$, $\exists M \geq 0$ тако да је $|g(t,x)| \leq M$ за скоро свако $t \in [0,1]$, $\forall x$, $|x| \leq K$.

Нека је $g(t,x) = 1 - tx$ и $U = L_\infty([0,1];\mathbb{R})$. Систем

$$I : \begin{cases} g(t,x) < 0, \\ x(\cdot) \in U, \end{cases} \tag{2.27}$$

нема решења, јер очигледно свака функција $x(\cdot)$ која задовољава неједнакост

$$g(t,x(t)) = 1 - tx(t) < 0$$

с.с. на $[0,1]$ није есенцијално ограничена. Узмимо произвољну функцију $\varphi(\cdot) \in L_\infty([0,1];\mathbb{R})$, такву да је $\varphi(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$. Стављајући

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\varepsilon], \\ \frac{1+\varphi(t)}{t}, & t \in (\varepsilon,1], \end{cases} \tag{2.28}$$

за свако $\varepsilon \in (0,1)$, добијамо да је

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t,x_\varepsilon(t))\varphi(t)dt &= \int_0^\varepsilon 1 \cdot \varphi(t)dt + \int_\varepsilon^1 \left(1 - t\frac{1+\varphi(t)}{t}\right)\varphi(t)dt \\ &= \int_0^\varepsilon \varphi(t)dt - \int_\varepsilon^1 \varphi^2(t)dt < 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

за довољно мало $\varepsilon > 0$. Одавде следи да и ситем II из Теореме 2.23 нема решење, што противречи тврђењу ове теореме. Заправо, очигледно је да Теорема 2.23 није тачна, као ни њене директне последице.

У [63], аутори су добили оптималне услове Каруш-Кун-Такеровог типа, као и теореме слабе (јаке) дуалности за инвексан проблем оптимизације са непрекидним временом. Ови услови оптималности су добијени уз додатну Карлинову регуларност ограничења у функционалним просторима (видети [48]). У овом раду, главни апарат за добијање неопходних услова оптималности, била је Моцкинова Теорема алтернативе из [96], која је такође нетачна на основу претходног излагања.

У раду [56] аутори су, користећи везу између скаларног и фракционог проблема, па затим поменуту Теорему 5.1. из [10] добили неопходне услове оптималности за скаларни негладак фракциони проблем оптимизације са непрекидном временом уз задовољен Липшицов услов. Дакле и ови резултати нису добри.

Недуго затим, Теорема 2.23 и њене последице су коришћене за добијање критеријума оптималности за одређене класе проблема вишекритеријумске оптимизације у функционалним просторима. Слично као у раду [63], аутори су добили оптималне услове у раду [62] за инвексан проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом, применом поменуте теореме.

У [58, 59] добијени су неопходни и довољни услови оптималности и теореме слабе (јаке) дуалности Монд-Веировог и Волфовог типа за негладак проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Минимизација је разматрана у Парето оптималном смислу. У овим радовима, главни апарат је била Теорема 5.1. о неопходним условима за скаларни проблем из [10]. Применом ове Теореме и добро познате скаларизације, којом се векторски проблем конвертује у скаларни, добијени су неопходни услови оптималности. Довољни услови су добијени уз додатне претпоставке генерализоване инвексности. Како је у овим радовима, као главни апарат, коришћена горње поменута Теорема 5.1. из [10], чија је валидност такође доведена у питање због Теореме 2.23, то ни услови оптималности и дуални резултати у [58, 59] нису коректни.

Слично, у радовима [49, 61] добијени су неопходни, доволји услови оптималности и теореме слабе (јаке) дуалности за негладак проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом, али уз додатне претпоставке преинвексности. У овим радовима, главни апарат за добијање неопходних услова оптималности, била је поменута уопштена Горданова Теорема алтернативе у преинвексном контексту. У раду [61] коришћена је дефиниција својственог Парето оптималног решења (видети [25]), док су у раду [49] разматрани услови оптималности у Парето оптималном смислу. Знамо да је из теорије вишекритеријумске оптимизације, свако Парето својствено уједно и Парето оптимално решење.

Након тога, 2015. године, у раду [71], уведен је појам псеудоинвексности-II. Затим су добијени услови оптималности Каруш-Кун-Такеровог типа у псеудоинвексном концепту. Показано је да је векторско ККТ решење уједно и Парето оптимално решење вишекритеријумског проблема ако и само ако је дати проблем ККТ-псеудоинвексан-$-II$. Доказане су уједно и теореме слабе (јаке) дуалности за дати проблем. Као главни апарат, коришћена је уопштена Моцкинова Теорема алтернативе из [96], чија је валидност, такође доведена у питање на основу контрапримера из [4].

Наравно, као што се може видети у претходним параграфима, уопштена Горданова Теорема се показала доста практична за примене у овој области истраживања, тако да је велики број истакнутих математичара исту и користио. Ипак, иако на први поглед има једноставан доказ, видели смо да ова теорема није тачна. Заправо, све теореме алтернативе у бесконачно-димензионим просторима захтевају неки услов регуларности, о коме ће бити више речи у наредном поглављу.

2.5 Нова теорема алтернативе у функционалним просторима за систем строгих и нестрогих конвексних неједнакости

Из претходног поглавља смо видели да многи резултати из литературе, у области оптимизације са непрекидним временом, нису тачни јер су користили нетачну теорему алтернативе. У овом поглављу, формулисаћемо нову теорему алтернативе коју су доказали Арјутунов, Жуковски и Маринковић у [4].

Нека је $(E, \|\cdot\|)$ Банахов простор са датим функцијама $g_i : [0,1] \times E \to \bar{\mathbb{R}}$, $i = 1, \ldots, k$ и $X \subset E$. За вектор $x \in E$ и линеаран ограничен функционал $\psi \in E^*$, означаваћемо са $\langle \psi, x \rangle$ вредност ψ у x. Са $L_\infty([0,T]; X)$ означаваћемо простор n-димензионих Лебег-мерљивих, есенцијално ограничених функција $x : [0,T] \to X$ на сегменту $[0,T]$.

Претпоставимо да су задовољени следећи услови:

(а) X је затворен и конвексан;

(б) За свако $i = 1, \ldots, k$ функција $g_i(t, \cdot)$ је конвексна, непрекидна на X и $X \subset int(dom(g_i(t, \cdot)))$ за скоро свако $t \in [0,1]$;

(ц) За свако $i = 1, \ldots, k$, функција $g_i(\cdot, x)$ је Лебег-мерљива за свако $x \in X$;

(д) За свако $K \geq 0$ постоји $M = M(K) \geq 0$ такво да важи
$\|x\| \leq K \Rightarrow |g_i(t,x)| \leq M$, $\dot{\forall} t \in [0,1]$, $\forall x \in X$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$.

Нека су $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ два дисјунктна скупа индекса тако да је $\mathcal{I}_1 \sqcup \mathcal{I}_2 = \{1, \ldots, k\}$. Означимо са

$$\mathcal{I}(t,x) = \Big\{ i : g_i(t,x) = \max_{j=1,\ldots,k} g_j(t,x) \Big\}, \;\; t \in [0,1], \;\; x \in X,$$

скуп активних индекса система

$$\begin{cases} g_i(t,x) \leq 0, \; i \in \mathcal{I}_1, \\ g_i(t,x) < 0, \; i \in \mathcal{I}_2, \\ x \in X. \end{cases} \tag{2.30}$$

Решење система (2.30) је функција $x(\cdot) \in L_\infty([0,1]; X)$ таква да за скоро свако $t \in [0,1]$, важи:

$$\begin{cases} g_i(t,x(t)) \leq 0, \; i \in \mathcal{I}_1, \\ g_i(t,x(t)) < 0, \; i \in \mathcal{I}_2, \\ x(t) \in X. \end{cases}$$

Дефиниција 2.9. *[2, 31, 69] За конвексну функцију $g : E \to \mathbb{R}$ означаваћемо са*

$$\partial g(x) = \{x^* \in E^* : g(x+h) \geq \langle x^*, h \rangle + g(x), \; \forall h \in E\}$$

субдиференцијал функције g у тачки x.

За функцију $g : [0,T] \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ и тачку $t \in [0,T]$ такву да је $g(t,\cdot)$ конвексна, означаваћемо са $\partial_x g(t,x)$ субдиференцијал $g(t,\cdot)$ у тачки $x \in E$.

Дефиниција 2.10. *[14] Нека је $(E, \|\cdot\|)$ нормиран простор и $X \subset E$. Тангентни конус $T_X(x)$ скупа X у тачки $x \in X$, садржи све тачке $h \in E$ које се могу представити у облику*

$$h = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x}{\alpha_k},$$

где је $\{x_k\}$ низ у X који конвергира ка x, и $\{\alpha_k\}$ је низ позитивних бројева који конвергира ка 0.

Дефиниција 2.11. [4] *Систем (2.30) је регуларан ако постоји функција $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,1], X)$, позитивни реални бројеви R и α такви да за скоро свако $t \in [0,1]$*

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \setminus B(\bar{x}(t), R) \ \exists e = e(t,x) \in (-T_X(x)) \cap S_E : \\ &\langle x^*, e\rangle \geq \alpha \ \ \forall x^* \in \partial_x g_i(t,x) \ \ \forall i \in \mathcal{I}(t,x), \end{aligned} \tag{2.31}$$

где S_E и $B(x,R)$ редом означавају јединичну сферу у E и отворену лопту са центром у $x \in E$ полупречника R.

Размотримо следеће примере.

Пример 2.24. *[4] Нека је $E = X = \mathbb{R}$, $g_1(t,x) = -x$, $g_2(t,x) = -sgn(t-\frac{1}{2})x$, $t \in [0,1]$. Размотримо следећи систем :*

$$\begin{cases} g_1(t,x) \leq 0, \\ g_2(t,x) < 0, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Овде је очигледно $\mathcal{I}_1 = \{1\}$ и $\mathcal{I}_2 = \{2\}$. Показаћемо да је овај систем регуларан.

Видимо да је

$$\mathcal{I}(t,x) = \begin{cases} \{1,2\}, & \forall t > \frac{1}{2}, \\ \{1\}, & \forall t < \frac{1}{2},\ \forall x < 0, \\ \{2\}, & \forall t < \frac{1}{2},\ \forall x > 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Узмимо

$$e(t,x) = \begin{cases} -1, & \text{за } t > \frac{1}{2} \text{ или } (t < \frac{1}{2} \text{ и } x < 0), \\ \ \ 1, & \text{за } t < \frac{1}{2} \ \text{ и } \ x > 0, \end{cases} \tag{2.34}$$

$\alpha = 1$, $R > 0$ и $\bar{x}(t) \equiv 0$. За овако изабране α, R, $\bar{x}(\cdot)$ и $e(t,x)$ видимо да је услов регуларности (2.31) за систем (2.32) задовољен.

Пример 2.25. *Нека је* $E = X = \mathbb{R}^2$ *и за* $t \in [0,1]$,

$$g_1(t,x) = x_1 + x_2,\ g_2(t,x) = 2x_1 + 5x_2,\ g_3(t,x) = x_1 - 2x_2,$$
$$g_4(t,x) = -x_1 - 2x_2,\ g_5(t,x) = -x_1 + x_2.$$

Разматајмо систем:

$$\begin{cases} g_1(t,x) < 0, \\ g_2(t,x) \le 0, \\ g_3(t,x) \le 0, \\ g_4(t,x) \le 0, \\ g_5(t,x) \le 0, \\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.35}$$

Дефинишимо следеће скупове:

$$A_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{7}x_1 + x_2 \ge 0,\ \frac{3}{4}x_1 + x_2 \ge 0\},$$
$$A_3 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{7}x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 \ge 0\},$$
$$A_4 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le 0,\ x_2 \le 0\},$$
$$A_5 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{4}x_1 + x_2 \le 0,\ x_2 \ge 0\}.$$

Лако се види да је за $(x_1,x_2) \in int(A_i)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{i\}$ *с.с. на* $[0,1]$ *за* $i = 2,3,4,5$. *Није тешко показати да је* $\bigcup_{i=2}^{5} A_i = \mathbb{R}^2$. *Даље још важи:*

1. $2 \notin \mathcal{I}(t,x)$ *за* $(x_1,x_2) \in int\,(A_3 \cup A_4 \cup A_5)$, *с.с. на* $[0,1]$,
2. $\mathcal{I}(t,x) = \{2,5\}$ *за* $(x_1,x_2) \in int(A_2 \cup A_5)$, *с.с. на* $[0,1]$,
3. $\mathcal{I}(t,x) = \{2,3\}$ *за* $(x_1,x_2) \in int(A_2 \cup A_3)$, *с.с. на* $[0,1]$.

Узмимо $\bar{x}(t) \equiv (0,0)$, $R \ge 0$ *и* $\alpha = \frac{1}{10}$. *Услов регуларности* (2.31) *је задовољен за:*

(а) $e = e(t,x) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ *за* $(x_1,x_2) \in int\,(A_3 \cup A_4 \cup A_5)$,

(б) $e = e(t,x) = (0,1)$ *за* $(x_1,x_2) \in int\,(A_2 \cup A_5)$ *или* $(x_1,x_2) \in int(A_2)$, *и*

(ц) $e = e(t,x) = (\frac{19}{20}, \frac{\sqrt{39}}{20})$ *за* $(x_1,x_2) \in int\,(A_2 \cup A_3)$,

за с.с. $t \in [0,1]$.

Следећи резултат је нова теорема алтернативе, која ће бити фундаменталан апарат у овој тези и даљем извођењу неопходних услова оптималности за неке класе проблема оптимизације са непрекидним временом.

Теорема 2.26. *[4]* (**Теорема алтернативе**) [Арјутунов, Жуковски, Маринковић] *Нека је Банахов простор E сепарабилан, систем* (2.30) *регуларан и за скоро свако $t \in [0,1]$, постоји $u = u(t) \in X$ тако да је $g_i(t, u(t)) < 0$ за свако $i \in \mathcal{I}_1$. Тада, једно и само једно од следећа два тврђења је тачно.*

I: Постоји решење $\mathcal{X}(\cdot)$ система (2.30).

II: Постоји ненула функција $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_k(\cdot)) \in L_\infty([0,1], \mathbb{R}^k_+)$ таква да је $\varphi_i(t) \not\equiv 0$ за неко $i \in \mathcal{I}_2$ и за скоро свако $t \in [0,1]$

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(t,x)\varphi_i(t) \geq 0 \ \ \forall x \in X. \tag{2.36}$$

Јасно је да Теорема 2.26 важи ако сегмент $[0,1]$ заменимо неким другим сегментом $[0,T]$.

Приметимо, да је Теорема 2.26 аналогон Теореме 2.12. За примену и једне и друге теореме неопходан је Слејтеров услов. Једина разлика између ове две теореме је у одсуству услова регуларности у Теореми 2.12. То је због чињенице да је услов регуларности потребан за испитивање решења $x(t)$ система (2.30) у зависности од параметра t. Ако се дубље анализира доказ Теореме 2.26, види се да услов регуларности подразумева, да ако су за свако t неједнакости система (2.30) задовољене за неко $x = x(t)$, тада се може изабрати мерљиво ограничено решење $x(\cdot)$ система (2.30).

Заправо, већина теорема алтернативе у функционалним просторима захтева неки услов регуларности. Већ смо поменули да су у наведеној литератури, коришћене различите теореме алтернативе приликом извођења неопходних и довољних услова оптималности за одређене класе проблема оптимизације са непрекидним временом. Поменуте теореме су такође директно биле апарат за добијање слабих и јаких теорема дуалности, за те класе проблема. На пример, Рејиланд је у [67] користио уопштену Фаркашеву лему за линеарне системе у бесконачно-димензионим просторима. Због тога је морао да направи веома јаке претпоставке које су тешке за проверу. Недуго затим, Залмаи и други аутори [10, 62] користили су уопштену Горданову теорему алтернативе. На сличан начин, у радовима [57, 71] коришћена је уопштена Моцкинова теорема алтернативе, као директна последица уопштене Горданове теореме алтернативе, која је имала погрешан доказ.

У овој тези, користићемо нову теорему алтернативе уз услов регуларности, коју су формулисали и доказали Арјутунов, Жуковски и Маринковић.

3 Услови оптималности и дуалност у конвексним проблемима оптимизације са непрекидним временом

У овој глави разматраћемо следећи скаларни проблем оптимизације са непрекидним временом:

$$
\begin{aligned}
&J_0(x(\cdot)) = \int_0^T f_0(t, x(t))dt \to \inf; \\
&\qquad \text{п.о. } f_i(t, x(t)) \le 0, \;\; i \in I = \{1, \dots, m\}, \;\; \text{с.с. на } [0,T], \\
&\qquad\qquad x(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n),
\end{aligned} \tag{СПНВ}
$$

где су $f_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, дате функције. Овде је за свако $t \in [0,T]$, $x_i(t)$ i-та компонента од $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и сви интеграли су дати у Лебеговом смислу. Са Ω_P ћемо означавати допустив скуп проблема (СПНВ):

$$
\Omega_P = \left\{ x(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n) : f_i(t, x(t)) \le 0, \;\; i \in I, \; \text{с.с. на } [0,T] \right\}.
$$

За свако $i = 0, \dots, m$ функција $f_i(t, \cdot)$ је конвексна и непрекидна на $\mathbb{R}^n$, за с.с. $t \in [0,T]$. За свако $i = 0, \dots, m$ функција $f_i(\cdot, x)$ је Лебег мерљива за свако $x \in \mathbb{R}^n$ и за свако $K \ge 0$ постоји $M = M(K) \ge 0$ такво да важи

$$
\|x\| \le K \Rightarrow |f_i(t, x)| \le M \text{ за с.с. } t \in [0,T], \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall\, i = 0, \dots, m.
$$

Дефиниција 3.1. *Функција $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ је оптимално решење проблема* (СПНВ) *ако је $J_0(\hat{x}(\cdot)) \le J_0(x(\cdot))$, $\forall x(\cdot) \in \Omega_P$.*

3.1 Лагранжов принцип минимума

У математичком програмирању, веза између решења главног проблема са ограничењима и решења проблема које задовољава услове о седластој тачки добро је позната. У овом поглављу, уопштићемо те резултате на конвексан проблем оптимизације са непрекидним временом. Почињемо са новом дефиницијом Лагранжове функције у функционалним просторима.

Дефинишимо Лагранжову функцију $\mathcal{L} : L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ која одговара проблему (СПНВ) на следећи начин:

$$
\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda(\cdot)) = \int_0^T \left(f_0(t, x(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) f_i(t, x(t)) \right) dt.
$$

Дефиниција 3.2. *За* $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *кажемо да је Каруш-Кун-Такерова седласта тачка Лагранжове функције* $\mathcal{L}$ *проблема* (СПНВ) *ако је* $\hat{\lambda}(t) \geq 0$ *с.с. на* $[0,T]$ *и*

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \lambda(\cdot)) \leq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \leq \mathcal{L}(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)), \tag{3.1}$$

за свако $x(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$ *и све* $\lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^m)$, $\lambda(t) \geq 0$ *с.с. на* $[0,T]$.

Дефиниција 3.3. *Кажемо да је задовољен Слејтеров услов регуларности* (СУ1) *ако*

$$\exists y(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n) \ \text{ таква да је } \ f_i(t, y(t)) < 0, \, i \in I \ \text{ с.с. на} \, [0,T]. \tag{СУ1}$$

Нека је $\tilde{x}(\cdot) \in \Omega_P$ оптимално решење проблема (СПНВ). Следећи систем ће бити коришћен у наредном тврђењу:

$$\begin{aligned}
&\chi_0(t,x) := \int_0^T (f_0(t,x) - f_0(t, \tilde{x}(t))) \, dt < 0, \\
&\chi_i(t,x) := f_i(t,x) \leq 0, \ \ i \in I, \\
&x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Нека је $I_0 = \{0\} \cup I$ и

$$\mathcal{I}(t,x) = \Big\{ j \in I_0 : \chi_j(t,x) = \max \{\chi_0(t,x), \chi_1(t,x), \ldots, \chi_m(t,x)\} \Big\}, \, t \in [0,T], \, x \in \mathbb{R}^n.$$

Дефиниција 3.4. *Услов регуларности* (УР1) *је задовољен, ако постоји функција* $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$, *реални бројеви* $R \geq 0$ *и* $\alpha > 0$ *такви да за с.с.* $t \in [0,1]$ *и за свако* $x \in \mathbb{R}^n$, *за које је* $\|x - \bar{x}(t)\| \geq R$, *постоји јединични вектор* $e = e(t,x) \in \mathbb{R}^n$ $(\|e\| = 1)$, *који задовољава услов*

$$\langle \partial_x \chi_j(t,x), e \rangle \geq \alpha \ \ \forall j \in \mathcal{I}(t,x). \tag{УР1}$$

У следећој теореми дајемо неопходне услове Каруш-Кун-Такеровог типа.

Теорема 3.1. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (СПНВ). *Претпоставимо да су задовољени услов регуларности* (УР1) *и Слејтеров услов* (СУ1). *Тада постоје* $\hat{\lambda}_i(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R})$, $i \in I$, *такве да је* $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot))$ *Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема* (СПНВ) *и важи*

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \, i \in I, \ \text{ с.с. на } \ [0,T].$$

Доказ. Претпоставимо да је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (СПНВ). Тада не постоји функција $x(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$ таква да је следећи систем сагласан:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (f_0(t, x(t)) - f_0(t, \hat{x}(t))) \, dt < 0, \\
&f_i(t, x(t)) \leq 0, \ \ i \in I, \ \text{с.с. на } [0,T].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Јасно је да су све претпоставке Теореме 2.26 задовољене. Стога, постоје функције $(\hat{v}_0(\cdot), \hat{v}_1(\cdot), \ldots, \hat{v}_m(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^{m+1})$, где је $\hat{v}_0(t) \geq 0$, $\hat{v}_i(t) \geq 0$, $i \in I$, $t \in [0,T]$, и $\hat{v}_0(t) \not\equiv 0$, такве да је

$$\begin{aligned} \hat{v}_0(t) \int_0^T f_0(t, x(t))dt + \sum_{i=1}^m \hat{v}_i(t) f_i(t, x(t)) \geq \\ \hat{v}_0(t) \int_0^T f_0(t, \hat{x}(t))\, dt,\ \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \text{ с.с. на } [0,T]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Стављањем $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ у горњу неједнакост, добијамо да је

$$\sum_{i=1}^m \hat{v}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) \geq 0 \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

Али, како је $\hat{v}_i(t) \geq 0$, $i \in I$, с.с. на $[0,T]$ и $\hat{x}(\cdot) \in \Omega_P$, то је и супротна неједнакост задовољена у претходној формули. Зато, имамо да је

$$\hat{v}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0,\ i \in I,\ \text{с.с. на } [0,T]. \tag{3.5}$$

Интеграцијом неједнакости (3.4) од 0 до T, добијамо

$$w \int_0^T f_0(t, x(t))dt + \int_0^T \sum_{i=1}^m \hat{v}_i(t) f_i(t, x(t))\, dt \geq w \int_0^T f_0(t, \hat{x}(t))\, dt, \tag{3.6}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, где је

$$w = \int_0^T \hat{v}_0(t)\, dt > 0.$$

Заменом

$$\hat{\lambda}_i(t) = \frac{\hat{v}_i(t)}{w} \geq 0,\ i \in I,\ \text{с.с. на } [0,T],$$

у (3.5) и (3.6) добијамо

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(f_0(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i(t) f_i(t, x(t)) \right) dt \\ &\geq \int_0^T \left(f_0(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) \right) dt \\ &= \int_0^T f_0(t, \hat{x}(t))dt \geq \int_0^T \left(f_0(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) \right) dt \\ &\forall x(\cdot) \in (L_\infty[0,T];\mathbb{R}^n),\ \forall \lambda(\cdot) \in (L_\infty[0,T];\mathbb{R}^m),\ \lambda(t) \geq 0 \ \text{ с.с. на } [0,T]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Одавде следи да је $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема (СПНВ). Поред тога, задовољен је и услов комплементарности

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0,\ i \in I \ \text{с.с. на } [0, T].$$

$\square$

Услови Теореме 3.1 су и довољни за оптималност функције $\hat{x}(\cdot)$.

Теорема 3.2. *Ако је $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot))$ Каруш-Кун-Такерова седласта тачка, онда је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема* (СПНВ).

Доказ. Ако је $\lambda_i \equiv 0$, $i \in I$, неједнакост (3.1) постаје

$$\int_0^T f_0(t, \hat{x}(t))\, dt \le \int_0^T \left(f_0(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i(t) f_i(t, x(t)) \right) dt,\ \forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n).$$

За све допустиве функције $x(\cdot)$ важи

$$\begin{aligned} \int_0^T f_0(t, x(t)) dt &\ge \int_0^T \left(f_0(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i(t) f_i(t, x(t)) \right) dt \\ &\ge \int_0^T f_0(t, \hat{x}(t))\, dt, \end{aligned}$$

тако да одавде следи

$$\int_0^T f_0(t, \hat{x}(t))\, dt \le \int_0^T f_0(t, x(t))\, dt,\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P.$$

Одавде закључујемо да је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (СПНВ). $\square$

За илустрацију претходног, дајемо следећи пример:

Пример 3.3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \big(|x(t) - t| + x^2(t) - 2tx(t) + t^2 + 1\big)\, dt &\to \inf; \\ -x(t) \le 0 \ \text{ с.с. на } \ [0, 1]&, \\ e^{x(t)-t} - 1 \le 0 \ \text{ с.с. на } \ [0, 1]&, \\ x(\cdot) \in L_\infty([0, 1]; \mathbb{R})&, \end{aligned} \tag{П}$$

где су $f_0(t, x(t)) := |x(t) - t| + x^2(t) - 2tx(t) + t^2 + 1,\ f_1(t, x(t)) := -x(t),\ f_2(t, x(t)) := e^{x(t)-t} - 1$.

Лако се проверава да је за с.с. t на $[0, 1]$, $\hat{x}(t) = t$ оптимално решење претходног проблема. Слејтеров услов (СУ1) је задовољен за $y(t) = \frac{t}{2}$.

Узмимо $x \in \mathbb{R}$ и за с.с. t на $[0,1]$ нека је $\chi_1(t,x) = -x$, $\chi_2(t,x) = e^{x-t} - 1$ и

$$\chi_0(t,x) = \begin{cases} x^2 - 2x + \frac{5}{6}, & \text{за } x \leq 0, \\ 2x^2 - 2x + \frac{5}{6}, & \text{за } x \in (0,1), \\ x^2 - \frac{1}{6}, & \text{за } x \geq 1. \end{cases}$$

Узмимо $\bar{x}(t) \equiv 2$, $R = 3$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Јасно је да је

$$\mathcal{I}(t,x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{за } x \leq -1,\ t \in [0,1], \\ \{2\}, & \text{за } x \geq 5, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

Услов регуларности (УР1) је задовољен за $e = e(t,x) = 1$, за с.с. $t \in [0,1]$, за $x \geq 5$, тј.

$$\langle \partial_x \chi_2(t,x), e \rangle \geq \alpha.$$

На исти начин закључујемо да је услов регуларности (УР1) задовољен за $e = (t,x) = -1$, за с.с. $t \in [0,1]$, за $x \leq -1$, тј.

$$\langle \partial_x \chi_0(t,x), e \rangle = 1 \geq \alpha.$$

Заиста, за $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,5)$, имамо да је

- $\langle \partial_x \chi_0, e \rangle = \langle 2x - 2, -1 \rangle \geq \alpha$, за $x \leq -1$, $e = -1$ и $t \in [0,1]$,
- $\langle \partial_x \chi_2, e \rangle = \langle e^{x-t}, 1 \rangle \geq \alpha$, за $x \geq 5$, $e = 1$ и $t \in [0,1]$.

У наставку, из неједнакости

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) &= \int_0^1 \left(|x(t) - t| + x^2(t) - 2tx(t) + t^2 + e^{x(t)-t} \right) dt \\ &\geq \int_0^1 \left(|x(t) - t| + (x(t) - t)^2 + 1 + x(t) - t \right) dt \\ &\geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \\ &= 1 \\ &\geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \lambda(\cdot)), \end{aligned}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,1]; \mathbb{R})$, $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot)) \in L_\infty([0,1]; \mathbb{R}^2)$, $\lambda(t) \geq 0$ с.с. на $[0,1]$, лако се закључује да је $(\hat{x}(t), \hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)) = (t, 0, 1)$ за с.с. t на $[0,1]$ Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема (П). Лако се проверава да су задовољени услови комплементарности

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0,\ i = 1,2, \text{ с.с. на } [0,1].$$

Дефиниција 3.5. *Кажемо да је функција $f(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ линеарна по x ако* *за свако* $y,\, z \in \mathbb{R}^n$ *и с.с.* $t \in [0,T]$*, важи*

$$f(t, y+z) = f(t,y) + f(t,z) \text{ и } f(t, \alpha y) = \alpha f(t,y),\, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Нека је L подскуп индекса скупа I за који је функција f_i, $i \in I$ линеарна по другом аргументу. Слично овоме, обележимо са N подскуп скупа индекса I за који је функција f_i, $i \in I$ нелинеарна по другом аргументу. Наравно да је $I = L \sqcup N$.

Следећи сличан приступ, са додатном претпоставком регуларности ограничења добијамо нове услове екстремума за наш проблем, где најмање један множилац који одговара нелинеарним функцијама ограничења, мора бити различит од нуле.

Теорема 3.4. *Нека је функција* $f_0(t,\cdot)$ *линеарна и нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (СПНВ)*. Претпоставимо да је задовољен услов регуларности* (УР1)*, Слејтеров услов* (СУ1) *и нека постоји* $z(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ *таква да је* $f_0(t, z(t)) < 0$ *и* $f_i(t,z(t)) \leq 0$ *за* $i \in L$ *с.с. на* $[0,T]$*. Тада постоје* $\hat{\lambda}_i(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R})$*,* $i \in I$*, такве да је* $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot))$ *Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема* (СПНВ)*, где је* $\hat{\lambda}_i(t) \not\equiv 0$ *за неко* $i \in N$*,* $t \in [0,T]$*, и важи*

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0,\, i \in I, \text{ с.с. на } [0,T].$$

Доказ. Као у доказу Теореме 3.1, $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot))$ је Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема (СПНВ) и важи услов комплементарности

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0,\, i \in I, \text{ с.с. на } [0,T].$$

Сада ћемо још додатно доказати да постоји $i \in N$ такво да је $\hat{\lambda}_i(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$. Претпоставимо да ово није тачно. Нека је $\hat{\lambda}_i \equiv 0$, $\forall i \in N$. Дефинишимо функционал $\Phi : L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$\Phi(x(\cdot)) = \int_0^T \left(f_0(t, x(t)) + \sum_{i \in L} \hat{\lambda}_i(t) f_i(t, x(t)) - f_0(t, \hat{x}(t)) \right) dt.$$

Како је $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot))$ Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема (СПНВ), имамо да је

$$\Phi(x(\cdot)) \geq 0, \;\; \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n).$$

За $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$, из услова комплементарности

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \; i \in I \;\text{ с.с. на } [0,T],$$

добијамо да важи $\Phi(\hat{x}(\cdot)) = 0$. Како је $\Phi(x(\cdot))$ линеаран, ненегативан и анулира се у $\hat{x}(\cdot)$, закључујемо да се овај функционал анулира на целом простору $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$. Према томе, добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi(\hat{x}(\cdot)+z(\cdot)) &= \int_0^T \left(f_0(t,\hat{x}(t)+z(t)) + \sum_{i\in L} \hat{\lambda}_i(t) f_i(t,z(t)) - f_0(t,\hat{x}(t)) \right) dt \\ &= \int_0^T \left(f_0(t,z(t)) + \sum_{i\in L} \hat{\lambda}_i(t) f_i(t,z(t)) \right) dt = 0,\end{aligned}$$

што је у супротности са претпоставком $f_i(t,z(t)) \le 0$ за $i \in L$ и $f_0(t,z(t)) < 0$ с.с. на $[0,T]$. Јер, из претходног и услова да је $\hat{\lambda}(t) \ge 0$ с.с. на $[0,T]$, би следило $\Phi(\hat{x}(\cdot)+z(\cdot)) < 0$. $\square$

Као илустрацију претходне Теореме разматраћемо следећи пример.

Пример 3.5.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x_1(t)-x_2(t))\, dt &\to \inf; \\ -x_1(t)-1 \le 0 &\text{ с.с. на } [0,1], \\ 3x_1(t)+2x_2(t) \le 0 &\text{ с.с. на } [0,1], \\ x_i(\cdot) \in L_\infty([0,1];\mathbb{R}),\ i&=1,2.\end{aligned}$$

Видимо да је $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = (-1, \frac{3}{2})$ с.с. на $[0,1]$ оптимално решење нашег проблема, где је

$$f_0(t,x(t)) = x_1(t) - x_2(t),\ f_1(t,x(t)) = -x_1(t) - 1,\ f_2(t,x(t)) = 3x_1(t) + 2x_2(t).$$

Слејтеров услов (СУ1) је задовољен за $y(t) = (\frac{t}{3}, -\frac{t+1}{2})$ с.с. на $[0,1]$ и постоји $z(t) = (-t-1, t)$ с.с. на $[0,1]$, тако да је $f_0(t,z(t)) < 0$ и $f_2(t,z(t)) \le 0$ с.с. на $[0,1]$. Узмимо $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ и за са с.с. $t \in [0,1]$, нека је

$$\begin{aligned}\chi_0(t,x) &= x_1 - x_2 + \frac{5}{2}, \\ \chi_1(t,x) &= -x_1 - 1, \\ \chi_2(t,x) &= 3x_1 + 2x_2.\end{aligned}$$

Дефинишимо скупове

$$\begin{aligned}A &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{5}{6} \ge 0,\ 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2} \ge 0\}, \\ B &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2} \le 0,\ -2x_1 + x_2 - \frac{7}{2} \ge 0\}, \\ C &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : -2x_1 + x_2 - \frac{7}{2} \le 0,\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{5}{6} \le 0\}.\end{aligned}$$

Очигледно је $\partial_x \chi_0(t,x) = (1,-1)$, $\partial_x \chi_1(t,x) = (-1,0)$ и $\partial_x \chi_2(t,x) = (3,2)$. Лако се проверава да је $A \cap B \cap C = \{(-1, \frac{3}{2})\}$, $A \cup B \cup C = \mathbb{R}^2$ и

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(t,x) &= \{2\} \text{ у } int(A),\\
\mathcal{I}(t,x) &= \{1\} \text{ у } int(B),\\
\mathcal{I}(t,x) &= \{0\} \text{ у } int(C),\\
\mathcal{I}(t,x) &= \{1,2\} \text{ у } (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C),\\
\mathcal{I}(t,x) &= \{0,2\} \text{ у } (A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C),\\
\mathcal{I}(t,x) &= \{0,1\} \text{ у } (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Услов регуларности (УР1) система

$$\begin{aligned}
&\chi_0(t,x) = x_1 - x_2 + \frac{5}{2} < 0,\\
&\chi_1(t,x) = -x_1 - 1 \leq 0,\\
&\chi_2(t,x) = 3x_1 + 2x_2 \leq 0,\\
&x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

је задовољен за $\bar{x}(t) \equiv (-1, \frac{3}{2})$, $R = 2$, $\alpha = \frac{1}{10}$ и за с.с. $t \in [0,1]$,

- $e(t,x) = (1,0)$ за $x \in int(A)$,
- $e(t,x) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ за $x \in int(B)$,
- $e(t,x) = (1,0)$ за $x \in int(C)$,
- $e(t,x) = (1,0)$ за $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$,
- $e(t,x) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ за $x \in (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$,
- $e(t,x) = (-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ за $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Даље, видимо да је $(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)) = (-1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ с.с. на $[0,1]$ Каруш-Кун-Такерова седласта тачка нашег проблема и услови комплементарности су задовољени јер је $\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0$, $i = 1,2$ с.с. на $[0,1]$. Такође, из Теореме 3.4 директно видимо да је $\hat{\lambda}_1(t)$ различита од нуле на $[0,1]$.

3.2 Теореме дуалности

У овом поглављу, наш циљ ће бити да добијемо теореме слабе и јаке дуалности између проблема (СПНВ) и њему одговарајућег дуалног проблема (ДПНВ), датог са:

$$\begin{aligned}
&F(\lambda(\cdot)) \to \sup;\\
\text{п.о } &\lambda(t) \geq 0, \ \text{ с.с. на } [0,T],\\
&\lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^m).
\end{aligned} \tag{ДПНВ}$$

Овде је

$$F(\lambda(\cdot)) = \inf_{x(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(x(\cdot),\lambda(\cdot)),$$

и Ω_D означава скуп допустивих решења проблема (ДПНВ) тј.,

$$\Omega_D = \{\lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m) : \lambda(t) \geq 0, \text{ с.с. на } [0,T]\}.$$

Први резултат је слаба теорема дуалности, и она је директна последица дефиниције проблема (ДПНВ). Уосталом, она има и неке значајне последице које ћемо дефинисати у наставку.

Теорема 3.6. *(Теорема слабе дуалности) Нека су редом $x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ и $\lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ допустива решења проблема* (СПНВ) *и* (ДПНВ). *Тада важи*

$$F(\lambda(\cdot)) \leq J_0(x(\cdot)).$$

Доказ. Из дефиниције функције F, добијамо

$$F(\lambda(\cdot)) = \inf_{\tilde{x}(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)} \int_0^T \left(f_0(t,\tilde{x}(t)) + \sum_{i\in I} \lambda(t) f_i(t,\tilde{x}(t)) \right) dt$$

$$\leq \int_0^T f_0(t,x(t))dt + \int_0^T \sum_{i\in I} \lambda_i(t) f_i(t,x(t))dt.$$

Како је $\lambda(\cdot) \in \Omega_D$ и $x(\cdot) \in \Omega_P$, тј. $\lambda(t) \geq 0$ и $f_i(t,x(t)) \leq 0$, $i \in I$ с.с. на $[0,T]$, онда је

$$\int_0^T \sum_{i\in I} \lambda_i(t) f_i(t,x(t))dt \leq 0.$$

Даље, следи

$$F(\lambda(\cdot)) \leq \int_0^T f_0(t,x(t))dt + \int_0^T \sum_{i\in I} \lambda_i(t) f_i(t,x(t))dt \leq \int_0^T f_0(t,x(t))dt = J_0(x(\cdot)),$$

што комплетира наш доказ. □

Као последице претходног тврђења имамо следеће резултате.

Последица 3.7.

$$\sup_{\lambda(\cdot)\in\Omega_D} F(\lambda(\cdot)) \leq \inf_{x(\cdot)\in\Omega_P} J_0(x(\cdot)).$$

Видимо из претходне последице, да је оптимална вредност главног проблема већа или једнака од оптималне вредности одговарајућег дуалног проблема.

Последица 3.8. *Ако је*
$$F(\lambda(\cdot)) \geq J_0(x(\cdot))$$
за било која два допустива решења $x(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$ проблема (СПНВ) *и* (ДПНВ), *онда су $x(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$ редом оптимална решења проблема* (СПНВ) *и* (ДПНВ).

Доказ. Из Теореме 3.6, имамо да за све допустиве тачке $\tilde{x}(\cdot)$ проблема (СПНВ), важи
$$F(\lambda(\cdot)) \leq J_0(\tilde{x}(\cdot)).$$
Ако је
$$F(\lambda(\cdot)) \geq J_0(x(\cdot))$$
онда је
$$J_0(\tilde{x}(\cdot)) \geq J_0(x(\cdot)) \ \forall \tilde{x}(\cdot) \in \Omega_P.$$
Заправо ово гарантује да је $x(\cdot)$ оптимално решење проблема (СПНВ).

С друге стране је,
$$F(\lambda(\cdot)) \geq J_0(x(\cdot)) \geq F(\tilde{\lambda}(\cdot)) \ \forall \tilde{\lambda}(\cdot) \in \Omega_D.$$
То је $\lambda(\cdot)$ оптимално решење проблема (ДПНВ). □

Последица 3.9. *Ако је ∞ оптимална вредност проблема* (ДПНВ) *онда је ∞ оптимална вредност проблема* (СПНВ).

Доказ. За свако $x(\cdot) \in \Omega_P$, $\lambda(\cdot) \in \Omega_D$, важи $J_0(x(\cdot)) \geq F(\lambda(\cdot))$ и онда је
$$J_0(x(\cdot)) \geq \sup_{\lambda(\cdot)\in\Omega_D} F(\lambda(\cdot)) = \infty.$$
Одавде следи да је $J_0(x(\cdot)) = \infty$, $\forall x(\cdot) \in \Omega_P$. □

Последица 3.10. *Ако је $-\infty$ оптимална вредност проблема* (СПНВ) *онда је $-\infty$ оптимална вредност проблема* (ДПНВ).

Наредни резултат је познат као Теорема строге дуалности. Показаћемо да, уз претпоставку конвексности и одређене услове регуларности, важи Теорема строге дуалности између проблема (СПНВ) и (ДПНВ).

Теорема 3.11. *(Теорема строге дуалности) Нека је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема* (СПНВ). *Претпоставимо да су задовољени услов регуларности* (УР1) *и Слејтеров услов* (СУ1). *Тада постоји $\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$, $\hat{\lambda}(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$, таква да је $\hat{\lambda}(\cdot)$ оптимално решење проблема* (ДПНВ) *и важи*
$$F(\hat{\lambda}(\cdot)) = J_0(\hat{x}(\cdot)). \tag{3.8}$$

Доказ. Нека је

$$\hat{J}_0 = \inf_{x(\cdot)\in\Omega_P} \big\{ J_0(x(\cdot)) : x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \big\}.$$

Ако је $\hat{J}_0 = -\infty$ можемо закључити из Последице 3.10 да је

$$\hat{F} = \sup_{x(\cdot)\in\Omega_D} \big\{ F(\lambda(\cdot)) : \lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m) \big\} = -\infty,$$

па одатле следи да (3.8) важи. Претпоставимо сада да је $\hat{J}_0$ коначан. Како је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (СПНВ), из Теореме 3.1 следи да постоје $\hat{\lambda}_i(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R})$, $i \in I$, такве да је

$$\hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \ i \in I\,, \text{ с.с. на } [0,T]$$

и $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot))$ је Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема (СПНВ), тј.

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \lambda(\cdot)) \leq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \leq \mathcal{L}(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)), \tag{3.9}$$

за сваку $x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ и сваку $\lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$, такву да је $\lambda(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$.

Нека је $\lambda(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ неко допустиво решење проблема (ДПНВ). Имамо да је

$$\begin{aligned} F(\lambda(\cdot)) = & \inf_{x(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)} \int_0^T \left(f_0(t, x(t)) + \sum_{i\in I} \lambda_i(t) f_i(t, x(t)) \right) dt \\ \leq & \int_0^T \left(f_0(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i\in I} \lambda_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) \right) dt \\ \leq & \int_0^T \left(f_0(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i\in I} \hat{\lambda}_i(t) f_i(t, \hat{x}(t)) \right) dt \\ = & \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Како ово важи за било коју допустиву функцију $\lambda(\cdot)$, онда је

$$F(\hat{\lambda}(\cdot)) \leq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)).$$

С друге стране, како из (3.9), имамо да је

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \leq \mathcal{L}(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)), \ \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),$$

онда важи и супротна неједнакост, па следи

$$F(\hat{\lambda}(\cdot)) = \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)).$$

Имамо да је

$$F(\lambda(\cdot)) \leq F(\hat{\lambda}(\cdot)) \ \forall \lambda(\cdot) \in \Omega_D$$

и $\hat{\lambda}(\cdot)$ је оптимално решење проблема (ДПНВ). Како је $\hat{\lambda}_i(t)f_i(t,\hat{x}(t)) = 0$, $i \in I$, с.с. на $[0,T]$, коначно добијамо да важи

$$F(\hat{\lambda}(\cdot)) = \int_0^T \left(f_0(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i\in I} \hat{\lambda}_i(t) f_i(t,\hat{x}(t)) \right) dt = J_0(\hat{x}(\cdot)).$$

Овим смо комплетирали наш доказ. □

Пример 3.12. *Разматрајмо прималан проблем* (П) *из Примера 3.3 и њему одговарајући дуалан проблем* (Д)*:*

$$\begin{aligned} &F(\lambda(\cdot)) \to \sup; \\ &\lambda_1(t) \geq 0 \ \text{ с.с } \text{ на } \ [0,1], \\ &\lambda_2(t) \geq 0 \ \text{ с.с. } \text{ на } \ [0,1], \\ &\lambda_i(\cdot) \in L_\infty([0,1];\mathbb{R}), \ i = 1,2, \end{aligned} \tag{Д}$$

где је

$$\begin{aligned} F(\lambda(\cdot)) = & \\ \inf_{x(\cdot)\in L_\infty([0,1];\mathbb{R}^n)} & \int_0^1 \big(|x(t) - t| + x^2(t) - 2tx(t) \\ & -\lambda_1(t)x(t) + \lambda_2(t)(e^{x(t)-t} - 1) + t^2 + 1 \big) dt. \end{aligned}$$

Како је $\hat{x}(t) = t$ с.с. на $[0,1]$ оптимално решење проблема (П), постоји $\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2)$, $\hat{\lambda}(t) = (\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)) = (0,1)$ с.с. на $[0,1]$, тако да је $(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1(\cdot), \hat{\lambda}_2(\cdot))$ Каруш-Кун-Такерова седласта тачка проблема (П) и $\hat{\lambda}_i(t) f_i(t,\hat{x}(t)) = 0$, $i = 1,2$, с.с. на $[0,1]$. Такође, задовољени су услови регуларности (УР1) и (СУ1). То је $\hat{\lambda}(t) = (0,1)$ с.с. на $[0,1]$ оптимално решење проблема (Д) и $F(\hat{\lambda}(\cdot)) = 1$. Очигледно је да су оптималне вредности дуалног проблема (Д) и прималног проблема (П) једнаке.

4 Услови оптималности у конвексним проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом

Због велике важности у моделовању различитих процеса у областима машинства и дизајна система контроле лета (видети [72, 77]), проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом, у протеклих двадесет година посвећена је значајна пажња. То је резултирало обимном литературом која се бави њиховим различитим теоријским и рачунским аспектима. Први рад [74] из области вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом објављен је 1989. године. За недавна истраживања у овој области, читалац може погледати [35,49,58,59,62,71,104–106,108]. Међутим, неки од главних резултата у претходно поменутим радовима нису валидни. У радовима [10, 58, 59, 61, 62], као главни апарат за добијање услова екстремума коришћена је погрешна Теорема 2.23 и њене директне последице, о чему је било више речи у уводу.

У овој глави разматрамо конвексан проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T f(t,x(t))dt = \left(\int_0^T f_1(t,x(t))dt, \ldots, \int_0^T f_k(t,x(t))dt\right) \to \inf; \\
&\text{п.о. } g(t,x(t)) \leq 0, \quad \text{с.с. на } [0,T], \\
&\qquad x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),
\end{aligned}
\tag{ВПНВ}
$$

где су $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дате векторске функције и

$$
F_j(x(\cdot)) = \int_0^T f_j(t,x(t))dt, \ \ x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n), \ j \in J = \{1,\ldots,k\},
$$

где $f_j(t,x(t))$ означава j-ту компоненту од $f(t,x(t)) \in \mathbb{R}^k$. Даље је за свако $t \in [0,T]$, као у претходној глави $x_i(t)$ i-та компонента од $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и сви интеграли су дати у Лебеговом смислу. Означаваћемо са

$$
\Omega = \{x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) : g_i(t,x(t)) \leq 0, \ \ i \in I = \{1,\ldots,m\}, \ \text{с.с. на } [0,T]\}
$$

допустив скуп проблема (ВПНВ). Такође, сви вектори у овом поглављу биће колоне. Минимизација ће бити у смислу Парето оптималности.

Дефиниција 4.1. *Допустиво решење $\hat{x}(\cdot)$ је Парето*[10] *оптимално решење проблема* (ВПНВ) *ако не постоји друго допустиво решење $x(\cdot)$ проблема* (ВПНВ) *такво да је*

$$
F_j(x(\cdot)) \leq F_j(\hat{x}(\cdot)), \ \forall j \in J,
$$

[10] Vilfredo Federico Pareto (1848-1923) Италијански економиста

са најмање једном строгом неједнакошћу.

4.1 Каруш-Кун-Такерови услови екстремума

У овом поглављу, разматраћемо услове оптималности за проблем (ВПНВ). Следећи резултати још нису добијени у литератури кад је проблем дефинисан у $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$. Надаље ћемо претпостављати да су функције $g_i(t,\cdot)$, $i \in I$ и $f_j(t,\cdot)$, $j \in J$, конвексне у $\mathbb{R}^n$ за с.с. $t \in [0,T]$. Такође, нека су функције $f_j(\cdot,x)$, $j \in J$ и $g_i(\cdot,x)$, $i \in I$ Лебег-мерљиве за свако $x \in \mathbb{R}^n$ и за све $M \geq 0$, $N \geq 0$ постоје $L = L(M) \geq 0$ и $K = K(N) \geq 0$ такви да важи

$$\|x\| \leq M \Rightarrow |f_j(t,x)| \leq L,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, j \in J,\ \text{ с.с. на } [0,T],$$

$$\|x\| \leq N \Rightarrow |g_i(t,x)| \leq K,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, i \in I,\ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Следећа лема показује везу између проблема (ВПНВ) и одговарајућег скаларног проблема и игра кључну улогу у доказивању главних резултата у овом поглављу.

Лема 4.1. *Функција $\tilde{x}(\cdot) \in \Omega$ је Парето оптимално решење проблема* (ВПНВ) *ако и само ако је $\tilde{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема* (СП_l) *за свако $l \in J$, дефинисаног са*

$$\begin{aligned} &F_l(x(\cdot)) \to \inf; \\ \text{п.о. } &g_i(t,x(t)) \leq 0,\ \ i \in I,\ \text{ с.с. на } [0,T], \\ &F_j(x(\cdot)) \leq F_j(\tilde{x}(\cdot)),\ \ j \in J \setminus \{l\}. \end{aligned} \tag{СП_l}$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $\tilde{x}(\cdot) \in \Omega$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВ) и претпоставимо да $\tilde{x}(\cdot)$ није оптимално решење проблема (СП_l) за неко l. Онда постоји $x(\cdot) \in \Omega$ таква да је $F_l(x(\cdot)) < F_l(\tilde{x}(\cdot))$ и $F_j(x(\cdot)) \leq F_j(\tilde{x}(\cdot))$ кад је $j \in J \setminus \{l\}$. То је у супротности са претпоставком да је $\tilde{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење.
($\Leftarrow$) Како је $\tilde{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (СП_l) за свако $l \in J$, то не постоји $x(\cdot) \in \Omega$ таква да је $F_j(x(\cdot)) \leq F_j(\tilde{x}(\cdot))$, $j \in J$ са бар једном строгом неједнакошћу за неко j. Одавде, и из Дефиниције 4.1 следи да је $\tilde{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВ). □

Дефиниција 4.2. *Кажемо да је Слејтеров услов регуларности* (СУ2) *задовољен ако*

$$\exists y(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)\ \text{ таква да је }\ g_i(t,y(t)) < 0,\, i \in I\ \text{ с.с. на }\ [0,T]. \tag{СУ2}$$

Нека је $\tilde{x}(\cdot) \in \Omega$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВ). Систем

$$\begin{aligned} &\phi_j(t,x) := f_j(t,x) - f_j(t,\tilde{x}(t)) < 0,\ \ j \in J, \\ &\phi_i(t,x) := g_i(t,x) \leq 0,\ \ i \in I, \\ &x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ћемо разматрати у наредној теореми.

Дефиниција 4.3. *Услов регуларности* (УР2) *је задовољен, ако постоји функција* $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$*, реални бројеви* $R \geq 0$ *и* $\alpha > 0$ *такви да за с.с.* $t \in [0,1]$ *и за свако* $x \in \mathbb{R}^n$*, за које је* $\|x - \bar{x}(t)\| \geq R$*, постоји јединични вектор* $e = e(t,x) \in \mathbb{R}^n$ $(\|e\| = 1)$*, који задовољава услов*

$$\langle \partial_x \phi_l(t,x), e\rangle \geq \alpha \quad \forall l \in \mathcal{I}(t,x), \tag{УР2}$$

где

$$\mathcal{I}(t,x) = \Big\{ l : \phi_l(t,x) = \max_{p \in J \cup I} \phi_p(t,x) \Big\}, \;\; t \in [0,T],$$

означава скуп активних индекса система (4.1)*.*

Сада ћемо извести Каруш-Кун-Такерове услове за проблем (ВПНВ), где је најмање једна функција (множилац) која одговара функцији циља ненула функција.

Теорема 4.2. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВ)*. Претпоставимо да су задовољени услови* (УР2) *и* (СУ2)*. Тада постоји* $(\hat{\varphi}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ *такав да су задовољени следећи услови:*

0. $\hat{\varphi}(t) \not\equiv 0$, на $[0,T]$,

1. $\hat{\varphi}(t) \geq 0$, $\hat{u}(t) \geq 0$, с.с. на $[0,T]$,

2. $\hat{u}'(t) g(t, \hat{x}(t)) = 0$, с.с. на $[0,T]$,

3. $\hat{\varphi}'(t) f(t,x(t)) + \hat{u}'(t) g(t,x(t)) \geq \hat{\varphi}'(t) f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t) g(t,\hat{x}(t))$,
$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Доказ. Претпоставимо да је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВ). На основу Леме 4.1, имамо да за неко $l \in J$ не постоји $x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ таква да је следећи систем сагласан:

$$\begin{aligned}
&F_l(x(\cdot)) - F_l(\hat{x}(\cdot)) < 0,\\
&g_i(t,x(t)) \leq 0, \;\; i \in I, \;\text{с.с. на } [0,T],\\
&F_j(x(\cdot)) - F_j(\hat{x}(\cdot)) \leq 0, \;\; j = 1,\dots,k, \;\; j \neq l.
\end{aligned}$$

Закључујемо да не постоји функција $x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ таква да је следећи систем сагласан:

$$F_j(x(\cdot)) - F_j(\hat{x}(\cdot)) < 0, \;\; j \in J, \tag{4.2}$$

$$g_i(t,x(t)) \leq 0, \;\; i \in I, \;\; \text{с.с. на } [0,T]. \tag{4.3}$$

Заправо, не постоји функција $x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ таква да је

$$f_j(t,x(t)) - f_j(t,\hat{x}(t)) < 0, \;\; j \in J, \;\text{с.с. на } [0,T], \tag{4.4}$$

$$g_i(t, x(t)) \leq 0,\ \ i \in I,\ \text{ с.с. на } [0, T].$$

Заиста, ако би евентуално $x(\cdot)$ било решење претходног система, док је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење, интеграцијом неједнакости (4.4) на $[0, T]$, добијамо

$$F_j(x(\cdot)) = \int_0^T f_j(t, x(t))dt < \int_0^T f_j(t, \hat{x}(t))dt = F_j(\hat{x}(\cdot)),\ \forall\, j \in J. \tag{4.5}$$

Међутим, (4.5) имплицира да $\hat{x}(\cdot)$ није Парето оптимално решење проблема (ВПНВ), а то противречи неједнакости (4.2). Дакле, из Теореме 2.26 закључујемо да постоји ненула функција

$$(\hat{\varphi}_1(\cdot), \ldots, \hat{\varphi}_k(\cdot), \hat{u}_1(\cdot), \ldots, \hat{u}_m(\cdot)) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^{k+m}),$$

где је $\hat{\varphi}_j(t) \geq 0,\ \hat{u}_i(t) \geq 0,\ j \in J,\ i \in I$ с.с. на $[0, T]$, и $\hat{\varphi}_j(t) \not\equiv 0$ за неко $j \in J$, таква да важи

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\varphi}_j(t)(f_j(t, x(t)) - f_j(t, \hat{x}(t))) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(t) g_i(t, x(t)) \geq 0, \tag{4.6}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0, T]$.
Стављањем $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ добијамо да је

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) \geq 0 \quad \text{с.с. на} \quad [0, T].$$

Како је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$, видимо да је супротна неједнакост очигледно задовољена. Зато важи

$$\hat{u}'(t) g(t, \hat{x}(t)) = \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0 \text{ с.с. на } [0, T],$$

а одатле је

$$\hat{u}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0,\ i \in I, \text{ с.с. на } [0, T]. \tag{4.7}$$

Из неједнакости (4.6) и (4.7) добијамо да је

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, x(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(t) g_i(t, x(t)) \geq \sum_{j=1}^{k} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)),$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ с.с. на $[0, T]$, што је заправо неједнакост

$$\hat{\varphi}'(t) f(t, x(t)) + \hat{u}'(t) g(t, x(t)) \geq \hat{\varphi}'(t) f(t, \hat{x}(t)) + \hat{u}'(t) g(t, \hat{x}(t)),$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0, T]$. Дакле, за $\hat{\varphi}(t)$ и $\hat{u}(t)$, задовољени су услови 0-3. $\square$

4.2 Довољни услови

Напомена 4.3. *Услов 3 у претходном поглављу може се заменити условом:*

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}'(t)f(t,x(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)) &\geq \hat{\varphi}'(t)f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) \\ &\geq \hat{\varphi}'(t)f(t,\hat{x}(t)) + u'(t)g(t,\hat{x}(t)),\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),\, \forall u(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m),\ u(t) \geq 0 \text{ с.с. на } [0,T].$$

Заиста, као у доказу Теореме 4.2, важе услови 0-2. Следи да из услова 2 и 3 из Теореме 4.2, важи

$$\hat{\varphi}(t)'f(t,\hat{x}(t)) + u'(t)g(t,\hat{x}(t)) \leq \hat{\varphi}(t)'f(t,\hat{x}(t)) =$$

$$\hat{\varphi}(t)'f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) \leq \hat{\varphi}(t)'f(t,x(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)),$$

$$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),\ \forall u(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m),\ u(t) \geq 0 \text{ с.с. на } [0,T],$$

па важи и (4.8).

У наредној теореми дајемо довољне услове Каруш-Кун-Такеровог типа за проблем (ВПНВ). Видећемо да су услови из Теореме 4.2 и довољни за Парето оптималност функције $\hat{x}(\cdot)$, уз додатну претпоставку.

Теорема 4.4. *Нека је $\hat{x}(\cdot)$ допустиво решење проблема* (ВПНВ). *Ако постоји $(\hat{\varphi}, \hat{u}(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ такав да су задовољени услови:*

0. $\hat{\varphi} > 0$,

1. $\hat{u}(t) \geq 0$ *с.с. на* $[0,T]$,

2. $\hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) = 0$ *с.с. на* $[0,T]$,

3. $\hat{\varphi}'f(t,x(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)) \geq \hat{\varphi}'f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t))$,
$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ *с.с. на* $[0,T]$,

онда је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВ).

Доказ. Ако ставимо $u \equiv 0$ у неједнакост (4.8), добијамо да важи

$$\hat{\varphi}'f(t,\hat{x}(t)) \leq \hat{\varphi}'f(t,x(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)),\ \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \text{ с.с. на } [0,T].$$

Онда за све допустиве $x(\cdot)$ важи

$$\hat{\varphi}'f(t,\hat{x}(t)) \leq \hat{\varphi}'f(t,x(t)) \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

Интегралимо претходну неједнакост на 0 до T и добијамо да је

$$\int_0^T \hat{\varphi}' f(t, \hat{x}(t))\, dt \leq \int_0^T \hat{\varphi}' f(t, x(t))\, dt, \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega. \tag{4.9}$$

Докажимо још да је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВ). Претпоставимо супротно, да $\hat{x}(\cdot)$ није Парето оптимално решење проблема (ВПНВ). Онда постоји $\bar{x}(\cdot) \in \Omega$ тако да је

$$\int_0^T f_j(t, \bar{x}(t))\, dt \leq \int_0^T f_j(t, \hat{x}(t))\, dt \quad \text{за све } j \in J,$$

и за најмање један индекс i важи

$$\int_0^T f_i(t, \bar{x}(t))\, dt < \int_0^T f_i(t, \hat{x}(t))\, dt.$$

Из услова 0, закључујемо да је

$$\int_0^T \hat{\varphi}' f(t, \bar{x}(t))\, dt < \int_0^T \hat{\varphi}' f(t, \hat{x}(t))\, dt.$$

Добили смо контрадикцију, јер је претходна неједнакост у супротности са претпоставком (4.9). Дакле, $\hat{x}(\cdot)$ мора бити Парето оптимално решење проблема (ВПНВ). $\square$

Као илустрацију, разматраћемо следећи пример.

Пример 4.5.

$$\left(\int_0^1 (x(t) + t)\, dt, \ \int_0^1 \left(x^2(t) - 4x(t) + 5 \right)\, dt \right) \to \inf;$$
$$-x(t) \leq 0 \text{ с.с. на } [0, 1],$$
$$x(\cdot) \in L_\infty([0, 1]; \mathbb{R}).$$

Очигледно је за с.с. $t \in [0, 1]$, $\hat{x}(t) = 0$ Парето оптимално решење овог проблема, где је

$$f_1(t, x(t)) = x(t) + t, \ f_2(t, x(t)) = x^2(t) - 4x(t) + 5 \ \ и \ \ g_1(t, x(t)) = -x(t).$$

Даље имамо да је задовољен Слејтеров услов (СУ2) за $x(t) = \frac{t}{2}$. За $x \in \mathbb{R}$ и за с.с. t на $[0, 1]$, нека је

$$\phi_1(t, x) = x, \ \phi_2(t, x) = x^2 - 4x \ \ и \ \ \phi_3(t, x) = -x.$$

Регуларност система

$$\begin{aligned} &\phi_1(t,x) = x < 0,\\ &\phi_2(t,x) = x^2 - 4x < 0,\\ &\phi_3(t,x) = -x \leq 0,\\ &x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{4.10}$$

је задовољена за $\bar{x}(t) \equiv 2$, $R = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и за с.с. $t \in [0,1]$, $e(t,x) = -1$ за $x \leq -1$ и $e(t,x) = 1$ за $x \geq 5$.
Заиста, за $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,5)$, имамо да је $\mathcal{I}(t,x) = \{2\}$ и важи:

1. $\langle \partial_x \phi_2, e \rangle \geq \alpha$, за $x \leq -1$ и $e = -1$,

2. $\langle \partial_x \phi_2, e \rangle \geq \alpha$, за $x \geq 5$ и $e = 1$.

Одавде директно закључујемо да је задовољен услов (УР2). Лако се проверава да су услови оптималности задовољени за $\hat{\varphi}_1(t) = 4$, $\hat{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}$ и $\hat{u}_1(t) = 2$ за с.с. t на $[0,1]$.

4.3 Услови екстремума за проблем (ВПНВ) уз додатне претпоставке регуларности ограничења

Нека је A подксуп скупа индекса I за који су ограничења g_i нелинеарна по x и нека је $\bar{A} = I \setminus A$ подскуп скупа индекса I за који су функције g_i линеарне по x. Слично, означимо са B подскуп индекса скупа J за који су функције циља f_j нелинеарне по x. Такође, са $\bar{B} = J \setminus B$ означавамо подскуп индекса скупа J за који су f_j линеарне по x. Са f_B и g_A, редом означавмо све компоненте од f и g са индексима из скупова B и A. Такође, са $\hat{\varphi}_B(t)$ и $\hat{u}_A(t)$, редом ћемо означавати скупове множилаца $\hat{\varphi}_j(t)$ и $\hat{u}_i(t)$ из $\hat{\varphi}(t)$ и $\hat{u}(t)$ који одговарају нелинеарним функцијама циља и нелинеарним функцијама ограничења. У складу са претходним ознакама, без губљења општости, пермутовањем компоненти на такав начин да су нелинеарне прве, можемо писати $f(t,x(t)) = (f_B(t,x(t)), f_{\bar{B}}(t,x(t)))$, $g(t,x(t)) = (g_A(t,x(t)), g_{\bar{A}}(t,x(t)))$, $\hat{u}(t) = (\hat{u}_A(t), \hat{u}_{\bar{A}}(t))$ и $\hat{\varphi}(t) = (\hat{\varphi}_B(t), \hat{\varphi}_{\bar{B}}(t))$.

Користећи сличан приступ, са додатном претпоставком регуларности, извешћемо нове услове оптималности Каруш-Кун-Такеровог типа за дати проблем, где је најмање један множилац који одговара нелинеарним функцијама циља и ограничења, различит од нуле.

Теорема 4.6. *Нека је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема* (ВПНВ)*. Претпоставимо да су задовољени услови* (УР2)*,* (СУ2) *и да постоји функција $y(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ таква да је $g_{\bar{A}}(t,y(t)) \leq 0$ и $f_{\bar{B}}(t,y(t)) < 0$ с.с. на $[0,T]$. Онда постоји $(\hat{\varphi}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ такав да су задовољени следећи услови:*

0. $\hat{\varphi}(t) \not\equiv 0$, $(\hat{\varphi}_B(t), \hat{u}_A(t)) \not\equiv 0$ на $[0, T]$,

1. $\hat{\varphi}(t) \geq 0$, $\hat{u}(t) \geq 0$, с.с. на $[0, T]$,

2. $\hat{u}'(t)g(t, \hat{x}(t)) = 0$, с.с. на $[0, T]$,

3. $\hat{\varphi}'(t)f(t, x(t)) + \hat{u}'(t)g(t, x(t)) \geq \hat{\varphi}'(t)f(t, \hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t, \hat{x}(t))$,
$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0, T]$.

Доказ. Као у доказу Теореме 4.2, имамо да су задовољени услови 0-3. Сада још треба показати да је задовољен и услов $(\hat{\varphi}_B(t), \hat{u}_A(t)) \not\equiv 0$. Претпоставимо да ово није тачно. Нека је $(\hat{\varphi}_B(t), \hat{u}_A(t)) \equiv 0$.

Дефинишимо функцију $\mathcal{L} : L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n) \to L_\infty([0, T]; \mathbb{R})$ на следећи начин

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) = \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, x(t)) + \sum_{i \in \bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t, x(t)) - \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t))$$

с.с. на $[0, T]$. Из услова 2 и 3 закључујемо да је

$$\sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, x(t)) + \sum_{i \in \bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t, x(t)) - \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t)) \geq 0,$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0, T]$.

За допустиву $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ из услова 2 имамо да је

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot)) = \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i \in \bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) - \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t)) = 0,$$

с.с. на $[0, T]$.
Како је функција $\mathcal{L}(x(\cdot))$ линеарна по $x(\cdot)$, ненегативна и анулира се у $\hat{x}(\cdot)$ с.с. на $[0, T]$, закључујемо да се дата функција анулира на целом простору $L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Такође, важи

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot) + y(\cdot)) &= \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t)) + \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, y(t)) + \sum_{i \in \bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) \\ &\quad + \sum_{i \in \bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t, y(t)) - \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, \hat{x}(t)) \\ &= \sum_{j \in \bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t, y(t)) + \sum_{i \in \bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t, y(t)) = 0 \ \text{ с.с. на } [0, T],\end{aligned}$$

што је у супротности са претпоставкама $g_{\bar{A}}(t, y(t)) \leq 0$ и $f_{\bar{B}}(t, y(t)) < 0$ с.с. на $[0, T]$, пошто из услова $g_{\bar{A}}(t, y(t)) \leq 0$, $f_{\bar{B}}(t, y(t)) < 0$ с.с. на $[0, T]$ и $\hat{u}(t) \geq 0$ с.с. на $[0, T]$,

$\hat{\varphi}(t) \not\equiv 0$, следи

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot)+y(\cdot)) = \sum_{j\in\bar{B}} \hat{\varphi}_j(t) f_j(t,y(t)) + \sum_{i\in\bar{A}} \hat{u}_i(t) g_i(t,y(t)) < 0 \ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Дакле мора бити $(\hat{\varphi}_B(t), \hat{u}_A(t)) \not\equiv 0$ на $[0,T]$. Овим је доказ комплетиран. □

Разматрамо, као илустрацију, следећи пример.

Пример 4.7.

$$\left(\int_0^1 (2t+|x_1(t)|+4x_1(t)-2x_2(t))\,dt,\ \int_0^1 (x_1(t)-x_2(t))\ dt\right) \to \inf;$$
$$x_2(t)-x_1(t)-t \le 0 \text{ с.с. на } [0,1],$$
$$-x_1(t) \le 0 \text{ с.с. на } [0,1],$$
$$x(\cdot) \in L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2).$$

Очигледно је за с.с. $t \in [0,1]$, $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = (0,t)$ Парето оптимално решење датог проблема, где је $f_{\bar{B}}(t,x(t)) = x_1(t) - x_2(t)$. Услов (СУ2) је задовољен за $x(t) = (\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ и постоји $y(t) = (\frac{t}{2}, \frac{2t}{3})$ таква да је $f_{\bar{B}}(t,y(t)) < 0$ с.с. на $[0,1]$.

За $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ и с.с. t на $[0,1]$, нека је

$$\phi_1(t,x) = 2t+|x_1|+4x_1-2x_2,$$
$$\phi_2(t,x) = x_1-x_2+t,$$
$$\phi_3(t,x) = -x_1+x_2-t,$$
$$\phi_4(t,x) = -x_1.$$

Дефинишимо скупове

$$A_1 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : -2x_1+x_2-t \le 0\},$$
$$A_3 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : -2x_1+x_2-t \ge 0,\ x_2-t \ge 0\},$$
$$A_4 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : -2x_1+x_2-t \ge 0,\ x_2-t \le 0\},$$

где је $t \in [0,1]$.

Очигледно је

$$\begin{aligned}
&\partial_x \phi_2(t,x) = (1,-1),\\
&\partial_x \phi_3(t,x) = (-1,1),\\
&\partial_x \phi_4(t,x) = (-1,0),\\
&\partial_x \phi_1(t,x) = \begin{cases} (5,-2), & x_1 > 0,\\ (\alpha,-2), \alpha \in [3,5] & x_1 = 0,\\ (3,-2), & x_1 < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Лако се проверава да је

$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \mathbb{R}^2,$$

$\{1\} \notin \mathcal{I}(t,x)$ за $(x_1,x_2) \in int(A_3 \cup A_4)$ с.с. на $[0,1]$. За $(x_1,x_2) \in int(A_i)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{i\}$, $i = 1,3,4$, с.с. на $[0,1]$. За $(x_1,x_2) \in int(A_1 \cap A_3)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{1,3\}$ с.с. на $[0,1]$. За $(x_1,x_2) \in int(A_1 \cap A_4)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{1,2,4\}$ с.с. на $[0,1]$. За $(x_1,x_2) \in int(A_3 \cap A_4)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{3,4\}$ с.с. на $[0,1]$.
Услов регуларности система

$$\begin{aligned}
&\phi_1(t,x) = 2t + |x_1| + 4x_1 - 2x_2 < 0,\\
&\phi_2(t,x) = t + x_1 - x_2 < 0,\\
&\phi_3(t,x) = -t - x_1 + x_2 \leq 0,\\
&\phi_4(t,x) = -x_1 \leq 0,\\
&x \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

је задовољен за $\bar{x}(t) \equiv 0$, $R = 2$, $\alpha = \frac{1}{10}$ и за:

а) $e(t,x) = (-1,0)$ ако је $x \in int(A_3 \cup A_4)$,

б) $e(t,x) = (1,0)$ ако је $x \in int(A_1)$,

ц) $e(t,x) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ако је $x \in int(A_1 \cap A_3)$,

д) $e(t,x) = (-\frac{1}{5}, -\frac{2\sqrt{6}}{5})$ ако је $x \in int(A_1 \cap A_4)$,

за с.с. $t \in [0,1]$.

Из Теореме 4.6 директно следи да мора бити $(\hat{\varphi}_B(t), \hat{u}_A(t)) \not\equiv 0$ на $[0,1]$. Лако се проверава да су услови Парето екстремума задовољени за $\hat{\varphi}_1(t) = t$, $\hat{\varphi}_2(t) = t$, $\hat{u}_1(t) = 3t$ и $\hat{u}_2(t) = t$ за с.с. t на $[0,1]$.

Користећи сличан приступ, кад су све функције g_i линеарне, добијамо сличне неопходне услове оптималности за проблем (ВПНВ), где најмање један множилац који одговара функцијама циља мора бити различит од нуле.

Последица 4.8. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВ) *и нека су функције* $g_i(t,\cdot)$ *линеарне за свако* $i \in I$. *Претпоставимо да су задовољени услови регуларности* (УР2), (СУ2) *и нека постоји допустива функција* $y(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ *таква да је* $f_{\bar{B}}(t,y(t)) < 0$ *с.с. на* $[0,T]$. *Онда постоји* $(\hat{\varphi}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ *такав да су задовољени услови:*

0. $\hat{\varphi}_B(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$,

1. $\hat{\varphi}(t) \geq 0$, $\hat{u}(t) \geq 0$, с.с. на $[0,T]$,

2. $\hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) = 0$, с.с. на $[0,T]$,

3. $\hat{\varphi}'(t)f(t,x(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)) \geq \hat{\varphi}'(t)f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t))$,
$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Доказ. Како су све функције ограничења g_i линеарне по x, онда је $\bar{A} = I$. На основу Теореме 4.2, задовољени су услови 1-3. Докажимо да је задовољен и услов 0.

Претпоставимо супротно, да ово није тачно, тј. да је $\hat{\varphi}_B(t) \equiv 0$. Из услова 2 и 3 добијамо да је

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) \geq 0,\ \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \text{ с.с. на } [0,T].$$

За допустиву функцију $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ из услова 2 следи

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot)) = 0 \text{ с.с. на } [0,T].$$

Како је функција $\mathcal{L}(x(\cdot))$ линеарна по $x(\cdot)$, ненегативна и анулира се у $\hat{x}(\cdot)$ с.с. на $[0,T]$, то се она анулира на целом скупу $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$. Такође, као у доказу Теореме 4.6, добијамо да важи $\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot) + y(\cdot)) = 0$, с.с. на $[0,T]$, што је супротно претпоставкама $g(t,y(t)) \leq 0$ и $f_{\bar{B}}(t,y(t)) < 0$ с.с. на $[0,T]$. □

Последица 4.9. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВ) *и нека су функције* $f_j(t,\cdot)$ *линеарне за свако* $j \in J$. *Претпоставимо да су задовољени услови регуларности* (УР2), (СУ2) *и постоји функција* $y(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ *таква да је* $g_{\bar{A}}(t,y(t)) \leq 0$ *и* $f(t,y(t)) < 0$ *с.с. на* $[0,T]$. *Онда постоји* $(\hat{\varphi}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ *такав да су задовољени следећи услови:*

0. $\hat{\varphi}(t) \not\equiv 0$, $\hat{u}_A(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$,

1. $\hat{\varphi}(t) \geq 0$, $\hat{u}(t) \geq 0$, с.с. на $[0,T]$,

2. $\hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) = 0$, с.с. на $[0,T]$,

3. $\hat{\varphi}'(t)f(t,x(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)) \geq \hat{\varphi}'(t)f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t))$,

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Занимљиво је видети како се сличан приступ може применити за добијање дуалних резултата за проблем (ВПНВ). Добијање таквих резултата за дати проблем биће циљ будућих истраживања.

5 Услови оптималности и дуалност у глатким проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом

У раду [53], су добијени нови Каруш-Кун-Такерови неопходни услови екстремума за гладак скаларни проблем са ограничењима типа неједнакости и једнакости, применом нове Теореме 2.26, уз додатну претпоставку регуларности ограничења типа Мангасарјан--Фромовица. Ови услови су прво добијени за проблем са ограничењима типа неједнакости, а онда и за проблем са ограничењима типа неједнакости и једнакости. У овој глави, разматраћемо гладак проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом само са ограничењима типа неједнакости, следећи сличан приступ као у [53].

5.1 Формулација проблема и основне дефиниције

Нека је дат проблем:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T f(t,x(t))\,dt = \left(\int_0^T f_1(t,x(t))\,dt, \ldots, \int_0^T f_k(t,x(t))\,dt\right) \to \sup; \\
\text{п.о.}\quad & g_i(t,x(t)) \geq 0,\ \ I=\{1,\ldots,m\} \text{ с.с. на } [0,T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),
\end{aligned}
\tag{ВПНВГ}
$$

где су $f_j : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in J = \{1,\ldots,k\}$ и $g_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, дате фунције и $f_j(t,x(t))$ означава j-ту компоненту од $f(t,x(t)) \in \mathbb{R}^k$. За свако $t \in [0,T]$, $x_i(t)$ је i-та компонента од $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Сви интеграли су дати у Лебеговом смислу. Нека B означава отворену јединичну лопту у $\mathbb{R}^n$ са центром у координатном почетку. Означимо са

$$\Omega = \{x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) : g_i(t,x(t)) \geq 0,\ \ i \in I,\ \text{с.с. на } [0,T]\}$$

допустив скуп решења проблема (ВПНВГ). Нека је $\varepsilon > 0$ и $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$. Нека важе следеће претпоставке:

(а) За свако $j \in J$, функција $f_j(t,\cdot)$ је непрекидно диференцијабилна у $\hat{x}(t) + \varepsilon\bar{B}$ с.с. на $[0,T]$. За свако $j \in J$, функција $f_j(\cdot,x)$ је Лебег мерљива за свако x, и постоји $K_f > 0$ тако да је

$$\|\nabla f_j(t,\hat{x}(t))\| \leq K_f,\ j \in J,\ \text{ с.с. на } [0,T];$$

(б) За свако $i \in I$, функција $g_i(t,\cdot)$ је непрекидно диференцијабилна у $\hat{x}(t) + \varepsilon\bar{B}$ с.с. на $[0,T]$. За свако $i \in I$, функција $g_i(\cdot,x(\cdot))$ је есенцијално ограничена на $[0,T]$ за свако $x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ и постоји реалан број $K_g > 0$ такав да је

$$\|\nabla g_i(t,\hat{x}(t))\| \leq K_g,\ i \in I,\ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Дефиниција 5.1. *Допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *је Парето оптимално за* (ВПНВГ) *ако не постоји друго допустиво решење* $x(\cdot)$ *за проблем* (ВПНВГ) *тако да је*

$$\int_0^T f_j(t,x(t))\,dt \geq \int_0^T f_j(t,\hat{x}(t))\,dt,\ \forall j \in J,$$

са бар једном строгом неједнакошћу.

Дефиниција 5.2. *Допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *је слабо Парето оптимално за* (ВПНВГ) *ако не постоји друго допустиво решење* $x(\cdot)$ *за проблем* (ВПНВГ) *тако да је*

$$\int_0^T f_j(t,x(t))\,dt > \int_0^T f_j(t,\hat{x}(t))\,dt,\ \forall j \in J.$$

Дефиниција 5.3. *Нека је* $\varepsilon > 0$. *Допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *је локално Парето решење проблема* (ВПНВГ) *ако постоји околина*

$$\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot),\epsilon) = \left\{x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)\ :\ x(t) \in \hat{x}(t) + \epsilon\bar{B},\ \ \text{с.с. на } [0,T]\right\}$$

тако да је $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење на* $\Omega \cap N(\hat{x}(\cdot),\varepsilon)$.

Дефиниција 5.4. *Нека је* $\varepsilon > 0$. *Допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *је слабо локално Парето решење проблема* (ВПНВГ) *ако постоји околина* $\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot),\epsilon)$ *таква да је* $\hat{x}(\cdot)$ *слабо Парето оптимално решење на* $\Omega \cap N(\hat{x}(\cdot),\varepsilon)$.

За више информација у коначно-димензионом случају, може се погледати [50,73]. Очигледно да је Парето оптимално решење уједно и локално Парето оптимално. Такође је Парето оптимално решење уједно и локално Парето оптимално решење и локално Парето оптимално решење је локално слабо Парето оптимално решење. О овим класама решења може се више наћи у [46].

Нека је $b > 0$ и $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$. Означимо са $I_b(t) = \{\, i \in I : 0 \leq g_i(t,\hat{x}(t)) \leq b \,\}$, идексни скуп b-активних ограничења у времену t са за свако $t \in [0,T]$. За све $i \in I$, дефнишимо функцију $\delta_i^b : [0,T] \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$\delta_i^b(t) = \begin{cases} 1,\ i \in I_b(t) \\ 0,\ \text{иначе.} \end{cases}$$

Дефиниција 5.5. *[53] Кажемо да је у* $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ *задовољен уопштени услов регуларности ограничења* (МФУР) *типа Мангасарјан-Фромовица, ако постоји*

$\bar{\gamma}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ *и* $\hat{b} > 0$ *шаква да је, за с.с.* $t \in [0,T]$,

$$\nabla g_i(t, \hat{x}(t))'\bar{\gamma}(t) \geq \beta,\ i \in I_{\hat{b}}(t), \tag{МФУР}$$

за неко $\beta > 0$.

Дефиниција 5.6. *[53] Нека је* $g_i(t,\cdot)$ *конкавна функција скоро свуда у* $[0,T]$, *за свако* $i \in I$. *Кажемо да је уойшшени Слејшеров услов реīуларносши* (СУР) *задовољен, ако йосшоји* $y(\cdot) \in \Omega$ *и* $\hat{b} > 0$ *шаква да је*

$$g_i(t, y(t)) \geq \beta,\ i \in I_{\hat{b}}(t) \ \text{ с.с. на } \ [0,T] \tag{СУР}$$

за неко $\beta > 0$.

Аутори су у раду [53] показали да је (СУР) довољан услов за (МФУР) уз претпоставку конкавности.

5.2 Неопходни услови

У овом поглављу разматраћемо конусе у $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ који ће нам користити за карактеризацију локалног Парето решења.

Нека је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ таква да су задовољене претпоставке (а) и (б) за неко $\varepsilon > 0$. Нека је $b > 0$. Дефинишимо следеће конусе:

$$\begin{aligned}
T_\Omega(\hat{x}(\cdot)) =& \Bigg\{ h(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) : \exists \{x_k(\cdot)\} \subset \Omega,\ \{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}_+ \downarrow 0,\ \lim_{k\to\infty} x_k(\cdot) = \hat{x}(\cdot), \\
& \quad h(\cdot) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k(\cdot) - \hat{x}(\cdot)}{\alpha_k} \Bigg\}, \\
\mathcal{A}_j(\hat{x}(\cdot)) =& \left\{ h(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) : \int_0^T \nabla f_j(t, \hat{x}(t))'h(t)\, dt > 0 \right\},\ j \in J, \\
\mathcal{F}_b(\hat{x}(\cdot)) =& \Bigg\{ h(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) : g_i(t, \hat{x}(t)) + \delta_i^b(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t))'h(t) \geq 0,\ \ i \in I \\
& \quad \text{с.с. на } [0,T] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

За више детаља о конусима, дуалним конусима и њиховим израчунавањима, може се више наћи у књизи [26]. Следећи сличан приступ, као у радовима [50,73], уз мотивацију из [53], даћемо прво неопходан геометријски услов, а онда ћемо користећи Теорему 2.26, извести неопходне услове за проблем (ВПНВГ).

Лема 5.1. *[53] Нека је* $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$. *Ако су (б) и услов реīуларносши* (МФУР) *задовољени* *за неко* $\varepsilon > 0$ *онда је* $\mathcal{F}_b(\hat{x}(\cdot)) \subset T_\Omega(\hat{x}(\cdot))$.

Последица 5.2. *Нека је* $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ *локално Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ). *Ако су претпоставке (а), (б) и услов регуларности* (МФУР) *задовољени у* $\hat{x}(\cdot)$, *онда је* $\mathcal{F}_b(\hat{x}(\cdot)) \cap \mathcal{A}_1(\hat{x}(\cdot)) \cap \ldots \cap \mathcal{A}_k(\hat{x}(\cdot)) = \emptyset$.

Нека је $\hat{x}(\cdot)$ локално Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ) и важе претпоставке (а), (б). Претпоставимо да је задовољен уопштен услов регуларности (МФУР) у $\hat{x}(\cdot)$. Разматрајмо систем

$$\begin{aligned} \phi_j(t,h) &= -\int_0^T \nabla f_j(t,\hat{x}(t))' h \, dt < 0, \ j \in J, \\ \phi_i(t,h) &= -\, g_i(t,\hat{x}(t)) - \delta_i^{\hat{b}}(t) \nabla g_i(t,\hat{x}(t))' h \leq 0, \ \ i \in I, \\ & \quad h \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

који одговара проблему (ВПНВГ). Нека је $K = J \sqcup I$ и

$$\mathcal{I}(t,h) = \big\{ i : \phi_i(t,h) = \max_{r \in K} \phi_r(t,h) \big\}, \ \ t \in [0,T], \ \ h \in \mathbb{R}^n.$$

Дефиниција 5.7. *Услов регуларности* (УРГ) *је задовољен, ако постоји функција* $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, *реални бројеви* $R \geq 0$ *и* $\alpha > 0$ *такви да за с.с.* $t \in [0,1]$ *и за свако* $h \in \mathbb{R}^n$, *за које је* $\|h - \bar{x}(t)\| \geq R$, *постоји јединични вектор* $e = e(t,h) \in \mathbb{R}^n$ ($\|e\| = 1$), *који задовољава услов*

$$\langle \partial_h \phi_i(t,h), e \rangle \geq \alpha \ \ \forall i \in \mathcal{I}(t,h). \tag{УРГ}$$

У наредној теореми дајемо неопходне услове за Парето оптималност проблема (ВПНВГ).

Теорема 5.3. *Нека је* $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ) *и претпоставимо да су (а), (б) и услов* (МФУР) *задовољени у* $\hat{x}(\cdot)$. *Ако је задовољен услов регуларности* (УРГ) *система* (5.1), *онда постоје* $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ *и* $\hat{v}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *такви да су задовољени следећи услови:*

$$\sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j \nabla f_j(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{v}_i(t) \nabla g_i(t,\hat{x}(t)) = 0 \ \text{ с.с. на } [0,T], \tag{5.2}$$

$$\hat{v}_i(t) g_i(t,\hat{x}(t)) = 0, \ \hat{v}_i(t) \geq 0, \ i \in I, \ \ \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.3}$$

$$\sum_{j=1}^k \hat{\lambda}_j = 1, \ \hat{\lambda}_j \geq 0. \tag{5.4}$$

Доказ. На основу Последице 5.2, закључујемо да не постоји $h(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ таква да је за с.с. $t \in [0,T]$ систем

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \nabla f_1(t,\hat{x}(t))'h(t)\,dt < 0,\\
&\quad\vdots\\
&-\int_0^T \nabla f_k(t,\hat{x}(t))'h(t)\,dt < 0,\\
&-g_1(t,\hat{x}(t)) - \delta_1^{\hat{b}}(t)\nabla g_1(t,\hat{x}(t))'h(t) \le 0,\\
&\quad\vdots\\
&-g_m(t,\hat{x}(t)) - \delta_m^{\hat{b}}(t)\nabla g_m(t,\hat{x}(t))'h(t) \le 0,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

сагласан. Из Теореме 2.26, закључујемо да постоји ненула функција $(\hat{\varphi}_1(\cdot),\ldots,\hat{\varphi}_k(\cdot),\hat{\mu}_1(\cdot),\ldots,\hat{\mu}_m(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^{k+m})$, где је

$$\hat{\varphi}_j(t) \ge 0,\ j \in J,\ t \in [0,T]\,(\text{и бар једна }\ \hat{\varphi}_j(t) \not\equiv 0) \tag{5.6}$$

и $\hat{\mu}_i(t) \ge 0$, $i \in I$, $t \in [0,T]$, таква да важи

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_1(t)\left(-\int_0^T \nabla f_1(t,\hat{x}(t))'h\,dt\right)\\
&+\\
&\quad\vdots\\
&+\\
&+\hat{\varphi}_k(t)\left(-\int_0^T \nabla f_k(t,\hat{x}(t))'h\,dt\right)\\
&+\hat{\mu}_1(t)\left(-\Big(g_1(t,\hat{x}(t)) + \delta_1^{\hat{b}}(t)\nabla g_1(t,\hat{x}(t))'h\Big)\right)\\
&+\\
&\quad\vdots\\
&+\\
&+\hat{\mu}_m(t)\left(-\Big(g_m(t,\hat{x}(t)) + \delta_m^{\hat{b}}(t)\nabla g_m(t,\hat{x}(t))'h\Big)\right) \ge 0
\end{aligned}$$

$\forall h \in \mathbb{R}^n$ с.с. на $[0,T]$. Множењем претходне неједнакости са -1 и стављањем $h \equiv 0$, добијамо да је

$$\sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i(t) g_i(t,\hat{x}(t)) \le 0 \ \text{ с.с. на } \ [0,T].$$

Како је $\hat{x}(\cdot)$ допустива функција, видимо да је и супротна неједнакост задовољена. На основу тога, имамо да је

$$\hat{\mu}_i(t) g_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ i \in I,\ \text{ с.с. на } \ [0,T]. \tag{5.7}$$

Следи да је

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\varphi}_j(t) \int_0^T \nabla f_j(t, \hat{x}(t))' h(t)\, dt + \sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i(t) \delta_i^{\hat{b}}(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t))' h(t) \leq 0 \tag{5.8}$$

$\forall h(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$ с.с. на $[0,T]$.

Интеграцијом неједнакости (5.8) на $[0,T]$, добијамо да важи

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\sum_{j=1}^{k} \hat{\varphi}_j(t) \int_0^T \nabla f_j(t, \hat{x}(t))' h(t)\, dt \right) dt \\ &+ \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i(t) \delta_i^{\hat{b}}(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t))' h(t) \right) dt \leq 0, \ \forall h(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Заправо, из претходног имамо да је

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} \int_0^T \hat{\varphi}_j(t)\, dt \int_0^T \nabla f_j(t, \hat{x}(t))' h(t) dt \\ &+ \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i(t) \delta_i^{\hat{b}}(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t))' h(t) \right) dt \leq 0, \ \forall h(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Стављањем

$$\hat{\psi}_j = \int_0^T \hat{\varphi}_j(t)\, dt \geq 0, \ j \in J,$$

где бар једна неједнакост мора бити строга (на основу (5.6)), добијамо да је

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\sum_{j=1}^{k} \hat{\psi}_j\, \nabla f_j(t, \hat{x}(t))' h(t) \right) dt \\ &+ \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i(t) \delta_i^{\hat{b}}(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t))' h(t) \right) dt \leq 0, \ \forall h(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Дељењем свих израза у (5.11) са $\sum_{j=1}^{k} \hat{\psi}_j > 0$ и дефинисањем

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\hat{\psi}_j}{\sum_{j=1}^{k} \hat{\psi}_j}, \quad \hat{v}_i(t) = \frac{\hat{\mu}_i(t) \delta_i^{\hat{b}}(t)}{\sum_{j=1}^{k} \hat{\psi}_j}, \ j \in J, \ i \in I, \ t \in [0,T], \tag{5.12}$$

добијамо да важи

$$\int_0^T \left(\sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j \nabla f_j(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t)) \right)' h(t)\, dt \leq 0, \tag{5.13}$$

$\forall h(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$.

Како последња неједнакост важи за све $h(\cdot) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$, из (5.13) следи да важи

(5.2). Такође, из једнакости (5.7) и (5.12) директно следи да важе услови (5.3) и (5.4).

$\square$

Претходни резултат представља уопштење неких резултата из вишекритеријумске оптимизације у коначно-димензионим просторима. Више информација о овоме може се наћи у [50, 73].

Последица 5.4. *Нека је* $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ) *и претпоставке (а) и (б) су задовољене у* $\hat{x}(\cdot)$. *Нека је услов регуларности система* (5.1) *задовољен и* $g_i(t, \cdot)$ *је конкавна с.с. на* $[0, T]$, *за свако* $i \in I$. *Ако је задовољен уопштени Слејтеров услов регуларности* (СУР), *онда постоје* $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ *и* $\hat{v} \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ *такви да су задовољени услови* (5.2)-(5.4).

Пример 5.5.

$$\text{(ВПНВГ)}\qquad \begin{aligned} &\left(\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{4}x_1^2(t) - \frac{1}{8}x_2(t)\right)dt, \int_0^1 \left(1 + 4t - x_1(t) - 2x_2(t)\right) dt \right) \to \sup; \\ &4x_1(t) - x_1^2(t) - 2x_2(t) - 3 + 4t \geq 0 \ \text{ с.с. на } [0, 1], \\ &4x_1(t) - x_1^2(t) + 2x_2(t) - 3 - 4t \geq 0 \ \text{ с.с. на } [0, 1], \\ &x_1^2(t) - \frac{5}{2}x_1(t) - 2x_2(t) + \frac{3}{2} + 4t \geq 0 \ \text{ с.с. на } [0, 1], \\ &x(\cdot) \in L_\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Очигледно да је за с.с. $t \in [0, 1]$, $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = (1, 2t)$ Парето оптимално решење претходног проблема и $I_{\hat{b}}(t) = \{1, 2, 3\}$ за $\hat{b} = \frac{1}{2}$. Лако се израчуна да је за с.с. $t \in [0, 1]$,

$$\nabla f_1(t, \hat{x}(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \nabla f_2(t, \hat{x}(t)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \nabla g_1(t, \hat{x}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_2(t, \hat{x}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \nabla g_3(t, \hat{x}(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Узмимо $\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ с.с. на $[0, 1]$ и $\beta = \frac{1}{5}$. Следи да је $\nabla g_i(t, \hat{x}(t))'\bar{\gamma}(t) \geq \beta$, $i = 1, 2, 3$, с.с. на $[0, 1]$. То значи да је услов регуларности (МФУР) задовољен. Покажимо да је и услов регуларности одговарајућег система задовољен. Нека је $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ и за с.с. $t \in [0, 1]$,

$$\phi_1(t, h) = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{8}h_2,\ \phi_2(t, h) = h_1 + 2h_2,\ \phi_3(t, h) = -2h_1 + 2h_2,\ \phi_4(t, h) = -2h_1 - 2h_2,$$

$\phi_5(t, h) = \frac{1}{2}h_1 + 2h_2$.

Дефинишимо скупове :

$$A_1 = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{20}{17}h_1 + h_2 \geq 0,\ \frac{4}{15}h_1 + h_2 \leq 0\},$$
$$A_2 = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4}{15}h_1 + h_2 \geq 0,\ h_1 \geq 0\},$$
$$A_3 = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : h_1 \leq 0,\ h_2 \geq 0\},$$
$$A_4 = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{20}{17}h_1 + h_2 \leq 0,\ h_2 \leq 0\}.$$

Лако се проверава да је за $(h_1, h_2) \in int(A_i)$, $\mathcal{I}(t,h) = \{i\}$ с.с. на $[0,1]$, $i = 1,2,3,4$, и $\bigcup_{i=1}^4 A_i = \mathbb{R}^2$. За $(h_1, h_2) \in int\ (A_1 \cup A_2)$, $\mathcal{I}(t,h) = \{1,2\}$ с.с. на $[0,1]$. За $(h_1,h_2) \in int\ (A_2 \cup A_3)$, $\mathcal{I}(t,h) = \{2,3,5\}$ с.с. на $[0,1]$. За $(h_1,h_2) \in int\ (A_3 \cup A_4)$, $\mathcal{I}(t,h) = \{3,4\}$ с.с. на $[0,1]$. За $(h_1,h_2) \in int\ (A_1 \cup A_4)$, $\mathcal{I}(t,h) = \{1,4\}$ с.с. на $[0,1]$. Услов регуларности система

$$\begin{aligned}
\phi_1(t,h) =& \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{8}h_2 < 0,\\
\phi_2(t,h) =& h_1 + 2h_2 < 0,\\
\phi_3(t,h) =& -2h_1 + 2h_2 \leq 0,\\
\phi_4(t,h) =& -2h_1 - 2h_2 \leq 0,\\
\phi_5(t,h) =& \frac{1}{2}h_1 + 2h_2 \leq 0,\\
& h \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

је задовољен за $\bar{x}(t) \equiv (0,0)$, $R \geq 0$, $\alpha = \frac{1}{60}$ и за с.с. $t \in [0,1]$,

1. $e = e(t,h) = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ за $(h_1,h_2) \in int\,(A_2 \cup A_3 \cup A_4)$,

2. $e = e(t,h) = (\frac{7}{25}, -\frac{24}{25})$ за $(h_1,h_2) \in int\,(A_1 \cup A_4)$ или $(h_1,h_2) \in int(A_1)$, и

3. $e = e(t,h) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ за $(h_1,h_2) \in int\,(A_1 \cup A_2)$.

Коначно, видимо да су неопходни услови задовољени за $\hat{\lambda}_1 = 1$, $\hat{\lambda}_2 = 0$, $\hat{v}_1(t) = \frac{1}{16}$, $\hat{v}_2(t) = \frac{5}{24}$ и $\hat{v}_3(t) = \frac{1}{12}$ с.с. на $[0,1]$.

5.3 Довољни услови

У овом поглављу, представићемо довољне услове Каруш-Кун-Такеровог типа за проблем (ВПНВГ). Докази главних теорема биће изведени уз додатне претпоставке генерализоване конкавности (и неће бити неопходан услов регуларности.) Претпоставља се да су дефиниције квазиконкавних, псеудоконкавних и строго псеудоконкавних функција добро познате. Више информација о овим функцијама се може видети у [48, 65].

Теорема 5.6. *Нека постоји допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *и* $(\hat{\lambda}, \hat{v}(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *такав да за с.с.* $t \in [0,T]$ *важе услови*

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j \nabla f_j(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \tag{5.15}$$

$$\hat{v}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \ \hat{v}_i(t) \geq 0, \ i \in I, \tag{5.16}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j = 1, \ \hat{\lambda}_j > 0, \ j \in J. \tag{5.17}$$

Ако је функција $\sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j f_j(t,\cdot)$ *псеудоконкавна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда у* $[0,T]$ *и функција* $\sum_{i\in I} \hat{v}_i(t) g_i(t,\cdot)$ *квазиконкавна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$, *онда је* $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ).

Доказ. Како је $x(\cdot) \in \Omega$ и важи (5.16), имамо да је

$$\hat{v}_i(t) g_i(t, x(t)) \geq \hat{v}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \ \ i \in I, \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega \ \ \text{с.с. на } [0,T].$$

После сумирања, из претходне неједнакости добијамо да је

$$\sum_{i\in I} \hat{v}_i(t) g_i(t, x(t)) \geq \sum_{i\in I} \hat{v}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)), \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega \ \ \text{с.с. на } [0,T]. \tag{5.18}$$

Како је $\sum_{i\in I} \hat{v}_i(t) g_i(t,\cdot)$ квазиконкавна у $x(t) = \hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$,
(5.18) имплицира да је

$$\sum_{i\in I} \hat{v}_i(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t))'(x(t) - \hat{x}(t)) \geq 0, \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega, \ \text{с.с. на } [0,T]. \tag{5.19}$$

Из (5.15) и (5.19), имамо да је

$$\sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j \nabla f_j(t, \hat{x}(t))'(x(t) - \hat{x}(t)) \leq 0, \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega, \ \text{с.с. на } [0,T].$$

Како је $\sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j f_j(t,\cdot)$ псеудоконкавна у $\hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$, следи

$$\sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, \hat{x}(t)) \geq \sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, x(t)), \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega, \ \ \text{с.с. на } [0,T].$$

Интегралимо претходну неједнакост од 0 до T и добијамо да је

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, \hat{x}(t))\, dt \geq \int_0^T \sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, x(t))\, dt, \ \ \forall x(\cdot) \in \Omega. \tag{5.20}$$

Претпоставимо да $\hat{x}(\cdot)$ није Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ). Онда постоји

$\bar{x}(\cdot) \in \Omega$ таква да је

$$\int_0^T f_j(t, \bar{x}(t))dt \geq \int_0^T f_j(t, \hat{x}(t))dt \ \forall j \in J, \text{ с.с. на } [0, T],$$

и за бар један индекс i важи

$$\int_0^T f_i(t, \bar{x}(t))dt > \int_0^T f_i(t, \hat{x}(t))dt \text{ с.с. на } [0, T].$$

Како је за свако $j \in J$, $\hat{\lambda}_j$ на основу претпоставке позитивно, то мора бити

$$\int_0^T \sum_{j \in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, \bar{x}(t))\, dt > \int_0^T \sum_{j \in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, \hat{x}(t))\, dt.$$

Добили смо контрадикцију, јер је претходна неједнакост у супротности са претпоставком (5.20). Дакле, $\hat{x}(\cdot)$ мора бити Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ). $\square$

Теорема 5.7. *Нека постоји допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *и* $(\hat{\lambda}, \hat{v}(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times \text{Ł}_\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ *такав да за с.с.* $t \in [0, T]$ *важе услови*

$$\sum_{j \in J} \hat{\lambda}_j \nabla f_j(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i \in I} \hat{v}_i(t) \nabla g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \tag{5.21}$$

$$\hat{v}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \ \hat{v}_i(t) \geq 0, \ i \in I, \tag{5.22}$$

$$\sum_{j \in J} \hat{\lambda}_j = 1, \ \hat{\lambda}_j > 0, \ j \in J. \tag{5.23}$$

Ако је функција $\sum_{j \in J} \hat{\lambda}_j f_j(t, \cdot)$ *квазиконкавна по другом аргументу* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда на* $[0, T]$ *и* $\sum_{i \in I} \hat{v}_i(t) g_i(t, \cdot)$ *строго псеудоконкавна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда у* $[0, T]$*, онда је* $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ).

Доказ. Како је $x(\cdot) \in \Omega$ и важи услов (5.22), имамо да је

$$\hat{v}_i(t) g_i(t, x(t)) \geq \hat{v}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \ \ i \in I, \ \forall x(\cdot) \in \Omega \ \text{ с.с. на } [0, T].$$

После сумирања, следи да је

$$\sum_{i \in I} \hat{v}_i(t) g_i(t, x(t)) \geq \sum_{i \in I} \hat{v}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)), \ \forall x(\cdot) \in \Omega \text{ с.с. на } [0, T]. \tag{5.24}$$

Како је функција

$$\sum_{i \in I} \hat{v}_i(t) g_i(t, \cdot)$$

строго псеудоконкавна у $\hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$, (5.24) имплицира

$$\sum_{i\in I} \hat{v}_i(t)\nabla g_i(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) > 0, \;\; \forall x(\cdot)\in\Omega, \tag{5.25}$$

тако да је $x(t)\neq\hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$. Из неједнакости (5.21) и (5.25), имамо да је

$$\sum_{j\in J} \hat{\lambda}_j\nabla f_j(t)(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) < 0, \;\; \forall x(\cdot)\in\Omega,$$

тако да је $x(t)\neq\hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$.
Како је $\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\cdot)$ квазиконкавна у $\hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$, онда је

$$\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\hat{x}(t)) > \sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,x(t)), \;\; \forall x(\cdot)\in\Omega,$$

тако да је $x(t)\neq\hat{x}(t)$ с.с. на $[0,T]$. Дакле, на основу претходног мора бити

$$\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\hat{x}(t)) \geq \sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,x(t)), \;\; \forall x(\cdot)\in\Omega, \;\text{ с.с. на } [0,T].$$

Интеграцијом претходне неједнакости на $[0,T]$, добијамо

$$\int_0^T \sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\hat{x}(t))\,dt \geq \int_0^T \sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,x(t))\,dt \;\;\; \forall x(\cdot)\in\Omega.$$

Зато, као у доказу Теореме 6.6, закључујемо да је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење датог проблема (ВПНВГ). □

Користећи сличан приступ можемо добити довољне услове за проблем (ВПНВГ) без услова комплементарности.

Теорема 5.8. *Нека је $\hat{x}(\cdot)$ допустиво решење проблема* (ВПНВГ) *и*

$$A = \{\, i\in I \;:\; g_i(t,\hat{x}(t)) = 0 \quad с.с. \text{ на } [0,T]\,\}$$

означава скуп свих активних ограничења у $\hat{x}(t)$. Нека је за свако $i\in A$, функција $g_i(t,\cdot)$ квазиконкавна по другом аргументу у $\hat{x}(t)$ скоро свуда у $[0,T]$ и постоји $(\hat{\lambda},\hat{v}(\cdot))\in\mathbb{R}^k\times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ такав да су за с.с. $t\in[0,T]$ задовољени услови

$$\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j\nabla f_j(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i\in I}\hat{v}_i(t)\nabla g_i(t,\hat{x}(t)) = 0, \tag{5.26}$$

$$\hat{v}_i(t)\geq 0, \;\; i\in A, \tag{5.27}$$

$$\hat{v}_i(t) = 0, \;\; i\in I\setminus A, \tag{5.28}$$

$$\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j = 1,\ \hat{\lambda}_j > 0,\ \ j \in J. \tag{5.29}$$

Ако је функција $\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\cdot)$ *псеудоконкавна по другом аргументу* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда у* $[0,T]$*, онда је* $\hat{x}(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ).

Доказ. За било које допустиво решење $x(\cdot)$ је

$$g_i(t,x(t)) \geq g_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ i\in A,\ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Због квазиконкавности функције $g_i(t,\cdot)$ у $\hat{x}(t)$ за $i \in A$ с.с. на $[0,T]$, имамо да је

$$\nabla\hat{g}_i(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) \geq 0,\ i\in A,\ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Како је $\hat{v}_i(t) \geq 0$, $i\in A$, с.с. на $[0,T]$, добијамо да је

$$\sum_{i\in A}\hat{v}_i(t)\nabla g_i(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) \geq 0,\ \ \forall x(\cdot)\in\Omega,\ \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{5.30}$$

Из (5.26) и (5.30) следи да је

$$\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j\nabla f_j(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) \leq 0,\ \ \forall x(\cdot)\in\Omega,\ \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{5.31}$$

Како је функција $\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\cdot)$ псеудоконкавна по другом аргументу у $\hat{x}(t)$ скоро свуда у $[0,T]$, имамо да је

$$\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\hat{x}(t)) \geq \sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,x(t)),\ \ \forall x(\cdot)\in\Omega,\ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Следи да је

$$\int_0^T\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,\hat{x}(t))\,dt \geq \int_0^T\sum_{j\in J}\hat{\lambda}_j f_j(t,x(t))\,dt\ \ \ \forall x(\cdot)\in\Omega.$$

Дакле, $\hat{x}(\cdot)$ је Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ). □

Такође, од великог значаја је разматрати и извести дуалне теореме за посматрани проблем. Неопходни и довољни услови оптималности добијени у претходним поглављима су добре полазне тачке за такво истраживање. О овоме ће бити више речи у наредном поглављу.

5.4 Дуалност у проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом

Теорија дуалности за проблеме вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом је изучавана у радовима [58, 61, 71, 74, 104, 106, 108].

У раду [74], аутор је дао два дуална модела за гладак случај уз додатне претпоставке генерализоване конвексности. Ове дуалне резултате је добио без извођења услова оптималности за дати проблем. Залмаи је у [104, 106, 108] обрађивао и извео оптималне услове и дуалне разултате за класе глатких и неглатких фракционих проблема вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом. Као што смо већ поменули, у [58], аутори су извели два дуална модела Монд-Веировог и Волфовог типа за неглатке проблеме уз претпоставке инвексности, али већ смо напоменули у претходним поглављима да ти резултати нису добри. Оливеира је 2010. године доказао теореме слабе и јаке дуалности за негладак проблем оптимизације са непрекидним временом, али је притом користио погрешну уопштену Горданову теорему алтернативе у преинвексном контексту. Нажалост, директну последицу ове теореме користили су и аутори у раду [71] за извођење дуалних резултата за ове класе проблема. Због свега наведеног, теорија дуалности није у потпуности покривена у литератури.

У овом поглављу дајемо нове дуалне резултате за проблем (ВПНВГ), примењујући услове оптималности добијене у претходном поглављу.

5.5 Монд-Веиров дуал

Монд-Веиров дуал за проблем (ВПНВГ) је формулисан на следећи начин (МВД):

$$\int_0^T f(t,u(t))dt = \left(\int_0^T f_1(t,u(t))dt, \ldots, \int_0^T f_k(t,u(t))dt\right) \to \inf;$$

$$\text{п.о.} \quad \sum_{j\in J} \lambda_j \nabla f_j(t,u(t)) + \sum_{i\in I} w_i(t)\nabla g_i(t,u(t)) = 0, \quad \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.32}$$

$$w_i(t)g_i(t,u(t)) \leq 0,\ w_i(t) \geq 0,\ \ i \in I,\ \text{с.с. на}[0\text{,T}], \tag{5.33}$$

$$\sum_{j\in J} \lambda_j = 1,\ \ \lambda_j \geq 0,\ j \in J,\ \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.34}$$

$$u(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n).$$

У овом поглављу ћемо доказати теореме слабе и јаке дуалности између проблема (ВПНВГ) и (МВД).

Теорема 5.9. (Теорема слабе дуалности) *Нека је за све допустиве функције* $x(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *и све допустиве* $(u(\cdot), \lambda, w(\cdot))$ *проблема* (МВД)*, функција* $\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,\cdot)$

квазиконкавна у $u(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$. *Ако је задовољен један од следећих услова:*

(*i*) $\lambda_j > 0, \forall j \in J$ *и* $\sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t,\cdot)$ *је псеудоконкавна у* $u(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$,

(*ii*) $\sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t,\cdot)$ *је строго псеудоконкавна у* $u(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$,

онда не важи:

$$\int_0^T f_j(t,x(t))dt \geq \int_0^T f_j(t,u(t))dt \;\; \forall j \in J, \tag{5.35}$$

ни

$$\int_0^T f_k(t,x(t))dt > \int_0^T f_k(t,u(t))dt \quad \text{за неко } k \in J. \tag{5.36}$$

Доказ. За свако $x(\cdot) \in \Omega$ проблема (ВПНВГ) и сваку допустиву тројку $(u(\cdot),\lambda,w(\cdot))$ проблема (МВД) имамо да је

$$w_i(t)g_i(t,x(t)) \geq 0 \geq w_i(t)g_i(t,u(t)), \;\; i \in I, \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

После сумирања следи да је

$$\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,x(t)) \geq \sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,u(t)) \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

Како је функција $\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,\cdot)$ квазиконкавна у $u(t)$ с.с. на $[0,T]$, онда је

$$\sum_{i\in I} \nabla w_i(t)g_i(t,u(t))'(x(t)-u(t)) \geq 0, \;\text{с.с. на } [0,T]. \tag{5.37}$$

Из услова (5.37) и (5.32), следи да је

$$\sum_{j\in J} \nabla \lambda_j f_j(t,u(t))'(x(t)-u(t)) \leq 0, \;\text{с.с. на } [0,T]. \tag{5.38}$$

Интеграцијом претходне неједнакости на $[0,T]$ добијамо да важи

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \nabla \lambda_j f_j(t,u(t))'(x(t)-u(t))dt \leq 0. \tag{5.39}$$

Сада претпоставимо супротно, да заправо важе истовремено услови (5.35) и (5.36). Ако је $\lambda_j > 0$ за све $j \in J$, онда услови (5.35) и (5.36) директно имплицирају да је

$$\int_0^T \lambda_j f_j(t,x(t))dt \geq \int_0^T \lambda_j f_j(t,u(t))dt \;\; \forall j \in J, \;\text{с.с. на } [0,T], \tag{5.40}$$

и

$$\int_0^T \lambda_k f_k(t,x(t))dt > \int_0^T \lambda_k f_k(t,u(t))dt \;\text{ за неко } k \in J, \;\text{с.с. на } [0,T]. \tag{5.41}$$

Неједнакости (5.40) и (5.41) такође директно дају да је

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t, x(t))dt > \int_0^T \sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t, u(t))dt. \tag{5.42}$$

Из претпоставке (i), ($\sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t,\cdot)$ је псеудоконкавна у $u(t)$ с.с. на $[0,T]$), (5.42) имплицира

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \nabla\lambda_j f_j(t, u(t))'(x(t) - u(t))dt > 0, \tag{5.43}$$

што је у супротности са претпоставком (5.39). Сада из претпоставке (ii), ($\lambda_j \geq 0$, $j \in J$) добијамо да је

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t, x(t))dt \geq \int_0^T \sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t, u(t))dt, \tag{5.44}$$

и из строге псеудоконкавности $\sum_{j\in J} \lambda_j f(t,\cdot)$ у $u(t)$ с.с. на $[0,T]$, услов (5.44) имплицира (5.43), што је опет у супротности са претпоставком (5.38). $\square$

Последица 5.10. *Претпоставимо да важи Теорема 5.9 слабе дуалности између датих проблема* (ВПНВГ) *и* (МВД). *Ако је* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *допустива тројка проблема* (МВД) *таква да је* $u^0(\cdot)$ *допустива за проблем* (ВПНВГ), *онда је* $u^0(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ) *и* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *је Парето оптимално решење проблема* (МВД).

Доказ. Покажимо прво да је $u^0(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ).

Претпоставимо да ово није тачно. Тада ће постојати допустива функција $x(\cdot)$ проблема (ВПНВГ) таква да важе услови (5.35) и (5.36). Али, тројка $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ је допустива за проблем (МВД). Одавде директно следи да резултати Теореме 5.9 слабе дуалности не важе. Добили смо контрадикцију.

Ово директно узрокује да $u^0(\cdot)$ мора бити Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ).

Даље, претпоставимо да тројка $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ није Парето оптимално решење датог проблема (МВД). Слично као у претходном, постојала би допустива тројка $(\bar{u}(\cdot), \bar{\lambda}, \bar{w}(\cdot))$ за (МВД) таква да је

$$\int_0^T f_j(t, \bar{u}(t))dt \leq \int_0^T f_j(t, u^0(t))dt \ \ \forall j \in J, \tag{5.45}$$

и

$$\int_0^T f_k(t, \bar{u}(t))dt < \int_0^T f_k(t, u^0(t))dt \quad \text{за неко } k \in J. \tag{5.46}$$

Ово је у супротности са Теоремом слабе дуалности. Дакле, следи да је $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ Парето оптимално решење проблема (МВД). $\square$

Сада ћемо уз додатне претпоставке регуларности ограничења доказати јаку теорему дуалности за наш проблем.

Теорема 5.11. (Теорема јаке дуалности) *Ако је* $u^0(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ) *и услови регуларности* (МФУР) *и* (УРГ) *задовољени, тада постоји* $(\lambda^0, w^0(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *такав да је* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *допустиво решење за* (МВД). *Ако, такође, важи Теорема 5.9 слабе дуалности између проблема* (ВПНВГ) *и* (МВД), *онда је* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *Парето оптимално решење проблема* (МВД).

Доказ. Како је $u^0(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ) и задовољени су услови регуларности ограничења (МФУР) и (УРГ), на основу Теореме 5.3 из претходног поглавља, постоји
$(\lambda^0, w^0(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ такав да за с.с. $t \in [0,T]$ важе следећи услови

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^0 \nabla f_j(t, u^0(t)) + \sum_{i \in I} w_i^0(t) \nabla g_i(t, u^0(t)) = 0, \tag{5.47}$$

$$w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) = 0,\ \ w_i^0(t) \geq 0,\ \ i \in I, \tag{5.48}$$

$$\sum_{j \in J} \lambda_j^0 = 1,\ \ \lambda_j^0 \geq 0,\ \ j \in J. \tag{5.49}$$

Дакле, из услова (5.47) и (5.48), закључујемо да је $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ допустиво решење проблема (МВД). Парето оптималност тројке $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ проблема (МВД) сада директно следи из Последице 5.10. □

5.6 Волфов дуал

Волфов дуал за проблем (ВПНВГ) је формулисан на следећи начин (ВД):

$$\left(\int_0^T \big(f_1(t,u(t)) + w(t)' g(t,u(t))\big) dt, \ldots, \int_0^T \big(f_k(t,u(t)) + w(t)' g(t,u(t))\big) dt \right) \to \inf;$$

$$\text{п.о.} \quad \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla f_j(t,u(t)) + \sum_{i\in I} w_i(t) \nabla g_i(t,u(t)) = 0, \quad \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.50}$$

$$w_i(t) \geq 0,\ \ i \in I,\ \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.51}$$

$$\sum_{j\in J} \lambda_j = 1,\ \ \lambda_j \geq 0,\ \ j \in J,\ \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.52}$$

$$u(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n).$$

У овом поглављу ћемо доказати теореме слабе и јаке дуалности између проблема (ВПНВГ) и (ВД). Теорема слабе дуалности важи уз додатне претпоставке конкавности.

Теорема 5.12. (Теорема слабе дуалности) *Претпоставимо да су за све допустиве функције* $x(\cdot)$ *проблема* (ВПНВГ) *и све допустиве* $(u(\cdot), \lambda, w(\cdot))$ *проблема* (ВД), *функције* $f_j(t, \cdot)$ *и* $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, $j \in J$, *конкавне у* $u(t)$ *скоро свуда на* $[0, T]$. *Ако важи један од следећих услова:*

(а) $\lambda_j > 0, \ \forall j \in J,$ *или*

(б) $\sum_{j \in J} \lambda_j f_j(t, \cdot) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, \cdot)$ *је строго конкавна у* $u(t)$ *с.с. на* $[0, T]$,

онда не важи:

$$\int_0^T f_j(t, x(t))dt \geq \int_0^T \big(f_j(t, u(t)) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, u(t))\big)dt \ \ \forall j \in J, \tag{5.53}$$

ни

$$\int_0^T f_k(t, x(t))dt \geq \int_0^T \big(f_k(t, u(t)) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, u(t))\big)dt \quad \text{за неко } k \in J. \tag{5.54}$$

Напомена 5.13. *Ако не важе услови* (5.53) *ни* (5.54) *онда не важи:*

$$f_j(t, x(t)) \geq f_j(t, u(t)) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, u(t)) \ \ \forall j \in J, \ \text{с.с. на } [0, T], \tag{5.55}$$

ни

$$f_k(t, x(t)) > f_k(t, u(t)) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, u(t)) \quad \text{за неко } k \in J, \ \text{с.с. на } [0, T]. \tag{5.56}$$

Доказ. Претпоставимо супротно. Нека важе услови (5.55) и (5.56). Како је $x(\cdot)$ допустива за (ВПНВГ) и $w_i(t) \geq 0$, $i \in I$, с.с. на $[0, T]$, имамо да је

$$w_i(t) g_i(t, x(t)) \geq 0, \ i \in I, \ \text{с.с. на } [0, T].$$

После сумирања, имамо да је

$$\sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, x(t)) \geq 0,$$

па (5.55) и (5.56) имплицирају следеће неједнакости

$$\begin{aligned} &\left(f_j(t, x(t)) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, x(t))\right) \\ \geq &\left(f_j(t, u(t)) + \sum_{i \in I} w_i(t) g_i(t, u(t))\right), \ \ \forall j \in J, \ \text{с.с. на } [0, T] \end{aligned} \tag{5.57}$$

и

$$\left(f_k(t,x(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,x(t))\right)$$
$$>\left(f_k(t,u(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,u(t))\right),\quad \text{за неко } k\in J \ \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{5.58}$$

Из претпоставки (а) и $\sum_{j\in J}\lambda_j=1$, следи да је

$$\left(\sum_{j\in J}\lambda_j f_j(t,x(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,x(t))\right)$$
$$>\left(\sum_{j\in J}\lambda_j f_j(t,u(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,u(t))\right). \tag{5.59}$$

Како су $f_j(t,\cdot)$, $j\in J$, и $g_i(t,\cdot)$, $i\in I$, конкавне у $u(t)$ с.с. на $[0,T]$ и $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)>0$, $w(t)\geq 0$ с.с. на $[0,T]$, следи из (5.59) да је

$$\Big(\sum_{j\in J}\lambda_j\nabla f_j(t,u(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)\nabla g_i(t,u(t)\Big)'(x(t)-u(t))>0,\ \text{с.с. на } [0,T]. \tag{5.60}$$

Ово је у супротности са (5.50), па $(u(\cdot),\lambda,w(\cdot))$ није допустива тачка проблема (ВД). Слично претходном закључку, ако важи претпоставка (б), како је $\lambda\geq 0$ и $\sum_{j\in J}\lambda_j=1$ с.с. на $[0,T]$, из (5.57) и (5.58) следи

$$\sum_{j\in J}\lambda_j f_j(t,x(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,x(t)) \tag{5.61}$$

$$\geq \sum_{j\in J}\lambda_j f_j(t,u(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)g_i(t,u(t)),\ \text{с.с. на}\,[0,T].$$

Из строге конкавности (претпоставка (б)) и неједнакости (5.61) следи

$$\Big(\sum_{j\in J}\lambda_j\nabla f_j(t,u(t))+\sum_{i\in I} w_i(t)\nabla g_i(t,u(t)\Big)'(x(t)-u(t))>0,\ \text{с.с. на } [0,T], \tag{5.62}$$

што је опет у супротности са условом (5.50). Овим смо комплетирали доказ. □

Директна последица претходног је следеће тврђење.

Последица 5.14. *Нека важи Теорема 5.12 слабе дуалности између проблема* (ВПНВГ) *и* (ВД). *Ако је* $(u^0(\cdot),\lambda^0,w^0(\cdot))$ *допустива тројка проблема* (ВД), *за коју важи*

$$w_i^0(t)g_i(t,u^0(t))=0,\ \ i\in I\ \text{ с.с. на } [0,T], \tag{5.63}$$

и ако је $u^0(\cdot)$ *допустива функција проблема* (ВПНВГ), *онда је* $u^0(\cdot)$ *Парето оптимално* *решење проблема* (ВПНВГ) *и* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *је Парето оптимална тројка проблема* (ВД).

Доказ. Покажимо прво да је $u^0(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ).

Претпоставимо супротно, да $u^0(\cdot)$ није Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ). Тада би постојала допустива функција $x(\cdot)$ проблема (ВПНВГ) таква да важи

$$\int_0^T f_j(t, x(t))dt \geq \int_0^T f_j(t, u^0(t))dt \ \ \forall j \in J, \tag{5.64}$$

и

$$\int_0^T f_k(t, x(t))dt > \int_0^T f_k(t, u^0(t))dt \quad \text{за неко } k \in J. \tag{5.65}$$

Из претпоставке (5.63), услови (5.64) и (5.65) могу се написати на следећи начин

$$\int_0^T f_j(t, x(t))dt \geq \int_0^T \left(f_j(t, u^0(t)) + \sum_{i \in I} w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) \right) dt \ \ \forall j \in J, \tag{5.66}$$

и

$$\int_0^T f_k(t, x(t))dt > \int_0^T \left(f_k(t, u^0(t)) + \sum_{i \in I} w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) \right) dt \ \text{ за неко } k \in J. \tag{5.67}$$

Али ово је у супротности са Теоремом 5.12. Дакле, $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ је Парето оптимално решење проблема (ВД).

Покажимо сада да је $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ Парето оптимално решење проблема (ВД). Претпоставићемо супротно, да $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ није Парето оптимално решење датог проблема (ВД), тј. да постоји допустива тројка $(\bar{u}(\cdot), \bar{\lambda}, \bar{w}(\cdot))$ проблема (ВД) таква да је

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(f_j(t, \bar{u}(t)) + \sum_{i \in I} \bar{w}_i(t) g_i(t, \bar{u}(t)) \right) dt \\ \leq &\int_0^T \left(f_j(t, u^0(t)) + \sum_{i \in I} w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) \right) dt, \ \ \forall j \in J, \end{aligned} \tag{5.68}$$

и

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(f_k(t, \bar{u}(t)) + \sum_{i \in I} \bar{w}_i(t) g_i(t, \bar{u}(t)) \right) dt \\ < &\int_0^T \left(f_k(t, u^0(t)) + \sum_{i \in I} w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) \right) dt, \quad \text{за неко } \ k \in J. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Из претпоставке (5.63), следи да се услови (5.68) и (5.69) сада могу записати на следећи начин:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(f_j(t, \bar{u}(t)) + \sum_{i\in I} \bar{w}_i(t) g_i(t, \bar{u}(t)) \right) dt \\ \leq &\int_0^T \left(f_j(t, u^0(t)) \right) dt, \ \forall j \in J,\end{aligned} \tag{5.70}$$

и

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(f_k(t, \bar{u}(t)) + \sum_{i\in I} \bar{w}_i(t) g_i(t, \bar{u}(t)) \right) dt \\ < &\int_0^T \left(f_k(t, u^0(t)) \right) dt, \quad \text{за неко} \ \ k \in J.\end{aligned} \tag{5.71}$$

Како је $u^0(\cdot)$ допустива, ово претходно противречи тврђењу Теореме 5.12. Одавде закључујемо да је $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ Парето оптимално решење проблема (ВД). □

Теорема 5.15. (Теорема јаке дуалности) *Ако је* $u^0(\cdot)$ *Парето оптимално решење проблема* (ВПНВГ) *и услови регуларности* (МФУР), (УРГ) *су задовољени, тада постоји* $(\lambda^0, w^0(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^m)$ *такав да је* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *допустиво решење проблема* (ВД) *и за с.с.* $t \in [0,T]$ *важи*

$$w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) = 0, \ \ i \in I. \tag{5.72}$$

Поред тога, ако важи Теорема 5.12 слабе дуалности између проблема (ВПНВГ) *и* (ВД), *онда је* $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ *Парето оптимално решење проблема* (ВД).

Доказ. Како је $u^0(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВПНВГ), и услови регуларности ограничења (МФУР) и (УРГ) задовољени, онда због Теореме 5.3 постоји $(\lambda^0, w^0(\cdot)) \in \mathbb{R}^k \times L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^m)$ такав да за с.с. $t \in [0,T]$ важе услови

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^0 \nabla f_j(t, u^0(t)) + \sum_{i \in I} w_i^0(t) \nabla g_i(t, u^0(t)) = 0, \tag{5.73}$$

$$w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) = 0, \ w_i^0(t) \geq 0, \ \ i \in I, \tag{5.74}$$

$$\sum_{j\in J} \lambda_j^0 = 1, \ \lambda_j^0 \geq 0, \ \ j \in J. \tag{5.75}$$

Одавде закључујемо да је $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ допустиво решење проблема (ВД). Такође је $w_i^0(t) g_i(t, u^0(t)) = 0$, с.с. на $[0,T]$, $i \in I$, и важи Теорема слабе дуалности између проблема (ВПНВГ) и (ВД). Парето оптималност тројке $(u^0(\cdot), \lambda^0, w^0(\cdot))$ проблема (ВД) сада директно следи из Последице 5.14. □

6 Услови оптималности и дуалност у глатким рационалним проблемима оптимизације са непрекидним временом

У разним применама нелинеарног програмирања, количник две функције треба да се минимизује или максимизује. Овакав тип оптимизације се у литератури обично назива рационално (фракционо) програмирање. Један од првих проблема рационалног програмирања (у коначно-димензионим просторима) је равнотежни економски модел који је предложио Фон Нојман 1937. године у раду [86]. Овај модел заправо је одређивао стопу раста привреде.

Касније су Чарнес и Купер у [13] показали да је могуће линеарни рационални проблем свести на проблем линеарног програмирања користећи одређену нелинеарну трансформацију. Скаларно рационално програмирање је добро изучено у претходном веку, о чему сведоче многи радови и монографије. Касније су изучавани вишекритеријумски проблеми у коначно дименизоном случају. Више о претходним истраживањима може се погледати у радовима [6, 8, 11, 40, 41, 43, 81, 85, 87].

У овој глави разматрамо рационални проблем оптимизације са непрекидним временом. Проблем максимизирања (или минимизирања) односа два реална функционала, са скупом ограничења, познат је као рационални проблем оптималног управљања. Ова класа проблема је важна за моделирање различитих одлука и процеса из економије, теорије игара и операционих истраживања. Такође се често појављују у неким другим областима као што су нумеричка анализа, проблеми апроксимације, локацијски проблеми, инжењерски дизајн и теорија информација. Из наведених разлога, рационалним проблемима оптимизације са непрекидним временом посвећена је велика пажња у последњих тридесет година, што је резултирало обимном литературом која се бави њиховим теоријским и нумеричким аспектима. Више информација из ове области може се наћи у [30, 44, 60, 78, 80, 90–92, 101, 103, 107]. Нумерички алгоритми за решавање линеарних рационалних проблема оптимизације са непрекидним временом приказани су у радовима [88–92].

У [80] су добијени критеријуми оптималности за рационални проблем оптимизације са непрекидним временом. Уопштена Чарнес-Куперова трансформација и конвексност играју кључну улогу у извођењу ових резултата. У радовима [60, 101] главни апарати коришћени за извођење услова оптималности су резултати добијени у радовима [10, 98]. Међутим, већ смо показали у претходним поглављима да ти резултати нису тачни. Стога, неки резултати из поменутих радова, нажалост, такође нису валидни.

Наш циљ у овој глави је добијање неопходних и довољних услова оптималности за нелинеаран рационални проблем оптимизације са непрекидним временом.

6.1 Формулација проблема и основне дефиниције

Разматрајмо следећи рационални проблем оптимизације са непрекидним временом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} \to \sup; \\
\text{п.о.}\quad & h_i(t,x(t)) \geq 0,\ \ i \in I = \{1,\dots,m\} \text{ с.с. на } [0,T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),
\end{aligned}
\tag{ФПНВ}
$$

где су $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g:[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_i:[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i\in I$ дате функције. За свако $t\in[0,T]$, $x_k(t)$ представља k-ту компоненту од $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))\in\mathbb{R}^n$. Сви интеграли су дати у Лебеговом смислу и сви вектори су колоне. Са B ћемо означавати јединичну отворену лопту са центром у нули. Нека је

$$\Omega_P = \{x(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) : h_i(t,x(t)) \geq 0,\ \ i\in I,\ \text{ с.с. на } [0,T]\}$$

скуп допустивих решења прималног проблема (ФПНВ). Нека је $\varepsilon > 0$. За $\hat{x}(\cdot)\in\Omega_P$, надаље ћемо претпоставити да је

$$\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt \geq 0 \ \text{ и } \int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt > 0. \tag{6.1}$$

Нека је $\hat{w} = \frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))dt} \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}$. Претпоставимо да важе следеће претпоставке за допустиву функцију $\hat{x}(\cdot)$:

(а) Функције $f(t,\cdot)$ и $g(t,\cdot)$ су непрекдино диференцијабилне у $\hat{x}(t)+\varepsilon\bar{B}$ с.с. на $[0,T]$. Функције $f(t,\cdot)$ и $g(t,\cdot)$ су Лебег мерљиве у $x(\cdot)$ и постоји реалан број $K>0$ такав да важи
$$\|\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \hat{w}\nabla g(t,\hat{x}(t))\| \leq K \ \text{ с.с. на } [0,T],$$

(б) За свако $i\in I$, функција $h_i(t,\cdot)$ је непрекидно диференцијабилна у $\hat{x}(t)+\varepsilon\bar{B}$ с.с. на $[0,T]$. За свако $i\in I$, функција $h_i(\cdot,x(\cdot))$ је есенцијално ограничена у $[0,T]$ за свако $x(\cdot)\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ и постоји реалан број $H>0$ такав да је
$$\|\nabla h_i(t,\hat{x}(t))\| \leq H,\ i\in I,\ \text{ с.с. на } [0,T].$$

6.2 Неопходни услови

У овом поглављу разаматраћемо неопходне услове за проблем (ФПНВ). Следећи резултати нису досад добијени у литератури када је проблем (ФПНВ) дефинисан у $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$.

За дато $b > 0$ и $\hat{x}(\cdot) \in \Omega_P$, означаваћемо са

$$I_b(t) = \{\, i \in I : 0 \leq h_i(t, \hat{x}(t)) \leq b \,\},$$

индексни скуп свих b-активних ограничења у $\hat{x}(\cdot) \in \Omega_P$, за свако $t \in [0, T]$. За свако $i \in I$, дефинишимо функцију $\delta_i^b : [0, T] \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$\delta_i^b(t) = \begin{cases} 1, \, i \in I_b(t) \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Прво ћемо извести оптималне услове за помоћни скаларни проблем. За свако $w \in \mathbb{R}_+$, разматрајмо помоћни проблем:

$$\begin{aligned} &\int_0^T (f(t, x(t)) - wg(t, x(t)))\, dt \to \sup; \\ \text{п.о.} \quad &h_i(t, x(t)) \geq 0, \ \ i \in I, \ \text{с.с. на } [0, T]. \end{aligned} \tag{СПw}$$

Следећа лема даје везу између проблема (ФПНВ) и (СПw), и игра кључну улогу у доказивању главног резултата у овом поглављу.

Лема 6.1. *Ако је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega_P$ оптимално решење проблема* (ФПНВ) *онда је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема* (СПw)*, где је*

$$\hat{w} = \max_{x(\cdot) \in \Omega_P} \frac{\int_0^T f(t, x(t))\, dt}{\int_0^T g(t, x(t))\, dt} = \frac{\int_0^T f(t, \hat{x}(t))\, dt}{\int_0^T g(t, \hat{x}(t))\, dt}.$$

Доказ. Претпоставимо да $\hat{x}(\cdot)$ максимизује

$$\frac{\int_0^T f(t, x(t))\, dt}{\int_0^T g(t, x(t))\, dt}$$

али не максимизује

$$\int_0^T (f(t, x(t)) - \hat{w}g(t, x(t)))\, dt.$$

Онда постоји $\bar{x}(\cdot) \in \Omega$ тако да је

$$0 = \int_0^T (f(t, \hat{x}(t)) - \hat{w}g(t, \hat{x}(t)))\, dt < \int_0^T (f(t, \bar{x}(t)) - \hat{w}g(t, \bar{x}(t)))\, dt.$$

Следи да је

$$\frac{\int_0^T f(t, \bar{x}(t))\, dt}{\int_0^T g(t, \bar{x}(t))\, dt} > \hat{w}.$$

Одавде закључујемо да $\hat{w}$ није максимална вредност проблема (ФПНВ). Ово је у супротности са претпоставком да је $\hat{w}$ максимална вредност, па закључујемо да $\hat{x}(\cdot)$ максимизује

$$\int_0^T (f(t, x(t)) - \hat{w}g(t, x(t)))\, dt.$$

□

Нека је

$$\begin{aligned}
\phi_0(t,\xi) =& -\int_0^T (\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \hat{w}\nabla g(t,\hat{x}(t)))'\,\xi\, dt < 0,\\
\phi_1(t,\xi) =& -h_1(t,\hat{x}(t)) - \delta_1^b(t)\nabla h_1(t,\hat{x}(t))'\xi \le 0,\\
&\vdots\\
\phi_m(t,\xi) =& -h_m(t,\hat{x}(t)) - \delta_m^b(t)\nabla h_m(t,\hat{x}(t))'\xi \le 0,\\
&\xi \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

систем који одговара проблему (СПw), $I_0 = \{0\} \sqcup I$ и

$$\mathcal{I}(t,\xi) = \left\{ i : \phi_i(t,\xi) = \max_{l \in I_0} \phi_l(t,\xi) \right\},\ \ t \in [0,T],\ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Дефиниција 6.1. *Услов регуларности* (УРФ) *система* (6.2) *је задовољен ако постоји функција $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, реални бројеви $R \ge 0$ и $\alpha > 0$ такви да за с.с. $t \in [0,1]$ и за свако $\xi \in \mathbb{R}^n$, за које је $\|\xi - \bar{x}(t)\| \ge R$, постоји јединични вектор $e = e(t,\xi) \in \mathbb{R}^n$, који задовољава услов*

$$\langle \partial_\xi \phi_i(t,\xi), e \rangle \ge \alpha \quad \forall i \in \mathcal{I}(t,\xi). \tag{УРФ}$$

Уведимо сада услове регуларности за функције ограничења.

Дефиниција 6.2. *Кажемо да је у $\hat{x}(\cdot)$ задовољен услов регуларности ограничења* (МФУРФ) *за рационални проблем* (ФПНВ)*, ако постоји функција $\bar{\gamma}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ и $\hat{b} > 0$ таква да је, за с.с. $t \in [0,T]$,*

$$\nabla h_i(t,\hat{x}(t))'\bar{\gamma}(t) \ge \beta,\ \ i \in I_{\hat{b}}(t), \tag{МФУРФ}$$

за неко $\beta > 0$.

У наредном тврђењу дајемо неопходне услове екстремума за проблем (ФПНВ).

Теорема 6.2. *Нека је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема* (ФПНВ)*. Нека су претпоставке (а), (б) и* (МФУРФ) *задовољене у $\hat{x}(\cdot)$. Ако је задовољен услов регуларности*

(УРФ), *онда постоји* $\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *таква да за с.с.* $t \in [0,T]$ *важе услови*

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t))\\ + \sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ \hat{\lambda}_i(t) \geq 0, \quad i \in I. \tag{6.4}$$

Доказ. Како је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (ФПНВ) онда, на основу Леме 6.1, $\hat{x}(\cdot)$ је оптимално решење проблема (СПw). Онда на основу Теореме 3.5. из рада [53], постоји $\hat{\mu}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ таква да важе услови

$$\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \hat{w}\nabla g(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i\in I}\hat{\mu}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t)) = 0 \text{ с.с. на } [0,T], \tag{6.5}$$

$$\hat{\mu}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)) = 0, \quad i \in I, \text{с.с. на } [0,T], \tag{6.6}$$

$$\hat{\mu}_i(t) \geq 0,\ i \in I, \text{с.с. на } [0,T], \tag{6.7}$$

где је

$$\hat{w} = \frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt}.$$

Множењем свих једнакости у (6.5) и (6.6) са

$$\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt$$

и стављањем

$$\hat{\lambda}_i(t) = \hat{\mu}_i(t)\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt,$$

добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t))\\ + \sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t)) = 0 \text{ с.с. на } [0,T],\end{aligned}$$

и

$$\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ \hat{\lambda}_i(t) \geq 0, \quad i \in I, \text{с.с. на } [0,T].$$

Овим смо комплетирали наш доказ. □

Напомена 6.3. *Нека је за свако* $i \in I$, *функција* $h_i(t,\cdot)$ *конкавна скоро свуда на* $[0,T]$. *Кажемо да је задовољен уопштен Слејтеров услов регуларности* (СУРФ), *ако постоје*

$x(\cdot) \in \Omega_P$ *и* $\hat{b} > 0$ *такви да је за скоро свако* $t \in [0,T]$,

$$h_i(t, x(t)) \geq \beta, \;\; i \in I_{\hat{b}}(t), \tag{СУРФ}$$

за неко $\beta > 0$.

Већ смо споменули да је у раду [53], показано да је уопштен Слејтеров услов довољан за (МФУРФ) уз претпоставку конкавности.

Последица 6.4. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (ФПНВ). *Претпоставимо да је за свако* $i \in I$, *функција* $h_i(t,\cdot)$ *конкавна скоро свуда у* $[0,T]$. *Ако су задовољене претпоставке (а) и (б) у* $\hat{x}(\cdot)$, *као и услови* (УРФ) *и* (СУРФ), *тада постоји* $\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *таква да за скоро свако* $t \in [0,T]$, *важе услови*

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t))& \\ + \sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,&\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\hat{\lambda}_i(t) h_i(t,\hat{x}(t)) = 0, \;\; \hat{\lambda}_i(t) \geq 0, \quad i \in I. \tag{6.9}$$

Као илустрацију, разматраћемо наредни пример.

Пример 6.5.

$$\text{(П)} \qquad \begin{aligned} &J(x(\cdot)) = \frac{\int_0^1 f(t,x(t))\,dt}{\int_0^1 g(t,x(t))\,dt} \to \sup;\\ &h_1(t,x(t)) \geq 0 \text{ с.с. на } [0,1],\\ &h_2(t,x(t)) \geq 0 \text{ с.с. на } [0,1],\\ &x(\cdot) \in L_\infty([0,1];\mathbb{R}),\end{aligned}$$

где је $f(t,x(t)) := 2t+2-x^2(t)$, $g(t,x(t)) := e^{x(t)}$, $h_1(t,x(t)) := x(t)$, $h_2(t,x(t)) := t+1-x(t)$.

На основу неопходних услова за с.с. t на $[0,T]$ имамо систем:

$$\begin{aligned} -2\hat{x}(t)\int_0^1 e^{\hat{x}(t)}dt - e^{\hat{x}(t)}\int_0^1 \left(2t+2-\hat{x}^2(t)\right)dt + \hat{\lambda}_1(t) - \hat{\lambda}_2(t) = 0, \;& (I)\\ \hat{\lambda}_1(t)\hat{x}(t) = 0, \;& (II)\\ \hat{\lambda}_2(t)\left(t+1-\hat{x}(t)\right) = 0, \;& (III)\\ \hat{\lambda}_1(t) \geq 0, \; \hat{\lambda}_2(t) \geq 0. \;& (IV)\end{aligned} \tag{С}$$

На основу услова комплементарности разматраћемо за с.с. t на $[0,T]$ следеће случајеве:

(а) $\hat{\lambda}_1(t) = \hat{\lambda}_2(t) = 0$, (б) $\hat{\lambda}_1(t) = 0,\ \hat{\lambda}_2(t) \neq 0,$

(ц) $\hat{\lambda}_1(t) \neq 0,\ \hat{\lambda}_2(t) = 0,$

(д) $\hat{\lambda}_1(t) \neq 0,\ \hat{\lambda}_2(t) \neq 0.$

- Разматрајмо прво случај (а). Решавањем прве једначине ситема (C), добијамо решење $\hat{x}(t) = 3$ и $J(\hat{x}(t)) = 0$, међутим $\hat{x}(t) = 3$ није допустива функција, па овај случај није могућ. Друго решење које задовољава једначину (I), за случај (а), је $\hat{x}(t) = -1$, али слично као у претходном, оно није допустиво па тај случај такође није могућ.

- Разматрајмо сада случај (б). Добијамо да је за с.с. t на $[0,1]$, $\hat{x}(t) = t+1$. Заменом у прву једначину ситема (C) добијамо да за с.с. t на $[0,1]$ важи

$$\begin{aligned} &-2(t+1)\int_0^1 e^{t+1}dt - e^{t+1}\int_0^1 \left(2t+2-(t+1)^2\right)dt - \hat{\lambda}_2(t) \\ =&-2(t+1)(e^2-e) - \frac{2}{3}e^{t+1} - \hat{\lambda}_2(t) \\ =&\,0. \end{aligned}$$

  На основу претходне формуле добијамо да је за с.с. t на $[0,1]$

$$\hat{\lambda}_2(t) = -\left(2(e^2-e)(t+1) + \frac{2}{3}e^{t+1}\right) < 0$$

  што је немогуће због (IV). Па случај (б) такође није могућ.

- Разматрањем случаја (ц), на основу једначине (IV), добијамо да је за с.с. t на $[0,1]$ $\hat{x}(t) = 0$ оптимално решење. Заменом у једначину (I), добијамо да је за с.с. t на $[0,1]$

$$-\int_0^1 (2t+2)dt + \hat{\lambda}_1(t) = 0,$$

  одакле следи да је $\hat{\lambda}_1(t) = 3$, па су за с.с. t на $[0,1]$ неопходни услови задовољени за $\hat{\lambda}_1(t) = 3$ и $\hat{\lambda}_2(t) = 0$ и оптимална вредност је $J(\hat{x}(t)) = 3$.

- На сличан начин, као за случај (б), добијамо да је случај (д) такође немогућ.

На основу претходног, очигледно је $\hat{x}(t) = 0$ оптимално решење проблема (П) и $I_{\hat{b}}(t) = \{1\}$ за $\hat{b} = \frac{1}{2}$. Очигледно је

$$\nabla f(t,\hat{x}(t)) = 0,\ \nabla g(t,\hat{x}(t)) = 1,\ \nabla h_1(t,\hat{x}(t)) = 1,\ \nabla h_2(t,\hat{x}(t)) = -1.$$

Узмимо $\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{2}$ с.с. на $[0,1]$ и $\beta = \frac{1}{5}$. Следи да је

$$(\nabla h_1(t,\hat{x}(t)))'\,\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{2} \geq \beta \ \text{ с.с. на } [0,1].$$

Дакле, задовољен је услов (МФУРФ). Покажимо сада да је задовољен услов регуларности (УРФ) одговарајућег система. Узмимо $\xi \in \mathbb{R}$. За с.с. $t \in [0,1]$, нека је

$$\begin{aligned}\phi_0(t,\xi) &= \xi,\\ \phi_1(t,\xi) &= -\xi,\\ \phi_2(t,\xi) &= -t-1.\end{aligned}$$

Како је

$$|\xi| = max\{\xi, -\xi\},$$

имамо да је

$$\mathcal{I}(t,\xi) = \begin{cases}\{1\}, \text{ за } \xi < 0\\ \{0\}, \text{ за } \xi > 0\end{cases}$$

и $\{2\} \notin \mathcal{I}(t,\xi)$.

Услов регуларности (УРФ) система

$$\begin{aligned}\phi_0(t,\xi) &= 3\xi < 0,\\ \phi_1(t,\xi) &= -\xi \le 0,\\ \phi_2(t,\xi) &= -t-1 \le 0,\end{aligned} \tag{6.10}$$

је задовољен за $\bar{x} \equiv 0$, $R > 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и

- $e = 1$ за $\xi > 0$
- $e = -1$ за $\xi < 0$

за с.с. t на $[0,1]$.

Заиста, директном провером закључујемо да је:

- $\langle \partial_\xi \phi_0(t,\xi), e\rangle = 3 \ge \alpha$, за $\xi > 0$,
- $\langle \partial_\xi \phi_1(t,\xi), e\rangle = 1 \ge \alpha$, за $\xi < 0$.

6.3 Довољни услови

Следећи резултати дају довољне услове оптималности за проблем (ФПНВ). Докази главних теорема биће базирани на претпоставкама конкавности, конвексности и генерализоване конкавности.

Теорема 6.6. *Нека постоји допустиво решење* $\hat{x}(\cdot)$ *проблема* (ФПНВ) *и*

$\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *таква да за скоро свако* $t \in [0,T]$, *важе услови:*

$$\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t)) \\ + \sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t)) = 0, \tag{6.11}$$

$$\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ \hat{\lambda}_i(t) \geq 0, \quad i \in I. \tag{6.12}$$

Ако је функција $f(t,\cdot)$ *конкавна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$, *функција* $g(t,\cdot)$ *конвексна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда у* $[0,T]$ *и* $\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\cdot)$ *квазиконкавна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$, *онда је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (ФПНВ).

Доказ. Како је $x(\cdot) \in \Omega_P$ и важи (6.12), закључујемо да је

$$\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,x(t)) \geq \hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ i \in I,\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P \text{ с.с. на } [0,T].$$

После сумирања, имамо следећу неједнакост

$$\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,x(t)) \geq \sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)),\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{6.13}$$

Како је функција $\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\cdot)$ квазиконкавна у $\hat{x}(t)$ скоро свуда на $[0,T]$, из (6.13) следи да је

$$\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i'(t,\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t)) \geq 0,\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P, \ \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{6.14}$$

Из (6.11) и (6.14), добијамо да је

$$\left(\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t))\right)'(x(t)-\hat{x}(t)) \leq 0,$$

$\forall x(\cdot) \in \Omega_P$, с.с. на $[0,T]$.
Стављањем

$$\psi(\hat{x}) = \int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt$$

и

$$\varphi(\hat{x}) = \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt,$$

претходна неједнакост се може записати на следећи начин

$$\big(\psi(\hat{x})\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \varphi(\hat{x})\nabla g(t,\hat{x}(t))\big)'(x(t)-\hat{x}(t)) \leq 0,\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P \ \text{ с.с. на } [0,T].$$

Како су функције $f(t,\cdot)$ и $-g(t,\cdot)$ конкавне у $\hat{x}(t)$ скоро свуда на $[0,T]$, $\psi(\hat{x})>0$ и $\varphi(\hat{x})\geq 0$, следи да је

$$\psi(\hat{x})f(t,\cdot)-\varphi(\hat{x})g(t,\cdot)$$

конкавна у $\hat{x}(t)$ скоро свуда на $[0,T]$. Дакле, имамо да важи

$$\psi(\hat{x})f(t,x(t))-\varphi(\hat{x})g(t,x(t))-\psi(\hat{x})f(t,\hat{x}(t))+\varphi(\hat{x})g(t,\hat{x}(t))\leq 0,$$

$\forall x(\cdot)\in\Omega_P$, с.с. на $[0,T]$.

Интеграцијом претходне неједнакости на $[0,T]$, добијамо

$$\int_0^T\left(\psi(\hat{x})f(t,x(t))-\varphi(\hat{x})g(t,x(t))\right)dt\leq 0,\ \forall x(\cdot)\in\Omega_P.$$

Сређивањем претходне неједнакости, следи да је

$$\psi(\hat{x})\int_0^T f(t,x(t))\,dt\leq\varphi(\hat{x})\int_0^T g(t,x(t))\,dt,\ \forall x(\cdot)\in\Omega_P.$$

Дељењем претходне неједнакости са

$$\int_0^T g(t,x(t))dt\int_0^T g(t,\hat{x}(t))dt$$

следи

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt}\leq\frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt},\ \forall x(\cdot)\in\Omega_P.$$

Дакле, $\hat{x}(\cdot)$ је оптимално решење проблема (ФПНВ). □

Дефинишимо сада, за скоро свако $t\in[0,T]$, индексни скуп свих активних ограничења у $\hat{x}(\cdot)\in\Omega_P$ на следећи начин

$$A(t)=\left\{i\in I\ :\ h_i(t,\hat{x}(t))=0\right\}.$$

Следећи сличан приступ доказивања претходне теореме, добијамо довољне услове за проблем (ФПНВ) без услова комплементарности.

Теорема 6.7. *Нека је $\hat{x}(\cdot)$ допустиво решење проблема* (ФПНВ). *Нека је функција $h_i(t,\cdot)$ квазиконкавна за свако $i\in A(t)$ по другом аргументу $\hat{x}(t)$ скоро свуда у $[0,T]$ и постоји $\hat{\lambda}(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ таква да су за скоро свако $t\in[0,T]$ задовољени услови:*

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t))-\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t))&\\ +\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t))=0,&\end{aligned}\tag{6.15}$$

$$\hat{\lambda}_i(t) \geq 0,\ i \in A(t),\ \hat{\lambda}_i(t) = 0,\ i \in I \setminus A(t). \tag{6.16}$$

Ако је функција $f(t,\cdot)$ *конкавна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$ *и функција* $g(t,\cdot)$ *конвексна по другом аргументу у* $\hat{x}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$, *онда је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (ФПНВ).

Доказ. За било коју допустиву функцију $x(\cdot)$, важи

$$h_i(t,x(t)) \geq h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ i \in A(t),\quad \text{с.с. на } [0,T].$$

Како је функција $h_i(t,\cdot)$ квазиконкавна, имамо да је

$$\nabla h_i(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) \geq 0,\ i \in A(t),\ \text{с.с. на } [0,T].$$

Како је $\hat{\lambda}_i(t) \geq 0$ за $i \in A(t)$, с.с. на $[0,T]$, следи да је

$$\sum_{i \in A(t)} \hat{\lambda}_i(t) \nabla h_i(t,\hat{x}(t))'(x(t)-\hat{x}(t)) \geq 0,\ \ \forall x(\cdot) \in \Omega_P\ \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{6.17}$$

Из услова (6.15) и (6.17), добијамо да је

$$\left(\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt \nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt \nabla g(t,\hat{x}(t)) \right)' (x(t)-\hat{x}(t)) \leq 0,$$

$\forall x(\cdot) \in \Omega_P$, с.с. на $[0,T]$.

Стављањем

$$\psi(\hat{x}) = \int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt$$

и

$$\varphi(\hat{x}) = \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt,$$

претходна неједнакост се може записати на следећи начин

$$\big(\psi(\hat{x})\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \varphi(\hat{x})\nabla g(t,\hat{x}(t))\big)'(x(t)-\hat{x}(t)) \leq 0,\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P,\ \text{с.с. на } [0,T].$$

Како су функције $f(t,\cdot)$ и $-g(t,\cdot)$ конкавне у $\hat{x}(t)$ скоро свуда на $[0,T]$, $\psi(\hat{x}) > 0$ и $\varphi(\hat{x}) \geq 0$, следи да је $\psi(\hat{x})f(t,\cdot) - \varphi(\hat{x})g(t,\cdot)$ конкавна у $\hat{x}(t)$ скоро свуда на $[0,T]$. Као у доказу Теореме 6.6, закључујемо да важи

$$\psi(\hat{x})f(t,x(t)) - \varphi(\hat{x})g(t,x(t)) - \psi(\hat{x})f(t,\hat{x}(t)) + \varphi(\hat{x})g(t,\hat{x}(t)) \leq 0,$$

$\forall x(\cdot) \in \Omega_P$ с.с. на $[0,T]$.

Интеграцијом претходне неједнакости на $[0,T]$, добијамо да је

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} \leq \frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt},\ \forall x(\cdot) \in \Omega_P.$$

То је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (ФПНВ). □

6.4 Волфов дуал

У овом поглављу ћемо увести први дуалан модел и доказати теореме дуалности. Нека је

$$\Omega_{D_1} = \Big\{(u(\cdot),\lambda(\cdot)) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m) \,:\, \int_0^T g(t,u(t))\,dt \nabla f(t,u(t)) \\ - \int_0^T f(t,u(t))\,dt \nabla g(t,u(t)) + \sum_{i\in I} \lambda_i(t)\nabla h_i(t,u(t)) = 0, \\ \lambda_i(t) h_i(t,u(t)) = 0,\ \lambda_i(t) \geq 0,\ \ i \in I,\ \text{с.с. на } [0,T]\Big\}.$$

Разматрајмо следећи дуалан модел проблема (ФПНВ):

$$\begin{aligned} &\frac{\int_0^T f(t,u(t))\,dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt} \to \inf; \\ &\text{п.о. } (u(\cdot),\lambda(\cdot)) \in \Omega_{D_1}, \end{aligned} \tag{ВДФПНВ}$$

где је Ω_{D_1} допустив скуп проблема (ВДФПНВ).

Теорема 6.8. *Нека су $x(\cdot)$ и $(u(\cdot),\lambda(\cdot))$ редом допустива решења проблема* (ФПНВ) *и* (ВДФПНВ). *Претпоставимо да је функција $f(t,\cdot)$ конкавна по другом аргументу у $u(t)$ скоро свуда у $[0,T]$, функција $g(t,\cdot)$ конвексна по другом аргументу у $u(t)$ скоро свуда у $[0,T]$ и функција $\sum_{i\in I}\lambda_i(t)h_i(t,\cdot)$ квазиконкавна по другом аргументу у $u(t)$ скоро свуда у $[0,T]$. Тада важи*

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} \leq \frac{\int_0^T f(t,u(t))\,dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt}.$$

Доказ. Како су $x(\cdot)$ и $(u(\cdot),\lambda(\cdot))$ редом допустива решења проблема (ФПНВ) и (ВДФПНВ), онда је

$$\lambda_i(t)h_i(t,x(t)) \geq \lambda_i(t)h_i(t,u(t)) = 0,\ \ i\in I,\ \text{с.с. на } [0,T].$$

После сумирања имамо да је

$$\sum_{i\in I}\lambda_i(t)h_i(t,x(t)) \geq \sum_{i\in I}\lambda_i(t)h_i(t,u(t)),\ \text{с.с. на } [0,T]. \tag{6.18}$$

Како је функција

$$\sum_{i \in I} \lambda_i(t) h_i(t, \cdot)$$

квазиконкавна у $u(t)$ скоро свуда у $[0, T]$, из неједнакости (6.18) следи да је

$$\sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla h_i'(t, u(t))(x(t) - u(t)) \geq 0, \quad \text{с.с. на } [0, T]. \tag{6.19}$$

Како је $(u(\cdot), \lambda(\cdot)) \in \Omega_{D_1}$ и важи неједнакост (6.19), следи да је

$$\left(\int_0^T g(t, u(t))\, dt \nabla f(t, u(t)) - \int_0^T f(t, u(t))\, dt \nabla g(t, u(t)) \right)' (x(t) - u(t)) \leq 0,$$

с.с. на $[0, T]$.

Ставимо да је

$$\psi(u) = \int_0^T g(t, u(t))\, dt$$

и

$$\varphi(u) = \int_0^T f(t, u(t))\, dt.$$

Сада се претходна неједнакост може записати на следећи начин

$$\big(\psi(u) \nabla f(t, u(t)) - \varphi(u) \nabla g(t, u(t)) \big)' (x(t) - u(t)) \leq 0, \ \text{ с.с. на } [0, T].$$

Како су функције $f(t, \cdot)$ и $-g(t, \cdot)$ конкавне у $u(t)$ скоро свуда на $[0, T]$, $\psi(u) > 0$ и $\varphi(u) \geq 0$, слично као у претходном поглављу, функција

$$\psi(u) f(t, \cdot) - \varphi(u) g(t, \cdot)$$

мора бити конкавана у $u(t)$ скоро свуда на $[0, T]$.
Одавде је

$$\psi(u) f(t, x(t)) - \varphi(u) g(t, x(t)) - \psi(u) f(t, u(t)) + \varphi(u) g(t, u(t)) \leq 0, \ \ \text{с.с. на } [0, T].$$

Интеграцијом претходне неједнакости на $[0, T]$ добијамо да је

$$\int_0^T g(t, u(t)) dt \int_0^T f(t, x(t)) dt - \int_0^T f(t, u(t)) dt \int_0^T g(t, x(t)) dt \leq 0,$$

тј.

$$\int_0^T g(t, u(t)) dt \int_0^T f(t, x(t)) dt \leq \int_0^T f(t, u(t)) dt \int_0^T g(t, x(t)) dt.$$

Дељењем леве и десне стране претходне неједнакости са

$$\int_0^T g(t,u(t))dt \int_0^T g(t,x(t))dt$$

добијамо коначно

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} \le \frac{\int_0^T f(t,u(t))\,dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt},$$

што је и требало доказати. □

Теорема 6.9. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (ФПНВ)*. Нека важе претпоставке (а), (б) и нека су задовољени* (МФУРФ) *у* $\hat{x}(\cdot)$ *и услов регуларности* (УРФ)*. Ако су задовољени сви услови Теореме 6.8 за све допустиве функције проблема* (ФПНВ)*, онда постоји* $\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *таква да је* $(\hat{x}(\cdot),\hat{\lambda}(\cdot))$ *оптимално решење проблема* (ВДФПНВ) *и важи*

$$\max_{x(\cdot)\in\Omega_P} \frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} = \min_{(u(\cdot),\lambda(\cdot))\in\Omega_{D_1}} \frac{\int_0^T f(t,u(t))\,dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt}.$$

Доказ. Како је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (ФПНВ), закључујемо из Теореме 6.2 да постоји $\hat{\lambda}(\cdot) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ таква да је за с.с. $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla f(t,\hat{x}(t)) - \int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt\nabla g(t,\hat{x}(t))&\\ +\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,&\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t)) = 0,\ \hat{\lambda}_i(t) \ge 0, \quad i \in I. \tag{6.21}$$

Закључујемо да је $(\hat{x}(\cdot),\hat{\lambda}(\cdot)) \in \Omega_{D_1}$. Из Теореме 6.8 следи да је допустиво решење проблема (ФПНВ) заправо оптимално решење проблема (ВДФПНВ). Дакле, оптималне вредности проблема (ФПНВ) и (ВДФПНВ) су једнаке. □

Теорема 6.10. *Нека су* $\hat{x}(\cdot)$ *и* $(\hat{u}(\cdot),\hat{\lambda(\cdot)})$ *редом оптимална решења проблема* (ФПНВ) *и* (ВДФПНВ)*. Ако је функција* $f(t,\cdot)$ *конкавна по другом аргументу* $\hat{u}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$*, функција* $g(t,\cdot)$ *конвексна по другом аргументу у* $\hat{u}(t)$ *скоро свуда у* $[0,T]$ *и функција* $\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\cdot)$ *квазиконкавна по другом аргументу у* $\hat{u}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$*, онда проблеми* (ФПНВ) *и* (ВДФПНВ) *имају иста оптимална решења.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Нека је

$$\hat{x}(\cdot) \ne \hat{u}(\cdot). \tag{6.22}$$

Из Теореме 6.9 следи да постоји $\hat{\lambda}(\cdot)$ тако да $(\hat{x}(\cdot),\hat{\lambda}(\cdot))$ представља оптимално решење проблема (ВДФПНВ) и важи

$$\frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt} = \frac{\int_0^T f(t,\hat{u}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{u}(t))\,dt}. \tag{6.23}$$

Онда на основу Теореме 6.8, за све допустиве $x(\cdot)$, $(u(\cdot),\lambda(\cdot))$ проблема (ФПНВ) и (ВДФПНВ), имамо да важи

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} \leq \frac{\int_0^T f(t,u(t))\,dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt}.$$

Сада, из претпоставке (6.22), мора бити

$$\frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt} < \frac{\int_0^T f(t,\hat{u}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{u}(t))\,dt}.$$

Ово је у супротности са (6.23). Дакле, проблеми (ФПНВ) и (ВДФПНВ) имају иста оптимална решења. □

Пример 6.11. *Као илустрацију ћемо разматрати следећи дуалан модел* (ДФ1) *проблема (П) :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_0^1 \left(2t+2-u^2(t)\right)\,dt}{\int_0^1 e^{u(t)}\,dt} \to \inf;\\
\text{п.о.}\quad & -2u(t)\int_0^1 e^{u(t)}\,dt - e^{u(t)}\int_0^1 (2t+2-u^2(t))\,dt\\
&+\lambda_1(t)-\lambda_2(t)=0,\ \text{с.с. на } [0,1],\\
&\lambda_1(t)u(t)=0,\ \text{с.с. на } [0,1],\\
&\lambda_2(t)(t+1-u(t))=0,\ \text{с.с. на } [0,1],\\
&\lambda_i(t)\geq 0,\ i=1,2,\ \text{с.с. на } [0,1],\\
&u(\cdot)\in L_\infty([0,1];\mathbb{R}),\ (\lambda_1(\cdot),\lambda_2(\cdot))\in L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2).
\end{aligned} \tag{ДФ1}$$

Сви услови Теореме 6.9 су испуњени. Лако се проверава да је за с.с. $t\in[0,1]$, $(\hat{u}(t),\hat{\lambda}_1(t),\hat{\lambda}_2(t))=(0,3,0)$ оптимално решење претходног проблема. Такође, проблеми (П) и (ДФ1) имају исте оптималне вредности.

6.5 Лагранжов дуал

У овом поглављу ћемо увести и разматрати други дуалан модел. Нека је

$$\Omega_{D_2} = \Bigg\{ (u(\cdot), \lambda(\cdot)) \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \; : \\
\int_0^T g(t,u(t))\,dt \left(\nabla f(t,u(t)) + \sum_{i\in I} \lambda_i(t) \nabla h_i(t,u(t)) \right) \\
- \int_0^T \left(f(t,u(t)) - \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t,u(t)) \right) dt \nabla g(t,u(t)) \le 0, \\
\lambda_i(t) h_i(t,u(t)) \le 0, \; \lambda_i(t) \ge 0, \; i \in I, \text{ с.с. на } [0,T] \Bigg\}.$$

Разматрајмо следећи Лагранжов дуал проблема (ФПНВ):

$$\frac{\int_0^T \left(f(t,u(t)) - \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t,u(t)) \right) dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt} \to \inf; \qquad \text{(ЛДФПНВ)}$$
$$\text{п.о.} \quad (u(\cdot), \lambda(\cdot)) \in \Omega_{D_2},$$

где је Ω_{D_2} допустив скуп проблема (ЛДФПНВ).

Теорема 6.12. *Нека су $x(\cdot)$ и $(u(\cdot), \lambda(\cdot))$ редом допустива решења проблема* (ФПНВ) *и* (ЛДФПНВ). *Претпоставимо да је функција $f(t,\cdot)$ конкавна по другом аргументу у $u(t)$ скоро свуда на $[0,T]$, функција $g(t,\cdot)$ конвексна по другом аргументу у $u(t)$ скоро свуда на $[0,T]$ и функција*
$\sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t,\cdot)$ *кавазиконкавна по другом аргументу у $u(t)$ скоро свуда на $[0,T]$. Онда важи*

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt} \le \frac{\int_0^T \left(f(t,u(t)) - \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t,u(t)) \right) dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt}.$$

Доказ. Како су $x(\cdot)$ и $(u(\cdot), \lambda(\cdot))$ редом допустиве функције проблема (ФПНВ) и (ЛДФПНВ), имамо да је

$$\lambda_i(t) h_i(t,x(t)) \ge 0 \ge \lambda_i(t) h_i(t,u(t)), \;\; i \in I, \text{ с.с. на } [0,T].$$

После сумирања, даље важи

$$\sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t,x(t)) \ge \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t,u(t)), \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{6.24}$$

Ставимо

$$\psi(u) = \int_0^T g(t,u(t))\,dt,$$

$$\varphi(u) = \int_0^T f(t, u(t))\, dt$$

и

$$\eta(u) = -\int_0^T \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t, u(t))\, dt \geq 0.$$

Како је функција

$$\sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t, \cdot)$$

квазиконкавна у $u(t)$ скоро свуда на $[0, T]$, из услова $\psi(u) > 0$ и (6.24) директно следи да је

$$\psi(u) \sum_{i\in I} \lambda_i(t) \nabla h_i(t, u(t))'(x(t) - u(t)) \geq 0, \quad \text{с.с. на } [0, T]. \tag{6.25}$$

Како је $(u(\cdot), \lambda(\cdot)) \in \Omega_{D_2}$, из (6.25) имамо да је

$$\left(\psi(u)\nabla f(t, u(t)) - \varphi(u)\nabla g(t, u(t)) - \eta(u)\nabla g(t, u(t))\right)' (x(t) - u(t)) \leq 0, \text{ с.с. на } [0, T].$$

Претходна неједнакост се заправо може записати у облику

$$\left(\psi(u)\nabla f(t, u(t)) - (\varphi(u) + \eta(u))\, \nabla g(t, u(t))\right)' (x(t) - u(t)) \leq 0, \quad \text{с.с. на } [0, T].$$

Како су функције $f(t, \cdot)$ и $-g(t, \cdot)$ конкавне у $u(t)$ скоро свуда на $[0, T]$, из услова $\psi(u) > 0$ и $\eta(u) \geq 0$ следи да је

$$\psi(u) f(t, \cdot) - (\varphi(u) + \eta(u))\, g(t, \cdot) \ \text{ конкавна у } \ u(t) \ \text{ с.с. на} \, [0, T].$$

Из претпоставке конкавности имамо да је

$$\begin{aligned} &\psi(u) f(t, x(t)) - (\varphi(u) + \eta(u)) g(t, x(t)) - \psi(u) f(t, u(t)) \\ &+(\varphi(u)\eta(u)) g(t, u(t)) \leq 0 \ \text{ с.с. на } [0, T]. \end{aligned}$$

Интеграцијом претходне неједнакости на $[0, T]$, добијамо

$$\begin{aligned} &\int_0^T g(t, u(t))\, dt \int_0^T f(t, x(t))\, dt \\ &- \int_0^T \left(f(t, u(t)) - \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t, u(t)) \right) dt \int_0^T g(t, x(t))\, dt \\ &- \int_0^T \sum_{i\in I} \lambda_i(t) h_i(t, u(t))\, dt \int_0^T g(t, x(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Из (6.1) и неједнакости

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) h_i(t, u(t))\, dt \leq 0$$

директно следи да је

$$\begin{aligned}&\int_0^T g(t,u(t))\,dt\int_0^T f(t,x(t))\,dt\\ &-\int_0^T\left(f(t,u(t))-\sum_{i\in I}\lambda_i(t)h_i(t,u(t))\right)dt\int_0^T g(t,x(t))\,dt\le 0.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Дељењем претходне неједнакости (6.26) са

$$\int_0^T g(t,u(t))dt\int_0^T g(t,x(t))dt$$

добијамо

$$\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt}\le\frac{\int_0^T\left(f(t,u(t))-\sum_{i\in I}\lambda_i(t)h_i(t,u(t))\right)dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt},$$

што је и требало доказати. □

Теорема 6.13. *Нека је* $\hat{x}(\cdot)$ *оптимално решење проблема* (ФПНВ). *Нека важе претпоставке (а), (б) и нека су задовољени* (МФУРФ) *у* $\hat{x}(\cdot)$ *и услов регуларности* (УРФ). *Ако су задовољени сви услови Теореме 6.8 за све допустиве функције проблема* (ФПНВ), *онда постоји* $\hat{\lambda}(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ *таква да је* $(\hat{x}(\cdot),\hat{\lambda}(\cdot))$ *оптимално решење проблема* (ЛДФПНВ) *и важи*

$$\max_{x(\cdot)\in\Omega_P}\frac{\int_0^T f(t,x(t))\,dt}{\int_0^T g(t,x(t))\,dt}=\min_{(u(\cdot),\lambda(\cdot))\in\Omega_{D_2}}\frac{\int_0^T\left(f(t,u(t))-\sum_{i\in I}\lambda_i(t)h_i(t,u(t))\right)dt}{\int_0^T g(t,u(t))\,dt}.$$

Доказ. Како је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема (ФПНВ), закључујемо на основу Теореме 6.2, да постоји $\hat{\lambda}(\cdot)\in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ таква да важе услови

$$\nabla f(t,\hat{x}(t))-\frac{\int_0^T f(t,\hat{x}(t))\,dt}{\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt}\nabla g(t,\hat{x}(t))+\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)\nabla h_i(t,\hat{x}(t))=0\quad\text{с.с. на }[0,T],\tag{6.27}$$

$$\int_0^T\sum_{i=1}^m\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\hat{x}(t))\,dt\,\nabla g(t,\hat{x}(t))=0\ \text{с.с. на }[0,T],\tag{6.28}$$

$$\hat{\lambda}_i(t)\ge 0\ i\in I,\ \text{с.с. на }[0,T].\tag{6.29}$$

Множењем израза (6.27) са

$$\int_0^T g(t,\hat{x}(t))\,dt>0$$

и сабирањем са (6.28) закључујемо да је $(\hat{x}(\cdot),\hat{\lambda}(\cdot))\in\Omega_{D_2}$. Дакле, из Теореме 6.12 очигледно је допустиво решење пороблема (ФПНВ) уједно оптимално решење проблема (ЛДФПНВ) и оптималне вредности проблема (ФПНВ) и (ЛДФПНВ) су једнаке. □

Теорема 6.14. *Нека су* $\hat{x}(\cdot)$ *и* $(\hat{u}(\cdot),\hat{\lambda(\cdot)})$ *редом оптимална решења проблема* (ФПНВ) *и* (ЛДФПНВ). *Нека је функција* $f(t,\cdot)$ *конкавна по другом аргументу у* $\hat{u}(t)$ *скоро свуда* *на* $[0,T]$, *функција* $g(t,\cdot)$ *конвексна по другом аргументу у* $\hat{u}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$ *и функција* $\sum_{i\in I}\hat{\lambda}_i(t)h_i(t,\cdot)$ *квазиконкавна у* $\hat{u}(t)$ *скоро свуда на* $[0,T]$. *Тада проблеми* (ФПНВ) *и* (ЛДФПНВ) *имају исте оптималне вредности.*

Доказ Теореме 6.14 изостављамо јер је потпуно исти као доказ Теореме 6.10.

Пример 6.15. *Разматрајамо следећи дуалан модел* (ДФ2) *проблема (П):*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int_0^1 \left(2t+2-u^2(t)-\lambda_1(t)u(t)-\lambda_2(t)(t+1-u(t))\right)\,dt}{\int_0^1 e^{u(t)}\,dt} \to \inf;\\
\text{п.о.}\quad &(\lambda_1(t)-\lambda_2(t)-2u(t))\int_0^1 e^{u(t)}\,dt\\
&+e^{u(t)}\int_0^1 \big(u^2(t)+\lambda_1(t)u(t)+\lambda_2(t)(t+1-u(t))-2t-2\big)\,dt \le 0,\\
&\text{с.с. на } [0,1],\\
&\lambda_1(t)u(t)\le 0,\quad \text{с.с. на } [0,1],\\
&\lambda_2(t)(t+1-u(t))\le 0,\quad \text{с.с. на } [0,1],\\
&\lambda_i(t)\ge 0,\ i=1,2,\quad \text{с.с. на } [0,1],\\
&u(\cdot)\in L_\infty([0,1];\mathbb{R}),\ (\lambda_1(\cdot),\lambda_2(\cdot))\in L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2).
\end{aligned}
\tag{ДФ2}
$$

Сви услови теореме 6.13 су испуњени. Лако се проверава да је за с.с. $t\in[0,1]$, $(\hat{u}(t),\hat{\lambda}_1(t),\hat{\lambda}_2(t))=(0,3,0)$ оптимално решење претходног проблема. Такође, проблеми (П) и (ДФ2) имају исте оптималне вредности.

7 Закључак и правци будућег истраживања

Основно чиме се бавила ова теза је проучавање нових услова оптималности за скаларне, рационалне и проблеме вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом и формирање нових дуалних модела. Нови резултати који су добијени у тези наведени су испод.

- Добијени су неопходни и довољни услови екстремума за конвексан скаларни проблем оптимизације са непрекидним временом.
- Доказане су теореме слабе и јаке дуалности за конвексан скаларни проблем оптимизације са непрекидним временом.
- Добијени су неопходни и довољни услови екстремума за конвексан проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом, као и општији услов нетривијалности Лагранжових множилаца него до тада познат услов тог типа за овај проблем.
- Добијени су нови неопходни услови екстремума за конвексан проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом уз додатне претпоставке регуларности ограничења.
- Добијени су неопходни услови екстремума првог реда за гладак проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом уз додатне претпоставке регуларности ограничења.
- Добијени су довољи услови првог реда за гладак проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом уз претпоставке генерализоване конкавности.
- Добијена су два дуална модела Монд-Веировог и Волфовог типа за гладак проблем оптимизације са непрекдиним временом. Осим тога, доказане су и теореме слабе и јаке дуалности за овај проблем.
- Добијени су неопходни услови екстремума првог реда за гладак рационални проблем оптимизације са непрекидним временом.
- Добијени су довољни услови првог реда за гладак рационални проблем оптимизације са непрекидним временом уз претпоставке генерализоване конвексности и конкавности.
- Добијена су два дуална модела Лагранжовог и Волфовог типа за гладак проблем оптимизације са непрекидним временом. Такође су доказане и теореме слабе и јаке дуалности за овај проблем.
- Наведени резултати су потврђени конкретним примерима.

Тема ове дисертације је мултидисциплинарна, актуелна, веома значајна и резултати до којих се дошло представљају велики научни допринос у теорији екстремалних проблема. На актуелност и значај теме указују и многи истакнути математичари који се баве овим питањима и њихови резултати који се објављују у врхунским светским часописима.

Било би занимљиво видети како се сличан приступ као у шестој глави може проширити на истраживање услова оптималности и теорије дуалности за негладке рационалне проблеме оптимизације са непрекидним временом, обзиром да је једини рад из ове области [60] користио погрешне резултате [10]. Нумеричке методе за решавање линеарног рационалног проблема оптимизације са непрекидним временом добро су изучене у [88–92], али не постоје нумерички алгоритми за решавање нелинеарног проблема. У том циљу су неопходни и довољни услови у овом раду добра полазна основа.

Такође, било би интересантно изучавати неопходне услове оптималности за рационални проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом, уз слабије претпоставке него што је претпоставио Залмаи у [104]. Претпоставке које је он морао да има су јако тешке за проверу. Користећи Теорему 2.26, следећи сличан приступ као у шестој глави могуће је добити неопходне услове оптималности без хипотеза конвексности које је Залмаи у [104] морао да претпостави. Ово ће такође бити циљ даљих истраживања.

Због грешака у примени уопштене Горданове Теореме 2.23, закључено је да су некоректни изведени услови оптималности у области негладке оптимизације са непрекидним временом [10,57–59]. Један од праваца будућих истраживања такође може бити добијање нових услова оптималности за ове класе проблема.

Литература

[1] J. Abadie. *On the Kuhn-Tucker Theorem, in J. Abadie (ed.), "Nonlinear Programming," 21-36.* North Holland Publishing Company, 1967.

[2] V. Alekseev, V. Tikhomirov, S. Fomin. *Optimal control.* Contemporary Soviet Mathematics, Consultants Bureau, New York, 1987.

[3] K. J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa. *Constraint qualifications in maximization problems.* Naval Research Logistics Quarterly, 8: 175–191, 1961.

[4] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, B. Marinković. *Theorems of the alternative for systems of convex inequalities.* Set-Valued and Variational Analysis, 27: 51–70, 2019.

[5] S. H. Bazaraa M.S., S. C.M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms.* Wiley, 1994.

[6] C. R. Bector, S. Chandra, I. Husain. *Optimality conditions and duality in subdifferentiable multiobjective fractional programming.* J. Optim. Theory Appl., 79: 105–125, 1993.

[7] R. Bellman. *Bottleneck problems and dynamic programming.* Proc. Natl. Acad. Sci., 39: 947–951, 1953.

[8] D. Bhatia, B. Gupta. *Efficiency in certain nonlinear fractional vector maximization problems.* Indian J. Pure Appl. Math., 11: 669–672, 1980.

[9] H. F. Bohnenblust, S. Karlin, L. S. Shapley. *Solutions of discrete, two-person games, contributions to the theory of games.* 1(24): 51–72, 1956.

[10] A. J. V. Brandao, M. A. Rojas-Medar, G. N. Silva. *Nonsmooth continouous-time optimization problems: necessary conditions.* Comput. Math. Appl., 41: 1447–1456, 2001.

[11] S. Chandra, B. D. Craven, B. Mond. *Multiobjective fractional programming duality. a Lagrangian approach.* Optimization, 22 (4): 549–556, 1991.

[12] V. Chankong, Y. Haimes. *Multiobjective decision making; theory and methodology.* North-Hollaand, New York, 3: 3095–3105, 1983.

[13] A. Charnes, W. W. Cooper. *Programming with linear fractional functionals.* Naval Research Logistics Quarterly, 9: 181–186, 1962.

[14] F. C. Clarke. *Functional analysis, calculus of varaiations and optimal control.* Springer, London, 2013.

[15] B. D. Craven. *Mathematical Programming and Control Theory.* Chapman Hall, London, 1978.

[16] B. D. Craven. *Control and Optimization.* Chapman and Hal, London, 1995.

[17] B. D. Craven, J. J. Koliha. *Generalizations of Farkas theorem.* SIAM Journal on Mathematical Analysis, 8 (6): 983–997, 1977.

[18] D. G. J. Craven, B, V. Jeyakumar. *Nonconvex theorems of the alternative and minimizationy.* Optimization, 18: 151–163, 1987.

[19] K. Fan, I. Glicksberg, A. J. Hoffman. *Systems of inequalities involving convex functions.* Proc. Amer. Math. Soc., 8: 617–622, 1957.

[20] J. Farkas. *Theorie der einfahen ungleichungen.* Journal fuer die reine und angewandte Mathematik, 124: 1–27, 1902.

[21] W. H. Farr, M. A. Hanson. *Continuous-time programming with nonlinear constraints.* J. Math. Anal. Appl., 45: 96–115, 1974.

[22] O. Ferrero. *Theorems of the alternative for set-valued functions in infinitedimensional spaces.* Optimization, 20: 167–175, 1989.

[23] D. Gale. *The Theory of Linear Economic Models.* McGraw-Hill Book Company, 1960.

[24] A. Geoffrion. *Duality in nonlinear programming: a simplified applications-oriented development.* SIAM review., 13: 1–37, 1971.

[25] A. M. Geoffrion. *Proper efficiency and the theory of vector maximization.* J. Math. Anal. Appl., 22: 618–630, 1968.

[26] V. Girsanov. *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[27] P. Gordan. *Uber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coeffizienten.* Math. Ann., 6: 23–28, 1873.

[28] M. Hanson. *Duality for a class of infinite programming problems.* SIAM Journal on Applied Mathematics, 16: 318–323, 1968.

[29] M. A. Hanson, B. Mond. *A class of continuous convex programming problems.* J. Math. Anal. Appl., 22: 427–437, 1968.

[30] I. Husain, Z. Jabeen. *Continuous-time fractional minmax programming.* Mathematical and Computer Modelling, 42: 701–710, 2005.

[31] A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov. *Theory of extremal problems.* vol. 6. Elsevier, North-Holland, 2009.

[32] V. Janković, B. Marinković, S. V. Raković. *Motzkin's Theorem of the alternative: a continuous-time generalization.* Optimization letters, 7: 1659–1668, 2013.

[33] F. John. *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions, in K. 0. Friedrichs, O. E. Neugebauer, and J. J. Stoker, (eds.), "Studies and Essays: Courant Anniversary*. Interscience Publishersy, 1948.

[34] A. Jović. *A new duality approach to vector continuous-time programming (na recenziji).*

[35] A. Jović. *New optimality conditions in vector continuous-time programming.* Yugoslav Journal of Operations Research, 31 (3): 329–338, 2021.

[36] A. Jović. *Optimality criteria and duality for nonlinear fractional continuous-time programming (prihvacen za stampu).* International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 1–16, 2021.

[37] A. Jović, B. Marinković. *Saddle point optimality criteria and duality for convex continuous-time programming problem (na recenziji).*

[38] A. Jović, B. Marinković. *New optimality criteria for convex continuous-time problems of vector optimization.* Optimization, DOI:https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1950152: 1–16, 2021.

[39] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economic.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1959.

[40] R. N. Kaul, V. Lyall. *A note on nonlinear fractional vector maximization.* Opsearch, 26: 108–121, 1989.

[41] D. S. Kim, S. J. Kim, M. H. Kim. *Optimality and duality for a class of nondifferentiable multiobjective fractional programming problems.* J. Optim. Theory Appl., 129: 131–146, 2006.

[42] H. W. Kuhn, A. W. Tucker. *Proceedings of the second berkeley symposium on mathematical statistics and probability.* University of California Press, Berkeley, 1: 481–492, 1951.

[43] G. M. Lee. *On efficiency in nonlinear fractional vector maximization problem.* Optimization, 25: 47–52, 1992.

[44] J. C. Lee, H. C. Lai. *Parameter-free dual models for fractional programming with generalized invexity.* Annals of Operation Research, 133: 47–61, 2005.

[45] N. Levinson. *A class of continuous linear programming problems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 16 (1): 73–83, 1966.

[46] J. G. Lin. *Maximal vectors and multiobjective optimization.* J. Optim. Theory Appl., 18(1): 41–64, 1976.

[47] D. T. Luc. *Theorems of the alternative and their applications in multiobjective optimization.* Acta Mathematica Hungarica, 45: 311–320, 1985.

[48] O. L. Mangasarian. *Nonlinear programming.* McGraw-Hill, New York, 1969.

[49] B. Marinković. *Optimality conditions in a vector continuous-time optimization problem.* J. Comput. Appl. Math., 63: 318–324, 2012.

[50] I. Maruşciac. *On Fritz John type optimality criterion in muhiobjective optimization.* Revue l'analyse numerique et la théorie de l'approximation, 11: 109–114, 1982.

[51] K. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization.* Kluwer Academic Publishers., Boston, 1999.

[52] M. R. C. do Monte. *Qualifcacoes de Restricoes em Otimizacao Nao Linear com Tempo Continuo , Doctoral dissertation.* Unespl, Campus de Sao Jose do Rio Pretp, 2018.

[53] M. R. C. Monte, V. A. Oliveira. *Necessary conditions for continuous-time optimization under the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification.* Optimization, 69: 777–798, 2020.

[54] M. R. C. Monte, V. A. Oliveira. *A constant rank constraint qualification in continuous-time nonlinear programming.* Set-Valued and Variational Analysis, 29: 61–81, 2021.

[55] T. S. Motzkin. *Beitrage zur Theorie der Linearen Ungleichungen.* Inaugural Dissertation, 1936.

[56] S. Nobakhtian. *Optimality and duality for nonsmooth multiobjective fractional programming with mixed constraints.* J. Glob. Optim, 41: 103–115, 2008.

[57] S. Nobakhtian, M. Pouryayevali. *KKT optimality conditions and nonsmooth continuous-time optimization problems.* Numer. Funct. Anal. Optim., 32(11): 1175–1189, 2011.

[58] S. Nobakhtian, M. R. Pouryayevali. *Duality for nonsmooth continuous-time problems of vector optimization.* J. Optim. Theory Appl., 136: 77–85, 2008.

[59] S. Nobakhtian, M. R. Pouryayevali. *Optimality criteria for nonsmooth continuous-time problems of multiobjective optimization.* J. Optim. Theory Appl., 136: 69–76, 2008.

[60] S. Nobakhtian, M. R. Pouryayevali. *Optimality conditions and duality for nonsmooth fractional continuous-time problems.* Journal of Optimization Theory and Applications, 152: 245–255, 2012.

[61] V. A. Oliveira. *Vector continouous-time programming without differentiabillity.* J. Comput. Appl. Math., 234: 924–933, 2010.

[62] V. A. Oliveira, M. A. Rojas-Medar. *Continuous-time multiobjective optimization problems via invexity.* Abstract and Applied Analysis, Article ID 61296: 11, 2007.

[63] V. A. Oliveira, M. A. Rojas-Medar. *Continuous-time optimization problems involving invex functions.* J. Math. Anal. Appl., 327: 1320–1334, 2007.

[64] V. A. Oliveira, M. A. Rojas-Medar. *Multi-objective infinite programming.* Comput. Math. Appl., 55: 1907–1922, 2008.

[65] J. Ponstein. *Seven types of convexity.* SIAM Review, 9: 115–119, 1967.

[66] T. W. Reiland, M. A. Hanson. *Generalized Kuhn-Tucker conditions and duality for continuous nonlinear programming problem.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 74 (2): 578–598, 1980.

[67] T. W. Reiland, M. A. Hanson. *Optimality conditions and duality in continuous programming I. Convex programs and a theorem of the alternative.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 77 (2): 297–325, 1980.

[68] T. W. Reiland, M. A. Hanson. *Optimality conditions and duality in continuous programming II. The linear problem revisited.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 77 (2): 329–343, 1980.

[69] R. T. Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[70] M. A. Rojas Medar, A. J. Brandao, G. N. Silva. *Nonsmooth continouous-time optimization problems: sufficient conditions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications., 227(2): 305–318, 1998.

[71] G. Ruiz Garzón, R. Osuna Gómez, A. Rufián Lizana, B. Hernández-Jiménez. *Optimality in continuous-time multiobjective optimization and vector variational-like inequalities.* TOP, 23: 198–219, 2015.

[72] A. Schy, D. Giesy. *Multiobjective optimization techniques for design of aircraft control systems.* In: Stadler, W. (ed.) Multiobjective Optimization in Engineering and in the Science, Plenum, New York, 1: 252–262, 1988.

[73] C. Singh. *Optimality conditions in multiobjective differentiable programming.* J. Optim. Theory Appl., 53: 115–123, 1987.

[74] C. Singh. *Continuous-time multiobjective duality theory.* J. Inform. Optim. Sci., 10: 153–164, 1989.

[75] C. Singh, W. H. Farr. *Saddle-point optimality criteria of continuous time programming without differentiability.* J.Math. Anal. Appl., 59: 442–453, 1977.

[76] M. L. Slater. *A note on Motzkin's Transposition Theorem.* Econometrica, 19: 185–186, 1951.

[77] W. Stadler. *Multiobjective optimization in mechanics: a survey.* Appl. Mech. Rev., 37: 277–286, 1984.

[78] I. M. Stancu-Minasian, S. Tigan. *Continuous-time linear-fractional programming: the minimum-risk approac.* Rairo Oper. Res, 34: 397–409, 2000.

[79] E. Stiemke. *Über positive losungen Homogener linearer Gleichungen.* Mathematische, 76: 340–342, 1915.

[80] S. Suneja, C. Singh, R. Kaul. *Optimality and duality in continuous-time nonlinear fractional programming.* J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 34: 229–244, 1992.

[81] S. K. Suneja, C. S. Lalitha. *Multiobjective fractional programming involving p-invex and related functions.* Opsearch, 30: 1–14, 1993.

[82] A. W. Tucker. *Dual systems of homogeneous linear relations.* 38: 3–18, 1956.

[83] W. F. Tyndall. *A duality theorem for a class of continuous linear programming problems.* SIAM J. Appl. Math., 13: 644–666, 1965.

[84] W. F. Tyndall. *On two duality theorems for continuous programming problems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 31 (1): 6–14, 1970.

[85] R. U. Verma. *Weak ε - efficiency conditions for multiobjective fractional programming.* Applied Mathematics and Computation, 12: 6819–6827, 2013.

[86] J. Von Neumann. *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpuntsatzes.* In K. Menger, editor, Leipzig und Wien, 1937.

[87] T. Weir, B. Mond, R. R. Egudo. *Duality without constraint qualification for multiobjective fractional programmings.* Asia-Pacific J. Oper. Res., 9: 195–206, 1992.

[88] C. F. Wen, Y. Lur, K. Wu. *A recurrence method for a special class of continuous time linear programming problems.* Journal of Global Optimization, 47: 83–106, 2010.

[89] C. F. Wen, Y. Y. Lur, S. M. Guu, E. S. Lee. *On a recurrence algorithm for continuous-time linear fractional programming problems.* Computers and Mathematics with Applications, 59: 829–852, 2010.

[90] C. F. Wen, H. C. Wu. *Using the Dinkelbach-type algorithm to solve the continuous-time linear fractional programming problems.* Journal of Global Optimization, 49: 237–263, 2011.

[91] C. F. Wen, H. C. Wu. *Approximate solutions and duality theorems for continuous-time linear fractional programming problems.* Numerical Functional Analysis and Optimization, 33: 80–129, 2012.

[92] C. F. Wen, H. C. Wu. *Using the parametric approach to solve the continuous-time linear fractional max-min problemss.* Journal of Global Optimization, 54: 129–153, 2012.

[93] X. Yang. *Alternative theorems and optimality conditions and weakened convexity.* Opsearch, 29: 125–135, 1992.

[94] Y. X. Yang, X.M., G. Chen. *Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps.* J. Optim. Theory Appl., 107: 627–640, 2000.

[95] C. Zalinescu. *Optimality conditions and duality for continuous-time program- ming without differentiability.* in: Distributed Parameter Systems, edited by Kappel, F. and Kunisch, K. and Schappacher, W., Springer-Verlag, New York,, 1985.

[96] G. J. Zalmai. *A continuous-time generalization of Gordan's Transposition Theorem.* J. Math. Anal. Appl., 110: 130–140, 1985.

[97] G. J. Zalmai. *Duality in continuous-time homogeneous programming.* J. Math. Anal. Appl., 111: 433–448, 1985.

[98] G. J. Zalmai. *The Fritz-John and Kuhn–Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming.* J. Math. Anal. Appl., 110: 503–518, 1985.

[99] G. J. Zalmai. *Optimality conditions and Lagrangian duality in continuous-time nonlinear programming.* J. Math. Anal. Appl., 109: 426–452, 1985.

[100] G. J. Zalmai. *Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming.* J. Math. Anal. Appl., 111: 130–147, 1985.

[101] G. J. Zalmai. *Duality for a class of continuous-time homogeneous fractional programming problems.* Z. Oper. Res., Ser. A-B 30: 43–48, 1986.

[102] G. J. Zalmai. *A transposition theorem with applications to constrained optimal control problems.* Optimization, 29: 265–279, 1989.

[103] G. J. Zalmai. *Optimality conditions and duality for a class of continuous-time generalized fractional programming problems.* J. Math. Anal. Appl., 153: 365–371, 1990.

[104] G. J. Zalmai. *Continuous-time multiobjective fractional programming.* Optimization, 37: 1–25, 1996.

[105] G. J. Zalmai. *Proper efficiency conditions and duality models for a class of nonsmooth continuous-time multiobjective programming problems.* Journal of Statistics and Management Systems, 1: 175–197, 1998.

[106] G. J. Zalmai. *Proper efficiency principles and duality models for a class of continuous-time multiobjective fractional programming problems with operator constraints.* J. Stat. Management Syst., 1: 11–59, 1998.

[107] G. J. Zalmai. *Optimality conditions and duality models for a class of nonsmooth continuous-time generalized fractional programming problems.* Optimization, 51: 353–399, 2002.

[108] G. J. Zalmai. *Proper efficiency conditions and duality models for a class of nonsmooth continuous-time multiobjective fractional programming problems.* Southeast Asian Bull. Math., 27: 155–186, 2003.

[109] W. Zangwill. *Nonlinear Programming: A Unified Approach.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969.

8 Биографија аутора

Александар З. Јовић је рођен 14.11.1986. године у Сурдулици. Основну и средњу школу је завршио у Владичином Хану, као носилац *Вукових диплома* и диплома из математике и физике. Учествовао је на такмичењима из математике и физике и освајао награде. Такође је био полазник математичких семинара у истраживачкој станици Петница. Математички факултет у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, завршио је 2011. године са просечном оценом 9,30. Докторске студије Математичког факултета Универзитета у Београду уписао је 2011. године.

Од 2011. до 2013. године радио је на Институту за физику Универзитета у Београду. Од 2014. до 2016. године радио је као сарадник у настави, а од 2016. године до данас ради као асистент за научну област Нумеричка математика и оптимизација на Математичком факултету Универзитета у Београду. На Математичком факултету у Београду држао је вежбе на предметима Дискретне структуре 2, Математика 1, Увод у нумеричку математику, Математика 2, Нумеричке методе оптимизације, Дискретне структуре 3, Теорија игара и Увод у теорију екстремалних проблема. Учествује у раду пројекта 174015 „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене”. Објавио је 7 радова а још три рада су тренутно на рецензији. Имао је саопштења на четири конференције и две летње школе 2012. у Кракову и 2013. у Егеру. Био је учесник Темпус пројекта $530394 - TEMPUS - 1 - 2012 - 1 - HU$ ”$Visuality\ and\ Mathematics$”, као и два PRACE пројекта PRACE RI-211528 и PRACE FP7-261557 у оквиру програма FP7/2007-2013.

Списак радова публикованих или прихваћених за штампу:

1. A. Jović, B. Marinković. New optimality criteria for convex continuous-time problems of vector optimization. Optimization, 1–16, 2021. DOI:10.1080/02331934.2021.1950152

2. A. Jović. Optimality criteria and duality for nonlinear fractional continuous-time programming. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Volume 18, Number 6, 865–880, 2021. ISSN 1705-5105 (prihvaćen za štampu)

3. A. Jović. New optimality conditions in vector continuous-time programming. Yugoslav Journal of Operations Research, 31 (3): 329–338, 2021. DOI: 10.2298/YJOR200415028J

4. A. Sunderland, S. Pickles, M. Nikolić, A. Jović, J. Jakić, V.Slavnić, I. Girotto, P. Nash, M. Lysaght, An Analysis of Fast Fourier Transformation Performance in PRACE Application Codes, PRACE- 1IP T 7.5. (2012) (dostupno online na www.prace-ri.eu)
DOI: 10.5281/ZENODO.806916

5. D. Stanković, A. Jović, D. Vudragović, V. Slavnić, Enabling FFTE (The Fastest Fourier Transformation in the East) library and FFTW (The Fastest Fourier Transformation in the West) threading in Quantum Espresso, PRACE - 2IP T12.2, (2012) (dostupno online

na www.prace-ri.eu)
DOI: 10.5281/ZENODO.807514

6. M. Nikolić, A. Jović, J. Jakić, A. Balaž, An Analysis of FFTW and FFTE Performance, Modelling and Optimization in Science and Technologies, Springer, ISSN:2196-7326, Volume 2, 2014, pp 163-170.
   DOI: 10.1007/978-3-319-01520-0-20

7. D. Stanković, P. Jovanović, A. Jović, V. Slavnić, D. Vudragović, A. Balaž, Implementation and Benchmarking of New FFT Libraries in Quantum ESPRESSO, Modelling and Optimization in Science and Technologies, Springer,ISSN: 2196 7326,Volume 2, 2014, pp 155- 162.
   DOI: 10.1007/978-3-319-01520-0-19

У процесу рецензије се налазе следећи радови:

1. A. Jović, A new duality approach to vector continuous-time programming
   (na recenziji)

2. A. Jović, Necessary and sufficient optimality conditions and a new approach for solving the smooth multiobjective fractional continuous-time programming problem (na recenziji)

3. A. Jović, B. Marinković. Saddle point optimality criteria and duality for convex continuous-time programming problem (na recenziji)

Радови у зборницима:

1. A. Jović, Sufficiency criteria in continuous-time problems of vector optimization, XLVIII International Symposium on Operational Research , Banja Koviljača, 393-397, (2021.)

Учествовао је на следећим конференцијама:

1. M.Dotlić, M. Ignjatović, A.Jović, Numerical solutions to Love's integral equation, Mathematical Conference of the Republic of Srpska, Trebinje (2014.) Abstracts, p.69-70.

2. A.Jović, New optimality conditions for the vector continuous-time programming problem, XIV Serbian mathematical congress, Kragujevac (2018.), Abstracts, p.167.

3. A.Jović, Theorems of the alternative in mathematical programming, Deveti simpozijum "Matematika i primene", Beograd (2018.)

4. A. Jović, Sufficiency criteria in continuous-time problems of vector optimization, XLVIII simpozijum o operacionim istraživanjima SYMOPIS, Banja Koviljača (2021.)

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Александар Јовић

број уписа 2007/2011

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Услови екстремума за једну класу проблема оптимизације са непрекидним временом

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 18.10.2021.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Александар Јовић

Број уписа 2007/2011

Студијски програм Математика

Наслов рада Услови екстремума за једну класу проблема оптимизације са непрекидним временом

Ментор др Бобан Маринковић

Потписани Александар Јовић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 18.10.2021.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Услови екстремума за једну класу проблема оптимизације са непрекидним временом

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 18.10.2021.

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.