Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet

Mr Mara Alagić

KATEGORIJSKI VIDOVI NEKIH RELACIJSKIH MODELA
(doktorska disertacija)

1985
Beograd

Zahvaljujem se Profesoru Đuri Kurepi
na sugestijama i razgovorima tokom
mojih istraživanja.

S A D R Ž A J

MOTIVACIJA,
POSTAVKA ZADATKA ISTRAŽIVANJA
i PREGLED REZULTATA

Relacija R dužine n na skupovima $A_1, A_2, \ldots, A_n$ obično se definiše kao podskup kartezijanskog proizvoda tih skupova. Opštije, u kategorijama sa proizvodima, relacija je podobjekat odgovarajućeg proizvoda objekata $A_1, A_2, \ldots, A_n$. I u uobičajenom skupovno-teorijskom pristupu,a i u opštijem kategorijskom vrlo se retko ima u vidu postojanje relacija između skupova,odnosno objekata na kojima je relacija definisana. Cilj ovog istraživanja je aksiomatizacija upravo takvih slučajeva, za koju se pokazuje da kategorijska uopštavanja predstavljaju zaista pogodan okvir za njeno uvođenje i razmatranje njenih različitih posledica.Neposredna motivacija za formalno proučavanje opisanih situacija proizašla je iz teorije relacijskog modela podataka. Međutim, rezultati su mnogo opštije matematičke prirode i dopunjavaju postojeće opšte pristupe relacijama, a posebno kategorijske.

U dosadašnjim, posebno kategorijskim pristupima, koji se izlažu u drugom poglavlju ovog rada, relacija iz objekta X u objekt Y najčešće se posmatra na sledeća tri načina.

Prvo, u kategorijama sa konačnim proizvodima i definisanom faktorizacijom morfizama, "kartezijanska" reprezentacija relacije R je klasa izomorfnih strelica sa vrhom u X x Y.

Drugo, kategorije relacija za datu kategoriju K mogu se uvesti kao količnik "veće" involutivne kategorije koja sadrži kategoriju K pri čemu su kongruencije uvek takve da zavise od izbora određene podkategorije (G.Conte /1981/, Y.Kawahara /1973/, H.B. Brinkmann /1969/). U odeljku 2:1.definisana je jedna nova takva kongruencija (2:1:7,9,12,14 i 32) inspirisana prirodnom transformacijom raspona između dva objekta, i objedinjeni su rezultati pomenutih radova polazeći od tako izabrane kongruencije. Stavovi slični stavovima 2:1:22,24. su već poznati (Y.Kawahara) ali su sada izraženi u drukčijem kategorijskom obliku i u uslovima kada je polazna kongruencija $\sim$. Oni daju uslove pod kojima je tako definisana kategorija slobodni objekat u kategoriji involutivnih kategorija.

Treće, "funkcionalna" reprezentacija relacije oblika $f_R: X \longrightarrow PY$ korišćenjem Kleisli-eve kategorije pogodno izabrane monade, još je jedan oblik posmatranja relacija(2:2.). U slučaju kategorije skupova, to je monada definisana partitivnim funktorom i odgovarajućim prirodnim transformacijama. Ako je posmatrana kategorija relacija definisana pomenutim kongruencijama, funktor ulaganja te kategorije i njemu adjungovani funktor (ako postoji) definišu monadu za koju Kleisli-eva kategorija daje funkcionalnu reprezentaciju. Tako su objedinjeni poznati rezultati o Kleisli-evom opisivanju relacija(E.G. Manes /1976/,G.Conte /1981/,H.Kleisli /1965/).

Iako su apstraktne relacione strukture E.Fried-a i R.Wiegandt-a /1982/ inspirisane drukčijim idejama, sličnošću između teorija povezanosti i nepovezanosti za grafove i topološke strukture, spominju se u ovom poglavlju kao specifičan relacijski model definisan sredstvima teorije kategorija. Apstraktna relacija tipa P na jednom objektu definiše se kao element mreže P(S) gde je $P: B \longrightarrow L$, funktor iz bikategorije B, čiji je S objekat, u kategoriju kompletnih mreža čije strelice čuvaju beskonačne supremume i glavne ideale.

Najvažniji originalni rezultati ovog rada sadržani su u trećem poglavlju u kojem se uvodi novi kategorijski model relacija zasnovan na relacionim strukturama. Relaciona struktura I, u apstraktnom obliku definisana je kao slobodna graf-kategorija nad određenim grafom (3:1:2) i njene strelice odgovaraju vezama koje postoje između objekata na kojima se relacije definišu. Njene osobine su proučavane u stavovima 3:1:4,8,12,14. Izbor takve strukture je uopštenje jedne jednostavne aksiomatski zadane strukture (W.Armstrong /1974/). Relacije se posmatraju kao interpretacija ove apstraktne strukture kojom se određuju konkretni objekti na kojima je relacija definisana. Kategorijski se ova interpretacija predstavlja funktorom koji poštuje proizvode i koji za svoj domen ima relacionu strukturu, a za kodomen kategoriju iz koje se biraju objekti na kojima se relacije definišu. Domen i relacija, kao funktori povezani su prirodnim transformacijama.

Prednosti strukturnog i kategorijskog vida proučavanja ogledaju se u mogućnosti uopštavanja nekih poznatih relacijskih operacija i ispitivanju njihovih osobina pod predpostavkama o egzistenciji ove složenije relacione strukture. Operacije su definisane unutar pojedinih relacija (3:3:3,22,23) a i između njih (3:3:4) i ispitan je niz njihovih osobina (3:3:6,8,11,16,19). Tako se pokazuje da su osobine ovih operacija većinom određene kategorijom relacione strukture, odnosno egzistencijom nekih njenih karakterističnih strelica. Uticaj relacione strukture,naime veza koje postoje između objekata na kojima se relacija definiše, detaljno se istražuje (3:2:11,13,17,20).Promena domena date relacije definiše se kao prirodna transformacija i (3:4:2) dokazuje se da postoji adjungovani odnos između odgovarajućih kategorija iz koga sledi egzistencija Kleisli-eve kategorije(3:4:7). Posledica ulaganja kategorije relacija u jednu funktorsku kategoriju je egzistencija funktora evaluacije (3:4:9).

Odvajanje strukture relacije od njene konkretne interpretacije, omogućava razmatranje morfizama relacija sa istom strukturom.

Univerzalne strelice iz proizvoda ("projekcije") razlažu objekat proizvod na njegove komponentne objekte, a iz tih se komponenti uvijek dobije prvobitni objekat-proizvod. Analogno, univerzalne strelice čiji su domeni relacije, razlažu relacije na njihove komponente, ali se ni operacijom spajanja ni njenim partikularnim slučajem-proizvodom ne dobija uvek prvobitna relacija.Pitanje kakva relacija može biti razložena u komponente na "prirodan" način, a da se pogodnim "spajanjima" komponenti može dobiti polazna relacija,ima svoj odgovor u kategorijskom obliku. Koristeći elemente relacijskog modela - relacionu strukturu, projekcije i spajanje, a zatim i očuvanost određenih limesa, dati su potrebni i dovoljni uslovi u kojima je razlaganje takvo da se iz njega može rekonstruisati polazna relacija (3:5:1,2,3,5). Očuvanje limesa nekog funktora prirodnom transformacijom proširenja, značajno je kategorijsko uopštenje jednostavnog rezultata o nezavisnim komponentama relacije (J. Rissanen /1979/).

Upoređivanjem rezultata iz trećeg poglavlja, koji su dobijeni sa novim predpostavkama o strelicama između objekata na kojima se relacije definišu, sa već poznatim rezultatima u kategorijskom obliku (drugo poglavlje) može se zaključiti koliko osnovni rezultati ovoga rada dopunjavaju već poznate kategorijske vidove relacijskih modela.

1. NEKE KATEGORIJSKE KONSTRUKCIJE

1:1. Osnovne definicije

1:1:1. Kartezijanski proizvod dva skupa X i Y definiše se sa

$X \times Y = \{ (x,y) : x \in X,\ y \in Y \}$.

Projekcije $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ i $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ definisane su sa $p_X(x,y) = x$, a $p_Y(x,y) = y$.

Značajna osobina proizvoda je, da je bilo koja funkcija $h : W \longrightarrow X \times Y$, na jedinstven način određena kompozicijama $p_X h$ i $p_Y h$. I obrnuto, za dve date funkcije, $f : W \longrightarrow X$ i $g : W \longrightarrow Y$ postoji jedinstvena funkcija $h : W \longrightarrow X \times Y$ sa osobinom $p_X h = f$ i $p_Y h = g$. Ova osobina proizvoda može se prikazati komutativnim dijagramom

(1:1:2)

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
W \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & X \times Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

i naziva se osobina univerzalnosti proizvoda. Ova osobina opisuje jedinstveno kartezijanski proizvod (do na izomorfizam).

Prethodna se konstrukcija proširuje na funkcije između proizvoda, na sledeći način: Za dve funkcije $j : X \longrightarrow X'$ i $k : Y \longrightarrow Y'$ proizvod-funkcija

$$j \times k : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$$

definisana je sa $(j \times k)(x,y) = (j(x), k(y))$.

Ako se kartezijanski proizvod posmatra kao operacija, jednoelementni skup $1 = \{0\}$ ima osobine jedinice jer postoje izomorfizmi

$$1 \times X \cong X \cong X \times 1.$$

1:1:3. <u>Monoid</u> (M,μ,η) je skup M zajedno sa dve funkcije $\mu : M \times M \longrightarrow M$, $\eta : 1 \longrightarrow M$ takve da komutiraju dijagrami

(1:1:4)

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \arrow[r, "1\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times 1"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\ M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \times M \arrow[r, "\eta\times 1"] \arrow[d, "q`"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \times 1 \arrow[l, "1\times\eta"'] \arrow[d, "q``"] \\ M \arrow[r, phantom, "="] & M \arrow[r, phantom, "="] & M \end{tikzcd}$$

gde je $1 := id_M : M \longrightarrow M$, identično preslikavanje definisano na skupu M, a sa $\mu \times 1$, $\eta \times 1$, $1 \times \mu$, $1 \times \eta$ su označena odgovarajuća proizvod-preslikavanja.

1:1:5. <u>Graf</u> $\Gamma := (S \rightrightarrows O)$ je skup objekata (čvorova) O i strelica (grana) S zajedno sa dve funkcije

$$S \underset{cod}{\overset{dom}{\rightrightarrows}} O$$

koje svakoj strelici $f: X \longrightarrow Y$ (X,Y su čvorovi) iz S pridružuje njen "početak" , dom(f) = X i njen "vrh" cod(f) = Y.

Definicija grafa omogućava da se posmatra skup onih strelica za koje je definisana kompozicija (povezivanje grana grafa):

$$S \times_O S = \{(g,f) : g,f \in S,\ \mathrm{dom}g = \mathrm{cod}f\} .$$

1:1:6. <u>Kategorija</u> $\mathcal{K}$ je graf,u oznaci $\mathcal{K}(O(\mathcal{K}),S(\mathcal{K}))$ zajedno sa dve funkcije (identiteta i kompozicija)

$id: O \longrightarrow S$, $id(X) = 1_X : X \longrightarrow X$, $1_X(x) = x$.

$k: S \times_O S \longrightarrow S$, $k(f,g) = gf$,

takve da je (i) $\mathrm{dom}(gf) = \mathrm{dom}(g)$, $\mathrm{cod}(gf) = \mathrm{cod}(f)$

(ii) $h(gf) = (hg)f$, za f, g, h strelice iz S i odgovarajuće kompozicije definisane,

(iii) $1_{\mathrm{cod}f}\, f = f$, $f 1_{\mathrm{dom}f} = f$.

Elementi familije $O(\mathcal{K})$ nazivaju se objekti kategorije $\mathcal{K}$ ili $\mathcal{K}$-objekti, a elementi familije $S(\mathcal{K})$ morfizmi kategorije $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$- morfizmi ili strelice kategorije $\mathcal{K}$. Sa $\mathcal{K}(X,Y)$ označava se skup svih $\mathcal{K}$-morfizama iz objekta X u objekt Y.

1:1:7. (i) Kategorija skupova ima za objekte skupove, a za morfizme jednoznačne funkcije između skupova.

(ii) Kategorija monoida $\mathcal{M}$ ima za objekte monoide a za morfizme, morfizme monoida.

(iii) Svakoj kategoriji može se pridružiti dualna kategorija, $\mathcal{K}^o$ čiji su objekti isti kao i u kategoriji $\mathcal{K}$ a morfizmi f^o: $B \longrightarrow A$ su u 1-1 korespondenciji sa morfizmima f: $A \longrightarrow B$ u kategoriji $\mathcal{K}$. Kompozicija je definisana sa $(gf)^o = f^o g^o$. Dijagramski, sve strelice menjaju svoj smer u suprotan.

1:1:8. Morfizam grafova E: $\Gamma \longrightarrow \Gamma'$ je par funkcija (E_O, E_S), gde je E_O: $O \longrightarrow O'$, E_S: $S \longrightarrow S'$, takvih da komutiraju dijagrami

(1:1:9)
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "E_S"'] & O \arrow[d, "E_O"] \\ S' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & O' \end{tikzcd}$$

što predstavlja sledeći prirodni zahtev: $E_S(\mathrm{dom} f) = \mathrm{dom}(E_S(f))$ i $E_O(\mathrm{cod} f) = \mathrm{cod}(E_S(f))$, f je strelica u S.

Definicija morfizma grafova omogućava da se definiše kategorija grafova $\mathcal{G}$ gde su grafovi objekti, a morfizmi su morfizmi grafova. Kompozicija je definisana na prirodan način, "povezivanjem" odgovarajućih strelica.

1:1:10. Kovarijantni (kontravarijantni) morfizam kategorija ili funktor, F: $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ je "pridruživanje" koje svakom objektu X kategorije $\mathcal{K}$ pridružuje objekt F(X) kategorije $\mathcal{K}$ i svakom $\mathcal{K}$-morfizmu f: $X \longrightarrow Y$ pridružuje $\mathcal{L}$ - morfizam Ff: $FX \longrightarrow FY$

($Ff\colon FY \longrightarrow FX$) pri čemu su ispunjeni uslovi

$$\text{(i) } F(1_X) = 1_{FX}$$

$$\text{(ii) } F(gf) = FgFf \quad (\; F(gf) = FfFg)$$

kadgod je kompozicija gf definisana za $\mathcal{K}$-morfizme f i g.

1:1:11. <u>Kompozicija funktora</u> $E\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ i $F\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ u oznaci, $FE\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ je funktor definisan pridruživanjem

$$(X \xrightarrow{\;f\;} Y) \xrightarrow[FE]{\qquad\qquad} (FE(f)\colon F(E(X)) \longrightarrow F(E(Y))).$$

1:1:12. <u>Primeri</u>. (i) Partitivni funktor $P\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ iz kategorije skupova u kategoriju skupova pridružuje svakom skupu X familiju svih podskupova od X, označenu sa PX, a svakoj funkciji $F\colon X \longrightarrow Y$ njeno "partitivno proširenje" $Pf\colon PX \longrightarrow PY$, koje svakom elementu A skupa PX pridružuje skup fA iz partitivnog skupa PY. S obzirom da je $P(1_X) =$ i $P(gf) = PgPf$, jasno je da je P dobro definisan funktor.

(ii) Kartezijanski proizvod funktor $(-\mathrm{x}-)\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ definisan je pridruživanjem

(1:1:13)
$$\begin{tikzcd}
(A,B) \arrow[d, shift left, "{(f,g)}"] \arrow[d, shift right] & & A \times B \arrow[d, "f \times g"] \\
(C,D) & \arrow[r] & C \times D
\end{tikzcd}$$

(iii) Svaki bi-funktor $F\colon \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N}$ implicira postojanje dva funktora označena i definisana sa

$$F(K,-)\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \qquad F(K,-)(f\colon L \longrightarrow L') = F(1_K, f)$$

$$F(-,L)\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{N} \quad , \; F(-,L)(g\colon K \longrightarrow K') = F(g, 1_L).$$

1:1:14. <u>Izomorfizam kategorija</u>, $H\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ je funktor koji je bijekcija i na objektima i na morfizmima. Ekvivalentno, H je izomorfizam kategorija ako i samo ako postoji funktor $H'\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$ takav da je $HH' = 1_{\mathcal{L}}$ i $H'H = 1_{\mathcal{K}}$.

1:1:15. <u>Podkategorija</u> kategorije $\mathcal{K}$ je kategorija $\mathcal{L}$ koja ispunjava uslove (i) $O(\mathcal{L}) \subset O(\mathcal{K})$

(ii) $S(\mathcal{L}) \subset S(\mathcal{K})$

(iii) dom, cod i kompozicija morfizama u $\mathcal{L}$ su restrikcije odgovarajućih morfizama u $\mathcal{K}$.

1:1:16. Neka su date kategorije i funktori $\mathcal{K} \xrightarrow{P} \mathcal{L} \xleftarrow{Q} \mathcal{M}$. <u>Kategorija</u> <u>$(P\downarrow Q)$</u> ima za objekte trojke (K,M,f): $PK \longrightarrow QM$, gde je K objekt kategorije $\mathcal{K}$, M objekt kategorije $\mathcal{M}$, a za morfizme, parove morfizama (k,m): $(K,M,f) \longrightarrow (K',M',f')$ gde je k: $K \longrightarrow K'$, m: $M \longrightarrow M'$ i komutira sledeći dijagram

(1:1:17)
$$\begin{tikzcd} (K, M, f) \arrow[d, "(k,m)"] \\ (K',M',f') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} PK \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Pk"'] & QM \arrow[d, "Qm"] \\ PK' \arrow[r] & QM' \end{tikzcd}$$

Ova opšta definicija uključuje mnoge specijalne slučajeve, zavisno od izbora funktora P i Q. Na primer, jedan objekt L kategorije može se posmatrati kao funktor L: $1 \longrightarrow \mathcal{L}$. Stavljajući $P = L$, kategorija $(P\downarrow Q)$ postaje $(L\downarrow Q)$ gde je sada umesto funktora P posmatran fiksirani objekt L. Objekti ovako konstruisane kategorije su parovi $(M,f:L \longrightarrow QM)$ a morfizmi su oni morfizmi m: $M \longrightarrow M'$ kategorije $\mathcal{M}$ za koje komutiraju dijagrami

(1:1:18)
$$\begin{tikzcd} (M,f) \arrow[d] \\ (M',f') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & QM \arrow[d] \\ L \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & QM' \end{tikzcd}$$

U slučaju $P = Q = 1_{\mathcal{L}}$, kategorija $(1_{\mathcal{L}}\downarrow 1_{\mathcal{L}})$, što se često označava sa $(\mathcal{L}\downarrow\mathcal{L})$ je kategorija svih morfizama u $\mathcal{L}$, tj. objekti su svi morfizmi u $\mathcal{L}$ a morfizmi su parovi strelica koji čine komutativnim dijagram (1:1:17), stavljajući $P = Q = 1$.

1:1:19. Kategorija $\mathcal{K}$ naziva se involutivna kategorija ili kategorija sa involucijom ako zadovoljava sledeće aksiome:

(J1) Klasa morfizama $\mathcal{K}(A,B)$ parcijalno je uređena relacijom $<$

(J2) Ako $f,f' \in \mathcal{K}(A,B)$, $g \in \mathcal{K}(B,C)$ i $f<f'$, tada je $gf<gf'$.

(J3) Za bilo koje $\mathcal{K}$-objekte A,B postoji morfizam

$$\# \; : \; \mathcal{K}(A,B) \longrightarrow \mathcal{K}(B,A)$$

koji se naziva involucija i za koji važe sledeće osobine:

(i) $(gf)^{\#} = f^{\#}g^{\#}$, $f \in \mathcal{K}(A,B)$, $g \in \mathcal{K}(B,C)$

(ii) $f^{\#\#} = f$, $f \in \mathcal{K}(A,B)$

(iii) Ako je $f<g$ tada je i $f^{\#} < g^{\#}$, za morfizme $f,g \in \mathcal{K}(A,B)$

Involutivni funktor $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ je funktor između involutivnih kategorija $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ koji čuva parcijalno uređenje i komutira sa involucijom.

1:1:20. Neka su $E,F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$,funktori. Funktorski morfizam ili prirodna transformacija $t: E \xrightarrow{\cdot} F$ je funkcija koja svakom objektu X kategorije $\mathcal{K}$ pridružuje morfizam $t_X: EX \longrightarrow FX$, a svakom morfizmu $f: X \longrightarrow Y$ komutativni dijagram

(1:1:21)
$$\begin{array}{ccc} X & \quad & EX & \longrightarrow & FX \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle Ef} & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ Y & & EY & \longrightarrow & FY \end{array}$$

Morfizmi t_X, X je $\mathcal{K}$-objekt nazivaju se komponentama prirodne transformacije t. Prirodna transformacija t čija svaka komponenta t_X ima inverziju t_X^{-1} u kategoriji $\mathcal{K}$ naziva se prirodni izomorfizam i označava sa $t: E \cong F$. U tom slučaju, (t_X^{-1}) su komponente prirodne transformacije $t^{-1}: F \xrightarrow{\cdot} E$. Ekvivalencija između kategorija $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ definisana je kao par funktora $E: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, $F: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$, zajedno sa prirodnim izomorfizmima $1_{\mathcal{K}} = FE$ i $1_{\mathcal{L}} = EF$.

1:1:22. Vertikalna kompozicija prirodnih transformacija $s: E \xrightarrow{\cdot} F$, $t: F \xrightarrow{\cdot} G$ u oznaci $ts: E \xrightarrow{\cdot} G$ je prirodna transformacija čije su komponente $(ts)_X := t_X s_X$. Kompozicija transformacija je asocijativna operacija. Štaviše, može se definisati funktor-kategorija čiji su objekti funktori a morfizmi prirodne transformacije između tih funktora. Identična transformacija definisana je svojim komponentama $1_T X = 1_{TX}$.

U kategorijskom posmatranju, mnoge poznate osobine koje se iskazuju elementima (skupa, monoida, ... posmatranog objekta) mogu se iskazati morfizmima, odnosno strelicama. Najjednostavniji primer je da se za jednoelementni skup X može reći: Za bilo koji drugi skup Y postoji tačno jedna funkcija $Y \longrightarrow X$.

1:1:24. Za morfizam $h: A \longrightarrow B$ desna inverzija je morfizam $k: B \longrightarrow$ takav da je $hk = 1_B$, a leva inverzija (retrakcija) je morfizam g takav da je $gh = 1_A$. Za morfizam $f: A \longrightarrow B$ kaže se da je izomorfizam ukoliko postoji morfizam f' koji je desna i leva inverzija za morfizam f, tj. $ff' = 1_B$ i $f'f = 1_A$.

1:1:26. Morfizam $m: A \longrightarrow B$ je monomorfizam u $\mathcal{K}$ ako za bilo koji par morfizama $f_1, f_2: M \longrightarrow A$ za koji je $mf_1 = mf_2$ sledi $f_1 = f_2$. Morfizam $m: A \longrightarrow B$ je epimorfizam u $\mathcal{K}$ ako iz jednakosti $h_1 m = h_2 m$, za bilo koji par morfizama $h_1, h_2: B \longrightarrow M$, sledi da je $g_1 = g_2$.

U kategoriji skupova monomorfizmi su 1-1 funkcije, a epimorfizmi su "na" funkcije.

1:1:27. Objekt $\mathbb{T}$ kategorije $\mathcal{K}$ je krajnji objekat $\mathcal{K}$, ako za svaki $\mathcal{K}$-objekat X postoji tačno jedan morfizam $X \longrightarrow \mathbb{T}$. Dualno se definiše početni objekat.

U kategoriji skupova, prazan skup je početni objekat, a jednoelementni skup je krajnji objekat.

1:1:28. Podobjekat $\mathcal{K}$-objekta K je par (A,f) gde je A $\mathcal{K}$-objekt a $f: A \longrightarrow K$ je monomorfizam. Količnik objekat objekta K je par (f,A) gde je $f: K \longrightarrow A$ epimorfizam, a ukoliko je f retrakcija, par (f,A) naziva se retrakt objekta K.

1:1:29. Neka je na skupu morfizama $\mathcal{K}(A,B)$ definisana relacija ekvivalencije $\sim$ saglasna sa kompozicijom. Količnik kategorija $\mathcal{K}/\sim$ kategorije $\mathcal{K}$ u odnosu na datu relaciju ekvivalencije ima za objekte iste objekte kao i kategorija $\mathcal{K}$, a za hom-skupove skupove klasa ekvivalencije skupa $\mathcal{K}(A,B)$.

1:1:30. Slika-faktorizacioni sistem u kategoriji je par (E,M), gde su E i M podklase klase morfizama u $\mathcal{K}$, koji zadovoljava sledeće četiri aksiome:

(F1) E i M su podkategorije kategorije $\mathcal{K}$,

(F2) Svaki element iz E je epimorfizam i svaki element iz M je monomorfizam.

(F3) Svaki izomorfizam pripada i klasi E i klasi M

(F4) Svaka strelica f iz posmatrane kategorije ima jedinstvenu E-M faktorizaciju. Preciznije, postoji morfizam e iz podkategorije E i morfizam m iz podkategorije M, cod(e) = dom(m) = slika(f), tako da za bilo koji drugi takav par morfizama e\` i m\` postoji izomorfizam b sa osobinom eb =e\`, m\`b = m\`.

1:1:31. Abelova kategorija je kategorija koja zadovoljava sledeće uslove:

(A1) ima krajnji objekat,

(A2) ima proizvod,

(A3) svaki morfizam ima jezgro i kojezgro.i

(A4) svaki monomorfizam je jezgro, a svaki epimorfizam je kojezgro nekog para morfizama te kategorije.

1:1:32. Stav. U abelovim kategorijama, svaki morfizam ima jedinstvenu (Epi, Mono) faktorizaciju.

1:2. Graf i slobodna kategorija

Svaki graf se može posmatrati kao objekt kategorije grafova $\mathcal{G}$. Takođe, svaka kategorija $\mathcal{K}$ može se posmatrati kao graf $Z\mathcal{K}$ sa istim objektima i strelicama "zaboravljajući" koje strelice su kompozicije i koje su identične. Slično, svaki funktor $F:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}'$ postaje morfizam grafova $ZF: Z\mathcal{K}\longrightarrow Z\mathcal{K}'$. Ovim opisom definisan je "zaboravni" funktor iz kategorija u grafove,

$$Z:\mathcal{K}at \longrightarrow \mathcal{G},$$

gde je sa $\mathcal{K}at$ označena kategorija čiji su objekti kategorije a strelice su funktori između tih kategorija.

Obrnuto, bilo koji graf G sa skupom čvorova O može generisati kategoriju $\mathcal{K}$ na istom skupu objekata; strelice ove kategorije biće nizovi povezanih strelica (onih koje se mogu komponovati) tako da je neka strelica $A \longrightarrow B$ niz uzastopnih strelica u (od A do B). Tako dobijena kategorija naziva se slobodna kategorija generisana grafom G. Suština ove konstrukcije data je sledećim stavom

1:2:1. Stav. Neka je $G = \{S \rightrightarrows O\}$ graf. Postoji kategorija $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$ sa objektima O i morfizmima grafova $D:G \longrightarrow Z\mathcal{K}$ sa sledećom osobinom: Ako je data bilo koja kategorija $\mathcal{L}$ i bilo koji morfizam $D': G \longrightarrow Z\mathcal{L}$ onda postoji jedinstveni funktor $E:\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ takav da komutira dijagram

$$(1{:}2{:}1)\qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "D"] \arrow[dr, "D'"'] & Z\mathcal{K} \arrow[d, "ZE"] \\ & Z\mathcal{L} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{K}(G) \arrow[d, "E"] \\ \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

1:2:3. Posledica. Par funktora (F,Z) gde je Z već definisani "zaboravni" funktor, a funktor $F: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{K}at$, svakom grafu G pridružuje slobodnu kategoriju $\mathcal{K}(G)$ generisanu tim grafom, daje sledeći prirodni izomorfizam

$$\mathcal{K}at\,(\mathcal{K}(G),\mathcal{L}) = \mathcal{G}\,(G,Z\mathcal{L}).$$

1:3. Univerzalni morfizmi i adjungovani odnosi

1:3:1. Neka je $G\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ funktor i neka je L neki $\mathcal{L}$ -objekt. Par (K, η), gde je K objekt kategorije $\mathcal{K}$ a $\eta : L \longrightarrow GK$ morfizam u $\mathcal{L}$, je slobodni $\mathcal{L}$ -objekat (u odnosu na G) pod uslovom da η ispunjava univerzalnu osobinu:

Za dati morfizam $f\colon L \longrightarrow GK'$, K' je objekt kategorije $\mathcal{K}$, postoji jedinstveni $\mathcal{K}$ -morfizam $\Psi : K \longrightarrow K'$ takav da komutira dijagram

(1:3:2)
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & GK \arrow[d, dashed, "G\Psi"] \\ & GK' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[d, dashed, "\Psi"] \\ K' \end{tikzcd}$$

η se naziva inkluzija generatora ili univerzalni morfizam a Ψ $\mathcal{K}$ -proširenje morfiz ma f u odnosu na G.

1:3:3. Dualno se definiše ko-slobodni $\mathcal{L}$ -objekatu odnosu na fun $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, što se može pratiti komutativnim dijagramom

(1:3:4)
$$\begin{tikzcd} L & GK \arrow[l] \\ & GK' \arrow[ul, "f'"] \arrow[u, dashed, "G\Psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \\ K' \arrow[u, dashed, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

1:3:5. Primeri. (i) Neka je $- \times X_o : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ funktor definisan pr družívanjem

(1:3:6)
$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dashed, "f"] \\ K' \end{tikzcd} \qquad \qquad \begin{tikzcd} K \times X_o \arrow[d, dashed, "f \times 1"] \\ K' \times X_o \end{tikzcd}$$

Za svaki skup L ko-slobodni $\mathcal{S}$-objekat (K, ε) može se definisati sa

$$K = L^{X_o} = \{f: X_o \longrightarrow L\} \quad i \quad \varepsilon : L^{X_o} \times X_o \longrightarrow L \quad \text{(evaluacija)}$$

Tada, za dati morfizam $f: K' \times X_o \longrightarrow L$, odgovarajući (jedinstven Ψ dat je sa

$$\Psi : K' \longrightarrow L^{X_o}, \quad \Psi(k') = f(k', -): X_o \longrightarrow L ,$$

gde je $f(k',-)(a) = f(k',a)$ za $a \in X_o$. Tada je jednostavno pokazati neophodnu komutativnost (1:3:4) .

(ii) U dijagramu proizvoda(1:1:2) par projekcija (p_X, p_Y) je ko-univerzalni morfizam u odnosu na dijagonalni funktor $\Delta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} \times \mathcal{K}$

(iii) U Stavu 1:2:1. kojim se konstruiše slobodna kategorija $\mathcal{K}(\Gamma)$ nad proizvoljnim grafom Γ , implicitno je sadržana univerzalna konstrukcija data dijagramom (1:3:2).

1:3:7. <u>Lema</u>.(Yoneda, S.MacLane /1971/,str.61)

Ako je $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{S}$ funktor iz kategorije $\mathcal{K}$ u kategoriju skupova tada postoji bijekcija

(1:3:8) $\qquad$ $\text{Prir.transf.}(\mathcal{K}(K,-),F) \cong F(K)$,

definisana tako da svaku prirodnu transformaciju $\alpha : \mathcal{K}(K,-) \longrightarrow$ preslikava u $\alpha_K 1_K$, sliku identitete $K \longrightarrow K$ transformacijom α .

1:3:9. <u>Posledica</u>. Za objekte K,K' kategorije $\mathcal{K}$ svaka prirodna transformacija

$$\alpha: \mathcal{K}(K,-) \longrightarrow \mathcal{K}(K',-)$$

Ima oblik $\mathcal{K}(h,-)$ za jedinstveni morfizam $h: K \longrightarrow K'$.

1:3:10. <u>Lema</u>. Bijekcija (1:3:8) je prirodni izomorfizam između funktora E i P,,

$$E,P: \mathcal{S}^{\mathcal{K}} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{S} .$$

1:3:11. Pridruživanja definisana sledećim dijagramom definišu funktor između kategorije $\mathcal{K}^o$ i $\mathcal{S}^{\mathcal{K}}$. Taj se funktor naziva <u>Yoneda-in funktor</u>. Njegova dobra definisanost proverava se korišćenjem poslednje dve leme.

(1:3:11)
$$
\begin{tikzcd}
(F,K) \arrow[d, "{(\tau,t)}"] & \text{Prir.transf.}(\ (K,-),F) \arrow[d] \arrow[r] & F \arrow[d, "F't\tau'_k"] \\
(F',K') & \text{Prir.transf.}(\ (K',-)F') \arrow[r] & F'
\end{tikzcd}
$$

1:3:12. <u>Stav</u>. (K,η) je slobodni objekat nad L u odnosu na funktor $G:\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ako i samo ako je pridruživanjem $G: (\psi : K \longrightarrow K') \longmapsto (G\psi\eta_L : L \text{ —— } GK')$, definisana bijekcija

$$\mathcal{K}(K,K') \cong \mathcal{L}(L,GK') \tag{1:3:13}$$

za svaki $\mathcal{K}$-objekat K'. Ova je bijekcija prirodna u K'. I obrnuto, za date objekte K i L bilo koji izomorfizam (1:3:13) ima isti oblik pridruživanja za jedinstveni morfizam $\eta : L \longrightarrow GK$ za koji je par (K,η) slobodan objekt nad L.

1:3:14. Neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ proizvoljne kategorije. <u>Adjungovani odnos</u> između kategorija $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ je trojka

$$(F,G,\varphi): \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$$

gde su $F:\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ i $G:\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$ funktori, a φ je funkcija koja svakom paru objekata (K,L) pridružuje bijekciju (1:3:15) koja je prirodna u K i u L (K je $\mathcal{K}$-objekat, L je $\mathcal{L}$-objekat).

$$\varphi = \varphi_{K,L}: \mathcal{L}(FK,L) = \mathcal{K}(K,GL) \tag{1:3:15}$$

Funktor F se naziva <u>levi adjungovani funktor</u> za G, a G je <u>desni adjungovani funktor</u> za F. Par (F,G) naziva se adjungovani par funktora iz kategorije $\mathcal{K}$ u kategoriju $\mathcal{L}$.

1:3:16. <u>Stav</u>. Svaki adjungovani odnos $(F,G,\varphi):\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ potpuno je određen bilo kojim od sledećih skupova podataka:

(i) Funktori F,G i prirodna transformacija $\eta : 1_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\cdot} GF$, takva da je svaka njena komponenta $\eta_K: K \longrightarrow GFK$ univerzalni morfizam. Tada je φ definisano sa $\varphi f = Gf\eta_K: K \longrightarrow GL$.

(ii) Funktori F,G i prirodna transformacija $\varepsilon: FG \xrightarrow{\cdot} 1_{\mathcal{L}}$, takva da je svaka komponenta $\varepsilon_L: FGL \longrightarrow L$ univerzalni morfizam. Tada je φ^{-1} definisano pridruživanjem $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_L F(g): FK \longrightarrow L$.

(iii) Funktor G i za svaki $\mathcal{K}$-objekat K, objekt F_0K kategorije $\mathcal{L}$ i univerzalni morfizam $\eta_K: K \longrightarrow GF_0K$. Tada funktor F ima objekat funkciju F_0 a na morfizmima je definisan sa $F_0(h) = GF(h)\eta_K = \eta_{K'}h$, za $\mathcal{K}$-morfizam $h: K \longrightarrow K'$.

(iv) Funktori F,G i prirodne transformacije $\eta: 1_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\cdot} GF$ i $\varepsilon: GF \xrightarrow{\cdot} 1_{\mathcal{L}}$ tako da komutiraju dijagrami

(1:3:17)
$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
 & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
 & F
\end{tikzcd}
$$

Tada su φ i φ^{-1} definisani sa $\varphi f = Gf\eta_K$, $\varphi^{-1}g = \varepsilon_L Fg$.

η se naziva <u>jedinica</u> a ε <u>kojedinica</u> adjunkcije (F,G,η,ε).

1:3:18. Neka su $\mathcal{K}$ i J kategorije. <u>Dijagonalni funktor</u> $\Delta: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^J$ pridružuje svakom objektu K kategorije $\mathcal{K}$ konstantni funktor ΔK, koj ima vrednost K za svaki J-objekat j, i vrednost 1_K za svaki J-morfizam. Ako je $f: K \longrightarrow K'$ morfizam u $\mathcal{K}$, $\Delta f: \Delta K \longrightarrow \Delta K'$ je prirodna transformacija koja ima vrednost f za svaki objekt j kategorije J.

1:3:19. <u>Limes funktora</u> $F: J \longrightarrow \mathcal{K}$ sastoji se od jednog objekta kategorije $\mathcal{K}$ u oznaci limF, i prirodne transformacije $\tau: \Delta \lim F \xrightarrow{\cdot} F$, pri čemu važi sledeća osobina: Za bilo koju drugu prirodnu transformaciju $\sigma: \Delta K \xrightarrow{\cdot} F$, K je objekt kategorije $\mathcal{K}$, postoji jedinstvni morfizam $f: K \longrightarrow \lim F$ takav da komutira dijagram.

(1:3:20)
$$
\begin{tikzcd}
\lim F \\
K \arrow[u, dashed, "f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta \lim F \arrow[r, "\tau"] & F \\
\Delta K \arrow[u, dashed, "\Delta f"] \arrow[ur, "\sigma"']
\end{tikzcd}
$$

1:3:21. <u>Primer</u>. Ako je J diskretna kategorija $J = \{0,1\}$, funktor $F\colon J \longrightarrow \mathcal{K}$ je par objekata (K_0, K_1) u kategoriji $\mathcal{K}$ a njegov limes je proizvod $K_0 \times K_1$ zajedno sa parom projekcija $K_0 \leftarrow K_0 \times K_1$ - koje čine odgovarajuću prirodnu transformaciju. Yoneda-ina lema ukazuje na sledeću bijekciju (prirodnu u K)

$$\mathcal{K}(K, K_0 \times K_1) \cong \mathcal{K}(K, K_0) \times \mathcal{K}(K, K_1)$$

koja svakom morfizmu $h\colon K \longrightarrow K_0 \times K_1$ pridružuje par morfizama $(p_0h,\ p_1h)$ i obrnuto, paru morfizama $(f\colon K \longrightarrow K_0\ ,\ g\colon K \longrightarrow K_1)$ pridružuje jedinstveni morfizam h za koji je $p_0h = f$, $p_1h = g$, kao što to zahteva definicija 1:3:19.

1:3:22. <u>Jezgro para morfizama</u> $f,g\colon K \rightrightarrows L$ u kategoriji $\mathcal{K}$ je limes funktora $F\colon \downarrow\downarrow \longrightarrow \mathcal{K}$ (kadgod taj limes postoji). Odgovarajući dijagram ima sledeći oblik

(1:3:23)
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & K \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & L \\
X \arrow[u, dashed, "h`"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

i sadrži univerzalnu osobinu: Ako je limF = (E,e) za bilo koji morfizam $h\colon X \longrightarrow K$, sa osobinom $fh = gh$ postoji jedinstveni morfizam $h`\colon X \longrightarrow E$ takav da je $eh` = h$.

U kategoriji skupova, na primer, jezgro para morfizama $f,g\colon K \rightrightarrows L$ je skup $E = \{k \in K\colon fk = gk\}$ zajedno sa ulaganjem $e\colon E \longrightarrow K$.

1:3:24. <u>Vlaknasti (fibrirani) proizvod</u> (para morfizama) je limes funktora $F\colon (\longrightarrow \cdot \longleftarrow) \longrightarrow \mathcal{K}$. Sastoji se od objekta $\lim F = K *$ i prirodne transformacije $t\colon K *_M L \xrightarrow{\cdot} F$ tako da je ispunjen uslo definicije limesa 1:3:19. koji se sada svodi na komutativnosti dijagrama (1:3:25), preciznije: Vlaknasti proizvod para morfizama $K \xrightarrow{g} M \xleftarrow{h} L$ sastoji se od jednog objekta i novog para morfizama $(K *_M L,\ t_K\colon K *_M L \longrightarrow K,\ t_L\colon K *_M L \longrightarrow L)$ tako da je

(V1) $gt_K = ht_L$,

(V2) Za bilo koju drugu trojku (X, s_K, s_L) za koju je $gs_K = hs_L$, postoji jedinstveni morfizam $f\colon X \longrightarrow K *_M L$, takav da je ispunjen uslov $t_K f = s_K$, $t_L f = s_L$.

(1:3:25)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, "s_L"] \arrow[ddr, "s_K"'] & & \\
& K *_M L \arrow[r, "t_L"'] \arrow[d, "t_K"] & L \arrow[d, "h"] \\
& K \arrow[r, "g"'] & M
\end{tikzcd}
$$

1:3:26. <u>Stav</u>. (H.Herrlich & G. Strecker /1976/ str.141.)

Neka je $K \xrightarrow{g} M \xleftarrow{h} L$ par $\mathcal{K}$-morfizama zajedničkog kodomena. Nek kategorija $\mathcal{K}$ ima proizvode i jezgra i neka je $(K \times L, p_K, p_L)$ proizvo para $\mathcal{K}$ -objekata (K,L). Neka je (E,e) jezgro para morfizama $(gp_K, hp$ Tada je $(E, p_K e, p_L e)$ vlaknasti proizvod para morfizama (g,h).

Dokaz je neposredan i daje kanoničku konstrukciju vlaknastog proizvoda.

1:3:27. <u>Posledica</u>. Ako kategorija ima konačne proizvode i jezgra parova morfizama imaće i konačne vlaknaste proizvode.

1:3:28. Ponekad, limesi se umesto za funktore definišu za"dijagrame" Neka je $\mathcal{K}$ kategorija, $Z\mathcal{K}$ graf dobijen kao slika kategorije $\mathcal{K}$ pod "zaboravnim"funktorom i neka je G bilo koji graf. Tada dijagram u $\mathcal{K}$ oblika G je morfizam grafova $D\colon G \longrightarrow Z\mathcal{K}$. Neka je (konus) $t : K \xrightarrow{\cdot} D$ funkcija koja svakom čvoru $\underline{i}$ grafa G pridružuje $\mathcal{K}$ -morfizam $t_i\colon K \longrightarrow D_i$ takav da je za svaku strelicu $h\colon i \longrightarrow j$ grafa G, $Dh\, t_i = t_j$. Limes dijagrama D je konus (prirodna transformacija) sa osobinom da za bilo koji drugi konus $s : K \xrightarrow{\cdot} D$ postoji jedinstveni morfizam $f\colon L \longrightarrow K$ takav da komutiraju dijagrami (1:3:29) za svaki čvor $\underline{i}$ grafa G. Konus t naziva se univerzalni konus.

(1:3:29)
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "t_i"] & D_i \\ L \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "s_i"'] & \end{tikzcd}$$

Ovakva varijacija u definiciji limesa ne daje ništa novo, ali često se koristi radi preglednosti i lakšeg praćenja.

1:3:30. Kategorija $\mathcal{K}$ je <u>kompletna</u> ako svi "mali" dijagrami u $\mathcal{K}$ imaju limese u $\mathcal{K}$, tj. svaki funktor $F\colon J \longrightarrow \mathcal{K}$ ima limese u $\mathcal{K}$, gde je J "mala" kategorija.

1:3:31. <u>Stav</u>. (kompletnost kategorije skupova)
Ako je $\mathcal{S}$ kategorija skupova, bilo koji funktor $F\colon J \longrightarrow \mathcal{S}$ ima limes koji je skup Konus$(*,F)$ svih konusa $s\colon * \xrightarrow{\cdot} F$, iz jednoelementnog skupa $*$ u funktor F, dok je limes konus t sa komponentama $t_j\colon \text{Konus}(*,F) \longrightarrow F_j$ definisanim sa $t_j(s) = s_j$.

Suština dokaza je prirodna bijekcija Konus$(X,F) \cong \mathcal{S}(X,\text{Konu}(*,F))$ koja, s obzirom da je konus prirodna transformacija, može biti napisana u obliku (X je skup, objekt kategorije $\mathcal{S}$):
$$\text{Prir.Transf.}(\Delta X,F) \cong \mathcal{S}(X,\text{Konus}(*,F))$$

1:3:32. Funktor $V\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ <u>kreira</u> <u>limese</u> za funktor $F\colon J \longrightarrow \mathcal{K}$ ako (i) Za svaki limes-konus $t\colon L \xrightarrow{\cdot} VF$ u $\mathcal{L}$ postoji tačno jedan konus $s\colon K \xrightarrow{\cdot} F$ takav da je $VK = L$, $Vs = t$, i ako je
(ii) konus $s\colon K \xrightarrow{\cdot} F$ limes-konus u $\mathcal{K}$.

1:3:33. Funktor $H\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ <u>čuva</u> <u>limese</u> funktora $F\colon J \longrightarrow \mathcal{K}$ ukoliko svaki limes-konus $t\colon B \xrightarrow{\cdot} F$ u $\mathcal{K}$ za funktor F daje kompozicijom sa H novi konus, limes-konus $Ht\colon HB \xrightarrow{\cdot} HF$ u kategoriji $\mathcal{L}$

1:4. Monada

Neka je $M: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ funktor iz kategorije $\mathcal{K}$ u tu istu kategoriju (endofunktor) a $M^2 = MM: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ i $M^3 = MMM: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ odgovarajuće kompozicije. Ako je $\mu: M^2 \xrightarrow{\cdot} M$ prirodna transformacija sa komponentama $\mu_X: M^2X \longrightarrow MX$ za svaki $\mathcal{K}$-objekt X, tada $M\mu: M^3 \xrightarrow{\cdot} M^2$ označava prirodnu transformaciju sa komponentama $(M\mu)_X = M(\mu_X): M^3X \longrightarrow M^2X$ a transformacija $\mu M: M^3 \xrightarrow{\cdot} M^2$ ima komponente definisane sa $(\mu M)_X = \mu_{MX}$.

1:4:1. Monada (M,η,μ) u kategoriji $\mathcal{K}$ sastoji se od funktora $M:\mathcal{K} \longrightarrow$ i dve prirodne transformacije $\eta: 1 \xrightarrow{\cdot} M$, $\mu: M^2 \xrightarrow{\cdot} M$ $(1 = id_{\mathcal{K}})$ takve da komutiraju dijagrami

(1:4:2)

$$\begin{tikzcd} M^3 \arrow[r, "M\mu"] \arrow[d, "\mu M"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1M \arrow[r, "\eta M"'] \arrow[d, equal] & M^2 \arrow[d, equal] & M1 \arrow[l, "M\eta"] \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, phantom, "="] & M \arrow[r, phantom, "="] & M \end{tikzcd}$$

Pojam monade poklapa se s pojmom monoida u kategoriji skupova, ako se skup elemenata zameni funktorom M, kartezijanski proizvod - kompozicijom funktora, množenje - prirodnom transformacijom μ a jedinica - transformacijom η. Zato se η naziva jedinica a μ množenje monade. Može se reći da je monada monoid u kategoriji endofunktora.

1:4:3. Primeri. (i) Neka je $P: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ partitivni funktor (1:1:12). Neka su $\eta: 1 \xrightarrow{\cdot} P$ i $\mu: P^2 \xrightarrow{\cdot} P$ prirodne transformacije definisane sa

$\eta_X: X \longrightarrow PX$, $\eta_X(x) = \{x\}$, a $\mu_X: P^2X \longrightarrow PX$, $\mu_X(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$.
(P,η,μ) je monada u kategoriji skupova.

(ii) Neka je $(R,\leqslant)$ uređajna relacija. Funktor $M: R \longrightarrow R$ je monotona funkcija a transformacije η i μ postoje kadgod je $r \leqslant Mr$, $MMr \leqslant Mr$, za sve elemente r skupa R. Otuda $Mr \leqslant MMr \leqslant Mr$. Ako je $\leqslant$ parcijalno uređenje $MMr = Mr$. Tada je monada u parcijalnom uređenju operacija zatvaranja tj. monotona funkcija $m: R \longrightarrow R$ sa osobinom $r \leqslant m(r)$ i $m(m(r)) = m(r)$ za svaki element r skupa R.

1:4:4. Ako je (M,η,μ) bilo koja monada u kategoriji $\mathcal{K}$, <u>M-algebra</u> (X,h) je uređeni par koji se sastoji od jednog objekta X kategorije i jednog morfizma $h: MX \longrightarrow X$, koji se naziva strukturno preslikavanje algebre, tako da su komutativni dijagrami

(1:4:5)
$$\begin{tikzcd} M^2X \arrow[r, "Mh"] \arrow[d, "\mu_X"'] & MX \arrow[d, "h"] \\ MX \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "1"'] & MX \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

<u>Morfizam</u> $f: (X,h) \longrightarrow (X',h')$ M-algebri je morfizam između ob jekata, $f: X \longrightarrow X'$ takav da komutira dijagram

(1:4:6)
$$\begin{tikzcd} MX \arrow[r, "h"] \arrow[d, "Mf"'] & X \arrow[d, "f"] \\ MX' \arrow[r, "h'"] & X' \end{tikzcd}$$

1:4:7. <u>Primeri</u>. (i) U slučaju monade (P,η,μ) (1:4:3) pokazuje se da je P-algebra (X,h) kompletna polumreža gde je $a \leqslant b$ definisano s $h\{a,b\} = b$, $\sup S = hS$, za svaki podskup S skupa X.
(ii) Za slučaj uređajne relacije $(R,\leqslant)$ M-algebra je element r iz skupa R za koji je $r \leqslant Mr \leqslant r$. Ako je $\leqslant$ parcijalno uređenje, $r = Mr$ te je M-algebra element parcijalnog uređenja koji je zatvoren (u uobičajenom smislu).

1:4:8. Svaka adjunkcija $(F,G,\eta,\varepsilon):\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{A}$ omogućava da se u katego riji $\mathcal{K}$ definiše monada na sledeći način: Kompozicija funktora F i G $M = GF:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ je endofunktor, η je prirodna transformacija $\eta : 1 \xrightarrow{\cdot} GF = M$ a ko-jedinica $\varepsilon : FG \xrightarrow{\cdot} 1$ komponovana na sledeći način $\mu = G\varepsilon F: GFGF \xrightarrow{\cdot} GF$ definiše prirodnu transformaciju μ. Iz komutativnosti dijagrama adjunkcije (1:3:17), "prosleđivanjem" s leva funktorom G a s desna funktorom F, dobijaju se komutativni dijagrami oblika (1:4:2), odnosno asocijativni zakon i zakon jedinice za monadu $(GF,\eta,G\varepsilon F)$ u kategoriji $\mathcal{K}$. Tako dobijena monada naziva se <u>monada definisana adjunkcijom</u> (F,G,η,ε).

1:4:9. Primer monade definisane adjunkcijom je monada slobodnog grafa definisana adjunkcijom 1:2:3.

1:4:10. <u>Stav</u>. (Svaka monada je definisana svojim M-algebrama.) Ako je (M,η,μ) monada u kategoriji $\mathcal{K}$, tada skup svih M-algebri i njihovih morfizama određuje kategoriju $\mathcal{K}^M$. Postoji adjungovani par funktora, definisan pridruživanjem (1:4:11) kojim je definisana adjunkcija

$$(F^M,G^M,\eta^M,\varepsilon^M):\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}^M,$$

gde je $\eta^M = \eta$, $\varepsilon^M(X,h) = h$ za svaku M-algebru (X,h). Monada definisana u $\mathcal{K}$ ovom adjunkcijom je monada (M,η,μ).

(1:4:11)

$$\begin{array}{ccccc}
(X,h) & & X & & (MX,\mu_X) \\
f\big\downarrow & \overset{G^M}{\longmapsto} & \big\downarrow f & \overset{F^M}{\longmapsto} & \big\downarrow Mf \\
(X',h') & & X' & & (MX',\mu_{X'})
\end{array}$$

1:4:12. <u>Stav</u>. (Kleizli-eva kategorija monade) Neka je (M,η,μ) monada u kategoriji $\mathcal{K}$ i neka je za svaki $\mathcal{K}$-objekt X dat novi objekt X_M a za svaki morfizam $f: X \longrightarrow MY$ morfizam $f^b: X_M \longrightarrow Y_M$. Ovi novi objekti i morfizmi čine kategoriju ukoliko je kompozicija definisana sa

$$g^b f^b = (\mu_Z M(g)\ f)^b$$

Funktori F_M i G_M, $F_M\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}_M$, $G_M\colon \mathcal{K}_M \longrightarrow \mathcal{K}$ definisani su pridruživanjima

(1:4:13)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "k"'] & & X_M \arrow[d, "(\eta_Y k)^b"] \\ Y & \overset{F_M}{\longmapsto} & Y_M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_M \arrow[d, "f"'] & & MX \arrow[d, "Mf"] \\ Y_M & \overset{G_M}{\longmapsto} & MY \end{tikzcd}$$

tako da je $G_M X_M = MX$. Tada bijekcija $f^b \longmapsto f$ daje adjungovani odno

$$(F_M, G_M, \eta_M, \varepsilon_M)\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}_M$$

koja definiše u X tačno datu monadu (M,η,μ).

Iz dva poslednja stava sledi (ne sasvim neposredno) zaključak koji pokazuje odnose između kategorija $\mathcal{K}_M$, $\mathcal{K}^M$ i Naime, postoje funktori K i L takvi da komutiraju dijagrami

(1:4:13)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_M \arrow[r, dashed, "L"] \arrow[dr, shift left, "G_M"] & \mathcal{A} \arrow[r, dashed, "K"] \arrow[d, shift left, "G"] & \mathcal{K}^M \arrow[dl, shift left, "G^M"] \\ & \mathcal{K} \arrow[ul, shift left, "F_M"] \arrow[u, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^M"] & \end{tikzcd}$$

<u>Napomena</u>. U ovom prvom poglavlju dati su osnovni pojmovi i stavovi teorije kategorija neophodni za izlaganje drugog i trećeg poglavlja Kao osnovno sredstvo korištene su reference S.Mac Lane /1971/ i E. Manes /1976/ i sve, osim ako je drukčije naznačeno potiče iz ovih izvora. Stavovi 1:4:8. i 1:4:12. potiču iz H.Kleisli /1965/ a definicija involutivne kategorije iz Y-Kawahara /1973/ (1:1:19.).

2. KATEGORIJE RELACIJA

2:1. Relacije u kategorijama sa vlaknastim proizvodima

Klasična definicija relacije u kategoriji skupova definiše relaciju R između dva skupa X i Y kao podobjekt kartezijanskog proizvoda i: $R \rightarrowtail X \times Y$, kao što je to prikazano komutativnim dija gramom (1:1:2). Ovako definisane relacije komponuju se pomoću vlaknastog proizvoda i čine involutivnu kategoriju u koju se kategorija skupova može uložiti.

U kategorijama sa konačnim proizvodima pojam relacije između dva objekta generališe se (Klein,/1970/) na podobjekt u odno na datu bi-strukturu (bi-proizvod). U Abelovim kategorijama, relaci su parovi morfizama $A \longleftarrow X \longrightarrow B$ koji se jedinstveno mogu faktorisati u oblik

$$(2:1:1) \qquad A \longleftarrow\!\!\!\prec A' \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C \longleftarrow\!\!\!\!\!\leftarrow B' \rightarrowtail B$$

gde je sa $\rightarrowtail$ označen monomorfizam a sa $\twoheadrightarrow$ epimorfizam (S. MacLane /1961/, D.Puppe /1962/). H.B.Brinkmann /1969/, uvodi relaci u egzaktnim kategorijama slično obliku (2:1:1).

Iz pomenutih radova, a i niza drugih, vidi se da su s dosadašnja proučavanja kategorija relacija kretala u dva pravca. U p slučaju (D.Puppe /1962/,Y.Kawahara /1973/, A.Klein /1970/) kategorija relacija definiše se kao količnik-kategorija pogodno izabrane kategorije "raspona" $\xleftarrow{f} \cdot \xrightarrow{g}$, f i g su morfizmi kategorije u kojoj se relacije žele definisati. Drugi pristup definiše "veću" involutivnu kategoriju koja sadrži kategoriju $\mathcal{K}$ a koja onda u sebi sadrži kategoriju relacija (nad $\mathcal{K}$) kao svoju podkategoriju.

G.Conte /1981/, pokazuje da su ovde pomenuti pristupi svi definisani kongruencijama sličnog tipa, zavisno od izbora podkategorije kategorije $\mathcal{K}$.

Neka je $\mathcal{K}$ kategorija sa vlaknastim proizvodima, $\mathcal{A}$ involutivna kategorija i $G\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$, funktor.

2:1:2. G je <u>relacioni funktor</u> (Kawahara,/1973/) ako i samo ako su ispunjeni uslovi

(RF1) Za svaki morfizam f kategorije $\mathcal{K}$, $G(f)^{\#}G(f) < 1$

(RF2) Ako je dijagram

(2:1:3)
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "g"] & \cdot \end{tikzcd}$$

vlaknasti proizvod u $\mathcal{K}$, tada je $G(g)^{\#}G(f) = G(y)G(x)^{\#}$.

2:1:4. Podkategorija $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ kategorije $\mathcal{K}$ naziva se <u>retraktivna potkategorija</u> ako i samo ako važe uslovi

(E1) $\mathrm{Izo}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$

(E2) Ako je fg morfizam u $\mathcal{E}$ tada je i f morfizam u $\mathcal{E}$.

(E3) Ako je (2:1:3) vlaknasti proizvod u $\mathcal{K}$ i morfizam f je iz kategorije $\mathcal{E}$ tada je i morfizam y strelica kategorije $\mathcal{E}$.

2:1:5. Neka $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ označava kategoriju čiji su objekti, objekti funktorske kategorije $\mathcal{K}^{\leftarrow\cdot\rightarrow}$ a kompozicija dva objekta $A \longleftarrow\cdot\longrightarrow B$ $B \longleftarrow\cdot\longrightarrow C$ definisana dijagramom

(2:1:6)
$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[d, phantom, "(i)"] & & \\ {} & \cdot \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"'] & \cdot & \cdot \arrow[l, "h"] \arrow[r, "k"] & {} \end{tikzcd}$$

gde je (i) vlaknasti proizvod para morfizama (g,h), tako da je

$$(f,g)\ (h,k) = (fp,kq).$$

Par morfizama $A \xleftarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} B$ je slika pod funktorom $(\longleftarrow\cdot\longrightarrow)$ — i naziva se raspon iz A u B, a skup svih raspona između A i B označava se sa $\mathcal{R}(A,B)$.

Kompozicija raspona je dobro definisana i (fp,kq) pripada $\mathfrak{R}(A,C)$. Asocijativnost sledi neposrednom primenom svojstava vlaknastog proizvoda. Jedinica ovako definisane kompozicije je raspon $(1,1)$, naime za (f,g) iz $\mathfrak{R}(A,B)$,

$$(1_A,1_A)\ (f,g) = (f,g)$$

$$(f,g)\ (1_B,1_B) = (f,g).$$

$\mathfrak{R}(\mathcal{K})$ se naziva <u>kategorija raspona nad kategorijom</u> $\mathcal{K}$.

2:1:7. S obzirom da je svaki raspon slika kategorije $\longleftarrow\cdot\longrightarrow$ pod nekim funktorom (f,g): $(\longleftarrow\cdot\longrightarrow)\longrightarrow\mathcal{K}$, u familiji raspona $\mathfrak{R}(A,$ može se definisati <u>uređajna relacija</u> na sledeći način:

$(f,g)<(f`,g`)$ ako i samo ako postoji par prirodnih transformacija određenih svojim komponentama,

$$\begin{cases} \langle 1_A, s, 1_B\rangle : (x,y) \overset{\cdot}{\longrightarrow} (f`,g`) \\ \langle 1_A, e, 1_B\rangle : (x,y) \overset{\cdot}{\longrightarrow} (f,g) \end{cases}$$

gde je s morfizam kategorije $\mathcal{K}$, e je morfizam retraktivne podkategorije $\mathcal{E}$ kategorije $\mathcal{K}$, a raspon (x,y) je određen strelicama $A \longleftarrow \mathrm{dom}\,s = \mathrm{dom}\,e \longrightarrow B$. Dijagramski, komutiraju dijagrami(2:1:8) u oznaci $\langle s,e\rangle : (f,g) < (f`,g`)$.

(2:1:8)
$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[l, "f`"'] \arrow[r, "g`"] & \cdot \arrow[d, equal] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "x"'] \arrow[r, "y"] \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "e"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, equal] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] & \cdot \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

2:1:9. <u>Lema</u>. Neka su (f,g), $(f`,g`)$ i $(f``,g``)$ rasponi iz A u B i neka je (h,k) raspon iz B u C. Tada je

(i) $(f,g)<(f,g)$

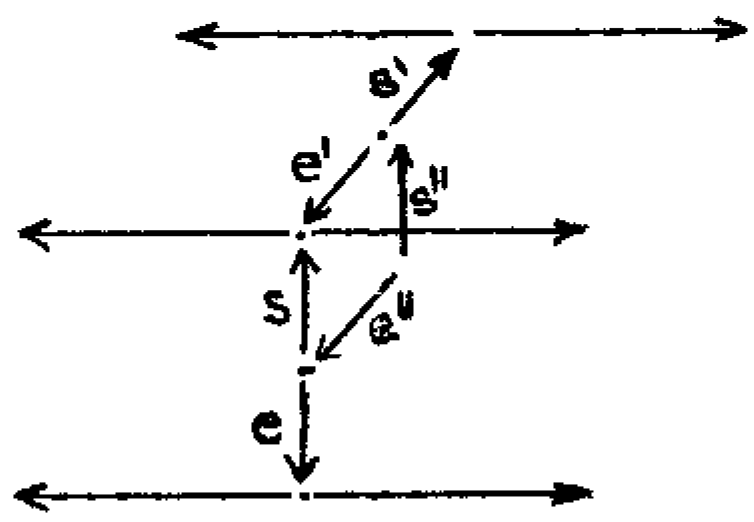
(ii) Ako je $(f,g)<(f`,g`)$ i $(f`,g`)<(f``,g``)$ onda je $(f,g)<(f``,$

(iii) Ako je $(f,g)<(f`,g`)$ onda je $(f,g)\ (h,k)<(f`,g`)\ (h,k)$

Dokaz. (i) Egzistencija identičnih prirodnih transformacija je očigledna, te je $(f,g)<(f,g)$.

(ii) Neka je $\langle s,e\rangle : (f,g)<(f',g')$ i $\langle s',e'\rangle : (f',g')<(f'',g'')$. Konstrukcijom vlaknastih proizvoda, kao što to prikazuje dijagram

(2:1:10)



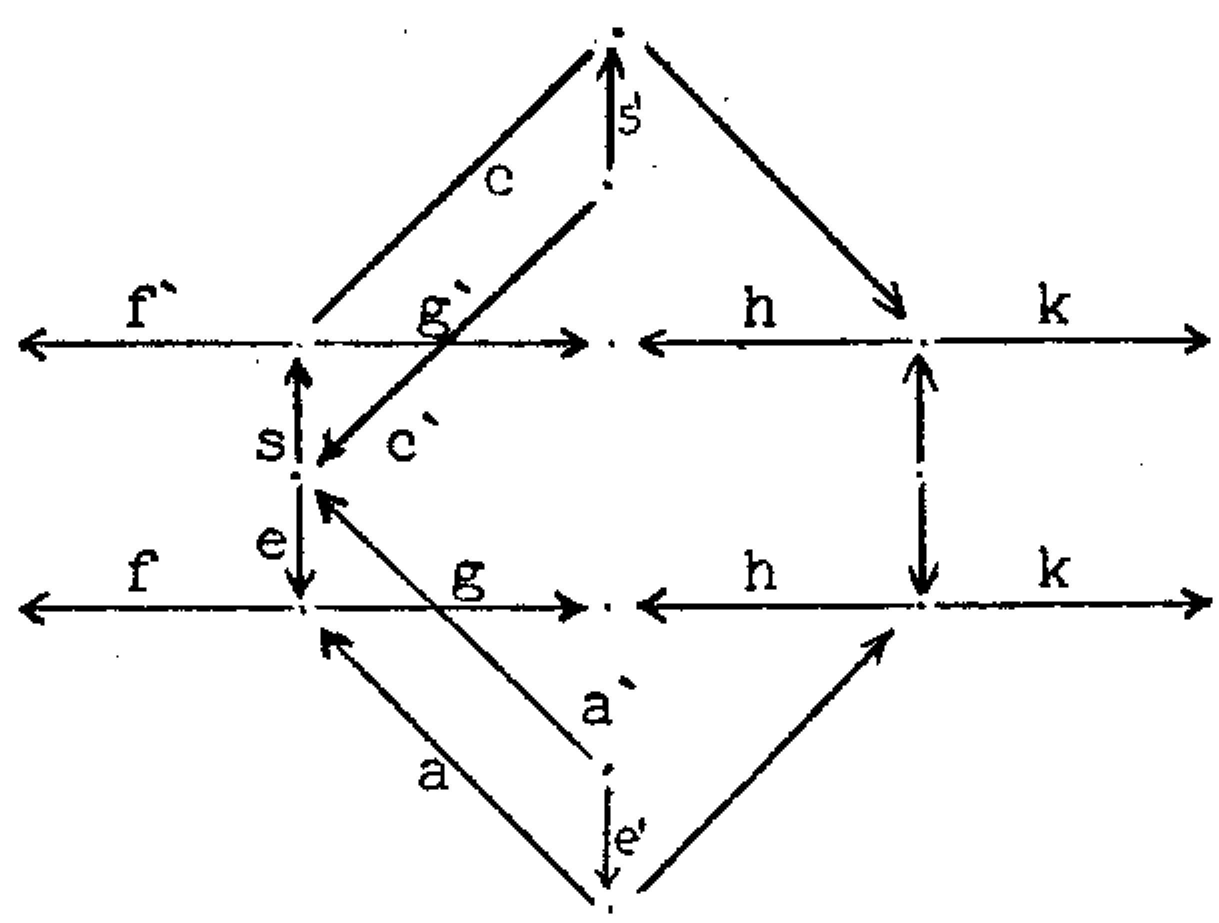
odreden je par prirodnih transformacija

$$\langle s's'', ee''\rangle : (f,g)<(f'',g'').$$

Kompozicija $s's''$ je morfizam kategorije $\mathcal{K}$ a kompozicija ee'' je morfizam retraktivne podkategorije $\mathcal{E}$ što sledi iz osobina kategorije $\mathcal{E}$ i osobina vlaknastog proizvoda.

(iii) Neka je $(f,g)\ (h,k) = (fa,kb)$, $(f',g')\ (h,k) = (f'c,kd)$ i neka je $\langle s,e\rangle : (f,g)<(f',g')$. Konstrukcija vlaknstih proizvoda nad parovima strelica (s,c) i (e,a) kao što je prikazano u dijagramu

(2:1:11)



daje $cs' = sc'$, $ae' = ea'$, te je dovoljno pokazati da je $gae' = g'cs'$ i $fae' = f'cs'$. Iz vlaknastih proizvoda, $gea' = gae'$ i $g'sc' = g's'c$. Kako je $ge = g's$ biće $gea' = gae'$ i $gec' = g's'c$. Slično je $fae' = f'cs'$ pa je

$$(f,g)\ (h,k)<(f',g')\ (h,k).$$

2:1:12. <u>Rasponi</u> (f,g) i (f',g') između objekata A i B kategorije su <u>ekvivalentni</u>, u oznaci $(f,g)\sim(f',g')$ ako i samo ako je $(f,g)<(f',g')$ i $(f',g')<(f,g)$.

2:1:13. <u>Def</u>. Neposrednom primenom prethodne leme, pokazuje se da je relacija ekvivalencije u familiji raspona $\mathcal{R}(A,B)$. Klasa ekvivalencije raspona $(f,g)\in\mathcal{R}(A,B)$ označava se sa $[f,g]$ i naziva <u>relacija</u> iz A u B, a kolekcija svih klasa ekvivalencije iz $\mathcal{R}(A,B)$ označava se sa $\mathrm{Rel}(A,B) = \mathrm{Rel}_{\mathcal{E}}(A,B)$.

2:1:14. Za dve relacije $[f,g]\in \mathrm{Rel}(A,B)$ i $[h,k]\in \mathrm{Rel}(B,C)$, <u>kompozicija</u> (spajanje) se definiše kao(sledeća)klasa ekvivalencije

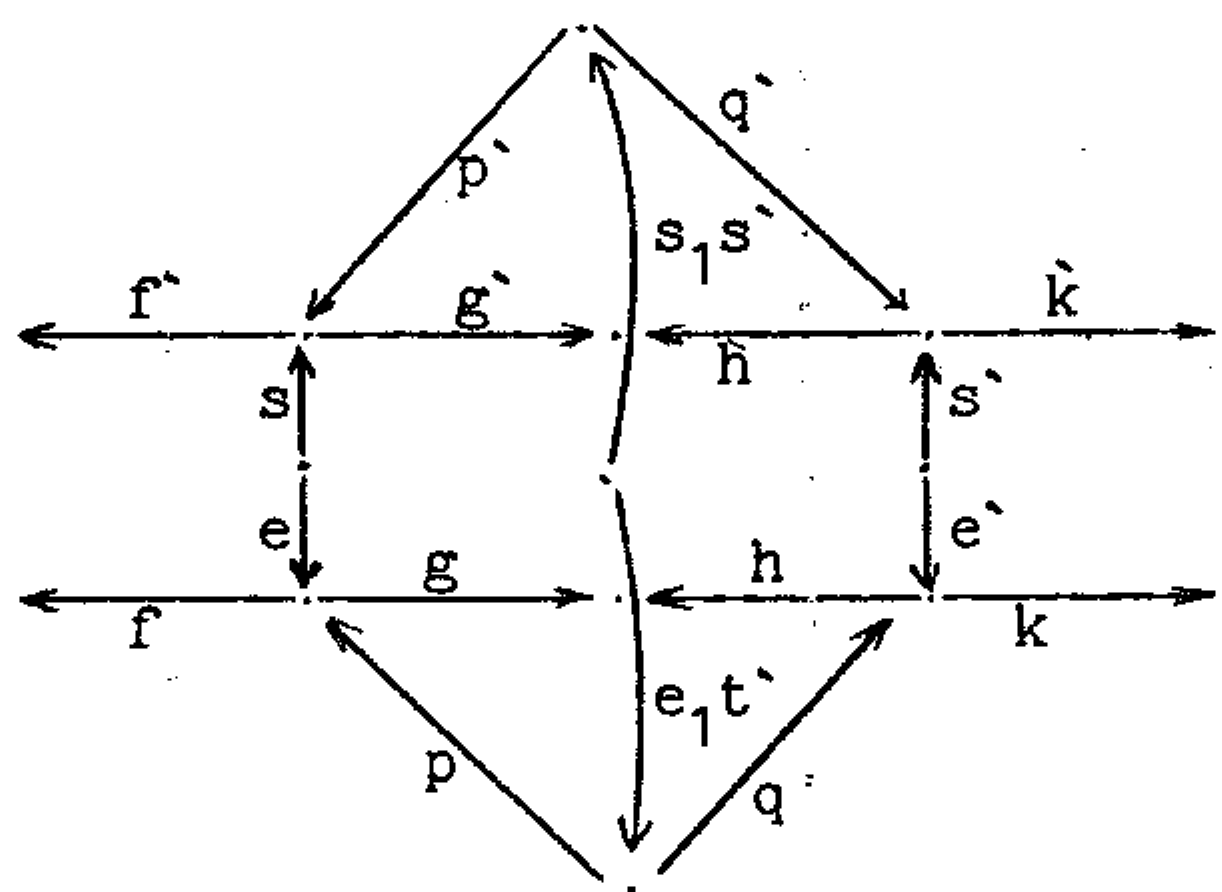
$$[f,g]\ [h,k] = [fp,kq]$$

saglasno dijagramu (2:1:6).

2:1:15. <u>Stav</u>.Kompozicija relacija je dobro definisana asocijativna operacija i relacija $[1,1]$ je jedinica te operacije.

Dokaz. Neka $[f,g]\in \mathrm{Rel}(A,B)$ i $[h,k]\in \mathrm{Rel}(B,C)$, i neka je $(f,g)\sim(f',g')$, $(h,k)\sim(h',k')$. Treba pokazati da je $[f,g]\ [h,k] = [f',g']\ [h',k']$. Konstrukcija vlaknastih proizvoda nad parovima strelica (g,h), (e,p), (q,e'), može se slediti na dijagramu

(2:1:16)



Povezivanjem pomenutih vlaknastih proizvoda, kao što se to vidi na dijagramu (2:1:17) i koristeći osobine vlaknastog proizvoda, sledi da morfizam e_1t' pripada retraktivnoj podkategoriji $\mathcal{E}$, i da postoji pa prirodnih transformacija takvih da je:

$\langle e_1 t^{`}, s_1 s^{`}\rangle : (f,g)\ (h,k) < (f^{`},g^{`})\ (h^{`},k^{`}).$

Slično se pokazuje da je

$$(f^{`},g^{`})\ (h^{`},k^{`}) < (f,g)\ (h,k),$$

odnosno

$$[f,g]\ [h,k] = [f^{`},g^{`}]\ [h^{`},k^{`}]$$

(2:1:17)

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t^{`}"'] & {} \arrow[r] \arrow[d, "e_1^{`}"] & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[r, "e_1"'] \arrow[d] & {} \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[r, "e"'] & {} \arrow[r, "g"'] & {} \end{tikzcd} \qquad . \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "s^{`}"'] & {} \arrow[r] \arrow[d, "s_1^{`}"] & {} \arrow[d, "s^{`}"] \\ {} \arrow[r, "s_1"'] \arrow[d] & {} \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d, "h^{`}"] \\ {} \arrow[r, "s"'] & {} \arrow[r, "g^{`}"'] & {} \end{tikzcd}$$

Asocijativnost definisane operacije sledi iz asocijativnosti operacije kompozicije odgovarajućih raspona. Takođe, neposrednom primenom definicije kompozicije i odgovarajućih osobina vlaknastih proizvoda, pokazuje se

$$[1_A, 1_A]\ [f,g] = [f,g]$$
$$[f,g]\ [1_B, 1_B] = [f,g]$$

za relaciju $[f,g] \in \mathrm{Rel}(A,B)$.

2:1:18. <u>Def.</u> Poslednjim stavom je pokazano da je familija relacija sa definisanom kompozicijom kategorija. Ta se kategorija označava sa $\mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E})$ i naziva se <u>kategorija relacija u $\mathcal{K}$ nad retraktivnom kategorijom $\mathcal{E}$</u> (Kawahara /1973/).

2:1:19. <u>Stav.</u> (A.Klein,/1971/,str.538.)
$\mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E})$ je kategorija i postoji kontravarijantni funktor ulaganja ("graf")

$$\Gamma : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E})$$

definisan pridruživanjem

$$(A \xrightarrow{f} B) \overset{\Gamma}{\longmapsto} [1_A, f]$$

Dokaz. Pridruživanje Γ svakom morfizmu $f: A \longrightarrow B$ pridružuje klasu ekvivalencije $[1_A, f]$. S obzirom da je

$\Gamma(1_A) = [1_A, 1_A]$

$\Gamma(f)\Gamma(g) = [1_A, f]\,[1_B, g] = [1_A, gf] = \Gamma(gf)$,

Γ je očigledno kontravarijantni funktor. Ako je $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, onda je $[1,f] = [1,g]$, odnosno postoji par prirodnih transformacija $\langle s,e\rangle : (1,f) < (1,g)$ te je $e = s$ i $fs = ge$, odnosno $f = g$ jer je e epimorfizam. Znači, Γ je ulaganje.

2:1:20. Posledica: U slučaju kategorije sa proizvodima, $\Gamma(f)$ je poznati pojam grafa funkcije, i raspon $(1,f)$ je ekvivalentan rasponu $A \xleftarrow{p_A'} \Gamma(f) \xrightarrow{p_B'} B$, gde su p_A' i p_B' restrikcije projekcija $A \xleftarrow[p_A]{} A \times B \xrightarrow[p_B]{} B$.

2:1:21. Stav. (A. Klein, /1971/, str 539.)

Za funktor $\Gamma: \mathcal{K} \longrightarrow Rel(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ važe sledeće osobine

(i) $[f,g] = \Gamma(f)^{\#}\Gamma(g)$

(ii) $\Gamma(f)^{\#}\Gamma(f) \doteq [1_B, 1_B]$ ako i samo ako je f $\mathcal{E}$-morfizam.

(iii) Γ je relacioni funktor

(iv) $\Gamma(f)$ je retrakcija u $Rel(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ ako i samo ako je f morfiza[m] retraktivne podkategorije $\mathcal{E}$.

Sledeći stav, u nešto drugačijoj formi, i na drugi način dokazali su Y.Kawahara /1973/ i Klein/1971/.

2:1:22. Stav. Neka je $\mathcal{K}$ kategorija sa vlaknastim proizvodima, $\mathcal{E}$ nje na retraktivna podkategorija i Inv kategorija involutivnih kategorija i involutivnih funktora.

(a) Relacioni funktor $\Gamma: \mathcal{K} \longrightarrow Rel(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ je univerzalni među relacionim funktorima G iz kategorije $\mathcal{K}\downarrow Inv$ sa osobinom

(2:1:22.*) Ako je f $\mathcal{E}$-morfizam, onda je $G(f)^{\#}\, G(F) \doteq 1$, odnosno

(b) Slobodni Inv-objekt nad $\mathcal{K}$ u odnosu na zaboravni funktor $U\colon \mathrm{Inv} \longrightarrow \mathfrak{Kat}$ je par $(\mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E}),\Gamma)$.

Dokaz. Treba pokazati da za relacioni funktor $G\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$, gde je $\mathcal{A}$ involutivna kategorija postoji jedinstveni involutivni funktor $G'\colon \mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E}) \arrow[dl, "G'"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd} \tag{2:1:23}$$

Neka je G' funktor definisan sa $G'[f,g] := G(f)^{\#}G(g)$. Funktor G' je dobro definisan jer je za $\langle s,e\rangle : (f,g) < (f',g')$ u kategoriji

$$\begin{aligned} G'[f,g] &= G(f)^{\#}G(g) = G(f)^{\#}G(e)^{\#}G(e)G(g) = G(fe)^{\#}G(ge) \\ &= G(f')^{\#}G(s)^{\#}G(s)G(g') < G(f')^{\#}G(g') = G'[f',g'] . \end{aligned}$$

Slično se pokazuje i obrnuta relacija, te očigledno definicija funktora G' ne zavisi od izbora predstavnika. S obzirom da je $G'[1,1] = 1$, i $G'([f,g])^{\#} = G'[g,f]$ i $G'(\Gamma(f)) = G(f)$, komutira dijagram (2:1:23).

Ostaje da se pokaže da je G' involutivni funktor, odnosno,

$$\begin{aligned} G'([f,g]\,[h,k]) &= G'(\Gamma(fp)^{\#}(kq)) = G(fp)^{\#}G(kq) \\ &= G(f)^{\#}G(p)^{\#}G(q)G(k) = G(f)^{\#}G(g)G(h)^{\#}G(k) \\ &= G'[f,g]\,G'[h,k] = G'[fp,kq] \end{aligned}$$

gde su p i q definisani vlaknastim proizvodom koji se javlja u kompoziciji (2:1:6).

Za $\mathcal{E}$-morfizam f, $\Gamma(f)^{\#}\Gamma(f) = 1$ te je i

$$G(f)^{\#}G(f) = G'(\Gamma(f)^{\#})G'(\Gamma(f)) = G'(\Gamma(f)^{\#}\Gamma(f)) = G'(1) = 1,$$

te važi osobina $(*)$.

2:1:24. <u>Stav</u>. Neka je $\mathcal{K}$ kategorija sa vlaknastim proizvodima i $G:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{A}$ relacioni funktor koji je univerzalan medu funktorima $(\mathcal{K}\downarrow \mathrm{Inv})$ sa osobinom

Ako je $G(f)^{\#}G(f) = 1$ onda je $H(f)^{\#}H(f) = 1$,

Tada postoji retraktivna podkategorija $\mathcal{E}$ kategorije $\mathcal{K}$ i jedinstveni izomorfizam $\mathcal{A} \cong \mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E})$ takav da komutira dijagram

(2:1:25)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathrm{Rel}(\mathcal{K},\mathcal{E}) \arrow[dl, "\cong"] \\ & \mathcal{A}. & \end{tikzcd}$$

ako i samo ako je ispunjen uslov:

(2:1:26) $1 < \alpha G(f)$ za neki $\mathcal{E}$-morfizam α, implicira $G(f)^{\#}\Gamma(f) = 1$.

Dokaz: Dokaz je neposredan ukoliko se može odrediti retraktivna podkategorija $\mathcal{E}$ kategorije $\mathcal{K}$. Neka je

$$\mathcal{E} = \{ f \in \mathcal{K} : G(f)^{\#}G(F) = 1 \} .$$

$\mathcal{E}$ je očigledno podkategorija kategorije $\mathcal{K}$, ali treba još pokazati da je retraktivna.

(E1) Neka je f izomorfizam u $\mathcal{K}$. Tada,postoji morfizam g takav da je $fg = 1$ i $gf = 1$. S obzirom da je G relacioni funktor,

$$G(f)^{\#} = G(f)^{\#}G(f)G(g) < G(g)$$

$$G(g) < G(g)G(f)G(f)^{\#} = G(f), \text{ te je}$$

$$G(f)^{\#} = G(g), \text{ i otuda važi}$$

$$G(f)^{\#}G(f) = G(g)G(f) = G(gf) = G(1) = 1,$$

što znači da izomorfizmi pripadaju kategoriji $\mathcal{E}$. Ako je f morfizam kategorije $\mathcal{E}$ i ako je $xf = yf$, tada je

$G(x) = G(f)^{\#}G(f)G(x) = G(f)^{\#}G(f)G(y) = G(y)$, jer je $G(f)^{\#}G(f) = 1$.

Dakle, $x = y$ jer je G ulaganje te je f epimorfizam. Dakle, $\mathrm{Iso}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$, što je trebalo dokazati.

(E2) Neka je fg : $\mathcal{E}$-morfizam. Tada je

$$1 = G(fg)^{\#}G(fg) = G(fg)^{\#}G(f)G(g)$$

te je na osnovu uslova (*) $G(g)^{\#}G(g) = 1$, dakle g je $\mathcal{E}$-morfizam.

(E3) Neka je dat fibrirani proizvod (2:1:3), $gy = fx$. S obzirom da je G relacioni funktor

$G(g)^{\#}G(f) = G(y)G(x)^{\#}$, i

$1 < G(g)^{\#}G(g) = G(g)^{\#}G(f)G(F)^{\#}G(g)$, odnosno

$1 < G(y)G(x)^{\#}G(f)^{\#}G(g)$,

te iz uslova (2:1:22.*) $G(y)G(y)^{\#} = 1$, odnosno y je $\mathcal{E}$-morfizam.

Sada, važe uslovi (E1), (E2) i (E3) za podkategoriju $\mathcal{E}$ što znači da je $\mathcal{E}$ retraktivna podkategorija kategorije $\mathcal{K}$.

2:1:27. Posledica. Neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ dve kategorije sa vlaknastim proizvodima i $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ odgovarajuće retraktivne podkategorije. Neka je $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ funktor koji čuva vlaknaste proizvode i $F(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$. Tada postoji jedinstveni involutivni funktor

$$F^{`} : Rel(\mathcal{K},\mathcal{E}) \longrightarrow Rel(\mathcal{K}',\mathcal{E}')$$

takav da komutira dijagram

(2:1:28)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \mathcal{K}' \arrow[d, "\Gamma'"] \\
Rel(\mathcal{K},\mathcal{E}) \arrow[r, "F^{`}"] & Rel(\mathcal{K}',\mathcal{E}')
\end{tikzcd}$$

2:1:29. Regularni epimorfizam (Y. Kawahara /1973/, str.161) u kategoriji $\mathcal{K}$ je ko-jezgro nekog para morfizama u $\mathcal{K}$.

2:1:30. Za relaciju $[f,g]$ kaže se da je prava relacija ako i samo ako važe uslovi

$$[1,1] < [f,g][g,f] \qquad \text{i} \qquad [g,f][f,g] < [1,1].$$

2:1:31. <u>Stav</u>. $\mathcal{E} \subset \mathrm{Reg}(\mathcal{K})$ ako i samo ako je ispunjen uslov:

Ako je $[f,g]$ prava relacija, onda postoji jedinstveni morfizam t u kategoriji $\mathcal{K}$ takav da je $[f,g] = \Gamma(t)$.

Dokaz: Neka je kategorija $\mathcal{E}$ podkategorija kategorije regularnih epimorfizama, $\mathrm{Reg}(\mathcal{K})$ i neka je $[f,g]$ prava relacija. Tada postoje prirodne transformacije

$$\langle s,e\rangle : (1,1) < (f,g)(g,f).$$

S obzirom da je $[f,g][g,f] = ([f,g][g,1])\,[1,f]$
biće $\langle s,e\rangle : [1,1] < ([f,g][g,1])[1,f] = [x,y][1,f] = [x,yf]$

te je $syf = e$ $\mathcal{E}$-morfizam i mora biti f $\mathcal{E}$-morfizam, pa zato i regularni epimorfizam jer je $\mathcal{E} \subset \mathrm{Reg}(\mathcal{K})$. To znači da je morfizam f jezgro nekog para morfizama, na primer $fx = fy$. Ne smanjujući opštost, neka je $fx = fy$ komutativni kvadrat koji je i vlaknasti proizvod, Postoje prirodne transformacije

$$\langle s',e'\rangle : [g,f][f,g] = [gx,gy] < [1,1]$$

koje impliciraju da je $gx = gy$. Na osnovu regularnosti morfizma f postoji jedinstveni $\mathcal{K}$-morfizam t takav da je $g = tf$. Otuda je

$$[f,g] = [f,tf] = f\Gamma(t) = \Gamma(t)\ ,$$

jer je f $\mathcal{E}$-morfizam.

Obrnuto, neka je f neki $\mathcal{E}$-morfizam i neka je $fx = fy$ vlaknasti proizvod. Tada je

$$(f,1)(1,f) \sim (1,1) \quad \text{i} \quad (1,f)(f,1) \sim (x,1)(1,y).$$

Jednostavno je pokazati da je sada f kojezgro para morfizama (x,y).

2:1:32. Rasponi $(f,1)$ i $(g,1)$ sa $\mathrm{cod}f = \mathrm{cod}g$ su <u>uporedivi</u> (2:1:7) ukoliko postoje prirodne transformacije ,takve da je

$$\langle s,e\rangle : (f,1) < (g,1).$$

Taj se poslednji uslov svodi na komutativnost dijagrama (2:1:33), pa se može definisati uređajna relacija među morfizmima istog kodomena $(f < g)$.

(2:1:33)
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "s"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

$f < g$ ukoliko postoje morfizmi s iz kategorije $\mathcal{K}$ i e iz kategorije $\mathcal{E}$ takvi da komutira dijagram (2:1:33).

Neposredna posledica Leme 2:1:9. je sledeća lema:

2:1:34. Lema. Neka su f,g,h $\mathcal{K}$-morfizmi istog kodomena i neka je k $\mathcal{K}$-morfizam takav da postoje kompozicije kf i kg. Tada je

$$f < f$$

$$f < g,\ g < h \Rightarrow f < h$$

$$f < g \Rightarrow kf < kg.$$

Odgovarajuća relacija ekvivalencije: $f \sim g$ ako i samo ako je $f < g$ i $g < f$ je relacija ekvivalencije na klasi morfizama kodomena , recimo X.

2:1:35. Klase ekvivalencije f su $\mathcal{E}$-podobjekti od X (Manes/1976/, str.109). Neka je odgovarajući količnik označen sa $S_{\mathcal{E}}(X)$, i neka je na njemu definisano parcijalno uređenje inducirano uređenjem $<$,

$$[f] < [g] \text{ ako je } f < g.$$

2:1:36. Stav.

(i) Objekti količnika $s_{\mathcal{E}}(A \times B)$ mogu se identifikovati sa objektima familije Rel(A,B) (Y-Kawahara /1973/,str.166, E.Manes /1976/,str. 109

(ii) (E.Manes) Neka kategorija $\mathcal{K}$ ima ($\mathcal{E}$,mono) faktorizacije i neka je $\mathcal{E} \cap \mathrm{Mono}(\mathcal{K}) = \mathrm{Izo}(\mathcal{K})$. Tada je pridruživanje $\mathcal{E}$-podobjektima mono-podobjekata , izomorfizam.

Dokaz: Svaki $\mathcal{K}$-morfizam ima jedinstvenu ($\mathcal{E}$,mono) dekompoziciju, do na izomorfizam. Da se to pokaže, neka postoje dve dekompozicije morfizma f, $f = me$ i $f = m'e'$, gde su e i e' $\mathcal{E}$-morfizmi, a m i m' su monomorfizmi kategorije $\mathcal{K}$. Nad parom strelica m,m' može se konstruisati vlaknasti proizvod, na primer $md = m'd'$, a na osnovu univerzalne osobine tog vlaknastog proizvoda d i d' moraju biti monomorfizmi i postoji jedinstveni morfizam s takav da je $ds = e$ i $d's' = e'$. S obzirom da je $\mathcal{E} \cap \mathrm{Mono}(\mathcal{K}) = \mathrm{Izo}(\mathcal{K})$ morfizmi d i d' su izomorfizmi.

Neka je sada $f = me$, $g = nd$ i f g. Iz jedinstvenosti faktorizacije sledi da postoje $\mathcal{E}$-morfizmi e' i d' takvi da je $me' = nd'$ te je $m \sim n$. Otuda, pridruživanje $\varphi : [f] \longrightarrow \langle f \rangle$, definisano sa $[\varphi f] = \langle f \rangle$ je dobro definisano i injektivno. Iz jedinstvenosti faktorizacije sledi da će pridruživanje odgovarajućih klasa biti izomorfizam, što je trebalo dokazati.

2:1:37. Ostaje da se uoče dve značajne činjenice(G.Conte /1981/):

Prvo, kategorije relacija,pomenute do sada, sve su definisane određenim kongruencijama, i

Drugo, različite konstrukcije kategorija relacija, odnosno involutivnih kategorija koje ih sadrže, mogu se upoređivati. To se upoređivanje može iskazati osobinama ko-egzaktnih kvadrata u (2:1:39).

2:1:38. <u>Stav.</u> (H.B.Brinkmann /1969/)

Postoji slobodna kategorija $\mathcal{L} = \mathcal{L}(B)$ i funktor $s_B : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ takav da za bilo koji funktor $s : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$ postoji samo jedan funktor $H_s : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{H}$ takav da komutira dijagram

(2:1:39)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[rr, "s_B"] \arrow[dr, "s"'] & & \mathcal{L}(B) \arrow[dl, dashed, "H_s"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

U kategoriji $\mathcal{L}$ na skupu $\mathcal{L}(A,B)$ može se definisati relacija ekvivalencije

$$fR_s g \text{ ako i samo ako je } H_s(f) = H_s(g)$$

saglasna sa kompozicijom i involucijom. Količnik kategorija $\mathcal{L}(B)/R_s$ naziva se simetrizacija u $\mathcal{K}$ i označava sa $s(R)$.
Simetrizacije, kao "delovi" od $\mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(B)$, čine uređajnu relaciju $<$.

2:1:40. Za datu kategoriju $\mathcal{K}$ neka je $\mathcal{E}$ bilo koja podkategorija kategorije $\mathcal{K}$. Podkategorija $\mathcal{E}$ inducira kongruenciju R_E sledećim uslovima

(i) $ba^{\#} R_E b'a'^{\#}$ ako postoji prirodna transformacija

$$\langle 1,f,1\rangle : (a,b) < (a',b'),$$

gde su a, b, a',b' $\mathcal{K}$-morfizmi i f je $\mathcal{E}$-morfizam.

(ii)Ako je $ax = by$ kvadrat vlaknastog proizvoda nad parom morfizama a i b, neka je $xy^{\#} = a^{\#}b$.

2:1:41.<u>Stav</u>. Neka je $\mathcal{E} = \mathrm{Izo}(\mathcal{K})$. Tada je funktor s ulaganje kategorije $\mathcal{K}$ u involutivnu kategoriju raspona definisane u 2:1:5.

(b) Neka je $\mathrm{Izo}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E}$ i neka za vlaknasti proizvod u $\mathcal{K}$, $ax = by$, ako je a $\mathcal{E}$-morfizam, neka bude i y $\mathcal{E}$-morfizam. Relacija ekvivalencije na familiji raspona $\mathcal{R}(A,B)$ data je parovima prirodnih transformacija (kao u 2:1:7.):

$$\langle s,e\rangle : (f,g) < (f',g')$$
$$\langle s',e'\rangle : (f',g') < (f,g).$$

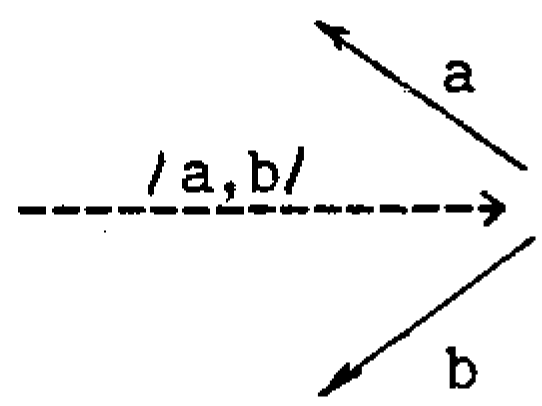
2:1:42. <u>Stav</u>.(G.Conte /1981/,str.433)

Neka je $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ i $\mathcal{F}$ podkategorija kategorije raspona $\mathcal{R}(\mathcal{K})$, takva da svaki raspon (a,b) u $\mathcal{K}$, ima do na izomorfizam jedinstvenu faktorizaciju oblika

$$(a,b) = (a',b')e$$

gde je morfizam e iz kategorije $\mathcal{E}$ a raspon $(a`,b`)$ iz podkategorije $\mathcal{F}$. Tada svaki morfizam količnik kategorije $\mathcal{K}(B)/R_E$ ima jedinstveno određenu reprezentaciju datu rasponom iz kategorije $\mathcal{F}$.

2:1:43. Na primer, neka kategorija $\mathcal{K}$ ima konačne proizvode i neka je kategorija $\mathcal{E}$,kategorija epimorfizama, Epi($\mathcal{K}$). Neka je podkategorija $\mathcal{F}$ takva da "proizvod" morfizam definisan univerzalnom osobinom (1:1:2), u oznaci $/a,b/$, kao što se vidi u dijagramu



bude monomorfizam. U ovom slučaju $\mathcal{K}(B)/R_E$ ima za objekte mono-podobjekte proizvoda kodomena posmatranih strelica, kao što je to uobičajeno u klasičnom smislu.

2:1:44. Uzimajući dualne uslove uslovima (2:1:40), u dualnoj formulaciji važe sve iskazane osobine za relaciju R_E^o.

2:1:45. Neka je $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ i neka je $ua = vb$ kvadrat morfizama u $\mathcal{K}$. Taj se kvadrat naziva <u>ko-egzaktni kvadrat</u> ,ako
(K1) Postoji vlaknasti proizvod nad parom morfizama u,v. Neka je to kvadrat $uv` = vu`$ i u tom slučaju
(K2) Postoji $\mathcal{E}$ -morfizam f takav da je $a = v`f$ i $b = u`f$.

2:1:46. <u>Stav.</u>(G.Conte, /1981/)
Neka je $\mathcal{K}$ kategorija koja ima vlaknaste sume i neka su $\mathcal{E}$ i Epi($\mathcal{K}$) podkategorije kategorije $\mathcal{K}$. Ako su vlaknasti proizvodi (odgovarajući kvadrati) ko-egzaktni, tada je

$$s(R_{Epi(\mathcal{K})}) > s(R_E^o).$$

2:2. Kleisli-eva reprezentacija relacija

Binarna relacija iz skupa A u skup B je podskup kartezijanskog proizvoda ovih skupova, $R \subset A \times B$. S obzirom da je za $a \in A$ i $b \in B$, aRb ako i samo ako $b \in Ra$, gde je $Ra = \{b \in B: aRb\}$ postoji prirodna bijekcija između relacije R i funkcija iz A u PB, PB je partitivni skup skupa B. Neka je $S \subset B \times C$. Kompozicija je definisana sa

$$R \circ S(a) = \{c \in C: (\exists b)(b \in B)(b \in Ra \text{ i } c \in Sb).$$

Neka je $\eta : 1 \xrightarrow{\cdot} P$ prirodna transformacija definisana na komponentama sa $\eta_A : A \longrightarrow PA$, $\eta_A(a) = \{a\}$ (1:4:3).

2:2:1. Stav. (E. Manes /1976/, str. 27)

(a) Trojka $(P, \eta, \circ)$ je monada u kategoriji skupova.

(b) Kleisli-eva kategorija monade P je kategorija čiji su objekti skupovi a morfizmi relacije.

Dokaz. U primeru (1:4:3) je pokazano da je trojka (P, η, μ), gde je $\mu : P^2 \xrightarrow{\cdot} P$ definisana sa $\mu\mathcal{A} = \cup\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in PA$, monada u kategoriji skupova. Neka $A \longrightarrow B$ označava funkciju $A \longrightarrow PB$ i neka je kompozicija ovakvih strelica definisana sa

$$(A \xrightarrow{\alpha} B) \circ (B \xrightarrow{\beta} C) = A \xrightarrow{\alpha} PB \xrightarrow{\beta^{\Delta}} PC,$$

gde je β^{Δ} proširenje funkcije $\beta : B \longrightarrow PC$.
Ako se u monadi $(P, \eta, \circ)$ definiše prirodna transformacija $\mu : P^2 \xrightarrow{\cdot} P$ na sledeći način

$$\mu_A = (1_{P^2A} : P^2A \longrightarrow PA)\,(1_{PA} : PA \longrightarrow A)$$

trojka $(P, \eta, \circ)$ postaje monada (P, η, μ) i ta korespodencija je bijektivna. Odgovarajuća Kleisli-eva kategorija (1:4:12) ima za objekte skupove, za morfizme relacije, kompozicija je $\circ$, a identični morfizam je prirodna transformacija η .

U opštem slučaju jedna monada (M, η, μ) u kategoriji $\mathcal{K}$ može biti definisana sa više različitih adjungovanih parova funktora. Kleisli-eva kategorija monade daje konstrukciju konkretnog "najmanjeg" adjungovanog para, direktno iz monade.

Neka je $\Gamma : \mathcal{K} \longrightarrow Rel(\mathcal{K},\mathcal{E}) = \mathcal{R}$ relacioni funktor i neka postoji adjungovani funktor $G: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{K}$ sa prirodnim transformacijama $\eta : 1 \overset{\cdot}{\longrightarrow} G$, $\varepsilon : P \overset{\cdot}{\longrightarrow} 1$.

2:2:2. Stav.(L.Coppey & R.Davar-Panah /1975/,str.143)
Kategorija $\mathcal{R}$ kanonički je izomorfna Kleisli-evoj kategoriji monade u $\mathcal{K}$, definisane parom funktora (Γ, G).

Dokaz. Neka je $f: X \longrightarrow GY$ $\mathcal{K}$-morfizam. Odgovarajuća relacija Rf, data je sa

$$Rf = \varepsilon_Y \Gamma(f).$$

Obrnuto, ako je data relacija $R: X \longrightarrow Y$, odgovarajući morfizam $f_R: X \longrightarrow GY$ u $\mathcal{K}$ definisan je sa $f_R = G(R)\eta_X$, odnosno komutira dijagram

(2:2:3)
$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[rr, "G(R)"] & & G(Y) \\
& X \arrow[ul, "\eta_X"] \arrow[ur, "f_R"'] &
\end{tikzcd}$$

Sada je
$$\begin{aligned}
fR(f) &= G(Rf)\eta_X = G(\varepsilon_Y \Gamma(f))\eta_X \\
&= G(\varepsilon_Y)G\Gamma(f)\eta_X = G(\varepsilon_Y)\eta_{GY}f = 1_{GY}f = f \text{ , i} \\
R(f_R) &= \varepsilon_Y \Gamma(f_R) = \varepsilon_Y \Gamma(G(R)\eta_X) \\
&= \varepsilon_Y \Gamma(G(R)\Gamma(\eta_X)) = R1_X = R,
\end{aligned}$$

čime je dokaz kompletiran.

2:2:4. Posledica. U kategoriji skupova $\mathcal{S}$, funktor $P: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ može se faktorisati u oblik $FP = G$, gde su funktori $G: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_P$ $F: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_P$ definisani pridruživanjima (2:2:5).

(2:2:5)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & & X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\eta f"] & \\
Y & \overset{G}{\longmapsto} & Y \arrow[r, "\eta Y"'] & PY
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & & PX \arrow[d, "Pf"'] \arrow[dr, "\mu_Y Pf"] & \\
PY & \overset{F}{\longmapsto} & P^2Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & PY
\end{tikzcd}
$$

Za svaku trojku X,Y,Z skupova kategorije $\mathcal{K}$ i svaki par $\mathcal{K}_P$-morfizama $f\colon X \longrightarrow Y$ i $g\colon Y \longrightarrow Z$ kompozicija gf je definisana sa

$$X \xrightarrow{f} PY \xrightarrow{Pg} P^2Z \xrightarrow{\mu_Z} PZ$$

odnosno,

$$f \circ g = \mu_Z Pg\, f.$$

Napomena. U odeljku 2:2. o Kleisli-evoj reprezentaciji relacija koriste se pojmovi i rezultati izloženi u odeljku 1:4. a izvorni rezultati mogu se naći u referencama H.Kleisli /1965/, E.Manes /1976/ i G.Conte /1981/.

2:3. Apstraktne relacione strukture
(E.Fried & R.Wiegandt /1982/)

Iznenađujuća sličnost između teorija povezanosti i nepovezanosti za grafove i za topološke strukture, poslužila je E.Fried-u i R.Wiegandt-u da definišu "apstraktne relacione strukture". Iako autori razvijaju ove strukture za određene primene, nesumnjiv je i njihov nezavisni značaj.

2:3:1. Neusmereni graf se može definisati kao par (S,x) gde je S skup čvorova a $x \subset S \times S$ skup strelica između čvorova, gde strelica sa krajevima a i b, u oznaci $(a,b) \in x$ ima osobinu $(b,a) \in x$. Ovakvi podskupovi od $S \times S$ čine kompletnu mrežu $L(S)$ induciranu uređajnom relacijom (inkluzija) među skupovima. Morfizmu $f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ može se pridružiti strelica $L(f)\colon L(S_1) \longrightarrow L(S_2)$, definisana na sledeći način: Za $x_1 \in L(S_1)$ neka je

(2:3:2)
$$x_2 = \{ (f(a),f(b)) : (a,b) \in x_1 \} \text{ i}$$
$$Lf(x_1) = x_2.$$

Ovim je definisan kovarijantni funktor $L\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{L}'$ gde je sa $\mathcal{S}$ označena kategorija skupova a sa $\mathcal{L}'$ kategorija čiji su objekti kompletne mreže , a morfizmi definisani sa (2:3:2).

2:3:3. Topologije na skupu S, (S,x) čine kompletnu mrežu $L(S)$, opet induciranu inkluzijom. Za preslikavanje $f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ neka je

$$Lf(x_2) = \{ f^{-1}(a\ f(S_1)) : a \in x_2 \}$$

Ovako definisano pridruživanje definiše kontravarijantni funktor $L\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{L}'$.

2:3:4. Relaciono preslikavanje $\varphi\colon L_1 \longrightarrow L_2$ između dve kompletne mreže je ono preslikavanje φ koje ima osobine

(i) čuva beskonačne supremume

(ii) preslikava glavne ideale iz L_1 u (glavne) ideale u L_2.

2:3:5. <u>Stav</u>. Kompletne mreže i relaciona preslikavanja čine kategoriju $\mathcal{L}$.

2:3:6. Neka je $\mathfrak{B}$ proizvoljna bikategorija i $P: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathcal{L}$ funktor. Ako je P kovarijantni funktor i P

(P1) čuva epimorfizme i monomorfizme, P se naziva <u>ko-relacioni funktor</u>,

(P2) pridružuje epimorfizmima monomorfizme i obrnuto, P je <u>kontra-relacioni funktor</u>.

2:3:7. Element $x \in P(S)$ naziva se <u>apstraktna ko- ili kontra-relacija tipa P na $\mathfrak{B}$ -objektu S</u>, zavisno od toga da li je P korelacioni ili kontra-relacioni funktor. Uređeni par $R = R(S,x)$ određen $\mathfrak{B}$ -objektom S i elementom x iz njegove slike $P(S)$, naziva se apstraktna (ko- ili kontra-) relaciona struktura na $\mathfrak{B}$ -objektu S sa apstraktnom relacijom x tipa P.

2:3:8. $\mathfrak{B}$ -morfizam $f: S_1 \longrightarrow S_2$ je slabo saglasan u odnosu na relacije x_1, x_2 ako je

$$Pf(x_1) \leqslant x_2; \ (Pf(x_2) \leqslant x_1)$$

a saglasan u odnosu na relacije x_1, x_2 ako je

$$Pf(x_1) \leq Pf(1) \wedge x_2; \ (Pf(x_2) \leq Pf(1) \wedge x_1.$$

U tom slučaju kaže se da postoji <u>slabo-preslikavanje</u>

$$Rf: R(S_1, x_1) \rightarrowtail R(S_2, x_2)$$

odnosno <u>preslikavanje</u>

$$Rf: R(S_1, x_1) \longrightarrow R(S_2, x_2).$$

2:3:9. Kategorija $\mathcal{R}$ apstraktnih relacionih struktura tipa P na bikategoriji $\mathfrak{B}$ definiše se na sledeći način:

Klasa objekata $O(\mathfrak{R})$ sastoji se od svih apstraktnih relacionih struktura na $\mathfrak{S}$ -objektima S sa apstraktnim relacijama tipa P, $x \in P(S)$. Morfizme kategorije $\mathfrak{R}$ čine sve strelice Rf: $R(S_1,x_1) \longrightarrow R(S_2,x_2)$ za sva preslikavanja f , slabo saglasnau odnosu na x_1,x_2.

Jednostavno je proveriti da je prethodnom definicijom dobro definisana kategorija apstraktnih relacionih struktura tipa P.

Pridruživanje $F:\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$ dato sa $F(R(S,x)) = S$ i $F(Rf) = f$ određuje funktor,čija inverzija (koja nije funktor) određuje pridruživanje $\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}$ dato sa

$$\begin{cases} S \longrightarrow R(S,x) \\ f \longrightarrow Rf. \end{cases}$$

2:3:10. <u>Stav</u>.

(i)$\mathfrak{R}$ -morfizam je ekvivalencija ako i samo ako je bijekcija.

(ii) Bilo koji morfizam Rf može se faktorisati kao $Rf = Rg_1Rh_1$, gde je Rg_1 monomorfizam i Rh_1 slabi epimorfizam, ili $Rf = Rg_2Rh_2$ gde je Rg_2 slabi monomorfizam a Rh_2 epimorfizam.

Za ispitivanje podobjekata i količnik-objekata kategorije $\mathfrak{R}$ neophodni su uslovi

2:3:11. (B1) $\mathfrak{S}$ ima početni i krajnji objekt

(B2) Podobjekti bilo kog $\mathfrak{S}$ -objekta čine kompletnu mrežu. Isto važi i za količnik-objekte.

2:3:12. <u>Stav</u>.

(i) Slabi podobjekti nekog objekta čine kompletnu mrežu.

(ii) Slabi količnik-objekti nekog objekta čine kompletnu mrežu.

(iii) Proizvod relacija $R(S_i,x_i)$, $i \in J$ postoji u kategoriji ako i samo ako postoji u $\mathfrak{S}$ proizvod objekata (S_i), $i \in J$

$$\begin{tikzcd} R(S,x) \arrow[r, "R\pi_i"] & R(S_i,x_i) \\ T \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

U tom slučaju je $x = \sup_i P\mathfrak{T}_i x_i$.

(iv) Ko-proizvod familije relacija $R(S_i,x_i)$, $i\in J$, postoji u kategoriji $\mathfrak{R}$ i u tom slučaju dijagram je dualan dijagramu u (iii), pri čemu je $x = \inf_i \sup \mathfrak{T}_i$.

2:3:13. Neka je $\mathfrak{C}$ puna podkategorija kategorije <u>skupova</u>, koja zadovoljava uslove (B1) i (B2). Bistruktura kategorije $\mathfrak{S}$ inducira bistrukturu na $\mathfrak{C}$. Neka još važi <u>uslov</u>

(B3) Za bilo koji skup $S\in O(\mathfrak{C})$ proizvod $\prod\{S_i : i\in J\}$ neekvivalentnih količnik skupova iz S je u kategoriji $\mathfrak{C}$.

2:3:14. Neka su $R(S,x)$, $R'(S',x')$ i $R(S_i,x_i)$, $i\in J$ objekti kategorije $\mathfrak{R}$ tako da je (f',R') količnik a (R_i,f_i) podobjekti relacije R. Ako je $S = \bigcup\{S_i : i\in J\}$ i (f',S') maksimalni količnik-objekt od S sa osobinom da se f' i f_i mogu faktorisati kroz krajnji objekt, R se naziva <u>ekstenzija od (R_i,f_i) sa (f',R')</u> i označava se sa $\mathrm{Ext}_J(R_i,f_i,f',R')$, a ukoliko je S disjunktna unija, ekstenzija se naziva disjunktnom i označava se sa $\mathrm{Dext}_J(R_i,f_i,f',R')$.

2:3:15. <u>Stav.</u>

(i) $D(R_i,f_i,f',R')$ važi za trivijalne objekte R_i, i J ako i samo ako je RF' izomorfizam.

(ii) Neka je (f',R') količnik objekt od $R(S,x)$. Tada postoje objekti r_i, $i\in J$, takvi da je $D(R_i,f_i,f',R')$

(iii) Neka je $\mathrm{Ext}_J(R_i,f_i,f',R')$. Tada postoje objekti R_j kategorije takvi da je

$$\mathrm{Dext}_J(R_j,f_i,f',R')$$

i svakom $i\in J$ odgovara tačno jedan $j\in J$ takav da je $F(R_i)\subseteq F(R_j)$.

3. RELACIJE SA I-STRUKTUROM

3:1 Relacione strukture

3:1:1. Neka je $(W,\leqslant)$ uređajna relacija. Trivijalna relaciona struktura T je kategorija definisana na sledeći način: Za svaki element X iz skupa W, neka je odgovarajući objekt u T takođe označen sa X. Ako su X i Y objekti, neka je skup morfizama iz objekta X u objekt Y definisan sa

$$T(X,Y) := \begin{cases} X \longrightarrow Y, & \text{ako je } Y \leqslant X \\ \emptyset, & \text{ako je } Y \nleqslant X. \end{cases}$$

Iz definicije kategorije T, vidi se da između dva objekta postoji najviše jedna strelica (morfizam) jer su strelice inducirane uređenjem. Ako su $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$ morfizmi u T, iz tranzitivnosti relacije sledi egzistencija strelice $X \longrightarrow Z$. Kompozicija, ovako definisana, je dobro definisana, asocijativna i sa jediničnim morfizmom $1_X: X \longrightarrow X$ zbog refleksivnosti. Dakle T je kategorija.

Kategorija T određuje graf G' = UT sa istim objektima (kao čvorovima) zaboravljajući koji morfizmi su kompozicije a koji su identitete. Ovaj graf je dualan usmerenom grafu koji je induciran uređajnom relacijom $(W,\leqslant)$.

3:1:2. Neka je $(W,\leqslant,\sup)$ sup.kompletna polumreža i G graf dobijen iz grafa G' dodavanjem neke (najviše prebrojive) familije strelica (ali ne i novih čvorova). Relaciona struktura $I = I(G)$, inducirana grafom G definiše se u nekoliko koraka.

(i) Proširiti graf G novom strelicom $A \longrightarrow XY$, $XY := \sup\{X,Y\}$, kadgod graf sadrži strelice $A \longrightarrow X$ i $A \longrightarrow Y$, sve dok se više ne mogu proizvesti nove strelice.

(ii) Konstruisati kategoriju čiji objekti su objekti grafa G a strelice konačni nizovi

3:1:3 $$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

sastavljeni od n čvorova $A_1, A_2, \dots, A_n$ i n-1 strelice grafa G. Svaki takav niz posmatra se kao strelica $A_1 \longrightarrow A_n$. Kompozicija ovih strelica definisana je povezivanjem nizova, pri čemu se zajednički kraj identifikuje. Očigledno, ovako uvedena kompozicija je asocijativna, a identič: strelice su nizovi (A_k) dužine k=1. Svaki niz dužine $n>1$, kompozicija je nizova dužine 2. Na primeru (3:1:3) to izgleda ovako

$$(A_1,f_1,A_2,f_2,\ldots,f_{n-1},A_n) = (A_{n-1},f_{n-1},A_n)\ \ldots\ (A_1,f_1,A_2).$$

(iii) Na svakom skupu strelica između dva čvora X i Y neka je = relacij: koja identifikuje sve strelice između ta dva čvora. Dakle, skup strelic: između dva čvora ili je prazan skup ili se sastoji od tačno jedne strelice.

Prednjim postupkom korektno je uvedena kategorija $I:=I(G)$. Kao svoju podkategoriju, I sadrži trivijalnu relacionu strukturu T. Neke značajnije osobine ove kategorije dokazane su u sledećem stavu.

3:1:4. <u>Stav</u>. Relaciona struktura je kategorija koja ima sledeće osobine:
(a) I ima konačne proizvode,
(b) I ima konačne vlaknaste proizvode,
(c) Ako je $(W,\leq)$ kompletna mreža, I ima početni i krajnji objekt.

Dokaz:(a) Par adjungovanih funktora (Δ,U): $I \rightleftarrows I\times I$ definisan je sa

$$\Delta: X \longrightarrow (X,X)$$
$$U: (X,Y) \longrightarrow \sup\{X,Y\} := XY$$

za sve I-objekte X i Y. Osobina ko-jedinice izražena je komutativnim dijagramom

(3:1:5)
$$\begin{tikzcd} AB \arrow[d, "g"'] \\ X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (AB,AB) \arrow[r, "\varepsilon_{A,B}"] \arrow[d, "{(g,g)}"'] & (A,B) \\ (X,X) \arrow[ur, "{(f_1,f_2)}"'] & \end{tikzcd}$$

Egzistencija morfizma g sledi iz univerzalnosti konstrukcije proizvoda i egzistencije takve strelice u grafu G. Komutativnost dijagrama (3:1:5) i jedinstvenost morfizma g sledi iz činjenice da kategorija I za skupove morfizama između dva objekta ima najviše jednočlane skupove, tj. $\mathrm{card}(I(X,AB))\leq 1$. Tako ovaj adjungovani par funktora daje proizvod objek AB za bilo koja dva objekta A i B, kategorije I. Ko-jedinica je par T-morfizama (projekcije): $A \longleftarrow AB \longrightarrow B$ čije postojanje sledi iz uređenja

$A \leq \sup\{A,B\}$,$B \leq \sup\{A,B\}$. Generalizacija za konačne proizvode sledi indukcijom.

(b) Za par funktora $(\Delta^{``},P)\colon I \rightleftarrows I^{\to\cdot\leftarrow}$, definisanih sa

$$\Delta^{``}\colon X \longrightarrow (X \longrightarrow X \longleftarrow X)$$
$$P\colon (A \longrightarrow Z \longleftarrow B) \longrightarrow AB\ ,$$

adjungovanost sledi iz osobina kojedinice $\varepsilon_{A,B}$ date komutativnim dijagramom

(3:1:6)
$$\begin{tikzcd}
AB \arrow[d, "g"] & (AB \to AB \leftarrow AB) \arrow[r, "\varepsilon_{AB}"] \arrow[d, "\Delta^{``}g"'] & (A \to Z \leftarrow B) \\
X & (X \to X \to X) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

gde su f i ε_{AB} komutativni kvadrat (morfizmi kategorije $I^{\to\cdot\leftarrow}$)

(3:1:7)
$$f\colon \begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & Z
\end{tikzcd} \qquad \varepsilon_{AB}\colon \begin{tikzcd}
AB \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, dotted] \\
A \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Egzistencija strelice g i komutativnost dijagrama (3:1:6) i (3:1:7) dokazuje se argumentima koji su korišteni u dokazu (a),Tako je konstrui vlaknasti proizvod $A \longleftarrow AB \longrightarrow B$ za bilo koji par morfizama oblika $A \longleftarrow Z \longrightarrow B$.

(c)Neka su $\perp$ i $\top$ najmanji i najveći element mreže $(W,\leq)$. S obzirom d za svaki element X skupa W važi $X \leq \top$, postoji za svaki I-objekt X jedinstveni I-morfizam $\top \longrightarrow X$ te je odgovarajući I-objekt $\top$ početni objekt kategorije I.

Dokaz da I ima krajnji objekt dualan je dokazu da je $\top$ početni objekt.

Neka je $(F,U)\colon \mathcal{G} \rightleftarrows \mathcal{K}at$ par adjungovanih funktora izme kategorije grafova i kategorije (malih) kategorija, gde je FG slobodna kategorija konstruisana nad grafom G kategorije $\mathcal{G}$, a $U\mathcal{K}$ slika kategor $\mathcal{K}$ pod zaboravnim funktorom U.

3:1:8. <u>Stav</u>. Postoji količnik kategorija $FG_{/=}$ i funktor $Q: FG \longrightarrow FG_{/=}$ tako da:

(a) Ako su $f_1: X \longrightarrow Y$ i $f_2: X \longrightarrow Y$ strelice u FG, tada je $Qf_1 = Qf_2$.

(b) Ako je $H: FG \longrightarrow \mathcal{K}$ bilo koji funktor za koji je $Hf_1 = Hf_2$,za sve $f_1, f_2: X \longrightarrow Y$, tada postoji jedinstveni funktor $H^{\backprime}: FG_{/=} \longrightarrow \mathcal{K}$ takav da je $H^{\backprime}Q = H$, odnosno komutira dijagram

(3:1:9)
$$\begin{tikzcd} FG \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "H"'] & FG_{/=} \arrow[d, "H^{\backprime}"] \\ & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

(c) Kategorija $FG_{/=}$ i relaciona struktura I (nad grafom G) su izomorfne

Dokaz: Funktor Q je bijekcija na objektima, a sve strelice koje povezuju dva objekta X i Y u jedinstvenu strelicu $X \longrightarrow Y$ kategorije $FG_{/=}$. Otuda je $\mathrm{card}(FG_{/=}(X,Y)) \leqslant 1$. Ostali zahtevi stava ,dokazuju se neposre

3:1:10. <u>Morfizam</u> relacionih struktura $M: I_1 \longrightarrow I_2$ je kovarijantni funktor koji preslikava kategoriju I_1 u kategoriju I_2 i čuva proizvode. Kompozicija relacionih morfizama je definisana kao uobičajena kompozicija kovarijantnih funktora.

3:1:11. <u>Stav</u>. Relacione strukture i morfizmi relacionih struktura čine kategoriju, .

3:1:12. <u>Stav</u>. Relaciona struktura I može se u potpunosti okarakterisati sledećim skupom aksioma (Armstrong /1974/):
Neka je $(W, \leqslant, \sup)$ sup-kompletna polumreža i $\underline{W}$ kolekcija strelica izmedu elemenata skupa W za koju važe aksiome:

(A1) Ako je $Y \leqslant X$ onda postoji u $\underline{W}$ strelica $X \longrightarrow Y$,

(A2) Ako je $X \longrightarrow Y$ i $Z \leqslant V$ onda je $XV \longrightarrow YZ$,

(A3) Ako je $X \longrightarrow Y$ i $YV \longrightarrow Z$ onda je $XV \longrightarrow Z$,

pri čemu se strelice mogu povezivati (komponovati) i za svaka dva elementa iz W postoji najviše jedna strelica iz jednog elementa u drugi.
<u>Napomena</u>. Sistem aksioma Armstrong-a definisan je na partitivnom skupu nekog skupa S,tj. $(PS, \subseteq, \cup)$.

Dokaz: Dovoljno je dokazati da je familija strelica $\underline{W}$, skup morfizama kategorije I. Aksiome (A1),(A2), i (A3) jednostavno opisuju osobinu kategorije I iskazanu dijagramom (3:1:5). Zaista, za date morfizme f_1: X ⟶ A i f_2: X ⟶ B primenom aksiome (A2) na strelice f_1 i id_B: B ⟶ B dobija se (f_1, id_B):XB ⟶ AB, a primenom aksiome (A3) na strelice (f_1, id_B) i f_2 dobija se traženi jedinstveni morfizam g: X ⟶ AB. Ovaj zaključak je dovoljan za dalju konstrukciju kategorije I , kao što to pokazuje stav 3:1:8.

Obrnuto tačnost aksiome (A1) sledi iz egzistencije strelic X ⟶ Y u trivijalnoj relacionoj strukturi T. Tražena strelica u aksiomi (A2) XV ⟶ YZ je jedinstveni morfizam (f,g): XV ⟶ YZ dobijen univerzalnom konstrukcijom proizvoda, prikazanom dijagramom

(3:1:13)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & XV \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_V"] \arrow[d, dashed, "(f,g)"] & V \arrow[d, "g"] \\ Y & YZ \arrow[l, "p_Y"] \arrow[r, "p_Z"'] & Z \end{tikzcd}$$

Za date morfizme f: X ⟶ Y i g: YV ⟶ Z, morfizam h: XV ⟶ Z (A3) je kompozicija morfizama, h = g (f, id_V) data odgovarajućim komutativnim dijagramom.

3:1:14. Stav. Morfizmi kategorije I imaju sledeće osobine:
(a) X ⟶ Y ako i samo ako X ⟶ XY i XY ⟶ X, i
(b) X ⟶ Y, X ⟶ Z ako i samo ako X ⟶ YZ.

Dokaz: (a) U svakoj su polu-mreži ekvivalentni uslovi X ≤ Y i XY=X, te posmatranje odgovarajućih strelica u grafu daje traženi zaključak, pod uslovom da je X ⟶ Y inducirano relacijom ≤ . Ukoliko nije, svejedno postoji supremum XY i XY ≥ X daje XY ⟶ X. Suprotni morfizam X ⟶ XY dobija se iz univerzalne konstrukcije proizvoda primenjene na par strelica X ⟶ Y i X ⟶ X.
(b) Iz univerzalnosti konstrukcije proizvoda primenjene na par X ⟶ Y i X ⟶ Z, sledi egzistencija jedinstvenog morfizma X ⟶ YZ.

3:1:15. Definicija. Neka je X proizvoljni objekt relacione strukture I i neka je familija z(X) I-objekata definisana sa
(i) Xje element kolekcije z(X),
(ii) Ako je Y element familije z(X) i postoji I-morfizam $Y \longrightarrow V$, tada je i V element familije z(X), i
(iii) Svi elementi familije z(X) dobijeni su sa (1) i (2).

Predpostavljajući da kategorija I ima proizvode može se posmatrati proizvod svih objekata familije z(X), za svaki I-objekat X. Imajući to u vidu, ima smisla definisati funktor $Z: I \longrightarrow I$ sa $Z(X) = \bigcup z(X)$ za svaki I-objekat X, a na morfizmima za $f: X \longrightarrow Y$ neka je $Z(f): Z(X) \longrightarrow Z(Y)$, inducirano projekcijom $z(X) \longrightarrow z(Y)$, jer svaki objekat familije z(Y) pripada i familiji z(X), s obzirom na konstrukciju familije z(X).

Za ovako definisani endofunktor, postoje i sledeće dve prirodne transformacije: $\varepsilon : Z \xrightarrow{\cdot} 1$

$\delta : Z \xrightarrow{\cdot} Z^2$

definisane sa $\varepsilon_X: Z(X) \longrightarrow X$ i $\delta_X: Z(X) \longrightarrow Z(Z(X)) = Z(X)$.

3:1:16. Stav. (Z, ε, δ) je ko-monada u kategoriji I. Odgovarajuće Z ko-algebre su oni objekti za koje je $Z(X) \cong X$.

Dokaz. Z je endofunktor, $Z: I \longrightarrow I$. Jednostavno je proveriti da za definisane prirodne transformacije ε i δ komutiraju dijagrami

$$(3:1:17)\qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & Z^2 \arrow[d, "Z\delta"] \\ Z^2 \arrow[r, "\delta Z"'] & Z^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "="'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "="] & \\ 1Z & Z^2 \arrow[l, "\varepsilon Z"] \arrow[r, "Z\varepsilon"'] & Z1 \end{tikzcd}$$

od kojih prvi dokazuje asocijativnost ko-množenja, a druga dva levo i desno pravilo ko-jedinice. Z-koalgebra je, na osnovu definicije (1:4:12) neki I-objekt sa morfizmom $X \longrightarrow Z(X)$. S obzirom da postoji uvek morfizam $Z(X) \longrightarrow X$, i da su I-morfizmi jedinstveni, Z-koalgebre su tačno oni objekti za koje je $Z(X) \cong X$.

3:2. Relacije date strukture I

Svaka relaciona struktura I određuje na apstraktan način relacije, koje se mogu definisati polazeći od kategorije I, dodeljujući objektima (čvorovima) kategorije I pogodne domene i pogodne podobjekte proizvoda domena, imajući u vidu postojeće strelice između čvorova.

3:2:1. Stav. Neka je $\mathcal{K}$ kategorija koja poseduje sledeće parove adjungovanih funktora:

$$(\Delta, \Pi_{\mathcal{K}}): \mathcal{K} \longrightarrow 1 \quad \text{i} \quad (\Delta, P): \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^{\rightarrow \cdot \leftarrow}$$

i neka je $D: I \longrightarrow \mathcal{K}$ kovarijantni funktor koji čuva proizvode (domen-funktor). Funktor-kategorija $\mathcal{K}^I$ ima podkategoriju $(\mathcal{K}^I \downarrow D)$ čiji su objekti prirodne transformacije $d^R: R \xrightarrow{\cdot} D$, $R: I \longrightarrow \mathcal{K}$ odnosno oni funktori R za koje postoji prirodna transformacija $R \xrightarrow{\cdot} D$. Morfizmi su prirodne transformacije $t: R \xrightarrow{\cdot} S$ za koje komutira dijagram

(3:2:2)
$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "d^R"] & \\ S \arrow[r, "d^S"'] & D \end{tikzcd}$$

Dokaz: Kategorija oblika $(P \downarrow Q)$ gde su P i Q funktori zajedničkog kodomena definisana je u prvom poglavlju (S.MacLane /1971/, str.51.). Bira funktore P i Q na sledeći način

$$\mathcal{K}^I \xrightarrow{P=1} \mathcal{K}^I \xleftarrow{Q=D} 1,$$

(gde je funktor $1 = id_{\mathcal{K}^I}$, a kategorija 1 kategorija sa jednim objekt i identičnim morfizmom na tom objektu), $(P \downarrow Q)$ postaje kategorija $(1 \downarrow I$ odnosno $(\mathcal{K}^I \downarrow D)$ je dobro definisana podkategorija kategorije $\mathcal{K}^I$.

Napomena. Adjungovani parovi (3:2:1) daju novi adjungovani par $(\Delta, \Pi): \mathcal{K} \rightleftarrows \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ kojim se dokazuje da kategorija $\mathcal{K}$ ima konačne proizv

Kako izgleda D(I)? Može se zamisliti da funktor D samo dodeljuju domene pojedinim čvorovima relacione strukture I. S obzirom D čuva proizvode, strelice kategorije T postaju projekcije i značajno uočiti postojanje tri morfizma q, r, s data komutativnim dijagramima (3:2:4).

3:2:4. (i) Ako je X $\longrightarrow$ Y strelica kategorije T, komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
DX \times DY \arrow[d, "p"'] & = & DX \arrow[dll, "q"] \\
DY & &
\end{tikzcd}$$

(ii) Ako su X $\longrightarrow$ Y i X $\longrightarrow$ Z strelice kategorije T, tada je

$$\begin{tikzcd}
DX \arrow[r] & DY \\
DX \times DY \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed, "r"] & DY \times DZ \arrow[u] \arrow[d] \\
DY \arrow[r] & DZ
\end{tikzcd}$$

(iii) Ako su X $\longrightarrow$ Y i YV $\longrightarrow$ Z strelice kategorije I. tada je

$$\begin{tikzcd}
DY & & \\
DX \times DV \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed] & DY \times DV \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl] \arrow[r] & DZ \\
DV & &
\end{tikzcd}$$

što je direktna posledica stava 3:1:12.

3:2:5. <u>Proširenja</u> su one prirodne transformacije e: R $\overset{\cdot}{\longrightarrow}$ D kategorije $(\mathcal{K}^I \downarrow D)$ čije su sve komponente e_X: RX $\longrightarrow$ DX, X je objekt kategorije I. monomorfizmi.

3:2:6. <u>Lema</u>. Komponente proširenja su monopodobjekti odgovarajućih slika pod funktorom D.

Dokaz: S obzirom da domen-funktor D: I $\longrightarrow \mathcal{K}$ čuva proizvode,

$$D(\sup_i X_i) = DX_1 \times DX_2 \times DX_3 \times \dots$$

i imajući u vidu da je e: R $\overset{\cdot}{\longrightarrow}$ D prirodna transformacija, komutiraju, za svako i, dijagrami (3:2:7) gde su $e_{\sup X_i}$ i e_{X_i} monomorfizmi za svak

$$\begin{tikzcd}
\sup_i X_i \arrow[d, "p"] & R(\sup_i X_i) \arrow[r, "e_{\sup_i X_i}"] \arrow[d, "Rp"] & D(\sup_i X_i) \arrow[d, "Dp"] \\
X_i & RX_i \arrow[r, "e_{X_i}"] & DX_i
\end{tikzcd} \tag{3:2:7}$$

Stavljajući $A=\sup\{X_i\}$, monomorfizam $m = e_{\sup_i X_i}$, definiše monopodobjekt $m\colon RA \longrightarrow DX_1 \times DX_2 \times \ldots$. I više od toga, za svaku strelicu $X \longrightarrow Y$, važi $(Df)e_X = e_Y(Rf)$. S obzirom da su $XY \longrightarrow X$ i $XY \longrightarrow Y$ strelice trivijalne strukture T, njihove slike pod funktorom D su projekcije jer je

$$DX \longleftarrow DXY \cong DX \times DY \longrightarrow DY$$

a slike pod funktorom R restrikcije tih projekcija, jer su e_X, e_Y, i e_{XY} monomorfizmi.

3:2:8. Funktor $R\colon I \longrightarrow \mathcal{K}$ je relacija sa I-strukturom ako postoji u $(\mathcal{K}^I \downarrow D)$ proširenje $e\colon R \overset{\cdot}{\longrightarrow} D$, D je domen-funktor.

Ovako definisane relacije čine kategoriju $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D)$ relacija sa strukturom I i domenom D, podkategoriju kategorije $(\mathcal{K}^I \downarrow D)$.

3:2:9. I-morfizam $f\colon X \longrightarrow Y$ uložen je u relaciju R ako i samo ako komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & RX \arrow[d, "Rf"'] & \\
Y & RY & R\mathbb{T} \arrow[ul, "Rp_X"'] \arrow[l, "Rp_Y"]
\end{tikzcd} \tag{3:2:10}$$

gde su $p_X\colon \mathbb{T} \longrightarrow X$ i $p_Y\colon \mathbb{T} \longrightarrow Y$, T-morfizmi. Morfizam f je uložen u RA, A je objekt kategorije I, ako i samo ako postoje T-morfizmi $A \longrightarrow X$ i $A \longrightarrow Y$ takvi da komutira dijagram (3:2:10) ako se u njemu $\mathbb{T}$ zameni sa A.

3:2:11. Stav. Relacije sa strukturom I i domenom D i prirodne transformacije $t\colon R \xrightarrow{\cdot} S$, takve da je $te^R = e^S$, za proširenja $e^R\colon R \xrightarrow{\cdot} D$ i $e^S\colon S \xrightarrow{\cdot} D$, čine podkategoriju $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_{\mathcal{K}}(I,D)$ kategorije $(\mathcal{K}^{I} \downarrow D)$.

U kategoriji $\mathfrak{R}$ važe sledeće osobine:

(a) Neka je $e\colon R \xrightarrow{\cdot} D$ proširenje. Svaki I-morfizam f uložen je u relaciju R.

(b) Proširenja T-morfizama su restrikcije projekcija.

(c) Domen-funktor čuva krajnji objekt, kadgod krajni objekt u I postoji (odgovarajuća komponenta proširenja je jedinstvena).

Dokaz. Direktnim kategorijskim argumentima proverava se da je dobro definisana podkategorija. Kompozicija morfizama je kompozicija prirodnih transformacija, a komutativnost $te^R = e^S$ dokazuje da je t dobro izabrani morfizam. I identična prirodna transformacija $1\colon R \xrightarrow{\cdot} R$ zadovoljava uslov $1e^R = e^R$.

(a) S obzirom da postoje T - morfizmi $\mathbb{T} \longrightarrow X$ i $\mathbb{T} \longrightarrow Y$ komutiraju dijagrami

(3:2:12)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \\ & \mathbb{T} \arrow[ul] \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} RX \arrow[d, "Rf"] & \\ & R\mathbb{T} \arrow[ul] \arrow[dl] \\ RY & \end{tikzcd}$$

gde je drugi dijagram slika prvog funktorom R. (i više, slika proširenje e^R.

(b) Ako je $A = XY$, s obzirom da je $DA = DX \times DY$ odgovarajuće projekcije su $Dp_X\colon DA \longrightarrow DX$ i $Dp_Y\colon DA \longrightarrow DY$, a preslikane funktorom R, $Rp_X\colon RA \longrightarrow RX$ i $Rp_Y\colon RA \longrightarrow RY$. Proširenje $e\colon R \xrightarrow{\cdot} D$ transformiše projekcije na sledeći način

$$(Dp_X)e_A = e_X(Rp_X) \quad \text{i} \quad (Dp_Y)e_A = e_Y(Rp_Y)$$

gde su e_A, e_X, e_Y monomorfizmi te su, zaista Rp_X i Rp_Y restrikcije, redom projekcija Dp_X i Dp_Y.

(c) S obzirom da domen-funktor čuva proizvode i imajući u vidu da je proizvod (limes) prazne familije u I krajnji objekt $\mathbb{1}$ biće $D(\mathbb{1})$ krajnji objekt u $\mathcal{K}$ .Otuda, postoji jedinstveni morfizam m: $M \longrightarrow D(\mathbb{L})$ za svaki $\mathcal{K}$-objekt M, i prema tome jedinstvena $\mathbb{L}$ -komponenta e^R: $R(\mathbb{L}) \longrightarrow$ svakog proširenja e^R.

3:2:13. <u>Lema</u>. Morfizam $(e_X,\ e_Y)$: $RX \times RY \longrightarrow DX \times DY$ je monomorfizam.

Dokaz. Neka su m_1, m_2: $M \longrightarrow RX \times RY$ dva različita morfizma i neka je $(e_X, e_Y)m_1 = (e_X, e_Y)m_2$. Za projekcije q_X: $DX \times DY \longrightarrow DX$ i q_Y: $DX \times DY \longrightarrow DY$ biće $q_X(e_X, e_Y)m_1 = q_X(e_X, e_Y)m_2$ i slično za Y $q_Y(e_X, e_Y)m_1 = q_Y(e_X, e_Y)m_2$, tako da komutiraju pravougaonici u dijagram

(3:2:14)
$$\begin{tikzcd}
& RX \arrow[rr, "e_X"] & & DX \\
M \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, shift left, "m_1"] \arrow[r, shift right, "m_2"'] & RX \times RY \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \arrow[rr, "(e_X, e_Y)"'] & & DX \times DY \arrow[u, "q_X"'] \arrow[d, "q_Y"] \\
& RY \arrow[rr] & & DY
\end{tikzcd}$$

Iz komutativnosti trouglova u gornjem dijagramu sledi $e_X p_X m_1 = e_X p_X m_2$ i $e_Y p_Y m_2$, a s obzirom da su e_X i e_Y monomorfizmi biće

$$p_X m_1 = p_X m_2 : M \longrightarrow RX$$

$$p_Y m_1 = p_Y m_2 : M \longrightarrow RY.$$

Iz univerzalnosti proizvoda $RX \times RY$ sledi egzistencija jedinstvenog morfizma $m_1 = m_2$: $M \longrightarrow RX \times RY$, te je (e_X, e_Y) monomorfizam.

3:2:15. <u>Stav</u>. Postoji jedinstveni monomorfizam m: $R(XY) \longrightarrow RX \times RY$.

Dokaz. Konstrukcija morfizma m sledi iz egzistencije "projekcija" p_X: $R(XY) \longrightarrow RX$ i p_Y: $R(XY) \longrightarrow RY$. Iz osobina prirodne transformac e: $R \longrightarrow D$, sledi da je $e_X p_X = q_X e_{XY}$ i $e_Y p_Y = q_Y e_{XY}$ gde je e_{XY} XY-k ponenta transformacije e, e_{XY}: $R(XY) \longrightarrow D(XY) = DX \times DY$ te se mogu razmatrati (komutativni) dijagrami (3:2:16). Iz osobina proizvoda $(DX \times DY,\ e_X p_X,\ e_Y p_Y)$ sledi da je e_{XY} jedinstveni morfizam takav da komutiraju odgovarajući dijagrami. Ali, $(e_X, e_Y)m = e_{XY}$. Kako je e_{XY}

monomorfizam, mora biti i (e_X, e_Y) monomorfizam, odnosno m je monomorfizam. Zaista, za date morfizme $m_1, m_2 \colon M \longrightarrow R(XY)$ za koje važi $mm_1 = mm_2$, biće $(e_X, e_Y)mm_1 = (e_X, e_Y)mm_2$ što implicira $m_1 = m_2$ jer je $e_{XY}m_1 = e_{XY}m_2$ gde je e_{XY} monomorfizam.

(3:2:16)

$$\begin{tikzcd}
 & RX \arrow[r, "e_X"] & DX \\
R(XY) \arrow[ur, "p_X"] \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "p_Y"'] \arrow[rr, bend right, "e_{XY}"'] & RX \times RY \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "{(e_X, e_Y)}"] & DX \times DY \arrow[u, "q_X"'] \arrow[d, "q_Y"] \\
 & RY \arrow[r, "e_Y"'] & DY
\end{tikzcd}$$

3:2:17. <u>Lema</u>. Neka je $t \colon R \xrightarrow{\cdot} S$ morfizam u $\mathfrak{R}$. I-morfizam $f \colon X \longrightarrow Y$ uložen je u R i u S tako da je

$$S(f)t_X = t_Y R(f),$$
$$e^S_X t_X = e^R_X \ ; \ e^S_Y t_Y = e^R_Y \ .$$

Dokaz je direktna posledica komutativnosti dijagrama (3:2:18):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & \\
Y & \mathbb{T} \arrow[ul] \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & DX & & \\
RX \arrow[urr, "e^R_X"] \arrow[rrr, "t_X"] \arrow[dd, "Rf"'] & & & SX \arrow[ul, "e^S_X"'] \arrow[dd] & \\
 & R\mathbb{T} \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[rrr, "t_{\mathbb{T}}"] & & & S\mathbb{T} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
RY \arrow[rrr, "t_Y"'] \arrow[drr, "e^R_Y"'] & & & SY \arrow[dl, "e^S_Y"] & \\
 & & DY & &
\end{tikzcd}$$

gde je komutativni trougao (i) proširenjima e^R i e^S preslikan u odgovarajuće komutativne trouglove, čiji su odgovarajući vrhovi povezani komponentama prirodne transformacije t.

3:2:19. <u>Stav</u>. Za kategoriju $I = (FG_{/=})$ relacija $R\colon I \longrightarrow \mathcal{K}$ određena je na jedinstven način ako je poznat morfizam grafova

$$h\colon G \longrightarrow U\mathcal{K}.$$

Dokaz. Na osnovu adjungovanog para funktora $(F,G)\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{K}at$ morfizam $h\colon G \longrightarrow U\mathcal{K}$,proširuje se na jedinstveni funktor $H\colon FG \longrightarrow U\mathcal{K}$. Zatim na osnovu Stava 3:1:8. funktor H proširuje se do jedinstvenog funktora $R\colon FG_{/=} \longrightarrow \mathcal{K}$ tako da važi (3:1:9) odnosno $RQ = H$, što je i trebalo dokazati.

U sledećem stavu data je interpretacija sistema relacija povezanih datim uslovom.

3:2:20. <u>Stav</u>. Neka je $D\colon I \longrightarrow \mathcal{K}$ domen-funktor i neka je dat funktor $F\colon J \times I \longrightarrow \mathcal{K}$, gde je J proizvoljna mala kategorija. Ako za svaki J-objekt j postoji proširenje $e^j\colon F(j,-) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D$ tada funktor F određuje J-familiju relacija u kategoriji $\mathcal{K}$.

Dokaz. Funktor $F(j,-)$ preslikava relacionu strukturu I u kategoriju $\mathcal{K}$, a s obzirom da postoji proširenje $e^j\colon F(j,-) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D$, biće $F(j,-)$ objekt kategorije $\mathcal{R}$. Par adjungovanih funktora u kategoriji

$$((- \times I),(-)^I)\colon \mathcal{K}at \longrightarrow \mathcal{K}at$$

ima za svaku kategoriju $\mathcal{K}$ iz $\mathcal{K}at$ kojedinični dijagram (3:2:21) kojim je definisan novi funktor $F^{`}\colon J \longrightarrow \mathcal{K}^I$, a time i željena J-familija relacija.

(3:2:21)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}^I & & \mathcal{K}^I \times I \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{K} \\
J \arrow[u, dashed, "F^{`}"] & & J \times I \arrow[u, dashed, "F^{`} \times I"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

3:2:22. <u>Primer</u>. Neka je J kategorija generisana grafom

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \ldots \quad \omega$$

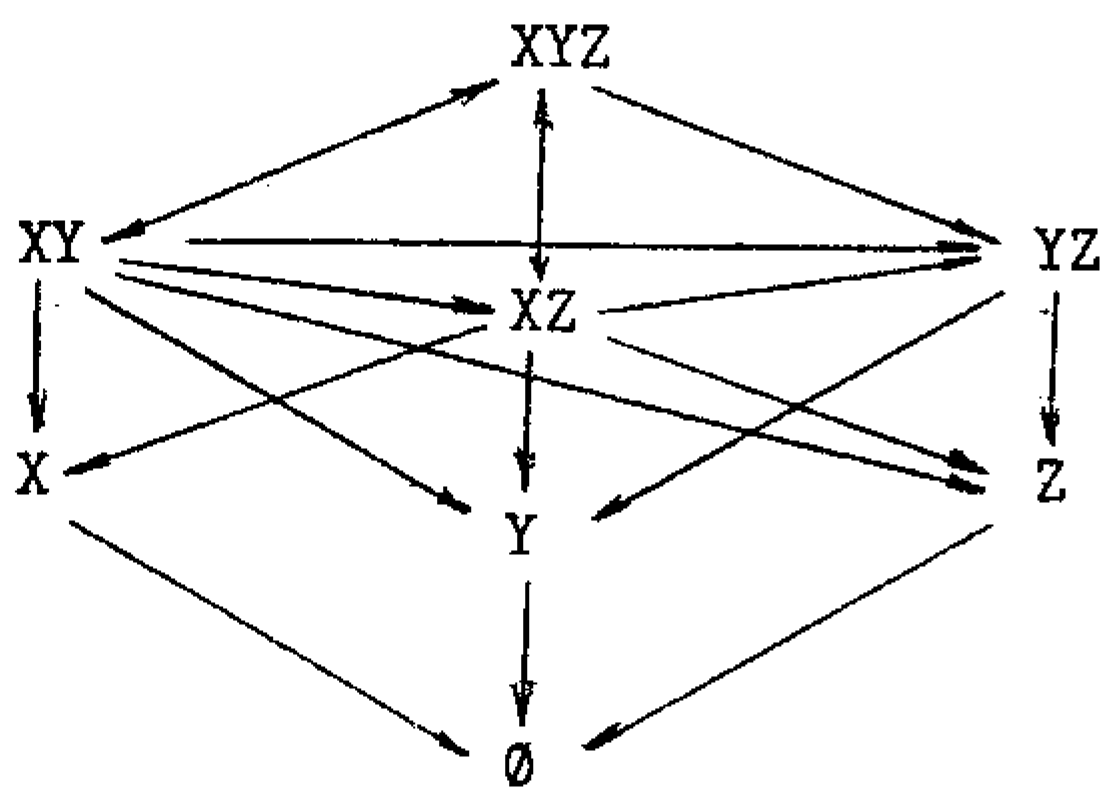
Tada funktor $F^{`}: J \longrightarrow \mathcal{K}^{I}$ određuje familiju funktora i prirodnih transformacija, predstavljenih u obliku niza

$$F^{`}(0) \xrightarrow{\cdot} F^{`}(1) \xrightarrow{\cdot} F^{`}(2) \xrightarrow{\cdot} \ldots \xrightarrow{\cdot} F^{`}(n) \xrightarrow{\cdot} F^{`}(n+1) \xrightarrow{\cdot} \ldots F^{`}(\omega)$$

a s obzirom da za svaki objekt n kategorije J postoji prirodna transformacija tj. proširenje $e^{n}: F^{`}(n) \longrightarrow D$, očigledno je to familija relacija.

3:2:23. <u>Primer relacione strukture</u>. Ako je trivijalna relaciona struktura definisana polazeći od uređajne relacije "inkluzija" na partitivnom skupu troelementnog skupa X, Y, Z ,a graf G, dodavanjem novih strelica $XY \longrightarrow Z$ i $Z \longrightarrow Y$, relaciona struktura može se prikazati u obliku sledećeg usmerenog grafa

(3:2:24)



3:3. Operacije u kategoriji $\mathfrak{R}$

3:3:1. Projekcije relacije R kategorije $\mathfrak{R}$,sa proširenjem e:$\mathcal{F} \xrightarrow{\cdot}$ D, definišu se kao slike odgovarajućih projekcija relacione strukture I pod proširenjem e.

3:3:2. Proizvod dve relacije ,određene proširenjima e^R: $R \xrightarrow{\cdot} D$ i e^S: $S \xrightarrow{\cdot} D$, u oznaci

$$e^R \times e^S : R \times S \xrightarrow{\cdot} D$$

definisan je odgovarajućim komponentama proširenja:

$(e^R \times e^S)(X) := (e^R_X, e^S_X): RX \times SX \longrightarrow DX.$

3:3:3. Za dati par I-strelica $Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} Z$ funkcionalno spajanje morfizama f i g , u oznaci $R(Y) *_X R(Z)$, je vlaknasti proizvod para $\mathfrak{R}$ -morfizama (Rf, Rg) u $\mathcal{K}$.

3:3:4. Za dve relacije R i S,određene proširenjima e^R: $R \xrightarrow{\cdot} D$ i e^S: $S \xrightarrow{\cdot} D$, funkcionalno spajanje relacija, u oznaci $R * S \longrightarrow D$, definisano je sa

$$(R * S)(X) := RX *_{DX} SX$$

odnosno, kao vlaknasti proizvod para morfizama (e^R_X, e^S_X) u kategoriji $\mathcal{K}$.

3:3:5. Kompozicija relacija R(XY) i R(XZ) u kategoriji skupova definisana je sa

$$R(YX) \circ R(XZ) = \{ (y,x,z) : (y,x) \in R(YX) \text{ i } (x,z) \in R(XZ) \} .$$

Jednostavnim kategorijskim argumentima može se proveriti da su sve uvedene operacije dobro definisane, i ako se zatvorenost operacija proširuje do $\mathcal{K}$.
Sledećim stavom pokazana je ekvivalentnost kompozicije i funkcionalnog spajanja para projekcija, u kategoriji skupova.

3:3:6. <u>Stav</u>. U kategoriji skupova $\mathcal{S}$, kompozicija relacija R(XY) i R(XZ) je funkcionalno spajanje (do na komutativnost) para projekcija

$$R(XY) \xrightarrow{p_X} R(X) \xleftarrow{q_X} R(XZ).$$

Dokaz. U dijagramu (3:3:7) vlaknasti proizvod para morfizama (p_X, q_X) označen je sa

$$R(XY) \xleftarrow[r_{XY}]{} R(XY)\circ_X R(XZ) \xrightarrow[r_{XZ}]{} R(XZ)$$

i predstavlja skup svih parova (r_1, r_2) takvih da $r_1 \in R(XY)$, $r_2 \in R(XZ)$ i $p_X r_1 = q_X r_2$.

(3:3:7)
$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\
& R(XY)\circ_X R(XZ) \arrow[r, "r_{XZ}"'] \arrow[d, "r_{XY}"] & R(XZ) \arrow[d, "q_X"] \\
& R(XY) \arrow[r, "p_X"'] & R(X)
\end{tikzcd}$$

Očigledno to je podskup kartezijanskog proizvoda R(XY) x R(XZ) koji ima željenu osobinu vlaknastog proizvoda. Zaista, za dati par funkcija $k\colon M \longrightarrow R(XY)$ i $h\colon M \longrightarrow R(XZ)$ za koji je $p_X k = q_X h$ funkcija $r\colon M \longrightarrow R(XY)\circ_X R(XZ)$ može se definisati sa $r(w) = (k(w), h(w))$, $w \in M$ i slêdeći dijagram (3:3:7) jednostavno se proverava tražena osobina univerzalnosti. S obzirom da su p_X i q_X projekcije $R(XY)\circ_X R(XZ)$ sastoji se od svih trojki (x,y,z) takvih da $(x,y) \in R(XY)$ i $(x,z) \in R(XZ)$ odnosno $(x,y,z) \in R(XY) \circ R(XZ)$.

3:3:8. <u>Stav</u>. Ako postoji I-morfizam $f\colon X \longrightarrow Y$ tada je

$$R(X) *_X R(Y) = R(Y).$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da morfizam $r\colon R(Y) \longrightarrow R(X) *_X R(Y)$, koji je definisan dijagramom vlaknastog proizvoda (3:3:9), izomorfizam.

(3:3:9)
$$\begin{tikzcd}
R(Y) \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, "1"] \arrow[ddr, "Rf"'] & & \\
& R(X) \times_X R(Y) \arrow[r] \arrow[d, "p_X"] & R(Y) \arrow[d, "Rf"] \\
& R(X) \arrow[r] & R(X)
\end{tikzcd}$$

Relacija $p_Y r = 1_{R(Y)}$ je očigledna a relacija $rp_Y = 1_{R(X) \times R(Y)}$ dokazuje se posebno, dokazujući prvo da je p_Y monomorfizam. Neka su $r_1, r_2 \colon N \rightrightarrows R(X) \times_X R(Y)$ takvi morfizmi da je $p_Y r_1 = p_Y r_2$. Tada je $R(f)p_Y r_1 = R(f)p_Y r_2$ te je, s obzirom da je $R(f)p_Y = p_X$, tačna relacija $p_X r_1 = p_X r_2$. Par morfizama

$$p_Y r_1 = p_Y r_2 \colon N \longrightarrow R(Y)$$
$$p_X r_1 = p_X r_2 \colon N \longrightarrow R(X)$$

daje dve strane komutativnog kvadrata (3:3:10) , te na osnovu definicije vlaknastog proizvoda postoji jedinstveni morfizam $N \longrightarrow R(X) \times_X R(Y)$, odnosno $r_1 = r_2$. Znači p_Y je monomorfizam.

(3:3:10)
$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d] & R(Y) \arrow[d] \\
R(X) \arrow[r] & R(X)
\end{tikzcd}$$

Ostaje da se pokaže da je $rp_Y = 1$. Neka je suprotno, $rp_Y \neq 1$. Kako je p_Y monomorfizam i $p_Y r = 1$, iz $p_Y r p_Y \neq p_Y$ sledi $p_Y \neq p_Y$ što je kontradikcija. Otuda $rp_Y = 1$, te je $r \colon R(Y) \longrightarrow R(X) \times_X R(Y)$ izomorfizam.

3:3:11 .<u>Posledice</u>.

(a) $R(X) \times_X R(X) = R(X)$

(b) $R(X) \times_{\top} R(\top) = R(\top)$

(c) $R(\perp) \times_{\perp} R(Y) = R(Y)$.

Strelice između objekata $R(YZ)$, $R(Y) \times_X R(Z)$ i $R(Y) \times R(Z)$ u kategoriji $\mathcal{K}$ opisane su sledećim stavom.

3:3:12. <u>Stav</u>. U kategoriji $\mathcal{K}$ postoje sledeći jedinstveni morfizmi:

$$g\colon R(YZ) \dashrightarrow R(Y) \times_X R(Z)$$

$$k\colon R(YZ) \dashrightarrow R(Y) \times R(Z)$$

$$h\colon R(Y) \times_X R(Z) \dashrightarrow R(Y) \times R(Z),$$

takvi da je $hg = k$, i svi su monomorfizmi.

Dokaz. Imajući u vidu univerzalnost proizvoda i vlaknastog proizvoda i njima određenih morfizama, mogu se formirati komutativni dijagrami (3:3:13) koji olakšavaju praćenje dokaza. Postojanje morfizama g, k i h sledi iz jedinstvenosti redom objekata $R(Y) \times R(Z)$, $R(Y) \times_X R(Z)$ i $R(Y) \times R(Z)$, a komutativnost trougla $hg = k$, dokazuje se jednostavnom proverom.

$$\begin{tikzcd}
R(YZ) \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drrr, "p_Z"] \arrow[dddr, "p_Y"'] \arrow[ddrr, dashed, "k"'] & & & \\
& R(Y) \times_X R(Z) \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[dd, "r"'] & & R(Z) \arrow[dd, "q_X"] \\
& & R(Y) \times R(Z) \arrow[ur, "r_2"'] \arrow[dl, "r_1"] & \\
& R(Y) \arrow[rr, "p_X"'] & & R(X)
\end{tikzcd}$$

(3:3:13)

Komutativni dijagram vlaknastog proizvoda $R(Y) *_X R(Z)$ daje uslov

(i) $q_X s = p_X r$,

te iz uslova $p_X p_Y = q_X p_Z$: $R(YZ) \longrightarrow R(X)$, na osnovu osobine univerzalnosti, sledi postojanje jedinstvenog morfizma $g: R(YZ) \longrightarrow R(Y) *_X$ za koji važe uslovi

(ii) $rg = p_Y$, $sg = p_Z$.

Egzistencija i jedinstvenost morfizma h: $R(Y) *_X R(Z) \longrightarrow R(Y) \times R(Z)$ sledi iz konstrukcije proizvoda $(R(Y) \times R(Z), r_1, r_2)$ pri čemu su ispunjeni uslovi

(iii) $p_X r_1 = q_X r_2 h$, $r_1 h = r$, $r_2 h = s$.

Slično, koristeći još jednom univerzalnost proizvoda $R(Y) \times R(Z)$, postoji jedinstveni morfizam k: $R(YZ) \longrightarrow R(Y) \times R(Z)$, tako da je

(iv) $r_1 k = p_Y$, $r_2 k = p_Z$.

Iz uslova (ii) i (iii), $r_2 hg = p_Z = r_2 k$ i imajući u vidu da su morfizmi h, k i g jedinstveni, $hg = k$, što je i trebalo dokazati.

Ostaje još da se pokaže da su h, k i g monomorfizmi. U Stavu 3:2:16. pokazano je da je k monomorfizam. S obzirom da je $hg = k$, g je monomorfizam. Direktnom primenom definicije monomorfizma pokazuje se da je i h monomorfizam. Neka su m_1, m_2: $M \rightrightarrows R(Y) *_X R(Z)$ dva različita morfizma, ali takva da je $hm_1 = hm_2$. Iz ovog uslova sledi

(v) $p_X rm_1 = p_X rm_2$, $q_X sm_1 = q_X sm_2$,

jer je $p_X rm_1 = p_X r_1 hm_1 = p_X r_1 hm_2 = p_X rm_2$, i slično $q_X sm_1 = q_X sm_2$.
Iz (i) i (v) i jedinstvenosti konstrukcije vlaknastog proizvoda $R(Y) *_X R(Z)$ sledi $m_1 = m_2$. Dakle, h je monomorfizam.

3:3:14. <u>Stav</u>. Neka su u kategoriji I date strelice $X \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} Y$, $a: A \longrightarrow B$. Tada lanac strelica u I

$$\mathbb{T} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \perp\!\!\!\perp$$

inducira, za svaku relaciju R, lanac morfizama $(*)$

$$R(\mathbb{T}) \xrightarrow{R(t)} R(XY) \xrightarrow{g_A} R(X) *_A R(Y) \xrightarrow{m} R(X) *_B R(Y) \xrightarrow{h_B} R(X)x$$

za koje važi

$$mg_A = g_B,\ g_B h_B = k = g_A h_A$$

$$g_A R(t) = t_A,\ g_B R(t) = t_B.$$

Dokaz. Morfizmi g_A, g_B, h_A, h_B, k uvedeni su u Stavu 3:3:12. gde je pokazano da su monomorfizmi i da je $g_A h_A = g_B h_B = k$. Morfizam m definiše se iz uslova univerzalnosti posmatranih vlaknastih proizvoda, što je jednostavno uočiti u sledećem dijagramu

(3:3:15)

$$\begin{tikzcd}
& & R(X) \arrow[dr, "R(u)"] \arrow[drr, "R(au)"] & & \\
R(X) *_A R(Y) \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[r, dashed, "m"] & R(X) *_B R(Y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & R(A) \arrow[r, "R(a)"] & R(B) \\
& & R(Y) \arrow[ur, "R(v)"] \arrow[urr, "R(av)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Iz jedinstvenosti morfizama m, g_A, g_B i njihove konstrukcije sledi $mg_A = g_B$. $\mathbb{T}$ je početni objekt u I, te postoji morfizam $t: \mathbb{T} \longrightarrow XY$, a i morfizmi $x: \mathbb{T} \longrightarrow X$, $y: \mathbb{T} \longrightarrow Y$ tako da je

$R(u)R(x) = R(v)R(y)$,

te postoje jedinstveni morfizmi $t_A: R(\mathbb{T}) \dashrightarrow R(X) *_A R(Y)$, $t_B: R(\mathbb{T}) \dashrightarrow R(X) *_B R(Y)$, pri čemu je

$g_A R(t) = t_A$, $g_B R(t) = t_B$.

Koristeći argument sličan onome u dokazu Stava 3:3:8. da se pokaže da je h monomorfizam, može se pokazati da su m, t_A, t_B monomorfizmi.

<u>Napomena.</u> 3:3:14:a. Lanac strelica očigledno se nalazi u kategoriji $\mathcal{K}$, i nije u opštem slučaju direktna slika nekog niza morfizama iz relacione strukture. Ipak, on inducira uređajnu relaciju definisanu između specifičnih objekata kategorije $\mathcal{K}$ (rezultata operacije spajanja) i polaznih objekata iz slike relacione strukture , R(I) nad kojima se vrše posmatrane operacije.

3:3:16. <u>Stav</u>. Neka su X i Y objekti kategorije I, a R relacija u .
Tada je

$$R(X) *_{\mathbb{1}} R(Y) = R(X) \times R(Y).$$

Dokaz. Treba dokazati da je dijagramom (3:3:17) dat vlaknasti proizvod para morfizama k: $R(X) \longrightarrow R(\mathbb{1})$ i h: $R(Y) \longrightarrow R(\mathbb{1})$.

$$(3:3:17) \qquad \begin{tikzcd} R(X) \times R(Y) \arrow[r] \arrow[d] & R(X) \arrow[d, "k"] \\ R(Y) \arrow[r, "h"] & R(\mathbb{1}) \end{tikzcd}$$

Ali, R je funktor koji čuva krajnji objekt, $R(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{X}}$ te se dokaz svodi na kategorijski poznatu činjenicu da je vlaknasti proizvod nad parom strelica čiji je zajednički kodomen krajnji objekt kategorije, proizvod domena tih strelica.

Ako je posmatrana kategorija, kategorija skupova, važi

$$R(X) \times_{\emptyset} R(Y) = R(X) \times R(Y).$$

3:3:18. <u>Stav</u>. Za svaku relaciju R kategorije $\mathfrak{R}$,

$R(YZ) = R(Y) *_X R(Z)$ ako i samo ako postoji u relacionoj strukturi I bar jedna od strelica $X \longrightarrow Y$, $X \longrightarrow Z$.

Dokaz. Neka postoji u kategoriji (ne smanjujući opštost) morfizam $X \longrightarrow Y$. Vlaknasti proizvod $R(Y) *_X R(Z)$ definisan je na slici funktorom R, para I-morfizama $Y \longrightarrow X \longleftarrow Z$ te važi u I izomorfizam $X \cong Y$. Otuda, na osnovu Stava 3:3:6. za svaki $\mathfrak{R}$-objekt R biće $R(Y) *_X R(Z) \cong R(X) *_X R(Y) \cong R(Y)$. Takođe, postoje u I strelice $Y \longrightarrow YZ$ (3:1:14) i $YZ \longrightarrow Y$ (projekcija) koje daju izomorfizam $Y = YZ$ odnosno, za svaku relaciju R, $R(Y) \cong R(YZ)$. Otuda je za svaku relaciju R, pod uslovom da postoji jedan od morfizama $X \longrightarrow Y$ tj. $X \longrightarrow Z$, $R(Y) *_X R(Z) \cong R(YZ)$. Obrnuto, neka graf G ima samo tri čvora, nema strelica i neka je $R(XYZ) = (x,y,z): x^2+y^2=1, z=0$. Tada je $R(XY) *_X R(YZ) \neq R(XYZ)$.

3:3:19. Stav. Operacija funkcionalnog spajanja (pod uslovom da je definisana) ima sledeće osobine:

(a) $R(X) *_X R(X) = R(X)$ (idempotentnost)

(b) $R(X) *_A R(Y) = R(Y) *_A R(X)$ (komutativnost)

(c) $(R(X) *_A R(Y)) *_A R(Z) = R(X) *_A (R(Y) *_A R(Z))$

("višestruka" asocijativnost)

(d) $(R(X) *_A R(Y)) *_B R(Z) = R(X) *_A (R(Y) *_B R(Z))$

("sukcesivna" asocijativnost)

(e) $(R(X) *_A R(Y)) *_Y R(Z) = R(X) *_A R(Z)$ (apsorpcija)

(f) $(R(X) \times R(Y)) *_A R(Z) = (R(X) *_A R(Z)) \times R(Y)$

(proizvod i spajanje)

Dokaz. Osobina (a) je posledica Stava 3:2:9., a osobina (b) je posledica simetrije dijagrama vlaknastog proizvoda.

(c) Neka su date I-strelice $X \longrightarrow A$, $X \longrightarrow B$, $X \longrightarrow C$. Vlaknasti proizvod morfizama $RX \longrightarrow RA$, $RY \longrightarrow RA$, $RZ \longrightarrow RA$ može biti konstruisan kao iterirani objekt $(R(X) *_A R(Y)) *_A R(Z)$, odnosno $R(X) *_A (R(Y) *_A R(Z))$ kao što je to prikazano dijagramom

$$
\begin{tikzcd}
R(X) *_A (R(Y) *_A R(Z)) \arrow[rrr] \arrow[dddr] \arrow[dr, dashed, shift left, "k"] & & & R(Y) *_A R(Z) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& (R(X) \times_A R(Y)) \times_A R(Z) \arrow[rrr] \arrow[d] \arrow[ul, dashed, shift left, "h"] & & & R(Z) \arrow[dd] \\
& R(X) \times_A R(Y) \arrow[rr] \arrow[d] & & R(Y) & \\
& R(X) \arrow[rrr] & & & R(A)
\end{tikzcd}
\tag{3:3:20}
$$

Višestrukom primenom činjenica o univerzalnosti konstrukcije vlaknastih proizvoda, što je sve ilustrovano dijagramom (3:3:20), pokazuje se da postoje jedinstveni morfizmi

$$R(X) \times_A (R(Y) \times_A R(Z)) \underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}} (R(X) \times_A R(Y)) \times_A R(Z)$$

takvi da je $hk = 1$ i $kh = 1$, gde su sa 1 označeni identični morfizmi na odgovarajućim objektima.

(d) Dijagram (3:3:21) prikazuje konstukciju morfizama s i r za koje treba pokazati da su kompozicije rs i sr identični morfizmi na odgovarajućim objektima:

$$\begin{tikzcd}
 & (R(X) \times_A R(Y)) \times_B R(Z) \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[d, dashed, "p"] \arrow[ddrr, "p_2"] \arrow[rrrr, dashed, shift right, "s"'] & & & & R(X) \times_A (R(Y) \times_B R(Z)) \arrow[llll, dashed, shift right, "r"'] \arrow[ddll, "q_2"'] \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[ddr, "q_1"] & \\
 & R(X) \times_A R(Y) \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[drr, "s_A"] & & & & R(Y) \times_B R(Z) \arrow[dll, "r_B"'] \arrow[dr, "s_B"] & \\
R(X) \arrow[dr, "f_A"'] & & & R(Y) \arrow[dl, "g_A"] \arrow[dr, "f_B"] & & & R(Z) \arrow[dll, "g_B"] \\
 & & R(A) & & R(B) & &
\end{tikzcd}$$

Gornji dijagrami sadrže u sebi sledeća funkcionalna spajanja:

(i) $(R(X) \times_A R(Y), r_A, s_A)$ za par morfizama (f_A, g_A), $f_A r_A = g_A s_A$;

(ii) $(R(Y) \times_B R(Z), r_B, s_B)$ za par (f_B, g_B), $f_B r_B = g_B s_B$;

(iii) $((R(X) \times_A R(Y)) \times_B R(Z), p_1, p_2)$ gde je $f_A p_1 = g_A r_B p_2$;

(iv) $(R(X) \times_A (R(Y) \times_B R(Z)), g_1, g_2)$ gde je $f_B s_A q_2 = g_B q_1$.

Kombinovanjem ovih vlaknastih proizvoda dobijaju se traženi morfizmi i neophodni uslovi, kao što sledi u dokazu.

Iz uslova spajanja (iii) i (iv) sledi egzistencija jedinstvenih morfizama

$$p\colon (R(X) *_A R(Y)) *_B R(Z) \longrightarrow R(X) *_A R(Y) \text{ i}$$

$$q\colon R(X) *_A (R(Y) *_B R(Z)) \longrightarrow R(Y) *_B R(Z).$$

Otuda, važe sledeće komutativnosti

(v) $r_A p = p_1$, $s_A p = r_B p_2$, i

(vi) $s_A q_2 = r_B q$, $s_B q = q_1$.

Za par morfizama $(r_A q_2, q)$ iz uslova (i) i (vi) sledi $f_A r_A q_2 = g_A r_B q$, a taj uslov implicira egzistenciju jedinstvenog traženog morfizma $r\colon R(X) *_A (R(Y) *_B R(Z)) \dashrightarrow (R(X) *_A R(Y)) *_B R(Z)$, sa osobinama

(vii) $p_1 r = r_A q_2$, $p_2 r = q$.

Analogno iz uslova (ii) i (v) sledi egzistencija jedinstvenog morfizma $s\colon (R(X) *_A R(Y)) *_B R(Z) \dashrightarrow R(X) *_A (R(Y) *_B R(Z))$ uz uslove

(viii) $q_2 s = p_1$, $s_B p_2 = q_1 s$.

Sada, iz uslova (vi), (vii) i (viii) $s_B p_2 = q_1 s = s_B q s = s_B p_2 r s$, a iz (v), (vii) i (viii) $r_A q_2 = p_1 r = r_A p r = r_A q_2 s r$, odnosno biće $s_B p_2 r s = s_B p_2$ i $r_A q_2 s r = r_A q_2$. S obzirom da su morfizmi r i s jedinstveni sledi $rs = 1$ i $sr = 1$, što je i trebalo dokazati.

Poslednji stav sugeriše generalizaciju operacije funkcionalnog spajanja na sukcesivno funkcionalno spajanje (odnosno, sukcesivni vlaknasti proizvod) i kao njegov specijalni slučaj, višestruko spajanje. Osobina (c) tog stava definiše višestruko spajanje kao limes dijagrama oblika

(3:3:22)
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr] & X_2 \arrow[d] & \cdots \\ & A & \end{tikzcd}$$

a osobina (d) definiše sukcesivno spajanje kao limes dijagrama oblika (3:3:23)

(3:3:23)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X_1 \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots & X_n \arrow[dr] & & X_{n+1} \arrow[dl] \\
& A_{12} & & A_{13} \cdots & & A_{nn+1} &
\end{tikzcd}$$

Preciznije,

3:3:25. Za datu kolekciju I-strelica oblika (3:3:23) <u>sukcesivno funkcionalno spajanje</u>, u oznaci

$$\left(\underset{A_{jj+1}}{\circledast} R(X_j) : j=1,2,\ldots \ ; \ r_i : \underset{A_{jj+1}}{\circledast} R(X_j) \longrightarrow R(X_i),\ i=1,2\ldots \right)$$

je objekt kategorije $\mathcal{K}$ zajedno sa familijom morfizama $\{r_i\}_{i=1,2,\ldots}$ takav da: Prvo, komutiraju dijagrami (3:3:26)(i) za svaki indeks $i=1,2,\ldots$ i Drugo, za datu kolekciju morfizama $m_i : M \longrightarrow R(X_i)$, $i=1,2,\ldots$ takvu da komutiraju dijagrami (3:3:26)(ii), postoji jedinstveni morfizam $t : M \longrightarrow \circledast R(X_j)$ takav da je, za svako $i=1,2,\ldots$; $r_i t = m_i$, kao što je prikazano trouglom (iii).

$$\begin{tikzcd}
R(X_j) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & R(X_{i+1}) \arrow[d] \\
R(X_i) \arrow[r] & R(A_{ii+1})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m_{i+1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(ii)"] & R(X_{i+1}) \arrow[d] \\
R(X_i) \arrow[r] & R(A_{ii+1})
\end{tikzcd}$$

(3:3:26)
$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, dashed, "t"] \arrow[dr, "m_i"'] & {\scriptstyle (iii)} & \circledast R(X_j) \arrow[dl, "r_i"] \\
& R(X_i) &
\end{tikzcd}$$

3:3:27. Za dati skup I-morfizama $f_i : X_i \longrightarrow A$ <u>višestruko funkcionalno spajanje</u> je objekt kategorije $\mathcal{K}$, označen sa

($\circledast_A R(X_j)$, r_i: $\circledast_A R(X_j) \longrightarrow R(X_i)$, $i = 1,2,\ldots$), pri čemu je

Prvo, $R(f_i) = R(f_{i+1})r_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots$; i

Drugo, za datu familiju morfizama m_i: $M \longrightarrow R(X_i)$ za koju je $m_i r_i = m_{i+1} r_{i+1}$ postoji jedinstveni morfizam t: $M \dashrightarrow \circledast_j R(X_j)$, takav da je $r_i t = m_i$.

3:3:28. <u>Stav</u>. Sukcesivno i višestruko spajanje su dobro definisani (objekti kategorije $\mathcal{K}$) limesi dijagrama (3:3:22) i (3:3:23).

3:3:29. <u>Stav</u>. Kategorija $\mathcal{K}$ ima sukcesivna spajanja ako i samo ako poseduje funkcionalna binarna spajanja, za sve posmatrane parove objekata.

3:3:30. <u>Napomena</u>. Iako rezultati operacija u nisu uvek slike nekog objekta relacione strukture funktorom R, odnosno moglo bi se reći proširenjem e posmatrane relacije R, rezultat se nalazi u širem okviru - vrsti funktorske kategorije u koju je uloženo funktorom ulaganja. U odeljku 3:5. biće pokazano pod kakvim strukturnim predpostavkama važe ovakve činjenice za operaciju spajanja, tj. kada je rezultat operacije spajanja slika nekog objekta kategorije I funktorom R.

Odvajanje strukture relacija u posebnu kategoriju, od njene konkretne interpretacije omogućava razmatranje odnosa (morfizama) između različitih relacija, njihovih različitih projekcija i rezultata pojedinih operacija.

3:4. Promena domena. Funktor evaluacije

3:4:1. Funktor $D: I \longrightarrow \mathcal{K}$,uveden je kao funktor koji određuje domene čvorova relacione strukture I. Promena domena je prirodna mono-transformacija $p: D \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D'$, gde je $D': I \longrightarrow \mathcal{K}$, takođe domen-funktor. Prirodna transformacija p određuje funktor

$$F_p: \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D')$$

koji proširenje $e: R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D$ preslikava u vertikalnu kompoziciju transformacija $pe: R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D'$.

3:4:2. Stav. Za funktor $F_p: \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D')$ postoji adjungovani funktor $G_p: \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D')$, definisan pridruživanjem

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "pe^R"] & & & R \times_{D'} D \arrow[d, "\hat{t}"'] \arrow[dr] & \\
 & D' \arrow[r, "G_p"] & {} & & D \\
R' \arrow[ur, "pe^{R'}"'] & & & R' \times_{D'} D \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Funkcionalno spajanje relacija definisano je u 3:2:4. Međutim, tako definisano spajanje je funktor, te je neophodno definisati kako taj funktor preslikava I-strelice i njihovu kompoziciju. Neka je $f: X \longrightarrow Y$ proizvoljna I-strelica. Morfizam $(R \times_{D'} D)(f)$ određen je konstrukcijom odgovarajućih vlaknastih proizvoda u domenu X i kodomenu Y i njihovom univerzalnošću, kao što se lako prati na dijagramu (3:4:4). Sada je

$$(R \times_{D'} D)(f): (R \times_{D'} D)(X) \longrightarrow (R \times_{D'} D)(Y)$$

i direktno se može pokazati da funktor čuva kompoziciju I-strelica, odnosno

$$(R \times_{D'} D)(fg) = (R \times_{D'} D)(f)\ (R \times_{D'} D)(g).$$

$$\begin{tikzcd}
RX \ast_{D^{\backprime}X} DX \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr, dashed, "(R \ast_{D^{\backprime}})(f)"] & RX \arrow[d] \arrow[drr, "Rf"] & & \\
DX \arrow[r] \arrow[drr, "Df"'] & DX \arrow[drr] & RY \ast_{D^{\backprime}Y} DY \arrow[r] \arrow[d] & RY \arrow[d] \\
& & DY \arrow[r] & DY
\end{tikzcd} \tag{3:4:4}$$

Funktor G_p pridružuje proširenju $R \xrightarrow{\cdot} D^{\backprime}$ proširenje $R \ast_{D^{\backprime}} D \longrightarrow D$ u kategoriji relacija $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D)$. Ko-jedinični dijagram adjungovanog para (F_p,G_p) ima sledeći oblik

$$\begin{tikzcd}
& D \\
A \ast_{D^{\backprime}} D \arrow[ur] & \\
R \arrow[u, dashed] \arrow[uur]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D^{\backprime} & & \\
& A \ast_{D^{\backprime}} D \arrow[ul] \arrow[r, "\varepsilon_A"] & A \arrow[ull, bend right] \\
& R \arrow[u, dashed] \arrow[uul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{3:4:5}$$

3:4:6. Napomena. Funkcionalno spajanje relacija (3:2:4. i 3:4:3.) dobro je definisano. Adjungovani par $(\Delta,P):\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^{\rightarrow\cdot\leftarrow}$ stepenovanjem sa I postaje adjungovani par

$$(\Delta^I,P^I):\ \mathcal{K}^I \longrightarrow (\mathcal{K}^{\rightarrow\cdot\leftarrow})^I = (\mathcal{K}^I)^{\rightarrow\cdot\leftarrow}$$

Iz ovako posmatranog adjungovanog para sledi egzistencija funktora $R \ast_{D^{\backprime}} D:\ I \longrightarrow \mathcal{K}$.

3:4:7. <u>Stav</u>. Neka je data promena domena $p\colon D \overset{\cdot}{\longrightarrow} D'$ za kategoriju $\mathcal{R}(D) := \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D)$. Tada, postoji monada $M = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ u kategoriji $\mathcal{R}(D)$ i postoji jedinstveni funktor $K\colon \mathcal{R}(D') \longrightarrow (\mathcal{R}(D))^M$, gde je $(\mathcal{R}(D))^M$ Kleisli-jeva kategorija monade M, tako da je

$$G_p^M K = G_p \quad \text{i} \quad KF_p = F_p^M .$$

Dokaz. S obzirom da svaka adjunkcija definiše monadu (1:4:8.) i adjungovani par $(F_p, G_p, \eta, \varepsilon)$ definisaće monadu M u $\mathcal{R}(D)$ na sledeći način: $G_pF_p\colon \mathcal{R}(D) \longrightarrow \mathcal{R}(D)$ je endofunktor definisan tako da morfizam $R \overset{\cdot}{\longrightarrow} S$ preslikava u prirodnu transformaciju $R *_{D'} D \overset{\cdot}{\longrightarrow} S *_{D'} D$ (3:4:2), jedinica adjunkcije je $\eta : 1 \overset{\cdot}{\longrightarrow} G_pF_p$, definisana sa $\eta(D) = D *_{D'} D$, a kojedinica $\varepsilon : F_pG_p \overset{\cdot}{\longrightarrow} 1$ pogodnom horizontalnom kompozicijom postaje prirodna transformacija $\mu = G_p\varepsilon F_p\colon (G_pF_p)^2 \overset{\cdot}{\longrightarrow} G_pF_p$.

Zaključak stava je da postoji jedinstveni funktor K, takav da komutiraju dijagrami:

(3:4:8)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(D') \arrow[rr, dashed, "K"] \arrow[d, shift left, "G_p"] & & (\mathcal{R}(D))^M \arrow[d, shift left, "G_p^M"] \\
\mathcal{R}(D) \arrow[u, shift left, "F_p"] & = & \mathcal{R}(D) \arrow[u, shift left, "F_p^M"]
\end{tikzcd}$$

Taj je zaključak posledica stava o poređenju adjungovanih parova sa M-algebrama (S.MacLane /1971/,str.138) na osnovu koga je funktor K definisan sa

$$K(R) = (G_p(R),\ G_p\varepsilon_R) = (R *_{D'} D,\ G_p\varepsilon_S)$$
$$K(R \overset{\cdot}{\longrightarrow} S) = G_p(t)\colon (R *_{D'} D,\ G_p\varepsilon_R) \longrightarrow (S *_{D'} D,\ G_p\varepsilon_S).$$

Jednostavno je proveriti da je K dobro definisan funktor, Jedinstvenost funktora K sledi iz činjenice da obe posmatrane adjunkcije imaju istu jedinicu η i da se na jedinstven način određuje odgovarajuća algebra.

3:4:9. Stav. Za kategoriju relacija $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D)$ postoji funktor evaluacije definisansa

$$V: \mathcal{R} \times I \longrightarrow (\mathcal{K} \downarrow D)$$

i to na objektima

$$V(e^R: R \xrightarrow{\cdot} D,\ X) = (R(X) \xrightarrow{e^R_X} D(X))$$

$$V(p: R \xrightarrow{\cdot} S,\ f: X \longrightarrow Y) = (S(f)p_X = p_Y R(f): R(X) \longrightarrow S(Y)),$$

ili u skraćenom obliku

$$V(R,X) = R(X)$$

$$V(p,\ f) = S(f)p_X = p_Y R(f).$$

Dokaz. Morfizam u domenu funktora V je par (p, f) gde je p prirodna transformacija za koju komutira dijagram(3:4:10) i $f: X \longrightarrow Y$ je strelica relacione strukture I.

(3:4:10)
$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "p"] \arrow[d, "e^R"'] & S \arrow[d, "e^S"] \\
D \arrow[r, "1"] & D
\end{tikzcd}$$

Otuda, V je dobro definisan funktor, čuva kompoziciju i jedinicu, što se direktno proverava. Znači, V je funktor. Dobra definisanost sledi iz komutativnosti dijagrama (3:4:11)

(3:4:11)
$$\begin{tikzcd}
 & RY \arrow[dr, "p_Y"] & \\
RX \arrow[ur, "R(f)"] \arrow[rr, dashed, "S(f)p_X = p_Y R(f)"] \arrow[dr, "p_X"'] \arrow[dd, "e^R_X"'] & & SY \arrow[dl, "S(f)"] \arrow[dd, "e^S_Y"] \\
 & SX & \\
DX & & DY
\end{tikzcd}$$

3:4:12. Lema. Neka je e: $R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D$ proširenje iz kategorije $\mathfrak{R}$. Tada je $\lim R = (R(\top), \nu)$, $\lim D = (D(\top), \mu)$, gde su $\nu : \Delta R(\top) \longrightarrow R$ i $\mu : \Delta D(\top) \longrightarrow D$ prirodne transformacije i postoji jedinstveni morfizam $\lim e = e_{\top} : \lim R \longrightarrow \lim D$ takav da je $\mu \Delta \lim e = e\nu$.

Dokaz. S obzirom da je $\top$ početni objekt relacione strukture I i prema tome jedinstven, svaki funktor R: I $\longrightarrow \mathcal{K}$ ima limes, naime $\lim R = R(\top)$ i očigledno, $\lim D = D(\top)$. Iz definicije limesa i limitirajućeg konusa sledi komutativnost dijagrama

$$
(3:4:13) \qquad
\begin{array}{ccc}
D(\top) & \xrightarrow[\nu]{\cdot} & D \\
{\scriptstyle \Delta e_{\top}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle e} \\
R(\top) & \xrightarrow[\mu]{\cdot} & R
\end{array}
$$

gde je $e = \lim e$ i $\Delta : \mathfrak{R}_{\mathcal{K}}(I,D) \longrightarrow (\mathcal{K}\downarrow D)$ dijagonalni funktor. Jedinstvenost morfizma e sledi iz univerzalnosti konusa ν i μ .

3:4:13. Lema. Za svaki $\mathfrak{R}$ -morfizam p: $R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S$ postoji jedinstveni $\mathcal{K}$ - morfizam limp: $\lim R \longrightarrow \lim S$ takav da je $\lim e' p = \lim e' \lim p = \lim e$, gde su e i e' proširenja redom funktora R i S.

Dokaz. Ako se u dijagramu (3:4:13), umesto relacije R posmatra relacija S, dijagram će takođe, komutirati. S obzirom da je proširenje p prirodna transformacija između relacija R i S, povezivanjem odgovarajućih dijagrama, jednostavno se uočava zaključak leme.

3:4:14. Stav. Neka je $E: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{K}^I\downarrow D$ funktor ulaganja kategorije relacija sa I-strukturom i domenom D u kategoriju $\mathcal{K}^I\downarrow D$. Neka je za svaki I-objekt A definisan funktor $H_A: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{K}\downarrow D$ sa

$$H_A: (t: R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S) \longmapsto (t_A: E(R)(A) \longrightarrow E(S)(A),$$

za bilo koji $\mathfrak{R}$ -morfizam $t: R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S$.

Tada je ko-limes funktora E par (D, v^R) gde je D domen-funktor, a $v^R\colon E(R) \xrightarrow{\cdot} D$ je prirodna transformacija.

Dokaz. Za svaki I-objekt A, par $(D(A), e_A^R\colon H_A(R) \longrightarrow D(A))$ definisan za svaki $\mathcal{R}$-objekt R, ko-limes je funktora H_A, i za bilo koji I-morfizam $f\colon A \longrightarrow B$ komutira dijagram

(3:4:15)
$$\begin{tikzcd}
H_A(R) \arrow[r, "e_A^R"] \arrow[d, "H_A(f)"] & D(A) \arrow[d, "D(f)"] \\
H_B(R) \arrow[r, "e_B^R"'] & D(B)
\end{tikzcd}$$

Neka je $L\colon I \longrightarrow \mathcal{K}{\downarrow}D$ funktor i neka je $w_R\colon E(R) \xrightarrow{\cdot} L$ prirodna transformacija definisana za svaki $\mathcal{R}$-objekt R i takva da za bilo koji morfizam $t : R \xrightarrow{\cdot} S$, $w_S E(t) = w_R$. Tada, za svaki $\mathcal{R}$-objekt R i svaki I-objekt A komutira dijagram

(3:4:16)
$$\begin{tikzcd}
 & H_A(R) = E(R)(A) \arrow[dl, "w_R(A)"'] \arrow[dd, "E(t)(A)"] \\
L(A) & \\
 & H_A(S) = E(S)(A) \arrow[ul, "w_S(A)"]
\end{tikzcd}$$

Na osnovu definicije ko-limes, za svaki objekt relacione strukture I, postoji jedinstveni morfizam $s(A)\colon D(A) \longrightarrow L(A)$ takav da je $s(A)v^R(A) = s(A)e_A^R = w_R(A)$, za svaku relaciju R. Očigledno, s je prirodna transformacija iz domena D u limes L i $sv^R = w_R$, što je trebalo dokazati.

Napomena. U kategoriji skupova, kolimes funktora ulaganja kategorije relacija sa I-strukturom u kategoriju $(\mathcal{J}\,{}^{I}{\downarrow}D)$ je domen-funktor D zajedno sa familijom prirodnih transformacija $v^R\colon R \xrightarrow{\cdot} D$. Funktor H_A je tzv. hom-funktor (S.MacLane /1971/ str.35) posmatran u ovim specifičnim uslovima.

3:5:1. Definicija. Proširenje $e: R \xrightarrow{\cdot} D$ iz kategorije $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(I,D)$ čuva limes funktora $V: G \longrightarrow I$, ukoliko su ispunjeni uslovi:

(L1) Ako je $\nu: \Delta \lim V \xrightarrow{\cdot} V$ limes funktora V, tada je

$$R(\nu): \Delta R(\lim V) \xrightarrow{\cdot} RV$$

limes funktora $RV: G \longrightarrow \mathcal{K}$.

(L2) Postoji mono-prirodna transformacija $\Delta \lim RV \xrightarrow{e_{\lim V}} DV$, tako da je

(L3) $e_V R(\nu) \cong e_{\lim V}$.

3:5:2. Stav. Proširenje $e: R \xrightarrow{\cdot} D$ čuva binarne fibrirane proizvode za one parove I-morfizama $X \longrightarrow A \longleftarrow Y$ za koje je $A \neq \perp\!\!\!\perp$ i postoji bar jedna od I-strelica $A \longrightarrow X$ ili $A \longrightarrow Y$.

Dokaz. Stav je neposredna posledica stavova 3:3:14. i 3:2:23.

3:5:3. Posledica. Ako su $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ i $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ kolekcije objekata za koje proširenje $e: R \xrightarrow{\cdot} D$ čuva vlaknaste proizvode, i ako čuva binarni vlaknasti proizvod za par objekata $\{X_1X_2 \ldots X_k, Y_1Y_2 \ldots Y_m\}$ tada e čuva i vlaknasti proizvod kolekcije $\{X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$.

Dokaz sledi indukcijom, primenjenom na slučaj izložen u Stavu 3:5:2.

3:5:4. Neka $/X * Y/$ označava sledeći uslov za par objekata X, Y relacione strukture I:

$$(\exists Z \neq \perp\!\!\!\perp)(X \longrightarrow Z \rightleftarrows Y).$$

Neka jednostavnosti radi $U(x) := X$, X je I-objekt, slika G-objekta x pod funktorom G.

3:5:5. Stav. Proširenje $e: R \xrightarrow{\cdot} D$ čuva vlaknasti proizvod (limes) funktora $U: G \longrightarrow I$ za one i samo one familije I-objekata za koje važe uslovi:

(1) Za svaki par I-objekata X i Y za koji je $\inf\{X,Y\} \neq \perp\!\!\perp$, i važi jedan od uslova $/X * Y/$ odnosno $/Y * X/$.

(2) Ne postoji konačna podkolekcija oblika $\{Z_1, Z_2, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ takva da za svako $k,l = 1,2$; $i,j = 1,2,\dots n$ važi uslov $/Y_i * Y_j/$ a ne važi $/Y_i * Z_k/$ i ne važi $/Z_k * Z_l/$.

Za dokaz stava neophodne su dve leme.

3:5:6. Lema. Neka je $\mathcal{X}$ familija I-objekata koji ispunjavaju uslov (1) stava 3:5:5. i neka postoji konačna podfamilija od $\mathcal{X}$ oblika datog u uslovu (2) stava .

Tada, za familiju objekata $\mathcal{X}$, $\lim RU(\mathcal{X}) \neq R\lim U(\mathcal{X})$.

Dokaz. Neka je G graf-kategorija dobijena kada se kategorija generisana familijom $\mathcal{X}$, zaboravnim funktorom preslika u kategoriju grafova. Neka je $X = Z(Y_1,\dots,Y_n)$. Ako bi A bio element zatvorenja, postoji I-objekt Z takav da

$$Z \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \cup\, Y_i \longrightarrow X \longrightarrow A,$$

te važi uslov $/Y_1 * A/$ što je kontradikcija predpostavci leme. Slično, ne može biti $/Y_n * B/$. Znači ni A ni B ne pripadaju zatvorenju. Činjenica da nisu ispunjeni uslovi $/A * B/$ i $/B * A/$ i predpostavke leme daju uslov $\inf A,B = \perp\!\!\perp$ te je binarni vlaknasti proizvod, na osnovu Stava 3:3:6, $R(A) \times_{\perp\!\!\perp} R(B) = R(A) \times R(B)$. Zato je,

$\lim R(V) = R(A) \times R(B) \times R(Y_1 Y_2 \dots Y_n)$, a

$R(\lim V) = R(ABY_1Y_2\dots Y_n)$, dakle biće $\lim R(V) \neq R(\lim V)$.

3:5:7. Lema. Pod uslovima Stava 3:5:5. za bilo koja dva I-objekta A i B postoji I-objekt C i podkolekcije $A = A_0, A_1, \dots, A_n = C$ i $C = B_0, B_1, \dots, B_m = B$, takve da je $/A_i * A_{i-1}/$, $/B_j * B_{j+1}/$ za indekse $i = 0,1,2,\dots,n-1$; $j = 0,1,2,\dots,m-1$.

Dokaz. Indukcijom na broj "međuobjekata" između A i B (na osnovu (1)), odnosno na najmanji broj objekata $A = Y_0, Y_1, \dots, Y_k = B$ takvih da je

$/Y_i * Y_j/$ za sve $i,j = 1,2,\ldots,k$. Ako je $k = 1$, $Y_k = B$ i očigledno, $B = C$. Neka je rezultat tačan za sve $k < i-1$. Na osnovu induktivne predpostavke postoji objekt Y' sa "međuobjektima" do A i do Y_{i-1}. Ukoliko je $/Y_{i-1} * B/$, dokaz je kompletan. Ako nije, neka je $/B * Y_{i-1}/$ i neka se između Y' i Y_{i-1} nalaze $C' = U_1,\ldots,U_r = Y_{i-1}$. Ako za neko i važi uslov $/U_i * B/$ može se staviti $C = C'$, i dokaz je kompletan.

U suprotnom, dokaz dalje sledi indukcijom po j. Naime, postoji neko $k_j \geq j$ tako da je $/B * U_{k_j}/$ i skup I-objekata $\{U_{k_j},\ldots,U_j\}$ ispunjava tražene uslove. Za $j = r$ rezultat je neposredan ako se stavi $k_r = n$. Neka je ispunjen uslov $/B * U_{k_{j+1}}/$ i neka familija objekata $\mathcal{U}$ ispunjava takav uslov za svaki par svojih elemenata. Iz predpostavke, $k_{j+1} \geq j+1$. Postoje I-morfizmi takvi da važi uslov $/U_j * U_{j+1}/$ te se na osnovu leme 3:4:22. primenjene na familiju $\{U_j, B, U_{k_{j+1}},\ldots,U_{j+1}\}$ može javiti jedan od sledećih slučajeva: (i) $/U_m * B/$, $j < m \leq k_{j+1}$; (ii) $/U_m * U_j/$, $j < m \leq k_{j+1}$; (iii) $/B * U_j/$ (iv) $/U_j * B/$.

Prvi i poslednji uslov su u kontradikciji sa predpostavkom (2) Stava 3:5:5. koja je data i u ovoj lemi. U drugom i trećem slučaju, na osnovu induktivnih predpostavki $k_j = j$. Može se u slučaju da ne postoje I-morfizmi takvi da je $/U_i * B/$, za svako i, stavljajući $j = 1$, primeniti $C = B$.

Dokaz Stava 3:5:5. Neka je $\mathcal{X}$ familija I-objekata za koju važi uslov (1) . Na osnovu uslova (2) Stava, postoji I-objekt Z_1 takav da postoje I-morfizmi takvi da je ispunjen uslov $/Z_1 * X/$, za svaki objekt X familije $\mathcal{X}$. Ako to ne bi bilo tačno, neka je Z_1 objekt takav da važi uslov $/Z_1 * X/$ za maksimalan broj elemenata familije $\mathcal{X}$ i neka je Z_2 takav I-objekt da ne važi uslov $/Z_1 * Z_2/$ Tada postoji, na osnovu leme 3:5:7., takav objekt Z da su ispunjeni uslovi $/Z * Z_1/$ i $/Z * Z_2/$, što je kontradikcija maksimalnosti broja objekata X za koje postoje I-morfizmi $/Z_1 * X/$. Tako se familija $\mathcal{X}$ može urediti u niz I-objekata $X_1, X_2,\ldots,X_n,\ldots$ tako da je $/X_i * X_j/$ za sve $i < j$. Indukcijom na broj i, na osnovu 3:5:3 ,imajući u vidu da je limitirajući konus funktora U dat prirodnom transformacijom $\nu : \Delta \lim U \cong \Delta U \mathcal{X} \longrightarrow U$, biće limes funktora $RV\colon G \longrightarrow \mathcal{K}$ odreden sa

$$(3:5:8)\qquad R(\nu)\colon \Delta R(\lim V) \cong \Delta R(\bigcup \mathcal{X}) \cong \Delta \lim RV \xrightarrow{\cdot} RV.$$

S obzirom da je $e\colon R \xrightarrow{\cdot} D$ mono-prirodna transformacija, za svaki I-objekt A, $e_A\colon RA \longrightarrow DA$ je monomorfizam u $\mathcal{K}$. Kako je i $\lim V$ objekt kategorije I, postoji monomorfizam

$e'_{\lim V}\colon R(\lim V) \longrightarrow DV$, i na osnovu (3:5:8)

$e_{\lim V}\colon \lim RV \longrightarrow DV$, te je ispunjen uslov (L2) definicije 3:4:17.

S obzirom da su pod uslovima Stava ispunjeni uslovi (L1) i (L2) definicije 3:5:1. komutiraju sledeći dijagrami

(3:5:9)

$$\begin{tikzcd} \lim V \\ W \arrow[u, dashed] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta \lim V \arrow[r, "\cdot"] & V \\ \Delta W \arrow[u, dashed] \arrow[ur] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta D \lim V \arrow[rr, "D(\nu)"] & & DV \\ \Delta \lim RV \cong \Delta R(\lim V) \arrow[u, "\Delta \lim e_V = \Delta e_{\lim V}"] \arrow[rr] & & RV \arrow[u, "e_V"'] \\ \Delta S \arrow[u, dashed] \arrow[urr] \end{tikzcd}$$

I $\qquad$ I^G $\qquad$ $\mathcal{K}^I$

za bilo koji I^G- morfizam $\Delta W \xrightarrow{\cdot} V$ i $\mathcal{K}^I$-morfizam $\Delta S \xrightarrow{\cdot} RV$. Tako je ispunjen i uslov (L3) definicije 3:4:17,

$e_V R(\nu) \cong \Delta\, e_{\lim V} D(\nu) = \Delta \lim e_V$.

Obrnuto, ako proširenje $e\colon R \xrightarrow{\cdot} D$ čuva sukcesivni vlaknasti proizvod za familiju I-objekata $\mathcal{X}$, treba pokazati da su važeći uslovi (1) i (2) Stava. Predpostavljajući suprotno, neka uslovi (1) i (2) ne važe. Ako ne važi uslov (1), e ne čuva vlaknaste proizvode na osnovu Stava 3:5:2. , a u slučaju da ne važi uslov (2), e ne čuva vlaknaste proizvode na osnovu Leme 3:5:6.

Napomena. Ideja o mono-epi faktorizaciji i njenoj vezi sa očuvanjem nekih limesa (S.Mac Lane /1971/, L.Coppey & R. Davar-Panah /1975/) bila je podsticaj za proučavanje odnosa limesa nekih funktora i prirodne transformacije -proširenja.U relacijskom modelu podataka inspirisanom aksiomima Armstrong-a /1974/ (A.V.Aho, C. Beeri & J.D.Ullman /1978/,J.Rissanen /1979/) proučavana je nezavisnost komponenti relacije u smislu mogućih "prirodnih" razlaganja. Stavovi 3:5:1. i 3:5:2. predstavljaju i suštinska i kategorijska uopštenja tih rezultata.

J.E.Fried i R.Wiegandt /1982/ proučavaju određene faktorizacije u svojim apstraktnim relacionim strukturama. Ali to su u stvari podobjekti i količnik - objekti kompletnih mreža sa strelicama koje čuvaju beskonačne supremume i glavne ideale, a ne razlaganje u ovde definisanom smislu.

L I T E R A T U R A

A.V.Aho, C.Beeri & J.D.Ullman /1978/ The theory of joins in relational databases, ACM Trans. on Database Systems, 4, 1978, 297-314.

W.W.Armstrong /1974/ Dependency structures of database relationships, Information Processing, 1974, North Holland, Amsterdam, 580-583.

M.Baar /1970/ Relational algebras, Lecture Notes in Math., 137, 1970, 39-55.

G.Birkhoff /1940/ Lattice theory, American Math. Society, Colloquium publications XXV, Providence, Rhode Island, 1940, 1-410.

H.B.Brinkmann & D.Puppe /1966/ Kategorien und Funktoren, Lecture Notes in Mathematics 18, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966, 1-125.

H.B.Brinkmann /1969/ Relations for exact categories, Journal of Algebra 13, 1969, 465-480.

M.S.Calenko /1967/ Relations for exact categories, Math.USSR Sb. 2, 1967, 501-520.

G.Conte /1981/ Symmetrizations of categories and categories of relations, Cahiers Top. et Geom. Diff. XXII -4, 429-437.

L.Copey & R.Davar-Panah /1975/ Decompositions et categories de relations, Cahiers Top. et Geom. Diff. XVI-2, 1975, 135-148.

C.Ehresmann /1966/ Categories structures generalises, Cahiers Top. et Geom. Diff. X-1, 1966, 139-168.

C.Ehresmann /1963/ Structures quotient, Comm. Math. Helv. 38,1963,219-283.

E.Fried & R.Wiegandt /1982/ Abstract relational structures I, Algebra Universalis, 15, 1982, 1-21.

H.Herrlich & G.E.Strecker /1974/ Category theory, Allyn & Bacon, 1974, 1-400.

Y.Kawahara /1973/ Relations in categories with pullbacks, Mem. Fac. Sci. Kjushu Univ. 27A, 1973, 149-173.

A.Klein /1970/ Relations in categories, Illinois Journal of Math. 14,1970, 536-550.

A.Klein /1971/ On categories of quotients, Procedings A.M.S. 30, 1971, 205-211.

H.Kleisli /1965/ Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors, Proc.Am. Math. Soc. 16, 1965, 544-546.

S.Mac Lane /1963/ An algebra of additive relations, Proc. Acad. Nat. Sci. U.S.A. 47, 1963, 1043-1051.

S.Mac Lane /1971/ Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971, 1-262.

E.G.Manes /1976/ Algebraic Theories, Springer-Verlag, New York -Heidelberg-Berlin, Graduate texts in Mathematics, 26, 1976, 1-356.

E.G.Manes /1972/ A pullback theorem for triples in a lattice fibering with applications to algebra and analysis, Algebra Universalis 2, 7-17.

J.M.Maranda /1966/ On fundamental constructions and adjoint functors, Canad.Math.Bull. 9,581-591.

B.Mitchell /1965/ Theory of Categories, Academic Press, New York, 1965, 1-284.

D.Puppe /1962/ Korrespondenzen in Abelschen Kategorien, Math. Ann. 148, 1962, 1-30.

J.Rissanen /1979/Independent components of relations, ACM. Trans.on Database Systems 2,4, 1979, 317-325.

Z.Semadeni & A.Wiweger /1979/ Theorie der Kategorien und Funktoren, Teubner-Texte zur Mathematik, 1979, 1-320.